การปรับปรุงวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติกสำหรับการแก้ปัญหาลอตเตอรี่
An Improvement of Lotto-Meta Heuristic for Solving a Lottery Problem

กษิตินาถ แสงเงิน[1*] และ เอื้ออารี บุญเพิ่ม[1]
Kasitinart Sangngern[1] and Aua-aree Boonperm[1]
[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต
[1]Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University
วันที่ส่งบทความ : 23 มกราคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 7 เมษายน 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 14 เมษายน 2563
Received: 23 January 2020, Revised: 7 April 2020, Accepted: 14 April 2020

บทคัดย่อ

ปัญหาลอตเตอรี่ เป็นปัญหาการสุ่มเลือกตัวเลข k หมายเลขจากหมายเลขทั้งหมด n หมายเลข โดยในลอตเตอรี่หนึ่งใบสามารถกรอกหมายเลข k หมายเลข และผลรางวัลจะถูกสุ่มหมายเลข p หมายเลขจากทั้งหมด n หมายเลข ซึ่งเป้าหมายของปัญหานี้คือ จะต้องซื้อลอตเตอรี่จำนวนน้อยที่สุดเพื่อให้ตรงกับผลรางวัลอย่างน้อย t หมายเลข โดยปัญหานี้สามารถหาคำตอบด้วยการสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงจำนวนเต็ม อย่างไรก็ตามการหาคำตอบของปัญหานี้ด้วยวิธีแม่นตรงค่อนข้างใช้เวลานาน ดังนั้นในบทความวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการหาคำตอบของปัญหาลอตเตอรี่โดยปรับปรุงวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก (Lotto-Meta heuristic) ซึ่งเป็นวิธีฮิวริสติกสำหรับการแก้ปัญหาลอตเตอรี่จากผลการทดลองแก้ปัญหาลอตเตอรี่ขนาดเล็กพบว่าจำนวนลอตเตอรี่ที่ต้องซื้อมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนลอตเตอรี่ที่ได้จากวิธีเดิม

คำสำคัญ : กำหนดการเชิงจำนวนเต็ม ปัญหาการปกคลุมเซต ปัญหาลอตเตอรี่ ฮิวริสติก

Abstract

In a lottery problem, k numbers are drawn from a set of n numbers. On a ticket we fill out k numbers and the winning ticket fill out p numbers from a set of n numbers. The objective function is the minimum number of tickets so that there are at least t matching numbers. This problem can be solved by formulating the integer programming model. However, solving this problem by exact method takes more time to solve it. So, in this paper, we propose an improvement of Lotto-Meta heuristic that is a heuristic algorithm for

---

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: s.kasitinart@gmail.com

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

solving a lottery problem. From the computational result of the small instances of the lottery problem, we found that our method gave the number of tickets less than or equal to the number of tickets obtained by the original Lotto-Meta heuristic.

Keywords: Integer programming, Set covering problem, Lottery problem, Heuristic

1. บทนำ

ปัญหาลอตเตอรี่ (Lottery problem) เป็นปัญหาการสุ่มเลือกตัวเลข k หมายเลขจากหมายเลขทั้งหมด n หมายเลข โดยในลอตเตอรี่หนึ่งใบผู้ซื้อสามารถกรอกหมายเลข k หมายเลขนี้ และผลรางวัลที่ออกจะถูกสุ่มเลือกจากเซตของหมายเลขจำนวน n หมายเลขมา p หมายเลข โดยเงื่อนไขในการถูกรางวัล คือ ลอตเตอรี่ใบที่ผู้ซื้อกรอกหมายเลขนั้นต้องมีหมายเลขตรงกับรางวัลอย่างน้อย t หมายเลข ซึ่งในปัญหาลอตเตอรี่นี้ ผู้ซื้อต้องการหาจำนวนลอตเตอรี่ที่น้อยที่สุด โดยที่จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งใบที่มีหมายเลขอย่างน้อย t หมายเลขที่ตรงกับผลรางวัล นั่นคือผู้ซื้อต้องการทราบว่าต้องซื้อลอตเตอรี่จำนวนกี่ใบ และมีหมายเลขอะไรบ้างจึงจะทำให้ผู้ซื้อถูกรางวัลแน่นอน ซึ่งจะเรียกปัญหาลักษณะนี้ว่า ปัญหาลอตเตอรี่ (n,k,p,t) สำหรับ $n \geq p,k$ และ $t \leq p,k$ เช่น ปัญหาลอตเตอรี่ (8,5,4,2) จะได้ว่าผู้ซื้อสามารถกรอกหมายเลข 5 หมายเลขจากเลข 1,2,3,4,5,6,7,8 โดยผลรางวัลจะประกาศ 4 หมายเลข และตัวเลขที่ผู้ซื้อกรอกจะต้องถูกอย่างน้อย 2 ตัว ดังนั้นถ้าผู้ซื้อกรอก 12367 และผลรางวัลคือ 1478 จะถือว่าถูกรางวัลในปัญหาลอตเตอรี่ (8,5,4,2) สำหรับปัญหาลอตเตอรี่สามารถพบได้ในปัญหาจริง โดยตัวอย่างของประเทศและรูปแบบการเล่นของปัญหาลอตเตอรี่แสดงดังตารางที่ 1 [1]

สำหรับวัตถุประสงค์ของปัญหาลอตเตอรี่คือต้องซื้อลอตเตอรี่จำนวนน้อยที่สุดกี่ใบ และหมายเลขอะไรบ้าง จึงจะถูกรางวัลและสามารถระบุหมายเลขของลอตเตอรี่ได้ ซึ่งถ้าผู้ซื้อต้องการทราบหมายเลขที่เจาะจงที่ผู้ซื้อต้องการกรอกลงบนลอตเตอรี่ การสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์จะสามารถทำให้ผู้ซื้อทราบถึงหมายเลขได้

ในปี 1997 Jans [2] ได้สร้างตัวแบบปัญหากำหนดการเชิงเส้นจำนวนเต็ม (Integer Linear Programming) โดยพิจารณาปัญหาในรูปแบบปัญหาการปกคลุมเซต (Set covering problem) ซึ่งปัญหาการปกคลุมเซตนั้นเป็นการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงการจัด [3]-[5] และปัญหาการปกคลุมเซตนี้ได้รับการพิสูจน์ว่าเป็นปัญหาเอ็นพีบริบูรณ์ (NP-complete problem) นั่นคือเป็นปัญหาที่ใช้เวลานานในการหาผลเฉลย ดังนั้นนักวิจัยจึงพยายามสร้างขั้นตอนวิธีเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาการปกคลุมเซตโดยใช้เวลาให้น้อยที่สุด [6]-[7]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 1. ข้อมูลประเทศและรูปแบบการเล่นปัญหาลอตเตอรี่ (2003)

ประเทศ	รูปแบบปัญหา
Lithuania	*(30,5,5,t)*
Chile	*(30,7,7,t)*
Norway	*(34,7,7,t)*
Latvia, Slovak Republic, Slovenia	*(35,5,5,t)*
Hungary, Sweden	*(35,7,7,t)*
Kazakhstan, Yugoslavia	*(36,5,5,t)*
China, Denmark	*(36,7,7,t)*
Jamaica	*(37,6,6,t)*
Iceland	*(38,5,5,t)*
Australia	*(38,6,6,t)*
Croatia	*(39,7,7,t)*
Czech Republic	*(40,5,5,t)*
Ghana, Kazakhstan, New Zealand, Perú	*(40,6,6,t)*
Belgium, Ireland, Malaysia, Philippines, Puerto Rico, Taiwan	*(42,6,6,t)*
Japan	*(43,6,6,t)*
Portugal, Uruguay	*(44,5,5,t)*
Australia	*(44,6,6,t)*
Argentina, Australia, Austria, Croatia, Hungary, Israel, Netherlands, Perú, Philippines, Singapore, Switzerland, Ukraine, Yugoslavia	*(45,6,6,t)*
Hong Kong	*(47,6,6,t)*
British Columbia, Western Canada	*(47,7,7,t)*
Denmark, Finland	*(48,6,6,t)*
Malaysia	*(49,4,4,t)*
British Columbia, France, Georgia, Germany, Greece, Malaysia, Philippines, Poland, Slovak Republic, South Africa, Spain, Turkey, United Kingdom, Western Canada	*(49,6,6,t)*
Georgia	*(50,6,6,t)*
India	*(54,6,6,t)*

ในปี 2002 Li และ van Rees [8]-[10] ได้กล่าวถึงภาพรวมของปัญหาลอตเตอรี่โดยพวกเขาได้แสดงค่าขอบเขตบน และขอบเขตล่างของจำนวนลอตเตอรี่ที่ต้องซื้อ แต่ยังไม่สามารถระบุหมายเลขที่เจาะจงได้ และถัดมาในปี 2008 Jans และ Degrave [11] ได้พิจารณาปัญหาลอตเตอรี่ในรูปของปัญหาการปกคลุมเซต พร้อมทั้งเสนอวิธีการหาคำตอบของปัญหาลอตเตอรี่สำหรับกรณีที่ $p = k$ และใช้โปรแกรม CPLEX ในการหาผลเฉลย ต่อมาในปี 2012 Mohammadi และ Abadi [12] ได้เสนอวิธีที่ชื่อว่า ลอตโตเมตาฮิวริสติก (Lotto-Meta heuristic) ซึ่งสามารถแก้ปัญหาลอตเตอรี่ได้ทุกรูปแบบ แต่ยังไม่มีการพิสูจน์ว่าจะได้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด โดยข้อดีของวิธีนี้คือใช้เวลาในการคำนวณน้อยมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก จะแบ่งการทำงานออกเป็นสองขั้นตอน คือขั้นตอนการสร้างผลเฉลยเริ่มต้น และขั้นตอนการปรับปรุงผลเฉลย ซึ่งในขั้นตอนการสร้างผลเฉลยของวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก จะใช้วิธีการสุ่มผลเฉลยเริ่มต้น ซึ่งการสุ่มผลเฉลยนั้นอาจทำให้ผลเฉลยเริ่มต้นที่ได้ไม่ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ดีที่สุด ดังนั้นในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยได้ทำการปรับปรุงขั้นตอนการสร้างผลเฉลยนี้ โดยในหัวข้อถัดไปจะเป็นการอธิบายเกี่ยวกับรูปแบบของปัญหาลอตเตอรี่ วิธีลอตโตเมตาฮิวริสติกและการปรับปรุงวิธีลอตโตเมตาฮิว-ริสติก

2. ความรู้เบื้องต้น

2.1 ปัญหาลอตเตอรี่

สำหรับปัญหาลอตเตอรี่ (n,k,p,t) การซื้อลอตเตอรี่หนึ่งใบผู้ซื้อต้องเลือกหมายเลขมาใส่ k หมายเลขจากทั้งหมด n หมายเลข ในขณะที่ผลรางวัลจะถูกเลือกหมายเลขมาใส่ p หมายเลขจากทั้งหมด n หมายเลข และเงื่อนไขการถูกรางวัลคือลอตเตอรี่ใบนั้นจะต้องมีหมายเลขตรงกับรางวัลอย่างน้อย t หมายเลข สำหรับการสร้างกำหนดการเชิงจำนวนเต็ม เพื่อหาจำนวนลอตเตอรี่ที่น้อยที่สุดและสามารถระบุหมายเลขได้ สามารถสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงจำนวนเต็มได้โดย กำหนดให้ S แทนเซตของลอตเตอรี่ทั้งหมดที่สามารถซื้อได้

D แทนเซตของผลรางวัลที่เป็นไปได้ทั้งหมด

S_i แทนเซตของลอตเตอรี่ทั้งหมด ซึ่งมีอย่างน้อย t หมายเลขที่สัมพันธ์กับผลรางวัล

D_j แทนเซตของผลรางวัลทั้งหมด ซึ่งมีอย่างน้อย t หมายเลขที่สัมพันธ์กับลอตเตอรี่

a_{ij} แทนพารามิเตอร์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{เมื่อ } j \in S_i \\ 0, & \text{เมื่อ } j \notin S_i \end{cases}$$

และกำหนดตัวแปรตัดสินใจ x_j เป็นตัวแปรทวิภาคแทนลอตเตอรี่ที่เป็นไปได้แต่ละใบสำหรับ $j \in S$ โดยที่

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ถ้าลอตเตอรี่ } j \text{ ถูกเลือก} \\ 0, & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

สำหรับปัญหากำหนดการเชิงจำนวนเต็มในรูปแบบปัญหาการปกคลุมเซตของปัญหาลอตเตอรี่เขียนได้ดังนี้

$$\min \sum_{j \in S} x_j \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \ \sum_{j \in S} a_{ij} x_j \ge 1 \qquad \forall i \in D \qquad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in S \qquad (3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (1) คือ จำนวนลอตเตอรี่ที่น้อยที่สุดที่ผู้ซื้อเลือกใส่หมายเลข โดยเงื่อนไขบังคับในอสมการที่ (2) จะพิจารณาจากเซตของลอตเตอรี่ที่สอดคล้องกับผลรางวัล สำหรับแต่ละผลรางวัลที่เป็นไปได้ นั่นคือจะต้องมีลอตเตอรี่อย่างน้อยหนึ่งใบที่เลือกใส่หมายเลข ซึ่งมีอย่างน้อย t ตัวที่สัมพันธ์กับผลรางวัลนี้ และตัวแปรสำหรับลอตเตอรี่เป็นไปได้สองค่าคือศูนย์หรือหนึ่ง (3) นั่นคือลอตเตอรี่ใบนั้น ๆ ถูกเลือกหรือไม่ถูกเลือก

สำหรับจำนวนของลอตเตอรี่ทั้งหมด สามารถคำนวณได้จากจำนวนของการจัดหมู่ k ตัวจากหมายเลข n ตัว นั่นคือ $|S| = \binom{n}{k}$ และจำนวนของผลรางวัลที่เป็นไปได้ทั้งหมด เท่ากับจำนวนของการจัดหมู่ p ตัวจาก n ตัว นั่นคือ $|D| = \binom{n}{p}$

สมมติให้ผลรางวัลถูกเลือก p หมายเลข ต้องการทราบว่ามีลอตเตอรี่กี่ใบที่มีอย่างน้อย t หมายเลขที่สัมพันธ์กับผลรางวัลนี้ ซึ่งจะทำให้ทราบจำนวนสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ในแต่ละเงื่อนไข โดยเริ่มต้นจะพิจารณาว่ามีลอตเตอรี่กี่ใบที่หมายเลข t หมายเลขที่มีความถูกต้องร่วมกัน ซึ่งพิจารณาจากจำนวนของการจัดหมู่ของหมายเลข t หมายเลขจาก p หมายเลข คูณด้วยจำนวนของการจัดหมู่ของหมายเลขที่เหลืออยู่ $k-t$ หมายเลขบนลอตเตอรี่ ที่เลือกจาก $n-p$ หมายเลข ที่ไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของผลรางวัลที่ออกมา เขียนได้ดังนี้ $\binom{p}{t}\binom{n-p}{k-t}$ จำนวนลอตเตอรี่ที่หมายเลข $t+1$ ตัวที่มีความถูกต้องร่วมกันมีค่าเท่ากับ

$$\binom{p}{t+1}\binom{n-p}{k-t-1}$$

ด้วยเหตุผลเดียวกันทำให้พบว่า จำนวนตัวแปรต่อเงื่อนไขมีค่าเท่ากับ

$$|S_i| = \sum_{m=t}^{\min\{k,p\}} \binom{p}{m}\binom{n-p}{k-m} \qquad \forall i \in D$$

และในทำนองเดียวกัน จำนวนเลข 1 ในเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในแต่ละหลักมีค่าเท่ากับ

$$|D_j| = \sum_{m=t}^{\min\{k,p\}} \binom{k}{m}\binom{n-k}{p-m} \qquad \forall j \in S$$

ซึ่งการแก้ปัญหาลอตเตอรี่ที่ถูกเขียนอยู่ในรูปของปัญหาการปกคลุมเซตนี้สามารถหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดด้วยวิธีแตกกิ่งและกำหนดขอบเขต (Branch and Bound method) แต่วิธีนี้นั้นใช้เวลาในการคำนวณและมีรอบการทำงานที่นาน ดังนั้นจึงมีนักวิจัยหลายคนได้เสนอวิธีการทางฮิวริสติกเพื่อให้ได้ผลเฉลยออกมาและใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า แต่อย่างไรก็ตามผลเฉลยที่ได้นั้นยังคงเป็นเพียงแค่ผลเฉลยที่ดี ไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และหนึ่งในวิธีนั้นคือ วิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก (Lotto-Meta Heuristic)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 วิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก

วิธีลอตโตเมตาฮิวริสติกเป็นวิธีฮิวริสติก ซึ่งทำงานสองขั้นตอนคือขั้นตอนการสร้างผลเฉลยเริ่มต้นและขั้นตอนการปรับปรุงผลเฉลย ซึ่งในการทำงานของวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติกจะประกอบไปด้วย การค้นหาย่านใกล้เคียง (neighborhood search) การสุ่ม (randomness) และลำดับความสำคัญของการเลือกหมายเลขลอตเตอรี่แต่ละใบ ซึ่งใช้ขั้นตอนวิธีแบบละโมบ (Greedy heuristic) การเลือกหมายเลขลอตเตอรี่แต่ละใบจะต้องพิจารณาความสามารถในการครอบคลุมแถวของเงื่อนไข โดยสัญลักษณ์ของเซตและตัวแปรต่าง ๆ ในขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก ถูกกำหนดดังนี้

$$I = \{ i \mid i \in D, \text{แถว } i \text{ ไม่ถูกครอบคลุม} \}$$

$$X = \left\{ j \,\middle|\, j \in S, x_j = 1 \right\}$$

$$d_j = \operatorname{card}\left(I \cap D_j \right)$$

$$J = S - X$$

$$v_i = \operatorname{card}\left(X \cap S_i \right)$$

เมื่อ $\operatorname{card}(A)$ คือจำนวนสมาชิกของเซต A และ X คือเซตของผลเฉลย สำหรับขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติกสามารถสรุปขั้นตอนการทำงานได้ดังนี้

ตารางที่ 2. ขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก

Constructive phase
Construct(D,S): 1. *Let the solution set be empty:* $X = \varnothing$ 2. *For each* $j \in S$ *:* $d_j = \lvert D_j \rvert$ 3. *Let* $I = D, J = S$ *and* $w = \mathrm{RND}(S)$ 4. *Add element* w *to the solution;* $X = X \bigcup \{w\}$ 5. $I = I - D_w, J = J - \{w\}$ 6. *For each* $i \in D_w$*: For each* $j \in S_i : d_j = d_j - 1$ 7. ***while*** $(I \neq \varnothing)$ 8. $f = \max\left\{ d_j \,\middle|\, j \in J \right\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

9. $w = \mathrm{RND}\left(\left\{ j \middle| d_j = f, j \in J \right\}\right)$
10. *Add element* w *to the solution;* $X = X \bigcup \{w\}$
11. *For each* $i \in D_w$*: For each* $j \in S_i : d_j = d_j - 1$
12. *End **while***
13. *Remove redundant columns from* X
14. *Return* X

Improvement phase

Improvement(D,S,X,Remove-col):

15. $z =$ *objective function value of* X
16. $X' =$*Randomly remove Remove-col columns from* X
17. *Formulate a reduced-size SCP:* $D^* = D - \bigcup_{j \in X'} D_j$
18. $S^* = \bigcup_{i \in D^*} S_i$
19. $X^* =$ *construct* $\left(D^*, S^*\right)$
20. *Construct the neighboring solution:* $X' \bigcup X^*$
21. *Remove redundant column from* $X' \bigcup X^*$
22. ***If*** *(objective function value of* $X' \bigcup X^*$*)* $<$ ***z then***
23. $X = X' \bigcup X^*$
24. $z =$ *objective function value of* X
25. *End **if***
26. *Return* X

จากขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก พบว่าในบรรทัดที่ 3 และ 9 ในขั้นตอนการสร้างผลเฉลยเริ่มต้นจะเป็นการสุ่มผลเฉลยเช่นเดียวกับในบรรทัดที่ 16 ในขั้นตอนการปรับปรุงทำให้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีลอตโต-เมตาฮิวริสติก มีโอกาสเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดไม่มาก ดังนั้นในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยได้ทำการปรับหลักเกณฑ์การสุ่มของขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

3. การปรับปรุงขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก

จากเงื่อนไขที่ 3 และ 9 ของขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก จะเห็นว่าการสุ่มข้างต้นจะเป็นการสุ่มหมายเลขลอตเตอรี่มาหนึ่งใบโดยที่ไม่มีหลักเกณฑ์ที่ดีพอที่จะได้คำตอบที่น้อยที่สุด ดังนั้นผู้วิจัยจึงเปลี่ยนจากการสุ่มหมายเลขของลอตเตอรี่หนึ่งใบมาเป็นเลือกลอตเตอรี่มาสองใบ โดยที่ทั้งสองใบนั้นทำให้เกิดการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ครอบคลุมเงื่อนไขที่ทับซ้อนกันน้อยที่สุด ซึ่งการเลือกลอตเตอรี่ที่ทับซ้อนกันน้อยที่สุดจะทำให้ผลเฉลยที่ได้ครอบคลุมผลรางวัลได้มากที่สุด ซึ่งการเลือกในบรรทัดที่ 3 และบรรทัดที่ 9 สามารถเปลี่ยนเป็นดังนี้

ตารางที่ 3. การปรับปรุงขั้นตอนวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก

3.	$\left\{w_1, w_2\right\} = \arg\min\left\{\mathrm{card}\left(D_a \cap D_b\right) \middle\| a \neq b\right\}$

9.	$f = \max\left\{d_j \middle\| j \in J\right\}$
	 If $\mathrm{card}\left(I\right) = f$ *then*
	 $w = \mathrm{RND}\left(\left\{j \middle\| d_j = f, j \in J\right\}\right)$
	 $X = X \cup \left\{w\right\}$
	 Else
	 $\left\{w_1, w_2\right\} = \arg\min\left\{\mathrm{card}\left(D_a \cap D_b\right) \middle\| a \neq b, d_a, d_b > f/2\right\}$
	 $X = X \cup \left\{w_1, w_2\right\}$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการทำงานของขั้นตอนวิธีโดยจะแก้ปัญหาลอตเตอรี่ (6,4,3,3) นั่นคือผู้ซื้อต้องกรอกหมายเลข 4 หมายเลขจาก 6 หมายเลขและผลรางวัลประกาศเป็น 3 หมายเลข และลอตเตอรี่ที่ผู้ซื้อกรอกจะต้องตรงกับผลรางวัลอย่างน้อย 3 หมายเลข ซึ่งสามารถเขียนเป็นปัญหากำหนดการเชิงจำนวนเต็มได้ดังนี้

กำหนดตัวแปร x_j เป็นตัวแปรทวิภาคแทนลอตเตอรี่แต่ละใบที่สามารถซื้อได้ โดยที่

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ถ้าลอตเตอรี่ } j \text{ ถูกเลือก} \\ 0, & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

เมื่อลอตเตอรี่ j แทนหมายเลขต่อไปนี้

ตารางที่ 4. หมายเลขลอตเตอรี่ของปัญหาลอตเตอรี่ (6,4,3,3)

j	หมายเลข	j	หมายเลข
1	1234	9	1356
2	1235	10	1456
3	1236	11	2345
4	1245	12	2346
5	1246	13	2356
6	1256	14	2456
7	1345	15	3456
8	1346		

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

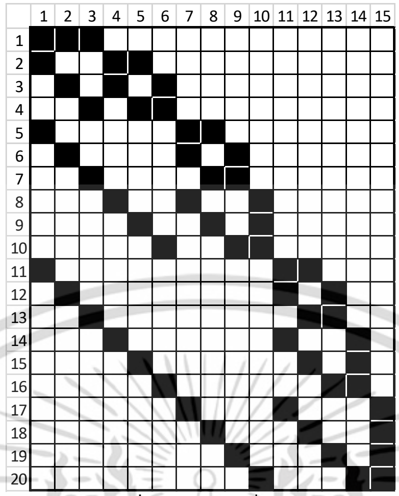
และตัวแบบกำหนดการเชิงจำนวนเต็มสามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\min \quad \sum_{j=1}^{15} x_j$$

s.t.	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 123
	$x_1 + x_4 + x_5 \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 124
	$x_2 + x_4 + x_6 \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 125
	$x_3 + x_5 + x_6 \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 126
	$x_1 + x_7 + x_8 \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 134
	$x_2 + x_7 + x_9 \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 135
	$x_3 + x_8 + x_9 \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 136
	$x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 145
	$x_5 + x_8 + x_{10} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 146
	$x_6 + x_9 + x_{10} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 156
	$x_1 + x_{11} + x_{12} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 234
	$x_2 + x_{11} + x_{13} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 235
	$x_3 + x_{12} + x_{13} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 236
	$x_4 + x_{11} + x_{14} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 245
	$x_5 + x_{12} + x_{14} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 246
	$x_6 + x_{13} + x_{14} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 256
	$x_7 + x_{11} + x_{15} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 345
	$x_8 + x_{12} + x_{15} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 346
	$x_9 + x_{13} + x_{15} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 356
	$x_{10} + x_{14} + x_{15} \geq 1$	กรณีผลรางวัลเป็น 456
	$x_j \in \{0,1\} \qquad , j = 1,2,\ldots,15$	

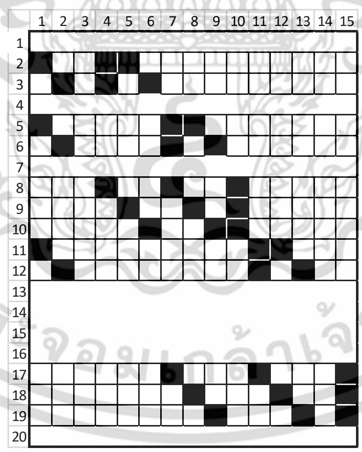
สำหรับขั้นตอนการทำงานของวิธีที่นำเสนอนี้จะใช้รูปต่อไปแสดงขั้นตอนการทำงาน โดยเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของปัญหาจะแสดงดังรูปที่ 1 เมื่อช่องสีดำแทนเลขหนึ่งและช่องสีขาวแทนเลขศูนย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 1. เมทริกซ์เริ่มต้น

จากเมทริกซ์ของปัญหาเริ่มต้น ดำเนินการสุ่มผลเฉลยสองตัวแรกซึ่งได้เป็น $\{3,14\}$ จะได้ $X=\{3,14\}$ ดังนั้นแถวที่มี x_3 และ x_{14} ถูกครอบคลุมแล้วซึ่งจะไม่พิจารณาแถวเหล่านั้นอีก นั่นคือ ลบแถวที่มีสัมประสิทธิ์ของ x_3 และ x_{14} เป็นหนึ่งทิ้งไปซึ่งแถวที่มีสัมประสิทธิ์ x_3 และ x_{14} เป็นหนึ่ง ได้แก่ แถวที่ 1 4 13 14 15 16 และ 20 และได้เมทริกซ์ใหม่ดังรูปที่ 2

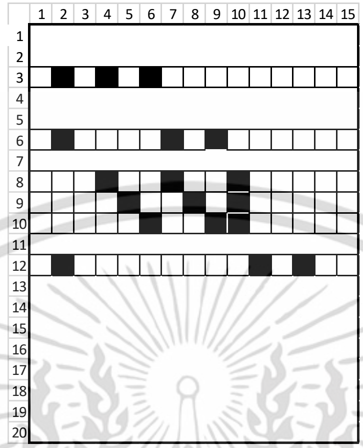


รูปที่ 2. หลังดำเนินการลบแถวที่มี x_3 และ x_{14}

เมื่อพิจารณาค่าของ $\{w_1,w_2\}$ ตามสมการในบรรทัดที่ 9 ซึ่งได้ว่า $\{w_1,w_2\}=\{1,15\}$ และเพิ่มในเซตคำตอบ นั่นคือ $X=\{3,14,1,15\}$ ดังนั้นแถวที่มีสัมประสิทธิ์ของ x_1 และ x_{15} ถูกครอบคลุมแล้วและจะไม่พิจารณาแถวเหล่านั้นอีก นั่นคือลบแถวที่มีสัมประสิทธิ์ของ x_1 และ x_{15} เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หนึ่งทิ้งไป ซึ่งแถวที่มีสัมประสิทธิ์ของ x_1 และ x_{15} เป็นหนึ่งได้แก่ แถวที่ 2 5 11 17 18 และ 19 และได้เมทริกซ์ใหม่ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3. หลังดำเนินการลบแถวที่มี x_1 และ x_{15}

และเมื่อพิจารณาค่าของ $\{w_1, w_2\}$ ตามสมการในบรรทัดที่ 9 ซึ่งได้ว่า $\{w_1, w_2\} = \{2,10\}$ จะได้ $X = \{3,14,1,15,2,10\}$ ดังนั้นแถวที่มีสัมประสิทธิ์ของ x_2 และ x_{10} ซึ่งได้แก่ แถวที่ 3 6 8 9 10 และ 12 และพบว่าทุกแถวถูกครอบคลุมแล้วและจะไม่พิจารณาแถวเหล่านั้นอีก ดังนั้นเซตของผลเฉลยเริ่มต้นคือ $\{x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{14}, x_{15}\}$

เมื่อได้ผลเฉลยเริ่มต้นแล้วนำผลเฉลยนี้เข้าสู่ขั้นตอนการปรับปรุงผลเฉลยซึ่งจะได้ว่าผลเฉลยนี้นั้นได้ค่าที่ดีที่สุดแล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $\{x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{14}, x_{15}\}$ เป็นผลเฉลยที่ดีและค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ 6 นั่นคือต้องซื้อลอตเตอรี่หมายเลข 1234 1235 1236 1456 2456 และ 3456 ซึ่งจะทำให้ถูกรางวัลแน่นอนไม่ว่าผลรางวัลจะออกเป็นเลขใด และเมื่อนำปัญหานี้ไปแก้ด้วยวิธีแตกกิ่งและกำหนดขอบเขต (Branch and Bound method) จะได้ว่าค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์คือ 6 เช่นกัน ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า $\{x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{14}, x_{15}\}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด นั่นคือวิธีการที่นำเสนอนี้ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดสำหรับปัญหาลอตเตอรี่ (6,4,3,3)

4. ผลลัพธ์การคำนวณ

เพื่อทดสอบประสิทธิภาพการทำงานของขั้นตอนวิธีที่นำเสนอ ในงานวิจัยชิ้นนี้ ผู้วิจัยจะทดสอบขั้นตอนวิธีกับปัญหาลอตเตอรี่สองรูปแบบด้วยกันคือ กรณีที่ $p \neq k$ และกรณีที่ $p = k$ ซึ่งผลลัพธ์การคำนวณเป็นไปดังตารางที่ 5 และ 6 ตามลำดับ โดยที่สดมภ์ J&D คือผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีของ Jans and Degrave ในขณะที่สดมภ์ Lotto-M.h. คือผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก และสดมภ์ Imp-Lotto คือผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีจากงานวิจัยชิ้นนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 5 จะเห็นได้ว่า สำหรับปัญหาลอตเตอรี่ขนาดเล็กในกรณีที่ $p \neq k$ วิธีที่ปรับปรุงแล้วให้ค่าผลเฉลยที่น้อยกว่าหรือเท่ากับวิธีเดิม และจากตารางที่ 6 จะเห็นได้ว่า สำหรับปัญหาลอตเตอรี่ขนาดเล็กในกรณีที่ $p = k$ ทุกวิธีการจะให้ผลเฉลยที่เท่ากัน

ในปัญหาลอตเตอรี่ขนาดเล็กที่เมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์สมมาตร (กรณีที่ $p = k$) จะได้ว่าทั้งวิธีที่ปรับปรุงแล้วและวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติกให้ค่าผลเฉลยที่เท่ากันซึ่งเมื่อไปเทียบกับการคำนวณโดยวิธีการแตกกิ่งและกำหนดขอบเขตจะได้ว่าผลเฉลยเหล่านั้นจะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แต่ในกรณี $p \neq k$ พบว่าผลเฉลยที่ได้จากวิธีที่ปรับปรุงแล้วจะให้ค่าที่ดีกว่าหรือเท่ากับวิธีเดิม

ตารางที่ *5*. ผลลัพธ์การคำนวณในกรณีที่ $p \neq k$

Lottery	$\lvert S \rvert$	$\lvert D \rvert$	$\lvert S_i \rvert$	$\lvert D_j \rvert$	*Lotto-M.h.*	*Imp-Lotto*
(6,4,3,3)	*15*	*20*	*3*	*4*	*7*	*6*
(6,3,4,3)	*20*	*15*	*4*	*3*	*7*	*6*
(6,5,4,4)	*6*	*15*	*2*	*5*	*5*	*5*
(7,5,4,3)	*21*	*35*	*15*	*25*	*3*	*3*
(7,4,5,3)	*35*	*21*	*25*	*15*	*2*	*2*

5. สรุปผลและอภิปรายผลการวิจัย

การแก้ปัญหาลอตเตอรี่โดยวิธีแม่นตรง เช่น วิธีการแตกกิ่งและกำหนดขอบเขต จะให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แต่จะใช้เวลาในการคำนวณที่มาก ดังนั้นวิธีฮิวริสติกจึงถูกนำเสนอเพื่อแก้ปัญหาลอตเตอรี่ โดยงานวิจัยนี้จะพิจารณาวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติก ซึ่งเป็นวิธีที่ทำงานได้เร็วกว่าวิธีแม่นตรง แต่ผลเฉลยที่ได้ยังคงเป็นแค่ผลเฉลยที่ดี ไม่ใช่ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้ทำการปรับปรุงวิธีลอตโตเมตาฮิวริสติกโดยปรับปรุงขั้นตอนการสุ่มผลเฉลยจากการสุ่มโดยไม่มีหลักเกณฑ์เปลี่ยนเป็นการพิจารณาจากผลเฉลย 2 ชุดที่ครอบคลุมเงื่อนไขได้มากที่สุด ซึ่งพบว่าผลเฉลยที่ได้ในปัญหาขนาดเล็กมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับวิธีเดิม อย่างไรก็ตามวิธีที่นำเสนอนี้ยังคงไม่สามารถรับประกันได้ว่าวิธีที่ปรับปรุงแล้วจะให้ผลเฉลยที่เหมาะสุดสำหรับทุกปัญหา

ตารางที่ *6*. ผลลัพธ์การคำนวณในกรณีที่ $p = k$

Lottery	$\lvert S \rvert$	$\lvert S_i \rvert$	*LP*	*J&D*	*Lotto-M.h.*	*Imp-Lotto*
(5,3,3,2)	*10*	*7*	*1.43*	*2*	*2*	*2*
(6,3,3,2)	*20*	*10*	*2.00*	*2*	*2*	*2*
(7,3,3,2)	*35*	*13*	*2.69*	*4*	*4*	*4*
(8,3,3,2)	*56*	*16*	*3.5*	*5*	*5*	*5*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง (References)

[1] Burger, A., Gründlingh, W.R. and Vuuren, Jan. 2003. The lottery problem. Available at: https://www.researchgate.net/publication/228998461_The_lottery_problem. Retrieved December 2, 2019.

[2] Jans, R. 1997. Analysis of a symmetrical set covering problem: The lottery problem. Master's Thesis, Department of Applied Economics, K.U. Leuven, Belgium.

[3] Li, P.C. and ven Rees, G.H.J. 2000. New constructions of lotto designs. *Utilitas Mathematica*, 58, 45-64.

[4] Beasley, J.E. and Chu, P.C. 1996. A genetic algorithm for the set covering problem. *European Journal of Operation Research*, 94, 392-404.

[5] Lan, G., Depuy, G.W. and Whitehouse, G.E. 2007. An effective and simple heuristic for the set covering problem. *European Journal of Operation Research*, 176, 1387-1403.

[6] Aickelin, U. 2002. An indirect genetic algorithm for set covering problems. *Journal of the Operation Research Society*, 53, 1118-1126.

[7] Bautisa, J. and Pereira, J. 2007. A GRASP algorithm to solve the unicost set covering problem, *Computer & Operations Research*, 34, 3162-3173.

[8] Li, P.C. and van Rees, G.H.J. 2002. Lotto design tables. *Journal of Combinatorial Designs*, 10, 335-359.

[9] Li, P.C. 1999. Some results on lotto design. Ph.D. Thesis, University of Manitoba.

[10] Li, P.C. and van Rees, G.H.J. 1999. Lower bounds on lotto designs. *Congressus Numerantium*, 141, 5-30.

[11] Jans, R. and Degrave, Z. 2008. A note on a symmetrical set covering problem: the lottery problem. *European Journal of Operational Research*, 186, 104-110.

[12] Mohammadi, A. 2012. Heuristic algorithm for solving the integer programming of the lottery problem. *Scientia Iranica*. 19. 895-901.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้