

การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดท่อนำคลื่นวงกลม

ANALYSIS OF OPEN-ENDED CIRCULAR WAVEGUIDE ANTENNA



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของงานศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2548

ISBN 974-15-2020-8

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดท่อนำคลื่นวงกลม

ANALYSIS OF OPEN-ENDED CIRCULAR WAVEGUIDE ANTENNA



ระพีพันธ์ ชัดปิก
RAPIN KUDPIK

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน... 61188
วัน,เดือน,ปี... 17 ก.ค. 2549



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2548

ISBN 974-15-2029-8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ANALYSIS OF OPEN-ENDED CIRCULAR WAVEGUIDE ANTENNA



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN
TELECOMMUNICATION ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2005

ISBN 974-15-2029-8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2005

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดท่อนำคลื่นวงกลม
นักศึกษา	นายระพีพันธ์ ชัดปิก
รหัสประจำตัว	46061201
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2548
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.สมผล โกศลวิตร
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม	ผศ.ดร.ชวงค์ พงศ์เจริญพาณิชย์

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการศึกษา การออกแบบ การสร้าง และทดสอบสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม โดยใช้โพรบไฟฟ้าในแนวรัศมีเป็นตัวกระตุ้น ลักษณะเด่นของสายอากาศนี้คือ เป็นสายอากาศที่มีการแพร่กระจายคลื่นแบบทิศทางเดียว โครงสร้างไม่ซับซ้อน และทนต่อกำลังได้สูง และได้ทำการวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ โดยนำเสนอผลการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของสายอากาศเช่น ค่ารัศมีของท่อนำคลื่น ค่าความยาวโพรบ และความสูงของสายอากาศ และสุดท้ายทำการทดสอบสายอากาศที่นำเสนอว่าสามารถใช้งานกับระบบสื่อสารไร้สายได้อย่างมีประสิทธิภาพ

Thesis Title	Analysis of Open-Ended Circular Waveguide Antenna
Student	Mr.Rapin Kudpik
Student ID	46061201
Degree	Master of Engineering
Programme	Telecommunication Engineering
Year	2005
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Sompol Kosulvit
Thesis Co-advisor	Asst.Prof.Dr.Chuwong Phongcharoenpanich

ABSTRACT

This thesis presents the theory, design, fabrication and measurement of a circular aperture antenna from cylindrical waveguide excited by the probe in line of diameter. The advantages of this antenna are simple configuration, unidirectional beam and high power durability. Subsequently, the radiation characteristics are analyzed for designing the antenna and theoretical results of the effects due to various parameters, such as radius of waveguide, length of probe and height of waveguide, are clarified. Finally, the experiments are set up to verify the antenna efficiency for applying in wireless communication system.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ก็เนื่องจากได้รับความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากอาจารย์ที่ปรึกษาทั้งสองท่านคือ รองศาสตราจารย์ ดร.สมพล โกศลวิตร สำหรับเทคนิคการสร้างและทดสอบสายอากาศและ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชวงค์ พงศ์เจริญพาณิชย์ ที่ได้คอดทอนบรมสั่งสอนช่วยเหลืออย่างต่อเนื่องจนผ่านพ้นปัญหาต่างๆมาได้และยังเป็นแบบอย่างที่ดีในการใช้ชีวิต ขอขอบคุณศาสตราจารย์ ดร. โมไนย ไกรกฤษ หัวหน้าห้องปฏิบัติการสื่อสารไร้สายสำหรับคำแนะนำในการนำเสนอความก้าวหน้าในงานวิจัย ขอขอบคุณคุณเอกจิต คุ้มวงศ์ ที่ช่วยเหลืออย่างมากในการหาจุดบกพร่องของโปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัย

ขอขอบคุณคุณไพโรจน์ วุ่นชุ่ม คุณสุธาสินี ละมุลตรีและ คุณกฤตยา ชวานนท์พิทักษ์ สำหรับคำแนะนำและเทคนิคการที่ดีต่อการทำงานวิจัย ขอขอบคุณอาจารย์เบญจวรรณ เจริญมินที่คอยแนะนำการใช้ภาษาอังกฤษ

ขอขอบคุณคุณศุภชัย เกรียงธนสาร สำหรับการช่วยเหลือในการแนะนำถึงการเรียน และการทำวิจัย ขอขอบคุณคุณกฤษฏา เกตุวัลย์ คุณชวลาธวัช หมั่นทรัพย์ และสมาชิกห้องปฏิบัติการไร้สายทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและข้อคิดที่ดีระหว่างร่วมอภิปราย

สุดท้ายที่จะขาดไม่ได้คือ ขอขอบคุณความรักความเข้าใจ ความเอื้ออาทร การอุปการะเลี้ยงดูอย่างดีที่มีให้แก่ข้าพเจ้า จากครอบครัวที่ข้าพเจ้ารักยิ่งและขอบคุณ น.ส.ปรววรรณ แก้ววรรณ สำหรับเวลาและความรู้สึกดีๆที่มีให้แก่ข้าพเจ้า

ระพีพันธ์ ชัดปิก

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
4.2 รัศมีของท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม.....	34
4.3 หลักการสนามสมมูล.....	35
4.4 โครงสร้างสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม.....	37
4.5 สนามที่แพร่กระจายออกจากตัวสายอากาศ.....	38
4.5.1 การหาสนามโดยวิธีศักย์เวกเตอร์.....	40
4.5.2 การหาสนามโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก.....	46
4.6 การกระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบริเวณช่องเปิดของวงแหวน.....	49
4.7 สรุป.....	51
บทที่ 5 ผลการวิเคราะห์และผลการทดสอบ.....	52
5.1 บทนำ.....	52
5.2 การพิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น.....	52
5.3 ผลการวิเคราะห์.....	59
5.4 ผลการทดลอง.....	69
5.5 สรุป.....	72
บทที่ 6 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	73
เอกสารอ้างอิง.....	75
ภาคผนวก.....	76
ประวัติผู้แต่ง.....	78

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 สายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม.....	4
2.2 ท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกที่ระนาบ $z = 0$	13
4.1 การพิจารณาความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กสมมูลและกระแสไฟฟ้าสมมูล.....	35
4.2 (ก)แหล่งกำเนิดจริง และ (ข)รูปแบบจำลองสมมูล.....	36
4.3 ท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกที่มีช่องเปิดแบบวงกลมบนระนาบ $z = 0$	39
5.1 กราฟการหาการรู่เข้าของเมื่อเปลี่ยนค่ารัศมีต่างๆ.....	53
5.2 แสดงค่าสนามภายในที่ $a = 0.3\lambda$ $z_a = 0.75\lambda$ $z_p = 0.25$ $l = 0.25\lambda$	53
5.3 แสดงค่าสนามภายในที่ $a = 0.45\lambda$ $z_a = 0.75\lambda$ $z_p = 0.25$ $l = 0.25\lambda$	54
5.4 ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าในโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับ สนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}	54
5.5 ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กในโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับ สนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}	55
5.6 ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับ สนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}	55
5.7 ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับ สนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}	56
5.8 ค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในที่ $z_a = 0.25\lambda$	56
5.9 ค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในที่ $z_a = 0.50\lambda$	57
5.10 ค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในที่ $z_a = 0.75\lambda$	57
5.11 กราฟการหาการรู่เข้าของรากฟังก์ชันเบสเซล.....	58
5.12 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบของสนามไฟฟ้ารวม ที่ค่ารัศมีต่าง ๆ กันคือ ที่ 0.30λ , 0.35λ , 0.40λ , 0.45λ ตามลำดับ.....	59
5.13 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบของสนามแม่เหล็กรวม ที่ค่ารัศมีต่าง ๆ กันคือ ที่ 0.30λ , 0.35λ , 0.40λ , 0.45λ ตามลำดับ.....	59
5.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งกับค่ารัศมีของ สายอากาศในระนาบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก.....	60

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่

หน้า

5.30 ค่า Return loss.....	71
5.31 รูปสายอากาศที่ทำการทดสอบ.....	72



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา **VIII** องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

order Differential Equation) ซึ่งพจน์ของสนามแม่เหล็ก และ สนามไฟฟ้าจะแยกกัน (Uncoupled Equation) ซึ่งสมการที่ได้จะเรียกว่า สมการคลื่น (Wave Equation)

บทที่ 3 จะได้กล่าวถึงฟังก์ชันกรีนไดโอดิก ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก ก็คือ ฟังก์ชันที่ใช้ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้การทับซ้อนของอิมพัลส์ เพื่อหาคำตอบสมการเชิงอนุพันธ์ และในบทนี้ยังได้นำเสนอเทคนิคการกระจายตัวทับซ้อน(Scattering Superposition) ในการแก้ปัญหาคำตอบการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่นำคลื่นวงกลมที่มีการปิดปลายด้านหนึ่งซึ่งเป็นโครงสร้างของสายอากาศในวิทยานิพนธ์นี้

บทที่ 4 ในบทนี้จะได้นำเสนอถึงคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม การเลือกค่ารัศมีของท่อนำคลื่นที่จะนำมาสร้างเป็นสายอากาศว่าจะเลือกค่าในช่วงใดที่จะนำมาใช้งานย่านความถี่ Wireless LAN และยังได้กล่าวถึงหลักการสนามสมมูลที่จะนำมาประยุกต์ใช้กับสายอากาศที่นำเสนอไว้อีกด้วย

บทที่ 5 บทนี้ได้นำเสนอผลการจำลองสายอากาศด้วยคอมพิวเตอร์ และได้มีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เพื่อหาระยะที่ดีที่สุด และได้สร้างสายอากาศตามค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ถูกออกแบบไว้เพื่อยืนยันความถูกต้องอีกด้วย

บทที่ 6 เป็นการสรุปผลจากการจำลองและจากผลการทดลองสายอากาศที่ได้ทำการออกแบบไว้ของวิทยานิพนธ์นี้ และได้มีข้อเสนอแนะในการทำวิจัยเกี่ยวกับสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม

บทที่ 2

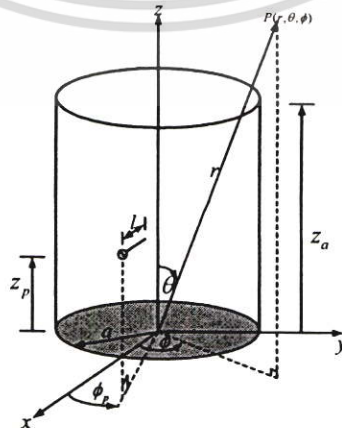
คุณลักษณะของท่อนำคลื่นวงกลม

2.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะเริ่มจากทฤษฎีของท่อนำคลื่นและการสมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation) ซึ่งในสมการของแมกซ์เวลล์พบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีพจน์ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กอยู่รวมกัน ซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหามาหาผลเฉลยได้ เพราะฉะนั้นเราต้องแปรสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งให้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่สองจึงจะสามารถหาผลเฉลยนี้ได้ หลังจากนั้นก็จะนำไปสู่การหาสนามภายใน โครงสร้างของสายอากาศ ก่อนที่จะแพร่กระจายสู่สนามระยะไกลต่อไป ซึ่งได้อธิบายในบทที่ 4

2.2 ท่อนำคลื่น

ท่อนำคลื่นเป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการส่งผ่านกำลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากจุดหนึ่งไปยังจุดต่างๆ ซึ่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นนั้นจะถูกกำหนดการเดินทางด้วยโครงสร้างทางกายภาพของท่อนำคลื่น ท่อนำคลื่นถูกนำไปใช้ประโยชน์กันอย่างแพร่หลายในย่านความถี่ไมโครเวฟ ท่อนำคลื่นจะไม่นำคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่น้อยกว่าความถี่ตัด (Cutoff Frequency) [3]-[5] ในการหาสนามในโหมดต่างๆของท่อนำคลื่นวงกลมนั้นเราสามารถหาได้สองโหมดคือ สนามไฟฟ้าตามขวาง (Transverse Electric: TE) และสนามแม่เหล็กตามขวาง (Transverse Magnetic: TM) ซึ่งโครงสร้างของสายอากาศจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกที่ทำการปิดปลายด้านหนึ่ง ที่ป้อนสัญญาณที่โพรบสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.1 ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวนี้เป็น โครงสร้างที่ใช้ในงานวิจัยในวิทยานิพนธ์นี้ ซึ่งรายละเอียดของโครงสร้างจะได้กล่าวอย่างละเอียดในบทที่ 4



รูปที่ 2.1 สายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 สมการเวกเตอร์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลา

จากสมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation) ในรูปของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \bar{E} = -\bar{M}_i - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_{ic} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

เมื่อ \bar{E} คือ ความเข้มสนามไฟฟ้า (Electric Field Intensity) มีหน่วยเป็น V/m

\bar{H} คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก (Magnetic Field Intensity) มีหน่วยเป็น A/m

\bar{B} คือ ความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็ก (Magnetic Flux Density) มีหน่วยเป็น Wb/m²

\bar{D} คือ ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้า (Electric Flux Density) มีหน่วยเป็น C/m²

\bar{J}_{ic} คือ ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (Electric Current Density) มีหน่วยเป็น A/m²

โดยที่ $\bar{J}_{ic} = \bar{J}_i + \bar{J}_c$ เมื่อ \bar{J}_c คือ ความหนาแน่นกระแสความนำ (Conduction Electric Current Source) และ \bar{J}_i คือ ความหนาแน่นกระแสกระตุ้น (Impressed Electric Current Source)

\bar{M} คือ ความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก (Magnetic Current Density) มีหน่วยเป็น V/m²

เมื่อความสัมพันธ์ประกอบ (Constitutive Relation)

1. $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ เมื่อ ϵ คือ ค่าสภาพยอมไฟฟ้า (Permittivity) และมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F/m ในสุญญากาศ (Free Space)

2. $\bar{B} = \mu \bar{H}$ เมื่อ μ คือ ค่าความซึมซาบแม่เหล็ก (Permeability) และมีค่าเท่ากับ $4\pi \times 10^{-7}$ H/m ในสุญญากาศ

3. $\bar{J}_c = \sigma \bar{E}$ เมื่อ σ คือ ค่าความนำไฟฟ้า (Electric Conductivity) มีค่าเป็นศูนย์เมื่ออยู่ในสุญญากาศ มีหน่วยเป็น S/m

$$\nabla \times \bar{E} = -\bar{M}_i - \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_i + \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

ทฤษฎีที่จำเป็นของสายอากาศ โดยเริ่มต้นจากสมการของแมกซ์เวลล์ซึ่งจะพบว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (1st Order Differential Equation) ที่มีพจน์ของสนามไฟฟ้า กับสนามแม่เหล็กอยู่รวมกัน (Coupled Equation) ซึ่งไม่สามารถแก้สมการหาค่าคำตอบได้โดยวิธีการเชิงวิเคราะห์ (Analytic Method) ได้ แต่สามารถหาค่าคำตอบได้โดยวิธีทางตัวเลข (Numerical Method) คือวิธีผลต่างสี่บเนื่องทางเวลา (Finite Difference Time Domain Method) FDTD ดังนั้นการแก้สมการแมกซ์เวลล์ โดยวิธีเชิงวิเคราะห์ก็ต่อเมื่อต้องแปรสมการแมกซ์เวลล์ให้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง (2nd Order Differential Equation) ซึ่งพจน์ของสนามแม่เหล็ก และ สนามไฟฟ้าจะแยกกัน (Uncoupled Equation) ซึ่งสมการที่ได้จะเรียกว่า สมการคลื่น (Wave Equation)

โดยทำการเคิร์ล (Curl) ทั้งสองข้างของสมการที่ (2.3) และ (2.4) โดยสมมุติให้อยู่ในตัวกลางเดียวกันสามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \bar{E} &= -\nabla \times \bar{M}_i - \mu \nabla \times \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) \\ &= -\nabla \times \bar{M}_i - \mu \frac{\partial (\nabla \times \bar{H})}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \bar{H} &= \nabla \times \bar{J}_i + \sigma \nabla \times \bar{E} + \epsilon \nabla \times \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \times \bar{J}_i + \sigma \nabla \times \bar{E} + \epsilon \frac{\partial (\nabla \times \bar{E})}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.6)$$

แทนสมการที่ (2.4) ลงในด้านขวาของสมการ ที่ (2.5) และใช้คุณสมบัติลาปลาเซียนของเวกเตอร์ (Laplacian of Vector) ที่แสดงได้ดังนี้

$$\nabla^2 \bar{F} = \nabla (\nabla \cdot \bar{F}) - \nabla \times \nabla \times \bar{F}\quad (2.7)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{F} = \nabla (\nabla \cdot \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F}\quad (2.8)$$

แล้วแทนสมการที่ (2.8) ลงในด้านซ้ายของสมการ ที่ (2.7) ได้ว่า

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\nabla \times \bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{J}_i + \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right]$$

$$\bar{J}_i = q_{cv} = \bar{M}_i = q_{mv} = 0, \sigma = 0$$

ดังนั้น รูปแบบของสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในสมการที่ (2.15) และ (2.16) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

โดยทั่วไปแล้วสมการที่ (2.15) และ (2.16) จะเป็นรูปแบบที่ง่ายที่สุดสำหรับสมการเวกเตอร์ของคลื่นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

2.4 สมการเวกเตอร์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลาแบบฮาร์โมนิกส์

สำหรับสนามที่แปรผันกับเวลาแบบฮาร์โมนิกส์ หมายถึง เวลาที่มีการแปรผันในรูปแบบของ $e^{j\omega t}$ ดังนั้น สามารถที่จะหาสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเช่นเดียวกับกรณี ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลา โดยกำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Leftrightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.11), (2.14), (2.15) และ (2.16) สามารถแสดงได้ว่า

$$\nabla^2 \bar{E} = \nabla \times \bar{M}_i + j\omega\mu\bar{J}_i + \frac{1}{\epsilon} \nabla q_{cv} + j\omega\mu\sigma\bar{E} - \omega^2\mu\epsilon\bar{E} \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = -\nabla \times \bar{J}_i + \sigma\bar{M}_i + j\omega\epsilon\bar{M}_i + \frac{1}{\mu} \nabla q_{mv} + j\omega\mu\sigma\bar{H} - \omega^2\mu\epsilon\bar{H} \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \bar{E} = -\omega^2\mu\epsilon\bar{E} = -k^2\bar{E} \quad (2.19)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = -\omega^2\mu\epsilon\bar{H} = -k^2\bar{H} \quad (2.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \text{ หรือ } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

และ k คือ ค่าคงที่เฟส (Phase Constant)

2.5 การหาคำตอบจากสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับระบบพิกัดทรงกระบอก

เมื่อพิจารณาสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับสถานะที่เป็นอิสระจากแหล่งจ่าย (Source Free) และตัวกลางที่ไม่เกิดการสูญเสีย (Lossless Media) ของสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกระบอก สามารถแสดงได้ดังนี้

จาก

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \hat{a}_\rho E_\rho(\rho, \phi, z) + \hat{a}_\phi E_\phi(\rho, \phi, z) + \hat{a}_z E_z(\rho, \phi, z) \quad (2.21)$$

เมื่อ ρ, ϕ, z คือ ค่าในพิกัดทรงกระบอก

เมื่อแทนในสมการที่ (2.21) ลงในสมการที่ (2.19) จะได้ว่า

$$\nabla^2 (\hat{a}_\rho E_\rho + \hat{a}_\phi E_\phi + \hat{a}_z E_z) = -k^2 (\hat{a}_\rho E_\rho + \hat{a}_\phi E_\phi + \hat{a}_z E_z) \quad (2.22)$$

จากสมการที่ (2.22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ว่า

$$\nabla^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad (2.23)$$

จากคุณสมบัติลาปลาเซียนของเวกเตอร์ (Laplacian of Vector) สามารถเขียนได้

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times \nabla \times \vec{E} \\ -k^2 \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times \nabla \times \vec{E} \end{aligned} \quad (2.24)$$

เมื่อแทนสนามไฟฟ้าที่อยู่ในสมการที่ (2.21) ลงในสมการที่ (2.24) จะได้คำตอบที่อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\nabla^2 E_\rho + \left(-\frac{E_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right) = -k^2 E_\rho \quad (2.25)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\nabla^2 E_\phi + \left(-\frac{E_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) = -k^2 E_\phi \quad (2.26)$$

$$\nabla^2 E_z = -k^2 E_z \quad (2.27)$$

เมื่อ $\nabla^2 \varphi(\rho, \phi, z)$ คือ ลاپลาเซียนของสเกลาร์ (Laplacian of Scalar) ซึ่งมีค่าในระบบพิกัดทรงกระบอกดังนี้

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

จากสมการที่ (2.25) และ (2.26) จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้า มากกว่า 1 องค์ประกอบ ซึ่งยากต่อการหาคำตอบ ดังนั้นเราจะใช้สมการที่ (2.27) ซึ่งมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าเพียงองค์ประกอบเดียวในการหาคำตอบจากสมการคลื่น

จากสมการที่ (2.27) สามารถเขียนได้ใหม่แสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -k^2 F \quad (2.29)$$

เมื่อ $F(\rho, \phi, z)$ คือฟังก์ชันของสเกลาร์ (Scalar Function) ที่แสดงถึงศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า (Electric Vector Potential) และสมมุติให้ศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้านี้มีคำตอบที่อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$F(\rho, \phi, z) = f(\rho)g(\phi)h(z) \quad (2.30)$$

แทนค่าสมการที่ (2.30) ลงในสมการที่ (2.29) จะได้ว่า

$$gh \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + gh \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + fh \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k^2 fgh \quad (2.31)$$

หารทั้งสองข้างของสมการด้วย fgh และเปลี่ยน $\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}$ จากสมการที่ (2.31) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 g}{d\phi^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k^2 \quad (2.32)$$

จะพบว่าในแต่ละพจน์ของสมการที่ (2.32) และเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้น ผลรวมของทุกพจน์จะมีค่าเท่ากับ $-k^2$ ก็ต่อเมื่อค่าของแต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ (Constant) จะได้ว่า

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 h \quad (2.33)$$

เมื่อ k_z คือ ค่าคงที่ (Constant)

นำสมการที่ (2.33) แทนลงในสมการที่ (2.32) แล้วคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย ρ^2 จะได้ว่า

$$\frac{\rho^2}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{\rho}{f} \frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi^2} + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (2.34)$$

เนื่องจากพจน์ที่ 3 ของสมการที่ (2.34) เป็นฟังก์ชันของ ϕ เพียงอย่างเดียว ดังนั้นสามารถที่จะกำหนดให้เท่ากับค่าคงที่ใดๆได้ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2 \Rightarrow \frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2 g \quad (2.35)$$

และกำหนดให้

$$k^2 - k_z^2 = k_\rho^2 \quad (2.36ก)$$

$$k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2.36ข)$$

นำสมการที่ (2.35) แทนลงในสมการที่ (2.34) จะได้ว่า

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + \left[(k_\rho \rho)^2 - m^2 \right] f = 0 \quad (2.37)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (2.36) จะถูกเรียกว่า เป็นสมการจำกัด (Constraint Equation) สำหรับคำตอบที่ได้จากสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอก และสมการที่ (2.37) จะถูกเรียกว่า เป็น สมการเชิงอนุพันธ์ ของเบสเซล (Bessel Differential Equation) ดังนั้น คำตอบที่ได้จากสมการที่ (2.29) โดยการสมมติคำตอบดังสมการที่ (3.30) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + \left[(k_\rho \rho)^2 - m^2 \right] f = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2 g \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 h \quad (2.42)$$

โดยที่

$$k_\rho^2 + k_z^2 = k^2$$

และคำตอบที่ได้จากสมการที่ (2.38), (2.39) และ (2.40) สามารถแสดงได้ดังนี้ ตามลำดับ

$$f_1(\rho) = A_1 J_n(k_\rho \rho) + B_1 Y_n(k_\rho \rho) \quad (2.41)$$

หรือ

$$f_2(\rho) = C_1 H_n^{(1)}(k_\rho \rho) + D_1 H_n^{(2)}(k_\rho \rho) \quad (2.42)$$

และ

$$g_1(\phi) = A_2 e^{-jn\phi} + B_2 e^{+jn\phi} \quad (2.43)$$

หรือ

$$g_2(\phi) = C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi) \quad (2.44)$$

และ

$$h_1(z) = A_3 e^{-jk_z z} + B_3 e^{+jk_z z} \quad (2.45)$$

หรือ

$$h_2(z) = C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z) \quad (2.46)$$

โดยที่

$J_n^{(1)}(k_\rho \rho)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1

$Y_n^{(2)}(k_\rho \rho)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไม่มีสนามแพร่กระจายออกมาจากท่อ นำคลื่นเลย ซึ่งไม่เป็นจริง ดังนั้นเพื่อไม่ให้สนามมีค่าเป็นศูนย์ จึงกำหนดให้ $C \neq 0, D = 0$

4. เนื่องจากสนามที่แพร่กระจายออกมาจากท่อ นำคลื่น จะเดินทางในทิศทางแนวแกน $+z$ ดังนั้น จะสนใจในพจน์ของ $e^{-jk_z z}$ เท่านั้น และเมื่อคิดในสนามที่แพร่กระจายบริเวณช่องเปิดของท่อ นำคลื่นที่ระนาบ $z = 0$ จะได้ว่า

$$B_3 = 0, e^{-jk_z z} \Big|_{z=0} = 1 \quad (2.48)$$

5. ค่าของ k_ρ สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$k_\rho = \frac{\chi'_{mn}}{a} \quad (2.49)$$

2.6 คลื่นสนามไฟฟ้าตามขวาง

จากรูปที่ 2.2 สามารถหาคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวางได้ จากสมการศักย์เวกเตอร์ เมื่อ \bar{A} (ผ.1) และ \bar{F} (ผ.2) เป็นไปตามกำหนดคือ

$$\bar{A} = 0 \quad (2.54)$$

$$\bar{F} = \hat{a}_z F_z(\rho, \phi, z) \quad (2.55)$$

โดยเมื่อ $F_z(\rho, \phi, z)$ เป็นองค์ประกอบในทิศทาง z ของศักย์เวกเตอร์ \bar{F} ที่เป็นไปตามสมการที่ (2.22)

$$\nabla^2 F_z(\rho, \phi, z) + k^2 F_z(\rho, \phi, z) = 0 \quad (2.56)$$

ซึ่งสามารถกระจายได้ในระบบพิกัดทรงกระบอกดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + k^2 F_z = 0 \quad (2.57)$$

ซึ่งจากสมการ (2.47) เมื่อพิจารณาคลื่นที่เดินทางในแกน z จึงสามารถเขียนได้

$$F_z^+(\rho, \phi, z) = A_{nm} J_n(k_\rho \rho) [C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.58)$$

สนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ E_ρ^+ สามารถเขียนได้เป็น

$$E_\rho^+ = -\frac{1}{\epsilon \rho} \frac{\partial F_z^+}{\partial \phi} = -A_{nm} \frac{n}{\epsilon \rho} J_{nm}(k_\rho \rho) [-C_2 \sin(n\phi) + D_2 \sin(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.59ก)$$

$$E_\phi^+ = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_z^+}{\partial \rho} = \frac{k_\rho}{\epsilon} A_{nm} J'_n(k_\rho \rho) [C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.59ข)$$

$$E_z^+ = 0 \quad (2.59ค)$$

$$H_\rho^+ = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 F_z^+}{\partial \rho \partial z} = -A_{nm} \frac{k_\rho k_z}{\omega \mu \epsilon} J'_{mn}(k_\rho \rho) [C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.59ง)$$

$$H_\phi^+ = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 F_z^+}{\partial \phi \partial z} = -A_{nm} \frac{nk_z}{\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} J_{mn}(k_\rho \rho) [-C_2 \sin(n\phi) + D_2 \cos(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.59จ)$$

และ

$$H_z^+ = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z^+ = -A_{nm} \frac{k_\rho}{\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} J_n(k_\rho \rho) [C_2 \cos(n\phi) + D_2 \cos(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.59ฉ)$$

ซึ่งจะสอดคล้องได้ก็ต่อเมื่อ

$$J'_n(k_\rho a) = 0$$

ซึ่งจะพบว่า

$$k_\rho a = \chi'_{nm} \quad (2.60)$$

หรือ

$$k_\rho = \frac{\chi'_{nm}}{a} \quad (2.61)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยใช้สมการ (2.31) และ (2.45) ซึ่งจะได้ k_z ของโหมด nm สามารถเขียนได้เมื่อเลขคลื่นคutoff กำหนด $(k_z)_{nm} = 0$

$$k_c = \omega_c \sqrt{\mu\epsilon} = k_\rho = \frac{\chi'_{nm}}{a} \quad (2.62)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$(f_c)_{nm} = \frac{\chi'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2.63)$$

โดยใช้สมการ (2.62) และ (2.63) สามารถเขียนได้

$$k_\rho = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_\rho^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, & f > f_c \\ 0, & f = f_c \\ -j\sqrt{k_\rho^2 - k^2} = -jk \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}, & f < f_c \end{cases} \quad (2.64)$$

ดังนั้น ความยาวคลื่นภายในท่อกำหนดได้เป็น

$$(\lambda_g)_{nm} = \frac{2\pi}{(k_z)_{nm}} \quad (2.65)$$

2.7 คลื่นสนามแม่เหล็กตามขวาง

ในการหาสนามในโหมด TM_z จะใช้วิธีเดียวกับที่ได้แสดงมาแล้วในส่วนของ TE_z โดยจะใช้พารามิเตอร์ต่างๆดังที่ได้แสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งสามารถหาคลื่นสนามแม่เหล็กตามขวางได้ จากสมการศักย์แวกเตอร์ เมื่อ \bar{A} และ \bar{F} เป็นไปตามกำหนดคือ

$$\bar{A} = \hat{a}_z F_z(\rho, \phi, z) \quad (2.66)$$

$$\bar{F} = 0 \quad (2.67)$$

โดยเมื่อ $F_z(\rho, \phi, z)$ เป็นองค์ประกอบในทิศทาง z ของศักย์แวกเตอร์ \bar{F} ที่เป็นไปตามสมการคลื่น

$$\nabla^2 A_z(\rho, \phi, z) + k^2 A_z(\rho, \phi, z) = 0 \quad (2.68)$$

ซึ่งสามารถกระจายได้ในระบบพิกัดทรงกระบอกได้ดังโหมด TE^z และจะได้ผลคำตอบดังนี้

$$A_z^+(\rho, \phi, z) = A_{nm} J_n(k_\rho \rho) [C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.69)$$

เมื่อพิจารณาสนามแม่เหล็กเหมือนกับสนามไฟฟ้า

$$E_\rho^+ = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 A_z^+}{\partial \rho \partial z} e^{-jk_z z} = -A_{nm} \frac{k_\rho k_z}{\omega \mu \epsilon} J_n'(k_\rho \rho) [C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.70ก)$$

$$E_\phi^+ = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z^+}{\partial \phi \partial z} = -A_{nm} \frac{nk_z}{\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} J_n(k_\rho \rho) [-C_2 \sin(n\phi) + D_2 \cos(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.70ข)$$

$$E_z^+ = 0 \quad (2.70ค)$$

$$H_\rho^+ = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z^+}{\partial \phi} = A_{nm} \frac{n}{\mu} \frac{1}{\rho} J_n(k_\rho \rho) [-C_2 \sin(n\phi) + D_2 \cos(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.70ง)$$

$$H_\phi^+ = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z^+}{\partial \phi} = -A_{nm} \frac{k_\rho}{\mu} J_n'(k_\rho \rho) [C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi)] e^{-jk_z z} \quad (2.70จ)$$

และ

$$H_z^+ = 0 \quad (2.70ฉ)$$

ซึ่งจะสอดคล้องกันกับ

$$J_n(k_\rho a) = 0 \quad (2.71)$$

$$k_\rho a = \chi_{nm} \quad (2.72)$$

และ

$$k_\rho = \frac{\chi_{nm}}{a} \quad (2.73)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยใช้สมการ $k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$ และ $k_\rho = \frac{\chi_{nm}}{a}$ ที่เลขคัตออฟ $k_z = 0$ สามารถเขียน

$$k_c = \omega_c \sqrt{\mu\epsilon} = k_\rho = \frac{\chi_{nm}}{a} \quad (2.74)$$

ซึ่งสำหรับขั้นตอนการหาความถี่คัตออฟ $(f_c)_{nm}$ ค่าคงตัวเฟส $(k_\rho)_{nm}$ และความยาวคลื่นภายในท่อนำคลื่น $(\lambda_g)_{nm}$ จะพิจารณาเหมือนกับการหากรณี TE^z

$$(f_c)_{nm} = \frac{\chi_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$

โดยใช้สมการ (2.62) และ (2.63) สามารถเขียนได้

$$k_\rho = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_c^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, & f > f_c \\ 0, & f = f_c \\ -j\sqrt{k_c^2 - k^2} = -jk \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}, & f < f_c \end{cases} \quad (2.81)$$

ดังนั้น ความยาวคลื่นในท่อนำคลื่นกำหนดได้เป็น

$$(\lambda_g)_{nm} = \frac{2\pi}{(k_z)_{nm}} \quad (2.82)$$

2.8 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงหน้าที่ของท่อนำคลื่นวงกลม สมการของแมกซ์เวลล์ ซึ่งเป็นที่มาของสมการคลื่น สมการสนามแม่เหล็กและสมการสนามไฟฟ้าตามขวาง โดยจากสมการของแมกซ์เวลล์ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ที่มีพจน์ของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กอยู่รวมกัน ซึ่งไม่สามารถแก้สมการหาค่าคำตอบโดยวิธีการเชิงวิเคราะห์ได้ แต่ก็สามารถหาค่าคำตอบได้โดยวิธีทางตัวเลข โดยต้องแปลงสมการแมกซ์เวลล์ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งให้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง พจน์ของสนามแม่เหล็ก และ สนามไฟฟ้าจะแยกกัน สมการที่ได้จะเรียกว่าสมการคลื่น โดยจะได้ใช้สมการคลื่นดังกล่าวนี้เป็นสมการตั้งต้นในการหาผลเฉลยด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดเอคิกในบทต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก

3.1 บทนำ

ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับแก้ปัญหасวมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) โดยเราได้แบ่งฟังก์ชันนี้ออกเป็น 2 ชนิด คือ ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของดิริเชตต์ (Dirichet Boundary Condition) และฟังก์ชันกรีนไดแอดิกที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของนอยมานน์ (Neumann Boundary Condition) โดยเงื่อนไขขอบเขตของดิริเชตต์มีอยู่ว่า ส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในแนวสัมผัสกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์ และเงื่อนไขขอบเขตของนอยมานน์ มีอยู่ว่า ส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในแนวตั้งฉากกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์[6] โดยจะเรียกฟังก์ชันกรีนไดแอดิกตามเงื่อนไขขอบเขตของดิริเชตต์ว่า ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกชนิดที่หนึ่ง และเรียกฟังก์ชันกรีนไดแอดิกตามเงื่อนไขขอบเขตของนอยมานน์ว่า ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกชนิดที่สอง ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกทั้งชนิดที่หนึ่งและที่สองนี้ ยังสามารถที่จะแยกเป็นชนิดไฟฟ้า และชนิดแม่เหล็กได้อีกด้วย จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชันกรีนไดแอดิกสามารถแยกออกเป็น 4 ชนิด คือ

$$\overline{G}_{e1} = \overline{G}_{EJ} \quad (3.1)$$

$$\overline{G}_{e2} = \overline{G}_{HM} \quad (3.2)$$

$$\overline{G}_{m2} = \overline{G}_{HJ} \quad (3.3)$$

$$\overline{G}_{m1} = \overline{G}_{EM} \quad (3.4)$$

เมื่อ $\overline{G}_{EJ}(\overline{R}, \overline{R}')$ หมายถึงฟังก์ชันกรีนไดแอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า

$\overline{G}_{EM}(\overline{R}, \overline{R}')$ หมายถึงฟังก์ชันกรีนไดแอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก

$\overline{G}_{HM}(\overline{R}, \overline{R}')$ เป็นฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก

$\overline{G}_{HJ}(\overline{R}, \overline{R}')$ หมายถึงฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า

3.2 ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกกับสมการสนามภายในท่อนำคลื่น

ฟังก์ชันกรีนเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ฟังก์ชันขับเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ (Impulse Function) หรือฟังก์ชันไดเรคเดลตา (Dirac Delta Function) เพื่อหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ย่อย (Partial Differential Equation) การหาคำตอบจำนวนจริงของฟังก์ชันซับซ้อนได้โดยใช้วิธีการซ้อนทับ (Superposition) ของฟังก์ชันกรีนและฟังก์ชันขับ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นที่เข้าใจร่วมกันว่าฟังก์ชันกรีนเป็นฟังก์ชันตอบสนองอิมพัลส์ หรือฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function) ในทฤษฎีระบบหรือทฤษฎีวงจร

โดยที่จะเริ่มแก้ปัญหาจากฟังก์ชันเจาะจงในรูปสเกลาร์ ψ (Scalar Eigenfunction) [7]

$$\psi_{e_{n\mu}}(k_\mu) = J_n(\mu\rho) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\phi) e^{-jk_\mu z} \quad (3.5)$$

โดยฟังก์ชันคลื่นของท่อนำคลื่นทรงกระบอกสามารถแสดงในรูปของฟังก์ชันเจาะจงได้ดังสมการที่ (3.6) และสมการที่ (3.7)

$$\overline{M}_{e_{n\mu}}(k_\mu) = \nabla \times [\psi_{e_{n\mu}}(k_\mu) \hat{a}_z] \quad (3.6)$$

$$\overline{N}_{e_{n\lambda}}(k_\lambda) = \frac{1}{\kappa_\lambda} \nabla \times \nabla \times [\psi_{e_{n\lambda}}(k_\lambda) \hat{a}_z] \quad (3.7)$$

เมื่อทำการเคิร์ล (Curl) สมการที่ (3.6) จะทำให้ได้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในโหมด TE ดังสมการที่ (3.8)

$$\begin{aligned} \overline{M}_{e_{n\mu}}(k_\mu) &= \hat{a}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \right) + \hat{a}_\phi \left(-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \\ &= \hat{a}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} J_n(\mu\rho) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\phi) e^{-jk_\mu z} \right) - \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial}{\partial \rho} J_n(\mu\rho) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\phi) e^{-jk_\mu z} \right) \\ &= \left[\hat{a}_\rho \left(\mp \frac{nJ_n(\mu\rho)}{\rho} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\phi) \right) - \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\phi) \right) \right] e^{-jk_\mu z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

และเมื่อทำการเคิร์ล (Curl) สมการที่ (3.7) จะทำให้ได้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในโหมด TM ดังสมการที่ (3.10) ซึ่งสามารถคิดได้อีกอย่างคือ แทนค่า สมการที่ (3.8) ลงในสมการที่ (3.9) ก็จะได้ค่าเช่นเดียวกัน

$$\overline{N}_{e_{n\lambda}}(k_\lambda) = \frac{1}{\kappa_\lambda} \nabla \times \overline{M}_{e_{n\lambda}}(k_\lambda) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) &= \frac{1}{\kappa_\lambda} \nabla \times \left[\hat{a}_\rho \left(\mp \frac{nJ_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \right) - \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \right) \right] e^{-jk_\lambda z} \\ \bar{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) &= \frac{1}{\kappa_\lambda} \left[\begin{aligned} &\hat{a}_\rho \left(-jk_\lambda \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \right) + \hat{a}_\phi \left(\pm jk_\lambda \frac{nJ_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{\sin(n\phi)}{\cos(n\phi)} \right) \\ &+ \hat{a}_z \left(\lambda^2 J_n(\lambda\rho) \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \right) \end{aligned} \right] e^{-jk_\lambda z} \quad (3.10) \end{aligned}$$

เมื่อได้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในโหมด TE และ TM แล้ว ก็สามารถหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกได้ ฟังก์ชันคลื่นที่มีเครื่องหมายไพรม์ (') คือ ฟังก์ชันการกระตุ้น (Source) และส่วนที่ไม่มีไพรม์คือ ฟังก์ชันของสนาม (Field)

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า

$$\begin{aligned} \bar{G}_{EJ}(\bar{R}, \bar{R}') &= \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(\bar{R} - \bar{R}') + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_\mu \bar{M}_{\epsilon_{nm}}(\pm k_\mu) \bar{M}'_{\epsilon_{nm}}(\mp k_\mu) + c_\lambda \bar{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(\pm k_\lambda) \bar{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(\mp k_\lambda) \right], z \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} z' \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{EJ}(\overline{R}, \overline{R}') &= \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(\overline{R} - \overline{R}') + \\
& \left[c_\mu \left(\begin{aligned} & \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \frac{n^2 J_n(\mu\rho) J_n(\mu\rho')}{\rho \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & \pm \hat{a}_\rho \hat{a}_\phi \frac{n J_n(\mu\rho) \partial J_n(\mu\rho')}{\rho \partial \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & \pm \hat{a}_\phi \hat{a}_\rho \frac{n \partial J_n(\mu\rho) J_n(\mu\rho')}{\partial \rho \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & + \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \frac{\partial J_n(\mu\rho) \partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho \partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \end{aligned} \right) e^{-(jk_\mu z - z')} \\
& + c_\lambda \frac{1}{k_\lambda^2} \left(\begin{aligned} & \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \frac{k_\lambda^2 \partial J_n(\lambda\rho) \partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho \partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & \mp \hat{a}_\rho \hat{a}_\phi \frac{k_\lambda^2 \partial J_n(\lambda\rho) n J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & - \hat{a}_\rho \hat{a}_z j \frac{k_\lambda \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & \mp \hat{a}_\phi \hat{a}_\rho \frac{k_\lambda^2 n J_n(\lambda\rho) \partial J_n(\lambda\rho')}{\rho \partial \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & + \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \frac{k_\lambda^2 n^2 J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\rho')}{\rho \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} e^{-(jk_\lambda z - z')} \\ & \pm \hat{a}_\phi \hat{a}_z j \frac{k_\lambda n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & + \hat{a}_z \hat{a}_\rho j \lambda^2 J_n(\lambda\rho) \frac{k_\lambda \partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & \mp \hat{a}_z \hat{a}_\phi \lambda^2 J_n(\lambda\rho) \frac{k_\lambda n J_n(\lambda\rho')}{\rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ & + \hat{a}_z \hat{a}_z \lambda^4 J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\rho') \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \end{aligned} \right) \Bigg] , z > z'
\end{aligned}
\tag{3.11ก}$$

ทำการแก้สมการที่ (3.11ก) ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้สมการใหม่ดังสมการที่ (3.12)

$$\begin{aligned} \overline{G}_{EJ}(\overline{R}, \overline{R}') &= \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(\overline{R} - \overline{R}') + \\ & \left[\begin{aligned} & \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \frac{n^2 J_n(\mu\rho) J_n(\mu\rho')}{\rho \partial\rho'} \{ \sin(n\phi) \sin(n\phi') + \cos(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ & + \hat{a}_\rho \hat{a}_\phi \frac{n J_n(\mu\rho) \partial J_n(\mu\rho')}{\rho \partial\rho'} \{ \sin(n\phi) \cos(n\phi') + \cos(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ & + \hat{a}_\phi \hat{a}_\rho \frac{n \partial J_n(\mu\rho) J_n(\mu\rho')}{\partial\rho \rho'} \{ \cos(n\phi) \sin(n\phi') - \sin(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ & + \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \frac{\partial J_n(\mu\rho) \partial J_n(\mu\rho')}{\partial\rho \partial\rho'} \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \end{aligned} \right] e^{-jk_\mu(z-z')} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \frac{k_\lambda^2 \partial J_n(\lambda\rho) \partial J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho \partial\rho'} \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ & - \hat{a}_\rho \hat{a}_\phi \frac{k_\lambda^2 \partial J_n(\lambda\rho) n J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho \rho'} \{ \cos(n\phi) \sin(n\phi') + \sin(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ & - \hat{a}_\phi \hat{a}_z j \frac{k_\lambda \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial\rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ & - \hat{a}_\phi \hat{a}_\rho \frac{k_\lambda^2 n J_n(\lambda\rho) \partial J_n(\lambda\rho')}{\rho \partial\rho'} \{ \sin(n\phi) \cos(n\phi') + \cos(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ & + \frac{c_\lambda}{\kappa_\lambda^2} + \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \frac{k_\lambda^2 n^2 J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\rho')}{\rho \rho'} \{ \sin(n\phi) \sin(n\phi') + \cos(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ & + \hat{a}_\phi \hat{a}_z j \frac{k_\lambda n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \{ \sin(n\phi) \cos(n\phi') - \cos(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ & + \hat{a}_z \hat{a}_\rho j \lambda^2 J_n(\lambda\rho) \frac{k_\lambda \partial J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho'} \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ & - \hat{a}_z \hat{a}_\phi \lambda^2 J_n(\lambda\rho) \frac{k_\lambda n J_n(\lambda\rho')}{\rho'} \{ \cos(n\phi) \sin(n\phi') + \sin(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ & + \hat{a}_z \hat{a}_z \lambda^4 J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\rho') \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \end{aligned} \right] e^{-jk_\lambda(z-z')} \end{aligned} \quad (3.12)$$

เราสามารถหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบต่างๆ ได้ดังนี้

$$G_{EJ,\rho\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & c_\mu \frac{n^2 J_n(\mu\rho) J_n(\mu\rho')}{\rho \rho'} \{ \cos n(\phi - \phi') \} e^{-jk_\mu(z-z')} \\ & + \frac{c_\lambda}{\kappa_\lambda^2} \frac{k_\lambda^2 \partial J_n(\lambda\rho) \partial J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho \partial\rho'} \{ \cos n(\phi - \phi') \} e^{-jk_\lambda(z-z')} \end{aligned} \right] \quad (3.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่ (3.13) เป็นสมการของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ρ, ρ

$$G_{EJ, \rho\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \frac{nJ_n(\mu\rho)}{\rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \{\sin n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\mu}(z-z')} \right. \\ \left. + \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} \frac{k_{\lambda}^2 \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{nJ_n(\lambda\rho')}{\rho'} \{\sin n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \right] \quad (3.14)$$

สมการที่ (3.14) เป็นฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ρ, ϕ

$$G_{EJ, \rho z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} j \frac{k_{\lambda} \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \{\cos n(\phi - \phi')\} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \quad (3.15)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ρ, z ถูกแสดงดังสมการที่ (3.15)

$$G_{EJ, \phi\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \frac{n \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{J_n(\mu\rho')}{\rho'} \{\sin n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\mu}(z-z')} \right. \\ \left. + \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} \frac{k_{\lambda}^2 n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \{\sin n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \right] \quad (3.16)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ϕ, ρ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.16)

$$G_{EJ, \phi\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \frac{\partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \{\cos n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\mu}(z-z')} \right. \\ \left. + \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} \frac{k_{\lambda}^2 n^2 J_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{J_n(\lambda\rho')}{\rho'} \{\cos n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \right] \quad (3.17)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ϕ, ϕ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.17)

$$G_{EJ,\phi z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\pm \hat{a}_{\phi} \hat{a}_z j \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} \frac{k_{\lambda} n J_n(\lambda \rho)}{\rho} \lambda^2 J_n(\lambda \rho') \{ \sin n(\phi + \phi') \} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \quad (3.18)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ϕ, z ถูกแสดงดังสมการที่ (3.18)

$$G_{EJ,z\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} j \lambda^2 J_n(\lambda \rho) \frac{k_{\lambda} \partial J_n(\lambda \rho')}{\partial \rho'} \{ \cos n(\phi - \phi') \} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \quad (3.19)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ z, ρ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.19)

$$G_{EJ,z\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} j \lambda^2 J_n(\lambda \rho) \frac{k_{\lambda} n J_n(\lambda \rho')}{\rho'} \{ \sin n(\phi + \phi') \} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \quad (3.20)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ z, ϕ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.20)

$$G_{EJ,zz} = \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(R-R') + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}^2} \lambda^4 J_n(\lambda \rho) J_n(\lambda \rho') \{ \cos n(\phi - \phi') \} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \quad (3.21)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ z, z ถูกแสดงดังสมการที่ (3.21)

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดไฟฟ้าที่เกิดจากการความหนาแน่นไฟฟ้าทั้ง 9 สมการนี้สามารถที่นำไปคำนวณในลำดับขั้นตอนต่อไปเพื่อหาสนามไฟฟ้าได้ ในทำนองเดียวกันฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการความหนาแน่นไฟฟ้าก็สามารถหาสนามแม่เหล็กได้เช่นเดียวกัน

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า

$$\overline{\overline{G}}_{HJ}(\overline{R}, \overline{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[c_{\mu} \overline{N}_{\sigma_{\mu}}(\pm k_{\mu}) \overline{M}'_{\sigma_{\mu}}(\mp k_{\mu}) + c_{\lambda} \overline{M}_{\sigma_{\lambda}}(\pm k_{\lambda}) \overline{N}'_{\sigma_{\lambda}}(\mp k_{\lambda}) \right], z > z' \\ < z' \quad (3.22)$$

สมการที่ (3.22) เป็นสมการของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดแม่เหล็กที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่มีทั้งสองกรณีคือ กรณีที่ $z > z'$ และ $z < z'$ ซึ่งในสมการที่ (3.22ก) เป็นฟังก์ชันกรีน

ไดแอดคิชนิตแม่เหล็กที่เกิดจากการความหนาแน่นไฟฟ้ากรณีที $z > z'$ ซึ่งเป็นไปตามโครงสร้างของสายอากาศตามที่ได้ออกแบบไว้

$$\overline{\overline{G}}_{HJ}(\overline{R}, \overline{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[c_{\mu} \overline{N}_{\epsilon_{\sigma\mu}}^{+k_{\mu}} \overline{M}'_{\epsilon_{\sigma\mu}}(-k_{\mu}) + c_{\lambda} \overline{M}_{\epsilon_{\sigma\lambda}}^{+k_{\lambda}} \overline{N}'_{\epsilon_{\sigma\lambda}}(-k_{\lambda}) \right], z > z' \quad (3.22ก)$$

$$\overline{\overline{G}}_{HJ}(\overline{R}, \overline{R}') =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[c_{\mu} \frac{1}{\kappa_{\mu}} \left(\begin{array}{l} \pm \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\phi} j k_{\mu} \frac{n \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ + \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\phi} j k_{\mu} \frac{\partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ - \hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\rho} j k_{\mu} \frac{n^2 \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ \mp \hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\rho} j k_{\mu} \frac{n J_n(\mu\rho)}{\rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ \mp \hat{a}_z \hat{a}_{\phi} \mu^2 J_n(\mu\rho) \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ - \hat{a}_z \hat{a}_{\phi} \mu^2 J_n(\mu\rho) \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \end{array} \right) e^{-jk_{\mu}(z-z')} + c_{\lambda} \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \left(\begin{array}{l} \mp \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\phi} j k_{\lambda} \frac{n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ + \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\phi} j k_{\lambda} \frac{n^2 J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\rho')}{\rho \rho'} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ \mp \hat{a}_{\rho} \hat{a}_z \frac{n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ - \hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\rho} j k_{\lambda} \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \\ \pm \hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\rho} j k_{\lambda} \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{n J_n(\lambda\rho')}{\rho'} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi') \\ \cos(n\phi') \end{Bmatrix} \\ - \hat{a}_{\phi} \hat{a}_z \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \begin{Bmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} \end{array} \right) e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \right] \quad (3.23)$$

ซึ่งเราสามารถทำให้สมการที่ (3.23) ให้เป็นรูปอย่างง่ายได้ดังสมการที่ (3.24)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\overline{G}_{HJ}(\overline{R}, \overline{R}') =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[\begin{array}{l} \frac{c_{\mu}}{\kappa_{\mu}} \left[\begin{array}{l} +\hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\rho} j k_{\mu} \frac{n \partial J_n(\mu \rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu \rho')}{\partial \rho'} \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') - \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ +\hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\phi} j k_{\mu} \frac{\partial J_n(\mu \rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu \rho')}{\partial \rho'} \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ -\hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\rho} j k_{\mu} \frac{n^2 \partial J_n(\mu \rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu \rho')}{\partial \rho'} \{ \sin(n\phi) \sin(n\phi') + \cos(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ -\hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\phi} j k_{\mu} \frac{n^2 \partial J_n(\mu \rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\mu \rho')}{\partial \rho'} \{ \sin(n\phi) \cos(n\phi') + \cos(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ -\hat{a}_z \hat{a}_{\rho} \mu^2 J_n(\mu \rho) \frac{n \partial J_n(\mu \rho')}{\partial \rho'} \{ \cos(n\phi) \sin(n\phi') + \sin(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ -\hat{a}_z \hat{a}_{\phi} \mu^2 J_n(\mu \rho) \frac{n \partial J_n(\mu \rho')}{\partial \rho'} \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \end{array} \right] e^{-jk_{\mu}(z-z')} + \\ \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} \left[\begin{array}{l} -\hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\rho} j k_{\lambda} \frac{n J_n(\lambda \rho)}{\rho} \frac{\partial J_n(\lambda \rho')}{\partial \rho'} \{ \sin(n\phi) \cos(n\phi') + \cos(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ +\hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\phi} j k_{\lambda} \frac{n^2 J_n(\lambda \rho)}{\rho} \frac{J_n(\lambda \rho')}{\rho'} \{ \sin(n\phi) \sin(n\phi') + \cos(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ -\hat{a}_{\rho} \hat{a}_z \frac{n J_n(\lambda \rho)}{\rho} \lambda^2 J_n(\lambda \rho') \{ \sin(n\phi) \cos(n\phi') + \cos(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ -\hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\rho} j k_{\lambda} \frac{\partial J_n(\lambda \rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\lambda \rho')}{\partial \rho'} \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \\ +\hat{a}_{\phi} \hat{a}_{\phi} j k_{\lambda} \frac{\partial J_n(\lambda \rho)}{\partial \rho} \frac{n J_n(\lambda \rho')}{\rho'} \{ \cos(n\phi) \sin(n\phi') - \sin(n\phi) \cos(n\phi') \} \\ -\hat{a}_{\phi} \hat{a}_z \frac{\partial J_n(\lambda \rho)}{\partial \rho} \lambda^2 J_n(\lambda \rho') \{ \cos(n\phi) \cos(n\phi') + \sin(n\phi) \sin(n\phi') \} \end{array} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \end{array} \right] \quad (3.24)$$

จากสมการที่ (3.24) เราสามารถสรุปให้เป็นไปตามองค์ประกอบได้ดังนี้

$$G_{HJ, \rho\rho} = \left[\begin{array}{l} j k_{\mu} \frac{c_{\mu}}{\kappa_{\mu}} \frac{n J_n(\mu \rho)}{\rho} \frac{J_n(\mu \rho')}{\rho'} \{ \cos n(\phi - \phi') \} e^{-jk_{\mu}(z-z')} \\ + j k_{\lambda} \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} \frac{n \partial J_n(\lambda \rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\lambda \rho')}{\partial \rho'} \{ \sin n(\phi - \phi') \} e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \end{array} \right] \quad (3.25)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ρ, ρ' ถูกแสดงดังสมการที่ (3.25)

$$G_{HJ,\rho\phi} = \left[\begin{aligned} & jk_{\mu} \frac{c_{\mu}}{\kappa_{\mu}} \frac{\partial J_n(\mu\rho)}{\partial\rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial\rho'} \{\cos n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\mu}(z-z')} \\ & + jk_{\lambda} \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} \frac{n^2 J_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{n J_n(\lambda\rho')}{\rho'} \{\cos n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \end{aligned} \right] \quad (3.26)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ρ, ϕ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.26)

$$G_{EJ,\rho z} = \left[\frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} \frac{n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \{\sin n(\phi - \phi')\} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \quad (3.27)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ρ, z ถูกแสดงดังสมการที่ (3.27)

$$G_{HJ,\phi\rho} = \left[\begin{aligned} & -jk_{\mu} \frac{c_{\mu}}{\kappa_{\mu}} \frac{n^2 \partial J_n(\mu\rho)}{\partial\rho} \frac{J_n(\mu\rho')}{\rho'} \{\cos n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\mu}(z-z')} \\ & -jk_{\lambda} \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial\rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho'} \{\cos n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \end{aligned} \right] \quad (3.28)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ϕ, ρ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.28)

$$G_{HJ,\phi\phi} = \left[\begin{aligned} & jk_{\mu} \frac{c_{\mu}}{\kappa_{\mu}} \frac{n^2 \partial J_n(\mu\rho)}{\partial\rho} \frac{\partial J_n(\mu\rho')}{\partial\rho'} \{\sin n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\mu}(z-z')} \\ & + jk_{\lambda} \frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} \frac{n \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial\rho} \frac{J_n(\lambda\rho')}{\rho'} \{\sin n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \end{aligned} \right] \quad (3.29)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ϕ, ϕ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.29)

$$G_{HJ,\phi z} = \left[-\frac{c_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial\rho} \lambda^2 J_n(\lambda\rho') \{\cos n(\phi + \phi')\} \right] e^{-jk_{\lambda}(z-z')} \quad (3.30)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ ϕ, z ถูกแสดงดังสมการที่ (3.30)

$$G_{HJ,z\rho} = \left[\frac{c_\mu}{\kappa_\mu} \mu^2 J_n(\mu\rho) \frac{n\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho'} \{\sin n(\phi - \phi')\} \right] e^{-jk_\mu(z-z')} \quad (3.31)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ z, ρ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.31)

$$G_{HJ,z\phi} = \left[-\frac{c_\lambda}{\kappa_\lambda} \mu^2 J_n(\mu\rho) \frac{n\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho'} \{\cos n(\phi + \phi')\} \right] e^{-jk_\mu(z-z')} \quad (3.32)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กที่เกิดจากการแหล่งกำเนิดของกระแสไฟฟ้า ในองค์ประกอบ z, ϕ ถูกแสดงดังสมการที่ (3.32)

3.3 การกระจัดกระจายทับซ้อนของฟังก์ชันกรีนไดโอดิก

จากสมการทั้งหมดที่ผ่านมาเป็นสมการฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าและแม่เหล็กที่เกิดจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า ซึ่งเป็นพื้นฐานของการหาค่าฟังก์ชันกรีนไดโอดิกที่ใช้กับวิทยานิพนธ์เนื่องจาก โครงสร้างของสายอากาศที่นำเสนอเป็นสายอากาศที่มีการกระตุ้นด้วยโพรบภายในโครงสร้างและมีการปิดที่ช่องเปิดด้านหนึ่งด้วยวัสดุตัวนำด้วย เพราะเหตุนี้เราจะใช้เพียงฟังก์ชันกรีนไดโอดิกที่คิดเพียงคลื่นจรเพียงอย่างเดียวไม่ได้ เพราะว่าจาก โครงสร้างได้มีผลของคลื่นนี้เกิดขึ้นด้วย จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการกระจายทับซ้อน (Scattering Superposition Techniques) ร่วมในการพิจารณาด้วยดังนี้

วิธีที่ง่ายที่สุดในการวิเคราะห์ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกสำหรับ สี่เหลี่ยมกึ่งอนันต์และทรงกระบอกกึ่งอนันต์นั้น เราจะเริ่มพิจารณาฟังก์ชันกึ่งอนันต์ในช่วง $0 \leq z < \infty$ การหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดที่หนึ่งสำหรับท่อนำคลื่นกึ่งอนันต์นั้นจะกำหนดให้เป็น $\overline{\overline{G}}_{E1}(\overline{R}, \overline{R}')$ หรือเรียกว่าฟังก์ชันกรีนไดโอดิกที่ใช้หลักการกระจายทับซ้อน

$$\overline{\overline{G}}_{E1}(\overline{R}, \overline{R}') = \overline{\overline{G}}_{EJ}(\overline{R}, \overline{R}') + \overline{\overline{G}}_{es}(\overline{R}, \overline{R}') \quad (3.33)$$

สำหรับพจน์ของ $\overline{\overline{G}}_{EJ}(\overline{R}, \overline{R}')$ เป็นดังสมการที่ (3.11) ขณะที่พจน์ของการกระจาย (Scattered Term) นั้นกำหนดให้เป็น $\overline{\overline{G}}_{es}(\overline{R}, \overline{R}')$ สามารถที่จะเขียนได้ดังสมการที่ (3.34)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \overline{G}_{es}(\overline{R}, \overline{R}') &= \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(\overline{R} - \overline{R}') + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) \overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) + B \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) \overline{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

ในฟังก์ชันของสนาม $\overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu)$ และ $\overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda)$ เป็นฟังก์ชันสนามที่มีการแพร่กระจายออกทิศทาง z และฟังก์ชัน $\overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu)$ และ $\overline{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda)$ เป็นฟังก์ชันการของการกระตุ้นและเพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของดิริเชตต์ที่มีเงื่อนไขว่าส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนไดเอดิกในแนวสัมผัสกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์ หรือ $z = 0$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\hat{a}_z \times \left[\overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(-k_\mu) \overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) + A \overline{M}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) \overline{M}'_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) \right]_{z=0} \quad (3.35)$$

หรือ

$$\hat{a}_z \times \left[\overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(-k_\mu) + A \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) \right]_{z=0} = 0 \quad (3.36)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตของดิริเชตต์จะได้ว่า $A = -1$ และในทำนองเดียวกันก็สามารถหา B ได้ว่า $B = 1$ ซึ่งสามารถเขียนแสดงพจน์ของการกระจายที่ซับซ้อนจากสมการ (3.33) เป็นดังสมการที่ (3.37) ดังนี้

$$\begin{aligned} \overline{G}_{E1}(\overline{R}, \overline{R}') &= \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(\overline{R} - \overline{R}') + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) \left(\overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(-k_\mu) - \overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) \right) \right. \\ &\quad \left. + \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) \left(\overline{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(-k_\lambda) + \overline{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) \right), z > z' \right] \\ &\quad \left[\overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(-k_\mu) - \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) \right] \overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) \\ &\quad \left. + \left[\overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(-k_\lambda) + \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) \right] \overline{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda), z < z' \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

จะได้

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(-k_\mu) - \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_\mu) &= -2j \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(z) \\ \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(-k_\lambda) + \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_\lambda) &= 2 \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(z) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\overline{G}_{E1}(\overline{R}, \overline{R}') = \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(\overline{R} - \overline{R}') + 2j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_{\mu}) \overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(z') - jc_{\lambda} \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_{\lambda}) \overline{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(z') \right] \quad (3.38)$$

$$\overline{M}_{\mu}(k_{\mu}) = \nabla \times \left[J_n(\mu\rho) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (n\phi) \right\} e^{-jk_{\mu}z} \hat{a}_z \right] \quad (3.39)$$

$$\overline{N}_{\lambda}(k_{\lambda}) = \frac{1}{\kappa_{\lambda}} \nabla \times \nabla \times \left[J_n(\lambda\rho) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (n\phi) \right\} e^{-jk_{\lambda}z} \hat{a}_z \right] \quad (3.40)$$

$$\overline{M}_{\mu 0}(z) = \nabla \times \left[J_n(\mu\rho) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (n\phi) \right\} \sin k_{\mu}z \hat{a}_z \right] \quad (3.41)$$

$$\overline{N}_{\lambda e}(z) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \left[J_n(\lambda\rho) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (n\phi) \right\} \cos k_{\lambda}z \hat{a}_z \right] \quad (3.42)$$

จากสมการที่ (3.39) และ (3.40) จะเห็นได้ว่าเป็นสมการฟังก์ชันคลื่นที่จะทำให้เกิดคลื่นจร และจากสมการที่ (3.41) และสมการที่(3.42) เป็นสมการที่จะทำให้เกิดเป็นคลื่นนิ่ง ซึ่งจะนำสมการทั้ง 4 นี้ไปหาไปหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกที่เป็นไปตามโครงสร้างสายอากาศที่ได้ออกแบบไว้ที่มีกรปิดปลายช่องเปิดด้านหนึ่งไว้ด้วยวัสดุตัวนำ หรือเราจะเรียกโครงสร้างนี้ว่า โครงสร้างกึ่งอนันต์ (Semi - Infinite)

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกที่คิดผลของคลื่นที่เกิดการกระจายระจายทับซ้อน

$$\overline{G}_{E1}(\overline{R}, \overline{R}') = \frac{-1}{k^2} \hat{a}_z \hat{a}_z \delta(\overline{R} - \overline{R}') + 2j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \overline{M}_{\epsilon_{n\mu}}(k_{\mu}) \overline{M}'_{\epsilon_{n\mu}}(z') - jc_{\lambda} \overline{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(k_{\lambda}) \overline{N}'_{\epsilon_{n\lambda}}(z') \right] \quad (3.43)$$

จากสมการที่ (3.43) เป็นฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดไฟฟ้าที่เราคิดรวมผลของการกระจายระจายทับซ้อนไว้ด้วย และเรายังสามารถที่จะแยกฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดไฟฟ้าที่คิดผลของการกระจายระจายทับซ้อนนี้ออกเป็น 9 องค์ประกอบได้เหมือนกับที่ได้คิดส่วนของคลื่นจรไปนั้น แต่ในที่นี้ เราจะแยกออกเป็น 2 องค์ประกอบดังสมการที่ (3.44) และ (3.45) เพราะว่ามันสะดวกแล้วเมื่อนำมา

รวมกับแหล่งกำเนิด ที่อยู่ในองค์ประกอบของ ρ ก็จะทำให้องค์ประกอบอื่นที่ไม่ตรงกับ องค์ประกอบ ρ นั้นมีค่าเป็นศูนย์

$$G_{E1,\rho\rho} = 2j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \frac{n^2 J_n(\mu\rho) J_n(\mu\rho')}{\rho \rho'} \{\cos n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\mu}z'} \sin k_{\mu}z' \right. \\ \left. + j \frac{c_{\lambda}}{k \cdot \kappa_{\lambda}} \frac{k_{\lambda}^2 \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \{\cos n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\lambda}z'} \sin k_{\lambda}z' \right] \quad (3.44)$$

สมการที่ (3.44) เป็นฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดไฟฟ้าที่คิดผลของการกระจายตัวชั้นใน องค์ประกอบ ρ, ρ

$$G_{E1,\phi\rho} = -2j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \frac{n \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{J_n(\mu\rho')}{\rho'} \{\sin n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\mu}z'} \sin k_{\mu}z' \right. \\ \left. + j \frac{c_{\lambda}}{k \cdot \kappa_{\lambda}} \frac{k_{\lambda}^2 n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \{\sin n(\phi + \phi')\} e^{-jk_{\lambda}z'} \sin k_{\lambda}z' \right] \quad (3.45)$$

สมการที่ (3.45) เป็นฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดไฟฟ้าที่คิดผลของการกระจายตัวชั้นใน องค์ประกอบ ϕ, ρ

สมการฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดแม่เหล็ก

$$\bar{G}_H(\bar{R}, \bar{R}') = 2jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\mu} \bar{N}_{\rho_{n\mu}}(k_{\mu}) \bar{M}'_{\rho_{n\mu}}(z') - jc_{\lambda} \bar{M}_{\rho_{n\lambda}}(k_{\lambda}) \bar{N}'_{\rho_{n\lambda}}(z') \right] \quad (3.46)$$

$$G_{H1,\rho\rho} = 2jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-j \frac{c_{\mu}}{\kappa_{\mu}} \frac{k_{\mu} \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \frac{J_n(\mu\rho')}{\rho'} \{\sin n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\mu}z'} \sin k_{\mu}z' \right. \\ \left. + \frac{c_{\lambda}}{k} \frac{k_{\lambda} n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \{\sin n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\lambda}z'} \sin k_{\lambda}z' \right] \quad (3.47)$$

สมการที่ (3.47) เป็นฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดแม่เหล็กที่คิดผลของการกระจายตัวชั้นใน องค์ประกอบ ρ, ρ

$$G_{H1,\phi\rho} = 2jk \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-j \frac{c_{\mu}}{\kappa_{\mu}} \frac{k_{\mu} n^2 J_n(\mu\rho) J_n(\mu\rho')}{\rho \rho'} \{\cos n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\mu}z'} \sin k_{\mu}z' \right. \\ \left. + \frac{c_{\lambda}}{k} \frac{k_{\lambda} \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial \rho'} \{\cos n(\phi - \phi')\} e^{-jk_{\lambda}z'} \sin k_{\lambda}z' \right] \quad (3.48)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

สมการการแพร่กระจายคลื่น

4.1 บทนำ

ในบทนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีที่จำเป็นต่อการทำวิทยานิพนธ์โดยจะกล่าวถึงคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม เพื่อไปศึกษาหาคุณลักษณะของสายอากาศที่มีการแพร่กระจายคลื่นแบบทิศทางเดียวซึ่งเป็นจุดประสงค์หลักของการนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ ลักษณะของสายอากาศเมื่อแบ่งตามลักษณะงานสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ สายอากาศที่มีการกระจายคลื่นด้วยตัวเอง (Primary Antenna) ซึ่งข้อดีของสายอากาศชนิดนี้คือ มีลักษณะที่ง่ายในการติดตั้งและสามารถหาทิศทางการแพร่กระจายของคลื่นได้ง่ายอีกด้วย ส่วนสายอากาศอีกชนิดหนึ่งก็คือสายอากาศที่ทำหน้าที่ในการสะท้อนคลื่น (Secondary Antenna) ซึ่งข้อดีของสายอากาศชนิดนี้ก็คือ มีค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่สูง เมื่อเทียบกับสายอากาศชนิดที่มีการแพร่กระจายคลื่นด้วยตัวเอง เพราะลักษณะทางกายภาพของสายอากาศชนิดนี้มักจะมีลักษณะที่ใหญ่ จึงทำให้ได้อัตราขยาย (Gain) ที่สูง ถ้าคลื่นของสายอากาศประเภทนี้จะมีลักษณะแคบ จึงนิยมใช้กันมากในการสื่อสารจุดต่อจุด

โดยทั่วไปสายอากาศจะมีลักษณะการแพร่กระจายคลื่นอยู่ 3 ลักษณะ คือ การแพร่กระจายแบบรอบตัว (Omni Directional) การแพร่กระจายแบบสองทิศทาง (Bidirectional) และการแพร่กระจายแบบทิศทางเดียว (Unidirectional) และในวิทยานิพนธ์นี้ได้เน้นในการทำวิจัยในส่วนของ การแพร่กระจายแบบทิศทางเดียวเพราะได้เน้นถึงการสื่อสารแบบจุดต่อจุด ซึ่งการสื่อสารแบบจุดต่อจุดนั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการแพร่กระจายเพียงทิศทางเดียว เพื่อให้ได้ค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่สูง ตัวอย่างการสื่อสารแบบจุดต่อจุดเช่น การสื่อสารผ่านดาวเทียม เป็นต้น

4.2 รัศมีของท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม

รัศมีของท่อนำคลื่นนับว่าเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญที่สุดของสายอากาศที่ทำมาจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม เพราะรัศมีของท่อนำคลื่นสามารถเป็นตัวกำหนดการแพร่กระจายคลื่นให้อยู่ในโหมดที่ต้องการ โดยธรรมชาติโหมดภายในท่อนำคลื่นจะมีหลายโหมดและแต่ละโหมดจะมีกำลังงานที่ขับออกมาต่างกัน ดังนั้นจึงต้องจัดวางค่ารัศมีที่เหมาะสมต่อการแพร่กระจายคลื่นให้อยู่ในโหมดหลักเท่านั้น คือต้องอยู่ในช่วง 0.293λ ถึง 0.486λ แต่อย่างไรก็ตามบริเวณที่ใกล้โพรบก็ยังคงมีโหมดอื่นๆ รวมอยู่ด้วย ความถี่ที่ใช้ในการออกแบบโครงสร้างสายอากาศในวิทยานิพนธ์นี้คือ 2.45GHz ซึ่ง

เป็นความถี่ช่วง Wireless LAN ซึ่งค่ารัศมีที่เหมาะสมดังกล่าวนี้ขึ้นอยู่กับค่าราคาของฟังก์ชันเบสเซลระหว่างโหมด $TE_{1,1}$ กับโหมด $TE_{2,1}$

$$TE_{n,m} = \frac{2\pi a}{\chi'_{n,m}} \text{ เมื่อ } \chi'_{n,m} \text{ คือ Derivative of Bessel Function เมื่อ } n, m \text{ คือเลขโหมด}$$

$$\lambda_{c1,1} = \frac{2\pi a}{\chi'_{1,1}} = \frac{2\pi a}{1.8412} = 3.412a$$

$$\lambda_{c2,1} = \frac{2\pi a}{\chi'_{2,1}} = \frac{2\pi a}{3.0542} = 2.5072a$$

เมื่อต้องการให้มีการส่งผ่านกำลังงานสูงสุดนั้นค่า $\lambda < \lambda_c$ หรือจะบอกว่า $f > f_c$ นั้นเอง เราจะได้ว่า $\lambda_{c2,1} \leq \lambda \leq \lambda_{c1,1}$

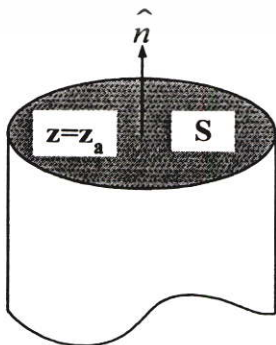
$$\lambda > 2.057a, \lambda < 3.412a$$

หรือ $0.486\lambda > a$ และ $a > 0.293\lambda$ นั่นก็คือ

$$0.293\lambda < a < 0.486\lambda$$

4.3 หลักการสนามสมมูล

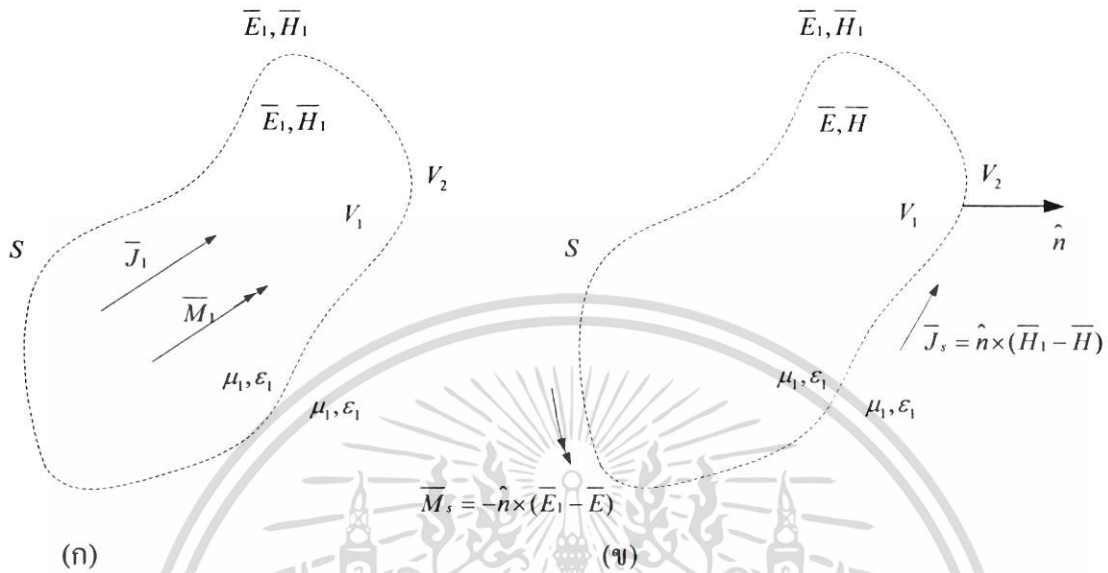
องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัสกับระนาบ z ที่ตำแหน่งใด ๆ นั้นสามารถหาค่าสนามสมมูลที่ระนาบ z ได้ตามหลักการของสนามสมมูล การหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายออกจากช่องเปิดที่พิจารณาคลื่นที่เดินทางในทิศ $+z$ เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่า \hat{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบของช่องเปิด S (ระนาบ $z = z_0$) และช่องเปิดวางอยู่บนช่องว่างอิสระ ดังนั้นเมื่อทราบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัสกับผิวระนาบของช่องเปิด S แล้วความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กสมมูลและกระแสไฟฟ้าสมมูลก็จะสามารถหาโดยหลักการของสนามสมมูล[6],[8]



รูปที่ 4.1 การพิจารณาความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กสมมูลและกระแสไฟฟ้าสมมูล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งหลักการสมมูลพื้นผิว(Surface Equivalent Principle) นี้ เป็นหลักการที่อธิบายถึงการแทนที่แหล่งกำเนิดจริง (Actual Source) เราจะเรียกแหล่งกำเนิดที่สร้างขึ้นมาแทนที่นี้ว่า แหล่งกำเนิดสมมูล เนื่องจากแหล่งกำเนิดนี้จะสร้างสนามที่เหมือนกันกับแหล่งกำเนิดจริงในบริเวณที่กำหนด



รูปที่ 4.2 (ก)แหล่งกำเนิดจริง และ (ข)รูปแบบจำลองสมมูล

พิจารณารูปที่ 4.2(ก) จะพบว่าแหล่งกำเนิดจริง \vec{J}_1 และ \vec{M}_1 ซึ่งเป็นกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็กตามลำดับ จะแพร่กระจายสนามไฟฟ้า \vec{E}_1 และสนามแม่เหล็ก \vec{H}_1 จากหลักการของทฤษฎีสมมูลพื้นผิว หากเราเลือกพื้นผิวปิด S ล้อมรอบแหล่งกำเนิดกระแส \vec{J}_1 และ \vec{M}_1 ซึ่งแสดงเป็นเส้นประจากรูปที่ 4.2 ก) ปริมาตรภายในพื้นผิวปิด S แทนด้วย V_1 และปริมาตรภายนอกพื้นผิวปิด S แทนด้วย V_2 ซึ่งสามารถแสดงสนามที่สมมูลกับปัญหาเดิมในรูปที่ 4.2 ก) ได้ดังรูปที่ 4.2 ข) เมื่อแหล่งกำเนิดเดิม \vec{J}_1 และ \vec{M}_1 ถูกกำจัดออกไป และกำหนดให้สนามภายในผิวปิด S แทนด้วย \vec{E}, \vec{H} และสนามภายนอกพื้นผิวปิดแทนด้วย \vec{E}_1, \vec{H}_1 ซึ่งต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวสัมผัส ดังนั้นจะได้ว่าที่บริเวณพื้นผิวปิด S จะเกิดแหล่งกำเนิดสมมูลซึ่งแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}) \quad (4.1)$$

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}) \quad (4.2)$$

ซึ่ง \vec{J}_s และ \vec{M}_s จะเป็นแหล่งกำเนิดของสนาม \vec{E}_1 และ \vec{H}_1 ในบริเวณ V_2 และสนาม \vec{E} และ \vec{H} ภายในผิวปิด S อาจมีค่าเป็นค่าใดก็ได้เพื่อความสะดวกจึงเลือกให้เป็นศูนย์ และเมื่อแทน S ด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (Perfect Electric Conductor) ในกรณีนี้กระแส \vec{J}_s จะลัดวงจรทั่วบริเวณผิวปิดและจะไม่เอกสาร์นี้เป็นเอกสาร์ที่ส่งงานไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยามให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แพร่กระจายคลื่นดังนั้นจะหาสนาม \bar{E}_1 และ \bar{H}_1 ในบริเวณ V_2 ได้จากกระแสแม่เหล็กสามารถเขียนเป็น S ด้วยตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์

$$\bar{M}_s = -\hat{n} \times \bar{E}_1 = \bar{E}_1 \times \hat{n} \quad (4.3)$$

กระแสแม่เหล็กสมมูล \bar{M}_s จะมีค่าเฉพาะบริเวณผิวตัวนำสมบูรณ์เท่านั้น กรณีที่เมื่อแทน S ด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (Perfect Electric Conductor) ซึ่งสามารถหาสนาม \bar{E}_1 และ \bar{H}_1 ใน V_2 ได้จากกระแสไฟฟ้าสมมูลเขียนได้ดังสมการ

$$\bar{J}_s = \hat{n} \times \bar{H}_1 \quad (4.4)$$

กระแสไฟฟ้าสมมูล \bar{J}_s จะมีค่าเฉพาะบริเวณผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ S ที่ถูกปิดล้อมเท่านั้น จากหลักการสนามสมมูลดังกล่าวนี้ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับ โครงสร้างสายอากาศที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้

4.4 โครงสร้างสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม

โดยวิทยานิพนธ์นี้ได้คำนึงถึงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลม ที่มีโพรบเป็นตัวกระตุ้นสัญญาณ สิ่งที่เราต้องการคือ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่มีลำคลื่นหลักที่แคบ และขณะเดียวกันก็ต้องมีความสูญเสียเนื่องจากการสะท้อนกลับ (Return Loss: Γ) ที่อยู่ในเกณฑ์ที่ต้องการ ในการวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศนั้น เราจะสนใจในส่วนของค่ารีซีพของท่อนำคลื่นเป็นอันดับแรก เพราะค่าดังกล่าวเป็นตัวกำหนดคุณลักษณะการแพร่กระจายของคลื่นที่ออกมาจากสายอากาศไม่ว่าจะเป็นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น และค่าสภาพเจาะจงทิศทาง ซึ่งถือว่าได้ว่าค่ารีซีพเป็นพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญมากที่สุดที่ต้องคำนึงถึงเป็นอันดับแรก สิ่งต่อไปที่จะต้องพิจารณาคือ ความยาวของโพรบที่ใช้กับตัวสายอากาศ โดยค่าดังกล่าว จะเป็นตัวกำหนดค่าอิมพีแดนซ์ของสายอากาศ โดยที่โครงสร้างของสายอากาศช่องเปิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลมนี้ เริ่มจากนำเอาท่อนำคลื่นทรงกระบอกกลมมาปิดปลายด้านหนึ่งไว้ โดยความสูงของท่อนำคลื่นนี้ กำหนดไว้ที่ 0.75λ ความสูงระหว่างตำแหน่งโพรบกับช่องปิดนั้นห่างกัน 0.25λ และความยาวโพรบ กำหนดไว้ที่ 0.25λ เช่นเดียวกัน แสดงดังรูปที่ 2.1 โดยทั่วไปแล้วคลื่นจะมีการเปลี่ยนจากค่าสูงสุดไปเป็นค่าต่ำสุดหรือค่าต่ำสุดเป็นสูงสุดนั้นต้องมีระยะเป็น $\lambda/4$ โดยค่ารีซีพของท่อนำคลื่นนั้นจะต้องทำให้ได้ความถี่คutoffต่ำสุด และได้ความยาวคลื่นสูงสุดเพื่อให้สามารถทำการส่งผ่านได้

4.5 สนามที่แพร่กระจายออกจากตัวสายอากาศ

จากสนามที่แพร่กระจายบริเวณช่องเปิดของวงแหวน สามารถหาสนามที่แพร่กระจายออกจากตัวสายอากาศได้ โดยพิจารณาจากสนามระยะไกลของสนามที่แพร่กระจายจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกที่ระนาบ $z=0$ จากส่วนประกอบของสนามที่แพร่กระจายบริเวณช่องเปิด จะพบว่าส่วนประกอบของสนาม ในแนวแกน z จะมีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้น จะพิจารณาเฉพาะส่วนประกอบของสนามที่เหลื่ออยู่จากสมการที่ (2.47) โดยที่ χ'_{nm} คือ ค่าที่ทำให้อนุพันธ์ ของฟังก์ชัน เบสเซล ชนิดที่ 1 J'_m ลำดับที่ m ($m=1,2,3,\dots$) มีค่าเท่ากับศูนย์เป็นครั้งที่ n ($n=0,1,2,3,\dots$)

จะเห็นได้ว่าในกรณีของโหมดคลื่นหลัก (TE_{11}) คือ $n=1, m=1$ จะได้ค่าของ χ'_{nm} มีค่าเท่ากับ 1.8412

$$k_\rho \Big|_{TE_{11}} = \frac{1.8412}{a}$$

เมื่อนำเงื่อนไขทั้งหมดข้างต้นแทนลงในสมการที่ (2.47) จะได้ว่า

$$F_z^+(\rho, \phi, z) = A_1 J_n(k_\rho \rho) \cdot C_2 \cos(m\phi) \cdot A_3 \quad (4.5)$$

เมื่อ $F_z^+(\rho, \phi, z)$ คือ ศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า ของสนามที่แพร่กระจายออกมา ในแนวแกน $+z$ ของระบบพิกัดทรงกระบอก ในกรณีของรูปแบบคลื่นหลัก (TE_{11}) จะได้ว่า

$$F_z^+(\rho, \phi, z) = A_1 J_n\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) \cdot C_2 \cos(\phi) \cdot A_3 \quad (4.6)$$

กำหนดให้

$$A = A_1 \cdot A_3$$

$$C_2 = 1$$

โดยที่ A คือ ค่าของขนาดที่ถูกกำหนดจากกำลังคลื่นที่ส่งผ่านเข้าไปในท่อนำคลื่นของแต่ละโหมดคลื่น จะได้ว่า

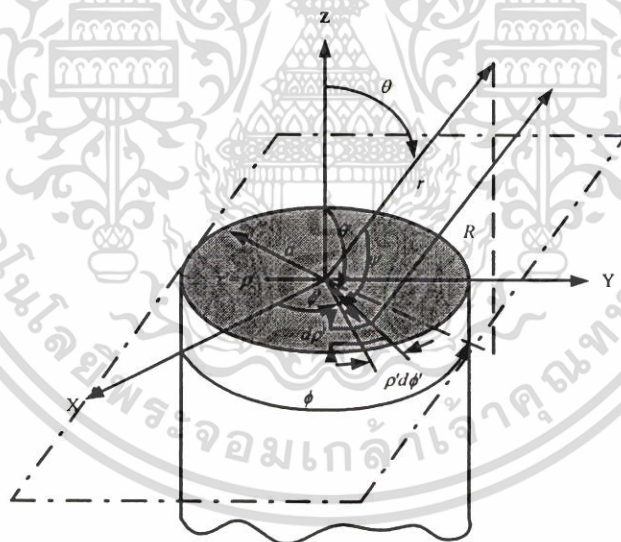
$$F_z^+(\rho, \phi, z) = AJ_n\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) \cos(\phi) \quad (4.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากส่วนประกอบของสนามที่เกิดขึ้น โดยมีโหมดคลื่นเป็นโหมด TE_{11} (Transverse Electric Mode) ซึ่งมีการเคลื่อนที่ของคลื่นในทิศทางแนวแกน z สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{\epsilon\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} & H_\rho &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\rho\partial z} \\ E_\phi &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_z}{\partial\rho} & H_\phi &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon\rho} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\phi\partial z} \\ E_z &= 0 & H_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z \end{aligned}$$

เนื่องจากแหล่งกำเนิด (Source) ที่ใช้ในการแพร่กระจายคลื่นนั้นเป็นโพรบ (Probe) เชิงเส้นไฟฟ้า ดังนั้นส่วนประกอบของสนามที่เกิดขึ้น จะสนใจเฉพาะส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าเท่านั้น เมื่อนำสมการที่ (4.7) แทนลงไปในส่วนประกอบของสนามไฟฟ้า ที่แสดงไว้ข้างต้นจะได้ส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าที่แพร่กระจายบริเวณพื้นที่หน้าตัดของท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกที่แสดงได้ดังรูปที่ 4.3 โดยคิดที่มุม ϕ จะได้ว่า



รูปที่ 4.3 ท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกที่มีช่องเปิดแบบวงกลมบนระนาบ $z = 0$

$$E_\rho = -\frac{1}{\epsilon\rho} \frac{\partial}{\partial\phi} \left[AJ_1 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) \cos(\phi) \right] \quad (4.8)$$

$$E_\phi = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[AJ_1 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) \cos(\phi) \right] \quad (4.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_z = 0 \quad (4.10)$$

4.5.1 การหาสนามโดยวิธีศักย์เวกเตอร์

$$E_\rho = \frac{1}{\epsilon \rho} A J_1 \left(\frac{1.8412 \rho}{a} \right) \sin(\phi) \quad (4.11)$$

$$E_\phi = \frac{1}{\epsilon} \frac{1.8412}{a} A J_1' \left(\frac{1.8412 \rho}{a} \right) \cos(\phi) \quad (4.12)$$

ทำการแปลงส่วนประกอบของสนามที่ได้ในสมการที่ (4.11) และ (4.12) ให้อยู่ในระบบพิกัดมุมฉาก (Rectangular Coordinate) โดยใช้คุณสมบัติดังนี้

$$E_x = E_\rho \cos(\phi) - E_\phi \sin(\phi) \quad (4.13)$$

$$E_y = E_\rho \sin(\phi) + E_\phi \cos(\phi) \quad (4.14)$$

จะได้ว่า

$$E_x = \frac{A}{\epsilon \rho} \sin(\phi) \cos(\phi) \times \left\{ \frac{1}{\rho} J_1 \left(\frac{1.8412 \rho}{a} \right) - \frac{1.8412}{a} J_1' \left(\frac{1.8412 \rho}{a} \right) \right\} \quad (4.15)$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันเบสเซลที่แสดงได้ดังนี้

$$\frac{n}{u} J_n(u) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(u) + J_{n+1}(u)] \quad (4.16)$$

$$\frac{n}{u} \frac{dJ_n(u)}{du} = \frac{1}{2} [J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u)] \quad (4.17)$$

จะได้ว่า

$$E_x = \frac{A}{\epsilon} \frac{1.8412}{2a} J_2 \left(\frac{1.8412 \rho}{a} \right) \sin(2\phi) \quad (4.18)$$

ในการทำงานเดียวกันกับสำหรับ E_y จะได้ว่า

$$E_y = \frac{A}{\epsilon} \frac{1.8412}{2a} \left\{ J_0 \left(\frac{1.8412 \rho}{a} \right) - J_2 \left(\frac{1.8412 \rho}{a} \right) \cos(2\phi) \right\} \quad (4.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากคุณสมบัติการแปลงฟูรีเยร์ (Fourier Transform) 2 มิติ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$f_t(k_x, k_y) = \iint_{S_d} E_a(x, y) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy \quad (4.20)$$

เนื่องจากพื้นที่ที่ใช้ในอินทิเกรตนั้นเป็นพื้นที่หน้าตัดของท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอก ที่ระนาบ $z = 0$ จะได้ว่า

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.21ก)$$

$$x = \rho \cos(\phi) \quad (4.21ข)$$

$$y = \rho \sin(\phi) \quad (4.21ค)$$

$$dx dy = \rho d\rho d\phi \quad (4.21ง)$$

และจากการสังเกตที่สนามระยะไกล จะกำหนดให้

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (4.22ก)$$

$$k_y = k \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (4.22ข)$$

นำสมการที่ (4.23),(4.24),(4.25) และ(4.26) แทนลงในสมการที่ (4.20) โดยที่

$$E_a(x, y) = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y \quad (4.23)$$

และกำหนดให้

$$M = \frac{A_{11}}{\varepsilon} \frac{1.8412}{2a} \quad (4.24)$$

เมื่อ

$$A = E_0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$f_i(x, y) = M \left[\int_0^a \int_0^{2\pi} J_2 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) \sin(2\phi) e^{jk\rho \sin\theta \cos(\phi-\phi')} \rho d\phi d\rho \hat{a}_x \right. \\ \left. + \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) e^{jk\rho \sin\theta \cos(\phi-\phi')} \rho d\phi d\rho \hat{a}_y \right. \\ \left. - \int_0^a \int_0^{2\pi} J_2 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) \cos(2\phi) e^{jk\rho \sin\theta \cos(\phi-\phi')} \rho d\phi d\rho \hat{a}_y \right] \quad (4.25)$$

จากคุณสมบัติที่แสดงได้ดังนี้

$$e^{jw \cos(\phi-\phi')} = J_0(w) - 2 \left[J_2(w) \cos 2(\phi-\phi') - J_4(w) \cos 4(\phi-\phi') + \dots \right] \\ + 2j \left[J_1(w) \cos 2(\phi-\phi') - J_3(w) \cos 4(\phi-\phi') + \dots \right] \quad (4.26)$$

เมื่อพิจารณาการอินทิเกรตเทียบกับมุม เมื่อแทนสมการที่ (4.26) ลงในสมการที่ (4.25) จะได้ว่า

$$f_i(x, y) = M \left[-2\pi \sin(2\phi) \int_0^a J_2 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \hat{a}_x \right. \\ \left. + 2\pi \int_0^a J_0 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) J_0(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \hat{a}_y \right. \\ \left. + 2\pi \cos(2\phi) \int_0^a J_2 \left(\frac{1.8412\rho}{a} \right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \hat{a}_y \right] \quad (4.27)$$

จากรูปแบบของสนามทั้งหมดที่แพร่กระจายโดยการสังเกตที่สนามระยะไกล สามารถแสดงได้ดังนี้

$$E_r = jk \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\hat{a}_\theta \{ f_x \cos(\phi) + f_y \sin(\phi) \} + \hat{a}_\phi \cos(\theta) \{ f_y \cos(\phi) - f_x \sin(\phi) \} \right] \quad (4.28)$$

จากสมการที่ (4.27) และ (4.28) จะกำหนดให้ f_x เป็นค่าที่อยู่ในพจน์ของ \hat{a}_x และ f_y เป็นค่าที่อยู่ในพจน์ของ \hat{a}_y และให้ E_θ เป็นค่าที่อยู่ในพจน์ของ \hat{a}_θ และ E_ϕ เป็นค่าที่อยู่ในพจน์ของ \hat{a}_ϕ

เมื่อพิจารณาในพจน์ของ E_θ จะได้ว่า

$$E_\theta = jk \frac{e^{jk_0 r}}{2\pi r} M \left[-2\pi \sin(2\phi) \cos(\phi) \int_0^a J_2\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \right. \\ \left. + 2\pi \sin(\phi) \int_0^a J_0\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_0(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \right. \\ \left. + 2\pi \cos(2\phi) \sin(\phi) \int_0^a J_2\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \right] \quad (4.29)$$

ถ้ากำหนดให้

$$N = jk \frac{e^{jkr}}{2\pi r} \quad (4.30)$$

และใช้คุณสมบัติที่แสดงได้ดังนี้

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \quad (4.31)$$

เมื่อนำสมการ (4.30) และ (4.31) แทนลงในสมการที่ (4.29) จะได้ว่า

$$E_\theta = 2NM\pi \sin(\phi) \left[\int_0^a J_0\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_0(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \right. \\ \left. - \int_0^a J_2\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \right] \quad (4.32)$$

จากรูปแบบการทำอินทิเกรตของเบสเซลฟังก์ชัน ที่แสดงได้ดังนี้

$$\int_0^a J_n(k_1 r) J_n(k_2 r) r dr = \frac{a}{k_1^2 - k_2^2} [k_2 J_n(k_1 a) J_{n-1}(k_2 a) - k_1 J_{n-1}(k_1 a) J_n(k_2 a)] \quad (4.33)$$

และ

$$J_{-n} = (-1)^n J_n(n) \quad (4.34)$$

จะได้ว่า

$$E_\theta = 2NM\pi \sin(\phi) \frac{a^3}{(1.8412)^2 - (ka \sin(\theta))^2} \left[\left\{ -k \sin(\theta) J_0(1.8412) J_1(ka \sin(\theta)) + \frac{1.8412}{a} J_1(1.8412) J_0(ka \sin(\theta)) \right\} - \left\{ k \sin(\theta) J_2(1.8412) J_1(ka \sin(\theta)) - \frac{1.8412}{a} J_1(1.8412) J_2(ka \sin(\theta)) \right\} \right] \quad (4.35)$$

จากสมการที่ (4.16) สามารถเขียนสมการที่ (4.35) ได้ใหม่ดังนี้

$$E_\theta = 2NM\pi \sin(\phi) \frac{2a^2}{(1.8412)(k \sin(\theta))} J_1(1.8412) J_1(ka \sin(\theta)) \quad (4.36)$$

เมื่อแทนค่า N และ M ลงในสมการที่ (4.36) จะได้ว่า

$$E_\theta = jk \frac{e^{-jk_0 r}}{\epsilon r} E_0 a \sin(\phi) J_1(1.8412) \frac{J_1(ka \sin(\theta))}{ka \sin(\theta)} \quad (4.37)$$

เช่นเดียวกันสำหรับ E_ϕ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$E_\phi = jk \frac{e^{jkr}}{2\pi r} M \left[2\pi \cos(\phi) \cos(\theta) \int_0^a J_0\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_0(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho + 2\pi \cos(\phi) \cos(2\phi) \cos(\theta) \int_0^a J_2\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho + 2\pi \sin(2\phi) \sin(\phi) \cos(\theta) \int_0^a J_2\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \right] \quad (4.38)$$

จากสมการที่ (4.30) ความสัมพันธ์ที่สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y) \quad (4.39)$$

จะได้ว่า

$$E_\phi = 2NM\pi \cos(\phi) \cos(\theta) \left[\int_0^a J_0\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_0(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho + \int_0^a J_2\left(\frac{1.8412\rho}{a}\right) J_2(k\rho \sin(\theta)) \rho d\rho \right] \quad (4.40)$$

จากสมการที่ (4.33) และ (4.34) จะได้ว่า

$$E_\phi = 2NM\pi \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{a^3}{(1.8412)^2 - (ka \sin(\theta))^2} \left[\left\{ -k \sin(\theta) J_0(1.8412) \times J_1(ka \sin(\theta)) + \frac{1.8412}{a} J_1(1.8412) J_0(ka \sin(\theta)) \right\} + k \sin(\theta) \times J_2(1.8412) J_1(ka \sin(\theta)) - \frac{1.8412}{a} J_1(1.8412) J_2(ka \sin(\theta)) \right] \quad (4.41)$$

จากสมการที่ (4.17) และใช้คุณสมบัติที่แสดงได้ดังนี้

$$\left. \frac{dJ_n(k_c r)}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (4.42)$$

โดยที่

$$k_c = \frac{k'_{nm}}{a} \quad (4.43)$$

ซึ่งในกรณีของโหมดคลื่นหลัก TE_{11} ค่าของ k'_{nm} จะมีค่าเท่ากับ 1.8412 ดังนั้น สมการที่ (4.42) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$E_\phi = 2NM\pi \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{a^3}{(1.8412)^2 - (ka \sin(\theta))^2} (1.8412) J_1(1.8412) \times \frac{dJ_1(ka \sin(\theta))}{d(ka \sin(\theta))} \quad (4.44)$$

เมื่อแทนค่า N และ M ลงในสมการที่ (4.44) จะได้ว่า

$$E_\phi = jk \frac{e^{-jkr}}{\epsilon r} E_0 a \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{(1.8412)^2 J_1(1.8412)}{(1.8412)^2 - (ka \sin(\theta))^2} \times \frac{dJ_1(ka \sin(\theta))}{d(ka \sin(\theta))} \quad (4.45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นสนามที่แพร่กระจายออกจากท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกที่ระนาบ $z = 0$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$E_\theta = jk \frac{e^{-jkr}}{\epsilon r} E_0 a \sin(\phi) J_1(1.8412) \frac{J_1(ka \sin(\theta))}{ka \sin(\theta)} \quad (4.46)$$

$$E_\phi = jk \frac{e^{-jkr}}{\epsilon r} E_0 a \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{(1.8412)^2 J_1(1.8412)}{(1.8412)^2 - (ka \sin(\theta))^2} \times \frac{dJ_1(ka \sin(\theta))}{d(ka \sin(\theta))} \quad (4.47)$$

4.5.2 การหาสนามโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอคติก

เมื่อได้สนามไฟฟ้าแล้วก็สามารถหาค่ากระแสแม่เหล็กได้ดังสมการที่ (4.1) ตามหลักการสนามสมมูลที่ได้กล่าวไปในหัวข้อที่ 4.3 เมื่อได้สมการฟังก์ชันกรีนไดแอคติกชนิดไฟฟ้าแล้ว ก็สามารถหาสนามไฟฟ้าได้ เมื่อแทนสมการ (3.44) ลงในสมการที่ (4.48) ก็จะทำได้สนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ ρ และเมื่อเรานำสมการ (3.45) แทนลงใน สมการที่ (4.48) ก็จะทำได้ สนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ ϕ

$$\bar{E}(\rho, \phi, z) = -j\omega\mu_0 \int_{a-l}^a \bar{G}_E(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') J_\rho(\rho', \phi', z') \hat{a}_\rho d\rho' \quad (4.48)$$

เมื่อมีการกระตุ้นโพรบด้วยกระแสไฟฟ้า ลักษณะการแจกแจงขนาดของกระแส ณ ตำแหน่งต่างๆ บนสายอากาศมักได้รับการสมมติว่าเป็นแบบคลื่นไซน์(Sinusoidal Distribution) ดังแสดงตามข้างล่างนี้

$$\bar{J}(R') = J_m \sin[k(\rho' - a + l)] \hat{a}_\rho; a - l \leq \rho' \leq a, \phi' = 0, z' = \frac{\pi}{4} \quad (4.49ก)$$

เมื่อ J_m คือค่าสูงสุดของกระแส

$$E_{a,TE} = H_{a,TE} = \int_{a-l}^a \frac{J_n(\mu\rho')}{\rho'} \sin[k(\rho' - a + l)] d\rho' \quad (4.49ข)$$

$$E_{a,TM} = H_{a,TM} = \int_{a-l}^a \frac{\partial J_n(\lambda\rho')}{\partial\rho'} \sin[k(\rho' - a + l)] d\rho' \quad (4.48ค)$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.44) ลงสมการที่ (4.48) จะทำได้สนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ ρ ดังสมการที่ (4.50)

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = 2\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & c_\mu \frac{n^2 J_n(\mu\rho)}{\rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z'} \sin k_\mu z' \\ & + j \frac{c_\lambda}{k \cdot \kappa_\lambda} \frac{k_\lambda^2 \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z'} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.50)$$

สมการที่ (4.50) เป็นสมการที่ได้จากการนำฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดไฟฟ้าในองค์ประกอบ ρ, ρ ไปคูณแบบจุด (Dot Product) กับแหล่งจ่ายที่เป็นรูปคลื่นไซน์ในองค์ประกอบ ρ ซึ่งแหล่งกำเนิดกระแสจะได้ออกค่าในหัวข้อถัดไป จะทำให้เราได้สนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ ρ ได้

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = -2\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & c_\mu \frac{n \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \{\sin n(\phi - \phi')\} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z'} \sin k_\mu z' \\ & + c_\lambda j \frac{nk_\lambda^2}{k \cdot \kappa_\lambda} \frac{J_n(\lambda\rho)}{\rho} \{\sin n(\phi - \phi')\} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z'} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.51)$$

สมการที่ (4.51) เป็นสมการที่ได้จากการนำฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดไฟฟ้าในองค์ประกอบ ϕ, ρ ไปคูณแบบจุดกับแหล่งกำเนิดกระแสที่เป็นรูปคลื่นไซน์ในองค์ประกอบ ρ ซึ่งจะทำให้ได้สนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ ϕ ตามหลักการของการคูณแบบจุดของเวกเตอร์

ตามหลักการสนามสมมูลที่ได้กล่าวไปแล้วดังหัวข้อที่ 4.3 จะทำให้ได้ว่า เมื่อนำสนามไฟฟ้าไปคูณแบบไขว้ (Cross Product) กับทิศทางกระแสกระจายคลื่น ก็จะทำให้ได้ความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก ดังแสดงตามสมการที่ (4.52)

$$\overline{M}_s(\rho, \phi, z) = \overline{E}(\rho, \phi, z)|_{z=c} \times \hat{a}_z \quad (4.52)$$

$$M_\rho(\rho, \phi, z) = -2\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & c_\mu \frac{n \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \{\sin n(\phi - \phi')\} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z'} \sin k_\mu z' \\ & + c_\lambda \frac{nk_\lambda^2}{k \cdot \kappa_\lambda} \frac{J_n(\lambda\rho)}{\rho} \{\sin n(\phi - \phi')\} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z'} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.53)$$

สมการที่ (4.53) เป็นสมการของกระแสแม่เหล็กที่บริเวณช่องเปิดของโครงสร้างของสายอากาศ ที่ได้คำนวณมาจากการนำสนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ ϕ ไปคูณแบบไขว้กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทาง z ตามสมการที่ (4.52)

$$M_\phi(\rho, \phi, z) = -2\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & c_\mu \frac{n^2 J_n(\mu\rho)}{\rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z} \sin k_\mu z' \\ & + \frac{c_\lambda}{k \cdot \kappa_\lambda} \frac{k_\lambda^2 \partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.54)$$

ในการทำงานเดียวกันการหากระแสแม่เหล็กในองค์ประกอบ ϕ ก็สามารหหาได้เช่นเดียวกันกับ การหากระแสแม่เหล็กในองค์ประกอบ ρ คือ นำเอาสนามไฟฟ้าในองค์ประกอบ ρ มาคูณแบบไขว้กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทาง z ตามสมการที่ (4.52) ของหลักการสนามสมมูล ก็จะทำได้กระแสแม่เหล็กในองค์ประกอบ ϕ ดังสมการที่ (4.54) จากนั้นก็สามารถหาความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าโดยอาศัยหลักการสนามสมมูลดังหัวข้อที่ 4.3 โดยนำฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดแม่เหล็กจากสมการที่(3.46) ไปคูณแบบจุดกับแหล่งกำเนิดกระแสดังสมการที่(4.49ก) ก็จะทำได้สนามแม่เหล็กดังสมการที่(4.55)

$$\bar{H}(\rho, \phi, z) = \int_{a-l}^a \bar{G}_H(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') \cdot J_\rho(\rho', \phi', z') \hat{a}_\rho d\rho' \quad (4.55)$$

$$H_\rho(\rho, \phi, z) = 2k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & k_\mu \frac{c_\mu}{\kappa_\mu} \frac{n \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \{\sin n(\phi - \phi')\} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z} \sin k_\mu z' \\ & + j c_\lambda \frac{k_\lambda}{k} \frac{n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \{\sin n(\phi - \phi')\} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.56)$$

$$H_\phi(\rho, \phi, z) = 2k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & k_\mu \frac{c_\mu}{\kappa_\mu} \frac{n^2 J_n(\mu\rho)}{\rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z} \sin k_\mu z' \\ & + j c_\lambda \frac{k_\lambda}{k} \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.57)$$

$$\bar{J}_s(\rho, \phi, z) = \bar{H}(\rho, \phi, z)|_{z=c} \times (-\hat{a}_z) \quad (4.58)$$

$$J_\rho(\rho, \phi, z) = -2k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & k_\mu \frac{c_\mu}{\kappa_\mu} \frac{n^2 J_n(\mu\rho)}{\rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z} \sin k_\mu z' \\ & + c_\lambda \frac{k_\lambda}{k} \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \{\cos n(\phi - \phi')\} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.59)$$

หลังจากที่เรานำสมการที่ (4.57) ไปแทนในสมการ (4.58) เราก็จะได้รับความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าในองค์ประกอบ ρ ดังสมการที่ (4.59)

$$J_\phi(\rho, \phi, z) = 2k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} & k_\mu \frac{c_\mu}{\kappa_\mu} \frac{n \partial J_n(\mu\rho)}{\partial \rho} \{ \sin n(\phi - \phi') \} E_{a,TE} e^{-jk_\mu z} \sin k_\mu z' \\ & + c_\lambda \frac{k_\lambda}{k} \frac{n J_n(\lambda\rho)}{\rho} \{ \sin n(\phi - \phi') \} E_{a,TM} e^{-jk_\lambda z} \sin k_\lambda z' \end{aligned} \right] \quad (4.60)$$

ในการทำงานเดียวกันก็สามารถที่หาความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าในองค์ประกอบของ ϕ ได้ โดยการนำเอาสนามแม่เหล็กในองค์ประกอบ ρ ไปคูณแบบไขว้กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $-z$ ตามสมการที่ (4.58) หลังจากที่ได้กระแสทั้ง 2 ชนิดนี้แล้วคือความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า และความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก ที่บริเวณช่องเปิดแล้วเราก็สามารถที่จะหาสนามที่มีการแพร่กระจายระยะไกลได้

4.6 การกระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบริเวณช่องเปิดของวงแหวน

ได้สมการการแพร่กระจายคลื่นดังนี้

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ e^{jkz_o \cos \theta} \left[L_\phi(\theta, \phi) + \eta N_\theta(\theta, \phi) \right] \right\} \quad (4.61ก)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ e^{jkz_o \cos \theta} \left[L_\theta(\theta, \phi) - \eta N_\phi(\theta, \phi) \right] \right\} \quad (4.61ข)$$

การใช้สายอากาศช่องเปิดวงกลมเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในย่านความถี่ไมโครเวฟ เพราะว่าเป็นโครงสร้างที่สมมาตร และอีกอย่างหนึ่งก็คือ สมการก็แสดงอยู่ในรูปของผลสำเร็จที่ง่ายต่อการนำไปประยุกต์

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_v J \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iint_s J \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \\ &= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \bar{N} \\ \bar{N} &= \iint_s J e^{jkr' \cos \phi} ds' \end{aligned} \quad (4.62)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \iiint_v \bar{M} \frac{e^{-jkr}}{R} dv' \\
&= \frac{\epsilon}{4\pi} \iint_s \bar{M} \frac{e^{-jkr}}{R} ds' \\
&= \frac{\epsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \bar{L} \\
\bar{L} &= \iint_s \bar{M} e^{jkr' \cos \phi} ds' \tag{4.63}
\end{aligned}$$

เนื่องจากโครงสร้างที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์มีพิสัยที่เหมาะสมคือ พิกัดทรงกระบอก การหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของทรงกระบอกนั้น จำเป็นที่ต้องหาสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก ในพิกัดทรงกระบอกนี้เช่น $E_\rho, E_\phi, E_z, H_\rho, H_\phi$ และ H_z ดังนั้นพิกัดของความหนาแน่นกระแสสมมูล \bar{M}_s และ \bar{J}_s ก็คือ $M_\rho, M_\phi, M_z, J_\rho, J_\phi, J_z$ ซึ่งจะต้องหาองค์ประกอบการแพร่กระจายคลื่น $N_\theta, N_\phi, L_\theta$ และ L_ϕ ดังสมการที่ 4.63ก, 4.63ข, 4.63ค, 4.63ง ตามลำดับ ของพิกัดทรงกระบอก

โดยที่ องค์ประกอบการแพร่กระจายคลื่นที่ได้จากฟังก์ชันกรีน ไดแอติก

$$N_\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[J_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + J_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi') - J_z \sin \theta \right] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \tag{4.63ก}$$

$$N_\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[-J_\rho \sin(\phi - \phi') + J_\phi \cos(\phi - \phi') \right] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \tag{4.63ข}$$

$$L_\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[M_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + M_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi') - M_z \sin \theta \right] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \tag{4.63ค}$$

$$L_\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[-M_\rho \sin(\phi - \phi') + M_\phi \cos(\phi - \phi') \right] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \tag{4.63ง}$$

4.7 สรุป

ในบทนี้ได้เริ่มกล่าวถึงการหาขนาดของรัศมีของท่อนำคลื่นที่ได้นำมาสร้างเป็นสายอากาศ โดยค่ารัศมีของท่อนำคลื่นนับว่ามีความสำคัญที่สุดของสายอากาศทรงกระบอกกลมที่ใช้ในงานวิจัย และในบทนี้ยังได้กล่าวถึงคุณลักษณะของการแพร่กระจายคลื่นของสนามระยะไกลทั้งกรณีวิเคราะห์ด้วยวิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ศักดิ์เวกเตอร์ และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก และยังได้หาค่ากระแสแม่เหล็ก และกระแสไฟฟ้าตามหลักการสนามสมมูล และได้นำค่ากระแสแม่เหล็ก และกระแสไฟฟ้าที่ได้ ไปคำนวณหาสมการการแพร่กระจายคลื่นของสนามระยะไกลอีกด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

ผลการวิเคราะห์และผลการทดสอบ

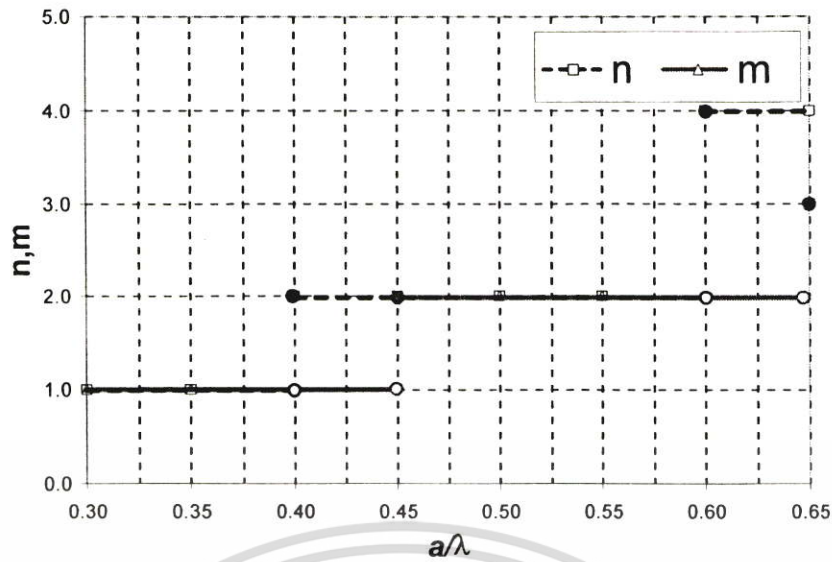
5.1 บทนำ

ลักษณะการใช้งานจะเป็นตัวเลือกชนิดของสายอากาศ การเลือกชนิดของสายอากาศจะขึ้นอยู่กับแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นอย่างเช่น เมื่อต้องการสื่อสารแบบจุดต่อจุด ก็ต้องเลือกแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบแบบทิศทางเดียว (Uni - Directional Beam) ถ้าต้องการส่ง-รับสัญญาณแบบรอบตัว ก็ต้องใช้สายอากาศที่มีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบรอบตัว (Omni-Directional Beam) หรือเมื่อมีพื้นที่รับสัญญาณมีลักษณะที่ยาวอย่างเช่นทางด่วน หรือ ในอุโมงค์สายอากาศที่มีความเหมาะสมที่ใช้ในการส่ง-รับสัญญาณ ก็ควรที่จะเป็นสายอากาศที่มีการแพร่กระจายแบบสองทิศทาง (Bidirectional Beam) การเลือกใช้สายอากาศที่มีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่เหมาะสมจะช่วยให้ประหยัดพลังงานในการส่ง-รับสัญญาณ และยังครอบคลุมพื้นที่ เป็นไปตามความต้องการได้มากอีกด้วย

ในการแพร่กระจายคลื่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตัวปล่อยพลังงาน มีลักษณะของโหมดที่ถูกส่งผ่านออกมาด้วยกันหลายโหมด โดยแต่ละ โหมดได้มีพลังงานที่ส่งผ่านออกมาที่แตกต่างกัน โหมดที่มีพลังงานในการส่งผ่านได้มากที่สุดนั้นเรียกว่า โหมดหลัก(Dominant Mode: TE_{11}) ในโครงสร้างสายอากาศที่นำเสนอนี้เป็น โครงสายอากาศแบบวงกลมที่มีการป้อนสัญญาณด้วยโพรบ โดยที่โหมดหลักของโครงสร้างสายอากาศนี้จะต้องมีค่ารัศมีของท่อนำคลื่นวงกลมอยู่ระหว่าง 0.293λ ถึง 0.486λ จึงจะทำให้มีการส่งผ่านกำลังงานที่ดีที่สุด

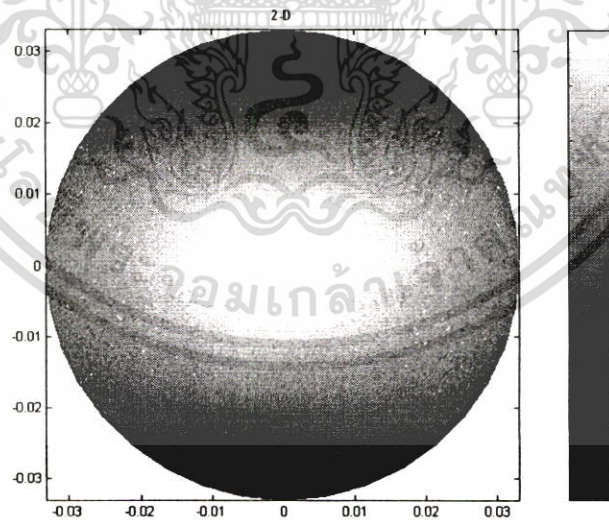
5.2 การพิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น

จากการคำนวณหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของโครงสร้างภายในทรงกระบอกดังรูปที่ 4.1 ที่ตำแหน่ง $z = z_0$ โดยพิจารณาคลื่นที่เดินทางออกจากช่องเปิดทิศทาง z โดยที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ารัศมีตั้งแต่ 0.3λ ถึง 0.65λ และใช้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆอีกดังนี้ คือ ความสูงของสายอากาศ $z_0 = 0.75\lambda$ ความสูงของตำแหน่งโพรบ $z_p = 0.25\lambda$ ความยาวโพรบ $l = 0.25\lambda$ นั้นสามารถที่จะหากราฟการลู่อเข้าของโหมด n, m ได้ดังรูปที่ 5.1

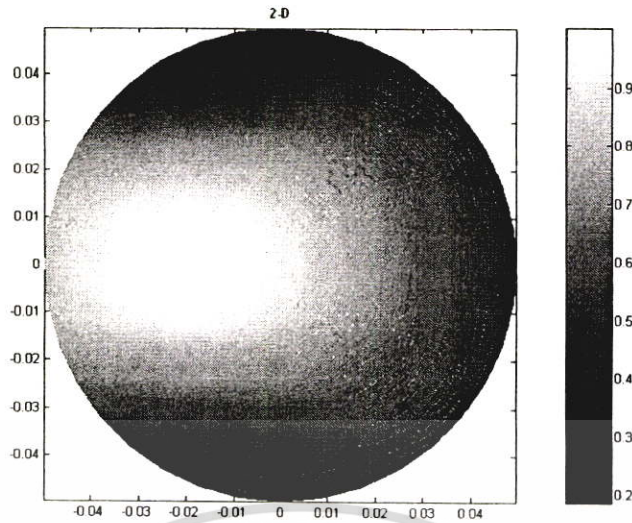


รูปที่ 5.1 กราฟการหาการลู่เข้าของเมื่อเปลี่ยนค่ารัศมีต่างๆ

รูปที่ 5.1 เป็นรูปการแสดงผลการลู่เข้าของสนามภายในท่อนำคลื่น จากรูปนี้จะเห็นได้ว่าที่ค่ารัศมีของท่อนำคลื่นมีค่ามาก ค่าจำนวนโหมด n, m ที่ใช้ในการลู่เข้านั้นก็จะมีค่ามากตามเพราะที่รัศมีของท่อนำคลื่นมีค่ามากนั้นจะทำให้เกิดสนามโหมดสูง (Higher Mode) จากรูปสรุปได้ว่าที่รัศมีของท่อนำคลื่นเท่ากับ $a = 0.3019\lambda$ ค่าความสูงของสายอากาศเท่ากับ $z_a = 0.75\lambda$ ที่ความสูงของตำแหน่งโพรบเท่ากับ $z_p = 0.25\lambda$ และที่ความยาวโพรบ $l = 0.25\lambda$ ความของโหมดจะลู่เข้าที่ $n = 1$ และ $m = 1$



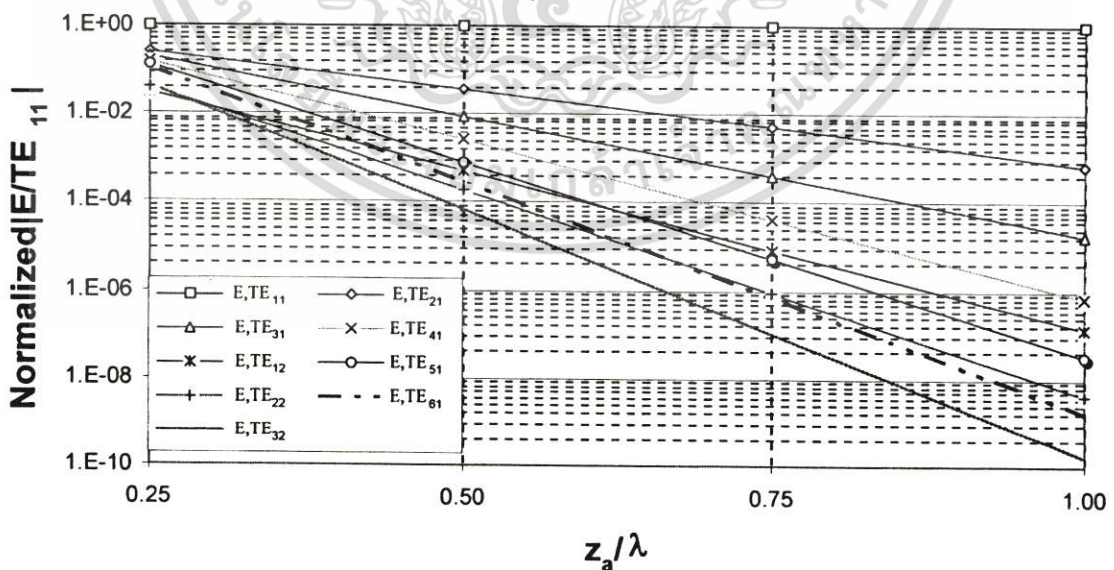
รูปที่ 5.2 แสดงค่าสนามภายในที่ $a = 0.3\lambda, z_a = 0.75\lambda, z_p = 0.25\lambda, l = 0.25\lambda$



รูปที่ 5.3 แสดงค่าสนามภายในที่ $a = 0.45\lambda$, $z_a = 0.75\lambda$, $z_p = 0.25\lambda$, $l = 0.25\lambda$

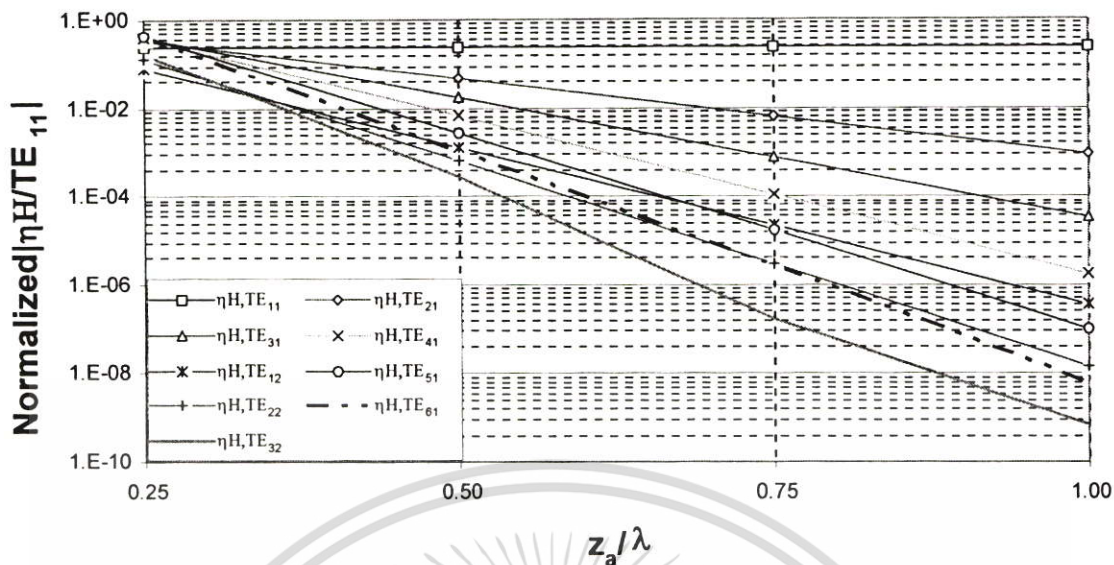
จากรูปที่ 5.2 และรูปที่ 5.3 เป็นรูปสนามภายในที่รัศมี $a = 0.3\lambda$ และรัศมี $a = 0.45\lambda$ ตามลำดับ โดยจะเห็นว่ารูปที่ 5.2 ที่รัศมี $a = 0.3\lambda$ ถ้าดูจากกราฟการลู่เข้าก็จะเห็นว่าที่รัศมี $a = 0.3\lambda$ ใช้โหมดในการลู่เข้าคือ $n = 1$ และ $m = 1$ เท่านั้น แต่เมื่อเปลี่ยนค่าให้รัศมี $a = 0.45\lambda$ ค่าโหมดไม่ได้มีเฉพาะโหมด $n = 1$ และ $m = 1$ เท่านั้น ถ้าดูจากรูปกราฟที่ 5.1 ก็จะได้ว่าที่รัศมี $a = 0.45\lambda$ นั้นจะมีค่าตั้งแต่โหมดต่ำๆจนถึง $n = 2$ และ $m = 2$ ทำให้สรุปได้ว่ารัศมีของท่อนำคลื่นมีผลต่อโหมด n, m ยิ่งรัศมีของท่อนำคลื่นมีค่ามากเท่าใด ค่าโหมด n, m ก็จะมีค่ามากตามไปด้วย

รูปที่ 5.4 ซึ่งแสดงขนาดความแรงสูงสุดของสนามไฟฟ้าในโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับขนาดของสนามที่แรงที่สุด



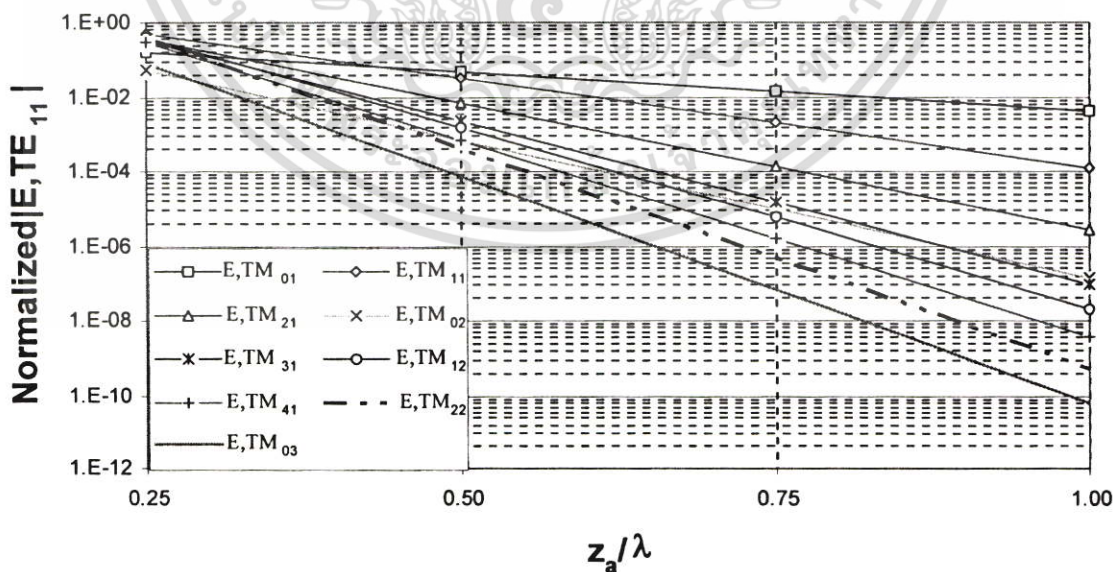
รูปที่ 5.4 ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าในโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับสนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



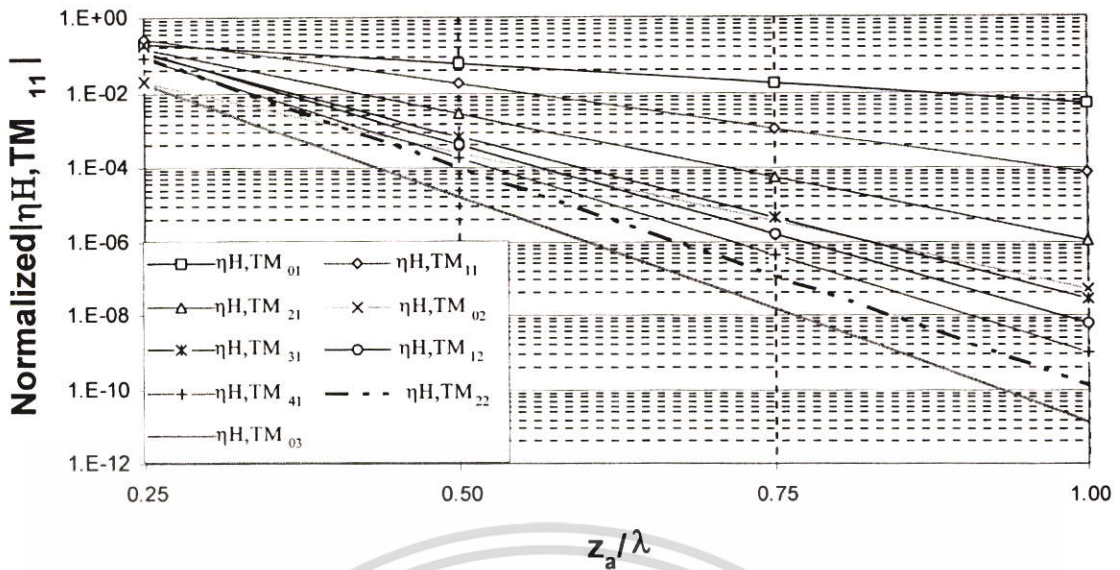
รูปที่ 5.5 ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กในโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางที่ทำกรนอร์แมลไลซ์เทียบกับสนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}

จากรูปที่ 5.4 และรูปที่ 5.5 มีค่าพารามิเตอร์ที่ใช้คั้งนี้คือ ค่ารัศมีของท่อนำคลื่น $a = 0.3019\lambda$ ความสูงของตำแหน่งโพรบ $z_p = 0.25\lambda$ ความยาวโพรบ $l = 0.25\lambda$ โดยเปลี่ยนค่าความสูงของสายอากาศ จะพบว่าสนามไฟฟ้าในโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางจะมีค่ามากที่สุดและจะพบว่าเมื่อสายอากาศมีความสูงน้อยคือ อยู่ใกล้โพรบจะพบว่าสนามไฟฟ้าทุกโหมดจะมีความแรงที่ใกล้เคียงกัน แต่เมื่อมีความสูงของสายอากาศเพิ่มมากขึ้นสนามโหมดอื่นๆจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วเหลือแต่สนามไฟฟ้าในโหมดหลัก เมื่อทำการคำนวณก็จะพบว่าสนามไฟฟ้าที่แรงที่สุดนั้นก็คือ สนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}



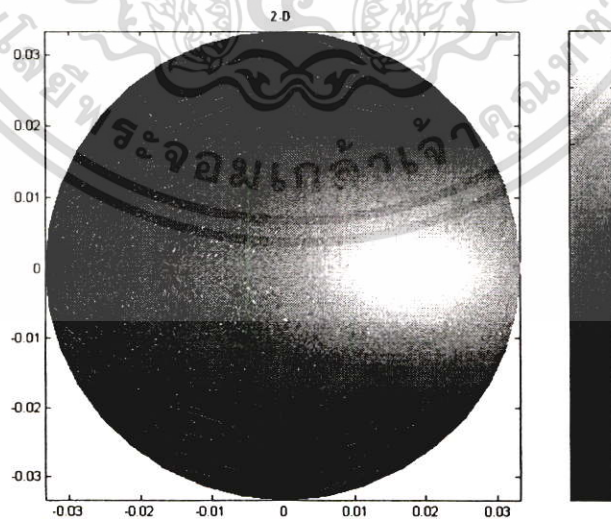
รูปที่ 5.6 ขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางที่ทำกรนอร์แมลไลซ์เทียบกับสนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

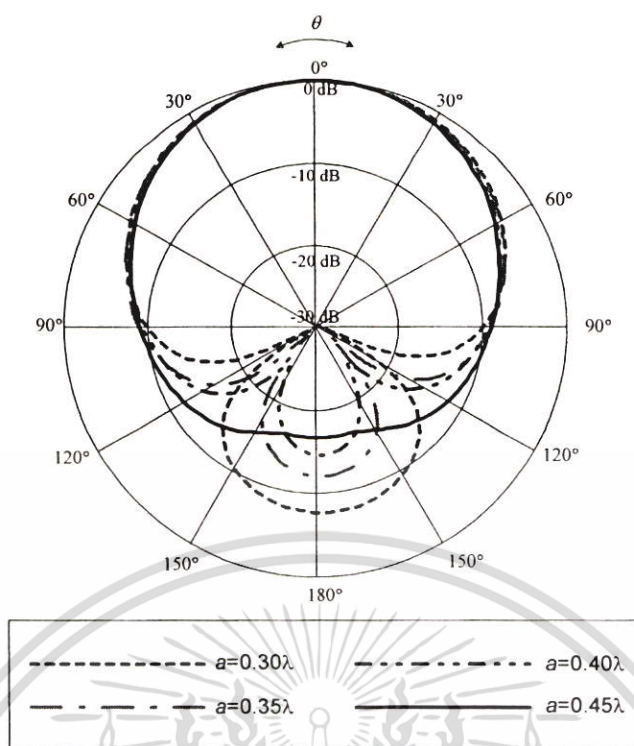


รูปที่ 5.7 ขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็กในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์ เทียบกับสนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11}

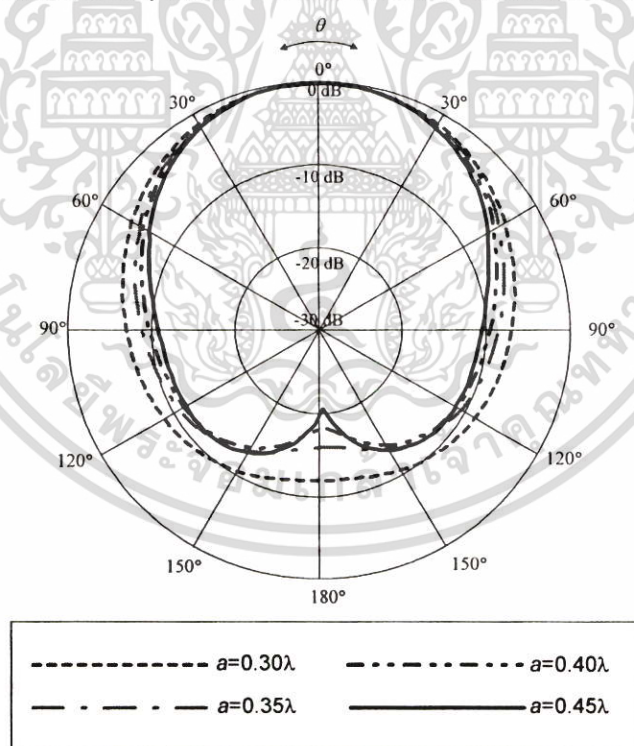
รูปที่ 5.6 และรูปที่ 5.7 เป็นการแสดงขนาดสูงสุดของสนามไฟฟ้าใน โหมดคลื่นแม่เหล็กตาม ขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับสนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11} และขนาดสูงสุดของสนามแม่เหล็ก ในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางที่ทำการนอร์มัลไลซ์เทียบกับสนามไฟฟ้าในโหมด TE_{11} ตามลำดับ โดยลักษณะของทั้ง 2 นี้มีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน คือ สนามในโหมด TM_{01} จะมีค่ามากที่สุด เมื่อมีการเพิ่มระยะความสูงของสายอากาศออกไปเรื่อยๆ สนามในโหมดอื่นจะลดลงอย่าง รวดเร็ว



รูปที่ 5.8 ค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในที่, $z_a = 0.25\lambda$, $a = 0.3019\lambda$, $z_p = 0.25\lambda$, $l = 0.25\lambda$



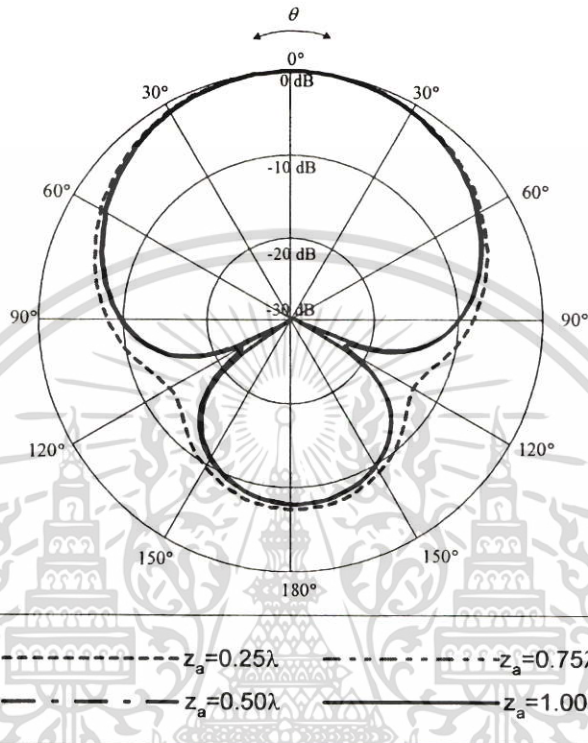
รูปที่ 5.12 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้า
ที่ค่ารัศมีต่าง ๆ กันคือ ที่ 0.30λ , 0.35λ , 0.40λ , 0.45λ ตามลำดับ



รูปที่ 5.13 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็ก
ที่ค่ารัศมีต่าง ๆ กันคือ ที่ 0.30λ , 0.35λ , 0.40λ , 0.45λ ตามลำดับ

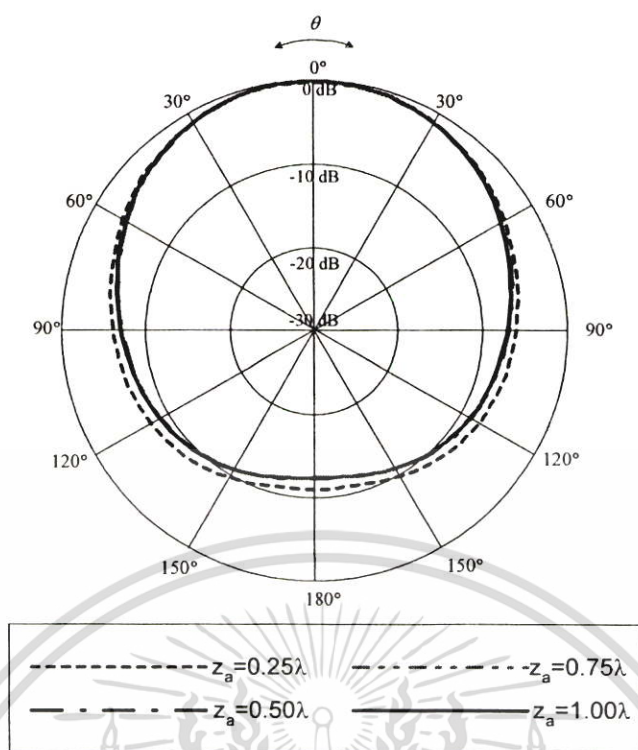
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.16 และรูปที่ 5.17 เป็นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น เมื่อมีการเปลี่ยนระยะความสูงของสายอากาศกรณีสี่ที่คิดสนามแบบรวมโหมด ซึ่งจะเห็นได้ว่านอกจาก $z_a = 0.25\lambda$ แล้วแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นกรณีอื่นที่เปลี่ยนแปลงค่าของความสูงของสายอากาศ z_a จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง จึงสรุปได้ว่าความสูงของสายอากาศมีผลกับการแพร่กระจายคลื่นน้อยมากเมื่อเทียบกับแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเมื่อมีการเปลี่ยนค่ารัศมี

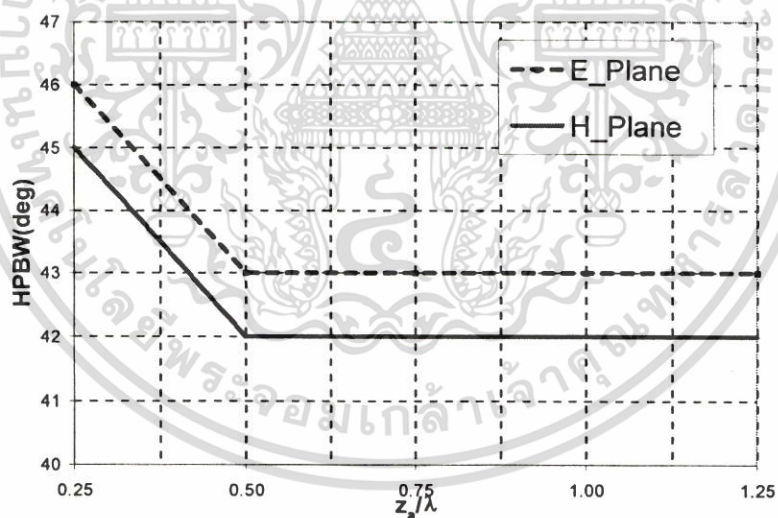


รูปที่ 5.16 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้า

ที่ค่าความสูงของสายอากาศต่างๆ กันคือ ที่ 0.25λ , 0.50λ , 0.75λ , 1.00λ ตามลำดับ

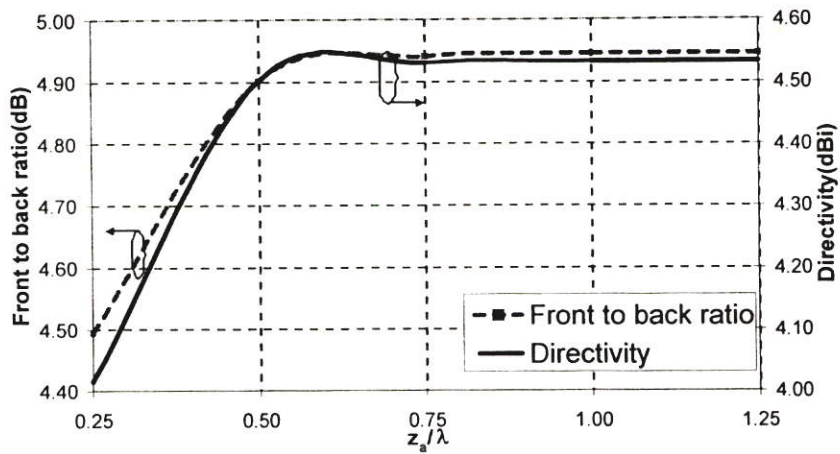


รูปที่ 5.17 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็ก
ที่ค่าความสูงของสายอากาศต่างๆ กันคือ ที่ 0.25λ , 0.50λ , 0.75λ , 1.00λ ตามลำดับ



รูปที่ 5.18 ความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าความกว้างลำคลื่นที่ก้ำกึ่งงานลดลงครึ่งหนึ่งกับค่ารัศมีของสาย
อากาศในระนาบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

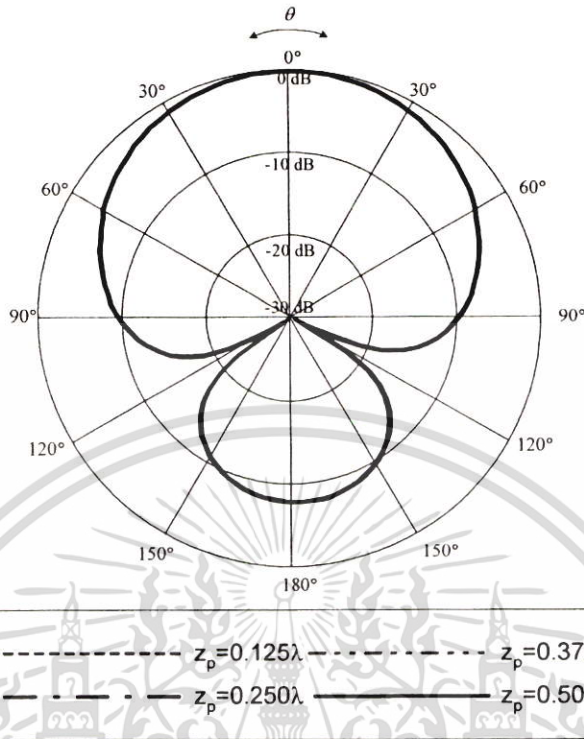
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



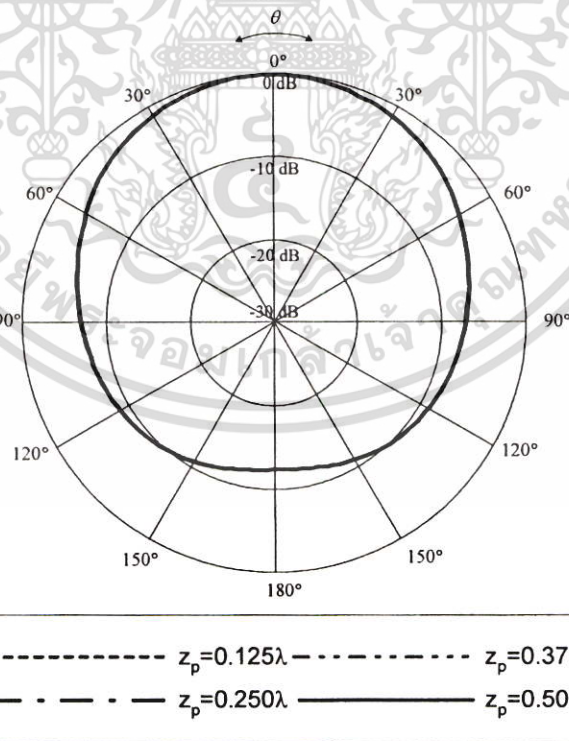
รูปที่ 5.19 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลังและค่าสภาพเจาะจงทิศทางกับความสูงของสายอากาศในแต่ละค่า กรณีที่คิดสนามแบบรวมโหมด

ค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่ใช้มีดังนี้คือ ค่ารัศมีของท่อนำคลื่น $a = 0.3019\lambda$ ความสูงของตำแหน่งโพรบ $z_p = 0.25\lambda$ ความยาวโพรบ $l = 0.25\lambda$ โดยได้มีการเปลี่ยนแปลงค่าความสูงของสายอากาศตั้งแต่ $z_a = 0.25\lambda$ ถึง $z_a = 1.25\lambda$ และค่าของความสูงของสายอากาศจะไม่มีผลต่อคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นเมื่อค่าความสูงของสายอากาศมีค่าตั้งแต่ 0.5λ เป็นต้นไป ทั้งนี้คุณลักษณะทุกตัว เช่นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น ค่าลำคลื่นด้านหน้าต่อลำคลื่นด้านหลัง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง ค่าความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง ค่าทั้งหลายเหล่านี้ได้สอดคล้องกันเป็นอย่างดี จึงสรุปได้ว่าค่าความสูงของสายอากาศควรจะมีค่า 0.5λ ที่ค่าพารามิเตอร์อื่นๆคงที่ได้กล่าวมาแล้ว

จากรูปที่ 5.20 และรูปที่ 5.21 เป็นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าความสูงระหว่างช่องปิดถึงตำแหน่งโพรบ



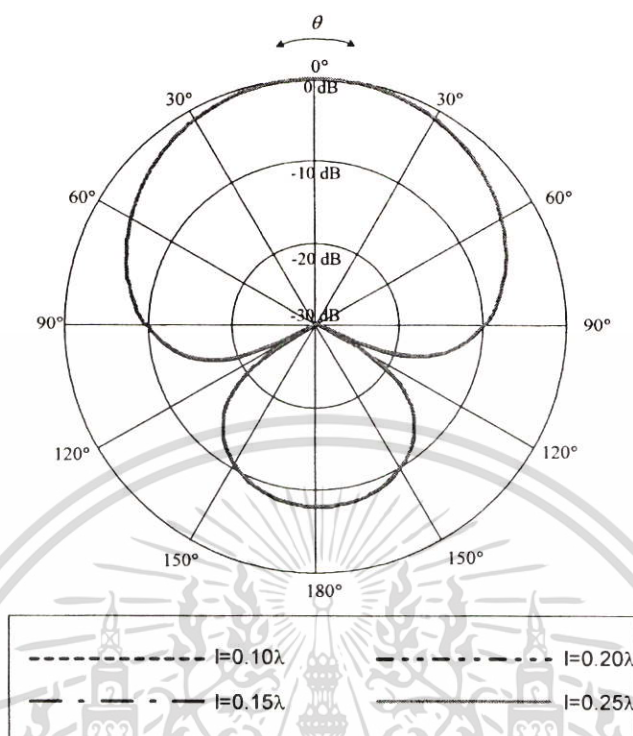
รูปที่ 5.20 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้าที่ค่าความสูงของโพรบต่าง ๆ กันคือ ที่ 0.125λ, 0.125λ, 0.375λ, 0.50λ ตามลำดับ



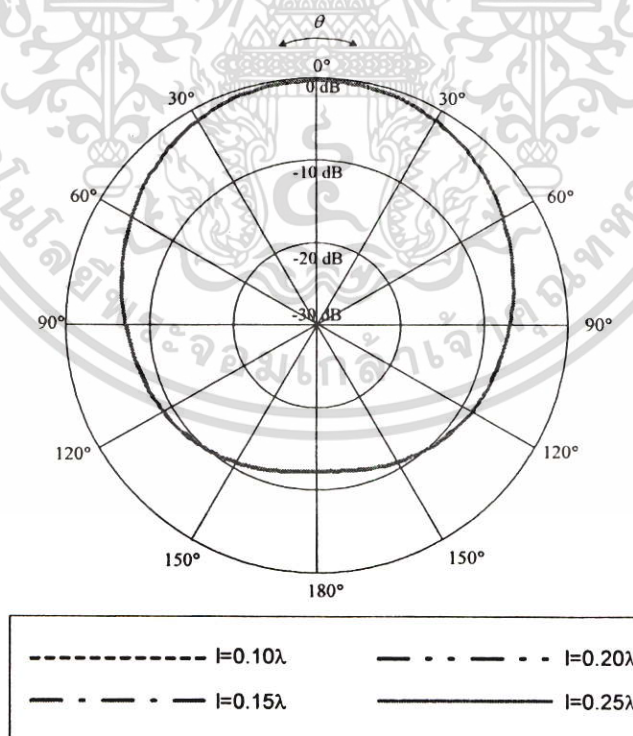
รูปที่ 5.21 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็กที่ค่าความสูงของโพรบต่าง ๆ กันคือ ที่ 0.125λ, 0.125λ, 0.375λ, 0.50λ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.24 และรูปที่ 5.25 เป็นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่เปลี่ยนแปลงค่าความยาวโพรบในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ตามลำดับ



รูปที่ 5.24 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้า ที่ความยาวโพรบตั้งแต่ 0.1λ ถึง 0.25λ ตามลำดับ



รูปที่ 5.25 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็กที่ความยาวโพรบตั้งแต่ 0.1λ ถึง 0.25λ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

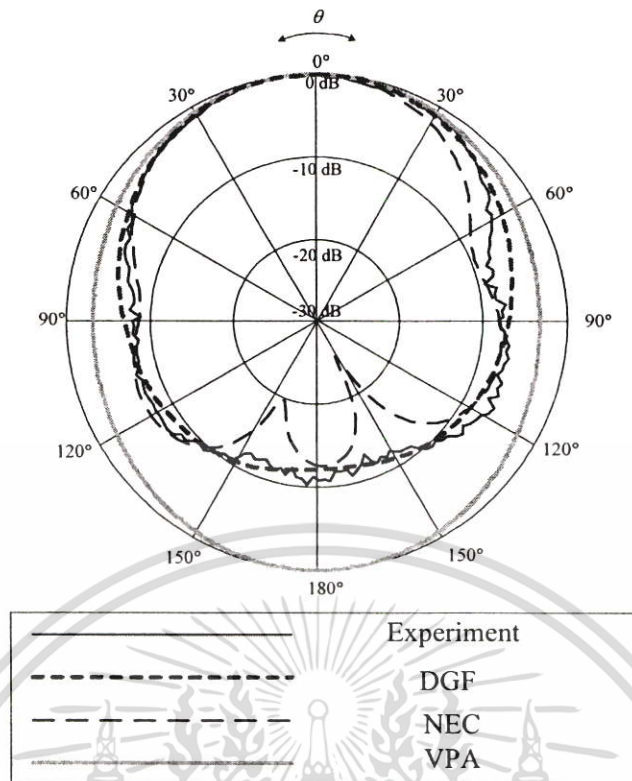
5.4 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่รัศมีของท่อนำคลื่น 0.3019λ ความสูงของสายอากาศ 0.75λ ค่าความสูงของระหว่างช่องปิดถึงตำแหน่งโพรบ 0.25λ ที่ความถี่ 2.45GHz โดยทำการเปรียบเทียบผลของการทดสอบกับผลของจำลองของวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ผลการจำลองโดยวิธีคัตซ์เวกเตอร์ และผลการจำลองของโปรแกรม 4NEC2 ได้แสดงดังรูปที่ 5.28 และรูปที่ 5.29



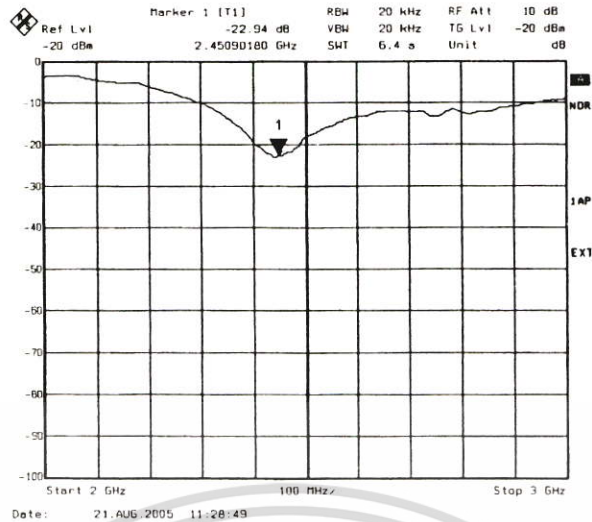
รูปที่ 5.28 เปรียบเทียบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้า (E-Plane)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.29 เปรียบเทียบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็ก (H-Plane)

จากแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้า (E-Plane) และ ระนาบสนามแม่เหล็ก (H-Plane) ที่แสดงดังรูปที่ 5.28 และ รูปที่ 5.29 เป็นผลการทดสอบของสายอากาศและผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ที่พิจารณาด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนโคแอดิก วิธีศักย์เวกเตอร์ และผลการจำลองด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป NEC โดยให้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้ในการทดสอบและในการจำลองดังนี้ รัศมีของท่อนำคลื่น $a = 0.3019\lambda$ ความสูงของสายอากาศ $z_a = 0.75\lambda$ ความสูงของตำแหน่งโพรบ $l = 0.25\lambda$ จะเห็นได้ว่าการทดสอบจะมีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นใกล้เคียงกับการแบบรูปการจำลองด้วยวิธีของฟังก์ชันกรีนโคแอดิก ทั้งนี้เนื่องจากวิธีดังกล่าวได้คิดผลของความไม่ต่อเนื่องที่ตำแหน่งโพรบ จึงทำให้ได้ผลที่ใกล้เคียงกับผลการทดสอบ



รูปที่ 5.30 ค่า Return loss

จากรูปที่ 5.30 ที่แสดงค่า Return Loss เท่ากับ 22.94 dB จึงทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน (Γ) ดังสมการที่ (5.4)

$$\text{Return Loss} = 20 \times \log\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \quad (5.4)$$

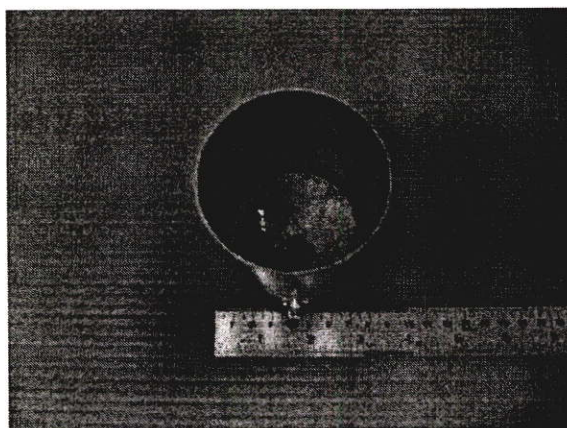
เมื่อ Γ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อน (Reflection Coefficient) มีค่าเท่ากับ $\left[\frac{Z_m - Z_o}{Z_m + Z_o}\right]$ โดยที่ Z_m คือ ค่าอินพุตอิมพีแดนซ์ของสายอากาศ

Z_o คือ ค่าอิมพีแดนซ์คุณลักษณะ (Characteristic Impedance) ของสายส่ง [9]

จากสมการที่ (5.4) ทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน $\Gamma = 0.071$ ซึ่งสามารถหาค่าอินพุตอิมพีแดนซ์ได้ $Z_m = 57.64 \Omega$ และสามารถหาค่าอัตราส่วนคลื่นนิ่งจากสมการที่ (5.5)

$$\text{VSWR} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (5.5)$$

จากสมการที่ (5.5) จะได้อัตราส่วนคลื่นนิ่งคือ 1.153:1 โดยได้นำสายอากาศที่ได้ทำการสร้างจากการออกแบบแสดงดังรูปที่ 5.31 ไปทำการทดสอบโดยสายอากาศที่สร้างขึ้นได้ทำการทดสอบคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นความถี่ 2.45 GHz



รูปที่ 5.31 รูปสายอากาศที่ทำการทดสอบ

โดยวัสดุที่นำมาสร้างสายอากาศเป็นทองเหลืองซึ่งมีค่าความนำ (Conductivity of Brass) เท่ากับ 2.56×10^7 S/m [4] ซึ่งเป็นตัวนำที่มีค่าความนำที่สูงมาก โดยให้ความสูงของสายอากาศ $z_a = 0.75\lambda$ ความสูงของตำแหน่งโพรบ $z_p = 0.25\lambda$ รัศมีของท่อนำคลื่น $a = 0.3019\lambda$ และความยาวโพรบ $l = 0.25\lambda$ โดยใช้ความถี่ปฏิบัติการที่ 2.45GHz

5.4 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงผลของการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์และผลของการทดสอบของสายอากาศที่ทำการออกแบบไว้ โดยได้เริ่มจากการหาค่าสนามการลู่เข้าของโหมด n, m เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ต่างๆเช่น ค่ารัศมีของท่อนำคลื่น ค่าความสูงของท่อนำคลื่น เพื่อให้ได้ค่าที่ลู่เข้าที่เร็วที่สุดและใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุดนั้น และจากผลการหาค่าการลู่เข้าเมื่อมีการเปลี่ยนค่าความสูงของสายอากาศก็คือ $z_a = 0.5\lambda$ เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่ารัศมีของท่อนำคลื่นคือ ทำให้ทราบว่ายิ่งค่ารัศมีของท่อนำคลื่นมีค่ามาก ค่าโหมด n, m ก็ยังมีมากตามไปด้วย

แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่แสดงดังรูปที่ 5.28 และรูปที่ 5.29 เป็นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับ ซึ่งผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าผลของการทดสอบ และผลของการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ด้วยการวิเคราะห์ด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดเอคติก มีผลที่ใกล้เคียงกันมากกว่าวิธีคิดแบบศักย์เวกเตอร์ เพราะการคิดด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดเอคติกนี้ ได้คิดผลกระทบเนื่องจากความไม่ต่อเนื่องบริเวณโพรบด้วย

ได้มาจากการอินทิกรัลของผลคูณระหว่างแหล่งกำเนิดและฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ข้อเสนอแนะถ้าหากมีวิธีที่สามารถหาค่ากระแสให้ได้เท่ากับค่ากระแสที่แท้จริงแล้วเชื่อว่าผลการจำลองน่าจะเท่ากับผลการทดสอบ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] W. W. S. Lee, E. K. N. Yung, "The Input Impedance of a Coaxial Line Fed Probe in a Cylindrical Waveguide," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques., vol.42, no.8, pp.1468-1473, Aug. 1994.
- [2] L.W. Li, P.S. Kooi, M.S.Leong, T.S. Yeo and S.L. Ho, "Impedance of a probe-Excited Semi-infinite Rectangular Waveguide with Arbitrary Multilayered Load: Part I-Dyadic Green's Function," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques., vol.43, no.7, pp.1559-1566, July. 1995
- [3] C.A. Balanis, **Antennas Theory: Analysis and Design**. USA:John Wiley & Sons, 1997.
- [4] C.A. Balanis, **Advanced Engineering Electromagnetics**, USA: John Wiley & Sons, 1998
- [5] R.E. Collin Field Theory of Guided Wave. 2nded., Piscataway, New Jersey, IEEE Press,1991.
- [6] โมไนย ไกรฤกษ์ วิศวกรรมคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า กรุงเทพฯ: พิมพ์สวย.2544
- [7] C.T. Tai Dyadic Green Function in Electromagnetic Theory. 2nd ed. Newyork: IEEE Press 1994
- [8] ฉัตรชัย ไวยาพัฒนากร การวิเคราะห์สายอากาศ กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2547
- [9] โมไนย ไกรฤกษ์ ทฤษฎีสายอากาศ กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ 2535

ภาคผนวก

สนามไฟฟ้าตามขวางในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\bar{A} = 0 \quad (\text{ผ.1})$$

$$\bar{F} = \hat{a}_z F_z(\rho, \phi, z) \quad (\text{ผ.2})$$

$$E_\rho = -\frac{1}{\epsilon\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \quad (\text{ผ.3})$$

$$E_\phi = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \quad (\text{ผ.4})$$

$$E_z = 0 \quad (\text{ผ.5})$$

$$H_\rho = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \rho \partial z} \quad (\text{ผ.6})$$

$$H_\phi = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi \partial z} \quad (\text{ผ.7})$$

$$H_z = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z \quad (\text{ผ.8})$$

สนามแม่เหล็กตามขวางในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\bar{A} = \hat{a}_z(\rho, \phi, z) \quad (\text{ผ.9})$$

$$\bar{F} = 0 \quad (\text{ผ.10})$$

$$E_\rho = -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho \partial z} \quad (\text{ผ.11})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_\phi = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi \partial z} \quad (\text{ผ.12})$$

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z \quad (\text{ผ.13})$$

$$H_\rho = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \quad (\text{ผ.14})$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{ผ.15})$$

$$H_z = 0 \quad (\text{ผ.16})$$

ความสัมพันธ์ฟังก์ชันกรีนไดเอเดติก

$$\nabla \times \vec{G}_e = \vec{G}_m \quad (\text{ผ.17})$$

$$\nabla \times \vec{G}_m = I \delta(\vec{R} - \vec{R}') + k^2 \vec{G}_e \quad (\text{ผ.18})$$

$$\nabla \cdot \vec{G}_e = \frac{1}{k^2} \nabla \delta(\vec{R} - \vec{R}') \quad (\text{ผ.19})$$

$$\nabla \cdot \vec{G}_m = 0 \quad (\text{ผ.20})$$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{ผ.21})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{ผ.22})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{ผ.23})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{ผ.24})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้แต่ง

นายระพีพันธ์ ชัดปิก เกิดวันที่ 16 พฤศจิกายน พ.ศ.2521 สำเร็จการศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร ปีการศึกษา2545

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์

1. Rapin Kudpik Chowong Phongcharoenpanich and Sompol Kosulvit “Investigation of Circular Aperture Antenna Fed by Probe Using Dyadic Green Function Approach” Proceedings of the 2005 ECTI International Conference, Pattaya Thailand , May 2005, pp.856-859



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้