ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

BLOCK KRONECKER PRODUCT OF MATRICES OVER A COMMUTATIVE SEMIRING

กศิธิภา กวนศิริ
สหเทพ เตือนวีระเดช
สิรีธร วินทะไชย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

BLOCK KRONECKER PRODUCT OF MATRICES OVER A COMMUTATIVE SEMIRING

กศิธิภา กวนศิริ

สหเทพ เตือนวีระเดช

สิรีธร วินทะไชย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2559

BLOCK KRONECKER PRODUCT OF MATRICES OVER A COMMUTATIVE SEMIRING

KASITHIPA KUANSIRI

SAHATHEP TUANWERADECH

SIREETON WINTACHAI

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ Block Kronecker Product Of Matrices Over A Commutative Semiring
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกศิธิภา กวนศิริ รหัสนักศึกษา 56050057 นายสหเทพ เตือนวีระเดช รหัสนักศึกษา 56050147 นางสาวสิรีธร วินทะไชย รหัสนักศึกษา 56050152
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ประธานกรรมการ	ศุกระวรรณ มะ
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการ	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

Block Kronecker Product of Matrices over a Commutative Semiring

ชื่อนักศึกษา นางสาวกศิธิภา กวนศิริ รหัสนักศึกษา 56050057

นายสหเทพ เตือนวีระเดช รหัสนักศึกษา 56050147

นางสาวสิรีธร วินทะไชย รหัสนักศึกษา 56050152

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2559

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนิยามและพิจารณาศึกษาสมบัติต่างๆของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ได้แก่ สมบัติเชิงพีชคณิต สมบัติการคูณแบบผสม และสมบัติเชิงโครงสร้าง นอกจากนี้เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณดังกล่าวกับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อกและนำไปประยุกต์กับสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

คำสำคัญ : ผลคูณโครเนคเคอร์ ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก

Title	Block Kronecker Product of Matrices over a Commutative Semiring
Students	Miss Kasithipa Kuansiri Student ID 56050057
	Mr. Sahathep Tuanweradech Student ID 56050147
	Miss Sireeton Wintachai Student ID 56050152
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Assist.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam

Abstract

The purpose of special problem is to define and to investigate properties of the Block Kronecker product of matrices over a commutative semiring such as algebraic properties, mixed product properties and structural properties. In addition, we consider relationship between such matrix product and block-vector operator, and apply to linear-matrix equation.

Keywords : Kronecker product, block Kronecker product, matrices over a commutative semiring, block-vector operator

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาวิจัยค้นคว้าอิสระนี้ ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณครูอาจารย์ที่ได้ให้ ความเมตตากรุณา สั่งสอนวิชาความรู้ จากสถาบันแห่งนี้ สถาบันที่ให้โอกาสให้ข้าพเจ้าได้มาศึกษาเล่าเรียน กราบขอบพระคุณอาจารย์ ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ โดยให้คำปรึกษา คำแนะนำ และช่วยหาวิธีทางการแก้ไขปัญหาอุปสรรคต่างๆที่เกิดขึ้น ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านการศึกษา หรือปัญหาทางด้านการทำงาน ตั้งแต่เริ่มทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ จนสำเร็จขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ประธานกรรมการปัญหาพิเศษและท่านอาจารย์ ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ที่กรุณารับเป็นกรรมการปัญหาพิเศษและได้สละเวลามาดำเนินการสอบปัญหาพิเศษครั้งนี้ ทั้งได้กรุณาให้คำแนะนำและชี้แนะแนวทางจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ท้ายนี้ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การอุปการะอบรมเลี้ยงดู ตลอดจนส่งเสริมการศึกษา และให้กำลังใจเป็นอย่างดี อีกทั้งขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ให้การสนับสนุนและช่วยเหลือด้วยดีเสมอมา และขอขอบพระคุณเจ้าของเอกสารและงานวิจัยทุกท่าน ที่ผู้ศึกษาค้นคว้าได้นำมาอ้างอิงในการทำวิจัย จนกระทั่งงานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

นางสาวกศิธิภา กวนศิริ

นายสหเทพ เตือนวีระเดช

นางสาวสิรีธร วินทะไชย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ก

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... ข

กิตติกรรมประกาศ .... ค

สารบัญ .... ง

สารบัญตาราง .... ฉ

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย 2

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย 2

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน 2

บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน 4

2.1 กรุปและริง 4

2.2 บทนิยามและตัวอย่างของกึ่งริงสลับที่ 5

2.3 สมบัติผลรวมในกึ่งริงสลับที่ 28

บทที่ 3 เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ 31

3.1 การดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ 31

3.2 ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ 35

บทที่ 4 ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่และการดำเนินการเชิงพีชคณิต 39

4.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก 39

4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์.. 45

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.3 สมบัติการคูณแบบผสมของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก 52

4.4 สมบัติเชิงโครงสร้างของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก 57

4.4.1 เมทริกซ์ที่นิยามจากสมบัติเชิงพีชคณิต 57

4.4.2 เมทริกซ์ที่นิยามจากแนวทแยงมุม 61

บทที่ 5 ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่และตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก 67

5.1 บทนิยาม ตัวอย่างและสมบัติของตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก 67

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกกับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก ... 72

5.3 การประยุกต์กับสมการเมทริกซ์เชิงเส้น 74

เอกสารอ้างอิง 75

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

1.1 ตารางขั้นตอนการดำเนินงาน.. 3

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ผลคูณโครเนคเคอร์ เป็นการคูณเมทริกซ์ในรูปแบบหนึ่งซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\otimes$ ได้มาจากชื่อ Leopold Kronecker นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน โดยสำหรับแต่ละเมทริกซ์จริง $A=\left[a_{ij}\right]$ ขนาด $m\times n$ และ B ขนาด $p\times q$ เรานิยาม

$$A\otimes B=\left[a_{ij}B\right]$$

นั่นคือ $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีบล็อกที่ (i,j) เป็น $a_{ij}B$ (ดูเพิ่มเติมได้จาก [2] และ [5]) ผลคูณโครเนคเคอร์ได้ประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในทฤษฎีระบบ แคลคูลัสเมทริกซ์ สมการเมทริกซ์ ฟิสิกส์ สถิติ วิทยาการคอมพิวเตอร์ และสายงานเฉพาะด้านอื่นๆ

ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก (Block Kronecker Product) ได้ถูกนำเสนอในงานวิจัย [5] สำหรับแต่ละเมทริกซ์จริง A ขนาด $m\times n$ และ $B=\left[B_{kl}\right]$ ขนาด $p\times q$ เรานิยาม

$$A\boxtimes B=\left[A\otimes B_{kl}\right]_{kl}$$

ในพีชคณิตเชิงเส้น เราได้ศึกษาเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจาก $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ โดยแนวคิดดังกล่าวได้มีการขยายไปสู่เมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากโครงสร้างเชิงพีชคณิตอื่นๆ ได้แก่ กึ่งริง และกึ่งริงสลับที่ เช่นในงานวิจัย [5] สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้จริง เช่น

- วิทยาการสารสนเทศ (information science)
- ระบบคลุมเครือ (fuzzy system)
- ทฤษฎีการหาค่าที่เหมาะสม (optimization theory)
- การวิจัยดำเนินงาน (operation research)
- ระบบควบคุมอัตโนมัติ (automatic control)
- ทฤษฎีเครือข่าย (network theory)

ในปัญหาพิเศษนี้ เราจะพัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์โดยจะขยายแนวคิดของ [3] ไปยังผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ให้นิยามและศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใดๆ

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก ได้แก่ สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การคูณ การสลับเปลี่ยน รอยเมทริกซ์และเมทริกซ์แบบบล็อก

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ฝึกฝนทักษะและกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
2. พัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
3. เป็นพื้นฐานในการทำวิจัยและศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษานิยามและสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker Product)
2. ศึกษาสมบัติพื้นฐานของกึ่งริง (Semiring) และกึ่งริงสลับที่ (Commutative Semiring)
3. ศึกษาสมบัติพื้นฐานและตัวอย่างของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
4. ศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
5. ให้นิยามของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใดๆ
6. พิจารณาสมบัติพีชคณิตของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
7. จัดทำเอกสารและนำเสนอปัญหาพิเศษ

ตารางที่ 1.1 ตารางขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน (ปี 2559-2560)									
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1. ศึกษานิยามและสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์จริง										
2. ศึกษาสมบัติพื้นฐานของกึ่งริงและกึ่งริงสลับที่										
3. ศึกษาความรู้พื้นฐานและตัวอย่างของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
4. ศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
5. ให้นิยามของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใดๆ										
6. พิจารณาสมบัติพีชคณิตของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
7. จัดทำเอกสารและนำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในการศึกษาสมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ เราจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐาน ได้แก่ กรุป ริง กึ่งริงสลับที่ เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ และผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

2.1 กรุปและริง

<u>บทนิยาม 2.1.1</u> ให้ G เป็นเซตไม่ว่างและ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G พิจารณาสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $a*(b*c)=(a*b)*c \qquad \forall a,b,c\in G$

(2) มีสมาชิก e ใน G ซึ่ง

$$a*e=e*a=a \qquad \forall a\in G$$

เราเรียก e ว่าสมาชิกเอกลักษณ์ (identity element) ของ G ภายใต้ $*$

(3) สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน G จะหาสมาชิก b ใน G ที่ทำให้

$$a*b=b*a=e$$

เราเรียก b ว่า ตัวผกผัน (inverse) ของ a

ถ้า $*$ มีสมบัติข้อ (1)	เราเรียก $(G,*)$ ว่า กึ่งกรุป
ถ้า $*$ มีสมบัติข้อ (1) และ (2)	เราเรียก $(G,*)$ ว่า โมนอยด์
ถ้า $*$ มีสมบัติข้อ (1) , (2) และ สมบัติสลับที่	เราเรียก $(G,*)$ ว่า โมนอยด์สลับที่
ถ้า $*$ มีสมบัติข้อ (1) , (2) และ (3)	เราเรียก $(G,*)$ ว่า กรุป
ถ้า $*$ มีสมบัติข้อ (1) , (2) , (3) และ สมบัติสลับที่	เราเรียก $(G,*)$ ว่า กรุปอาบีเลียน

<u>บทนิยาม 2.1.2</u> เราเรียก $(R,+,\cdot)$ ว่า ริง ถ้า R เป็นเซตไม่ว่าง $+,\cdot$ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบน R ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $(R,+)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

(2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \qquad \forall a,b,c\in R$

(3) สำหรับทุกๆ $a,b,c\in R$

$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ สมบัติการแจกแจงทางซ้าย

$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$ สมบัติการแจกแจงทางขวา

2.2 บทนิยามและตัวอย่างของกึ่งริงสลับที่

<u>บทนิยาม 2.2.1</u> เซต L จะเรียกว่า กึ่งริงสลับที่ ซึ่งเขียนในรูป $(L,+,\cdot,0,1)$ เมื่อสอดคล้องกับการดำเนินทวิภาคสองอย่างควบคู่กัน โดยมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $(L,+,0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ โดยมี 0 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $+$

(2) $(L,\cdot,1)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ โดยมี 1 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $\cdot$

(3) สำหรับทุกๆ $a,b,c\in L$

$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$

$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$

(4) $0\cdot r=0=r\cdot 0 \qquad \forall r\in L$

(5) $0\neq 1$

ตัวอย่าง 2.2.2 $[0,2]$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\max\{a,b\} \text{ และ } a\cdot b=\min\{a,b\} \text{ สำหรับ } a,b\in[0,2]$$

เป็นกึ่งริงสลับที่

บทพิสูจน์ จะแสดงว่า $([0,2],+,\cdot,0,2)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

1. $([0,2],+,0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่
   - มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c\in[0,2]$ จะได้

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= a+\max\{b,c\} \\ &= \max\{a,\max\{b,c\}\} \\ &= \max\{a,b,c\} \\ (a+b)+c &= \max\{a,b\}+c \\ &= \max\{\max\{a,b\},c\} \\ &= \max\{a,b,c\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a+(b+c)=(a+b)+c$

   - มีเอกลักษณ์การบวก

พิจารณา $0\in[0,2]$ จะได้ว่า

$$x+0=\min\{x,0\}=x \qquad \forall x\in[0,2]$$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

   - มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a,b\in[0,2]$

$$a+b=\max\{a,b\}=\max\{b,a\}=b+a$$

2. $([0,2],\cdot,2)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c \in [0,2]$ จะได้

$$
\begin{aligned}
a\cdot(b\cdot c) &= a\cdot\min\{b,c\} \\
&= \min\{a,\min\{b,c\}\} \\
&= \min\{a,b,c\} \\
(a\cdot b)\cdot c &= \min\{a,b\}\cdot c \\
&= \min\{\min\{a,b\},c\} \\
&= \min\{a,b,c\}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

- มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $2\in[0,2]$ จะได้ว่า

$$x\cdot 2=\min\{x,2\}=x \qquad \forall x\in[0,2]$$

ดังนั้น 2 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a,b\in[0,2]$ จะได้

$$a\cdot b=\min\{a,b\}=\min\{b,a\}=b\cdot a$$

3. การคูณ $(\cdot)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$ สำหรับแต่ละ $a,b,c\in[0,2]$ จะได้

$$
\begin{aligned}
a\cdot(b+c) &= a\cdot\max\{b,c\} \\
&= \min\{a,\max\{b,c\} \\
&= \max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} \\
&= \min\{a,b\}+\min\{a,c\} \\
&= (a\cdot b)+(a\cdot c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)\cdot c &= \max\{a,b\}\cdot c \\
&= \min\{\max\{a,b\},c\} \\
&= \max\{\min\{a,c\},\min\{b,c\}\} \\
&= \min\{a,c\}+\min\{b,c\} \\
&= (a\cdot c)+(b\cdot c)
\end{aligned}
$$

4. $0\cdot r = 0 = r\cdot 0 \qquad \forall r\in[0,2]$

เนื่องจาก 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

จะได้ว่า $0\cdot r = \min\{0,r\} = 0 = \min\{r,0\} = r\cdot 0$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ 0 และ เอกลักษณ์การคูณคือ 2

จะเห็นว่า เอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ

สรุปได้ว่า $([0,2],+,\cdot,0,2)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> $[\alpha,\beta]$ โดยที่ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ภายใต้การดำเนินการ

$a+b=\max\{a,b\}$ และ $a\cdot b=\min\{a,b\}$ สำหรับ $a,b\in[\alpha,\beta]$

เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงว่า $([\alpha,\beta],+,\cdot,\alpha,\beta)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

1. $([\alpha,\beta],+,\alpha)$ เป็นโมนอยด์สลับที่
   - มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c\in[\alpha,\beta]$ จะได้

$$
\begin{aligned}
a+(b+c) &= a+\max\{b,c\} \\
&= \max\{a,\max\{b,c\}\} \\
&= \max\{a,b,c\}
\end{aligned}
$$

$$(a+b)+c \quad = \max\{a,b\}+c$$

$$= \max\{\max\{a,b\},c\}$$

$$= \max\{a,b,c\}$$

ดังนั้น $a+(b+c)=(a+b)+c$

- มีเอกลักษณ์การบวก

พิจารณา $\alpha \in [\alpha,\beta]$ จะได้ว่า

$$x+\alpha = \max\{x,\alpha\} = x \qquad \forall x \in [\alpha,\beta]$$

ดังนั้น α เป็นเอกลักษณ์การบวก

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a,b \in [\alpha,\beta]$ จะได้

$$a+b = \max\{a,b\} = \max\{b,a\} = b+a$$

2. $([\alpha,\beta],\cdot,\beta)$ เป็นโมนอยด์สลับที่
   - มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c \in [\alpha,\beta]$ จะได้

$$a\cdot(b\cdot c) \quad = a\cdot\min\{b,c\}$$

$$= \min\{a,\min\{b,c\}\}$$

$$= \min\{a,b,c\}$$

$$(a\cdot b)\cdot c \quad = \min\{a,b\}\cdot c$$

$$= \min\{\min\{a,b\},c\}$$

$$= \min\{a,b,c\}$$

ดังนั้น $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

- มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $\beta \in [\alpha, \beta]$ จะได้ว่า

$$x \cdot \beta = \min\{x, \beta\} = x \qquad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

ดังนั้น β เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a, b \in [\alpha, \beta]$ จะได้

$$a \cdot b = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b \cdot a$$

3. การคูณ $(\cdot)$ สามารถกระจายเหนือการบวก $(+)$ สำหรับแต่ละ $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ จะได้

$$\begin{aligned}
a \cdot (b + c) &= a \cdot \max\{b, c\} \\
&= \min\{a, \max\{b, c\}\} \\
&= \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} \\
&= \min\{a, b\} + \min\{a, c\} \\
&= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\
(a + b) \cdot c &= \max\{a, b\} \cdot c \\
&= \min\{\max\{a, b\}, c\} \\
&= \max\{\min\{a, c\}, \min\{b, c\}\} \\
&= \min\{a, c\} + \min\{b, c\} \\
&= (a \cdot b) + (a \cdot c)
\end{aligned}$$

4. $\alpha \cdot r = \alpha = r \cdot \alpha \qquad \forall r \in [\alpha, \beta]$

เนื่องจาก α เป็นเอกลักษณ์การบวก

จะได้ว่า $\alpha \cdot r = \min\{\alpha, r\} = \alpha = \min\{r, \alpha\} = r \cdot \alpha$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ α และ เอกลักษณ์การคูณคือ β

จะเห็นว่า เอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ

สรุปได้ว่า $([\alpha,\beta],+,\cdot,\alpha,\beta)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> $\mathbb{N}\cup\{0\}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนนับ ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\begin{cases}\operatorname{lcm}(a,b) & , \ a,b\in\mathbb{N}\\ 0 & , \ \text{กรณีอื่นๆ}\end{cases}$$

$$a\cdot b=\begin{cases}0 & , \ a=b=0\\ \gcd(a,b) & , \ \text{กรณีอื่นๆ}\end{cases}$$

เป็นกึ่งริงสลับที่

การพิสูจน์ $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,\cdot.1,0)$ เป็นกึ่งริงสลับที่ ต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับตัวคูณร่วมน้อยและตัวหารร่วมมาก ดังนี้

<u>บทนิยาม</u> ให้ $a,b\in\mathbb{Z}-\{0\}$ จำนวนนับ m จะกล่าวว่าเป็น **ตัวคูณร่วมน้อย** *(least common multiple)* ของ a และ b ซึ่งเขียนแทนด้วย $\operatorname{lcm}(a,b)$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $a|m$ และ $b|m$

(2) สำหรับจำนวนนับ m' ใดๆ ซึ่ง $a|m'$ และ $b|m'$ จะได้ว่า $m|m'$

<u>บทนิยาม</u> ให้ $a,b\in\mathbb{Z}$ โดย a และ b ไม่เป็น 0 พร้อมกัน จำนวนนับ d จะกล่าวว่าเป็น **ตัวหารร่วมมาก** *(greatest common divisor)* ของ a และ b ซึ่งเขียนแทนด้วย $\gcd(a,b)$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $d|a$ และ $d|b$

(2) สำหรับจำนวนนับ d' ใดๆ ซึ่ง $d'|a$ และ $d'|b$ จะได้ว่า $d'|d$

สมบัติการสลับที่

$\operatorname{lcm}(a,b)=\operatorname{lcm}(b,a)$

$\gcd(a,b)=\gcd(b,a)$

<u>บทพิสูจน์</u> เห็นได้ชัดว่า การหา ห.ร.ม. และ ค.ร.น. มีสมบัติการสลับที่

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$\operatorname{lcm}(a,\operatorname{lcm}(b,c))=\operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b),c)$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $k=\operatorname{lcm}(a,\operatorname{lcm}(b,c))$ จะได้ $a|k$ และ $\operatorname{lcm}(b,c)|k$

ให้ $l=\operatorname{lcm}(b,c)$ จะได้ $b|l$ และ $c|l$

จะเห็นว่า $a|k, b|k$ และ $c|k$

ทำให้ได้ว่า $\operatorname{lcm}(a,b)|k$ และ $c|k$

ดังนั้น $\operatorname{lcm}(a,\operatorname{lcm}(b,c))=\operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b),c)$

$\gcd(a,\gcd(b,c))=\gcd(\gcd(a,b),c)$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $d=\gcd(a,\gcd(b,c))$ จะได้ $d|a$ และ $d\mid\gcd(b,c)$

ให้ $l=\gcd(b,c)$ จะได้ $l|b$ และ $l|c$

จะเห็นว่า $d|a, d|b$ และ $d|c$

ทำให้ได้ว่า $d\mid\gcd(a,b)$ และ $d|c$

ดังนั้น $\gcd(a,\gcd(b,c))=\gcd(\gcd(a,b),c)$

<u>สมบัติการกระจาย</u>

$$\operatorname{lcm}\left(a,\gcd\left(b,c\right)\right)=\gcd\left(\operatorname{lcm}\left(a,b\right),\operatorname{lcm}\left(a,c\right)\right)$$

<u>บทพิสูจน์</u> โดยไม่เสียนัยทั่วไปของการพิสูจน์ ให้ $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ เป็นตัวประกอบเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของ a,b,c ซึ่ง

$$a=\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right)$$

$$b=\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}\right)$$

$$c=\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)$$

โดยที่ $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สำหรับทุก $1 \le i \le k$

จะได้
$$\begin{aligned}\operatorname{lcm}\left(a,\gcd(b,c)\right) &= \operatorname{lcm}\left(a,\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\beta_i,\gamma_i\}}\right)\\ &= \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\beta_i,\gamma_i\}}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i,\min\{\beta_i,\gamma_i\}\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gcd\left(\operatorname{lcm}(a,b),\operatorname{lcm}(a,c)\right) &= \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}},\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i,\gamma_i\}}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\max\{\alpha_i,\beta_i\},\max\{\alpha_i,\gamma_i\}\}}\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 2.2.3 จะได้ว่า

$$\max\left\{a,\min\left\{b,c\right\}\right\}=\min\left\{\max\left\{a,b\right\},\max\left\{a,c\right\}\right\}$$

นั่นคือ $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i,\min\{\beta_i,\gamma_i\}\}}=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\max\{\alpha_i,\beta_i\},\max\{\alpha_i,\gamma_i\}\}}$

ดังนั้น $\operatorname{lcm}\left(a,\gcd\left(b,c\right)\right)=\gcd\left(\operatorname{lcm}\left(a,b\right),\operatorname{lcm}\left(a,c\right)\right)$

$$\gcd(a, \operatorname{lcm}(b,c)) = \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c))$$

<u>บทพิสูจน์</u> โดยไม่เสียนัยทั่วไปของการพิสูจน์ ให้ $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ เป็นตัวประกอบเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของ a,b,c ซึ่ง

$$a = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right)$$

$$b = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}\right)$$

$$c = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)$$

โดยที่ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สำหรับทุก $1 \le i \le k$

จะได้
$$\begin{aligned}
\gcd(a, \operatorname{lcm}(b,c)) &= \gcd\left(a, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\beta_i,\gamma_i\}}\right) \\
&= \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\beta_i,\gamma_i\}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i, \max\{\beta_i,\gamma_i\}\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c)) &= \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\gamma_i\}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\}, \min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}}
\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 2.2.3 จะได้ว่า

$$\min\{a, \max\{b,c\}\} = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$$

นั่นคือ $\displaystyle \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i, \max\{\beta_i,\gamma_i\}\}} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\}, \min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}}$

ดังนั้น $\gcd(a, \operatorname{lcm}(b,c)) = \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c))$

<u>บทพิสูจน์</u> ของตัวอย่าง 2.2.4 จะแสดงว่า $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,\cdot,1,0)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

1. $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,1)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

 - มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ $a,b,c\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ จะได้

 <u>กรณี 1</u> $a=0$ หรือ $b=0$ หรือ $c=0$

 $$a+(b+c) \quad = 0 \ = (a+b)+\mathrm{c}$$

 <u>กรณี 2</u> $a,b,c\neq 0$

 $$\begin{aligned} a+(b+c) &= a+\operatorname{lcm}(b,c) \\ &= \operatorname{lcm}(a,\operatorname{lcm}(b,c)) \\ &= \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b),c) \\ &= \operatorname{lcm}(a,b)+c \\ &= (a+b)+c \end{aligned}$$

 - มีเอกลักษณ์การบวก

 พิจารณา $1\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ให้ $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

 กรณี $x=0$ จะได้ $x+1=\operatorname{lcm}(0,1)=0=x$

 กรณี $x\neq 0$ จะได้ $x+1=\operatorname{lcm}(x,1)=x$

 ดังนั้น 1 เป็นเอกลักษณ์การบวก

 - มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a,b\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ จะได้

 $$\begin{aligned} a+b &= \operatorname{lcm}(a,b) \\ &= \operatorname{lcm}(b,a) \\ &= b+a \end{aligned}$$

2. $(\mathbb{N}\cup\{0\},\cdot,0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ $a,b,c\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ จะได้

<u>กรณี 1</u> $a=b=c=0$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot 0=0$$

$$(a\cdot b)\cdot c=0\cdot c=0$$

<u>กรณี 2</u> $a=0,b\neq 0,c\neq 0$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot\gcd(b,c)=\gcd(b,c)$$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(0,b)\cdot c=b\cdot c=\gcd(b,c)$$

<u>กรณี 3</u> $a\neq 0,\mathrm{b}=0,c\neq 0$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot\gcd(0,c)=a\cdot c=\gcd(a,c)$$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(a,0)\cdot c=a\cdot c=\gcd(a,c)$$

<u>กรณี 4</u> $a\neq 0,\mathrm{b}\neq 0,c=0$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot\gcd(b,0)=a\cdot b=\gcd(a,b)$$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(a,b)\cdot 0=\gcd(a,b)$$

<u>กรณี 5</u> $a=0,b=0,c\neq 0$

$$a\cdot(b\cdot c)=0\cdot\gcd(0,c)=0\cdot c=c$$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(0,0)\cdot c=0\cdot c=c$$

<u>กรณี 6</u> $a=0,\mathrm{b}\neq 0,c=0$

$$a\cdot(b\cdot c)=0\cdot\gcd(b,0)=0\cdot b=b$$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(0,b)\cdot 0=b\cdot 0=b$$

<u>กรณี 7</u> $a\neq 0,b=0,c=0$

$$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot\gcd(0,0)=a\cdot 0=a$$

$$(a\cdot b)\cdot c=\gcd(a,0)\cdot 0=a\cdot 0=a$$

กรณี 8 $a,b,c \neq 0$

$a\cdot(b\cdot c) \quad = a\cdot \gcd(b,c)$

$= \gcd(a,\gcd(b,c))$

$= \gcd(\gcd(a,b),c)$

$= \gcd(a,b)\cdot c$

$= (a\cdot b)\cdot c$

- มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ให้ $x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

กรณี $x=0$ จะได้ $x\cdot 0 = 0 = x$

กรณี $x \neq 0$ จะได้ $x\cdot 0 = \gcd(\mathrm{x},0) = \mathrm{x}$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a,b \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ จะได้

$a\cdot b = \gcd(a,b) = \gcd(b,a) = b\cdot a$

3. การคูณ $(\cdot)$ กระจายเหนือการบวก $(+)$ สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ จะได้

กรณี $a=0$

กรณี 1 $b=0, c=0$ จะได้

$a\cdot(b+c) = a\cdot 0 = 0$

$(a+b)\cdot c = 0\cdot c = 0$

$(a\cdot b)+(a\cdot c) = 0+0 = 0$

$(a\cdot c)+(b\cdot c) = 0+0 = 0$

กรณี 2 $b \neq 0, c \neq 0$ จะได้

$$a \cdot (b+c) = a \cdot \mathrm{lcm}(b,c)$$

$$= \gcd(a, \mathrm{lcm}(b,c))$$

$$= \mathrm{lcm}(b,c)$$

$$(a+b) \cdot c = 0 \cdot c = 0$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = b + c$$

$$= \mathrm{lcm}(b,c)$$

$$(a \cdot c) + (b \cdot c) = c + \gcd(b,c)$$

$$= \mathrm{lcm}(c, \gcd(b,c))$$

$$= c$$

กรณี 3 $b = 0$ หรือ $c = 0$ จะได้

$$a \cdot (b+c) = a \cdot 0 = 0$$

$$(a+b) \cdot c = 0 \cdot 0 = 0$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = 0$$

$$(a \cdot c) + (b \cdot c) = 0 + 0 = 0$$

กรณี $a \neq 0$

กรณี 1 $b = 0, c = 0$ จะได้

$$a \cdot (b+c) = a \cdot 0 = a$$

$$(a+b) \cdot c = 0 \cdot 0 = 0$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = a + a = a$$

$$(a \cdot c) + (b \cdot c) = a + 0 = 0$$

<u>กรณี 2</u> $b \neq 0, c \neq 0$ จะได้

$$\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= \gcd(a, \operatorname{lcm}(b,c)) \\ &= \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c)) \\ &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot c &= \gcd(\operatorname{lcm}(a,b), c) \\ &= \gcd(c, \operatorname{lcm}(a,b)) \\ &= \operatorname{lcm}(\gcd(a,c), \gcd(b,c)) \\ &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

<u>กรณี 3</u> $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ จะได้

$$a \cdot (b+c) = a \cdot 0 = a$$

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + (a \cdot c) &= \gcd(0,0) + \gcd(a,\mathrm{c}) \\ &= a + \gcd(a,\mathrm{c}) \\ &= \operatorname{lcm}(a, \gcd(a,c)) \\ &= \gcd(\operatorname{lcm}(a,a), \operatorname{lcm}(a,c)) \\ &= \gcd(a, \operatorname{lcm}(a,c)) \\ &= a \end{aligned}$$

$$(a+b) \cdot c = 0 \cdot c = c$$

$$\begin{aligned} (a \cdot c) + (b \cdot c) &= \gcd(a,c) + \gcd(0,\mathrm{c}) \\ &= \gcd(a,\mathrm{c}) + c \\ &= \operatorname{lcm}(\gcd(a,c), c) \\ &= \gcd(\operatorname{lcm}(a,c), \operatorname{lcm}(c,c)) \\ &= \gcd(\operatorname{lcm}(a,c), c) \end{aligned}$$

$$= c$$

<u>กรณี 4</u> $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ จะได้

$$a \cdot (b+c) = a \cdot 0 = a$$

$$(a+b) \cdot c = \operatorname{lcm}(a,b))$$

$$\begin{aligned}(a \cdot b) + (a \cdot c) &= \gcd(a,b) + a \\ &= \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \cdot c) + (b \cdot c) &= \gcd(a,c) + \gcd(b,c) \\ &= a + b \\ &= \operatorname{lcm}(a,b)\end{aligned}$$

4. $1 \cdot r = 1 = r \cdot 1 \qquad \forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

เนื่องจาก 1 เป็นเอกลักษณ์การบวก

จะได้ว่า $1 \cdot r = \gcd(1,r) = 1 = \gcd(r,1)$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ 1 และ เอกลักษณ์การคูณคือ 0

จะเห็นว่าเอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ

สรุปได้ว่า $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 1, 0)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>**ตัวอย่าง 2.2.5**</u> ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ เรานิยาม

$$a \oplus b = \min\{a,b\} = \begin{cases} a & , a \leq b \\ b & , a \geq b \end{cases}$$

กำหนด $\min\{a, \infty\} = a$ สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

สำหรับแต่ละ $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ เรานิยาม

$$a \odot b = \begin{cases} ab & , \quad a.b \\ \infty & , \quad a = \infty \quad \text{หรือ} \quad b = \infty \end{cases}$$

จะได้ว่า $(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \oplus, \odot, \infty, 1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงว่า $(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \oplus, \odot, \infty, 1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

1. $\left(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \oplus, \infty\right)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

   - มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

     <u>กรณี 1</u> $a,b,\mathrm{c} \in \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
a \oplus (b \oplus c) &= a \oplus (\min\{b,c\}) \\
&= \min\{\infty, \min\{b,c\}\} \\
&= \min\{\min\{a,b\},c\} \\
&= \min\{a,b\} \oplus \mathrm{c} \\
&= (a \oplus b) \oplus c
\end{aligned}
$$

     <u>กรณี 2</u> $a = \infty,\ b,c \in \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
a \oplus (b \oplus c) &= \infty \oplus \min\{b,c\} \\
&= \min\{\infty, \min\{b,c\}\} \\
&= \min\{b,c\} \\
(a \oplus b) \oplus c &= \min\{a,b\} \oplus c \\
&= b \oplus c \\
&= \min\{b,c\}
\end{aligned}
$$

     <u>กรณี 3</u> $b = \infty,\ a,c \in \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
a \oplus (b \oplus c) &= a \oplus \min\{b,c\} \\
&= a \oplus c \\
&= \min\{a,c\}
\end{aligned}
$$

$$(a \oplus b) \oplus c \quad = \min\{a,b\} \oplus \mathrm{c}$$

$$= a \oplus c$$

$$= \min\{a,c\}$$

<u>กรณี 4</u> $c = \infty,\ a,b \in \mathbb{R}^{+}$

$$a \oplus (b \oplus c) \quad = a \oplus \min\{b,c\}$$

$$= a \oplus b$$

$$= \min\{a,b\}$$

$$(a \oplus b) \oplus c \quad = \min\{a,b\} \oplus \infty$$

$$= \min\{\min\{a,b\},\infty\}$$

$$= \min\{a,b\}$$

<u>กรณี 5</u> $a = \infty, b = \infty, c = \infty$

$$a \oplus (b \oplus c) \quad = \min\{\infty, \min\{\infty,\infty\}\} = \infty$$

$$(a \oplus b) \oplus c \quad = \min\{\min\{\infty,\infty\},\infty\} = \infty$$

- มีเอกลักษณ์การบวก

พิจารณา $\infty \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$ จะได้

$$x \oplus \infty = \min\{x,\infty\} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$$

ดังนั้น ∞ เป็นเอกลักษณ์การบวก

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a,b \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$ จะได้

$$a \oplus b = \min\{a,b\} = \min\{b,a\} = b \oplus a$$

2. $\left(\mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}, \odot, 1\right)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$ จะได้

<u>กรณี 1</u> $a,b,\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{+}$

$$a \odot (b \odot c) = a \odot bc = a(bc) = (ab)c = ab \odot c = (a \odot b) \odot c$$

<u>กรณี 2</u> $a = \infty$ หรือ $b = \infty$ หรือ $c = \infty$

$$a \odot (b \odot c) = \infty = (a \odot b) \odot c$$

- มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $1 \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$ จะได้

$$1 \odot x = 1(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$$

ดังนั้น 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a,b \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$ จะได้

$$a \odot b = ab = ba = b \odot a$$

3. การคูณ $(\odot)$ กระจายเหนือการบวก $(\oplus)$ สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$ จะได้

กรณี $a = \infty$

<u>กรณี 1</u> $b,c \in \mathbb{R}^{+}$

$$a \odot (b \oplus c) = \infty \odot (b \oplus c) = \infty$$

$$\begin{aligned}(a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (\infty \odot b) \oplus (\infty \odot c) \\ &= \infty \oplus \infty \\ &= \min\{\infty, \infty\} \\ &= \infty\end{aligned}$$

$(a \oplus b) \odot c = \min\{\infty, b\} \odot \mathrm{c} = bc$

$$
\begin{aligned}
(a \odot c) \oplus (b \odot c) &= (\infty \odot c) \oplus (b \odot c) \\
&= \infty \oplus bc \\
&= \min\{\infty, bc\} \\
&= bc
\end{aligned}
$$

กรณี 2 $b = \infty,\ c \in \mathbb{R}^{+}$

$a \odot (b \oplus c) = \infty \odot (\infty \oplus c) = \infty$

$$
\begin{aligned}
(a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot c) \\
&= \infty \oplus \infty \\
&= \min\{\infty, \infty\} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

$(a \oplus b) \odot c = \min\{\infty, \infty\} \odot \mathrm{c} = \infty \odot c = \infty$

$$
\begin{aligned}
(a \odot c) \oplus (b \odot c) &= (\infty \odot c) \oplus (\infty \odot c) \\
&= \infty \oplus \infty \\
&= \min\{\infty, \infty\} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

กรณี 3 $b \in \mathbb{R}^{+},\ c = \infty$

$a \odot (b \oplus c) = \infty \odot (b \oplus \infty) = \infty$

$$
\begin{aligned}
(a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (\infty \odot b) \oplus (\infty \odot \infty) \\
&= \infty \oplus \infty \\
&= \min\{\infty, \infty\} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

$$(a \oplus b) \odot c = \min\{\infty, b\} \odot \infty = \infty$$

$$\begin{aligned}(a \odot c) \oplus (b \odot c) &= (\infty \odot \infty) \oplus (b \odot \infty) \\ &= \infty \oplus \infty \\ &= \min\{\infty, \infty\} \\ &= \infty\end{aligned}$$

<u>กรณี 4</u> $b = \infty, c = \infty$

$$a \odot (b \oplus c) = \infty \odot (\infty \oplus \infty) = \infty$$

$$\begin{aligned}(a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty) \\ &= \infty \oplus \infty \\ &= \min\{\infty, \infty\} \\ &= \infty\end{aligned}$$

$$(a \oplus b) \odot c = \min\{\infty, \infty\} \odot \infty = \infty$$

$$\begin{aligned}(a \odot c) \oplus (b \odot c) &= (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty) \\ &= \infty \oplus \infty \\ &= \min\{\infty, \infty\} \\ &= \infty\end{aligned}$$

กรณี $a \in \mathbb{R}^+$

<u>กรณี 1</u> $b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}a \odot (b \oplus c) &= a \odot \min\{b, c\} \\ &= a(\min\{b, c\}) \\ &= \min\{ab, ac\} \\ &= ab \oplus ac\end{aligned}$$

$$= (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

$$(a \oplus b) \odot c \quad = \min\{a,b\} \odot c$$

$$= (\min\{a,b\})c$$

$$= \min\{ac, bc\}$$

$$= ac \oplus bc$$

$$= (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$

กรณี 2 $b = \infty,\ c \in \mathbb{R}^+$

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot \min\{\infty, c\} = a \odot c = ac$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad = (a \odot \infty) \oplus (a \odot c)$$

$$= \infty \oplus ac$$

$$= \min\{\infty, ac\} = ac$$

$$(a \oplus b) \odot c = \min\{a, \infty\} \odot c = a \odot c = ac$$

$$(a \odot c) \oplus (b \odot c) \quad = (a \odot c) \oplus (\infty \odot c)$$

$$= ac \oplus \infty$$

$$= \min\{ac, \infty\}$$

$$= ac$$

กรณี 3 $b \in \mathbb{R}^+,\ c = \infty$

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot \min\{b, \infty\} = a \odot b = ab$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad = (a \odot b) \oplus (a \odot \infty)$$

$$= ab \oplus \infty$$

$$= \min\{ab, \infty\}$$

$$= ab$$

กรณี 4 $b=\infty, c=\infty$

$$a\odot(b\oplus c)=a\odot\min\{\infty,\infty\}=a\odot\infty=\infty$$

$$\begin{aligned}(a\odot b)\oplus(a\odot c) &= (a\odot\infty)\oplus(a\odot\infty)\\ &=\infty\oplus\infty\\ &=\infty\end{aligned}$$

4. $\infty\cdot r=\infty=r\cdot\infty \qquad \forall r\in\mathbb{R}^{+}\cup\{\infty\}$

เนื่องจาก ∞ เป็นเอกลักษณ์การบวก

จะได้ว่า $(\infty)\odot r=(\infty)r=\infty=r(\infty)=r\odot(\infty)$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ ∞ และ เอกลักษณ์การคูณคือ 1

จะเห็นว่า เอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ

สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}^{+}\cup\{\infty\},\oplus,\odot,\infty,1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>ตัวอย่าง 2.2.6</u> สำหรับแต่ละจำนวนนับ $n>1$ จะได้ว่า $\mathbb{Z}_n$ ภายใต้การบวก คูณปกติ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงว่า $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot,\overline{0},\overline{1})$ เป็นกึ่งริงสลับที่

เนื่องจาก $\mathbb{Z}_n$ เป็นริง

จะได้ว่า $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot,\overline{0},\overline{1})$ เป็นกึ่งริง

และภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ มีสมบัติการสลับที่

สรุปได้ว่า $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot,\overline{0},\overline{1})$ เป็นกึ่งริงสลับที่

2.3 สมบัติผลรวมในกึ่งริงสลับที่

(1) $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i$

<u>บทพิสูจน์</u> โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i$

เมื่อ $n=1$ จะได้ $P(1)$ คือ

$$\sum_{i=1}^{1}\left(X_i+Y_i\right)=X_1+Y_1=\sum_{i=1}^{1}X_i+\sum_{i=1}^{1}Y_i$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $n\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i$

ต้องการพิสูจน์ว่า $p(n+1)$ เป็นจริง

จะได้ $\sum_{i=1}^{n+1}\left(X_i+Y_i\right)$

$$=\left(X_1+Y_1\right)+\left(X_2+Y_2\right)+\ldots+\left(X_n+Y_n\right)+\left(X_{n+1}+Y_{n+1}\right)$$

$$=\left[\left(X_1+Y_1\right)+\left(X_2+Y_2\right)+\ldots+\left(X_n+Y_n\right)\right]+\left(X_{n+1}+Y_{n+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i+\left(X_{n+1}+Y_{n+1}\right)$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}X_i+X_{n+1}\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i+Y_{n+1}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}X_i+\sum_{i=1}^{n+1}Y_i$$

ดังนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\left(X_i+Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

(2) $\sum_{i=1}^{n}aX_i = a\sum_{i=1}^{n}X_i$

<u>บทพิสูจน์</u> $\sum_{i=1}^{n}aX_i = aX_1+aX_2+\ldots+aX_n$

$$= a\left(X_1+X_2+\ldots X_n\right)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(3) $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)$

<u>บทพิสูจน์</u> โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $m\in\mathbb{N}$ สำหรับแต่ละ $n\in\mathbb{N}$

ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)$

เมื่อ $n=1$ จะได้ $P(1)$ คือ

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{1}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}a_{1j}=a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1m}=\sum_{i=1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $n\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n+1)$ เป็นจริง

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\left(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{(n+1)j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj}\right) + \sum_{j=1}^{m} a_{(n+1)j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{m} a_{(n+1)j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$$

ดังนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง

$$\therefore \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$$

บทที่ 3

เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

3.1 การดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

<u>บทนิยาม 3.1.1</u> เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ กำหนดให้ L เป็นกึ่งริงสลับที่ และ $M_{m,n}(L)$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก L สำหรับแต่ละ $m,n \in \mathbb{N}$

ถ้า $A \in M_{m,n}(L)$ เราจะเขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ ij ของเมทริกซ์ A ด้วย a_{ij} สำหรับแต่ละ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n$ ในกรณีนี้เราเขียนแทนด้วย $A = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$ หรือ $A = \left[a_{ij}\right]$

ในกรณีที่ $m = n$ เราจะเขียน $M_{n,n}(L)$ ด้วย $M_n(L)$

มีสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ดังนี้

<u>บทนิยาม 3.1.2</u> สำหรับแต่ละ $A = \left[a_{ij}\right], B = \left[b_{ij}\right] \in M_{m,n}(L)$ เรานิยาม

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \in M_{m,n}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = ([0,2],+,\cdot,0,2)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \max\{a,b\} \text{ และ } a \cdot b = \min\{a,b\}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1.3 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1.7 & 1.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ $A + B = \begin{bmatrix} \max\{0,1.7\} & \max\{1.3,1.1\} \\ \max\{0.2,0.5\} & \max\{1,0.5\} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1.7 & 1.3 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(L)$$

<u>บทนิยาม 3.1.3</u> สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(L)$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{n,p}(L)$ เรานิยาม

$$AB=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]\in M_{m,p}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L=\left(\mathbb{Z}_3,+,\cdot,\overline{0},\overline{1}\right)$ ภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ

ให้ $A=\begin{bmatrix}\overline{0} & \overline{0} & \overline{1}\\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{1}\end{bmatrix}\in M_{2,3}(L)$ และ $B=\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{2}\\ \overline{1}\end{bmatrix}\in M_{3,1}(L)$

จะได้ $AB=\begin{bmatrix}(\overline{0})(\overline{1})+(\overline{0})(\overline{2})+(\overline{1})(\overline{1})\\ (\overline{2})(\overline{1})+(\overline{1})(\overline{2})+(\overline{1})(\overline{1})\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\overline{0}+\overline{0}+\overline{1}\\ \overline{2}+\overline{2}+\overline{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{2}\end{bmatrix}\in M_{2,1}(L)$$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.4</u> $M_n(L)$ เป็นกึ่งริง

<u>บทนิยาม 3.1.5</u> สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(L)$ และ $k\in L$ เรานิยาม

$$kA=\left[ka_{ij}\right]\in M_{m,n}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L=\left(\mathbb{R}^{+}\cup\{\infty\},+,\cdot,0,1\right)$ ภายใต้การดำเนินการ

$a+b=\min\{a,b\}$ และ $a\cdot b=ab \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}^{+}\cup\{\infty\}$

ให้ $A=\begin{bmatrix}5.95 & 1\\ \infty & 0\end{bmatrix}$ และ $k=5$

จะได้ $kA=5\begin{bmatrix}5.95 & 1\\ \infty & 0\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5(5.95) & 5(1) \\ 5(\infty) & 5(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29.75 & 5 \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \in M_2(L)$$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.6</u> ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ L ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่างๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย และให้ $k, p \in L$

(1) $k(A+B) = kA + kB$

(2) $(k+p)A = kA + pA$

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

<u>บทนิยาม 3.1.7</u> ถ้า $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m,n}(L)$ แล้วการสลับเปลี่ยนของ A แทนด้วย A^T ซึ่ง

$$A^T = \left[a_{ji}\right] \in M_{m,n}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 0, 1)$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

ทฤษฎีบท 3.1.8 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือ L ซึ่งมีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการในแต่ละข้อมีความหมาย จะได้ว่า

(1) $\left(A^T\right)^T = A$

(2) $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$

(3) $\left(kA\right)^T = kA^T$ สำหรับ $k \in L$

(4) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$

(5) ถ้า $A = \left[A_{ij}\right]$ แล้ว $A^T = \left[\left(A_{ji}\right)^T\right]$

บทนิยาม 3.1.9 รอยของเมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n(L)$ คือ ผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L = \left(\mathbb{Z}_5, +, \cdot, \overline{0}, \overline{1}\right)$ ภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ

ให้ $A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \end{bmatrix} \in M_3(L)$

จะได้ $\operatorname{tr}(A) = \overline{2} + \overline{4} + \overline{1} = \overline{2}$

ทฤษฎีบท 3.1.10 สำหรับแต่ละ $A, B \in M_n(L)$ และ $k \in L$ จะได้ว่า

(1) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

(2) $\operatorname{tr}(kA) = k\operatorname{tr}(A)$

ทฤษฎีบท 3.1.11 สำหรับแต่ละ $A, B \in M_n(L)$ จะได้ว่า

(1) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

(2) $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$

(3) $\operatorname{tr}(A^T A) = \operatorname{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$

3.2 ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A \otimes B = [a_{ij}B]_{ij} \in M_{mp,nq}(L)$$

นั่นคือแต่ละบล็อกที่ (i, j) ของ $A \otimes B$ คือ $a_{ij}B$ สำหรับ $i = 1,\ldots,m$ และ $j = 1,\ldots,n$

ตัวอย่าง กำหนด $L = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 0, 1)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \begin{cases} \operatorname{lcm}(a,b) & , \ a,b \in \mathbb{N} \\ 0 & , \text{ กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & , \ a = b = 0 \\ \gcd(a,b) & , \text{ กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ $A \otimes B = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\ 6\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\gcd(1,2) & \gcd(1,4)\\ \gcd(1,5) & \gcd(1,1)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gcd(4,2) & \gcd(4,4)\\ \gcd(4,5) & \gcd(4,1)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\gcd(6,2) & \gcd(6,4)\\ \gcd(6,5) & \gcd(6,1)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gcd(3,2) & \gcd(3,4)\\ \gcd(3,5) & \gcd(3,1)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\gcd(1,2) & \gcd(1,4)\\ \gcd(1,5) & \gcd(1,1)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gcd(4,2) & \gcd(4,4)\\ \gcd(4,5) & \gcd(4,1)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\gcd(6,2) & \gcd(6,4)\\ \gcd(6,5) & \gcd(6,1)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\gcd(3,2) & \gcd(3,4)\\ \gcd(3,5) & \gcd(3,1)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\in M_4(L)$$

<u>**ทฤษฎีบท 3.2.2**</u> ([4]) ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์เหนือ L ที่มีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย จะได้ว่า

(1) $(kA)\otimes B = k(A\otimes B) = A\otimes(kB)$ สำหรับ $k\in L$

(2) $(A+B)\otimes C = (A\otimes C)+(B\otimes C)$

(3) $A\otimes(B+C) = (A\otimes B)+(A\otimes C)$

(4) $(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T$

<u>**ทฤษฎีบท 3.2.3**</u> ([4]) ให้ $A\in M_{m,n}(L), B\in M_{p,q}(L)$ และ $C\in M_{r,s}(L)$ จะได้ว่า

$$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$$

ทฤษฎีบท 3.2.4 ([4]) ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ ถ้า A และ B หาผกผันได้ แล้ว $A \otimes B$ หาผกผันได้ และ

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

ทฤษฎีบท 3.2.5 ([4]) ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ จะได้ว่า

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

บทนิยาม 3.2.6 ([4]) โครเนคเคอร์ยกกำลังของ $A \in M_{m,n}(L)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k นิยามโดย

$$(A)^{\otimes 1} = A \text{ และ } (A)^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes(k-1)} \text{ สำหรับ } k = 2,3,\ldots$$

กำหนด $L = ([1,7],+,\cdot,1,7)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \max\{a,b\} \text{ และ } a \cdot b = \min\{a,b\}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5.5 \\ 6.9 & 4.6 \end{bmatrix} \in M_2(L)$ และ $k = 2 \in L$

จะได้ $A^{\otimes 2} = A \otimes A^{\otimes 1}$

$$= A \otimes A$$

$$= \begin{bmatrix} 4\begin{bmatrix} 4 & 5.5 \\ 6.9 & 4.6 \end{bmatrix} & 5.5\begin{bmatrix} 4 & 5.5 \\ 6.9 & 4.6 \end{bmatrix} \\ 6.9\begin{bmatrix} 4 & 5.5 \\ 6.9 & 4.6 \end{bmatrix} & 4.6\begin{bmatrix} 4 & 5.5 \\ 6.9 & 4.6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min\{4,4\} & \min\{4,5.5] & \min\{5.5,4\} & \min\{5.5,5.5\} \\ \min\{4,6.9\} & \min\{4,4.6\} & \min\{5.5,6.9] & \min\{5.5,4.6\} \\ \min\{6.9,4\} & \min\{6.9,5.5\} & \min\{4.6,4\} & \min\{4.6,5.5] \\ \min\{6.9,6.9\} & \min\{6.9,4.6\} & \min\{4.6,6.9\} & \min\{4.6,4.6] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 5.5 \\ 4 & 4 & 5.5 & 4.6 \\ 4 & 5.5 & 4 & 5.5 \\ 6.9 & 4.6 & 4.6 & 4.6 \end{bmatrix} \in M_4(L)$$

บทแทรก 3.2.7 ([5]) ถ้าการคูณเมทริกซ์ในแต่ละข้อมีความหมาย จะได้ว่า

(1) $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\ldots(A_p \otimes B_p) = (A_1A_2\ldots A_p)\otimes(B_1B_2\ldots B_p)$

(2) $(A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_p)(B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_p) = (A_1B_1)\otimes(A_2B_2)\otimes\ldots\otimes(A_pB_p)$

(3) $(AB)^{\otimes k} = A^{\otimes k}B^{\otimes k}$ สำหรับ $k \in \mathbb{N}$

(4) $((A)^{\otimes r})^s = (A^s)^{\otimes r}$ สำหรับ $r, s \in \mathbb{N}$

บทที่ 4

ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่และการดำเนินการเชิงพีชคณิต

4.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก

<u>บทนิยาม 4.1.1</u> ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์จริง ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B = [B_{kl}] \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อก แล้วผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์ A และ B นิยามโดย

$$A \boxtimes B = [A \otimes B_{kl}]_{kl} \in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$$

<u>ตัวอย่าง 4.1.2</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \left[\begin{array}{c|c} 5 & 3 \\ 9 & 1 \\ \hline 0 & -5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

จะได้ $A \boxtimes B = [A \otimes B_{kl}]_{kl} \in M_{6,4}(\mathbb{R})$

$$= \begin{bmatrix} A \otimes B_{11} & A \otimes B_{12} \\ A \otimes B_{21} & A \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 2B_{11} & 3.5B_{11} & 2B_{12} & 3.5B_{12} \\ 0B_{11} & 1B_{11} & 0B_{12} & 1B_{12} \\ \hline 2B_{21} & 3.5B_{21} & 2B_{22} & 3.5B_{22} \\ 0B_{21} & 1B_{21} & 0B_{22} & 1B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 2\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} & 3.5\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & 3.5\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline 2[0] & 3.5[0] & 2[-5] & 3.5[-5] \\ 0[0] & 1[0] & 0[-5] & 1[-5] \end{array}\right]$$

$$
=\left[\begin{array}{cc|cc}
\begin{bmatrix}10\\18\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}17.5\\31.5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}10.5\\3.5\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \\
\hline
[0] & [0] & [-10] & [-17.5] \\
[0] & [0] & [0] & [-5]
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{cc|cc}
10 & 17.5 & 6 & 10.5 \\
18 & 31.5 & 2 & 3.5 \\
0 & 5 & 0 & 3 \\
0 & 9 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & -10 & -17.5 \\
0 & 0 & 0 & -5
\end{array}\right] \in M_{6,4}(\mathbb{R})
$$

<u>ตัวอย่าง 4.1.3</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 3.5\\0 & 1\end{bmatrix}$ และ $B=\left[\begin{array}{c|c}5 & 3\\ \hline 9 & 1\\ 0 & -5\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

จะได้ $\quad A\boxtimes B = \left[A\otimes B_{kl}\right]_{kl} \in M_{6,4}(\mathbb{R})$

$$
=\begin{bmatrix}A\otimes B_{11} & A\otimes B_{12}\\ A\otimes B_{21} & A\otimes B_{22}\end{bmatrix}
$$

$$
=\left[\begin{array}{cc|cc}
2B_{11} & 3.5B_{11} & 2B_{12} & 3.5B_{12} \\
0B_{11} & 1B_{11} & 0B_{12} & 1B_{12} \\
\hline
2B_{21} & 3.5B_{21} & 2B_{22} & 3.5B_{22} \\
0B_{21} & 1B_{21} & 0B_{22} & 1B_{22}
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{cc|cc}
2[5] & 3.5[5] & 2[3] & 3.5[3] \\
0[5] & 1[5] & 0[3] & 1[3] \\
\hline
2\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix} & 3.5\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix} & 3.5\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix} \\
0\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{cc|cc}
\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}17.5\\5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}10.5\\3\end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix}18\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}31.5\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\-10\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3.5\\-17.5\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{cc|cc}
10 & 17.5 & 6 & 10.5 \\
0 & 5 & 0 & 3 \\
\hline
18 & 31.5 & 2 & 3.5 \\
0 & 0 & -10 & -17.5 \\
0 & 9 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -5
\end{array}\right] \in M_{6,4}(\mathbb{R})
$$

<u>บทนิยาม 4.1.4</u> ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ให้ L เป็นกึ่งริงสลับที่ ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B=[B_{kl}] \in M_{p,q}(L)$ เป็นเมทริกซ์แบบบล็อก แล้วผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์ A และ B นิยามโดย

$$A \boxtimes B = [A \otimes B_{kl}]_{kl} \in M_{mp,nq}(L)$$

<u>ตัวอย่าง 4.1.5</u> กำหนด $L=([0,1],+,\cdot,0,1)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\max\{a,b\} \text{ และ } a\cdot b=\min\{a,b\} \text{ สำหรับ } a,b \in L$$

ให้ $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\0.2 & 0.7\end{bmatrix}$ และ $B=\left[\begin{array}{cc|cc}0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.3\\0.6 & 0.4 & 0.8 & 0.2\\ \hline 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.6\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

จะได้

$A \boxtimes B$

$=[A \otimes B_{kl}]_{kl} \in M_8(L)$

$=\begin{bmatrix}A\otimes B_{11} & A\otimes B_{12}\\A\otimes B_{21} & A\otimes B_{22}\end{bmatrix}$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.1B_{11} & 0.3B_{11} & 0.1B_{12} & 0.3B_{12} \\ 0.2B_{11} & 0.7B_{11} & 0.2B_{12} & 0.7B_{12} \\ \hline 0.1B_{21} & 0.3B_{21} & 0.1B_{22} & 0.3B_{22} \\ 0.2B_{21} & 0.7B_{21} & 0.3B_{22} & 0.7B_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.1\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} & 0.3\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} & 0.1\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} & 0.3\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \\ 0.2\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} & 0.7\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} & 0.2\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} & 0.7\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \\ \hline 0.1\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} & 0.3\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} & 0.1\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} & 0.3\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \\ 0.2\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} & 0.7\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} & 0.2\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} & 0.7\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$=$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \min\{0.1,0.2\} & \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.3,0.2\} & \min\{0.3,0.3\} & \min\{0.1,0.1\} & \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.3,0.1\} & \min\{0.3,0.3\} \\ \min\{0.1,0.6\} & \min\{0.1,0.4\} & \min\{0.3,0.6\} & \min\{0.3,0.4\} & \min\{0.1,0.8\} & \min\{0.1,0.2\} & \min\{0.3,0.8\} & \min\{0.3,0.2\} \\ \min\{0.2,0.2\} & \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.7,0.2\} & \min\{0.7,0.3\} & \min\{0.2,0.1\} & \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.7,0.1\} & \min\{0.7,0.3\} \\ \min\{0.2,0.6\} & \min\{0.2,0.4\} & \min\{0.7,0.6\} & \min\{0.7,0.4\} & \min\{0.2,0.8\} & \min\{0.2,0.2\} & \min\{0.7,0.8\} & \min\{0.7,0.2\} \\ \hline \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.1,0.2\} & \min\{0.3,0.3\} & \min\{0.3,0.2\} & \min\{0.1,0.5\} & \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.3,0.5\} & \min\{0.3,0.3\} \\ \min\{0.1,0.1\} & \min\{0.1,0.5\} & \min\{0.3,0.1\} & \min\{0.3,0.5\} & \min\{0.1,0.7\} & \min\{0.1,0.6\} & \min\{0.3,0.7\} & \min\{0.3,0.6\} \\ \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.2,0.2\} & \min\{0.7,0.3\} & \min\{0.7,0.2\} & \min\{0.2,0.5\} & \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.7,0.5\} & \min\{0.7,0.3\} \\ \min\{0.2,0.1\} & \min\{0.2,0.5\} & \min\{0.7,0.1\} & \min\{0.7,0.5\} & \min\{0.2,0.7\} & \min\{0.2,0.6\} & \min\{0.7,0.7\} & \min\{0.7,0.6\} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ \hline 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.7 & 0.6 \end{array}\right] \in M_8(L)$$

<u>**ตัวอย่าง 4.1.6**</u> กำหนด $L=([0,1],+,\cdot,0,1)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\max\{a,b\} \text{ และ } a\cdot b=\min\{a,b\} \text{ สำหรับ } a,b\in L$$

ให้ $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}$ และ $B=\left[\begin{array}{cc|cc}0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.3\\ \hline 0.6 & 0.4 & 0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.6\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

จะได้

$$A\boxtimes B$$

$$=[A\otimes B_{kl}]_{kl}\in M_8(L)$$

$$=\begin{bmatrix}A\otimes B_{11} & A\otimes B_{12}\\ A\otimes B_{21} & A\otimes B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc}0.1B_{11} & 0.3B_{11} & 0.1B_{12} & 0.3B_{12}\\ 0.2B_{11} & 0.7B_{11} & 0.2B_{12} & 0.7B_{12}\\ \hline 0.1B_{21} & 0.3B_{21} & 0.1B_{22} & 0.3B_{22}\\ 0.2B_{21} & 0.7B_{21} & 0.3B_{22} & 0.7B_{22}\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc}0.1[0.2] & 0.3[0.2] & 0.1[0.3\ \ 0.1\ \ 0.3] & 0.3[0.3\ \ 0.1\ \ 0.3]\\ 0.2[0.2] & 0.7[0.2] & 0.2[0.3\ \ 0.1\ \ 0.3] & 0.7[0.3\ \ 0.1\ \ 0.3]\\ \hline 0.1\begin{bmatrix}0.6\\0.3\\0.1\end{bmatrix} & 0.3\begin{bmatrix}0.6\\0.3\\0.1\end{bmatrix} & 0.1\begin{bmatrix}0.4 & 0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.7 & 0.6\end{bmatrix} & 0.3\begin{bmatrix}0.4 & 0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.7 & 0.6\end{bmatrix}\\ 0.2\begin{bmatrix}0.6\\0.3\\0.1\end{bmatrix} & 0.7\begin{bmatrix}0.6\\0.3\\0.1\end{bmatrix} & 0.2\begin{bmatrix}0.4 & 0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.7 & 0.6\end{bmatrix} & 0.7\begin{bmatrix}0.4 & 0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.7 & 0.6\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

$$=$$

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc}\min\{0.1,0.2\} & \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.1,0.1\} & \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.3,0.3\} & \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.3,0.3\}\\ \min\{0.2,0.2\} & \min\{0.2,0.7\} & \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.1,0.2\} & \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.3,0.7\} & \min\{0.1,0.7\} & \min\{0.3,0.7\}\\ \hline \min\{0.1,0.6\} & \min\{0.3,0.6\} & \min\{0.1,0.4\} & \min\{0.1,0.8\} & \min\{0.1,0.2\} & \min\{0.3,0.4\} & \min\{0.3,0.8\} & \min\{0.2,0.3\}\\ \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.3,0.3\} & \min\{0.1,0.2\} & \min\{0.1,0.5\} & \min\{0.1,0.3\} & \min\{0.3,0.3\} & \min\{0.3,0.5\} & \min\{0.3,0.6\}\\ \min\{0.1,0.1\} & \min\{0.3,0.1\} & \min\{0.1,0.5\} & \min\{0.1,0.7\} & \min\{0.1,0.6\} & \min\{0.3,0.5\} & \min\{0.3,0.7\} & \min\{0.3,0.7\}\\ \min\{0.2,0.6\} & \min\{0.6,0.7\} & \min\{0.2,0.4\} & \min\{0.2,0.8\} & \min\{0.2,0.2\} & \min\{0.4,0.7\} & \min\{0.7,0.8\} & \min\{0.2,0.7\}\\ \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.3,0.7\} & \min\{0.2,0.2\} & \min\{0.2,0.5\} & \min\{0.2,0.3\} & \min\{0.2,0.7\} & \min\{0.5,0.7\} & \min\{0.3,0.7\}\\ \min\{0.2,0.1\} & \min\{0.1,0.7\} & \min\{0.2,0.5\} & \min\{0.2,0.7\} & \min\{0.2,0.6\} & \min\{0.5,0.7\} & \min\{0.4,0.7\} & \min\{0.6,0.7\}\end{array}\right]$$

$$
=\left[\begin{array}{cc|cccccc}
0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\
0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\
\hline
0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\
0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\
0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.2 \\
0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\
0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.7 & 0.6
\end{array}\right] \in M_8(L)
$$

ตัวอย่าง 4.1.7 กำหนด $L=\left(\mathbb{Z}_8,+,\cdot,\overline{0},\overline{1}\right)$ ภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ

ให้ $A=\begin{bmatrix}\overline{0} & \overline{2} & \overline{7} \\ \overline{5} & \overline{6} & \overline{3}\end{bmatrix}$ และ $B=\left[\begin{array}{c|cc}\overline{1} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{7} & \overline{0} \\ \hline \overline{3} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{6} & \overline{1} & \overline{0}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

จะได้ $A \boxtimes B$

$$=\left[A \otimes B_{kl}\right]_{kl} \in M_{8,9}(L)$$

$$=\begin{bmatrix}A \otimes B_{11} & A \otimes B_{12} \\ A \otimes B_{21} & A \otimes B_{22}\end{bmatrix}$$

$$
=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\overline{0}B_{11} & \overline{2}B_{11} & \overline{7}B_{11} & \overline{0}B_{12} & \overline{2}B_{12} & \overline{7}B_{12} \\
\overline{5}B_{11} & \overline{6}B_{11} & \overline{3}B_{11} & \overline{5}B_{12} & \overline{6}B_{12} & \overline{3}B_{12} \\
\hline
\overline{0}B_{21} & \overline{2}B_{21} & \overline{7}B_{21} & \overline{0}B_{22} & \overline{2}B_{22} & \overline{7}B_{22} \\
\overline{5}B_{21} & \overline{6}B_{21} & \overline{3}B_{21} & \overline{5}B_{22} & \overline{6}B_{22} & \overline{7}B_{22}
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\overline{0}\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{5}\end{bmatrix} & \overline{2}\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{5}\end{bmatrix} & \overline{7}\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{5}\end{bmatrix} & \overline{0}\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{4}\\ \overline{7} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{2}\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{4}\\ \overline{7} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{7}\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{4}\\ \overline{7} & \overline{0}\end{bmatrix} \\
\overline{5}\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{5}\end{bmatrix} & \overline{6}\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{5}\end{bmatrix} & \overline{3}\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{5}\end{bmatrix} & \overline{5}\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{4}\\ \overline{7} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{6}\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{4}\\ \overline{7} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{3}\begin{bmatrix}\overline{1} & \overline{4}\\ \overline{7} & \overline{0}\end{bmatrix} \\
\hline
\overline{0}\begin{bmatrix}\overline{3}\\ \overline{6}\end{bmatrix} & \overline{2}\begin{bmatrix}\overline{3}\\ \overline{6}\end{bmatrix} & \overline{7}\begin{bmatrix}\overline{3}\\ \overline{6}\end{bmatrix} & \overline{0}\begin{bmatrix}\overline{2} & \overline{2}\\ \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{2}\begin{bmatrix}\overline{2} & \overline{2}\\ \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{7}\begin{bmatrix}\overline{2} & \overline{2}\\ \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix} \\
\overline{5}\begin{bmatrix}\overline{3}\\ \overline{6}\end{bmatrix} & \overline{6}\begin{bmatrix}\overline{3}\\ \overline{6}\end{bmatrix} & \overline{3}\begin{bmatrix}\overline{3}\\ \overline{6}\end{bmatrix} & \overline{5}\begin{bmatrix}\overline{2} & \overline{2}\\ \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{6}\begin{bmatrix}\overline{2} & \overline{2}\\ \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix} & \overline{3}\begin{bmatrix}\overline{2} & \overline{2}\\ \overline{1} & \overline{0}\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{2}\\ \bar{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{7}\\ \bar{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{8}\\ \bar{6} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{7} & \bar{4}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}\bar{5}\\ \bar{1}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{6}\\ \bar{6}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{3}\\ \bar{7}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{5} & \bar{4}\\ \bar{3} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{2} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{3} & \bar{4}\\ \bar{5} & \bar{0}\end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{6}\\ \bar{4}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{5}\\ \bar{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{4} & \bar{4}\\ \bar{2} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{6} & \bar{6}\\ \bar{7} & \bar{0}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}\bar{7}\\ \bar{6}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{2}\\ \bar{4}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{9}\\ \bar{2}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{5} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{4} & \bar{4}\\ \bar{6} & \bar{0}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\bar{6} & \bar{6}\\ \bar{3} & \bar{0}\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|cccccc}
\bar{0} & \bar{2} & \bar{7} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{8} & \bar{7} & \bar{4} \\
\bar{0} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\
\bar{5} & \bar{6} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} \\
\bar{1} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{5} & \bar{0} \\
\hline
\bar{0} & \bar{6} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{6} \\
\bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{7} & \bar{0} \\
\bar{7} & \bar{2} & \bar{9} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{6} \\
\bar{6} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0}
\end{array}\right] \in M_{8,9}(L)
$$

4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์

<u>ทฤษฎีบท 4.2.1</u> ให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ L ที่มีขนาดและการแบ่งบล็อกที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย และให้ $\mu \in L$ จะได้ว่า

(1) $(\mu A)\boxtimes B = A\boxtimes(\mu B) = \mu(A\boxtimes B)$

(2) $A\boxtimes(B+C) = A\boxtimes B + A\boxtimes C$

(3) $(A+B)\boxtimes C = A\boxtimes C + B\boxtimes C$

(4) $A\boxtimes(B\boxtimes C) = (A\boxtimes B)\boxtimes C$

(5) $(A\boxtimes B)^T = A^T \boxtimes B^T$

(6) $\operatorname{tr}(A\boxtimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

<u>บทพิสูจน์</u>

(1) $(\mu A)\boxtimes B = A\boxtimes(\mu B)=\mu(A\boxtimes B)$

ให้ $A\in M_{m,n}(L),\ B\in M_{p,q}(L)$ โดย $B=[B_{kl}]$

โดย ทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(\mu A)\boxtimes B &= [(\mu A)\otimes B_{kl}]_{kl} \\
&= [A\otimes(\mu B_{kl})]_{kl} \\
&= A\boxtimes(\mu B) \\
&= \mu[A\otimes B_{kl}]_{kl} \\
&= \mu(A\boxtimes B)
\end{aligned}
$$

(2) $A\boxtimes(B+C)=A\boxtimes B + A\boxtimes C$

ให้ $A\in M_{m,n}(L),\ B,C\in M_{p,q}(L)$ โดย $B=[B_{kl}]$ และ $C=[C_{kl}]$

จะได้ $B+C=[B_{kl}+C_{kl}]$

โดย ทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
A\boxtimes(B+C) &= [A\otimes(B_{kl}+C_{kl})]_{kl} \\
&= [A\otimes B_{kl}+A\otimes C_{kl}]_{kl} \\
&= [A\otimes B_{kl}]_{kl}+[A\otimes C_{kl}]_{kl} \\
&= A\boxtimes B + A\boxtimes C
\end{aligned}
$$

(3) $(A+B)\boxtimes C = A\boxtimes C + B\boxtimes C$

ให้ $A,B\in M_{m,n}(L),\ C\in M_{p,q}(L)$ โดย $C=[C_{kl}]$

โดย ทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A+B)\boxtimes C &= [(A+B)\otimes C_{kl}]_{kl}\\ &= [A\otimes C_{kl} + B\otimes C_{kl}]_{kl}\\ &= [A\otimes C_{kl}]_{kl} + [B\otimes C_{kl}]_{kl}\\ &= A\boxtimes C + B\boxtimes C\end{aligned}$$

(4) $A\boxtimes(B\boxtimes C) = (A\otimes B)\boxtimes C$

ให้ A,B,C เป็นเมทริกซ์ขนาดใดๆ ที่มีสมาชิกมาจากกึ่งริงสลับที่

เขียน $B=\left[B_{ij}\right],\ C=[C_{kl}]$

$$\begin{aligned}A\boxtimes(B\boxtimes C) &= A\boxtimes[B\otimes C_{kl}]_{kl}\\ &= \left[A\otimes(B\otimes C_{kl})\right]_{kl}\\ &= [(A\otimes B)\otimes C_{kl}]_{kl}\\ &= (A\otimes B)\boxtimes C\end{aligned}$$

(5) $(A\boxtimes B)^T = A^T\boxtimes B^T$

ให้ $A\in M_{m,n}(L),\ B\in M_{p,q}(L)$ โดย $B=[B_{kl}]$

โดย ทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A\boxtimes B)^T &= \left([A\otimes B_{kl}]_{kl}\right)^T\\ &= \left[A^T\otimes(B_{kl})^T\right]_{kl}\\ &= \left[A^T\otimes\left[(B_{kl})^T\right]\right]_{kl}\\ &= A^T\boxtimes B^T\end{aligned}$$

(6) $\operatorname{tr}(A \boxtimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

ให้ $A \in M_{m,n}(L),\ B \in M_{p,q}(L)$ โดย $B = [B_{kl}]$ จะได้

$$
\begin{aligned}
A \boxtimes B &= [A \boxtimes B_{kl}]_{kl} \\
&= \begin{bmatrix} A \otimes B_{11} & A \otimes B_{12} & \cdots & A \otimes B_{1n} \\ A \otimes B_{21} & A \otimes B_{22} & \cdots & A \otimes B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A \otimes B_{n1} & A \otimes B_{n2} & \cdots & A \otimes B_{nn} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

โดย ทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A \boxtimes B) &= \sum_n \operatorname{tr}(A \otimes B_{nn}) \\
&= \sum_n \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B_{nn}) \\
&= \operatorname{tr}(A)\sum_n \operatorname{tr}(B_{nn}) \\
&= \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)
\end{aligned}
$$

<u>**ทฤษฎีบท 4.2.2**</u> ให้ A, B เป็นเมทริกซ์ขนาดใดๆ ที่มีสมาชิกมาจากกึ่งริงสลับที่ L โดย $B = [B_{ij}]_{ij}$ เราแบ่งกลุ่มเมทริกซ์ย่อยของ B เป็นดังนี้

$$
B = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
B_{11} & \cdots & B_{1l_1} & \cdots & B_{1,l-l_q+1} & \cdots & B_{1l} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
B_{k_1 1} & \cdots & B_{k_1 l_1} & \cdots & B_{k_1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k_1 l} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
B_{k-k_p+1,1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l_1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
B_{k1} & \cdots & B_{kl_1} & \cdots & B_{k,l-l_q+1} & \cdots & B_{kl}
\end{array}\right] = \begin{bmatrix} \widehat{B}_{11} & \cdots & \widehat{B}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{B}_{k1} & \cdots & \widehat{B}_{kl} \end{bmatrix}
$$

ซึ่ง $\sum_{i=1}^{p} k_i = k$ และ $\sum_{j=1}^{q} l_j = l$

จะได้ว่า $$A \boxtimes B = \left[A \boxtimes \hat{B}_{ij} \right]_{ij}$$

<u>บทพิสูจน์</u> $A \boxtimes B = \left[A \otimes B_{ij} \right]_{ij}$

$$= \begin{bmatrix} A \otimes B_{11} & \cdots & A \otimes B_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A \otimes B_{i1} & \cdots & A \otimes B_{ij} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A \boxtimes \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1l_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k_1 1} & \cdots & B_{k_1 l_1} \end{bmatrix} & \cdots & A \boxtimes \begin{bmatrix} B_{1,l-l_q+1} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k_1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k_1 l} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A \boxtimes \begin{bmatrix} B_{k-k_p+1,1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kl_1} \end{bmatrix} & \cdots & A \boxtimes \begin{bmatrix} B_{k-k_p+1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k,l-l_q+1} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A \boxtimes \hat{B}_{11} & \cdots & A \boxtimes \hat{B}_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A \boxtimes \hat{B}_{i1} & \cdots & A \boxtimes \hat{B}_{ij} \end{bmatrix}$$

$$= \left[A \boxtimes \hat{B}_{ij} \right]_{ij}$$

<u>ทฤษฎีบท 4.2.3</u>

(1) $I_m \boxtimes I_n = I_{mn}$ เมื่อเราแบ่งบล็อกของ I_n ให้มีบล็อกย่อยในแนวทแยงมุมเป็นเมทริกซ์จัตุรัส

(2) $A \boxtimes 0 = 0 \boxtimes A = 0$

<u>บทพิสูจน์</u>

(1) $I_m \boxtimes I_n = I_{mn}$

ให้ $I_{n_{kl}}$ เป็นบล็อกย่อยที่ (k,l) ของ I_n

สำหรับแต่ละ $k = 1,..., p$ และ $l = 1,..., p$

$$I_{n_{kl}} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ I_{n_l}, & k = l \end{cases} \text{ โดย } \sum_{l=1}^{p} n_l = n$$

$$\begin{aligned}
I_m \boxtimes I_n &= \left[I_m \otimes I_{n_{kl}} \right]_{kl} \\
&= \begin{bmatrix} I_m \otimes I_{n_{11}} & I_m \otimes 0 & \dots & I_m \otimes 0 \\ I_m \otimes 0 & I_m \otimes I_{n_{22}} & \dots & I_m \otimes 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m \otimes 0 & I_m \otimes 0 & \cdots & I_m \otimes I_{n_{kl}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_m \otimes I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_m \otimes I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_m \otimes I_{nl} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} diag\left(I_{n_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & diag\left(I_{n_2}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & diag\left(I_{n_l}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= I_{mn}
\end{aligned}$$

(2) $A \boxtimes 0 = 0 \boxtimes A = 0$

$$0 \boxtimes A = \left[0 \otimes A_{kl}\right]_{kl}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \otimes A_{11} & 0 \otimes A_{12} & \cdots & 0 \otimes A_{1l} \\ 0 \otimes A_{21} & 0 \otimes A_{22} & \cdots & 0 \otimes A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \otimes A_{k1} & 0 \otimes A_{k2} & \cdots & 0 \otimes A_{kl} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

$$A \boxtimes 0 = \left[A \otimes 0_{kl}\right]_{kl}$$

$$= \begin{bmatrix} A \otimes 0_{11} & A \otimes 0_{12} & \cdots & A \otimes 0_{1l} \\ A \otimes 0_{21} & A \otimes 0_{22} & \cdots & A \otimes 0_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A \otimes 0_{k1} & A \otimes 0_{k2} & \cdots & A \otimes 0_{kl} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

4.3 สมบัติการคูณแบบผสมของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก

<u>ทฤษฎีบท 4.3.1</u> ให้ $A\in M_{m,n}(L),\ C\in M_{n,p}(L), B=[B_{kl}]\in M_{q,r},$ $D=[D_{kl}]\in M_{r,s}$ แล้ว

$$(A\boxtimes B)(C\boxtimes D)=(AC)\boxtimes(BD)$$

<u>บทพิสูจน์</u> $(A\boxtimes B)(C\boxtimes D)$

$$=\begin{bmatrix} A\otimes B_{11} & \cdots & A\otimes B_{1r_v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A\otimes B_{q_u1} & \cdots & A\otimes B_{q_ur_v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\otimes D_{11} & \cdots & C\otimes D_{1s_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C\otimes D_{r_x1} & \cdots & C\otimes D_{r_xs_y}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (A\otimes B_{11})(C\otimes D_{11})+\ldots+(A\otimes B_{1r_v})(C\otimes D_{r_x1}) & \cdots & (A\otimes B_{11})(C\otimes D_{1s_y})+\ldots+(A\otimes B_{1r_v})(C\otimes D_{r_xs_y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A\otimes B_{q_u1})(C\otimes D_{11})+\ldots+(A\otimes B_{1r_v})(C\otimes D_{11}) & \cdots & (A\otimes B_{q_u1})(C\otimes D_{1s_y})+\ldots+(A\otimes B_{q_ur_v})(C\otimes D_{r_xs_y})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (AC\otimes B_{11}D_{11})+\ldots+(AC\otimes B_{1r_v}D_{r_x1}) & \cdots & (AC\otimes B_{11}D_{1s_y})+\ldots+(AC\otimes B_{1r_v}D_{r_xs_y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (AC\otimes B_{q_u1}D_{11})+\ldots+(AC\otimes B_{1r_v}D_{11}) & \cdots & (AC\otimes B_{q_u1}D_{1s_y})+\ldots+(AC\otimes B_{q_ur_v}D_{r_xs_y})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} AC\otimes(B_{11}D_{11}+\ldots+B_{1r_v}D_{r_x1}) & \cdots & AC\otimes(B_{11}D_{1s_y}+\ldots+B_{1r_v}D_{r_xs_y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ AC\otimes(B_{q_u1}D_{11}+\ldots+B_{1r_v}D_{11}) & \cdots & AC\otimes(B_{q_u1}D_{1s_y}+\ldots+B_{q_ur_v}D_{r_xs_y})\end{bmatrix}$$

$$=AC\otimes\begin{bmatrix} B_{11}D_{11}+\ldots+B_{1r_v}D_{r_x1} & \cdots & B_{11}D_{1s_y}+\ldots+B_{1r_v}D_{r_xs_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q_u1}D_{11}+\ldots+B_{1r_v}D_{11} & \cdots & B_{q_u1}D_{1s_y}+\ldots+B_{q_ur_v}D_{r_xs_y}\end{bmatrix}$$

$$=AC\boxtimes BD$$

<u>บทแทรก 4.3.2</u>

(1) $\left(A_1 \boxtimes B_1\right)\left(A_2 \boxtimes B_2\right)\cdots\left(A_p \boxtimes B_p\right)=\left(A_1A_2\cdots A_p\right)\boxtimes\left(B_1B_2\cdots B_p\right)$

(2) $\left(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes\cdots\boxtimes A_p\right)\left(B_1 \boxtimes B_2 \boxtimes\cdots\boxtimes B_p\right)=\left(A_1B_1\right)\boxtimes\left(A_2B_2\right)\boxtimes\cdots\boxtimes\left(A_pB_p\right)$

<u>บทพิสูจน์</u>

(1) $\left(A_1 \boxtimes B_1\right)\left(A_2 \boxtimes B_2\right)\ldots\left(A_p \boxtimes B_p\right)=\left(A_1A_2\ldots A_p\right)\boxtimes\left(B_1B_2\ldots B_p\right)$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทน

$$\left(A_1 \boxtimes B_1\right)\left(A_2 \boxtimes B_2\right)\ldots\left(A_p \boxtimes B_p\right)=\left(A_1A_2\ldots A_p\right)\boxtimes\left(B_1B_2\ldots B_p\right)$$

เมื่อ $n=1$ จะได้ $P(1)=(A_1 \boxtimes B_1)=\left(A_1\right)\boxtimes\left(B_1\right)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $n\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(n)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\left(A_1 \boxtimes B_1\right)\left(A_2 \boxtimes B_2\right)\ldots\left(A_n \boxtimes B_n\right)=\left(A_1A_2\ldots A_n\right)\boxtimes\left(B_1B_2\ldots B_n\right)$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n+1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned}&\left(A_1 \boxtimes B_1\right)\left(A_2 \boxtimes B_2\right)\cdots\left(A_n \boxtimes B_n\right)\left(A_{n+1} \boxtimes B_{n+1}\right)\\&=\left[\left(A_1A_2\cdots A_n\right)\boxtimes\left(B_1B_2\cdots B_n\right)\right]\left(A_{n+1} \boxtimes B_{n+1}\right)\\&=\left(A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}\right)\boxtimes\left(B_1B_2\cdots B_nB_{n+1}\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\left(A_1 \boxtimes B_1\right)\left(A_2 \boxtimes B_2\right)\cdots\left(A_p \boxtimes B_p\right)=\left(A_1A_2\cdots A_p\right)\boxtimes\left(B_1B_2\cdots B_p\right)$

(2) $\left(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \cdots \boxtimes A_p\right)\left(B_1 \boxtimes B_2 \boxtimes \cdots \boxtimes B_p\right) = \left(A_1B_1\right) \boxtimes \left(A_2B_2\right) \boxtimes \cdots \boxtimes \left(A_pB_p\right)$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทน

$$\left(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \cdots \boxtimes A_p\right)\left(B_1 \boxtimes B_2 \boxtimes \cdots \boxtimes B_p\right) = \left(A_1B_1\right) \boxtimes \left(A_2B_2\right) \boxtimes \cdots \boxtimes \left(A_pB_p\right)$$

เมื่อ $n=1$ จะได้ $P(1) = \left(A_1\right)\left(B_1\right) = A_1B_1$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $n \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(n)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\left(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \cdots \boxtimes A_n\right)\left(B_1 \boxtimes B_2 \boxtimes \cdots \boxtimes B_n\right) = \left(A_1B_1\right) \boxtimes \left(A_2B_2\right) \boxtimes \cdots \boxtimes \left(A_nB_n\right)$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n+1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned}
&\left(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \cdots \boxtimes A_n \boxtimes A_{n+1}\right)\left(B_1 \boxtimes B_2 \boxtimes \cdots \boxtimes B_n \boxtimes B_{n+1}\right) \\
&= \left[\left(A_1B_1\right) \boxtimes \left(A_2B_2\right) \boxtimes \cdots \boxtimes \left(A_nB_n\right)\right] \boxtimes \left(A_{n+1}B_{n+1}\right) \\
&= \left(A_1B_1\right) \boxtimes \left(A_2B_2\right) \boxtimes \cdots \boxtimes \left(A_nB_n\right) \boxtimes \left(A_{n+1}B_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น

$$\left(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \cdots \boxtimes A_p\right)\left(B_1 \boxtimes B_2 \boxtimes \cdots \boxtimes B_p\right) = \left(A_1B_1\right) \boxtimes \left(A_2B_2\right) \boxtimes \cdots \boxtimes \left(A_pB_p\right)$$

<u>บทนิยาม 4.3.3</u> บล็อกโครเนคเคอร์ยกกำลังของ $A \in M_{m,n}(L)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k นิยามโดย

$$A^{\boxtimes 1} = A \text{ และ } A^{\boxtimes k} = A \boxtimes A^{\boxtimes (k-1)} \text{ สำหรับ } k = 2,3,\ldots$$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ กำหนด $L = \left([1,7],+,\cdot,1,7\right)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b = \max\{a,b\} \text{ และ } a \cdot b = \min\{a,b\}$$

ให้ $A = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 5.5 \\ \hline 6.9 & 4.6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in M_2(L)$ และ $k = 2 \in L$

จะได้ $A^{\boxtimes 2}$

$$= A \boxtimes A$$

$$= \begin{bmatrix} A \otimes A_{11} & A \otimes A_{12} \\ A \otimes A_{21} & A \otimes A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 4A_{11} & 5.5A_{11} & 4A_{12} & 5.5A_{12} \\ 6.9A_{11} & 4.6A_{11} & 6.9A_{12} & 4.6A_{12} \\ \hline 4A_{21} & 5.5A_{21} & 4A_{22} & 5.5A_{22} \\ 6.9A_{21} & 4.6A_{21} & 6.9A_{22} & 4.6A_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 4(4) & 5.5(4) & 4(5.5) & 5.5(5.5) \\ 6.9(4) & 4.6(4) & 6.9(5.5) & 4.6(5.5) \\ \hline 4(6.9) & 5.5(6.9) & 4(4.6) & 5.5(4.6) \\ 6.9(6.9) & 4.6(6.9) & 6.9(4.6) & 4.6(4.6) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} \min\{4,4\} & \min\{4,5.5\} & \min\{5.5,4\} & \min\{5.5,5.5\} \\ \min\{4,6.9\} & \min\{4,4.6\} & \min\{5.5,6.9\} & \min\{5.5,6.9\} \\ \hline \min\{6.9,4\} & \min\{6.9,5.5\} & \min\{4.6,4\} & \min\{4.6,4\} \\ \min\{6.9,6.9\} & \min\{6.9,4.6\} & \min\{4.6,6.9\} & \min\{4.6,6.9\} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 4 & 5.5 \\ 4 & 4 & 5.5 & 4.6 \\ \hline 4 & 5.5 & 4 & 5.5 \\ 6.9 & 4.6 & 4.6 & 4.6 \end{array}\right] \in M_4(L)$$

<u>บทแทรก 4.3.4</u> $\left[AB\right]^{\boxtimes k} = A^{\boxtimes k}B^{\boxtimes k}$

<u>บทพิสูจน์</u>

$$\begin{aligned}\left[AB\right]^{\boxtimes k} &= \underbrace{AB\boxtimes AB\boxtimes\ldots\boxtimes AB}_{k}\\ &= \underbrace{\left(A\boxtimes A\boxtimes\ldots\boxtimes A\right)}_{k}\underbrace{\left(B\boxtimes B\boxtimes\ldots\boxtimes B\right)}_{k}\\ &= A^{\boxtimes k}B^{\boxtimes k}\end{aligned}$$

<u>บทแทรก 4.3.5</u> ถ้าการคูณเมทริกซ์ในแต่ละข้อมีความหมาย จะได้ว่า

(1) $\left(A^{\boxtimes r}\right)^{s} = \left(A^{s}\right)^{\boxtimes r}$

(2) $\left(A^{\boxtimes r}\right)^{\boxtimes s} = A^{\boxtimes rs}$

(3) $A^{\boxtimes r}\boxtimes A^{\boxtimes s} = A^{\boxtimes(r+s)}$

<u>บทพิสูจน์</u>

(1)
$$\begin{aligned}\left(A^{\boxtimes r}\right)^{s} &= \underbrace{\left(A^{\boxtimes r}\right)\left(A^{\boxtimes r}\right)\cdots\left(A^{\boxtimes r}\right)}_{s}\\ &= \underbrace{\underbrace{\left(A\boxtimes A\boxtimes\cdots\boxtimes A\right)}_{r}\underbrace{\left(A\boxtimes A\boxtimes\cdots\boxtimes A\right)}_{r}\cdots\underbrace{\left(A\boxtimes A\boxtimes\cdots\boxtimes A\right)}_{r}}_{s}\\ &= \underbrace{\underbrace{\left(A\cdot A\cdots A\right)}_{s}\boxtimes\underbrace{\left(A\cdot A\cdots A\right)}_{s}\boxtimes\cdots\boxtimes\underbrace{\left(A\cdot A\cdots A\right)}_{s}}_{r}\\ &= \left(A^{s}\right)^{\boxtimes r}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}A^{\boxtimes r}\boxtimes A^{\boxtimes s} &= \underbrace{\left(A\boxtimes A\boxtimes\cdots\boxtimes A\right)}_{r}\boxtimes\underbrace{\left(A\boxtimes A\boxtimes\cdots\boxtimes A\right)}_{s}\\ &= \underbrace{A\boxtimes A\boxtimes\cdots\boxtimes A}_{r+s}\\ &= A^{\boxtimes(r+s)}\end{aligned}$$

(3) $\left(A^{\boxtimes r}\right)^{\boxtimes s}$ $= \underbrace{A^{\boxtimes r} \boxtimes A^{\boxtimes r} \boxtimes \cdots \boxtimes A^{\boxtimes r}}_{s}$

$$= \underbrace{\underbrace{(A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A)}_{r} \boxtimes \underbrace{(A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A)}_{r} \boxtimes \cdots \boxtimes \underbrace{(A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A)}_{r}}_{s}$$

$$= \underbrace{A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A}_{rs}$$

$$= A^{\boxtimes rs}$$

4.4 สมบัติเชิงโครงสร้างของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก

4.4.1 เมทริกซ์ที่นิยามจากสมบัติเชิงพีชคณิต

<u>บทนิยาม 4.4.1.1</u> ให้ $A \in M_n(L)$

A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$

A เป็นเมทริกซ์กึ่งตั้งฉาก ก็ต่อเมื่อ $A^T A = I$

A เป็นเมทริกซ์นิจพล ก็ต่อเมื่อ $A^2 = A$

A เป็นเมทริกซ์นิรพล ก็ต่อเมื่อมี $k \in \mathrm{N}$ ที่ทำให้ $A^k = 0$

A เป็นเมทริกซ์อาวัฒนาการ ก็ต่อเมื่อ $A^2 = I$

A เป็นเมทริกซ์การฉาย ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์นิจพล ซึ่ง $A = A^T = A^2$

A เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ มีเมทริกซ์ $B \in M_n(L)$ ซึ่ง $AB = I = BA$

<u>ทฤษฎีบท 4.4.1.2</u>

(1) ถ้า A และ B เป็นเป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

(2) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์กึ่งตั้งฉาก แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์กึ่งตั้งฉาก

(3) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์นิจพล แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์นิจพล

(4) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์รนิรพล แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์รนิรพล

(5) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์อาวัตนาการแล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์อาวัฒนาการ

(6) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์การฉาย แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์การฉาย

(7) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้

<u>บทพิสูจน์</u>

(1) $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์สมมาตร

นั่นคือ $A^T = A, B^T = B$

$$(A \boxtimes B)^T = A^T \boxtimes B^T$$

$$= A \boxtimes B$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

(2) $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์กึ่งตั้งฉาก

สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์กึ่งตั้งฉาก

จะได้ $A^T A = I, \quad B^T B = I$

$$(A \boxtimes B)^T (A \boxtimes B) = (A^T \boxtimes B^T)(A \boxtimes B)$$

$$= (A^T A) \boxtimes (B^T B)$$

$$= I \boxtimes I$$

$$= I$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์กึ่งตั้งฉาก

(3) $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์นิจพล

สมมติ A, B เป็น เมทริกซ์นิจพล

จะได้ $A^2 = A, \quad B^2 = B$

$$\begin{aligned}(A \boxtimes B)^2 &= (A \boxtimes B)(A \boxtimes B) \\ &= A^2 \boxtimes B^2 \\ &= A \boxtimes B\end{aligned}$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์นิจพล

(4) $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์รนิรพล

สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์นิรพล

จะได้ $A^k = 0, \quad B^l = 0$

$$\begin{aligned}(A \boxtimes B)^k &= \underbrace{(A \boxtimes B)(A \boxtimes B)\ldots(A \boxtimes B)}_{k} \\ &= \underbrace{(AA\ldots A)}_{k} \boxtimes \underbrace{(BB\ldots B)}_{k} \\ &= A^k \boxtimes B^k \\ &= 0 \boxtimes B^k \\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์รนิรพล

(5) $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์อาวัฒนาการ

สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์อาวัตนาการ

จะได้ $A^2 = I, \quad B^2 = I$

$$(A \boxtimes B)^2 = (A \boxtimes B)(A \boxtimes B)$$

$$= (AA) \boxtimes (BB)$$

$$= I \boxtimes I = I$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์อาวัฒนาการ

(6) $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์การฉาย

สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์การฉาย

จากข้อ 1 และ 3 จะได้ว่า

$A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร และ เมทริกซ์นิจพล

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์การฉาย

(7) $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้

สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์หาผกผันได้

จะได้ $A^{-1}A = I, \quad B^{-1}B = I$ และ

$$(A \boxtimes B)(A^{-1} \boxtimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \boxtimes (BB^{-1})$$

$$= I \boxtimes I$$

$$= I$$

$$(A^{-1} \boxtimes B^{-1})(A \boxtimes B) = (A^{-1}A) \boxtimes (B^{-1}B)$$

$$= I \boxtimes I$$

$$= I$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้

4.4.2 เมทริกซ์ที่นิยามจากแนวทแยงมุม

บทนิยาม 4.4.2.1 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n(L)$

A จะเรียกว่าเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ เมื่อ $i\neq j$

A จะเรียกว่าเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ เมื่อ $i>j$

A จะเรียกว่าเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ เมื่อ $i<j$

ทฤษฎีบท 4.4.2.2 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_m(L),\ B=\left[b_{ij}\right]\in M_n(L)$

(1) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนแล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

(2) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

(3) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

บทพิสูจน์

(1) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนแล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

ให้ A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน จะได้ว่า

$$A\otimes B=\left[a_{ij}B\right]$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B & \cdots & a_{1m}B \\ 0 & a_{22}B & a_{23}B & \cdots & a_{2m}B \\ 0 & 0 & a_{33}B & \cdots & a_{3m}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & a_{13}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{1m}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\
0 & a_{22}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & a_{23}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{2m}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\
0 & 0 & a_{33}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{3m}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\begin{matrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ 0 & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{11}b_{nn} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{12}b_{1n} \\ 0 & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{12}b_{nn} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} a_{1m}b_{11} & a_{1m}b_{12} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\ 0 & a_{1m}b_{22} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1m}b_{nn} \end{matrix} \\
0 & \begin{matrix} a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{22}b_{1n} \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{22}b_{nn} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} a_{2m}b_{11} & a_{2m}b_{12} & \cdots & a_{2m}b_{1n} \\ 0 & a_{2m}b_{22} & \cdots & a_{2m}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2m}b_{nn} \end{matrix} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} a_{mm}b_{11} & a_{mm}b_{12} & \cdots & a_{mm}b_{1n} \\ 0 & a_{mm}b_{22} & \cdots & a_{mm}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}b_{nn} \end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{12}b_{1n} & \cdots & a_{1m}b_{11} & a_{1m}b_{12} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\
0 & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & 0 & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{2n} & \cdots & 0 & a_{1m}b_{22} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{11}b_{nn} & 0 & 0 & \cdots & a_{12}b_{nn} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{1m}b_{nn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{22}b_{1n} & \cdots & a_{2m}b_{11} & a_{2m}b_{12} & \cdots & a_{2m}b_{1n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} & \cdots & 0 & a_{2m}b_{22} & \cdots & a_{2m}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{22}b_{nn} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{2m}b_{nn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{mm}b_{11} & a_{mm}b_{12} & \cdots & a_{mm}b_{1n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{mm}b_{22} & \cdots & a_{mm}b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mm}b_{nn}
\end{bmatrix}
$$

ดังนั้น ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน แล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

(2) ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง จะได้ว่า A^T, B^T เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

จาก (1) จะได้ว่า $A^T \otimes B^T$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

พิจารณา $\left(A^T \otimes B^T\right)^T = \left(A^T\right)^T \otimes \left(B^T\right)^T$

$$= A \otimes B$$

จะเห็นว่า $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

ดังนั้น ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

(3) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ให้ A,B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ดังนั้น ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้ว $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>ทฤษฎีบท 4.4.2.3</u> ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_m(L), B=\left[b_{ij}\right]\in M_n(L)$ และเมื่อเราแบ่งบล็อกของ B ให้มีบล็อกย่อยในแนวทแยงมุมเป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า

(1) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

(2) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

(3) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>บทพิสูจน์</u>

(1) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

ให้ A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$\text{ซึ่ง } B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \hline 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

พิจารณา $A\boxtimes B=\left[A\otimes B_{kl}\right]_{kl}$

$$= \begin{bmatrix} A\otimes B_{11} & A\otimes B_{12} & \cdots & A\otimes B_{1l} \\ A\otimes B_{21} & A\otimes B_{22} & \cdots & A\otimes B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\otimes B_{k1} & A\otimes B_{k2} & \cdots & A\otimes B_{kl} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\otimes\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} & A\otimes\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} & \cdots & A\otimes\begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \end{bmatrix} \\ A\otimes\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & A\otimes\begin{bmatrix} b_{33} \end{bmatrix} & \cdots & A\otimes\begin{bmatrix} b_{3n} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A\otimes\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & A\otimes\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \cdots & A\otimes\begin{bmatrix} b_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\otimes B_{11} & A\otimes B_{12} & \cdots & A\otimes B_{1l} \\ 0 & A\otimes B_{22} & \cdots & A\otimes B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A\otimes B_{kl} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

ดังนั้น ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

(2) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

ให้ A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

จะได้ว่า A^T, B^T เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

จาก (1) จะได้ว่า $A^T\boxtimes B^T$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

พิจารณา $\left(A^T\boxtimes B^T\right)^T = \left(A^T\right)^T\boxtimes\left(B^T\right)^T$

$$= A\boxtimes B$$

จะเห็นว่า $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

ดังนั้น ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

(3) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ให้ A,B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ดังนั้น ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

บทที่ 5

ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่และตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก

5.1 บทนิยาม ตัวอย่างและสมบัติของตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ โดย A_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ A เรานิยาม

$$vec(A) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \in L^{mn}$$

ตัวอย่าง กำหนด $L = ([0,2], +, \cdot, 0, 2)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \max\{a, b\} \text{ และ } a \cdot b = \min\{a, b\}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 2 & 0.9 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ $vec(A) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1.5 \\ 0.9 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 5.1.2 $vec : M_{m,n}(L) \to L^{mn}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง และ

(1) $vec(A + B) = vec(A) + vec(B)$

(2) $vec(kA) = k\,vec(A)$

สำหรับ $A, B \in M_{m,n}(L)$ และ $k \in L$

<u>ทฤษฎีบท 5.1.3</u> ถ้า $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ และ $C \in M_{p,n}(L)$ แล้ว

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A) vec(B)$$

<u>บทนิยาม 5.1.4</u> ให้ $A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(L)$ ซึ่ง A_{ij} มีขนาด $m_i \times n_j$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$ และ $\sum_{j=1}^{s} n_j = m$ เรานิยาม

$$vecb_r A = \begin{bmatrix} vec(A_{11}) \\ \vdots \\ vec(A_{1s}) \\ vec(A_{21}) \\ \vdots \\ vec(A_{2s}) \\ \vdots \\ vec(A_{r1}) \\ \vdots \\ vec(A_{rs}) \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = ([0,2], +, \cdot, 0, 2)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \max\{a,b\} \text{ และ } a \cdot b = \min\{a,b\}$$

ให้ $A = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 2 & 1.4 \\ 0.7 & 0.08 & 1.23 \\ \hline 1.7 & 1 & 1.99 \end{array}\right] \in M_3(L)$

นั่นคือ $A_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \end{bmatrix}_{2\times1}, A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1.4 \\ 0.08 & 1.23 \end{bmatrix}_{2\times2}, A_{21} = [1.7]_{1\times1}$ และ $A_{22} = [1 \quad 1.99]_{1\times2}$

$$\text{จะได้ } vecb_r(A) = \begin{bmatrix} vec(A_{11}) \\ vec(A_{12}) \\ vec(A_{21}) \\ vec(A_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 2 \\ 0.08 \\ 1.4 \\ 1.23 \\ 1.7 \\ 1 \\ 1.99 \end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีบท 5.1.5</u> $vecb_r : M_{m,n}(L) \to L^{mn}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงว่า $vecb_r$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $A, B \in M_{m,n}(L)$

เขียน $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{bmatrix}$

สมมติว่า $vecb_r(A) = vecb_r(B)$

$$\text{นั่นคือ } \begin{bmatrix} vec(A_{11}) \\ \vdots \\ vec(A_{1s}) \\ \vdots \\ vec(A_{rs}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vec(B_{11}) \\ \vdots \\ vec(B_{1s}) \\ \vdots \\ vec(B_{rs}) \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $vec(A_{ij}) = vec(B_{ij}) \qquad \forall i, j$

เนื่องจาก vec เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $A_{ij} = B_{ij} \qquad \forall i, j$

$$\text{ดังนั้น } A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{bmatrix} = B$$

นั่นคือ $vecb_r$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะแสดงว่า $vecb_r$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $y \in L^{mn}$ ซึ่ง $y = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

พิจารณา $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} & & a_{1(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1 1} & \cdots & a_{m_1 n_1} & & a_{m_1(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} & \cdots & a_{m_1 n} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)1} & \cdots & a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)n_1} & & a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} & \cdots & a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn_1} & & a_{m(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

จะได้ $vecb_r(A) = \begin{bmatrix} vec(A_{11}) \\ \vdots \\ vec(A_{1s}) \\ \vdots \\ vec(A_{r1}) \\ \vdots \\ vec(A_{rs}) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m_1 1} \\ \vdots \\ a_{1n_1} \\ \vdots \\ a_{m_1 n_1} \\ \vdots \\ a_{1(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} \\ \vdots \\ a_{m_1(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m_1 n} \\ \vdots \\ a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)1} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)n_1} \\ \vdots \\ a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} \\ \vdots \\ a_{(m_1+\ldots+m_{r-1}+1)n} \\ \vdots \\ a_{m(n_1+\ldots+n_{s-1}+1)} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = y$$

นั่นคือ $vecb_r$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ดังนั้น $vecb_r : M_{m,n}(L) \to L^{mn}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกกับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก

__ทฤษฎีบท 5.2.1__ ถ้า $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ และ $C \in M_{p,n}(L)$ แล้ว

$$vecb_r\left(BCA^T\right) = (A \boxtimes B)vecb_r(C)$$

<u>บทพิสูจน์</u>

พิจารณา $B\left(CA^T\right) = \begin{bmatrix} row_1(B) \\ row_2(B) \\ \vdots \\ row_p(B) \end{bmatrix}\left(CA^T\right) = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix}\left(CA^T\right) = \begin{bmatrix} B_1CA^T \\ B_2CA^T \\ \vdots \\ B_pCA^T \end{bmatrix}$

จะได้ แถวที่ k ของ B คือ $\begin{bmatrix} B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix}$

พิจารณาแถวที่ k ของ BCA^T

จะได้ $\left(BCA^T\right)_k = B_kCA^T$

$$= \left(\begin{bmatrix} B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_l \end{bmatrix}\right)A^T$$

$$= \left(B_{k1}C_1 + B_{k2}C_2 + \ldots + B_{kl}C_l\right)A^T$$

$$= \left(\sum B_{kl}C_l\right)A^T$$

$$= \sum B_{kl}C_lA^T$$

ดังนั้น $\left(BCA^T\right)_k = \sum B_{kl}C_lA^T$

พิจารณา $vec\left(BCA^T\right)_k$

$$= vec\left(\sum B_{kl}C_lA^T\right)$$

$$= \sum vec\left(B_{kl}C_lA^T\right)$$

$$= \sum \left(A\otimes B_{kl}\right)vec\left(C_l\right)$$

$$= \left(A\otimes B_{k1}\right)vec\left(C_1\right)+\left(A\otimes B_{k2}\right)vec\left(C_2\right)+\ldots+\left(A\otimes B_{kl}\right)vec\left(C_l\right)$$

$$= \begin{bmatrix} A\otimes B_{k1} & A\otimes B_{k2} & \cdots & A\otimes B_{kl}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} vec\left(C_1\right) \\ vec\left(C_2\right) \\ \vdots \\ vec\left(C_l\right)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\otimes B_{k1} & A\otimes B_{k2} & \cdots & A\otimes B_{kl}\end{bmatrix}vecb_r\left(C\right)$$

จะได้ $vec\left(BCA^T\right)_k = \begin{bmatrix} A\otimes B_{k1} & A\otimes B_{k2} & \cdots & A\otimes B_{kl}\end{bmatrix}vecb_r\left(C\right)$

นั่นคือ $vecb_r\left(BCA^T\right) = \begin{bmatrix} vec\left(BCA^T\right)_1 \\ vec\left(BCA^T\right)_2 \\ \vdots \\ vec\left(BCA^T\right)_k \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A\otimes B_{11} & A\otimes B_{12} & \cdots & A\otimes B_{1l}\end{bmatrix}vecb_r\left(C\right) \\ \begin{bmatrix} A\otimes B_{21} & A\otimes B_{22} & \cdots & A\otimes B_{2l}\end{bmatrix}vecb_r\left(C\right) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} A\otimes B_{k1} & A\otimes B_{k2} & \cdots & A\otimes B_{kl}\end{bmatrix}vecb_r\left(C\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\otimes B_{11} & A\otimes B_{12} & A\otimes B_{1l} \\ A\otimes B_{21} & A\otimes B_{22} & A\otimes B_{2l} \\ & & \\ A\otimes B_{k1} & A\otimes B_{k2} & A\otimes B_{kl} \end{bmatrix}vecb_r\left(C\right)$$

$$= (A\boxtimes B)vecb_r\left(C\right)$$

ดังนั้น $vecb_r\left(BCA^T\right) = (A\boxtimes B)vecb_r\left(C\right)$

5.3 การประยุกต์กับสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ และ $C \in M_{m,q}(L)$

พิจารณาสมการเมทริกซ์เชิงเส้น $AXB = C$ ---------- (1) เมื่อ $X \in M_{n,p}(L)$

จะได้ $vecb_r(AXB) = vecb_r(C)$

จาก ทฤษฎีบท 5.2.1 จะได้ $(B^T \boxtimes A)vecb_r(X) = vecb_r(C)$ -----------(2)

พิจารณาสมการ (1) จะเห็นว่าเป็นสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ถ้าเมทริกซ์มีขนาดใหญ่หรือซับซ้อนจะคำนวณได้ยากและใช้เวลานาน ดังนั้นสมการ (2) ซึ่งเป็นสมการเวกเตอร์-เมทริกซ์ สามารถแก้สมการได้ง่ายกว่า เนื่องจากเป็นการคูณระหว่างเมทริกซ์กับเวกเตอร์ เมื่อเราหาผลเฉลย $vecb_r(X)$ จากสมการ (2) ได้ เราจะหา X ได้ เนื่องจาก $vecb_r$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เอกสารอ้างอิง

[1] ช่อฟ้า นิลรัตน์. 2533. **พีชคณิตนามธรรม.** กรุงเทพมหานคร.

[2] Horn, R.A. and Johnson, C.R. 1991. **Topics in matrix analysis.** Cambridge. The Press Syndicate of the University of Cambridge.

[3] Ruud, H.K, Heinz, N and Tom, W. 1991. "Block Kronecker products and vecb operator." *Elsevier Science.* 191(149) : 165-184

[4] Stangam, R. and Chansangiam, P. 2016. "Kronecker Product of Matrices over a Commutative Semiring." *Thai Journal of Mathematics.* 14(1) : 21-38

[5] Zhang, H. and Ding, F. 2013. "On the Kronecker Products and Their Applications." *Journal of Applied Mathematics.* vol. 2013. Article ID 296185. 8 pages.

[6] Zhao, S. and Wang, X.P. 2010. "Invertible matrices and semilinear spaces over commutative semirings." *Information Sciences.* 48(24) : 5115-5124

[7] Zhour, Z.A. and Kilicman, A. 2007. "Some new connections between matrix products for partitioned and non-partitioned matrices." *Computer & Mathematics with Applications.* 41(6) : 763-784