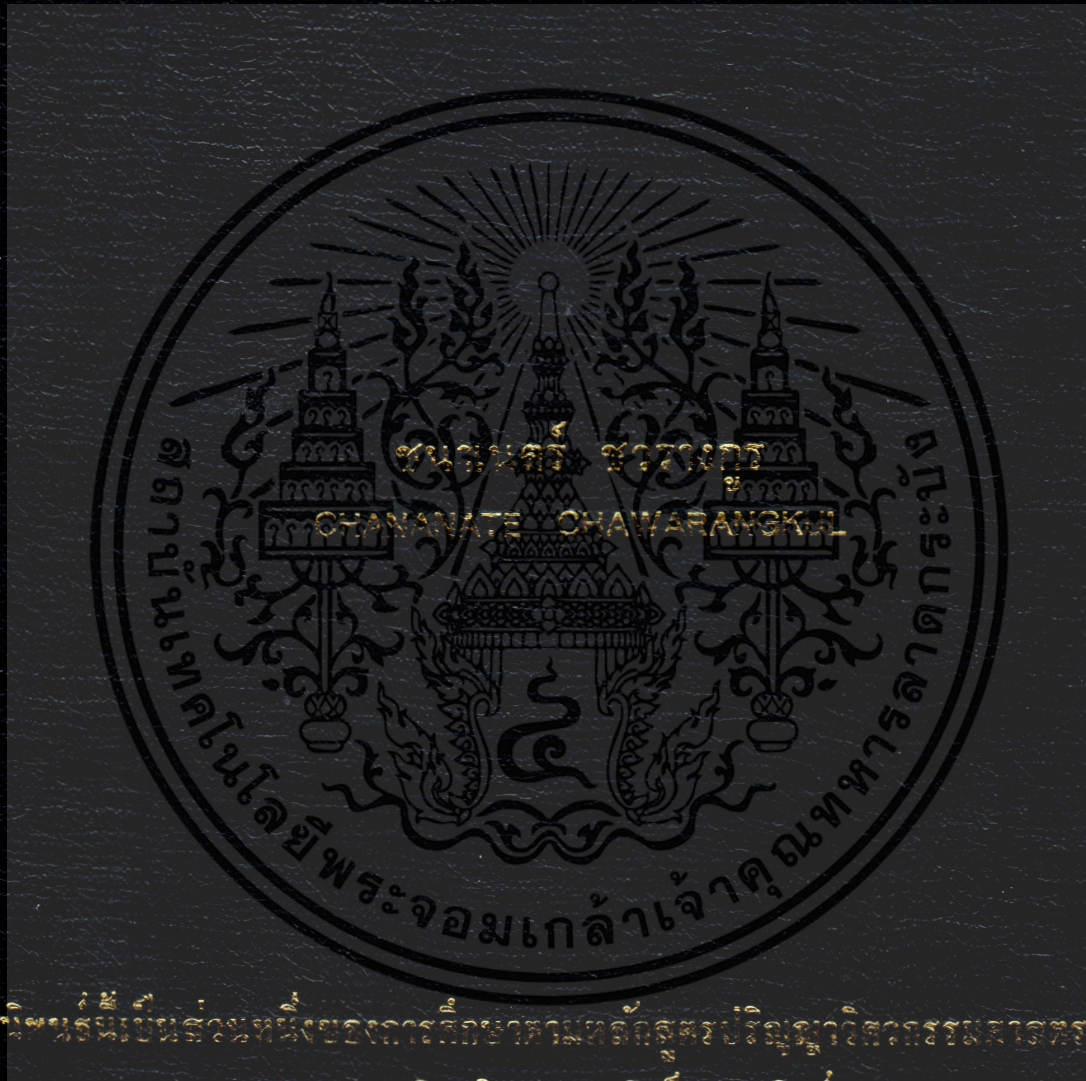


อัลกอริทึมแบบเร็วสำหรับการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทัล
ในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต

FAST ALGORITHMS FOR FRACTAL IMAGE ENCODING IN WAVELET
TRANSFORM DOMAIN



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าระดับปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2548

ISBN 974-15-1657-6

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

อัลกอริทึมแบบเร็วสำหรับการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล
ในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต

FAST ALGORITHMS FOR FRACTAL IMAGE ENCODING IN WAVELET
TRANSFORM DOMAIN



เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 60235
วัน,เดือน,ปี..2.7..สิ.ย..2549

b.....
i.....

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. 2548
ISBN 974 – 15 – 1657 – 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**FAST ALGORITHMS FOR FRACTAL IMAGE ENCODING IN WAVELET
TRANSFORM DOMAIN**

CHANANATE CHAWARANGKUL



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN ELECTRONIC ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2005

ISBN 974 – 15 – 1657 – 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2005

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	อัลกอริทึมแบบเร็วสำหรับการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต
นักศึกษา	ชานาเนตร์ ชวรางกูร
รหัสนักศึกษา	43061320
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์
พ.ศ.	2548
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันการประมวลผลกราฟแบบดิจิทัลมีบทบาทเพิ่มมากขึ้น ซึ่งข้อมูลภาพที่ได้นั้นมีขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงมีการพัฒนาวิธีการในการลดขนาดข้อมูลภาพ ซึ่งวิธีการเข้ารหัสแบบแฟร็กทอลก็เป็นวิธีหนึ่ง ซึ่งมีประสิทธิภาพในการลดข้อมูลภาพได้สูงกว่าวิธีอื่น อย่างไรก็ตามวิธีการดังกล่าวใช้เวลามากในการประมวลผล โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อนำมาบีบอัดข้อมูลภาพซึ่งมีขนาดใหญ่

ในงานวิจัยนี้ ได้ประยุกต์การลดขนาดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอลและการแปลงเวฟเล็ต เพื่อทำการลดเวลาในการประมวลผลลง โดยการค้นหาความเหมือนของภาพในโดเมนของการแปลงเวฟเล็ต และยังคงคุณภาพของภาพไว้

Thesis Title	Fast algorithms for Fractal image encoding in Wavelet transform domain
Student	Mr. Chananate Chawarangkul
Student ID.	43061320
Degree	Master of Engineering
Programme	Electronic Engineering
Year	2005
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr. Manas Sangworasil

ABSTRACT

Nowadays, digital signal processing (DSP) has become an important role. The performance of DSP is crucial to the performance of the imaging system. The problem associated with such a process is the large size of data of the picture. Therefore, image compression methods are developed. The Fractal image coding is one of the methods providing an advantage of efficiency over the others. However, the times of computation are seriously consumed, particularly when it is used to compress a large size of a portrait.

This research has applied the fractal image coding and the Wavelet transform to decrease computation time but also maintain the quality of the picture. The key is searching similarity of image in Wavelet transform domain. Test results show that this method is promising.

กิตติกรรมประกาศ

การจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้รับความสำเร็จไปด้วยดี เนื่องจากได้รับการสนับสนุนและกำลังใจจากบุคคลหลายฝ่าย ผู้เขียนขอขอบพระคุณ รศ.ดร. มนัส สังวรศิลป์ และอาจารย์ชินภัทร นันทจิวงกรชัย ที่ได้ดูแล เอาใจใส่ และให้คำปรึกษา ในแนวการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ตลอดจนการสนับสนุนที่ดีจากทางคุณพ่อ คุณแม่ น้าภา พี่ดาว และน้องกาญจน์ รวมทั้งเพื่อน ๆ รุ่นพี่ รุ่นน้อง แผนกวิชาช่างอิเล็กทรอนิกส์ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ที่คอยให้กำลังใจ ช่วยเหลือกันมาโดยตลอด ทุก ๆ คนที่กล่าวมาเป็นส่วนหนึ่งของชีวิตตลอดมา และขอขอบคุณ ศูนย์ทดสอบผลิตภัณฑ์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ (Electrical and Electronic Products Testing Center: PTEC) ซึ่งให้โอกาสในการทำงาน

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ผู้วิจัยขอบแต่ผู้มีพระคุณและผู้สนใจทุกท่าน

ชานาเนตร์ ชวรางกูร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VII
สารบัญรูป	VIII
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	1
1.3 สมมติฐานของการศึกษา	2
1.4 แนวคิดที่ใช้ในการวิจัย	2
1.5 ขอบเขตของการวิจัย	2
บทที่ 2 ทฤษฎีแฟร็กทอล	4
2.1 บทนำ	5
2.2 การแปลงแบบแอฟไฟน์	5
2.3 อิเทอร์เรทฟังก์ชันซิสเต็ม	6
2.4 รีเคอร์เรนซ์อิเทอร์เรทฟังก์ชันซิสเต็ม	16
2.5 พาร์ติชันอิเทอร์เรทฟังก์ชันซิสเต็ม	18
2.6 แบบจำลองของภาพ	19
บทที่ 3 ทฤษฎีเวฟเล็ต	
3.1 บทนำ	22
3.2 พื้นฐานของทฤษฎีเวฟเล็ต	24
3.3 ตัวแปลงเวฟเล็ต และคำจำกัดความ	26
3.4 การแปลงเวฟเล็ตผกผัน	29
3.5 อนุกรมเวฟเล็ตเต็มหน่วยเวลา	31
3.6 รูปแบบของการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยเวลา	31

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.7 การแปลงเวฟเล็ทความละเอียดหลายระดับ	31
บทที่ 4 การลดขนาดข้อมูลภาพพื้นฐาน	38
4.1 บทนำ	38
4.2 หลักการพื้นฐานของการลดขนาดข้อมูลภาพ	38
4.3 การแบ่งภาพในการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล	40
4.4 การลดขนาดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอลในสเปเชียลโดเมน	42
บทที่ 5 การปรับปรุงความเร็วการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในโดเมนการแปลงเวฟเล็ท	51
5.1 บทนำ	51
5.2 การแปลงภาพไปในโดเมนการแปลงเวฟเล็ท	51
5.3 การค้นหาความเหมือนของภาพในโดเมนการแปลงเวฟเล็ท	61
บทที่ 6 การทดลองและผลการทดลอง	63
6.1 บทนำ	63
6.2 อัลกอริทึมที่ใช้ในการทดลอง	63
6.3 ข้อมูลที่ใช้ในการทดลอง	63
6.4 การตรวจสอบและการวัดผล	65
6.5 การทดลองและผลการทดลอง	65
บทที่ 7 สรุปผลและแนวทางการพัฒนา	77
7.1 สรุปผลการทดลอง	77
7.2 ปัญหาที่พบ	78
7.3 แนวทางในการพัฒนา	78
เอกสารอ้างอิง	79
ภาคผนวก ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์	80

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ประวัติผู้เขียน 81



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
4.1 แสดงการหมุนภาพในรูปแบบต่าง ๆ	44
5.1 การใช้สัมประสิทธิ์ของการแปลงเวฟเล็ด แทนบล็อกรูปของภาพต้นฉบับ	54
5.2 แสดงลักษณะของสัมประสิทธิ์ในการหมุนรูปแบบต่าง ๆ	60
6.1 ผลการทดลองจากวิธีแบบแฟรกกทอล โดยใช้ภาพต้นแบบ “Lena”	66
6.2 ผลการทดลองจากวิธีแบบที่นำเสนอ โดยใช้ภาพต้นแบบ “Lena”	66
6.3 ผลการทดลองจากวิธีแบบแฟรกกทอล โดยใช้ภาพต้นแบบ “Mandrill”	68
6.4 ผลการทดลองจากวิธีแบบที่นำเสนอ โดยใช้ภาพต้นแบบ “Mandrill”	68
6.5 ผลการทดลองจากวิธีแบบแฟรกกทอล โดยใช้ภาพต้นแบบ “Milkdrop”	70
6.6 ผลการทดลองจากวิธีแบบที่นำเสนอ โดยใช้ภาพต้นแบบ “Milkdrop”	70



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 แสดงเครื่องทำสำเนาทำการทำสำเนารูปต้นฉบับทั้งหมด 3 ครั้ง โดยย่อแล้ววางในตำแหน่งที่ต่างกัน.....	4
2.2 แสดงการทำซ้ำ 3 ครั้งแรกของเครื่องทำสำเนาในรูปที่ 2.1	4
2.3 แสดงการทรานส์ฟอร์มแบบเชิงเส้นในระนาบ 2 มิติ.....	5
2.4 แสดงการทรานส์ฟอร์มของแอ็ทเทร็คเตอร์และผลลัพธ์ของการทรานส์ฟอร์ม.....	6
2.5 แสดงการทรานส์ฟอร์มในระนาบ.....	8
2.6 แสดงการประยุกต์การทรานส์ฟอร์มในรูปที่ 2.5 ของรูปสี่เหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยม.....	8
2.7 แสดงผลลัพธ์ของการทรานส์ฟอร์มของเครื่องทำสำเนาในขณะที่รูปไม่มีการเปลี่ยนแปลง.....	9
2.8 แสดงตัวอย่างทั้งหมด 3 ตัวอย่างของเซต A และเซต B และฮิสโตรอเฟดจ์เห็นซ์ ระหว่างเซต A และเซต B โดยแสดงด้วยเส้นสีดำที่ลากไว้.....	10
2.9 ก) แสดงการทรานส์ฟอร์ม W_1, W_2, W_3, W_4 ของส่วนที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยม ข) แสดงการทำซ้ำ 3 ครั้งแรกของ $W = U_{i=1}^4 W_i$	15
2.10 แสดงตัวอย่างของอินเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มของแอ็ทเทร็คเตอร์และ การทรานส์ฟอร์ม โดยแสดงเป็นรูปสี่เหลี่ยมรอบ ๆ แอ็ทเทร็คเตอร์.....	16
2.11 แสดงอินเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม โดยผสมกันระหว่างเฟิร์นและสามเหลี่ยมเซอร์พินสกี.....	17
2.12 แสดงผลลัพธ์ของแอ็ทเทร็คเตอร์ในรูปที่ 2.12	17
2.13 แสดงรีเคอร์เรนซ์อินเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม ประกอบด้วยอินเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม ของระนาบซึ่งไม่ติดกันโดยการแมประหว่างระนาบ.....	17
2.14 แสดงรูปไทกุระตะย (ก) เป็น โดเมนของพาร์ติชันอินเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มแสดง โดยโทนสีเทาและคำ (ข) เป็น โดเมนของการทรานส์ฟอร์มแสดงโดยโทนสีเทาและคำ.....	18
2.15 แสดงแมป W_i ทำการแมป D_i ไปยัง R_i	20
3.1 Morlet mother wavelet.....	22
3.2 รูปฟังก์ชันของ $y = \sin(5X)$	23
3.3 รูปฟังก์ชันของ $y = \exp(-.5x^2)$	23
3.4 Scaling and translation of mother wavelet.....	24
3.5 แสดงการแปลงเวฟเล็ตของสัญญาณ $f(x)$ ให้อยู่ในโดเมนของเวฟเล็ต g	26
3.6 กระบวนการแปลงเวฟเล็ต.....	28
3.7 กระบวนการแปลงเวฟเล็ตผกผัน.....	30

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.8 รูปแบบของกระบวนการ DTWS ที่มีค่าของการ scaling เท่ากับ 2.....	32
3.9 Wavelet decomposition ด้วย DWTS Block.....	32
3.10 รูปแบบของกระบวนการ IDWTS ที่มีค่าของการ scaling เท่ากับ 2.....	33
3.11 การรวมกลับเวฟเล็ตด้วย IDTWS Block.....	34
3.12 แสดงการแปลงเวฟเล็ตของข้อมูลภาพออกเป็น 4 sub band คือ AGG1 aGH1 aHG1 aHH1 (ส่วนที่เรเงา) ซึ่งองค์ประกอบทั้ง 4 นี้ยังคงมีจำนวนจุดข้อมูลรวมกันทั้งหมดเท่ากับภาพต้นฉบับแบบ (AO).....	37
4.1 แสดงการแบ่งภาพขนาด 16 x 16 เป็นส่วนๆ ขนาด 8x8 แบบไม่ซ้อนทับกัน.....	41
4.2 แสดงการแบ่งภาพขนาด 16 x 16 เป็นส่วน ๆ ขนาด 8x8 แบบซ้อนทับกัน 1 จุด.....	41
4.3 แสดงการแบ่งภาพแบบควอดทรี.....	42
4.4 แสดงการหาค่าต่ำสุดระหว่างภาพ R_i ของกราฟ $f \cap (R_i, x I)$ เหนือ R_i และภาพ $W_i(f)$ ของส่วนของกราฟเหนือ D_i	43
4.5 แสดงกระบวนการทำงานการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปเชียลโดเมน.....	46
4.6 แสดงกระบวนการในการค้นหาบล็อกในสเปเชียลโดเมน.....	47
4.7 แสดงขั้นตอนการถอดรหัสภาพในสเปเชียลโดเมน.....	49
5.1 ภาพต้นฉบับขนาด 256x256 จุดภาพ ที่ใช้ในการแปลงเวฟเล็ต.....	51
5.2 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน.....	52
5.3 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน และแนวตั้ง.....	52
5.4 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน และแนวตั้ง จำนวน 2 ครั้ง.....	53
5.5 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน และแนวตั้ง จำนวน 8 ครั้ง.....	53
5.6 แสดงตำแหน่งบล็อกใน sub band ของการแต่ละระดับการแปลงเวฟเล็ต.....	55
5.7 ตำแหน่งการย้ายตำแหน่งของเรนจ์บล็อกในสเปเชียลโดเมน หมายเลขบนบล็อกคือลำดับการย้ายบล็อกจาก 1 จนถึง 64.....	56
5.8 ตำแหน่งการย้ายตำแหน่งของเรนจ์บล็อกใน โดเมนการแปลงเวฟเล็ต หมายเลขบนบล็อกคือลำดับการย้ายบล็อก.....	56
5.9 ตำแหน่งการย้ายตำแหน่งของโดเมนบล็อกในสเปเชียลโดเมน.....	57
5.10 แสดงการเลื่อน (Shift) และทำการแปลงเวฟเล็ตเพื่อการย้ายตำแหน่งของโดเมนบล็อกในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต.....	58

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.11 การเข้ารหัสภาพในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต.....	61
6.1 ภาพต้นฉบับ (ก) ภาพ “Lena” (ข) ภาพ “Mandrill” และ (ค) ภาพ “Milkdrop”.....	64
6.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Lena”.....	66
6.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างการดำเนินการคำนวณและอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Lena”.....	66
6.4 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Mandrill”.....	67
6.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างการดำเนินการคำนวณและอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Mandrill”.....	67
6.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Milkdrop”.....	68
6.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างการดำเนินการคำนวณและอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Milkdrop”.....	68
6.8 ภาพผลลัพธ์ “Lena” ที่ได้จากการเข้ารหัสด้วยวิธีต่างๆ ที่ค่า PSNR สูงสุด (ก) ภาพต้นฉบับ (ข) วิธีแบบแฟร็กทอล (ค) วิธีที่นำเสนอ.....	69
6.9 ภาพผลลัพธ์ “Mandrill” ที่ได้จากการเข้ารหัสด้วยวิธีต่างๆ ที่ค่า PSNR สูงสุด (ก) ภาพต้นฉบับ (ข) วิธีแบบแฟร็กทอล (ค) วิธีที่นำเสนอ.....	70
6.10 ภาพผลลัพธ์ “Mindrop” ที่ได้จากการเข้ารหัสด้วยวิธีต่างๆ ที่ค่า PSNR สูงสุด (ก) ภาพต้นฉบับ (ข) วิธีแบบแฟร็กทอล (ค) วิธีที่นำเสนอ.....	71
6.11 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Lena”.....	67
6.12 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของภาพผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Mandrill”.....	67
6.13 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของภาพผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของ ภาพ “Milkdrop”.....	68

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันมีการนำข้อมูลในลักษณะภาพถ่ายดิจิทัล เข้ามาใช้ในสายงานต่าง ๆ มากมาย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง นำมาใช้ในลักษณะเป็นฐานข้อมูลสำหรับใช้ในการตรวจสอบหรืออ้างอิง หรือเป็นประวัติ เช่นภาพถ่ายทางการแพทย์ ภาพถ่ายในเพิ่มอาชญากรรม หรืองานทะเบียนต่าง ๆ เป็นต้น ข้อมูลภาพถ่ายดิจิทัลเหล่านี้ มักต้องการรายละเอียดสูง ขนาดใหญ่และอาจเป็นภาพสี ทำให้นอกจากต้องใช้เนื้อที่หน่วยความจำในการจัดเก็บแล้ว หากยังใช้เวลาในการส่งผ่าน หรือเรียกกลับมาใช้ใหม่เมื่อต้องการ มากเช่นกันด้วย

การวิจัยเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวที่ตีพิมพ์เผยแพร่ออกมาคือ ทำอย่างไรที่จะสามารถลดขนาดข้อมูลภาพเหล่านี้ ให้มีขนาดเล็กลงแต่ยังคงความสมบูรณ์ของข้อมูลข่าวสารที่จำเป็นต้องรักษาไว้ครบถ้วน

มีเทคนิคการลดข้อมูลภาพอยู่หลายวิธี ทั้งในกลุ่มที่มีการสูญเสียและไม่สูญเสียหรือแบบไฮบริดที่ใช้เทคนิคทั้งสองแบบดังกล่าวร่วมกันเพื่อให้ประสิทธิภาพการลดขนาดข้อมูล เช่นใช้พื้นฐานของการแปลง (transform) การแปลงเวฟเล็ต [13] กับเทคนิคเข้ารหัสแบบไม่มีการสูญเสีย เช่นการเข้ารหัสแบบฮัฟฟ์แมน [14] เป็นต้น

การเข้ารหัสแบบแฟร็กทัล (fractal) [3] – [11] เป็นอีกเทคนิคหนึ่งที่ถูกนำเข้ามาใช้ในการลดข้อมูลภาพ ทั้งแบบที่ประยุกต์โดยกับข้อมูลภาพ [5], [6], [9] – [11] หรือใช้ร่วมกับการแปลง [4], [7] – [8] ด้วยคุณสมบัติที่สามารถลดข้อมูลลงได้ในอัตราที่สูง มีขั้นตอนง่าย แต่ปัญหาของวิธีการนี้คือใช้เวลาในการเข้ารหัสค่อนข้างมาก จึงมีแนวคิดในการปรับปรุงความเร็วของการลดข้อมูลภาพที่ใช้พื้นฐานของแฟร็กทัล

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

งานวิจัยชิ้นนี้จัดทำขึ้น โดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้

1. เพื่อศึกษาวิธีการลดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทัลซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนของการประมวลผลต่าง ๆ ให้เข้าใจ และสามารถพัฒนาขั้นตอนการลดขนาดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทัลได้เอง
2. ปรับปรุงวิธีการลดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทัลโดยการลดปริมาณการดำเนินการคำนวณ (operation) ในการประมวลผลลง ทำให้ระบบโดยรวมสามารถทำงานได้เร็วขึ้น

3. ทดลองใช้วิธีที่ได้ปรับปรุงขึ้นมาประยุกต์ ใช้งานกับการประมวลผลภาพ (Image Processing) ให้ลดพื้นที่ที่ใช้จัดเก็บข้อมูลลง (Data Compression) และเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับวิธีการที่ใช้อยู่เดิม

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

เนื่องจากในขั้นตอนของการค้นหาโดเมนบล็อก (Domain block) ซึ่งคล้ายกันกับเรนจ์บล็อก (Range block) มากที่สุดนั้น เป็นการนำข้อมูลทั้งหมดมาทำการประมวลผล และในการค้นหาแต่ละครั้งในสเปซเชิงโดเมน (Spatial domain) จำเป็นต้องต้องมีการเปรียบเทียบในทุกจุดภาพในพื้นที่ของบล็อกทั้งสอง จึงเป็นสาเหตุทำให้ใช้เวลาในการประมวลผลมาก จึงตั้งข้อสมมติฐานว่า หากเราทำการแปลงให้อยู่ใน โดเมนการแปลงเวฟเล็ทก่อนสัมประสิทธิ์จากการแปลงที่สามารถแทนข้อมูลของโดเมนบล็อกและเรนจ์บล็อกจะมีเพียงแค่จุดเดียวในแต่ละ sub-band แล้วทำการประมวลผลสัมประสิทธิ์ของการแปลงนั้นแทน น่าจะเป็นวิธีลดปริมาณในการคำนวณรวมทั้งหมดลงได้ส่วนหนึ่ง และจะทำให้ความเร็วในการประมวลผลเพิ่มขึ้น

1.4 แนวคิดที่ใช้ในการวิจัย

แนวความคิดใหญ่ ๆ ที่ใช้ในการวิจัยนี้มี 2 เรื่องคือ

1. แนวคิดโดเมนการแปลงเวฟเล็ทเป็นอีกสิ่งหนึ่งที่สามารถแทนข้อมูลภาพได้ ซึ่งจะเป็นการแยกไปในระดับของความถี่ต่าง ๆ ซึ่งสามารถแทนข้อมูลของ โดเมนบล็อกและเรนจ์บล็อก เพื่อที่จะทำการค้นหาความเหมือนของบล็อกทั้งสองได้
2. การค้นหาโดเมนบล็อกซึ่งคล้ายกันกับเรนจ์บล็อกมากที่สุด ใน โดเมนของการแปลงเวฟเล็ท ด้วยข้อมูลที่น้อยกว่าการค้นหาในสเปซเชิงโดเมน

1.5 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของงานวิจัยนี้อยู่ที่การนำเสนอการลดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอลโดยใช้การค้นหาในโดเมนของการแปลงเวฟเล็ทที่พัฒนาให้สามารถประมวลผลได้เร็วยิ่งขึ้นเทียบกับวิธีการเดิม โดยทำการทดลองกับภาพขนาด 256x256 จุด แต่ละจุดจะมีความเข้มของระดับสีเทา 256 ระดับ โดยพิจารณาแบ่งรายละเอียดเนื้อหาของวิทยานิพนธ์ออกเป็น 7 บท แต่ละบทจะมีเนื้อหาดังต่อไปนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาตลอดจนวัตถุประสงค์ และขอบเขตของการวิจัย

บทที่ 2 กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานสำหรับการเข้ารหัสข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอล เพื่อให้เข้าใจแนวความคิดเบื้องต้นในการลดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอล เงื่อนไขต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการทำงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3 กล่าวถึงพื้นฐานทฤษฎีเวฟเล็ต เพื่อให้เข้าใจแนวความคิดเบื้องต้นในการลดข้อมูลภาพแบบเฟร็กทอล

บทที่ 4 กล่าวถึงการลดข้อมูลภาพพื้นฐานที่ใช้งานจริงในสเปเชียลโดเมน (Spatial Domain) และ การวัดความเหมือนกันของภาพ ขั้นตอนการทำงานต่าง ๆ ในการลดข้อมูล

บทที่ 5 นำเสนอวิธีการที่พัฒนาขึ้นมาจากค้นหาภาพในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต เพื่อเพิ่มความเร็วในการประมวลผล และ ใช้การแบ่งข้อมูลภาพแบบควอดทรีเข้ามาช่วยทำให้คุณภาพของภาพให้ดีขึ้น ขั้นตอนการทำงานของวิธีที่ได้พัฒนาขึ้น

บทที่ 6 เสนอผลการทดลอง โดยอธิบายถึงวิธีการที่ใช้ในการทดลอง ข้อมูลที่ใช้ในการทดลอง และผลการทดลองเปรียบเทียบ

บทที่ 7 บทสรุปและแนวทางการพัฒนา

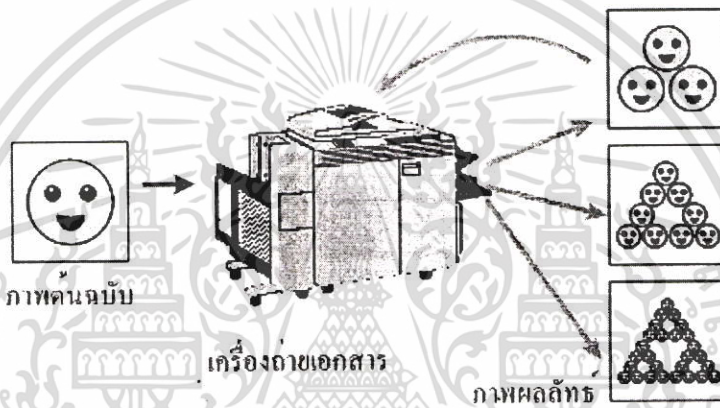


บทที่ 2

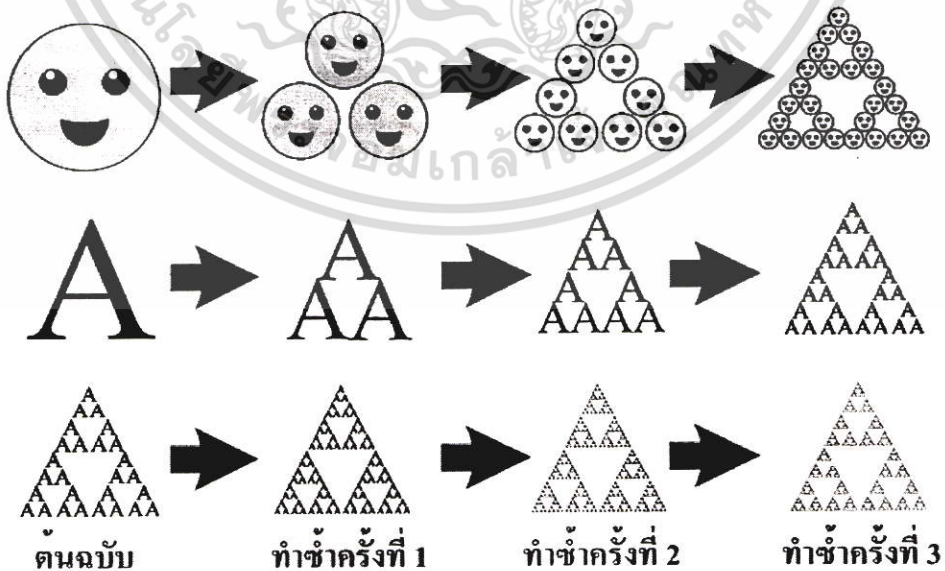
ทฤษฎีแฟร็กทอล

2.1 บทนำ

แฟร็กทอลในทางอุดมคตินั้นสามารถอธิบายอย่างง่าย ๆ โดยเปรียบเทียบกับการทำงานของเครื่องทำสำเนาที่มีใช้กันอยู่ในปัจจุบัน เมื่อนำเครื่องทำสำเนามาทำการย่อภาพต้นฉบับลง 50% แล้วทำสำเนาทั้งหมด 3 ครั้ง โดยทำการวางไว้ในตำแหน่งที่ต้องการดังรูปที่ 2.1 นำผลลัพธ์ที่ได้จากการทำสำเนาเป็นต้นฉบับอีกครั้งหนึ่ง โดยเปลี่ยนภาพต้นฉบับเป็นภาพต่าง ๆ จะได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.1 แสดงเครื่องทำสำเนาทำการทำสำเนารูปต้นฉบับทั้งหมด 3 ครั้ง โดยย่อแล้ววางในตำแหน่งที่ต่างกัน



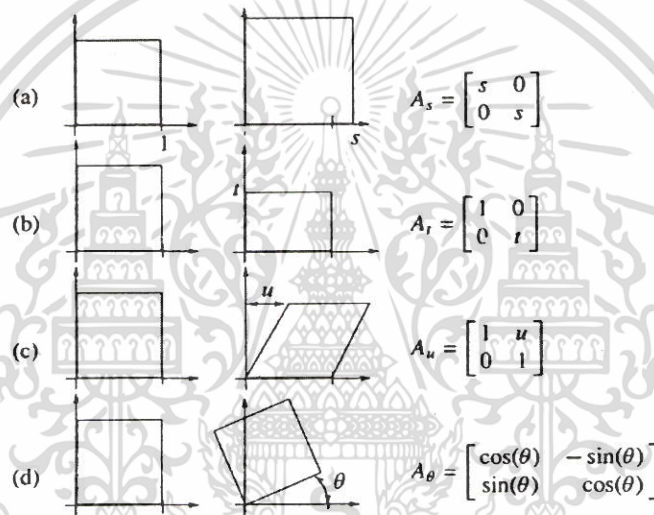
รูปที่ 2.2 แสดงการทำซ้ำ 3 ครั้งแรกของเครื่องทำสำเนาในรูปที่ 2.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะเห็นว่าเมื่อทำซ้ำไปเรื่อย ๆ ภาพผลลัพธ์จะลู่เข้าสู่ภาพ ๆ หนึ่ง โดยมีเงื่อนไขว่าต้องทำการย่อภาพต้นฉบับลงในอัตราส่วนเดียวกันและวางในตำแหน่งเดียวกัน ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากในการย่อแต่ละครั้งจุดของภาพต้นฉบับจะถูกทำให้ลดลงทุก ๆ จุด ดังนั้นภาพต้นฉบับจึงไม่มีผลต่อภาพผลลัพธ์สุดท้ายที่ได้มา กระบวนการเช่นนี้เรียกว่าแฟร็กทอล

2.2 การแปลงแบบแอฟไฟน์ (Affine transform)

ภาพผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการข้างต้น เปรียบเสมือนกับการนำภาพต้นฉบับมาทำการแปลง โดยวิธีการที่เรียกว่า การแปลงแบบแอฟไฟน์ การแปลงแบบนี้สามารถ เอียง ยืด หมุน ย่อ และขยายได้ ซึ่งรูปแบบต่าง ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงการแปลงแบบเชิงเส้นในระนาบ 2 มิติ

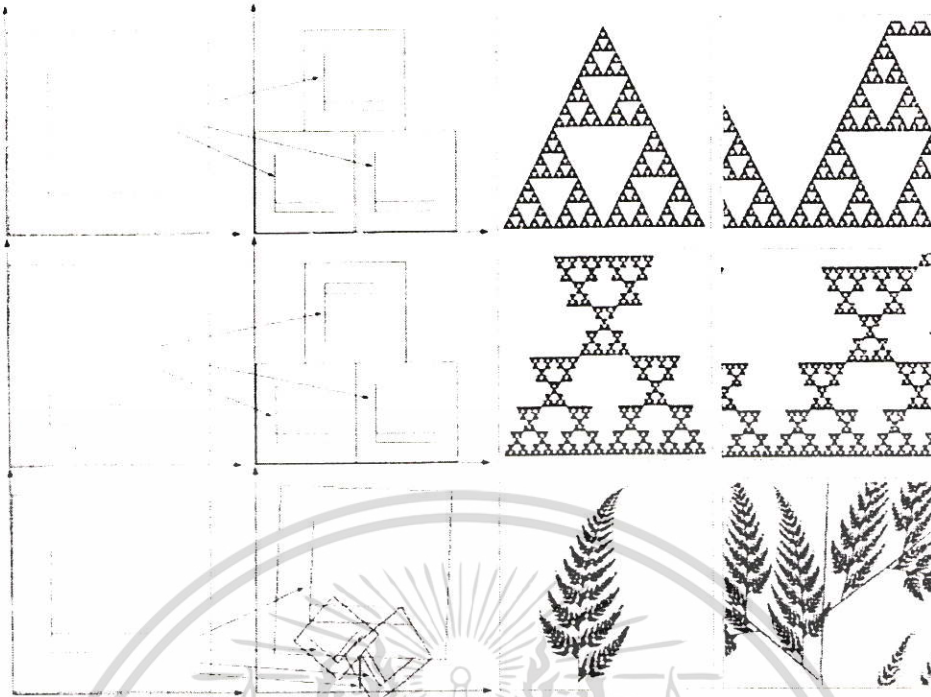
สามารถนำมาเขียนสมการการแปลงในระนาบ 2 มิติได้ดังนี้

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

ซึ่ง a_i, b_i, c_i, d_i เป็นค่าสำหรับปรับเปลี่ยนรูปแบบของการแปลงแบบแอฟไฟน์

e_i เป็นค่าสำหรับปรับตำแหน่งในแกน x

f_i เป็นค่าสำหรับปรับตำแหน่งในแกน y



รูปที่ 2.4 แสดงการแปลงของแอตแทรกเตอร์ (Attractor) และผลลัพธ์ของการแปลง

รูปที่ 2.4 แสดงผลของการแปลงแบบแอฟเฟนโดยแสดงภาพผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงภาพต้นฉบับและภาพขยายบางส่วนของภาพผลลัพธ์ ซึ่งแทนภาพต้นฉบับด้วย \square ในตัวอย่างที่หนึ่งเป็นการแปลงเหมือนเครื่องทำสำเนารูปที่ 2.1 โดยทำการย่อภาพต้นฉบับลง 50% และวางไว้ในตำแหน่งที่ต่างกัน 3 จุด และภาพในแต่ละตำแหน่งมีลักษณะการหมุนเหมือนกัน ตัวอย่างที่สองมีลักษณะคล้ายตัวอย่างที่หนึ่ง ต่างกันที่มีการแปลงโดยการกลับภาพ 1 แบบ ทำให้ภาพผลลัพธ์ที่ต่างกันอย่างออกไป และตัวอย่างสุดท้ายเป็นภาพใบเฟิร์นของนาย Bamsley ประกอบไปด้วย การแปลงทั้งหมด 4 แบบ

จากตัวอย่างทั้ง 3 ตัวอย่าง ในการแปลงแต่ละครั้งจะกระทำกับภาพต้นฉบับทั้งภาพ ซึ่งทำการย่อและหมุนในลักษณะต่าง ๆ จึงมีผลทำให้ในแต่ละระดับความละเอียดของภาพมีรายละเอียดของภาพทุกระดับ ภาพ ๆ นี้จึงเป็นแฟร็กทัล

2.3 อีเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม (Iterated function systems)

จากการสร้างภาพของเครื่องทำสำเนาในลักษณะเป็นวงรอบ ตามรูปที่ 2.1 ในทางคณิตศาสตร์เรียกว่า อีเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม (Iterated function system) ซึ่งประกอบไปด้วยชุดของคอนแทร็คทีฟทรานส์ฟอร์มเมชัน (Contractive transformation) $\{w_i : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2 \mid i = 1, \dots, n\}$ โดยแมป (map) บนระนาบ \mathcal{R}^2 ไปยังตัวเอง กำหนดให้แมป

$$W(\cdot) = \bigcup_{i=1}^n w_i(\cdot)$$

ถ้าให้เซต (set) S เป็นจุดในระนาบ เมื่อทำการคำนวณ $w_i(S)$ สำหรับแต่ละค่าของ i แล้วทำการรวมเซต เหล่านี้เข้าด้วยกัน จะได้เซตใหม่เป็น $W(S)$ ดังนั้น W ก็คือแมปบนสเปซ (space) ของเซต (subset) ของระนาบ เซตนี้จะหมายถึง ภาพซึ่งมีองค์ประกอบเป็นจุดภาพ โดยมีลักษณะสมบัติที่สำคัญ 2 ข้อคือ

1. เมื่อ w_i คอนแทร็คทีฟ (contractive) ในระนาบ W จะคอนแทร็คทีฟในสเปซของเซตของระนาบด้วย
2. ถ้าให้คอนแทร็คทีฟแมป W บนสเปซของภาพ และมีภาพ ๆ หนึ่งเรียกว่าแอ็ทแทร็คเตอร์ (attractor) มีสัญลักษณ์เป็น x_w มีคุณสมบัติดังนี้

- 2.1 ถ้าให้แอ็ทแทร็คเตอร์เป็นอินพุตของเครื่องทำสำเนาแล้วได้อาต์พุตมีขนาดเท่ากับอินพุต แอ็ทแทร็คเตอร์ x_w เรียกว่าฟิกซ์พอยซ์ (fixed point) ของ W คือ

$$W(x_w) = x_w = w_1(x_w) \cup w_2(x_w) \cup \dots \cup w_n(x_w)$$

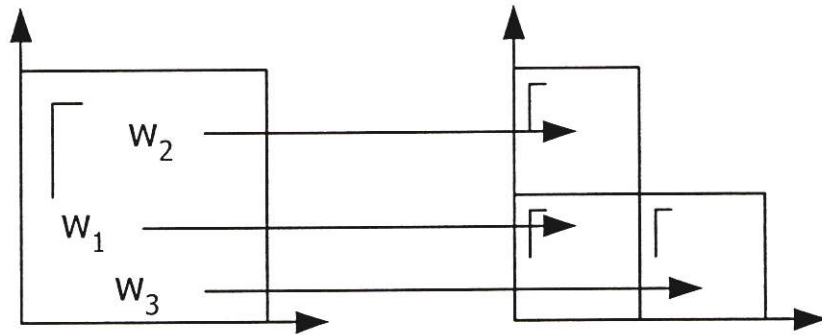
- 2.2 ให้ S_0 เป็นภาพต้นฉบับเมื่อทำสำเนาหนึ่งครั้งจะได้ $S_1 = W(S_0)$ สองครั้งจะได้ $S_2 = W(S_1) = W(W(S_0)) \equiv W^{o2}(S_0)$ สัญลักษณ์ “ o ” เป็นเครื่องหมายบอกถึงการซ้ำ ตัวอย่างเช่น $W^{o2}(S_0)$ หมายถึงเอาต์พุตได้จากการทำซ้ำครั้งที่สอง

$$x_w \equiv S_x = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(S_0)$$

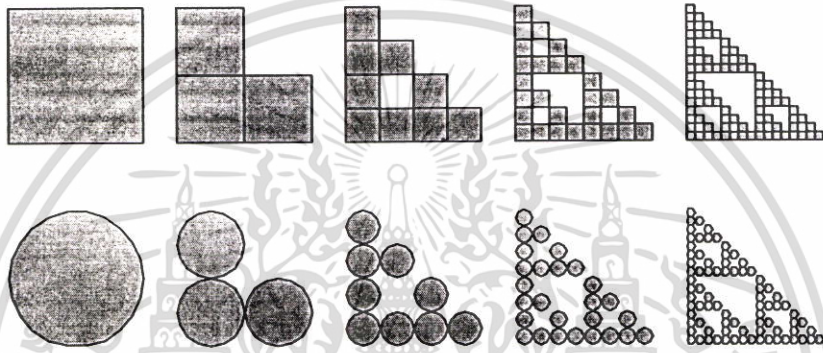
- 2.3 x_w จะยูนิค (unique) ถ้าทุก ๆ เซต S แปลงด้วย W ได้ $W(S) = S$ เมื่อ S เป็นแอ็ทแทร็คเตอร์ของ W นั่นคือ $S = x_w$ หมายความว่าไม่มีเซตเพียงเซตเดียวเป็นสมการฟิกซ์พอยซ์ในคุณสมบัติข้อที่ 1

คุณสมบัติทั้ง 3 ข้อข้างต้นนี้เรียกว่าทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปีงฟิกซ์พอยซ์ (The Contractive Mapping Fixed-Point Theorem)

จากหลักการที่กล่าวมาข้างต้นอิเทอร์เรตฟิงก์ชันซิสเต็มนั้นได้ถูกพัฒนาไปใช้ในการลดขนาดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอล โดยสามารถอธิบายได้ดังนี้



รูปที่ 2.5 แสดงการแปลงในระนาบ



รูปที่ 2.6 แสดงการประยุกต์การแปลงในรูปที่ 2.5 ของรูปสี่เหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยม

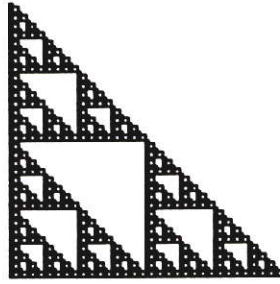
เริ่มด้วยตัวอย่างซึ่งคล้ายกับเครื่องทำสำเนาตั้งรูปที่ 2.5 แสดงการแปลง 3 แบบ

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

กระบวนการทำสำเนาประกอบด้วยการนำภาพต้นฉบับแปลงด้วย w_1, w_2 และ w_3 ตามลำดับ (สมมติให้ ภาพมีขนาดอยู่ระหว่างจุด $(0,0)$ และ $(1,1)$ ในระนาบ) แล้วนำภาพผลลัพธ์ที่ได้ กลับไปเป็นภาพต้นฉบับอีกครั้งหนึ่ง รูปที่ 2.6 แสดงภาพผลลัพธ์ของกระบวนการนี้ โดยใช้ภาพต้นฉบับเป็นรูปสี่เหลี่ยม และรูปวงกลม ภาพผลลัพธ์ที่ได้จะลู่เข้าสู่ภาพ ๆ หนึ่ง แสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 แสดงผลลัพธ์ของการแปลงของเครื่องทำสำเนาในขณะที่รูปไม่มีการเปลี่ยนแปลง

จากกระบวนการข้างต้น เมื่อทำการสังเกตจุดซึ่งอยู่ติดกัน จะเห็นว่าแมป w_i ทำให้ระยะห่างระหว่าง $P = (x, y)$ และ $Q = (u, v)$ มีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่าง $w_i(P)$ และ $w_i(Q)$ จากเหตุการณ์นี้ชี้ให้เห็นว่าเครื่องทำสำเนาทำการลดขนาดของ ภาพต้นฉบับ ก่อนได้เป็นภาพผลลัพธ์แล้วจะเกิดอะไรขึ้นเมื่อเครื่องทำสำเนาทำการขยายภาพต้นฉบับ ในกรณีนี้ จุดที่อยู่ติดกันจะขยายออกไปเรื่อย ๆ เพราะฉะนั้นภาพผลลัพธ์ของเครื่องทำสำเนาก็จะมีขนาดใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด ดังนั้น การทำงานของเครื่องทำสำเนาต้องทำการย่อภาพต้นฉบับลง ต่อไปจะทำการสังเกตว่าเกิดอะไรขึ้นเมื่อภาพต้นฉบับเป็นภาพที่ต่างกัน จากกระบวนการข้างต้นภาพต้นฉบับจะถูกลดขนาดลงไปเรื่อย ๆ ในการทำซ้ำแต่ละครั้ง เมื่อทำซ้ำถึงจุด ๆ หนึ่ง ภาพต้นฉบับจะถูกย่อลงไปเป็นจุด ๆ เดียว ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะภาพต้นฉบับ จะเป็นภาพอะไรก็ตาม ก็จะเข้าสู่ภาพ ๆ หนึ่งเสมอ เมื่อเครื่องทำสำเนาทำงานแบบลักษณะเป็นวงรอบ

เมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์ (Complete Metric Spaces)

เมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์ มีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะกำหนดขอบเขตของระนาบเป็นฟังก์ชันของแมปจากสเปซของขอบเขตของระนาบไปยังตัวเอง โดยขั้นแรกกำหนดเมตริกซ์ (metric) บนสเปซ จากนั้นคอนแทร็คทีฟแมปจะทำการคำนวณนิคฟังก์ชัน ซึ่งนิยามของ IFS ที่ใช้สัญลักษณ์ของเมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์และคอนแทร็คทีฟแมปคือ

นิยาม 2.1 เมตริกซ์สเปซคือเซต X ซึ่งเป็นค่าระยะทาง (distance) ของฟังก์ชัน $d : X \times X \rightarrow \mathcal{R}$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $d(a, b) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ $a, b \in X$
2. (identity) $d(a, b) = 0$ ถ้า $a = b$ สำหรับทุกค่าของ $a, b \in X$
3. (symmetry) $d(a, b) = d(b, a)$ สำหรับทุกค่าของ $a, b \in X$
4. (triangle inequality) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ สำหรับทุกค่าของ $a, b, c \in X$

ในที่นี้ฟังก์ชัน d แสดงในรูปของเมตริกซ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมตริกซ์สเปซเป็นเซตของจุด เมื่อทำการแทนค่าของจุด 2 จุดในเซตลงในฟังก์ชัน จะได้ระยะทาง โดยที่ค่าในเซตนั้น สามารถเป็นได้ทั้งจุดและภาพ

ฮัสโตรฟเมตริกซ์ (Hausdorff Metric)

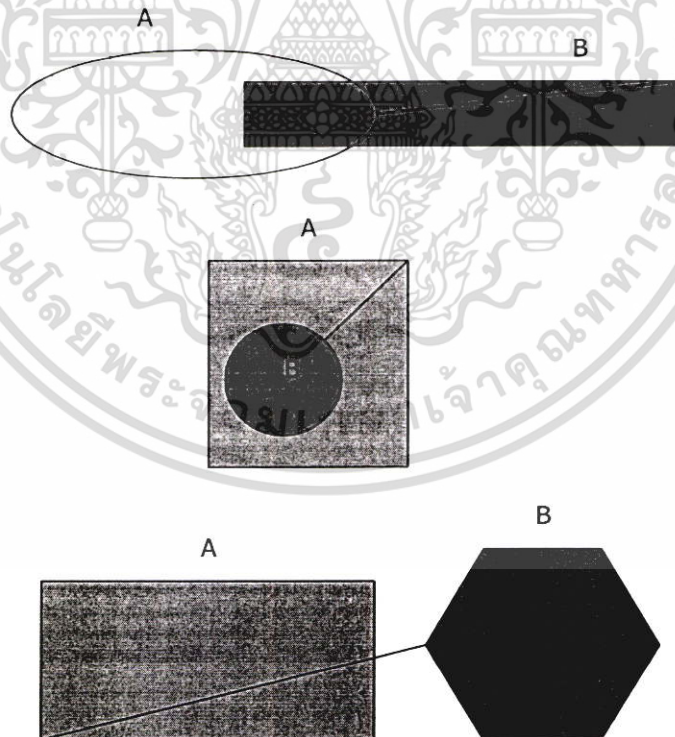
ฮัสโตรฟเมตริกซ์ (H) เป็นเมตริกซ์ที่แสดงถึงระยะทางระหว่างภาพ 2 ภาพ โดยที่วิธีการหาระยะห่างฮัสโตรฟ $h(A, B)$ ระหว่าง 2 เซตของระนาบคือ A และ B มีวิธีการดังนี้

1. สำหรับแต่ละจุด x ของ A หาจุด y ที่ใกล้ที่สุดใน B วัดระยะที่น้อยที่สุด โดยใช้สมการระยะห่างยูคลีเดียน (Euclidean distance) ดังนี้

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

สมการนี้เป็นสมการที่ใช้วัดระยะห่างระหว่างจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

2. เลือกค่าที่มากที่สุดจากการวัดจุด x เทียบกับจุด y ที่ได้ จะได้ระยะห่างฮัสโตรฟ ดังแสดงในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แสดงตัวอย่างทั้งหมด 3 ตัวอย่างของเซต A และเซต B และฮัสโตรฟดิซแทินซ์ ระหว่างเซต A และเซต B โดยแสดงด้วยเส้นสีดำที่ลากไว้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.2 ลำดับของจุด $\{x_n\}$ ในเมตริกซ์สเปซถูกเรียกว่าลำดับโคซี (Cauchy sequence) ถ้าทุกค่าของ $\varepsilon > 0$ และ N เป็นจำนวนเต็ม

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ สำหรับทุกค่าของ } n, m > N$$

นิยาม 2.3 เมตริกซ์สเปซ X จะสมบูรณ์ ถ้าทุก ๆ ลำดับโคซีใน X ลู่เข้าสู่จุด ๆ หนึ่ง ใน X

ลำดับโคซีเป็นลำดับของจุด ซึ่งลู่เข้าสู่จุด ๆ หนึ่ง โดยนิยามของลำดับโคซีนั้นขึ้นอยู่กับการวัดระยะเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ลำดับ $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{p}{q}, \frac{p+2q}{p+q}, \dots$ นี้ลู่เข้า ในขณะที่ ลำดับ $1, 2, 3, 4, \dots$ นั้นไม่ลู่เข้า แสดงให้เห็นว่าเมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์นั้น เป็นสเปซซึ่งไม่มีช่องว่างหรือไม่มีตำแหน่งใดที่ไม่มีค่า ตัวอย่างเช่น เซตของตัวเลขข้างต้น โดยใช้ $d(x, y) = |x - y|$ ในการสร้าง แต่ค่าที่ได้นี้ไม่เป็นเมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์เพราะว่าลำดับข้างต้นจะลู่เข้าสู่ค่า $\sqrt{2}$ ซึ่งไม่ถูกต้องตามหลักเกณฑ์

คอนแทรคทีฟแมปกับอเพอเรเตอร์ฟังก์ชันซิสเต็ม (Contractive Maps and IFS's)

นิยาม 2.4 ให้ X เป็นเมตริกซ์สเปซด้วยเมตริกซ์ d และแมป $w: X \rightarrow X$ เป็นลิปชิตซ์ (Lipschitz) โดยมีค่าลิปชิตซ์แฟกเตอร์เป็น s โดยที่ค่า s เป็นค่าจำนวนจริงที่เป็นค่าบวก

$$d(w(x), w(y)) \leq sd(x, y)$$

สำหรับทุกค่าของ $x, y \in X$ ถ้าลิปชิตซ์แฟกเตอร์ที่เหมาะสมมีค่าน้อยกว่า 1 ($s < 1$) เมื่อนั้น w จะคอนแทรคทีฟด้วยค่า s ตัวอย่างเช่น

- ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เป็นลิปชิตซ์บนช่วงปิด $[1, 2]$ แต่ไม่เป็นในช่วงเปิด $(0, 1)$ ในช่วงปิด $[1, 2]$, $|f(x) - f(y)| = |1/x - 1/y| = |(x - y)/(xy)| \leq |x - y|$ แต่ในช่วงเปิด $(0, 1)$ ความชันของ f จะไม่มีขอบเขต จึงทำให้ $|1/x - 1/y|$ มีค่าใหญ่มาก ๆ ดังนั้นค่าของ $|x - y|$ จึงมีค่าน้อยกว่า
- ถ้า f ไม่ต่อเนื่องแล้ว f จะไม่เป็นลิปชิตซ์เพราะว่าถ้ามีจุดที่ไม่ต่อเนื่องระหว่าง x และ y แล้ว ถึงแม้ x และ y เข้าใกล้กันแต่ $f(x)$ และ $f(y)$ จะยังคงแยกจากกันอยู่
- ถ้า $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ โดย $f(\bar{x}) = A\bar{x} + \bar{b}$ แล้ว f จะเป็นลิปชิตซ์ ในความเป็นจริงการกระทำใดที่เป็นเชิงเส้นบนมิติของเวกเตอร์สเปซที่มีขอบเขตแน่นอนเป็นลิปชิตซ์เสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Lemma 2.1 ถ้า $f : X \rightarrow X$ เป็นลิปชิตซ์แล้ว f จะต่อเนื่อง

แมปจะคอนแทร็คทีฟถ้านำมาซึ่งจุดที่ใกล้เคียงกัน คอนแทร็คทีวิตี (contractivity) s จะเป็นเครื่องวัดว่าจุด 2 จุดนั้นมีค่าใกล้เคียงกันมากเพียงไร ตัวอย่างเช่น เมื่อพิจารณาแมป $f(x) = x/2$ บนเส้นจำนวนจริง แมปนี้จะคอนแทร็คทีฟเพราะว่าดิซแท้นซ์ระหว่าง $f(x)$ และ $f(y)$ ไม่มีค่ามากไปกว่าครึ่งหนึ่งของระยะห่างระหว่าง x และ y ถ้าเลือกค่า x เริ่มต้นและทำการทำซ้ำ f โดยทำการคำนวณ $f(x), f(f(x)), f^{\circ 3}(x), \dots$, เมื่อนั้นค่าจะลู่เข้าสู่ $0 = f(0)$ นี่ก็คือคุณสมบัติโดยทั่วไปของคอนแทร็คทีฟแมป ถ้าทำการทำซ้ำจากทุกจุดเริ่มต้นที่ต่างกัน จะลู่เข้าสู่ค่า ๆ หนึ่งเสมอ

ในขณะที่ทุกคอนแทร็คทีฟแมปมียูนิคฟิกซ์พอยซ์แต่ไม่ใช่ทุกแมปที่มียูนิคฟิกซ์พอยซ์จะคอนแทร็คทีฟ ตัวอย่างเช่น $x \mapsto 2x$ มีเพียง 0 เท่านั้นที่ทำให้คอนแทร็คทีฟได้ ตัวอย่างของคอนแทร็คทีฟแมป

1. ถ้า $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ กำหนดโดย $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{B}$ ซึ่ง A คือ เมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ \vec{x}, \vec{B} เป็นเวกเตอร์ เมื่อนั้น f จะคอนแทร็คทีฟ

2. ให้ $w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n$ เป็นกลุ่มของคอนแทร็คทีฟทรานส์ฟอร์มเมชัน ดังนั้น เราสามารถกำหนดแมป $W : H(\mathbb{R}^2) \rightarrow H(\mathbb{R}^2)$ โดย

$$W(S) = \bigcup_{i=1}^n w_i(S) \quad (2.1)$$

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า $w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ คอนแทร็คทีฟด้วยคอนแทร็คทีวิตี s_i สำหรับ $i = 1, \dots, n$ เมื่อ $W = \bigcup_{i=1}^n w_i : H(\mathbb{R}^2) \rightarrow H(\mathbb{R}^2)$ คอนแทร็คทีฟในฮัสโตรฟเมตริกซ์ ด้วยคอนแทร็คทีวิตี $s = \max_{i=1, \dots, n} \{s_i\}$

จาก ทฤษฎีบท 2.1 แสดงว่าเมื่อเครื่องทำสำเนาทำการย่อขนาดของรูปต้นฉบับ ผลลัพธ์ของกระบวนการที่ได้มาแสดงว่า W คอนแทร็คทีฟในสเปซของภาพเพราะว่าคอนแทร็คทีฟแมป $x \mapsto x/2$ มียูนิคฟิกซ์พอยซ์ เป็น 0 ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากทุกจุดที่เริ่ม ดังนั้นคอนแทร็คทีฟแมป W จะมียูนิคฟิกซ์พอยซ์ โดยที่เริ่มจากภาพใด ๆ ก็ตาม

ทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปีงฟิกซ์พอยซ์

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปีงฟิกซ์พอยซ์) ให้ X เป็นเมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์ และ $f : X \rightarrow X$ เป็นคอนแทร็คทีฟแมป เมื่อ ยูนิคพอยซ์ $x_f \in X$ สำหรับทุก ๆ จุดของ $x \in X$

$$x_f = f(x_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)$$

จุดนี้จะเรียกว่าฟิกซ์พอยท์หรือแอ็ทแทร็คเตอร์ของแมป f

พิสูจน์

เลือก $x \in X$ สำหรับ $n > m$

$$d(f^{\circ m}(x), f^{\circ n}(x)) < s d(f^{\circ m-1}(x), f^{\circ n-1}(x)) < s^m d(x, f^{\circ n-m}(x)) \quad (2.2)$$

ใช้ triangle inequality ทำซ้ำ หลาย ๆ ครั้ง

$$\begin{aligned} d(x, f^{\circ k}(x)) &\leq d(x, f^{\circ k-1}(x)) + d(f^{\circ k-1}(x), f^{\circ k}(x)) \\ &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(f(x))) + \dots + \\ &\quad d(f^{\circ k-1}(x), f^{\circ k}(x)) \\ &\leq (1 + s + \dots + s^{k-2} + s^{k-1}) d(x, f(x)) \\ &\leq \frac{1}{1-s} d(x, f(x)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

สามารถเขียนสมการ 2.2 ได้เป็น

$$d(f^{\circ m}(x), f^{\circ n}(x)) < \frac{s^m}{1-s} d(x, f(x))$$

และเนื่องจาก $s < 1$ ทำให้สมการด้านซ้ายสามารถทำให้มีค่าน้อยพอ ๆ กันได้ ถ้า m และ n มีค่ามาก หมายความว่า ลำดับ $x, f(x), f(f(x)), \dots$ เป็นลำดับ โคซีและเนื่องจาก X เป็นเมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์ ทำให้ $x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)$ อยู่ใน X จาก Lemma 2.1 คอนแทร็คติวิตี้ของ f แสดงว่า f นั้นต่อเนื่อง ดังนั้น $f(x_f) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n+1}(x) = x_f$

ซึ่งถ้ายูนิคอย่างแท้จริงแล้ว สมมติให้ x_1 และ x_2 เป็นฟิกซ์พอยท์จะได้

$$d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

จากทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปิงฟังก์ชันพ้อยซ์จะได้ว่า

$$d(x, x_f) \leq \frac{1}{1-s} d(x, f(x))$$

นี่คือผลที่เกิดขึ้นหลังจากทำการใส่ลิมิตจาก k ไปยัง ∞ ในสมการที่ 2.3

อย่างไรก็ตาม ไม่จำเป็นที่ f ที่คอนแทร็คทีฟต้องมีฟังก์ชันพ้อยซ์สำหรับทุกแอ็ทแทร็คเตอร์ของ X ตัวอย่างเช่น ในการทำการซ้ำเพียงไม่กี่ครั้งของ f จะเป็นคอนแทร็คทีฟ ซึ่งนำไปสู่ทฤษฎีที่กล่าวไว้ข้างต้น เช่นเดียวกันไม่จำเป็นที่ f จะคอนแทร็คทีฟ สำหรับทุก n ที่มีค่ามาก ถ้า f คอนแทร็คทีฟ สำหรับบางค่าของ n แล้วจะเรียกว่าเป็นอีเวนชวลลีคอนแทร็คทีฟ (eventually contractive) ซึ่งเป็นไปได้ที่ $W = \cup w_i$ จะเป็นอีเวนชวลลีคอนแทร็คทีฟ ถ้าบางแมป w_i ที่ไม่คอนแทร็คทีฟ

นิยาม 2.5 ให้ f เป็นลิปชิตซ์ฟังก์ชัน ถ้ามีตัวเลข n จะได้ว่า f^n เป็นคอนแทร็คทีฟ เมื่อเรียก f ว่าเป็นอีเวนชวลลีคอนแทร็คทีฟ แล้วตัวเลข n จะเรียกว่า ด้วยกำลังของอีเวนชวลลีคอนแทร็คทีฟ (eventually contractivity)

แฟรกทอลเป็นฟังก์ชันพ้อยซ์

ทำการประยุกต์ใช้ทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปิงฟังก์ชันพ้อยซ์ โดยให้ w_1, \dots, w_n เป็นคอนแทร็คทีฟทรานส์ฟอเมชัน s เมื่อแมป $W = \cup w_i$ เป็นคอนแทร็คทีฟและกำหนดยูนิคฟังก์ชันพ้อยซ์ใน H ตัวอย่างเช่น เลือก w_i ซึ่งเป็นการแปลงแบบแอฟไฟน์ในระนาบ ในกรณีฟังก์ชันพ้อยซ์ x_w เป็นซับเซตของระนาบ ซึ่งเป็นแฟรกทอล

นิยาม 2.6 ให้ X เป็นเมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์ อีเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มจะเป็นกลุ่มของคอนแทร็คทีฟแมป $w_i : X \rightarrow X$, สำหรับ $i = 1, \dots, n$

ดังนั้น อีเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มเป็นเพียงกลุ่มของแมป ซึ่งกำหนดยูนิคแอ็ทแทร็คเตอร์จากทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปิงฟังก์ชันพ้อยซ์และจุดซึ่งเป็นแอ็ทแทร็คเตอร์เป็นยูนิคระนาบได้จากแมป W ปัญหาในการเข้ารหัสภาพก็คือ ถ้ามีเซต S จะหาอีเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มที่แอ็ทแทร็คเตอร์เป็น S ได้อย่างไร ซึ่งทางออกของปัญหานี้ก็คือ สมการฟังก์ชันพ้อยซ์

$$x_w = W(x_w) = w_1(x_w) \cup \dots \cup w_n(x_w)$$

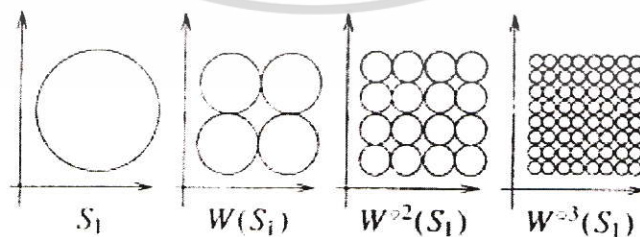
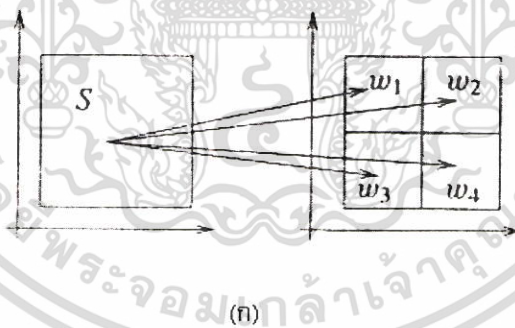
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$d(S, x_w) \leq \frac{1}{1-s} d(S, W(S))$$

สมการแรกบอกว่าฟิซซ์พ้อยซ์ นั้นได้มาจากการแปลงสำเนาของตัวเอง โดยทำกับเซต S และทำการแปลงโดยใช้คอนแทร็คทีฟทรานส์ฟอร์มชันแล้วทำการสร้างเซต S ใหม่มายูเนียนของฟิซซ์พ้อยซ์ นั้นเป็นสิ่งที่สำคัญมาก เพราะว่าถ้าสามารถหา W ที่เหมาะสมกับ $S = W(S)$ แล้วทำให้ $S = x_w$ นั่นคือ S เป็นแอ็ทแทรกเตอร์ของ W สมการที่สองบอกว่า ไม่สามารถวางชิ้นส่วนให้พอดีกับเซต S ได้อย่างแน่นอน ทางที่ดีที่สุดในกรณีนี้คือเลือกแอ็ทแทรกเตอร์ที่ใกล้เคียงกับเซต S เดิม และกลุ่มของ $W(S)$ ซึ่งเป็นเซต S ที่ถูกสร้างขึ้นมานั้นก็คือเลือกแอ็ทแทรกเตอร์ที่ใกล้เคียงกับเซต S เดิมมากที่สุด

ทางออกของการคำนวณนี้ก็คือ เลือก W ซึ่งทำให้ S มีขนาดเล็กลง ในกรณีนี้ $d(S, W(S))$ จะเล็กลง และทำให้ $d(S, x_w)$ จะเล็กลงตามไปด้วย โดยที่การทำเช่นนี้ ไม่สามารถทำได้กับเทอมของ $\frac{1}{1-s}$ ที่มีค่ามาก ๆ ดังนั้น จะไม่รู้ว่าจะเป็นอย่างใด ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว ในกรณีนี้ $d(S, x_w)$ จะมีค่ามาก



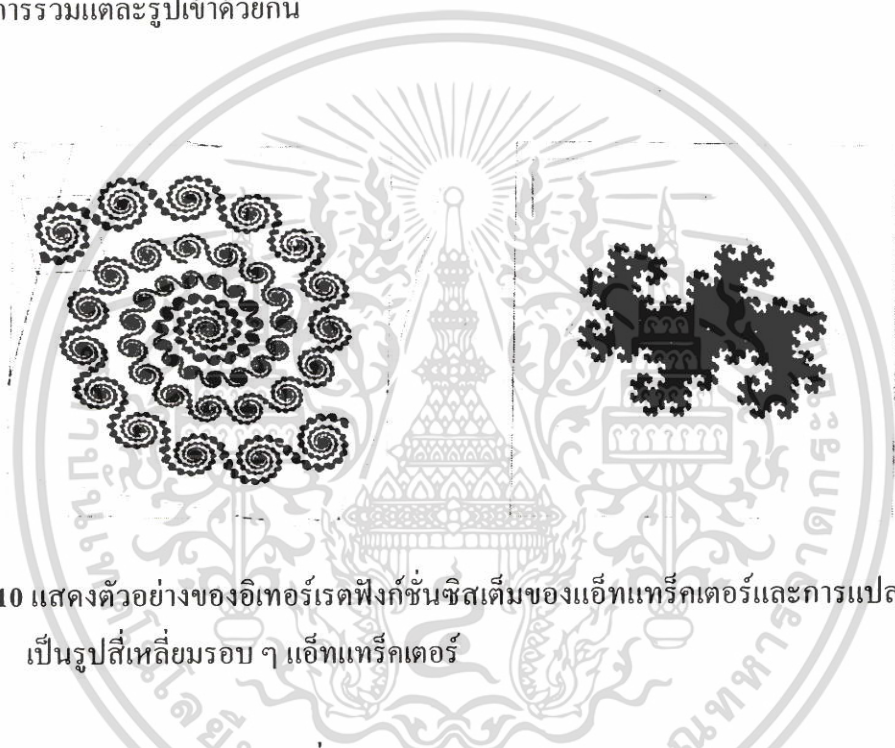
รูปที่ 2.9 ก) แสดงการแปลง w_1, w_2, w_3, w_4 ของส่วนที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยม

ข) แสดงการทำซ้ำ 3 ครั้งแรกของ $W = \bigcup_{i=1}^4 w_i$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 2.9 แสดงตัวอย่างง่าย ๆ ในการใช้สมการฟังก์ชันพ้อยซ์ ให้เซต S เป็นสี่เหลี่ยม ซึ่งประกอบด้วยสำเนาของตัวเองสี่ส่วน ที่ถูกลดลงไปครึ่งหนึ่ง สมการการแปลง w_1, w_2, w_3 และ w_4 แสดงในรูปที่ 2.9ก แสดงให้เห็นว่า $S = w_1(S) \cup w_2(S) \cup w_3(S) \cup w_4(S) = W(S)$ ซึ่งหมายความว่าฟังก์ชันพ้อยซ์ของ W คือ S รูปที่ 2.9ข แสดงการทำซ้ำ 3 ครั้งแรก จะเห็นว่าการทำซ้ำ ลู่เข้าสู่ S ตามขั้นตอนของทฤษฎีคอนแทรกทีฟแมปปิงฟังก์ชันพ้อยซ์

รูปที่ 2.10 แสดงตัวอย่างของอ็ทเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มแสดงให้เห็นฟังก์ชันพ้อยซ์และการแปลง จากรูปการแปลงจะแสดงด้วยรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งเป็นรูปของสี่เหลี่ยมรูปใหญ่ การหมุนของ ภาพ แสดงด้วย Γ ในแต่ละรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะทำการแปลงโดยการลดขนาดของภาพทั้งภาพ แล้วทำการรวมแต่ละรูปเข้าด้วยกัน

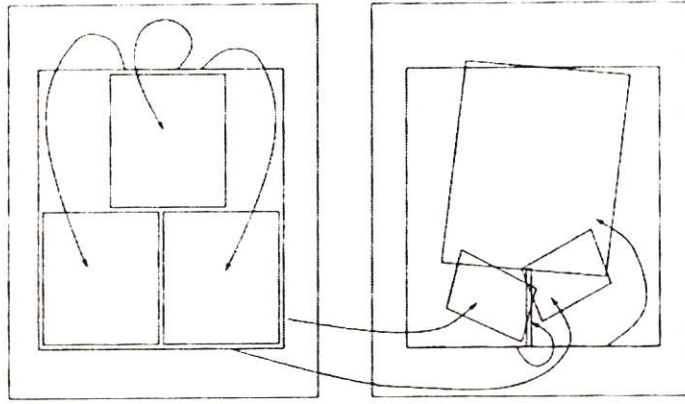


รูปที่ 2.10 แสดงตัวอย่างของอ็ทเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มของแอ็ทเทอร์เรตเตอร์และการแปลงโดยแสดง เป็นรูปสี่เหลี่ยมรอบ ๆ แอ็ทเทอร์เรตเตอร์

2.4 รีเคอร์เร็นซ์อ็ทเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม (Recurrent Iterated Function Systems)

ในบางครั้งเพื่อที่จะสร้างเฟิร์นการสร้างจากสามเหลี่ยมเซอร์พินสกี (Sierpinski triangles) นั้นง่ายกว่าที่จะสร้างเฟิร์นขึ้นมาอย่างเดียวและเมื่อคิดตามขั้นตอนแล้วการทำงานของอ็ทเทอร์เรต ฟังก์ชันซิสเต็ม จะทำ 2 อย่างพร้อมกันได้แก่

1. สร้างอ็ทเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มสำหรับสามเหลี่ยมเซอร์พินสกีก่อน แล้วทำการป้อนผลลัพธ์ ที่ได้นี้เป็นต้นฉบับของการทำครั้งต่อไป
2. อ็ทเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มทำหน้าที่สำหรับการทำสำเนา เพื่อให้เฟิร์นสมบูรณ์ โดยแสดงใน รูปที่ 2.11 และผลลัพธ์ของแอ็ทเทอร์เรตเตอร์แสดงในรูปที่ 2.12

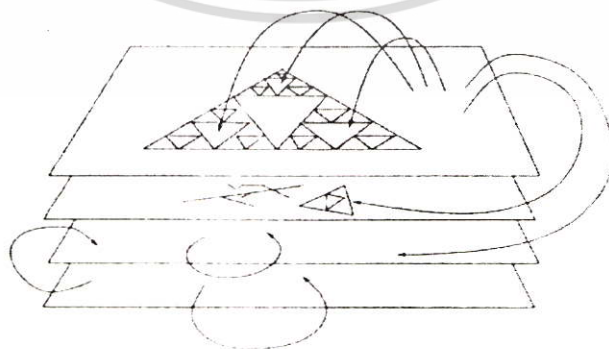


รูปที่ 2.11 แสดงอิเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มโดยผสมกันระหว่างเฟิร์นและสามเหลี่ยมเซอร์พินสกี



รูปที่ 2.12 แสดงผลลัพธ์ของแอ็ทแทร็คเตอร์ในรูปที่ 2.11

โดยที่โครงสร้างทั่วไป สำหรับกำหนดขั้นตอนการทำงานที่จินตนาการหมายเลขของ
ระนาบที่ไม่ต่อเนื่องกัน ซึ่งในแต่ละระนาบจะมีอิเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มอยู่แล้วทำการแมประหว่าง
ระนาบดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แสดงรีเคอร์เรนซ์อิเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม ประกอบด้วยอิเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มของ
ระนาบซึ่งไม่ติดกันโดยการแมประหว่างระนาบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีที่ใช้ในการสร้างเฟิร์นจากสามเหลี่ยมเซอร์พินส์นี้เรียกว่าการทำรีเคอร์เร็นซ์ไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็ม ซึ่งทำการแมปจากระนาบหนึ่งไปยังอีกระนาบหนึ่ง สามารถเขียนสมการในการแมปได้ดังนี้

$$W(A_1, \dots, A_n) = (U_j W_{1j}(A_j), \dots, U_j W_{nj}(A_j))$$

จากทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปิงฟังก์ชันซิสเต็ม W จะมียูนิคฟังก์ชันซิสเต็มเป็น $x_\infty = (A_1, \dots, A_n)$

2.5 พาร์ติชันไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็ม (Partitioned Iterated Function Systems)

พาร์ติชันไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็มเป็นการนำไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็มมาใช้ในการสร้างแฟร็กทอลแต่ต้องกำหนดค่าต่าง ๆ มากกว่าทั่ว ๆ ไป ในการหากลุ่มของแมป w_1, \dots, w_n จะนำไปสู่การแปลง $W = \cup w_i$ โดยแสดงให้เห็นว่ามีฟังก์ชันซิสเต็ม ซึ่งแสดงว่า W คอนแทร็คทีฟโดยพยายามเลือกแอ็ทแทร็คเตอร์ที่มีความใกล้เคียงกันมากที่สุด



รูปที่ 2.14 แสดงรูปไทฮูกระต่าย (ก) เป็น โดเมนของพาร์ติชันไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็มแสดงโดยโทนสีเทาและดำ (ข) เป็น โดเมนของการแปลงแสดงโดยโทนสีเทาและดำ

พาร์ติชันไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็ม มีพื้นฐานมาจากไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็ม ในพาร์ติชันไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็มนี้ โดเมน w_i จะถูกจำกัดไว้ ทำให้ง่ายขึ้นในการเข้ารหัสภาพสำหรับภาพซึ่งไม่เหมือนกันในตัวเอง ตัวอย่างเช่น รูปไทฮูกระต่าย ในรูปที่ 2.14 ยากที่จะใช้ไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็มแต่จะทำได้ง่ายขึ้นเมื่อใช้พาร์ติชันไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็มในการแปลงโดยสามารถสร้างสามเหลี่ยม 2 อันของรูปไทฮูกระต่าย แยกกันโดยใช้นิยามดังนี้

นิยาม 2.7 ให้ X เป็นเมตริกซ์สเปซที่สมบูรณ์ และให้ $D_i \subset X$ สำหรับ $i = 1, \dots, n$ พาร์ติชันไอเทอเรตฟังก์ชันซิสเต็มเป็นกลุ่มของคอนแทร็คทีฟแมป $w_i : D_i \rightarrow X$ สำหรับ $i = 1, \dots, n$

การใช้ทฤษฎีคอนแทร็คทีฟแมปปิงฟังก์ชันพอยซ์ในการกำหนดยูนิคฟังก์ชันพอยซ์ สำหรับพาร์ติชันอินเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็มนั้นไม่สามารถทำได้ในเงื่อนไขทั่วไป เนื่องจากโดเมนถูกจำกัดไว้ ซึ่งจุดเริ่มต้นนั้นเป็นสิ่งสำคัญมาก ถ้าไม่ระมัดระวังอาจจะได้เซตว่าง เมื่อทำซ้ำไป 1 ครั้ง

2.6 แบบจำลองของภาพ (Image Model)

ในการเข้ารหัสภาพแบบโมโนโครม (monochrome) ที่ไม่ใช่รูปขาวดำ เป็นซับเซตของระนาบภาพที่พูดถึงนี้ก็คือ รูปภาพระดับสีเทาโดยจะทำการวิเคราะห์รูปแบบนี้ ในวิธีการวัดสเปซ (measure spaces), ข้อมูลของจุดภาพ (pixelized data)

การวัดในรูปแบบของภาพ (Measure as Image Models)

ภาพ สามารถแสดงเป็นการวัด μ ในระนาบ ซึ่งกรณีนี้ ความเข้มสามารถวัดบนซับเซต A ของระนาบ โดย

$$\mu(A) = \int_A d\mu$$

การพูดถึงภาพโดยใช้สมการนี้ ไม่สามารถมองเห็นภาพได้ว่าความเข้มของจุดของภาพนั้นมีค่าเท่าใด ตัวอย่างเช่น ในการวัดความเข้มของแสงต่อพื้นที่

ข้อมูลของจุดภาพ (Pixelized Data)

ภาพนั้นแสดงด้วยกลุ่มของจุด ในแต่ละค่าของจุดนั้นจะมีค่าระหว่าง 0 ถึง 255 ใช้แทนเป็นภาพระดับสีเทา จำนวนของบิตต่อจุดใช้เก็บค่าของจุดเพื่อใช้แสดงถึงความละเอียดของภาพที่เป็นระดับสีเทาและผลรวมของจุดสามารถแสดงถึงความละเอียดของภาพ ซึ่งกระบวนการของคอมพิวเตอร์สามารถทำงานได้กับข้อมูลแบบนี้

ดังนั้นในการแปลงแบบเอ็ฟไฟน์จึงจำเป็นต้องเพิ่มแกน z ขึ้นมาเพื่อแทนค่าของระดับสีเทาสามารถเขียนเป็นสมการการแปลงในระนาบ 3 มิติได้ดังนี้

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ o_i \end{bmatrix}$$

ซึ่ง a_i, b_i, c_i, d_i เป็นค่าสำหรับปรับเปลี่ยนรูปแบบของการแปลงแบบแอฟไฟน์

e_i เป็นค่าสำหรับปรับตำแหน่งในแกน x

f_i เป็นค่าสำหรับปรับตำแหน่งในแกน y

s_i เป็นค่าสำหรับปรับความคมชัดของภาพ

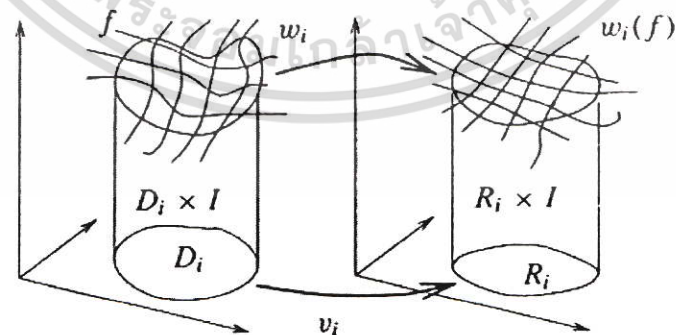
o_i เป็นค่าสำหรับปรับความสว่างของภาพ

จากสมการการแปลงแบบแอฟไฟน์ข้างต้น จะสังเกตเห็นว่า z ไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่ง x และ y ของ w_i ดังนั้นถ้าเลือก w_i ที่คอนเท็กซ์ทีฟในแกน z ซึ่ง $s_i < 1$ เมื่อนั้น $W = \cup_i w_i$ จะคอนเท็กซ์ทีฟสามารถอธิบายการแปลงในระนาบ 3 มิติได้ดังนี้

ให้ D_1, \dots, D_n และ R_1, \dots, R_n เป็นซับเซตของ I^2 เรียกว่าโดเมนและเรนจ์ ซึ่งเป็นคาร์ทีเซียน โปรดัคต์ (Catesian product) $D_i \times I$ และ $R_i \times I$

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งแทนค่าของระดับสีเทาในแกน z ทำการแมป w_1, \dots, w_n ในรูปแบบของพาร์ติชันอ็อบเจกต์เรดฟังก์ชันซิสเต็ม โดยมีแนวความคิดว่า w_i มีโดเมนที่จำกัด โดยที่ $w_i(f) = w_i(x, y, f(x, y))$

ดังนั้นจุดภาพเหนือโดเมนคือ $f \cap (D_i \times I)$ และจุดภาพเหนือเรนจ์คือ $f \cap (R_i \times I)$ เมื่อทำการแมปโดเมนไปยังเรนจ์จะทำให้ $f \cap (D_i \times I)$ เท่ากับ $f \cap (R_i \times I)$ แสดงดังรูปที่ 2.15 ได้มาจาก $\cup_{i=1}^n w_i(f)$



รูปที่ 2.15 แสดงแมป w_i ทำการแมป D_i ไปยัง R_i

โดยความแตกต่างระหว่างภาพ 2 ภาพแบบ Root mean square metric เขียนแทนด้วย rms metric ถ้า

ให้ $x = (x_1, \dots, x_n)$ และ $y = (y_1, \dots, y_n)$ เป็นภาพ rms metric สามารถคำนวณได้โดย
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$d_{rms}(x, y) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

ในทางปฏิบัติ ค่าของอัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (Peak Signal-to-noise Ratio เขียนแทนด้วย PSNR) ใช้วัดความแตกต่างระหว่างภาพ 2 ภาพ หาได้จาก

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{b}{rms} \right)$$

ซึ่ง b คือค่าที่มากที่สุดของสัญญาณ (255) และ rms คือค่าความแตกต่างระหว่างภาพ 2 ภาพโดยใช้ค่าความแตกต่างแบบรากที่สองของค่าเฉลี่ยของค่ายกกำลังสองและ PSNR มีหน่วยเป็นเดซิเบล (dB) วิธีการนี้เป็นวิธีการที่ใช้มากที่สุดในการหาความแตกต่างของภาพ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การแปลงเวฟเล็ต

3.1 บทนำ

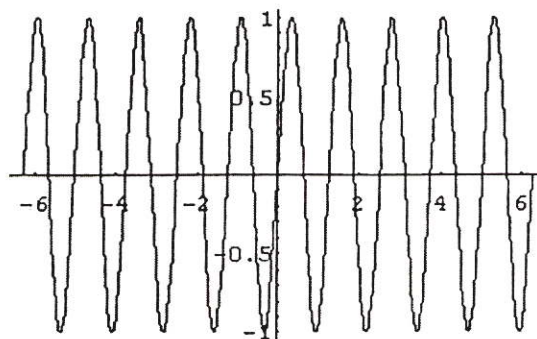
ทฤษฎีเวฟเล็ต (Wavelet theory) เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายถึง โมเดลของ สัญญาณ ระบบ หรือกระบวนการ โดยใช้เซตของสัญญาณที่มีลักษณะเฉพาะ เป็นองค์ประกอบ พื้นฐาน โดยจะเรียกว่า เซตของเวฟเล็ต (Wavelet set) สมาชิกในเซตของเวฟเล็ตนี้ จะมีลักษณะ สำคัญ คือ เป็นสัญญาณที่เกิดจากต้นแบบอันเดียวกัน ต้นแบบของสัญญาณในเซตของเวฟเล็ตนี้ จะ เรียกว่า เวฟเล็ตแม่ (Mother wavelet)

เวฟเล็ตจะมีลักษณะเป็นสัญญาณที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้น ๆ หรือกล่าวคือ เวฟเล็ตเป็นฟังก์ชันที่ เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง และมีขนาดที่ลดลงสู่ศูนย์ ในทั้งสองด้าน ดังแสดงในรูปที่ 3.1

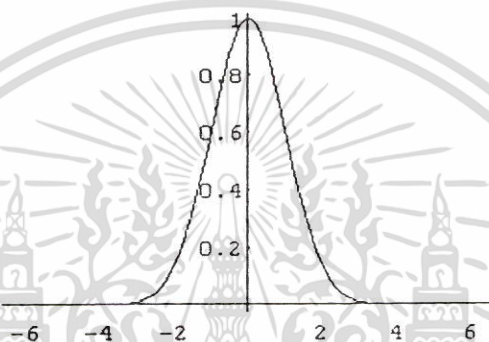


รูปที่ 3.1 Morlet mother wavelet

ฟังก์ชันในรูปที่ 3.1 จะประกอบด้วยลักษณะทั้งสองคือ การเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งได้จาก ฟังก์ชัน Sine ในรูปที่ 3.2 และการลู่เข้าสู่ศูนย์ของสัญญาณในทั้งสองด้านจาก Window function ดัง รูปที่ 3.3 เมื่อนำฟังก์ชันทั้งสองนี้มาคูณเข้าด้วยกัน จะได้เป็นลักษณะสัญญาณของเวฟเล็ต ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.2 รูปฟังก์ชันของ $y = \text{Sin}(5X)$



รูปที่ 3.3 รูปฟังก์ชันของ $y = \text{Exp}(-.5x^2)$

จากเวฟเล็ตแม่ ที่ได้ จะถูกนำไปสร้างเป็นสมาชิกตัวอื่น ๆ ใน เซตของเวฟเล็ต ที่ต้องการจะนำไปอธิบายถึงสัญญาณ กระบวนการ หรือระบบต่าง ๆ โดยสมาชิกตัวอื่น ๆ นี้จะได้มาจาก เวฟเล็ตแม่ที่ถูก การปรับมาตรา (Scaling: a) และการเลื่อนขนาน (Translation: b) ไปตามแกนของเวลา ถ้าให้ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันของ Mother wavelet แล้ว การ Scaling ด้วยพารามิเตอร์ a และ Translation ด้วยพารามิเตอร์ b จะสามารถหาได้จากสมการ

$$g_{b,a}(t) = g\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.1)$$

ซึ่ง

a เป็นการปรับมาตรา (Scaling)

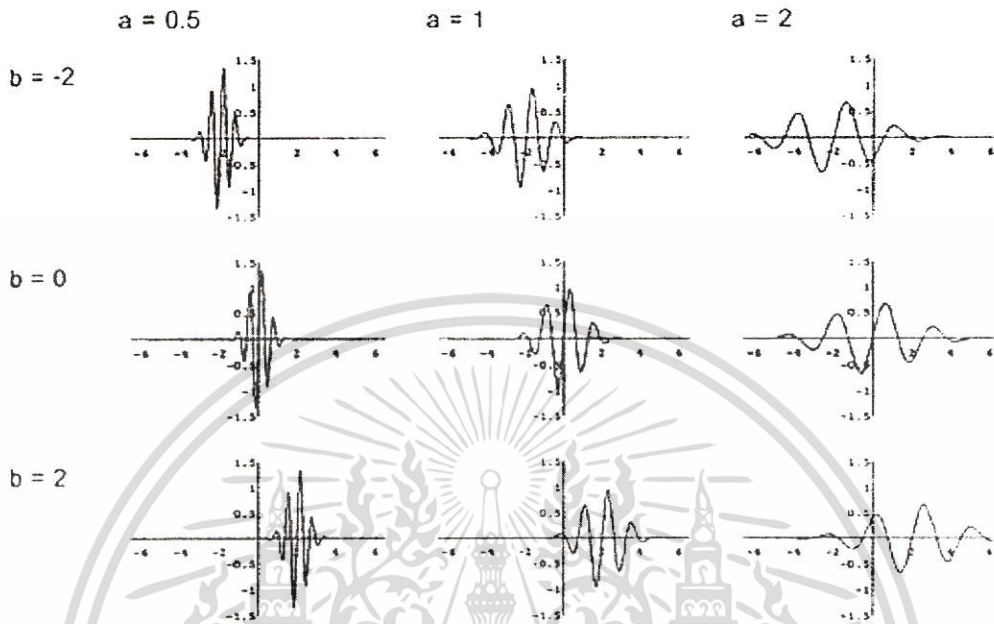
b เป็นการเลื่อนขนาน (Translation)

ซึ่งการทำ Scaling และ Translation ตามแกนของเวลานี้ จะรวมเรียกว่า Affine Operation (การทำ Linear Mapping ร่วมกับการทำ Translation) และเพื่อให้สัญญาณที่ถูก Scaling แล้วมีค่าพลังงานของสัญญาณที่เท่าเดิม จึงจะต้องทำการ Normalization สัญญาณที่ได้นี้ด้วย $1/\sqrt{a}$ เสมอ จะได้

$$g_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 3.4 จะแสดงถึงตัวอย่างของสมาชิกในเซตของเวฟเล็ต ที่มีเวฟเล็ตแม่แบบ Morlet ตามตัวอย่างที่ได้กล่าวมาแล้ว



รูปที่ 3.4 Scaling and translation of mother wavelet

จากตัวอย่าง จะสามารถสังเกตได้ว่า ลักษณะ และจำนวนลูกคลื่นของสัญญาณนั้นจะเหมือนกันทั้งหมด สมาชิกแต่ละตัวจะแตกต่างกันที่ขนาด และตำแหน่งทางแกนเวลาเท่านั้น

3.2 พื้นฐานของทฤษฎีเวฟเล็ต

ทฤษฎีของเวฟเล็ต ก็เป็นวิธีการอย่างหนึ่ง เช่นเดียวกับระบบตัวเลข ที่ใช้แทนจำนวนของสิ่งต่างๆ ทฤษฎีของเวฟเล็ตจะสามารถใช้อธิบายถึงสิ่งต่าง ๆ ได้ไม่ว่าจะเป็น ราคาหุ้น ผลเฉลยของสมการดิฟเฟอเรนเชียล การเดินของหัวใจ การไหลเวียนของโลหิต สภาพภูมิอากาศ เป็นต้น [8] และนอกเหนือจากนี้ทฤษฎีของเวฟเล็ตยังสามารถใช้อธิบายถึงการทำงานของระบบต่าง ๆ ได้

ทฤษฎีของเวฟเล็ตซึ่งเป็นเครื่องมือคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้กับสิ่งต่าง ๆ โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะใช้อธิบาย ระบบ หรือสัญญาณเหล่านั้นได้ดีกว่าวิธีการอื่น ๆ การที่จะนำทฤษฎีของเวฟเล็ตไปใช้งาน จึงอยู่บนพื้นฐานที่ว่า การนำมาใช้งานนั้นมีประสิทธิภาพเพียงใด

ทฤษฎีของเวฟเล็ตจะอธิบายสิ่งใดสิ่งหนึ่ง โดยการแยกสิ่งเหล่านั้น ออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ ที่มีความสัมพันธ์กัน โดยที่ส่วนย่อย ๆ เหล่านี้ก็คือ เวฟเล็ตแม่ที่ถูก Scaling และ Translation ไป และจำมีค่าสัมประสิทธิ์ (Coefficient) คูณอยู่กับเวฟเล็ตแต่ละตัว

กระบวนการในการแยกสัญญาณออกเป็นส่วนย่อย ๆ หรือการหาค่า ของสัมประสิทธิ์นี้ จะเรียกว่า “การแตกกระจายเวฟเล็ต” (Wavelet Decomposition) หรือ “การแปลงเวฟเล็ต” (Wavelet Transform: WT) และในทางกลับกัน การนำค่าสัมประสิทธิ์แยกออกเป็นส่วนย่อย ๆ มารวมกลับ เพื่อได้สัญญาณเดิมที่ต้องการ จะเรียกว่า “การรวมกลับเวฟเล็ต” (Wavelet reconstruction) หรือ “การแปลงผกผันแบบเวฟเล็ต” (Inverse Wavelet Transform: IWT)

การแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่อง ของฟังก์ชัน $f(x)$ จะสามารถแสดงได้โดยสมการทางคณิตศาสตร์ คือ

$$W_g[f(x)](a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int f(x) g\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (3.3)$$

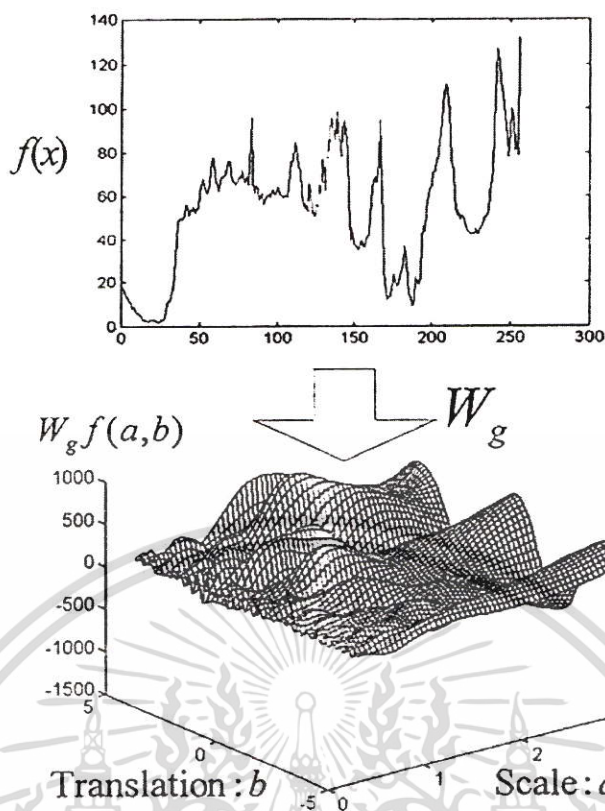
ซึ่ง $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของเวฟเล็ตแม่ และ $g^*(x)$ คือ สังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของ $g(x)$

a เป็นการปรับมาตรา (Scaling)

b เป็นการเลื่อนขนาน (Translation)

และจะใช้สัญลักษณ์ $W_g f(a,b)$ แทนค่าของสัมประสิทธิ์ที่ได้ เพื่อความสะดวก

จากข้างต้นจะเห็นได้ว่าการแปลงเวฟเล็ต จะเป็นการส่งผ่านฟังก์ชัน ที่มีตัวแปรอิสระ x ไปยังสเปซ (Space) ของฟังก์ชันที่เป็นสองมิติของตัวแปรอิสระคือ a และ b ตามลำดับ ค่าสัมประสิทธิ์ของเวฟเล็ตที่ a, b นี้ จะแสดงถึงระดับของสหสัมพันธ์ (Degree of Correlation) ระหว่างเวฟเล็ตแม่ที่ Scaling: a และ Translation: b กับสัญญาณอินพุต f ที่ตำแหน่งเดียวกัน โดยถ้าสัญญาณทั้งสองนี้มีความเหมือนกันมาก ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ก็จะมีค่ามากตามไปด้วย และเซตของค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดที่ได้ ($W_g f(a,b)$ ที่ a, b ใด ๆ) จะเรียกว่า โดเมนของเวฟเล็ต (Wavelet domain) ซึ่งจะเป็นการอธิบายถึงฟังก์ชัน f โดยใช้เวฟเล็ตแม่ g ดังรูปที่ 3.1 จะแสดงถึงการแปลงเวฟเล็ตของสัญญาณ $f(x)$ ให้อยู่ในโดเมนของเวฟเล็ต g



รูปที่ 3.5 แสดงการแปลงเวฟเล็ตของสัญญาณ $f(x)$ ให้อยู่ในโดเมนของเวฟเล็ต g

จะสังเกตได้ว่า สำหรับการแปลงเวฟเล็ตนั้น ส่วนของเวฟเล็ตแม่ที่ Scaling และ Translation ต่าง ๆ (จากตัวอย่างในรูปที่ 3.4) จะมีจำนวนของลูกคลื่นสัญญาณที่เท่ากัน เปรียบเสมือนกับ Windows function ที่มีขนาดเปลี่ยนไปตามความถี่ ถ้าค่าของ Scaling: a น้อยกว่าหนึ่ง ขนาดของ Window นี้ก็จะเล็กลง จำนวนลูกคลื่นต่อหน่วยเวลาที่จะมาก จำนวนลูกคลื่นสัญญาณที่มากก็จะหมายถึงความถี่สูงนั่นเอง แต่ถ้าจำนวนลูกคลื่นต่อหนึ่งหน่วยเวลามีค่าน้อย ก็จะหมายถึงความถี่ต่ำ จะเห็นได้ว่าค่าของช่วงเวลา กับความถี่ จะมีความสัมพันธ์กัน การแปลงเวฟเล็ตจะกำหนดช่วงเวลา ที่สั้น สำหรับการวิเคราะห์ความถี่สูง และช่วงเวลาที่ยาวขึ้น สำหรับความถี่ที่ต่ำลงมา

3.3 ตัวแปลงเวฟเล็ตและคำจำกัดความ

ก่อนที่จะอธิบายถึงกระบวนการแปลงเวฟเล็ตนั้น จะต้องกำหนดถึงฟังก์ชันที่จะสามารถนำมาใช้เป็นเวฟเล็ตแม่ได้จากที่ได้กล่าวมาแล้ว ฟังก์ชันที่จะเป็นเวฟเล็ตได้นั้น จะต้องมีลักษณะของการแกว่งไปมา และการเข้าสู่ศูนย์ ซึ่งฟังก์ชันที่จะสามารถใช้เป็นเวฟเล็ตแม่จะต้องมีลักษณะทั้งสองข้อนี้ ทัวไปแล้วสัญญาณต่าง ๆ นั้นจะมีลักษณะทั้งสองข้อนี้อยู่แล้ว หรือจะกล่าวได้ว่าฟังก์ชันที่สามารถหาค่าของพลังงานได้ (Finite energy function: $L^2(\mathbb{R})$) g จะใช้เป็นเวฟเล็ตแม่ได้เมื่อ

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.4)$$

ซึ่ง $G(\omega)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ g

C_g เป็นค่าพลังงานของ g

ตัวแปลงเวฟเล็ต W_g จะเป็นการ Mapping สัญญาณที่เป็น Finite energy ของ $L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R})$ หรือจะอธิบายได้คือ สัญญาณที่เห็น Finite energy ใน Time หรือ Space domain ถูก Mapping ไปเป็นสัญญาณสองมิติของ Scaling และ Translation หรือ Wavelet domain การแปลงเวฟเล็ตของฟังก์ชัน f ด้วยฟังก์ชันของเวฟเล็ตแม่ g จะกำหนดโดย

$$\begin{aligned} \text{Wavelet Coefficient} &= Wf(a,b) \\ &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int f(x) g^* \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \\ &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{|a|}} g \left(\frac{x-b}{a} \right) \right\rangle \\ &= \langle f, g_{a,b} \rangle = \langle f, U(a,b)g \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

ซึ่ง $*$ เป็นสังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate)

$\langle \dots \rangle$ เป็นผลคูณภายใน (Inner product)

$$U(a,b): g(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|a|}} g \left(\frac{x-b}{a} \right)$$

จากรูปที่ 3.5 ซึ่งเป็นตัวอย่างของการแปลงเวฟเล็ต ในตัวอย่างนี้ ฟังก์ชัน $g(x)$ จะต้องมีลักษณะของเวฟเล็ต เซตของเวฟเล็ตจะสร้างได้จาก $g_{a,b}$ ที่กำหนดโดย Unitary affine mapping

$$U(a,b): g(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|a|}} g \left(\frac{x-b}{a} \right) \text{ หรือจะสามารถอธิบายได้ง่าย ๆ คือ } g_{a,b} \text{ เกิดจากฟังก์ชันของเวฟ}$$

เล็ตแม่ที่ถูก Scaling ด้วยอัตราส่วน a และ Translation ไปด้วยค่าของ b ค่าอัตราส่วนของการ Scaling นี้จึงอยู่ในเซตของเลขจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 ($\mathbf{R} \setminus \{0\}$) ส่วนคำว่า “Unitary” นั้นจะ

หมายถึง Energy normalization ซึ่งได้จาก $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ การทำ Energy normalization นี้จะทำให้ เวฟเล็ต

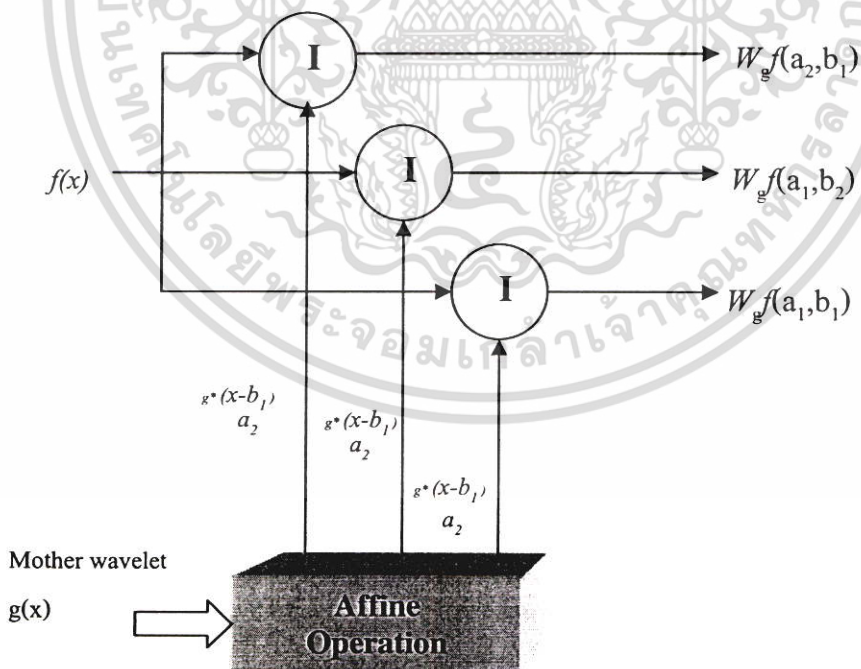
แม่ที่ถูก Scaling แล้วนั้นยังคงมีค่าขนาดของพลังงานที่เท่าเดิม หรืออาจใช้เวฟเล็ตแม่ที่มีค่าของพลังงานเท่ากับ หนึ่งหน่วย ($C_g = 1$) ก็ได้

การที่ค่าพลังงานของเวฟเลตแม่มีค่าเป็นหนึ่งหน่วย จะทำให้เกิดลักษณะที่สำคัญ คือค่าพลังงานของสัมประสิทธิ์ที่ได้ในเวฟเลตโดเมน จะเท่ากับค่าพลังงานของสัญญาณที่อยู่ในโดเมนของเวลาหรือในสเปซ และยังทำให้ค่าสัมประสิทธิ์เวฟเลต ที่ (a,b) ใด ๆ สามารถที่จะนำมาเปรียบเทียบกันได้

สำหรับการการแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่อง (Continuous wavelet transform) นั้น ลักษณะที่ต้องการของฟังก์ชันที่จะนำมาเป็น เวฟเลตแม่นั้นจะมีเพียงดังที่กล่าวข้างต้น ซึ่งการเลือกใช้ฟังก์ชันของเวฟเลตแม่ ก็จะขึ้นอยู่กับการประยุกต์ใช้งานที่ต้องการ

เซตของค่าสัมประสิทธิ์เวฟเลตนี้ จะสามารถใช้เป็นตัวแทนของสัญญาณ และจากการแปลงผกผันของค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ โดยใช้เซตของเวฟเลตที่ได้ด้วยเวฟเลตแม่ตัวเดิม ก็จะสามารถนำมาใช้ในการแปลงผกผันได้ (Inverse transform)

ค่าสัมประสิทธิ์เวฟเลต แต่ละตัว จะเปรียบเสมือนเป็นส่วนประกอบย่อย ๆ ของสัญญาณ (ฟังก์ชัน) และเมื่อรวมส่วนประกอบย่อย ๆ เหล่านี้เข้าด้วยกัน จะได้สัญญาณกลับออกมา ในกรณีที่จะหาค่าของสัมประสิทธิ์เวฟเลตที่จะเป็นตัวแทนของสัญญาณ สัญญาณนั้นจะถูกฉาย (Projection) ลงไปยังส่วนประกอบย่อยในเวฟเลตเซต ซึ่งผลลัพธ์จะได้เป็นค่าจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน ที่เรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์เวฟเลต (Wavelet coefficient) ของสัญญาณ หรือฟังก์ชัน f ที่สัมพันธ์กับเวฟเลตแม่ g หรือแสดงด้วย $W_g f(a,b)$ ดังแสดงในรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 กระบวนการแปลงเวฟเลต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอกเหนือจากที่อธิบายได้ด้วยสมการที่ 3.5 แล้ว กระบวนการฉายจะสามารถเรียกได้คือ กระบวนการสหสัมพันธ์ (Correlation) ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบว่าสัญญาณ ทั้งสองมีความเหมือนกันมากเพียงใดสัญญาณ f จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับเวฟเลตแม่ g ที่ถูก Scaling และ Translation จากในรูปที่ 2.6 กระบวนการของฉาย หรือ Correlation นี้ จะแสดงด้วยสัญลักษณ์ I อยู่ในวงกลม ข้อมูลเอาต์พุตที่ได้ ก็จะเป็น ค่าสัมประสิทธิ์เวฟเลต $W_g f(a,b)$ ที่ต้องการ

ในกระบวนการแปลงเวฟเลตที่แสดงในรูปที่ 3.6 จะสามารถเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็น Analysis filter โดยมันจะทำการแตกกระจายสัญญาณ ออกเป็นส่วนย่อย ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์ต่อไป กระบวนการแปลงผกผันเวฟเลต หรือ Synthesis filter จะเป็นการนำส่วนประกอบย่อย ๆ เหล่านี้ รวมกลับเข้าด้วยกันอีกครั้ง ในการแตกกระจายสัญญาณออกเป็นส่วนย่อย ๆ นี้ก็เพื่อประสิทธิภาพในการประมวลผลสัญญาณนั้น ๆ ทั้งนี้เนื่องจากการวิเคราะห์ส่วนประกอบย่อยนี้จะทำได้ดีกว่า ยกตัวอย่างเช่น เมื่อพิจารณาถึงเสียงของวงดนตรีหนึ่ง ๆ ที่ประกอบไปด้วยเสียงจากเครื่องดนตรีแต่ละชิ้นได้ และยิ่งถ้าเป็นคนที่เล่นดนตรีได้อยู่แล้ว ก็จะสามารถแทนเสียงของเครื่องดนตรีต่าง ๆ เหล่านี้ได้ด้วยตัวโน้ต ซึ่งต่อมามีหลังถ้าต้องการที่จะฟังเพลงนี้อีกครั้ง ก็จะสามารถทำได้โดยการเล่นตามโน้ตที่ได้บันทึกไว้ จะเห็นได้ว่าโน้ตเพลงเป็นตัวแทนที่มีประสิทธิภาพของเพลง ๆ หนึ่ง อย่างไรก็ตามในการแทนเพลง ๆ หนึ่งด้วยตัวโน้ตนั้น เพลงที่เล่นกลับออกมาได้จะไม่เหมือนต้นฉบับที่เคียนัก อาจมีที่ผิดเพี้ยนไปบ้าง แต่ก็ยังคงสื่อความหมาย ถึงเพลงเดียวกันได้อยู่ดี

3.4 การแปลงเวฟเลตผกผัน

การแปลงเวฟเลตผกผันที่ได้จากกระบวนการแปลงเวฟเลต ตามสมการที่ 3.5 นั้น จะสามารถทำได้ดังกระบวนการแสดงดังรูปที่ 3.7 ซึ่งในการแปลงเวฟเลตผกผันนี้จะ ได้ฟังก์ชันเดิมกลับออกมา

ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าของพลังงานได้แล้ว (อยู่ใน $L^2(\mathbb{R})$) และ $g(x)$ เป็น

ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติเป็นเวฟเลตแม่ได้ แล้ว $g_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{x-b}{a}\right)$ ($a,b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$)

กระบวนการแปลงเวฟเลตผกผัน W_g^{-1} จะเป็นการ Mapping พื้นผิวของค่าสัมประสิทธิ์เวฟเลตมาเป็นสัญญาณ หนึ่งมิติ ของเวลา คือ $W_g^{-1}: L^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ แสดงได้ดังสมการ

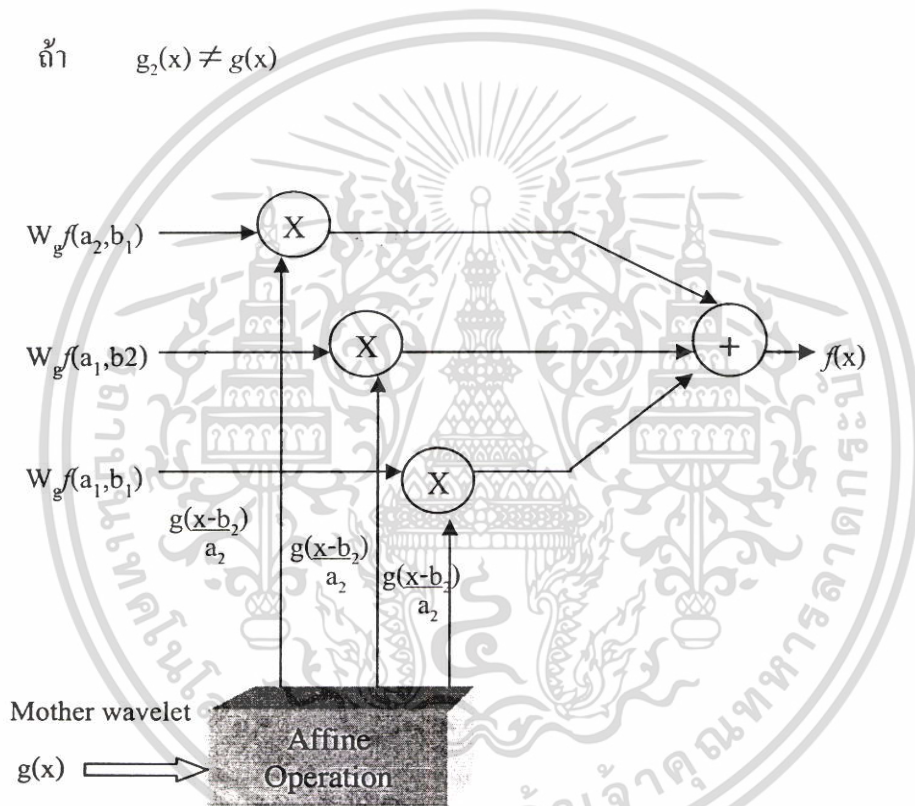
$$W_g^{-1}: W_g f(a,b) \rightarrow f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{c_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_g f(a,b) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db da}{a^2} \quad (3.6)$$

การแปลงเวฟเลตผกผันจะสร้างฟังก์ชัน/สัญญาณต้นฉบับขึ้นมาจากการรวมกันของ เวฟเลตแม่ (Mother wavelet: g) ที่ Scaling และ Translation ต่าง ๆ ที่ขึ้นอยู่กับค่าถ่วงน้ำหนัก (ค่าสัมประสิทธิ์ เวฟเลต: $W_g f(a,b)$) และสำหรับในกรณีที่ การแปลงเวฟเลตผกผันนี้ ใช้เวฟเลตแม่ที่แตกต่างไปจาก เวฟเลตแม่ที่ใช้ในกระบวนการแปลงเวฟเลต ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะเป็นสัญญาณ หรือฟังก์ชันที่แตกต่าง ไปจากฟังก์ชัน/สัญญาณต้นฉบับ คือ

$$\frac{1}{c_s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_g f(a,b) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db da}{a^2} \neq f(x) \quad (3.7)$$

ถ้า $g_2(x) \neq g(x)$



รูปที่ 3.7 กระบวนการแปลงเวฟเลตผกผัน

3.5 อนุกรมเวฟเลตเต็มหน่วยเวลา (Discrete Time Wavelet Series)

นอกเนื่องจากการแปลงเวฟเลต (Wavelet transforms) ที่มีค่าของ Scaling และ Translation แบบเต็มหน่วยแล้ว ค่าของแกนเวลาก็สามารถเป็นแบบเต็มหน่วยได้เช่น ลำดับของตัวเลข สามารถนำมาใช้กับการแปลงเวฟเลตได้ ซึ่งจะเรียกว่าเป็น อนุกรมเวฟเลตเต็มหน่วยเวลา (Discrete Time Wavelet Series: DTWS) การแปลงแบบ DTWS นี้ก็จะเปรียบเทียบกับ การแปลง Fourier แบบเต็มหน่วยเวลานั้นเอง สมการของการแปลงแบบ DTWS นี้ก็จะได้จากสมการของ CTWS โดยเปลี่ยนจากการ Integration มาเป็น Summation

ใน DTWS นี้ก็จะนิยาม Mother wavelet ให้เป็นแบบเต็มหน่วยเวลาด้วย (Discrete mother wavelet: $h(k)$) สมการของ DTWS จึงเป็น

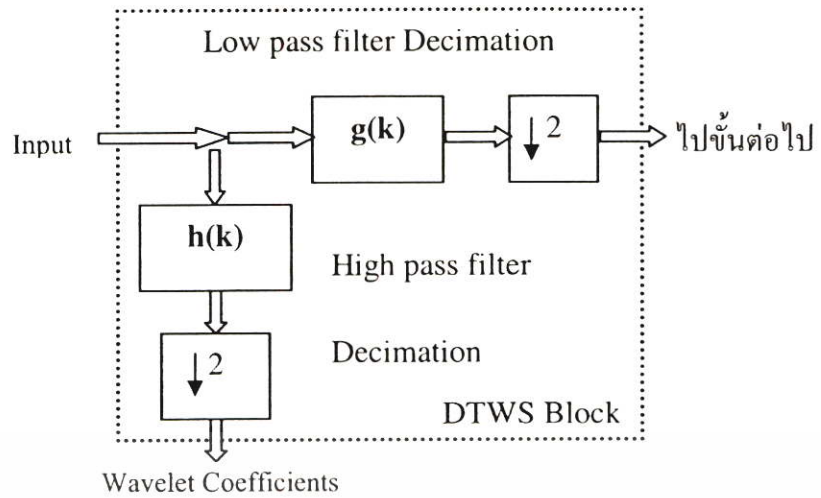
$$W_{\mu} f(m,n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) h\left(\frac{k - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (3.8)$$

$$= a_0^{-m/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) h(a_0^{-m} k - nb_0)$$

จากสมการข้างต้นจะใช้สัญลักษณ์ $h(k)$ แทน Mother wavelet เพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎีของการกรองสัญญาณ และจากการที่ $h(k)$ เป็นแบบเต็มหน่วยเวลา ดังนั้นที่ค่าของ k ที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ค่าของ $h(k)$ ก็จะได้การประมาณค่า

3.6 รูปแบบของการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยเวลา

การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยเวลานี้ ทั้งค่าใน Time domain และ Scale translation domain (Wavelet domain) จะเป็นเลขจำนวนเต็มหน่วย ที่ค่าอัตราส่วนการย่อของแกนเวลา (Scale) เท่ากับสอง แล้วการทำ Scaling ด้วยค่าอัตราส่วนของสองนี้สามารถจะกระทำได้ง่าย และมีประสิทธิภาพได้โดยการตัด sampling ของข้อมูลนั้น ออกไปครึ่งหนึ่ง วิธีการนี้จะเรียกว่า decimation หรือ sub sampling ด้วยค่าของ 2 รูปแบบทั่วไปของการแปลงเวฟเลตที่มีค่าของการย่อขนาดเป็นค่ากำลังของ 2 ก็จะได้ คือ

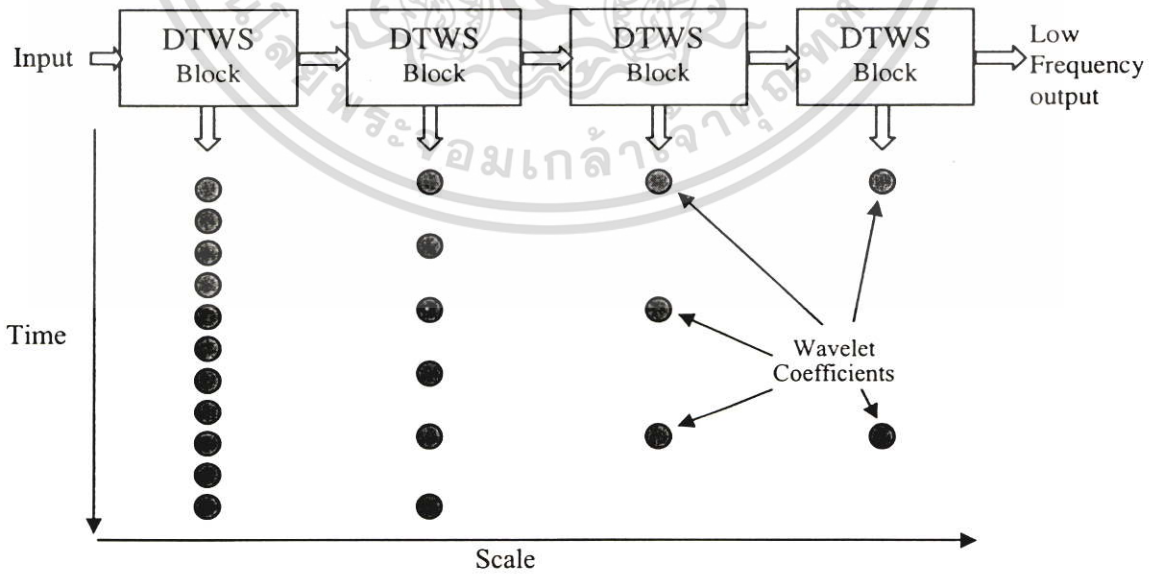


รูปที่ 3.8 รูปแบบของกระบวนการ DTWS ที่มีค่าของการ Scaling เท่ากับ 2

กระบวนการดังรูปที่ 3.8 นี้ สามารถจะนำไปใช้สำหรับการแปลงเวฟเลต แบบ Multiresolution, Orthogonal, Biorthogonal และ Perfect Reconstruction – Quadrature Mirror Filter (PR-QMF) ได้ ซึ่งในแต่ละแบบนี้จะแตกต่างกันที่ ลักษณะของ filter coefficient ที่ใช้

ตัวกรอง (Filter) จะถูกแบ่งออกเป็น low pass filter และ high pass filter ที่กำหนดด้วยค่าสัมประสิทธิ์ $g(k)$ และ $h(k)$ ตามลำดับ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ ของตัวกรองนี้ ก็จะสัมพันธ์ กับเวฟเลตแม่ของการแปลงเวฟเลต นั้นเอง โดยเมื่อ high pass filter $h(k)$ คือเวฟเลตแม่ ดังนั้นเอาท์พุทที่ได้จาก high pass filter นี้ ก็จะเป็น Wavelet coefficient

กระบวนการของ “การแตกกระจายเวฟเลต” (Wavelet decomposition) จะเป็นดังรูปที่ 3.9



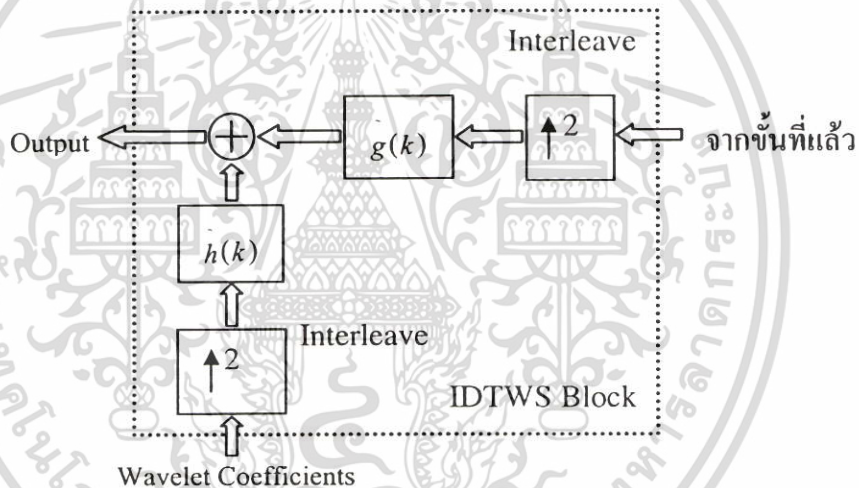
รูปที่ 3.9 Wavelet decomposition ด้วย DWTS Block

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

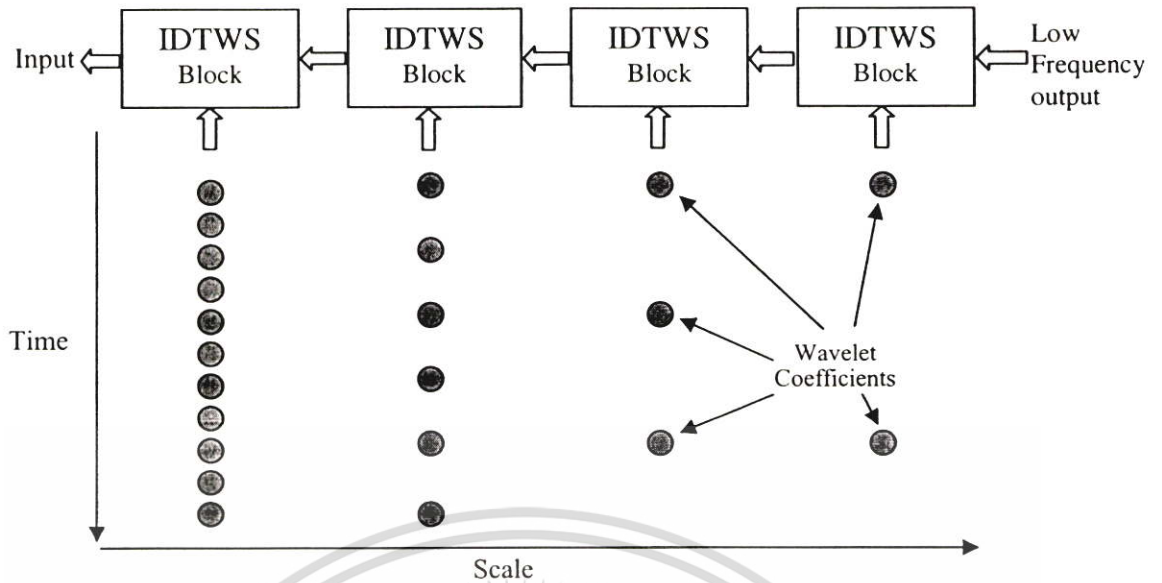
กระบวนการทั้งหมดก็จะเกิดจากการนำเอาบล็อก (block) ย่อย ๆ ของ DTWS ที่มีค่าของการ Scaling เท่ากับ 2 มาต่อเข้าด้วยกัน สัญญาณเอาต์พุตที่ได้จาก block แรก ในส่วนของ low pass filter และผ่านการ decimation แล้ว จะไปเป็นสัญญาณอินพุตให้ส่วนต่อไป อาจกล่าวได้ว่า low pass filter นี้ก็คือ Scaling function นั้นเอง

จากรูปที่ 3.9 เห็นได้ว่าสัญญาณ อินพุต จะถูกป้อนเข้าทางด้านซ้ายมือ ค่าของ Wavelet coefficient จะได้ออกมาทางด้านล่าง ซึ่งจะมีจำนวนที่ลดเรื่อย ๆ และ สุดท้าย ส่วนของสัญญาณ ความถี่ต่ำที่เหลือจะได้ออกมาทางขวามือ สัญญาณและ ค่าสัมประสิทธิ์ ทั้งหมดที่ได้ออกมา นี้ ก็จะเป็นตัวแทนของสัญญาณใน Time domain นั้นเอง

การแปลงผกผันเวฟเล็ต หรือ “การรวมกลับเวฟเล็ต” (Wavelet reconstruction) แบบเต็มหน่วย เวลา (Inverse Discrete Time Wavelet Series: IDTWS) ก็สามารถทำได้โดยวิธีการดังรูปที่ 3.10 และรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.10 รูปแบบของกระบวนการ IDTWS ที่มีค่าของการ Scaling เท่ากับ 2



รูปที่ 3.11 การรวมกลับเวฟเลตด้วย IDTWS Block

จากรูป ซึ่งคล้ายกับการแปลงเวฟเลต ดังที่กล่าวมาแล้ว แต่จะมีการทำงานที่กลับกัน block ของ IDTWS นี้จะรับสัญญาณความถี่ต่ำ และค่าของ Wavelet coefficient เพื่อนำมาสังเคราะห์ หรือสร้างสัญญาณ ใน Time domain ออกมา สำหรับการ decimation หรือ sub sampling ด้วยค่าอัตราส่วนของ 2 นี้ จะถูกแทนด้วยกระบวนการที่กลับกัน คือ กระบวนการ interleave หรือ up sampling ที่จะแทรกข้อมูล 0 เข้าไปแต่ละ sampling ลักษณะของ low pass filter และ high pass filter ที่ใช้นี้ จะได้กล่าวถึงต่อไป

3.7 การแปลงเวฟเลตความละเอียดหลายระดับ

จากการทำ Wavelet transform แบบที่มีเงื่อนไขเฉพาะต่าง ๆ การทำ Wavelet transform แบบการแปลงเวฟเลตความละเอียดหลายระดับ (Multiresolution wavelet transform) จะจะเป็นกรณีที่มีการใช้กันมากที่สุด ในการทำ Multiresolution wavelet transform นั้นฟังก์ชัน ที่จะนำมาใช้เป็น Mother wavelet อาจมีลักษณะเป็น Non orthogonal หรืออื่น ๆ ก็ได้

ข้อกำหนดเบื้องต้นของตัว Mother wavelet หรือ high pass filter ก็คือมันจะต้องสัมพันธ์กันกับฟังก์ชันที่เป็น Scaling function หรือ low pass filter ด้วย การทำ Multiresolution transform นี้ จะมีลักษณะ ของจำนวนของ ค่าสัมประสิทธิ์ ที่ได้ออกมาเป็นแบบ pyramidal structure อยู่ในตัว ซึ่งลักษณะข้อนี้ไม่จำเป็นสำหรับการทำ Wavelet transform โดยทั่วไป แต่ด้วยลักษณะของ pyramidal structure นี้ทำให้ในการแปลง เวฟเลต ที่ระดับ scale ต่าง ๆ สามารถที่จะทำได้โดยใช้ Scaling function (low pass filter) และ Wavelet function (high pass filter) เพียงตัวเดียวได้ ซึ่งจะสามารถทำได้โดยง่ายในทางปฏิบัติด้วยการทำงานซ้ำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยทั่วไปในการใช้งานของ Multiresolution wavelet transform จะเสมือนกับเป็นการกรอง สัญญาณอินพุตที่เข้ามาให้แยกออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่มีความถี่สูง (high frequency band) และ ส่วนที่มีความถี่ต่ำ (low frequency band) การกรองนี้ก็จะเริ่มจาก bandwidth ทั้งหมดของสัญญาณ ก่อน ซึ่งในการกรองนี้ก็จะได้สัญญาณส่วนที่มีความถี่สูง (มีค่า Scaling ต่ำ) ออกมาจากนั้นสัญญาณ อินพุต จะถูกลด bandwidth ลงในแต่ละขั้นของการแปลง (ที่ค่าของ bandwidth น้อย ๆ ก็จะสัมพันธ์ กับค่าของการ Scaling ที่มาก) จากรูปที่ 3.9 สัญญาณเอาต์พุต ที่ได้จาก high frequency band ก็จะเป็น Wavelet coefficient ที่ ความละเอียดสูง (fine scaling) และสำหรับสัญญาณเอาต์พุต ที่ low frequency band จะนำไปผ่านการ decimation ด้วยค่าอัตราของ 2 จากนั้น สัญญาณส่วนที่เหลือนี้ จะ ถูกแบ่งออกเป็น high และ low frequency band อีกครั้งหนึ่ง สำหรับสัญญาณ เอาต์พุตที่ได้จากการ ทำ high pass filter นี้ แต่ละจุดของ Sampling ก็จะเป็น Wavelet coefficient ที่ Translation ต่าง ๆ ที่ ค่าระดับ Scale เดียวกันนั่นเอง

การกรองสัญญาณแยกออกเป็นสองส่วนนี้สามารถกระทำต่อไปได้เรื่อย ๆ จนได้สัญญาณ เอาต์พุตจาก low pass filter สุดท้าย ซึ่งคือองค์ประกอบทาง DC ของสัญญาณนั้น ๆ

Orthogonal Wavelet Transform

เช่นเดียวกันกับการทำ Fourier analysis หรือการแปลงสัญญาณในแบบอื่น ๆ ลักษณะที่สำคัญ จะเกิดขึ้นได้ เมื่อองค์ประกอบที่เป็นพื้นฐานของระบบนั้น ๆ มีลักษณะเป็น Orthogonal (Orthogonal basis) โดยการฉายภาพของสัญญาณอินพุตลงบน Orthogonal basis แล้วค่า สัมประสิทธิ์ที่ได้ ก็จะมีลักษณะของความเป็น Orthogonal ด้วย

ในกรณีของการแปลงเวฟเลตนี้ก็เช่นเดียวกัน ค่าสัมประสิทธิ์เวฟเลตที่ได้แต่ละตัว ซึ่งเป็น ตัวแทนของสัญญาณอินพุต ในส่วนที่สัมพันธ์กับเวฟเลตนั้น ๆ ซึ่งถ้าเวฟเลตแม่มีลักษณะของการ เป็น Orthogonal แล้ว เซตของค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ ก็จะไม่มีความซ้ำซ้อนกัน (No redundancy) ทำให้เซตของค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้นี้ เป็นตัวแทนของสัญญาณที่มีประสิทธิภาพลักษณะของการเป็น Orthogonal หรือ Biorthogonal ของการแปลงเวฟเลตนี้ จึงถูกนำมาใช้กันมากในการทำ Multiresolution wavelet decomposition และโดยเฉพาะการนำมาใช้ในการลดขนาดข้อมูลภาพ หรือ ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การแปลงเวฟเลตที่มีลักษณะของ Orthogonal หรือ Biorthogonal นี้จะเกิดขึ้นได้จากการใช้เวฟ เลตแม่ที่มีลักษณะของ Orthogonal หรือ Biorthogonal นั้นเอง ในการวิเคราะห์สัญญาณ ด้วยวิธีการ ของ Multiresolution analysis ความเป็น Orthogonal จะกำหนด โดยฟังก์ชันของ low pass filter หรือ Scaling function จะต้องมึลักษณะของ Orthogonal ที่ตำแหน่งของ Scale และ Translation (m,n) : ซึ่งขึ้นกับ a_0 และ b_0 นั้นเอง

ฟังก์ชันของเวฟเล็ตแม่ที่มีลักษณะของ Orthogonal นั้น ค่าผลคูณภายใน (Inner product) ของเวฟเล็ตแม่ที่ Scale และ Translation ต่าง ๆ จะได้เป็น Impulse ในสเปซของ Scale และ Translation

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{m,n}(t)g_{m',n'}^* dt = \delta(m-m') \delta(n-n')$$

$$= \begin{cases} 1 & ; \text{if } m=m' \text{ \& } n=n' \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.9)$$

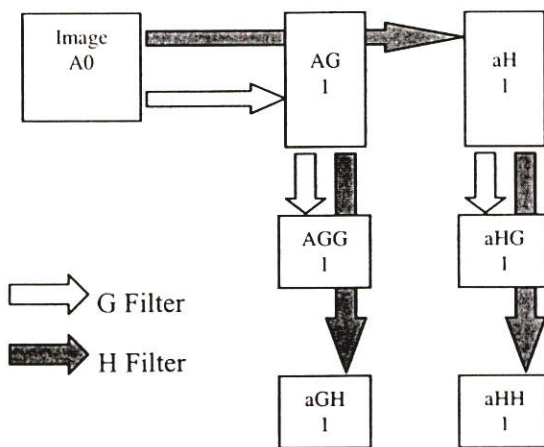
ลักษณะเฉพาะของการแปลงแบบ Orthogonal คือตัวกรอง (high pass filter และ low pass filter) ที่ใช้ในกระบวนการวิเคราะห์สัญญาณ (รูปที่ 3.8) กับตัวกรองที่ใช้ในการสังเคราะห์สัญญาณ (รูปที่ 3.10) จะเป็นตัวเดียวกัน

3.8 การประยุกต์ใช้กับข้อมูลภาพ

จากลักษณะของ Orthogonal wavelet transform ที่เหมาะในการนำมาประยุกต์ใช้กับการลดขนาดข้อมูลภาพ ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงวิธีนำ การแปลงเวฟเล็ตมาใช้งาน กระบวนการแปลงเวฟเล็ตที่นำมาใช้งานนี้จะเป็นวิธีการของ Multiresolution wavelet transform ที่ได้อธิบายในหัวข้อ 3.7

จากที่ข้อมูลภาพ ที่เป็นสัญญาณ ในสองมิตินี้ กระบวนการแปลงเวฟเล็ตที่ใช้จะต้องเป็นสองมิติด้วย แต่เพื่อความสะดวกในการใช้งาน ข้อมูลภาพจะถูกแปลงเป็นสัญญาณข้อมูลใน หนึ่งมิติแทน เพื่อให้สามารถใช้กระบวนการแปลงเวฟเล็ต ที่กล่าวมาแล้วได้ โดยการจัดเรียงของแต่ละจุดภาพใหม่ แยกตามแนวแกนตั้ง และแนวนอน ข้อมูลที่ได้จากเส้นภาพในแนวแกนนอนแต่ละเส้นจะเป็นสัญญาณหนึ่งมิติ ซึ่งจะถูกระทำการแปลงเวฟเล็ตจนครบทุกเส้นภาพ ผลที่ได้ออกมาจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของเวฟเล็ต ของสัญญาณ ในแต่ละเส้นภาพที่ไม่เกี่ยวข้องกัน แล้วข้อมูลนี้จะถูกนำไปผ่านกระบวนการแปลงเวฟเล็ตอีกครั้ง ตามแนวตั้ง [3]

จากที่ในการแปลงเวฟเล็ตแบบ Multiresolution ที่มีค่าอัตราส่วนในการ Scaling เท่ากับสองนี้ ผลลัพธ์ที่ได้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนของ high pass filter และ low pass filter ดังนั้นเมื่อข้อมูลภาพถูกนำมาทำการแปลงเวฟเล็ต ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จึงแบ่งออกเป็น 4 ส่วน แสดงดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 แสดงการแปลงเวฟเล็ตของข้อมูลภาพออกเป็น 4 sub band คือ AGG1 aGH1 aHG1 aHH1 (ส่วนที่แรง) ซึ่งองค์ประกอบทั้ง 4 นี้ยังคงมีจำนวนจุดข้อมูลรวมกันทั้งหมด เท่ากับภาพต้นฉบับแบบ (AO)

จากนั้น ส่วนของข้อมูลความถี่ต่ำที่เหลืออยู่ (AGG1) จะสามารถนำไปแตกกระจายต่อไปได้ เช่น เดียวกันกับการแปลงเวฟเล็ตของสัญญาณหนึ่งมิติ

บทที่ 4

การลดขนาดข้อมูลภาพพื้นฐาน

4.1 บทนำ

ในบทนี้ส่วนแรกจะกล่าวถึงการนำทฤษฎีที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 มาใช้ในการลดขนาดข้อมูลภาพ โดยจะอธิบายเพิ่มเติมในส่วนของการทำงานของเครื่องทำสำเนา เพื่อให้เข้าใจการทำงานมากขึ้น ก่อนที่จะเข้าสู่กระบวนการในการเข้ารหัสและถอดรหัสข้อมูลภาพซึ่งเป็นระดับสีเทา และใน ส่วนที่ 2 จะกล่าวถึงกระบวนการทำงานของการลดขนาดข้อมูลภาพที่สามารถนำไปใช้งานจริงได้

4.2 หลักการพื้นฐานของการลดขนาดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอล

Partitioned Copying Machine

สมมติว่าเครื่องทำสำเนาสามารถทำการเข้ารหัสและถอดรหัสข้อมูลภาพซึ่งเป็นระดับสีเทาได้ จากที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 นั้นเครื่องทำสำเนาที่มีคุณสมบัติดังนี้

- ทุก ๆ การทำสำเนาของภาพต้นฉบับจะวางในภาพผลลัพธ์
- กำหนดตำแหน่ง และขนาดของการปรับขนาด การยืด การเอียง และการหมุนในการละการทำสำเนา

เพื่อให้คล้ายกับการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลมากยิ่งขึ้น เราจะทำการเพิ่มคุณสมบัติของเครื่องทำสำเนา ดังนี้

- มีการปรับความคมชัดและความสว่างในแต่ละการทำสำเนา
- ทำเครื่องหมายของส่วนที่ถูกเลือกจากภาพต้นฉบับที่ทำสำเนา

คุณสมบัติที่เพิ่มเข้าไปนี้ ทำให้สามารถเข้ารหัสข้อมูลภาพซึ่งเป็นระดับสีเทาได้ และความสามารถสุดท้ายนี้เป็นหัวใจสำคัญสำหรับการเข้ารหัสข้อมูลภาพเป็นอย่างยิ่ง คือการแบ่งภาพต้นฉบับออกเป็น ส่วน ๆ แล้วทำการแปลงแยกจากกัน การแบ่งภาพออกเป็น ส่วน ๆ นี้ทำให้สามารถใช้ทฤษฎีของอิเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม ช่วยในการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลได้

จากบทที่ 2 ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า มีอะไรเกิดขึ้นเมื่อทำสำเนาโดยใช้เครื่องทำสำเนา นี้ ส่วนของภาพที่แบ่งออกมาจะเรียกว่าโดเมน (Domain) เขียนแทนด้วย D_i และผลที่ได้จากการทำสำเนาจะเรียกว่าเรนจ์ (Range) เขียนแทนด้วย R_i และแทนการแปลงด้วย w_i โดยให้ภาพต้นฉบับแทนด้วย f การทำสำเนาครั้งหนึ่งซึ่งเท่ากับ N สำเนา สามารถเขียนได้ดังนี้

$$W(f) = w_1(f) \cup w_2(f) \cup \dots \cup w_N(f)$$

เมื่อเครื่องทำสำเนาทำงานในพีดีบีคลูบโดยนำผลลัพธ์กลับมาเป็นต้นฉบับอีกครั้งหนึ่งและเป็นเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ

พาร์ติชันก๊อปปี้แมสชีนเป็นพาร์ติชันอิเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม (Partitioned Copying Machine are PIFS)

ในทางคณิตศาสตร์พาร์ติชันก๊อปปี้แมสชีนจะเรียกว่าพาร์ติชันอิเทอร์เรตฟังก์ชันซิสเต็ม จากที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 PIFS จะไม่ขึ้นกับชนิดของการแปลง ซึ่งในที่นี้จะใช้การแปลงแบบแอฟไฟน์ กำหนดให้ 2 มิติแรกเป็นมิติสเปเชียลและมีค่าของระดับสีเทาเป็นมิติที่ 3 ดังนั้น สมการของการแปลง w_i จะมีรูปแบบดังนี้

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ o_i \end{bmatrix}$$

ซึ่ง a_i, b_i, c_i, d_i เป็นค่าสำหรับปรับเปลี่ยนรูปแบบของการแปลงแบบแอฟไฟน์
 e_i เป็นค่าสำหรับปรับตำแหน่งในแกน x
 f_i เป็นค่าสำหรับปรับตำแหน่งในแกน y
 s_i เป็นค่าสำหรับปรับความคมชัดของภาพ
 o_i เป็นค่าสำหรับปรับความสว่างของภาพ

ถ้าทำการวิเคราะห์เฉพาะส่วนของสเปเชียล สมการของการแปลง v_i จะมีรูปแบบดังนี้

$$v_i(x, y) = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ภาพที่อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชัน $f(x, y)$ สามารถนำแมป w_i มาใช้กับภาพ f ได้ โดย $w_i(f) \equiv w_i(x, y, f(x, y))$ เมื่อ v_i เป็นค่าที่กำหนดว่าจะแบ่งภาพต้นฉบับอย่างไร เพื่อที่จะทำการแมปไปยังภาพที่นำมาเปรียบเทียบ ในขณะที่ s_i และ o_i เป็นค่าที่กำหนดการปรับความคมชัดและความสว่างของภาพตามลำดับ ซึ่งส่วนของภาพ D_i และ R_i วางอยู่บนระนาบ และแมป w_i จะทำการแมปกับส่วนของ $D_i \times I$ ในแนวแกนตั้งเหนือ D_i นั้นหมายความว่า $v_i(D_i) = R_i$ ดังรูปที่ 2.15

ดังนั้น ถ้าให้ $W(f)$ เป็นภาพ $\cup R_i = I^2$ และ $R_i \cap R_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$ นั่นคือเมื่อนำ W มาใช้กับภาพ จะได้ฟังก์ชันบนแต่ละจุดของ I^2

เมื่อให้เครื่องทำสำเนาทำงานในพีคแน็คลูป จึงเปรียบเสมือนกับการทำซ้ำของแมป W โดยเริ่มจากภาพเริ่มต้น f_0 เมื่อเกิดการซ้ำ $f_1 = W(f_0)$, $f_2 = W(f_1) = W(W(f_0))$ จะเป็นเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ เมื่อแทน n ด้วยจำนวนของการซ้ำ จะได้ $f_n = W^n(f_0)$

ฟิกซ์พอยต์สำหรับพาร์ติชันอิตอเรตฟังก์ชันซิสเต็ม (Fixed Points for Partitioned Iterated Function Systems)

ในกรณีของ PIFS นั้น ฟิกซ์พอยต์หรือแอ็ทแทรกเตอร์ที่เป็นภาพ f คือ $W(f) = f$ นั่นคือเมื่อนำการแปลงมาใช้กับภาพ จะทำให้ได้ภาพต้นฉบับกลับมา จากทฤษฎีคอนแทรคทีฟแมปปิง (The Contractive Mapping Theorem) จะเห็นว่าฟิกซ์พอยต์ของ W จะได้เป็นรูปภาพเมื่อผ่านการคำนวณดังนี้ $W(f_0), W(W(f_0)), W(W(W(f_0))), \dots$ ซึ่ง f_0 เป็นภาพใด ๆ ดังนั้นจะเห็นว่า W เป็นคอนแทรคทีฟในสเปซของทุก ๆ ภาพ เมื่อยูนิกฟิกซ์พอยต์เป็นภาพใดภาพหนึ่ง

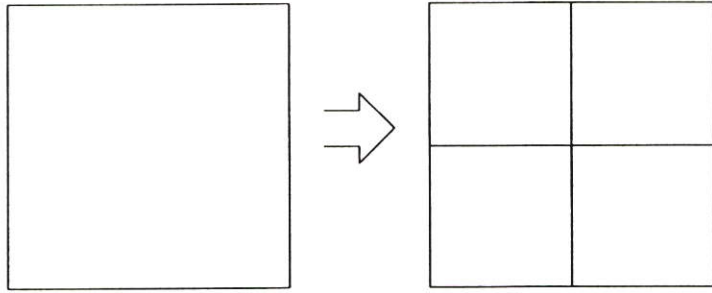
จะเห็นว่าไม่จำเป็นต้องมีเงื่อนไขของคอนแทรคทีฟในแนวแกน x และแกน y ซึ่ง W จะคอนแทรคทีฟเมื่อแต่ละค่าของ $s_i < 1$ นั่นคือ ค่าดีชเท็นซ์ในแนวแกน z จะถูกทำให้ขนาดเปลี่ยนไปโดย factor ที่น้อยกว่า 1 ในความเป็นจริงแล้วการนำทฤษฎีคอนแทรคทีฟแมปปิง มาใช้กับ W^m สำหรับบางค่าของ m ซึ่ง $s_i > 1$ ยังทำให้ W^m นั้นคอนแทรคทีฟอยู่ เมื่อรวมทั้งหมดเข้าด้วยกันแล้ว ในกรณีนี้เรียก W ว่าเป็นอีเวนชวลลีคอนแทรคทีฟ ในทางปฏิบัติ ถ้าต้องการความแน่นอนโดยให้ค่า $s_i < 1$ ทำให้แน่ใจได้ว่าจะคอนแทรคทีฟ แต่จากความเป็นจริงถ้าให้ค่า $s_i < 1.2$ ก็คอนแทรคทีฟเหมือนกันและเมื่อทำการถอดรหัส ภาพที่ได้เหมือนภาพต้นฉบับมากกว่าเมื่อให้ค่า $s_i < 1$ ด้วย

4.3 การแบ่งภาพในการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล

การแบ่งภาพพื้นฐานที่ใช้ในกระบวนการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล สามารถแบ่งตามรูปแบบใหญ่ ๆ ได้ 2 แบบคือ

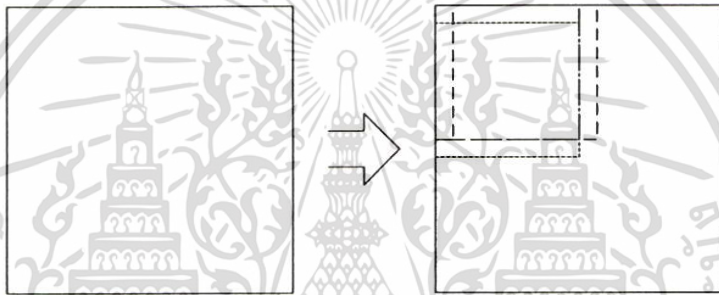
1. การแบ่งแบบไม่ซ้อนทับกัน
2. การแบ่งแบบซ้อนทับกัน

การแบ่งแบบไม่ซ้อนทับกันนั้นภาพที่นำมาใช้นั้นจะต้องมีขนาดที่พอดีกับขนาดที่ต้องการแบ่ง เช่น ถ้าต้องการแบ่งภาพให้มีขนาดย่อย ๆ เป็น 8×8 จุด ภาพที่นำมาใช้นั้นจะต้องมีขนาดซึ่งสามารถนำ 8 มาหารแล้วลงตัว เช่น 64×32 หรือ 64×64 เป็นต้น จึงจะสามารถแบ่งภาพได้พอดี ดังแสดงในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 แสดงการแบ่งภาพขนาด 16x16 เป็นส่วน ๆ ขนาด 8x8 แบบไม่ซ้อนทับกัน

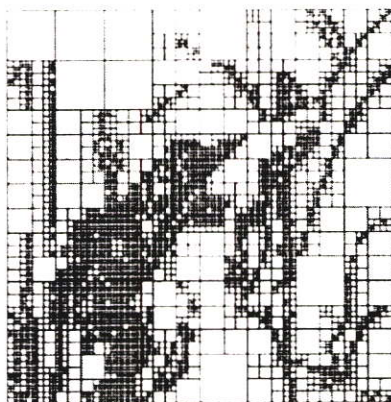
การแบ่งภาพแบบซ้อนทับกันภาพที่นำมาใช้นั้นจะมีขนาดเท่าใดก็ได้ หรือ ขึ้นอยู่กับจำนวนจุดที่ต้องการซ้อนกันในการแบ่ง ดังแสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงการแบ่งภาพขนาด 16x16 เป็นส่วน ๆ ขนาด 8x8 แบบซ้อนทับกัน 1 จุด

สิ่งที่ใช้ตัดสินใจในการกำหนดขนาดในการแบ่งภาพก็คือรายละเอียดของภาพที่นำมาเข้ารหัส ถ้าภาพมีรายละเอียดมากขนาดของการแบ่งก็ต้องเล็กลง แต่นั่นก็หมายถึงอัตราการบีบอัดภาพก็จะน้อยลงตามไปด้วย ดังนั้นจึงได้มีการนำกระบวนการแบ่งภาพแบบควอดทรี (Quadtree Partition) มาช่วยในการแบ่งภาพเพื่อให้อัตราการบีบอัดภาพไม่ลดลงตามรายละเอียดของภาพ และภาพที่ได้จากการถอดรหัสไม่สูญเสียรายละเอียดของภาพไป

การแบ่งภาพแบบควอดทรีแสดงในรูปที่ 4.3 จะทำการแบ่งภาพออกเป็นสี่ควอดแรนท์ (Quadrant) โดยแต่ละส่วนที่ทำการแบ่งจะแบ่งออกเป็นสี่ควอดแรนท์ต่อไปเรื่อย ๆ เมื่อภาพในส่วนที่แบ่งไว้แล้วนั้นยังคงมีรายละเอียดมาก



รูปที่ 4.3 แสดงการแบ่งภาพแบบควอดทรีในภาพ “Lena”

4.4 การลดขนาดข้อมูลภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซเฮลโดเมน

สมมติให้ภาพ f เป็นภาพที่ต้องการลดขนาดข้อมูล นั่นหมายความว่าต้องทำการหากลุ่มของแมป w_1, w_2, \dots, w_n ซึ่ง $W = \bigcup_{i=1}^N$ และ $f = x_w$ เมื่อ f เป็นพิกซ์พ้อยซ์ของแมป W โดยสมการของพิกซ์พ้อยซ์เป็นดังนี้

$$f = W(f) = w_1(f) \cup w_2(f) \cup \dots \cup w_N(f)$$

โดยทำการค้นหาส่วนต่าง ๆ ของ f จากที่แบ่งไว้แล้วทำการแปลง w_i เพื่อให้ได้ภาพ f กลับคืนมา ดังเช่นในกรณีของเครื่องทำสำเนาในรูปที่ 2.2 ซึ่งภาพที่ได้สร้างขึ้นมาจากการลดขนาดของภาพต้นฉบับ แล้วนำไปวางไว้ในตำแหน่งที่ต้องการ ในความเป็นจริง ส่วนต่าง ๆ ของภาพที่ทำการแปลงนั้น ขนาดจะไม่เท่ากันพอดี จะได้ $f' = x_w$ ดังนั้นจึงต้องหาส่วนที่มีความใกล้เคียงกันมากที่สุดจาก $d_{rms}(f', f)$ ซึ่งจะทำได้ภาพจากการแปลง W ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด ในกรณีนี้

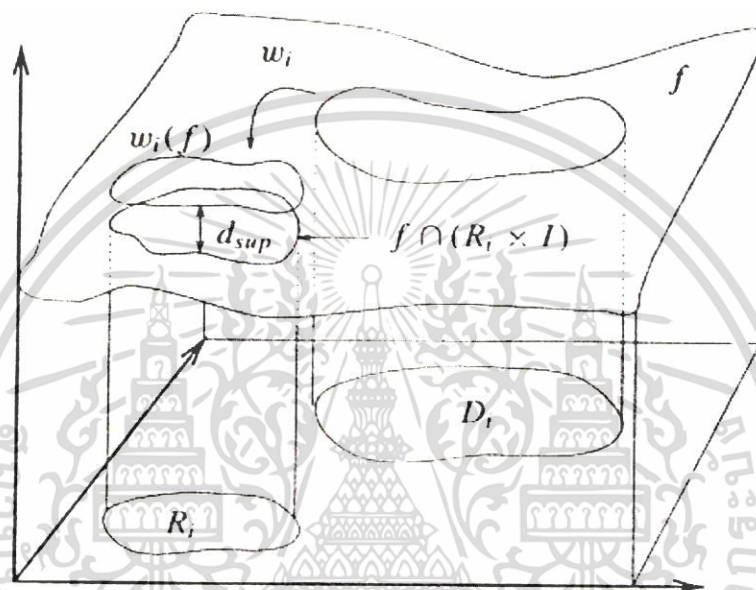
$$f \approx f' = W(f) \approx W(f) = w_1(f) \cup w_2(f) \cup \dots \cup w_N(f)$$

ดังนั้นการประมาณค่าส่วนของภาพจากการแปลง ทำได้โดยการหาค่าความแตกต่างของขนาดของระดับสีให้น้อยที่สุด

$$d_{rms}(f \cap (R_i \times I), w_i(f)) \quad i = 1, \dots, N$$

รูปที่ 4.4 แสดงกระบวนการทำงานนี้ โดยหาส่วนของ D_i และแมป w_i โดยทำการแปลงส่วนของภาพเหนือ D_i แล้วทำให้ได้ค่าใกล้เคียงกับส่วนของภาพเหนือ R_i มากที่สุด โดยหัวใจสำคัญของการลดขนาดข้อมูลภาพแบบเฟร็กทอลคือ ส่วนของ R_i ซึ่งเหมือนกับส่วนของ D_i มากที่สุดนั้นคือ

$$f_R = f'_R = w_i(f_{D_i})$$



รูปที่ 4.4 แสดงการหาค่าค่าสุทธระหว่างภาพ R_i ของกราฟ $f \cap (R_i \times I)$ เหนือ R_i และภาพ $w_i(f)$ ของส่วนของกราฟเหนือ D_i

เมื่อนำการแปลงแบบแอฟไฟน์มาใช้กับส่วนของ D_i จะได้สมการการแปลงแบบย่อของ R_i และ D_i ดังนี้

$$f_R(x, y) = f'_R(x, y) = s(I_n(\phi(f_{D_i}(x, y)))) + o \quad (4.1)$$

เมื่อ $f_R(x, y)$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการแปลงของเรนจ์ด้วย DCT

$f_D(x, y)$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการแปลงของโดเมนด้วย DCT

ϕ เป็นการลดขนาดของภาพ ซึ่งทำให้ส่วนของโดเมนมีขนาดเท่ากับส่วนของเรนจ์

s เป็นค่าสำหรับการปรับความคมชัดของภาพ

o เป็นค่าสำหรับการปรับความสว่างของภาพ

I_n เป็นการหมุนภาพในสเปซเชิงโดเมนสามารถหมุนได้ 8 แบบ ดังตารางที่ 4.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 แสดงการหมุนภาพในรูปแบบต่าง ๆ

รูปแบบ	ความหมาย	สเปเชียลโดเมน (v_i)	ลักษณะของภาพ
I_1	Identity	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$	
I_2	x flip	$\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$	
I_3	y flip	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$	
I_4	180° rotation	$\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$	
I_5	(x = y) flip	$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$	
I_6	90° rotation	$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$	
I_7	270° rotation	$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$	
I_8	(x+y = 0) flip	$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$	

การคำนวณค่า s, o และค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ย (Mean Square Error เขียนแทนด้วย MSE)

ในทางปฏิบัติ การเปรียบเทียบระหว่างส่วนของโดเมนและเรนจ์นั้น สามารถใช้ MSE เมตริกซ์ ในการเปรียบเทียบซึ่งทำให้ง่ายต่อการคำนวณสำหรับค่า s และ o ในสมการที่ 4.1 โดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้สอง เมตริกซ์ นี้ประกอบไปด้วย $f_D(x, y)$ (จากโดเมน) และ $f_R(x, y)$ (จากเรนจ์) แล้วทำการหาค่า s และ o จากสมการต่อไปนี้

$$MSE = \sum_{x,y=0}^{N-1} [(s(I_n(f_D(x, y)))) + o) - f_R(x, y)]^2 \quad (4.2)$$

สมการนี้เป็นการปรับความคมชัดและความสว่างของภาพ ในการทำการแปลงแบบแอฟไฟน์ ค่าของ $f_D(x, y)$ แล้วทำให้ได้ความแตกต่างระหว่าง $f_R(x, y)$ น้อยที่สุด โดยค่า MSE จะต่ำที่สุดเมื่อ ทำอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ด้วย s และ o แล้วได้ค่าเท่ากับ 0 ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$s = \frac{\left[N \sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x, y) f_R(x, y) - \sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x, y) \sum_{x,y=0}^{N-1} f_R(x, y) \right]}{\left[N \sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x, y)^2 - \left(\sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x, y) \right)^2 \right]} \quad (4.3)$$

และ

$$o = \frac{1}{N} \left[\sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x, y) - s \sum_{x,y=0}^{N-1} f_R(x, y) \right] \quad (4.4)$$

ถ้า $n \sum_{i=1}^n f_D(x, y)^2 - \left(\sum_{i=1}^n f_D(x, y) \right)^2 = 0$ ให้ $s=0$ และ $o = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_D(x, y)$ นำการคำนวณทั้งหมดนี้ไปแทนในส่วนของการหาค่า $d_{rms}(f \cap (R_i \times I), w_i(f))$ จากสมการ

การวัดความเหมือนของภาพ

ในทางปฏิบัติ การวัดความเหมือนกันของภาพจะใช้ PSNR วัดความแตกต่างกันระหว่างภาพสองภาพ ดังสมการที่ 4.5

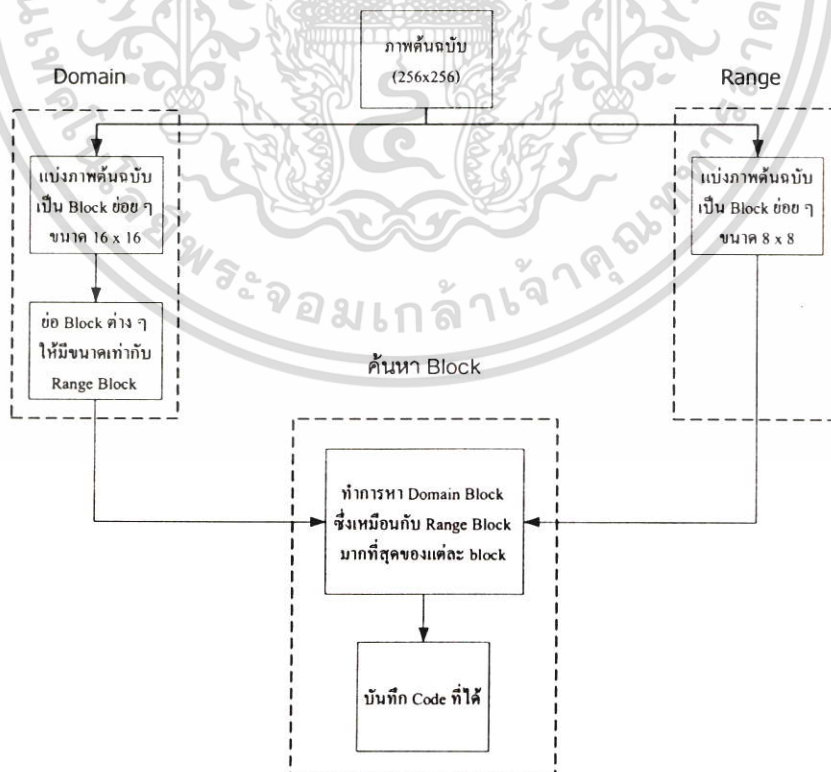
$$\begin{aligned}
 PSNR &= 20 \log_{10} \left(\frac{b}{rms} \right) \\
 &= 20 \log_{10} \left(\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} (f_R(x, y) - f_D(x, y))^2}} \right) \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

เมื่อ b เป็นค่าที่สูงที่สุดของสัญญาณที่เป็นไปได้ ในที่นี้ภาพระดับสีเทาจะมีค่าเท่ากับ 255 rms เป็นค่า rms ของความแตกต่างกันระหว่างภาพสองภาพ

โดย PSNR มีหน่วยเป็นเดซิเบล (decibel: dB) เป็นการวัดอัตราส่วนสัญญาณสูงสุดต่อความแตกต่างกันระหว่างภาพสองภาพ

กระบวนการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซโดเมน

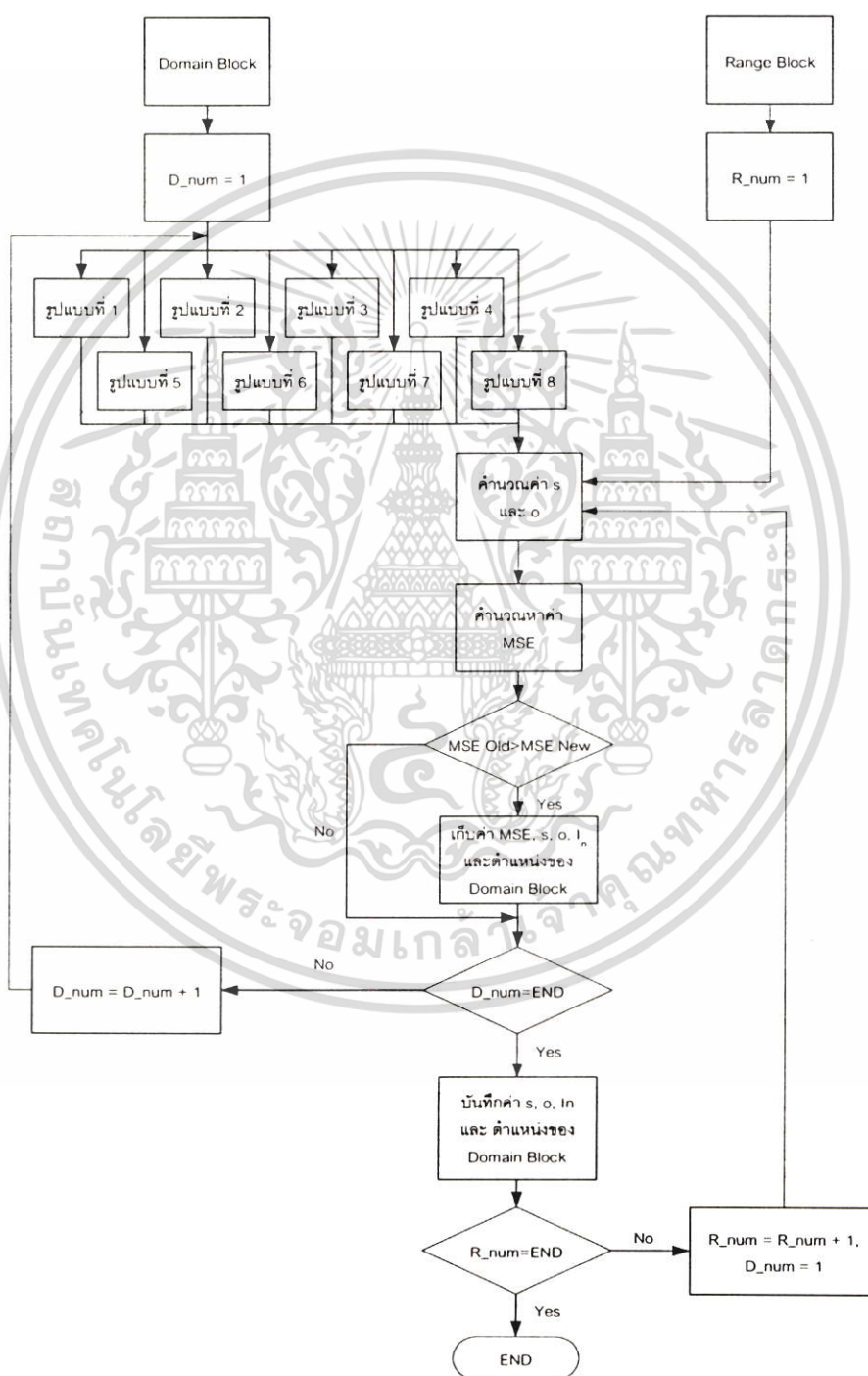
จากทฤษฎีที่กล่าวทั้งหมดข้างต้น ในปี 1992 นาย jacquin [3] ได้นำเสนอกระบวนการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซโดเมนและหลังจากนั้นมาก็มีงานวิจัยเกี่ยวกับการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลที่อ้างอิงงานวิจัยนี้ [4], [6], [8]-[11] นำวิธีการอื่นๆ มาประยุกต์ใช้เพื่อให้สามารถทำงานได้รวดเร็วยิ่งขึ้น กระบวนการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซโดเมนแสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 4.5 แสดงกระบวนการทำงานการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซโดเมน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเข้ารหัสภาพแบบแฟรกทอล ภาพต้นฉบับจะแบ่งออกเป็นบล็อกขนาด 8×8 และ 16×16 เรียกว่าเรนจ์บล็อก (R_i) และโดเมนบล็อก (D_i) ตามลำดับ ทำการย่อโดเมนบล็อก ให้มีขนาดเท่ากับเรนจ์บล็อก เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับเรนจ์บล็อก โดยในส่วนของ การค้นหาบล็อกเป็นการหาโดเมนบล็อกที่เหมือนกับเรนจ์บล็อกมากที่สุด หรือทำให้ค่า MSE ในสมการที่ 4.2. มีค่าน้อยที่สุด แสดงในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 แสดงกระบวนการในการค้นหาบล็อกในสเปซเชิงโดเมน

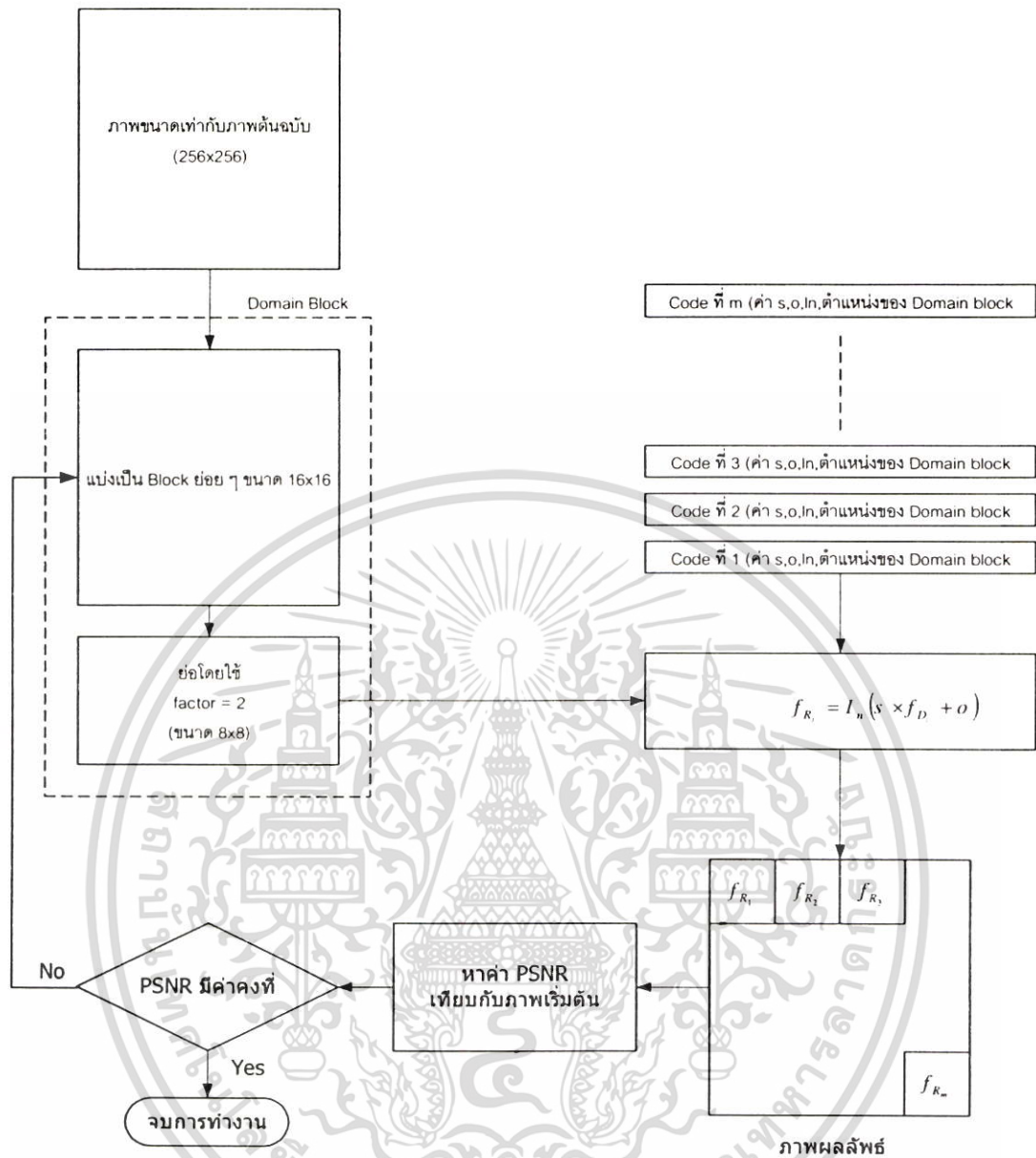
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การค้นหาล็อกมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

1. นำโดเมนบล็อกแรกและเรนจ์บล็อกแรก มาทำการคำนวณหาค่า s และ o ตามสมการที่ 4.3 และสมการที่ 4.4 ตามลำดับ
2. นำโดเมนบล็อกมาหมุนตามตารางที่ 4.1 หลังจากนั้นนำมาหาค่า MSE โดยเปรียบเทียบกับเรนจ์บล็อกจากสมการที่ 4.2
3. เก็บค่า MSE, s, o , รูปแบบการหมุนและตำแหน่งของโดเมนบล็อก ซึ่งทำให้ค่า MSE น้อยที่สุด
4. เปลี่ยนโดเมนบล็อกเป็นบล็อกถัดไปแล้วทำซ้ำข้อ 2 ถึงข้อ 3 จนครบทุกโดเมนบล็อก
5. บันทึกค่า s, o , รูปแบบการหมุนและตำแหน่งของโดเมนบล็อกเป็นข้อมูลในถอครหัสสำหรับเรนจ์บล็อกที่นำมาเปรียบเทียบ
6. เปลี่ยนเรนจ์บล็อกเป็นบล็อกถัดไป แล้วทำซ้ำข้อ 1 ถึงข้อ 5 จนครบทุกบล็อก

กระบวนการถอดรหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซเซี่ยลโดเมน

กระบวนการถอดรหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซเซี่ยลโดเมนเป็นกระบวนการย้อนกลับของการเข้ารหัสภาพ โดยอาศัยคุณสมบัติของอิเทอร์เรตฟิงก์ชันซิสเต็มมาใช้เพื่อทำให้ได้ภาพต้นฉบับกลับคืนมา โดยคุณภาพของภาพที่ได้ขึ้นอยู่กับขนาดของบล็อกในการแบ่งภาพและความเหมือนของภาพ ซึ่งการถอดรหัสภาพแบบแฟร็กทอลในสเปซเซี่ยลโดเมนแสดงในรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 แสดงขั้นตอนการถอดรหัสภาพในสเปซเชิงโดเมน

การถอดรหัสภาพมีขั้นตอนดังนี้

1. นำภาพใด ๆ ขนาดเท่ากับภาพต้นฉบับ มาทำการแบ่งเป็นบล็อกย่อย ๆ ขนาด 16x16 เป็นโดเมนบล็อก
2. ทำการย่อให้มีขนาดเท่ากับเรนจ์บล็อกในกระบวนการเข้ารหัส
3. นำบล็อกจากโดเมนบล็อกในตำแหน่งที่เก็บไว้เป็นข้อมูล (s, o, I_n และตำแหน่งของโดเมนบล็อก) สำหรับเรนจ์บล็อกแรก มาทำการคำนวณตามสมการ

$$f_R(x, y) = (s(I_n f_D(x, y)) + o)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. แทนที่บล็อกที่ได้ในตำแหน่งของเรนจ์บล็อกในภาพผลลัพธ์
5. ทำซ้ำข้อ 3 ถึง 4 โดยเปลี่ยนข้อมูลของเรนจ์บล็อกเป็นบล็อกถัดไปจนถึงข้อมูลสุดท้าย
6. หาค่า PSNR จากสมการที่ 4.5
7. นำภาพผลลัพธ์ที่ได้กลับไปแทนภาพเริ่มต้น แล้วทำซ้ำข้อ 1 ถึงข้อ 6 จนค่า PSNR มีค่าคงที่จึงหยุดการทำซ้ำ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

การปรับปรุงความเร็วการเข้ารหัสภาพ แบบแฟรกทอลในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต

5.1 บทนำ

จากวิธีการที่ใช้ในบทที่ 4 เป็นการลดขนาดข้อมูลแบบแฟรกทอลซึ่งทำงานช้ามาก จึงไม่สามารถนำไปใช้งานจริงได้ ดังนั้นจึงได้มีการคิดค้นกระบวนการต่าง ๆ เพื่อเพิ่มความเร็วในการทำงานมากขึ้น โดยการทำการแปลงภาพต้นฉบับไปในโดเมนการแปลงเวฟเล็ตก่อน แล้วทำการค้นหาโดเมนบล็อกที่เหมือนกับเรนจ์บล็อกในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการที่ใช้เพื่อลดเวลาในการคำนวณให้ลดลง โดยทำงานในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต

5.2 การแปลงภาพไปในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต

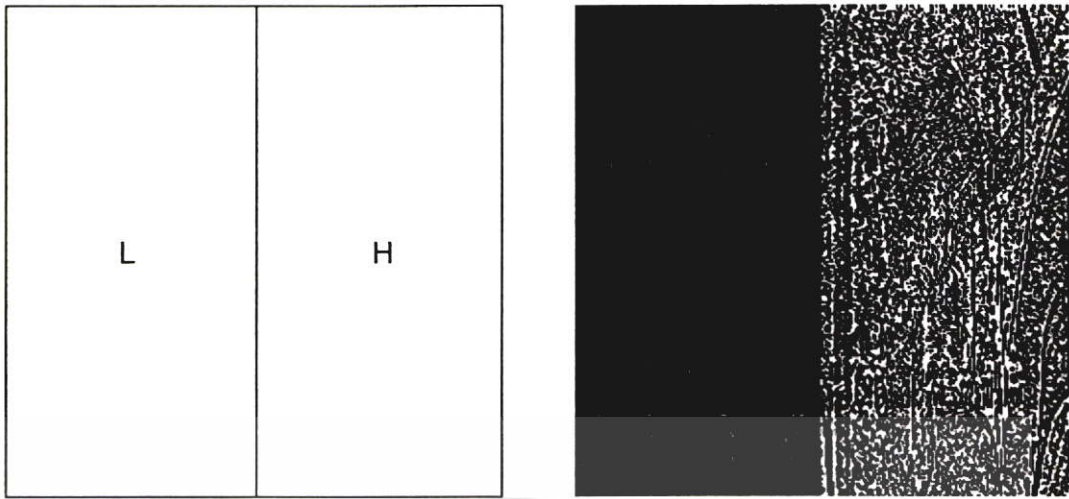
จากที่ข้อมูลภาพที่เป็นสัญญาณในสองมิตินี้ กระบวนการแปลงเวฟเล็ตที่ใช้จะต้องเป็นสองมิติด้วย แต่เพื่อความง่ายในการใช้งาน ข้อมูลภาพจะถูกแปลงเป็นสัญญาณข้อมูลในหนึ่งมิติแทนเพื่อให้สามารถใช้กระบวนการแปลงเวฟเล็ตตามที่กล่าวมาแล้วได้



รูปที่ 5.1 ภาพต้นฉบับขนาด 256x256 จุดภาพ ที่ใช้ในการแปลงเวฟเล็ต

การแปลงเวฟเล็ตของข้อมูลภาพจะทำการเลือกข้อมูลของแต่ละแถว ตามแนวแกนอนมาผ่านการแปลงเวฟเล็ตแบบหนึ่งมิติ จนครบทุกแนว ดังแสดงในรูปที่ 5.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.2 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน
หมายเหตุ ภาพของสัมประสิทธิ์ที่ได้นี้ได้ถูกปรับแต่งเพื่อการนำเสนอ

จากข้อมูลที่ได้นั้นจะถูกการแปลงเวฟเล็ตอีกครั้ง ตามแนวตั้งของภาพ แต่ในทางปฏิบัติแล้ว จะใช้วิธีการ Transpose ของ Matrix ข้อมูลภาพแทน แล้วกระบวนการแปลงเวฟเล็ตตามแนวนอนอีกครั้งจึงได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 5.3

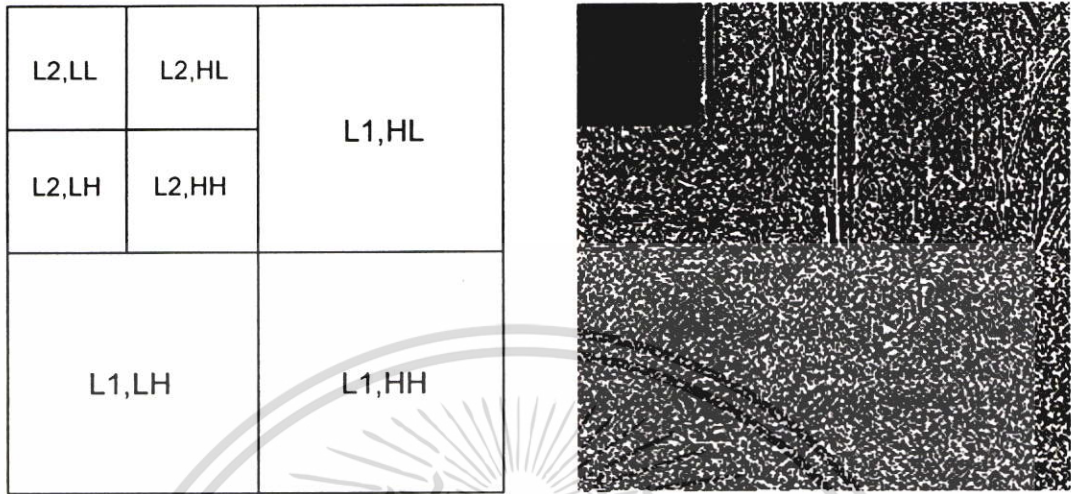


รูปที่ 5.3 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน และแนวตั้ง
หมายเหตุ ภาพของสัมประสิทธิ์ที่ได้นี้ได้ถูกปรับแต่งเพื่อการนำเสนอ

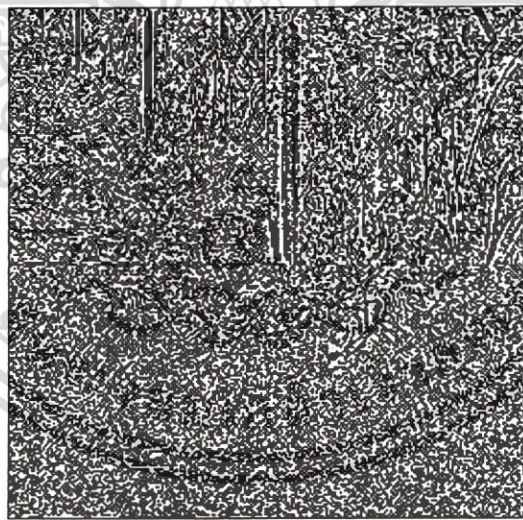
ผลที่ได้นี้จะเป็นการแปลงเวฟเล็ตแบบ Multiresolution ของข้อมูลภาพในหนึ่งระดับ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จึงแบ่งออกเป็น 4 ส่วน ดังรูปที่ 5.3 (รูปซ้าย) การแปลงเวฟเล็ตในระดับต่อ ๆ ไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะเอาข้อมูลในส่วนของความถี่ต่ำ (LL) มาทำการแปลงเวฟเล็ตต่อไป ด้วยวิธีการเช่นเดิม ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน และแนวตั้ง จำนวน 2 ครั้ง
หมายเหตุ ภาพของสัมประสิทธิ์ที่ได้นี้ ได้ถูกปรับแต่งเพื่อการนำเสนอ



รูปที่ 5.5 แสดงภาพที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตของเส้นภาพตามแนวนอน และแนวตั้ง จำนวน 8 ครั้ง
หมายเหตุ ภาพของสัมประสิทธิ์ที่ได้นี้ ได้ถูกปรับแต่งเพื่อการนำเสนอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

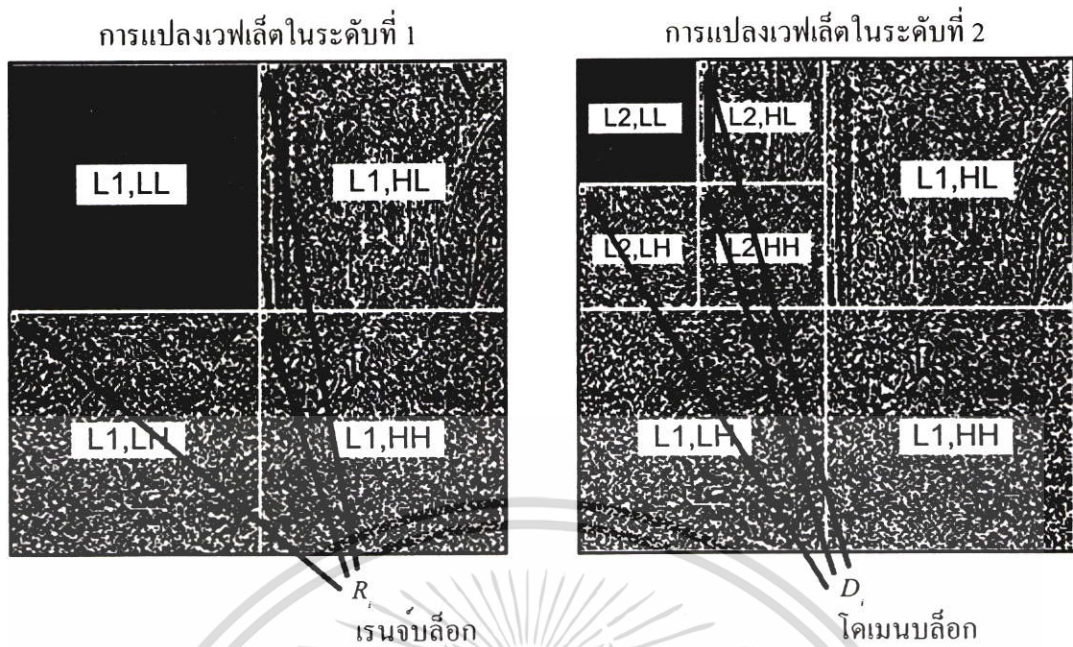
บล็อกในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต

การเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล ภาพต้นฉบับจะแบ่งออกเป็นบล็อกที่เรียกว่าเรนจ์บล็อก (R_i) และบล็อกที่ขนาดใหญ่กว่าเรนจ์บล็อก (R_i) ที่เท่าเรียกว่า โดเมนบล็อก (D_i) ซึ่งในโดเมนการแปลงเวฟเล็ตสองมิติของภาพในระดับที่หนึ่ง สัมประสิทธิ์หนึ่งค่าของแต่ละ sub band ก็จะสามารถแทนจุดภาพต้นฉบับได้เท่ากับ 2×2 จุดภาพ และเมื่อทำการแปลงเวฟเล็ตในระดับต่อไป สัมประสิทธิ์หนึ่งค่าของแต่ละ sub band ก็จะสามารถจะแสดงได้ตามตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 การใช้สัมประสิทธิ์ของการแปลงเวฟเล็ต แทนบล็อกของภาพต้นฉบับ

ระดับการแปลงเวฟเล็ต	สัมประสิทธิ์หนึ่งค่าของแต่ละ sub band ก็จะสามารถแทนจุดภาพต้นฉบับ
1	2×2
2	4×4
3	8×8
4	16×16
5	32×32
6	64×64
7	128×128

ดังนั้นหากการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลใน โดเมนการแปลงเวฟเล็ตที่ต้องการเรนจ์บล็อก (R_i) ขนาด 2×2 และ โดเมนบล็อก (D_i) ขนาด 4×4 จุดภาพ จะต้องใช้ภาพต้นฉบับที่ผ่านการแปลงเวฟเล็ตที่ระดับที่ 1 เพื่อเป็น เรนจ์บล็อก และการแปลงเวฟเล็ตที่ระดับที่ 2 เพื่อเป็น โดเมนบล็อก ดังรูปที่ 5.6



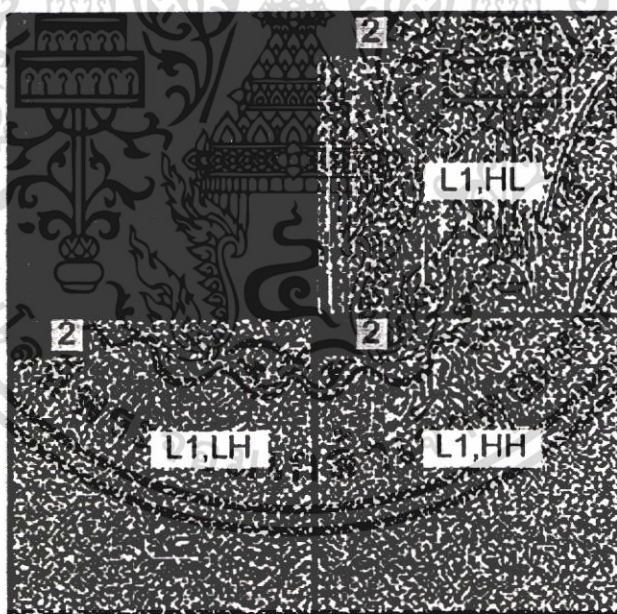
รูปที่ 5.6 แสดงตำแหน่งบล็อกใน sub band ของการแต่ละระดับการแปลงเวฟเล็ด

และหากในกรณีที่ต้องการเรนจึบบล็อก (R_i) ขนาด 8×8 และ โดเมนบล็อก (D_i) ขนาด 16×16 จุดภาพ ก็จะต้องใช้ภาพต้นฉบับที่ผ่านการแปลงเวฟเล็ดที่ระดับที่ 3 เพื่อเป็น เรนจึบบล็อก และการแปลงเวฟเล็ดที่ระดับที่ 4 เพื่อเป็น โดเมนบล็อก ซึ่งเรนจึบบล็อก และโดเมนบล็อก นั้นจะใช้โดเมนการแปลงเวฟเล็ดที่ต่างกันหนึ่งระดับ

การย้ายเรนจึบบล็อกเพื่อค้นหาความเหมือนกันในโดเมนการแปลงเวฟเล็ดก็เพียงเลื่อนตำแหน่งของจุดสัมประสิทธิ์ในตำแหน่งถัดไป เท่ากับการย้ายเรนจึบบล็อกที่จะเคลื่อนที่ไปที่ละบล็อกไม่ซ้อนทับกันของสเปเชียลโดเมน ดังรูปที่ 5.7

	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	52	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

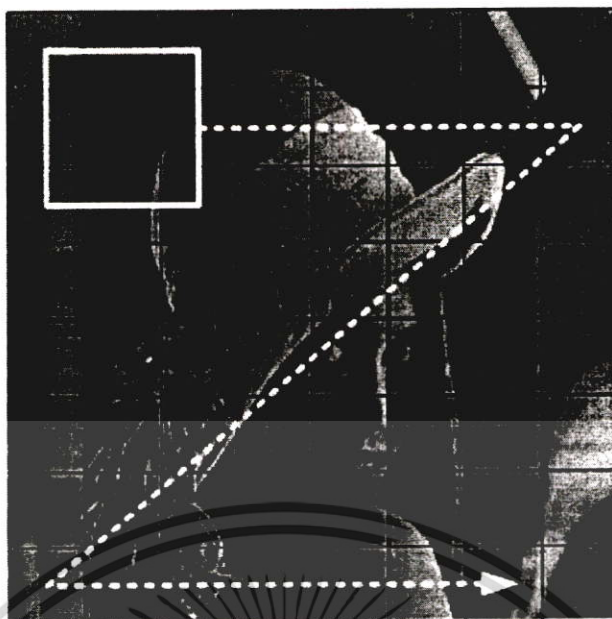
รูปที่ 5.7 ตำแหน่งการย้ายตำแหน่งของเรนจ์บล็อกในสเปซเฟดโดเมน หมายเลขบนบล็อกคือลำดับการย้ายบล็อกจาก 1 จนถึง 64



รูปที่ 5.8 ตำแหน่งการย้ายตำแหน่งของเรนจ์บล็อกในโดเมนการแปลงเวฟเล็ด หมายเลขบนบล็อกคือลำดับการย้ายบล็อก

ส่วนการเลื่อนโดเมนบล็อกในของสเปซเฟดโดเมนนั้นจะต้องไปโนเป็นทุก ๆ ส่วนของภาพ (เลื่อนได้ทุก ๆ จุดภาพ) ดังรูปที่ 5.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

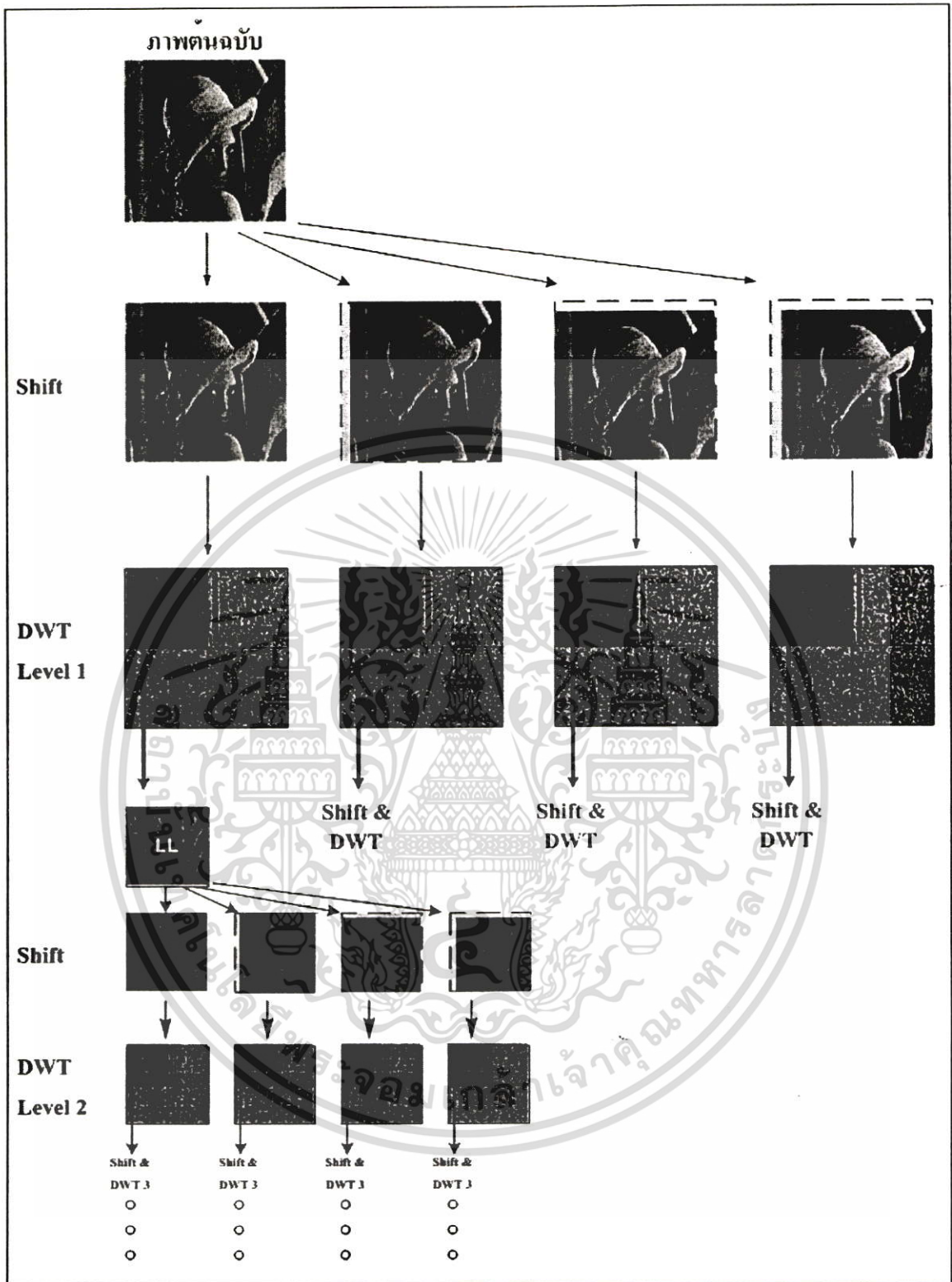


รูปที่ 5.9 ตำแหน่งการย้ายตำแหน่งของ โดเมนบล็อกในสเปซเซิลโดเมน

ซึ่งใช้วิธีการย้ายตำแหน่งของโดเมนบล็อกเช่นเดียวกับเรนจ์ไม่ได้ ในโดเมนการแปลงเวฟเล็ตจึงได้แก้ปัญหาโดยจัดให้มีการเลื่อน (Shift) ข้อมูลภาพ 4 แบบ ประกอบด้วย

1. ไม่มีการเลื่อนภาพ
2. การเลื่อนภาพไปทางขวา
3. การเลื่อนภาพลงทางแนวตั้ง
4. การเลื่อนภาพไปทางขวา และการเลื่อนภาพลงทางแนวตั้ง

แล้วจึงดำเนินการแปลงเวฟข้อมูลภาพในการแปลงภาพในระดับต่อมาก็จะนำข้อมูล LL ในแต่ละภาพมาทำการเลื่อน (Shift) ไปใน 4 แบบ ทำให้วงจรครบทุกระดับของการแปลงเวฟเล็ตที่ต้องการใช้งานในกระบวนการค้นหาความเหมือนในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต ดังรูปที่ 5.10 ซึ่งจะทำให้การย้ายตำแหน่งของโดเมนบล็อกเป็นไปอย่างอิสระในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต



รูปที่ 5.10 แสดงการเลื่อน (Shift) และทำการแปลงเวฟเล็ทเพื่อการย้ายตำแหน่งของโดเมนบล็อกในโดเมนการแปลงเวฟเล็ท

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปแบบการหมุนของภาพในกลุ่มต่าง ๆ

รูปแบบการหมุนจากสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการแปลง ทั้ง 8 แบบ ของโดเมนการแปลงเวฟเล็ต ในการหมุนแต่ละครั้งจะทำให้เครื่องหมาย ของแต่ละ sub band และเป็นการสลับตำแหน่งของ sub band LH, HL ดังนั้นจึงสามารถกำหนดลักษณะในการหมุนของภาพได้จากการเปลี่ยนแปลงดัง ตารางที่ 5.2



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

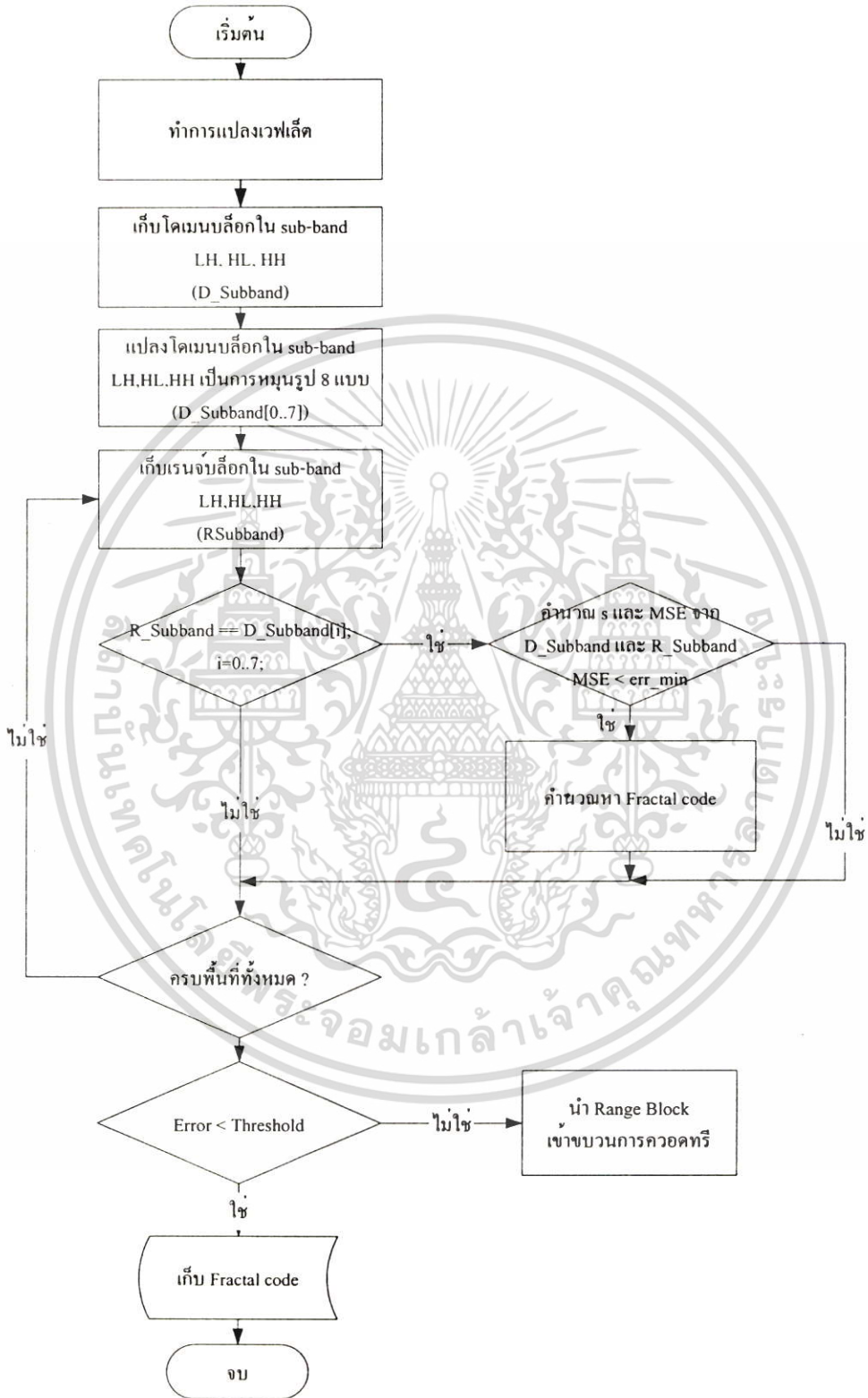
ตารางที่ 5.2 แสดงลักษณะของสัมประสิทธิ์ในการหมุนรูปแบบต่าง ๆ

รูปแบบ	ความหมาย	โดเมน การแปลงเวฟเล็ด	ลักษณะของภาพ
I_1	Identity	$\begin{matrix} LL & LH \\ HL & HH \end{matrix}$	
I_2	x flip	$\begin{matrix} LL & LH \\ -HL & -HH \end{matrix}$	
I_3	y flip	$\begin{matrix} LL & -LH \\ HL & -HH \end{matrix}$	
I_4	180° rotation	$\begin{matrix} LL & -LH \\ -HL & HH \end{matrix}$	
I_5	(x = y) flip	$\begin{matrix} LL & HL \\ LH & HH \end{matrix}$	
I_6	90° rotation	$\begin{matrix} LL & -HL \\ LH & -HH \end{matrix}$	
I_7	270° rotation	$\begin{matrix} LL & HL \\ -LH & -HH \end{matrix}$	
I_8	(x+y = 0) flip	$\begin{matrix} LL & -HL \\ -LH & HH \end{matrix}$	

หลังจากที่ทราบลักษณะของสัมประสิทธิ์ในการหมุนภาพรูปแบบต่าง ๆ แล้ว เมื่อนำมาประยุกต์เข้ากับการคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3 การค้นหาความเหมือนของภาพในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต



รูปที่ 5.11 การเข้ารหัสภาพในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การค้นหาล็อกมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

1. นำภาพที่ต้องการเข้ารหัสมาทำการแปลงเวฟเล็ต
2. เก็บค่าโดเมนบล็อกใน sub band ตำแหน่ง LH, HL และ HH
3. นำโดเมนบล็อกใน sub band ตำแหน่ง LH, HL และ HH มาหมุนตามตารางที่ 5.2 เก็บค่าทั้งหมดใช้ในการคำนวณ
4. นำค่าที่ได้ในข้อ 2, 3 มาคำนวณหาค่า s จากสมการดังนี้

$$s = \frac{\left[N \sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x,y) f_R(x,y) - \sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x,y) \sum_{x,y=0}^{N-1} f_R(x,y) \right]}{\left[N \sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x,y)^2 - \left(\sum_{x,y=0}^{N-1} f_D(x,y) \right)^2 \right]}$$

เมื่อ N เท่ากับ 3 เพราะจำนวนจุดมีเพียงหนึ่งจุดใน sub-band ของ LH, HL และ HH และค่า MSE จากสมการ

$$MSE = \sum_{x,y=0}^{N-1} [s(I_r(f_D(x,y))) - f_R(x,y)]^2$$

ห้ค่า o ออกจากสมการข้างบนนี้เพราะทั้ง sub-band ของ LH, HL และ HH จะไม่มีส่วนประกอบของ o อยู่

5. ถ้า MSE จากสมการในข้อ 4 เป็นค่าที่น้อยที่สุดแล้ว คำนวณหารหัสของแฟร็กทอล จากสมการที่ 4.2, 4.3, 4.4 และทำการเก็บค่า MSE, s, o , รูปแบบการหมุนและตำแหน่งของโดเมนบล็อก
6. เปลี่ยนโดเมนบล็อกเป็นบล็อกถัดไปแล้วทำซ้ำข้อ 2 ถึงข้อ 3 จนครบทุกโดเมนบล็อก
7. เปลี่ยนเรนจ์บล็อกเป็นบล็อกถัดไป แล้วทำซ้ำข้อ 1 ถึงข้อ 6 จนครบทุกบล็อก
8. ทำการตัดสินใจแบ่งบล็อกให้ย่อยลงไปจากค่า MSE ที่ได้จากผลสุดท้ายของการหาจากโดเมนบล็อกให้น้อยกว่าเทรชโฮลด์ที่กำหนดไว้ แสดงให้เห็นว่าบล็อกที่ทำการค้นหานั้นยังมีความแตกต่างกันมากอยู่ จึงต้องทำย่อยลงไปอีก เพื่อเพิ่มความละเอียดของภาพให้มากขึ้น
9. บันทึกค่า s, o รูปแบบการหมุนและตำแหน่งของโดเมนบล็อกเป็นข้อมูลในอครหัสสำหรับเรนจ์บล็อกที่นำมาเปรียบเทียบ

บทที่ 6

การทดลองและผลการทดลอง

6.1 บทนำ

การทดลองในวิทยานิพนธ์นี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ในส่วนแรกเป็นการทดลองเพื่อนับจำนวนการดำเนินการคำนวณ (Operation) ที่ใช้ในการประมวลผล และคุณภาพของภาพผลลัพธ์เมื่อภาพต้นฉบับมีลักษณะแตกต่างกัน ส่วนที่สองเป็นการเปรียบเทียบอัตราการใช้หน่วยประมวลผลของภาพผลลัพธ์ เมื่อเทียบกับวิธีการบีบอัดภาพแบบ “Joint Photographic Experts Group” ทั้งแบบ “JPEG” (.JPG) และแบบ “JPEG 2000” (.JP2)

ในส่วนของโปรแกรมที่ใช้ในการทดลองในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ พัฒนาขึ้นโดยใช้โปรแกรมคำนวณในรูปแบบของภาษา C++ เขียนบนบนซอฟต์แวร์ Borland C++ Builder™ Enterprise suite เวอร์ชัน 5.0 (Build 12.34) ทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์แบบพีซี ที่มีหน่วยประมวลผล “PENTIUM 4 HT” ความเร็ว 2.4 จิกะเฮิรตซ์ และหน่วยความจำขนาด 512 เมกกะไบต์

6.2 อัลกอริทึมที่ใช้ในการทดลอง

ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้อัลกอริทึมในการทดลองทั้งหมด 2 แบบ ด้วยกันคือ วิธีการของแฟร็กทอล และวิธีการที่ได้พัฒนาขึ้นมา โดยการค้นหาความเหมือนของภาพในโดเมนของการแปลงเวฟเล็ต

6.3 ข้อมูลที่ใช้ในการทดลอง

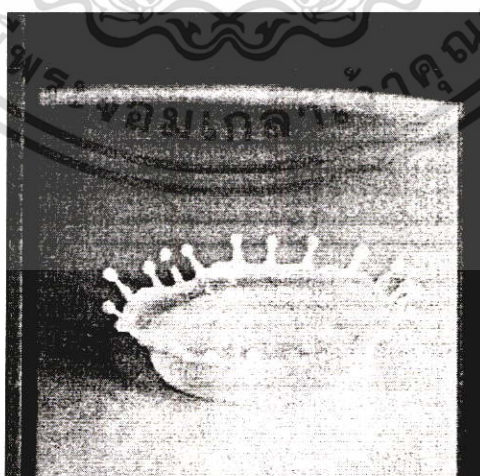
ข้อมูลที่ใช้ทดลองได้จากการนำภาพขนาด 256x256 จุด และมีระดับความเข้มของสีเทา 256 ระดับ จำนวน 3 ภาพ มาแทนข้อมูลในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้ ภาพ “Lena” เป็นภาพที่มีรายละเอียดปานกลาง, ภาพ “Mandrill” เป็นภาพที่มีรายละเอียดของภาพมาก และภาพ “Milkdrop” เป็นภาพที่มีรายละเอียดของภาพน้อย ดังแสดงในรูปที่ 5.1



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 6.1 ภาพต้นฉบับ (ก) ภาพ “Lena” (ข) ภาพ “Mandrill” และ (ค) ภาพ “Milkdrop”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การนำภาพลักษณะต่างกันนี้เป็นข้อมูลในการทดลองเพื่อทดสอบความแตกต่างของอัตราการลดขนาดข้อมูล ความเร็วที่ใช้ในการประมวลผล และคุณภาพของภาพผลลัพธ์ ที่ได้จากการทดลองด้วยวิธีต่าง ๆ

6.4 การตรวจสอบและการวัดผล

ในแต่ละการทดลองเราจะบันทึกผลลัพธ์ดังนี้

1. การนับจำนวนการดำเนินการคำนวณ (Operation) หาค่าของ s , o และ MSE (ตามสมการที่ 4.3, 4.4 และ 4.2 ตามลำดับ) ในขั้นตอนการเปรียบเทียบความเหมือนระหว่างโดเมนบล็อกกับเร็นจ์บล็อก เพื่อเข้ารหัสเฟรคทอล ซึ่งทั้ง 3 ตัวแปรจะนับรวมเป็นหนึ่งครั้ง การดำเนินการคำนวณ มีหน่วยเป็นครั้ง เป็นการนับตั้งแต่เริ่มกระบวนการเข้ารหัสจนได้ผลลัพธ์ โดยไม่รวมขั้นตอนของการถอดรหัสภาพ

2. อัตราบิต (Bit Rate) คือค่าเฉลี่ยของจำนวนบิตภาพต่อจุดภาพ (bit per pixel, bpp) ของภาพที่ถูกลดข้อมูล โดยสามารถคำนวณได้จากอัตราส่วนระหว่างจำนวนบิตข้อมูลทั้งหมดของภาพที่ถูกลดข้อมูล ต่อจำนวนจุดภาพทั้งหมดของภาพต้นแบบ ดังนี้

$$\text{Bit Rate (bit per pixel, bpp)} = \frac{\text{จำนวนบิตทั้งหมดของภาพที่ถูกลดข้อมูล}}{\text{จำนวนบิตภาพทั้งหมดของภาพต้นฉบับ}} \quad (6.1)$$

ซึ่ง จำนวนบิตทั้งหมดที่ใช้ในการเก็บภาพต้นฉบับ คือ $256 \times 256 \times 8$ บิต (ขนาดความกว้างของภาพ \times ความสูงของภาพ \times จำนวนบิตที่ใช้การเก็บค่าสีของภาพ grayscale)

3. คุณภาพของภาพ การวัดคุณภาพของภาพในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ใช้การวัดอัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (Peak signal-to-noise ratio เขียนแทนด้วย PSNR) โดยคำนวณได้จากสมการที่ 4.5

6.5 การทดลองและผลการทดลอง

การทดลองที่ 1

เป็นการทดลองเพื่อนับจำนวนการดำเนินการคำนวณ (Operation) ที่ใช้ในการเข้ารหัสภาพ และคุณภาพของภาพผลลัพธ์ เมื่อภาพต้นฉบับมีลักษณะแตกต่างกัน โดยกำหนดให้แต่ละวิธีทำการแบ่งเร็นจ์บล็อกและโดเมนบล็อกให้มีการแบ่งภาพแบบควอดทรีโดยทำการแบ่งเร็นจ์บล็อกย่อยลงไปต่ำสุดขนาด 4×4 และค่า Error threshold ที่ใช้ในการตัดสินใจแบ่งเร็นจ์บล็อกย่อยลงไป ซึ่งจะได้ผลการทดลองดังนี้

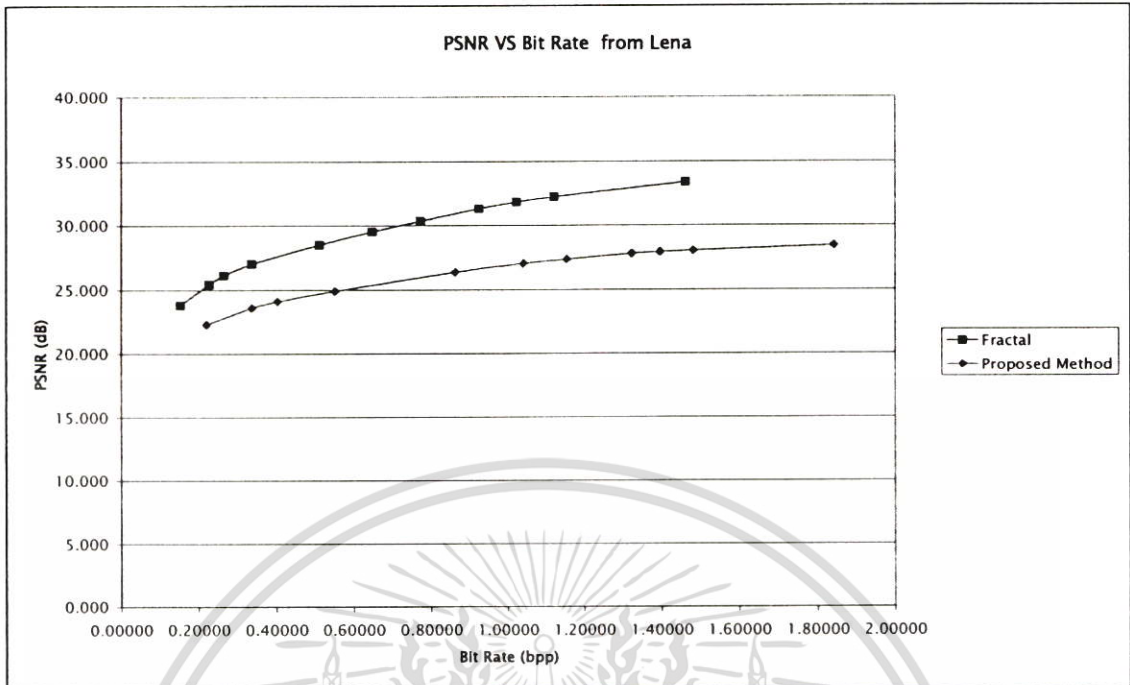
ตารางที่ 6.1 ผลการทดลองจากวิธีแบบแฟร็กทอล โดยใช้ภาพต้นแบบ “Lena”

Error Threshold	PSNR (dB)	Bit Rate (bpp)	Operation (times)
3000	33.371	1.46191	77,322,406
6000	32.213	1.12134	69,638,567
8000	31.806	1.02246	67,467,087
10000	31.291	0.92358	65,502,162
15000	30.334	0.77197	61,445,744
20000	29.512	0.64673	58,180,364
30000	28.485	0.51050	54,295,192
60000	27.000	0.33691	48,253,138
100000	26.103	0.26440	43,956,278
150000	25.403	0.22705	41,638,874
300000	23.776	0.15234	35,418,316

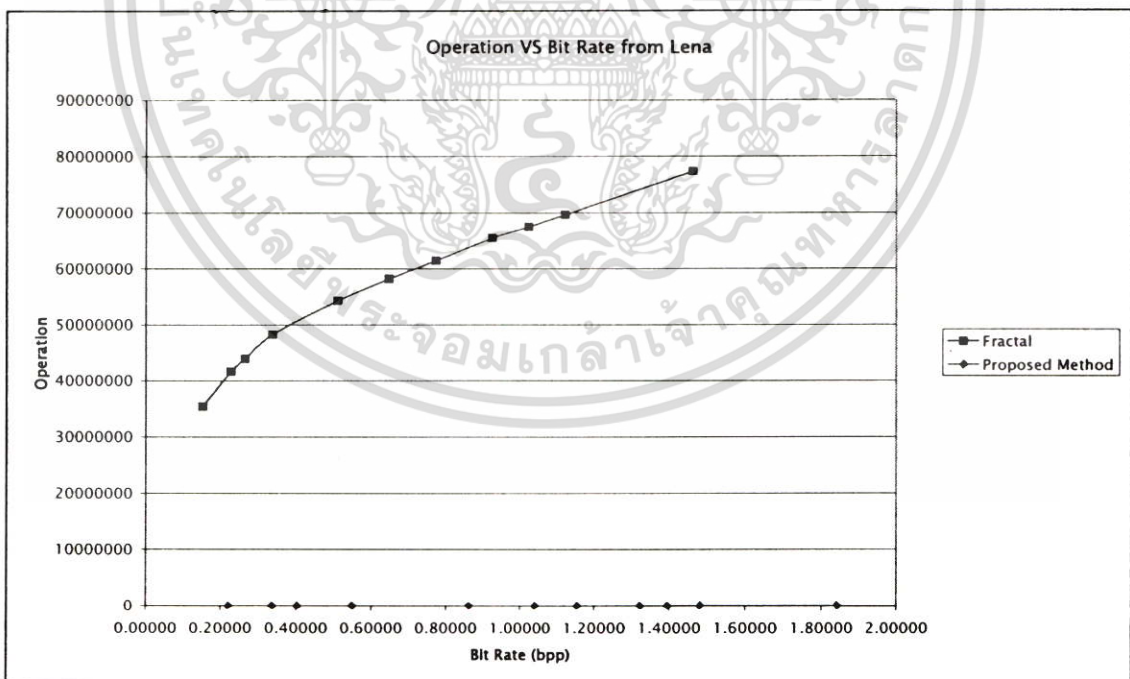
ตารางที่ 6.2 ผลการทดลองจากวิธีแบบที่นำเสนอ โดยใช้ภาพต้นแบบ “Lena”

Error Threshold	PSNR (dB)	Bit Rate (bpp)	Operation (times)
3000	28.404	1.84204	44,841
6000	28.010	1.48169	43,331
8000	27.908	1.39600	23,697
10000	27.782	1.32349	23,382
15000	27.343	1.15430	13,220
20000	27.031	1.04004	13,029
30000	26.361	0.86206	12,644
60000	24.885	0.55005	12,186
100000	24.076	0.40283	2,231
150000	23.578	0.33691	2,122
300000	22.268	0.22046	1,749

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของภาพผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Lena”



รูปที่ 6.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างการดำเนินการคำนวณและอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Lena”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

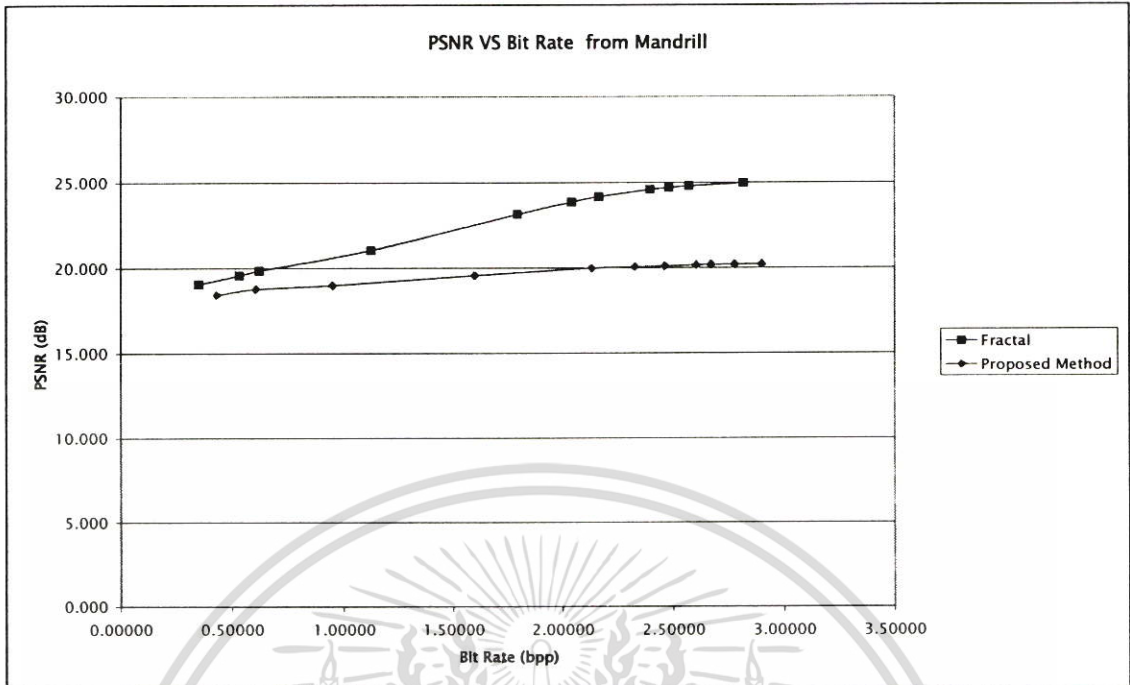
ตารางที่ 6.3 ผลการทดลองจากวิธีแบบแฟร็กทอล โดยใช้ภาพต้นแบบ “Mandrill”

Error Threshold	PSNR (dB)	Bit Rate (bpp)	Operation (times)
3000	24.951	2.81763	104,398,689
6000	24.779	2.57153	100,252,839
8000	24.685	2.48145	98,682,468
10000	24.569	2.39575	97,317,423
15000	24.158	2.16504	93,038,083
20000	23.855	2.04199	91,035,385
30000	23.137	1.79370	86,380,384
60000	21.037	1.12354	73,551,317
100000	19.858	0.62256	64,306,331
150000	19.565	0.53247	61,253,613
300000	19.061	0.35010	51,635,881

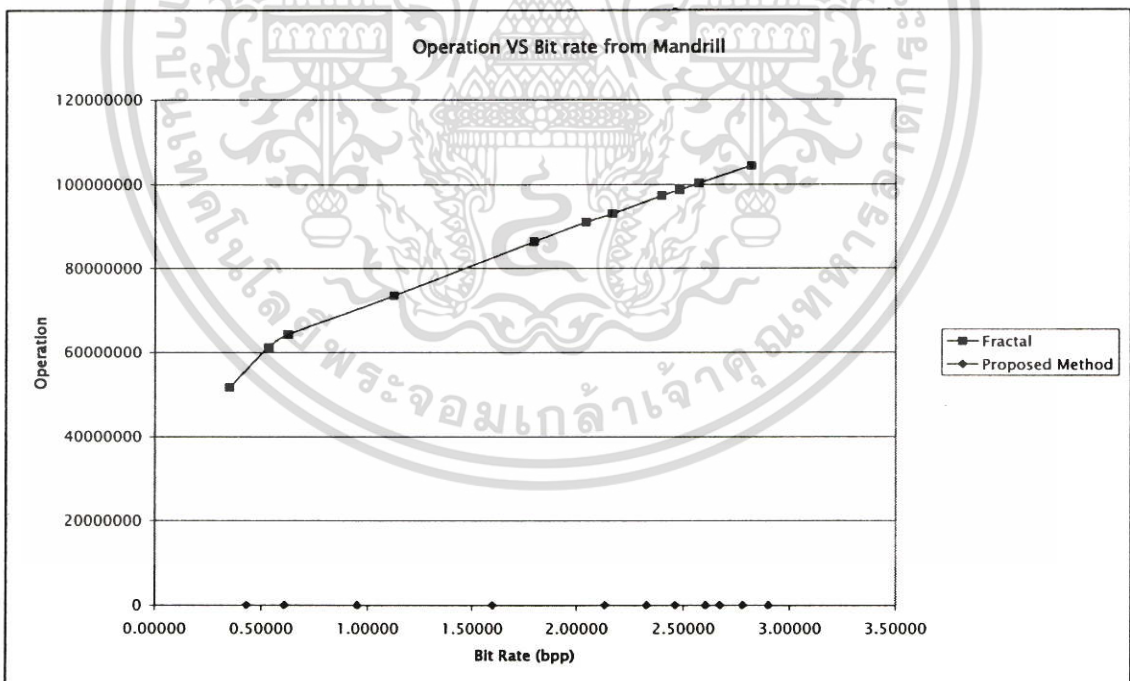
ตารางที่ 6.4 ผลการทดลองจากวิธีแบบที่นำเสนอ โดยใช้ภาพต้นแบบ “Mandrill”

Error Threshold	PSNR (dB)	Bit Rate (bpp)	Operation (times)
3000	20.217	2.89893	4,553
6000	20.196	2.77808	4,400
8000	20.179	2.67261	4,290
10000	20.162	2.60449	4,230
15000	20.103	2.46167	4,079
20000	20.051	2.32764	3,947
30000	19.976	2.13208	3,769
60000	19.562	1.59814	3,351
100000	18.991	0.94995	2,909
150000	18.770	0.60718	2,653
300000	18.431	0.43140	2,339

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.4 กราฟเปรียบเทียบการดำเนินการคำนวณและอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Mandrill”



รูปที่ 6.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างการดำเนินการคำนวณและอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Mandrill”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

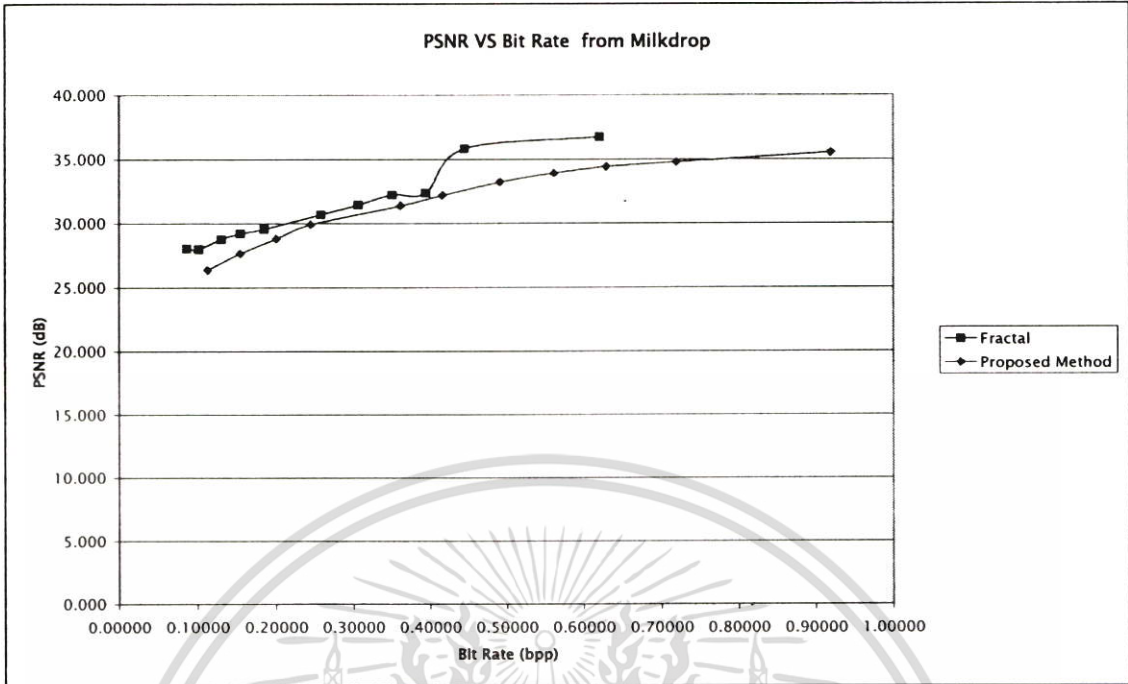
ตารางที่ 6.5 ผลการทดลองจากวิธีแบบแฟรกทอล โดยใช้ภาพต้นแบบ “Milkdrop”

Error Threshold	PSNR (dB)	Bit Rate (bpp)	Operation (times)
3000	36.720	0.62036	46,585,728
6000	35.812	0.44458	40,352,800
8000	32.382	0.39404	37,669,118
10000	32.227	0.35010	34,808,155
15000	31.455	0.30615	32,454,715
20000	30.688	0.25781	30,869,022
30000	29.542	0.18530	26,378,555
60000	29.202	0.15454	23,584,358
100000	28.752	0.13037	22,702,590
150000	27.984	0.10181	19,638,799
300000	28.027	0.08643	15,996,750

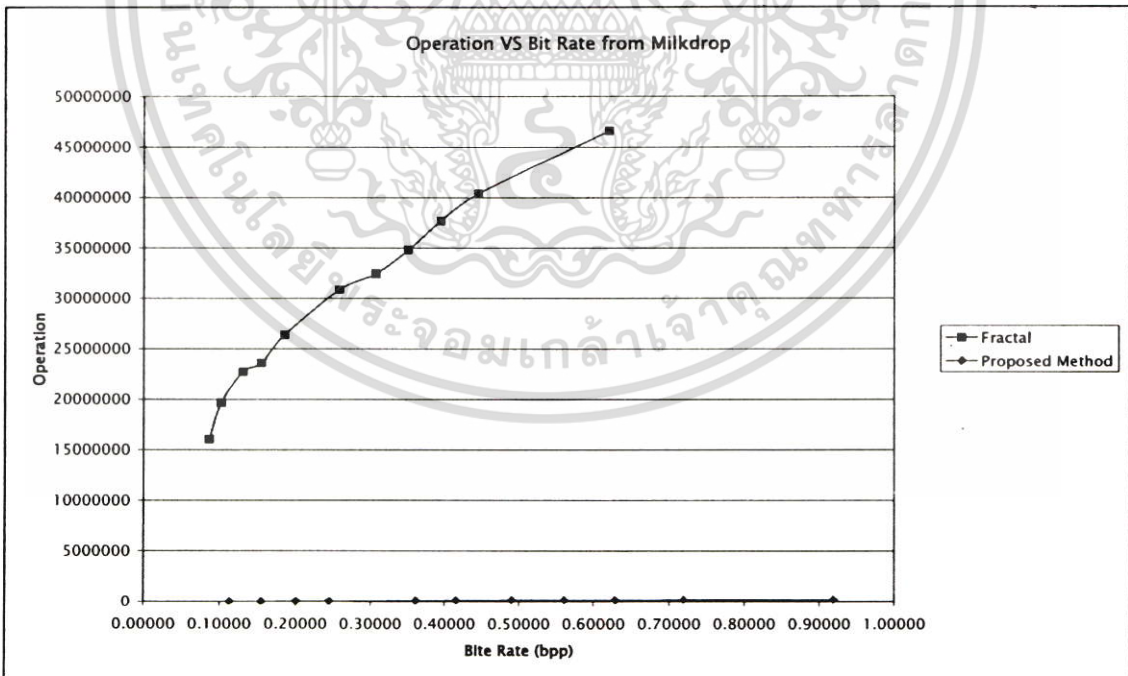
ตารางที่ 6.6 ผลการทดลองจากวิธีแบบที่นำเสนอ โดยใช้ภาพต้นแบบ “Milkdrop”

Error Threshold	PSNR (dB)	Bit Rate (bpp)	Operation (times)
3000	35.502	0.91919	207,666
6000	34.763	0.71924	173,996
8000	34.398	0.62915	163,012
10000	33.912	0.56104	152,353
15000	33.214	0.49072	140,516
20000	32.185	0.41602	120,116
30000	31.379	0.36108	100,140
60000	29.897	0.24463	36,763
100000	28.789	0.20068	34,735
150000	27.633	0.15454	2,492
300000	26.354	0.11279	2,263

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

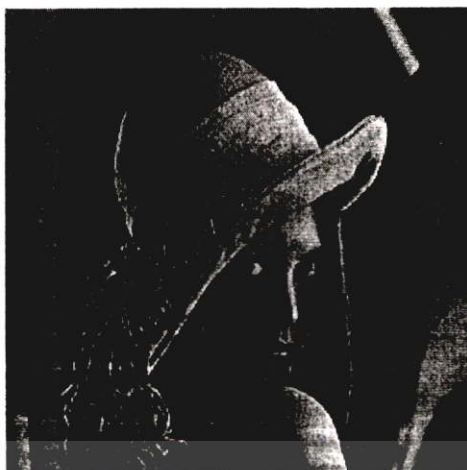


รูปที่ 6.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของภาพผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Milkdrop”

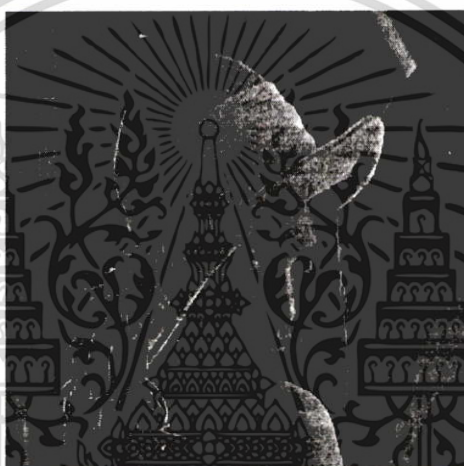


รูปที่ 6.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างการดำเนินการคำนวณและอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Milkdrop”

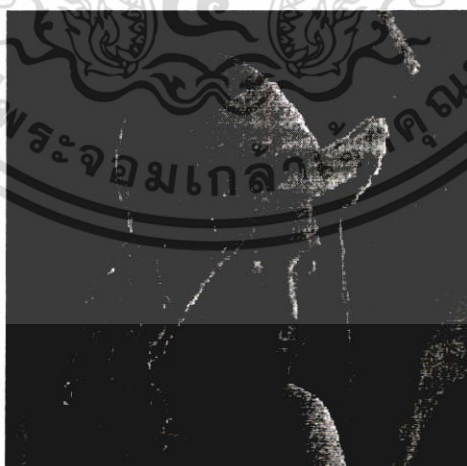
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



(ข) PSNR = 33.371 dB, Bit Rate = 1.46191 bpp

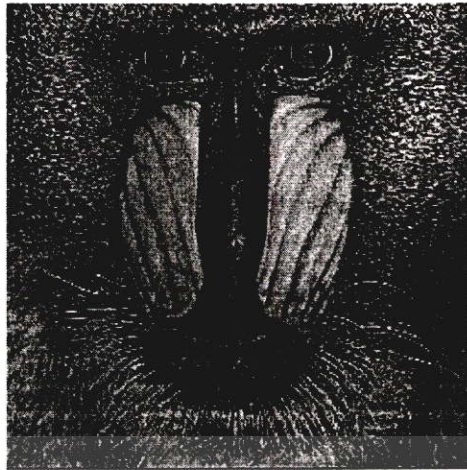


(ค) PSNR = 28.404 dB, Bit Rate = 1.84204 bpp

รูปที่ 6.8 ภาพผลลัพธ์ “Lena” ที่ได้จากการเข้ารหัสด้วยวิธีต่าง ๆ ที่ค่า PSNR สูงสุด

(ก) ภาพต้นฉบับ (ข) วิธีแบบแฟร็กทอล (ค) วิธีที่นำเสนอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



(ข) PSNR = 24.951 dB, Bit Rate = 2.81763 bpp

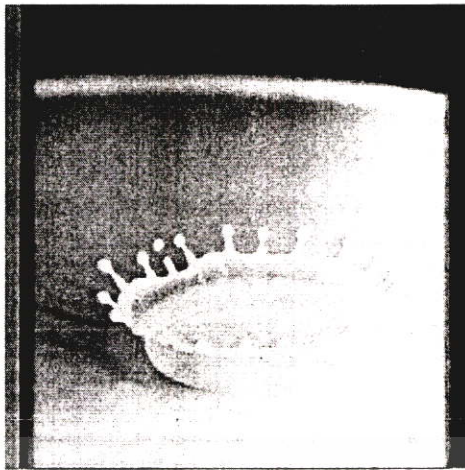


(ค) PSNR = 20.217 dB, Bit Rate = 2.89893 bpp

รูปที่ 6.9 ภาพผลลัพธ์ “Mandrill” ที่ได้จากการเข้ารหัสด้วยวิธีต่าง ๆ ที่ค่า PSNR สูงสุด

(ก) ภาพต้นฉบับ (ข) วิธีแบบแฟร็กทอล (ค) วิธีที่นำเสนอ

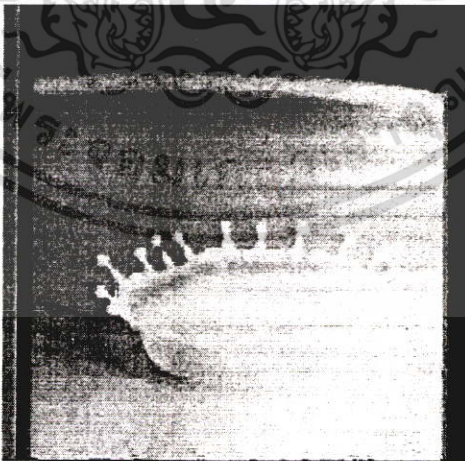
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



(ข) PSNR = 36.720 dB, Bit Rate = 0.62036 bpp



(ค) PSNR = 35.502 dB, Bit Rate = 0.91919 bpp

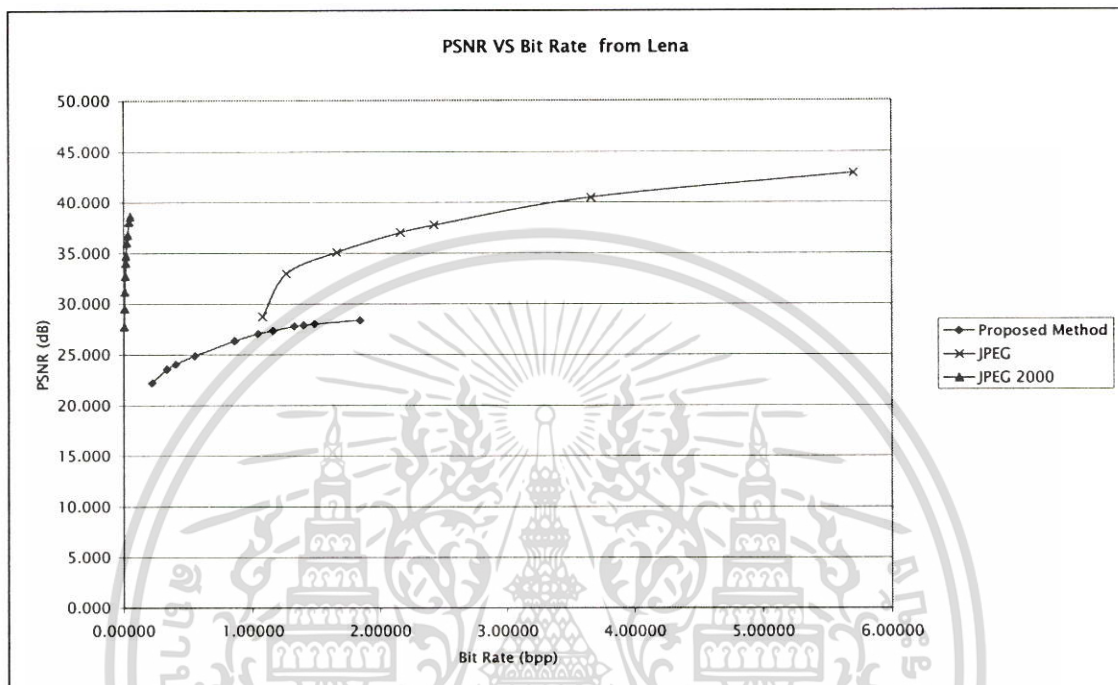
รูปที่ 6.10 ภาพผลลัพธ์ “Milkdrop” ที่ได้จากการเข้ารหัสด้วยวิธีต่าง ๆ ที่ค่า PSNR สูงสุด

(ก) ภาพต้นฉบับ (ข) วิธีแบบแฟร็กทอล (ค) วิธีที่นำเสนอ

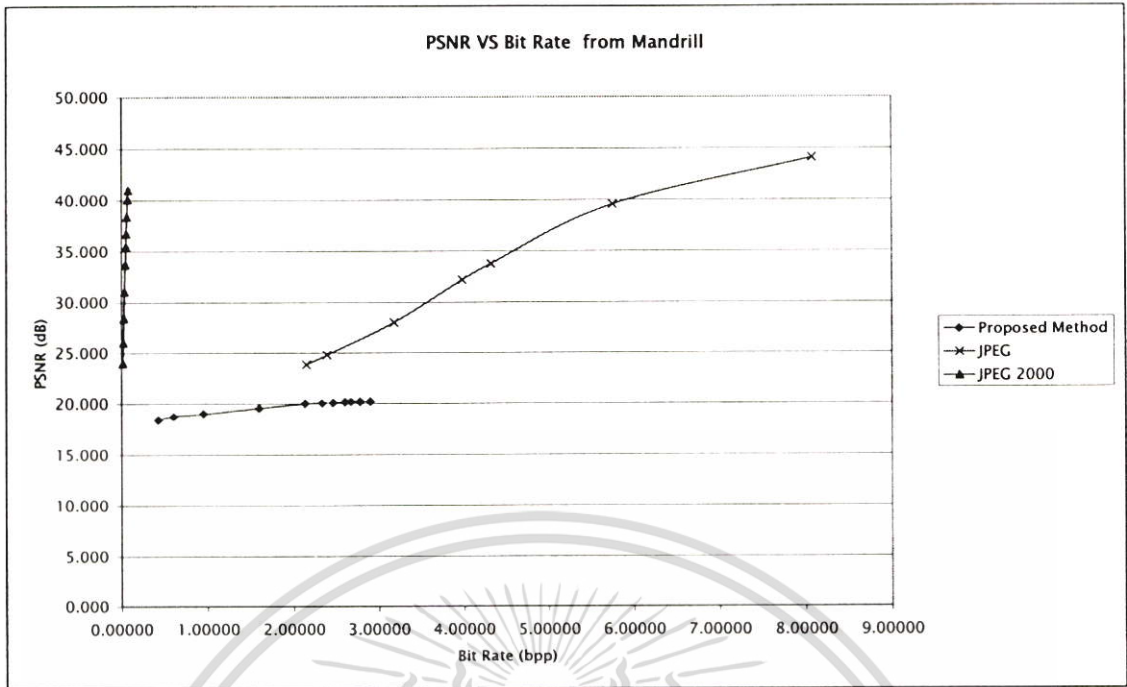
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การทดลองที่ 2

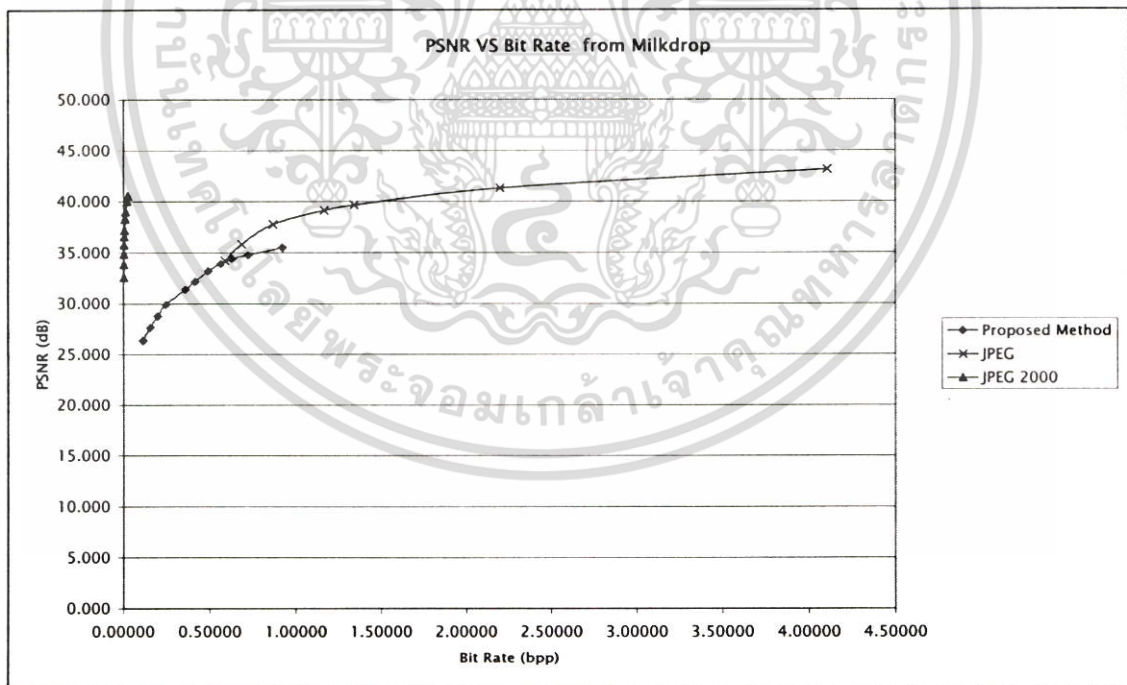
เป็นการเปรียบเทียบอัตราการบีบอัดและคุณภาพของภาพผลลัพธ์ของวิธีที่พัฒนาขึ้นมาทั้ง 3 แบบ กับวิธีการบีบอัดภาพแบบ “JPEG” และ “JPEG 2000” ซึ่งทำการบันทึกจากโปรแกรม Photoshop ได้ผลดังนี้



รูปที่ 6.11 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของภาพผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Lena”



รูปที่ 6.12 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของภาพผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Mandrill”



รูปที่ 6.13 กราฟเปรียบเทียบระหว่างค่า PSNR ของภาพผลลัพธ์และอัตราการบีบอัดข้อมูลของภาพ “Milkdrop”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 7

สรุปผลและแนวทางการพัฒนา

7.1 สรุปผลการทดลอง

จากผลการทดลองที่ได้สามารถสรุปเป็นข้อ ๆ ได้ดังนี้

1. เมื่อเปรียบเทียบการดำเนินการคำนวณ (Operation) ระหว่างวิธีแบบแฟร็กทอล กับวิธีที่พัฒนาขึ้น จะเห็นว่าแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ อัตราส่วนของการดำเนินการคำนวณภาพที่มีรายละเอียดปานกลาง (ภาพ “Lena”) มีค่าเท่ากับ $61445743 / 13220 \approx 4647$ เท่า และคุณภาพของภาพ (PSNR) ผลลัพธ์แตกต่างกัน $30.334 - 27.343 \approx 2.991$ dB จึงสามารถสรุปได้ว่าได้ใช้การคำนวณที่น้อยลง ซึ่งก็จะส่งผลให้เวลาที่ใช้ในการประมวลผลนั้นน้อยลงไปด้วย โดยที่คุณภาพของภาพสูญเสียไปเพียงเล็กน้อยเท่านั้น
2. จากผลการทดลองการแบ่งภาพแบบควอดทรี คุณภาพของภาพ (PSNR) มีค่าสูงขึ้น แสดงว่าการแบ่งภาพแบบควอดทรี ซึ่งเป็นการแบ่งเร็นจ์บล็อกย่อยลงไปอีก สามารถทำให้ได้คุณภาพของภาพที่ดีขึ้น โดยแลกกับอัตราการบีบอัดข้อมูลภาพที่น้อยลงกว่าเดิม
3. แทนบล็อกของภาพในโดเมนการแปลงเวฟเล็ตจะเป็นเพียง 3 จุด (sub band LH, HL, HH sub band ละจุดเท่านั้น) ซึ่งจะเสียเวลาในการทำการแปลงเวฟเล็ตเพียงครั้งเดียวซึ่งเร็วกว่าการเปรียบเทียบทั้งบล็อกของแฟร็กทอลมาก (ใช้ทุกจุดในบล็อกมาคำนวณ)
3. การหมุนภาพแบบต่าง ๆ ในโดเมนการแปลงเวฟเล็ตจะเท่ากับการสลับเครื่องหมายบวกและลบ sub band ของ LH, HL, HH หรือเป็นการสลับตำแหน่ง sub band ของ LH, HL เท่านั้น ตามที่แสดงในตารางที่ 5.2 ซึ่งจะเป็นวิธีที่สะดวกและรวดเร็วว่าการหมุนภาพในสเปซเชิงโดเมน ซึ่งใช้การคูณเมตริกซ์ ตามตารางที่ 4.2
4. การเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล ในการทดลองที่ผ่านมา จะเห็นว่าลักษณะของภาพมีผลต่ออัตราการบีบอัดภาพและคุณภาพของภาพผลลัพธ์เป็นอย่างมาก โดยภาพที่มีรายละเอียดมากจะได้อัตราการบีบอัดที่น้อยลงและคุณภาพของภาพผลลัพธ์ก็จะต่ำตามไปด้วย และภาพที่มีรายละเอียดน้อยจะได้อัตราการบีบอัดที่สูงมากและคุณภาพของภาพผลลัพธ์ที่ได้จะสูงมาก
5. เมื่อนำวิธีการที่ได้พัฒนาขึ้น มาเปรียบเทียบกับการบันทึกภาพแบบ “JPEG” จะเห็นว่าที่อัตราการบีบอัดภาพ (Bit Rate) ค่าต่ำ ๆ คุณภาพของภาพที่ได้พัฒนาขึ้น มีคุณภาพที่ดีกว่า แต่ในการบันทึกภาพแบบ “JPEG 2000” จะมีคุณภาพที่ดีกว่า

7.2 ปัญหาที่พบ

จากการทดลองครั้งนี้ได้ประสบปัญหาบางประการดังนี้

1. จากการทดลองกับข้อมูลซึ่งมีรายละเอียดของภาพมาก ทำให้ไม่สามารถทำการค้นหาความเหมือนของข้อมูลได้ดีเท่าที่ควร ทำให้การดำเนินการคำนวณมาก และส่งผลถึงเวลาที่ใช้ในการประมวลผลลดลงไม่มาก
2. จากงานวิจัยจำนวนหนึ่งที่ใช้เวลาเป็นตัวกลางในการช่วยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการคำนวณในอัลกอริทึมที่นักวิจัยเหล่านั้นได้ทำขึ้น เมื่อนักวิจัยคนอื่นต้องการทำการเปรียบเทียบอัลกอริทึมใหม่ของตน จึงเป็นเรื่องลำบากประการหนึ่ง อันเนื่องมาจากว่าความเร็วของการประมวลผลนั้นอาจมาจากเทคนิควิธีเขียน โปรแกรมที่อาจส่งผลโดยตรงต่อความเร็วได้ ในอัลกอริทึมเดียวกัน คนเขียน โปรแกรมที่มีความชำนาญต่างกันอาจได้ผลลัพธ์ของเวลาในการประมวลผลที่ต่างกันมากก็ได้ และประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ก็มีผลอย่างมากเช่นกัน ดังนั้นนักวิจัยที่พัฒนาอัลกอริทึมใหม่จึงจำเป็นต้องสร้างอัลกอริทึมของคนที่ต้องการเปรียบเทียบขึ้นมาเอง และทำการเปรียบเทียบผลการทดลองในสภาวะแวดล้อมเดียวกัน จึงทำให้เกิดความล่าช้าในการพัฒนางานวิจัย

7.3 แนวทางในการพัฒนา

ในการผลงานวิจัยนี้เป็นการนำการแปลงเวฟเล็ตมาใช้ โดยการค้นหาความเหมือนของภาพในโดเมนบล็อก และเรนจ์บล็อกให้มากที่สุด ซึ่งทำในโดเมนของการแปลงเวฟเล็ตแทนสเปเชียลโดเมน เพื่อช่วยให้มีความเร็วในการค้นที่เร็วกว่าเดิม แต่การเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล ยังต้องทำในสเปเชียลโดเมนอยู่ กล่าวคือเมื่อค้นหาความเหมือนของบล็อกทั้งสองเจอแล้ว ก็จะต้องเปลี่ยนค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่เจอในโดเมนของการแปลงเวฟเล็ต ไปในสเปเชียลโดเมนเพื่อเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอล เพื่อจัดเก็บเป็นขั้นตอนสุดท้าย ซึ่งจะทำให้สูญเสียเวลาส่วนหนึ่ง หากปรับปรุงให้มีการเข้ารหัสภาพแบบแฟร็กทอลในโดเมนการแปลงเวฟเล็ต (ทำในโดเมนของการแปลงเวฟเล็ตทั้งหมด) ได้ก็จะทำให้เกิดความเร็วในการเข้ารหัสได้มากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] Yuval Fisher. **Fractal Image Compression Theory and Application**. New York : Springer-Verlag New York, Inc. 1995.
- [2] Ning Lu. **Fractal Imaging**. The United States of America : Academic Press. 1997
- [3] A.E.Jacquin. "Fractal image coding : a review." Proceedings of the IEEE, Vol.81, No.10, 1993
- [4] A. Jacquin. "Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations." IEEE Trans. Image Processing, Vol.1, 1992, pp.18-30.
- [5] Y.Zhao., B.Yuan. "Image compression using fractal and discrete cosine transform." Electron. Lett., vol.30, 1994, pp.474-475.
- [6] Chen chunling., Wang shaodi., Shan blingzhe. "A fractal image coding based on the quadtree." Proceeding of ICSP '98, 1998, pp.783-786.
- [7] Ruan Yuxuan., Toh Guan Nge. "An improved fractal image compression scheme embedding DCT encoder." Proceeding of the IEE, No.465, 1999
- [8] Daiki ENDO., Tsuyoshi HIYANE., Kiyooki ATSUTA., Shozo KONDO. "Fractal Image Compression by the Classification in the Wavelet Transform Domain." Proceeding of 5th IEEE International Conference on Image Processing, 1998
- [9] M. Gharavi-Alkhansari., T. Huang. "A fractal-based image block coding algorithm." Proceeding of IEEE, Vol.5, 1993, pp.345-348.
- [10] M. T. Orchard. "A fast nearest-neighbor search algorithm." Proceeding of IEEE, 1991, pp.2297-2300.
- [11] Jonas D. Pefferman., Pablo E. Cingolani., Bruno Cernuschi-Frias. "An improved search algorithm for fractal image compression" Proceeding of IEEE, 1999
- [12] Yung-Gi Wu. "Medical image compression by sampling DCT coefficients" Proceeding of IEEE, Vol.6, 2002, pp. 86 -94
- [13] Ramaswamy V.N., Namuduri K.R., Ranganathan N. "Lossless image compression using wavelet decomposition" Proceeding of IEEE, Vol.3, 1996, pp.924 -928
- [14] Yu-Chen Hu., Chin-Chen Chang. "A novel two-stage lossless image compression scheme" Proceeding of Fourth Optoelectronics and Communications Conference, Vol.2, 1999, pp. 944 – 947

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

T. Phanprasit, C. Nantajiwakornchai, M. Sangworasil, and C. Chawarangkul, "THE USE OF VECTOR QUANTIZATION IN FRACTAL IMAGE COMPRESSION", International Conference on Electromagnetic Compatibility – ICEMC 2002, July 2002, pp.383-386



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

นายชานาเนตร์ ชวรางกูร เกิดเมื่อวันที่ 30 พฤศจิกายน 2519 เกิดที่ อำเภอเมือง จังหวัดยะลา สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (ม.3) จากโรงเรียนคณะราษฎรบำรุง จังหวัดยะลา ปีการศึกษา พ.ศ. 2534

ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.) สาขาวิชาช่างไฟฟ้าอิเล็กทรอนิกส์ จากวิทยาลัยเทคนิคยะลา จังหวัดยะลา ปีการศึกษา พ.ศ. 2537

ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.) แผนกวิชาช่างอิเล็กทรอนิกส์ จากสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ปีการศึกษา พ.ศ. 2539

ปริญญาตรี หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศบ.) สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ ภาควิชาอิเล็กทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปีการศึกษา พ.ศ. 2542

ปี พ.ศ. 2543 เข้าทำงานตำแหน่งวิศวกรกับ ศูนย์ทดสอบผลิตภัณฑ์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ (Electrical and Electronic Products Testing Center: PTEC) สังกัด สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ หรือ สวทช. กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้