

NUMERICAL SIMULATIONS FOR THIN FILM FLOW VIA NONLINEAR
MODEL OF THIRD GRADE FLUID ON MOVING BELTS



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE
REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

(APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2019

KMITL-2019-SC-M-001-081

NUMERICAL SIMULATIONS FOR THIN FILM FLOW VIA NONLINEAR
MODEL OF THIRD GRADE FLUID ON MOVING BELTS



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE
REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
(APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2019

KMITL-2019-SC-M-001-081

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2019

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis Title	Numerical Simulations for Thin Film Flow Via Nonlinear Model of Third Grade Fluid on Moving Belts
Student	Miss Pantira Klankaew
Student ID	59605109
Degree	Master of science (Applied Mathematics)
Year	2019
Thesis Advisor	Asst. Prof. Dr. Nopparat Pochai

Abstract

The behavior of thin fluid film flow on moving belt equipment often used in engineering. The thin film flow velocity on moving belts approximation is modeled to be a nonlinear ordinary differential equation. The models are provides the thin fluid film flow velocity in each thickness layers. In this research, numerical simulations for thin fluid film flow velocity nonlinear model of third grade fluid on moving belts are proposed. Therefore, numerical simulations of the model is focused on two paralleled moving belts model and a single moving belt model with varied physical parameters and external accelerated force are investigated. The proposed methods are combinations of finite difference methods and Newton iterative method, quasi-Newton iterative method, respectively. The proposed numerical techniques give good agreement approximated solutions in several moving belt speed.

Keywords : finite difference techniques, flow velocity, moving belt, Newton iterative techniques, Quasi-Newton techniques, thin fluid film, third grade fluid

Acknowledgements

I would like to express my sincere thanks to my thesis advisor, Asst.Prof.Dr. Nopparat Pochai who gave me valuable advice and constant encouragement throughout the course of this research. I am most grateful for teaching and advice, not only in the research methodologies but also many other methodologies in my life. I would not have achieved this far and this thesis would not have been completed without all the support that I have always received from advisor.

I would like to express gratitude to my thesis committees, Asst.Prof.Dr. Jaipong Kasemsuwan for insightful comments and suggestions. Then I greatly appreciate my external committee, Assoc.Prof.Dr. Suwon Tangmanee from the Centre of Excellence in Mathematics Program of the Commission on Higher Education (CHE) for his valuable comments and suggestions.

My sincere thanks to the Department of Mathematics, Faculty of Science, Research Administration Division scholarship of King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, and the Centre of Excellence in Mathematics Program of the Commission on Higher Education (CHE) for the financial supports during the study of thesis and the opportunity to research effectively.

I would like to thank my friends for their feedback and friendship. In particular, I am very thankful to Dr. Pravitra Oyjinda, Dr. Kewalee Suebyat and Mr. Wasu Timpitak for supporting program and encouraging me in all the time of research. This achievement would not have been possible without them.

Finally, I would like to thank my family: my parent, and my sister for unfailing support and continuous encouragement throughout researching and writing this thesis.

Pantira Klankaew

Table of Contents

	Page
Abstract in English	i
Acknowledgements	ii
Table of Contents.....	iii
List of Tables	vi
List of Figures.....	x
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Research motivation	1
1.2 Literature reviews	4
1.3 Objectives of the thesis	5
1.4 Research methodology	6
1.5 Scopes of the thesis	6
1.6 Expected results	7
Chapter 2 Basic Knowledge and Governing Equations	8
2.1 Non-Newtonian Fluid	8
2.2 Types of Non-Newtonian Fluid	8
2.2.1 First grade fluid	8
2.2.1.1 Generalized Newtonian fluids	8
2.2.1.2 Shear thinning (pseudoplastic)	9
2.2.1.3 Shear thickening (dilatant)	9
2.2.2 Second grade fluid	10
2.2.2.1 Thixotropic	10
2.2.2.2 Rheopcty	10
2.2.3 Third grade fluid	11
2.2.3.1 Kelvin material, Maxwell material	11
2.3 Governing Equations	11
2.3.1 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a between paralleled moving belt	11
2.3.2 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a single moving belts	12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 3 Numerical method for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts and single moving belt	14
3.1 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model.....	14
3.1.1 The thin film flow of third grade fluid on a moving belt is governed by the following nonlinear boundary value problem.	14
3.1.2 Boundary conditions of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model.....	15
3.1.3 Finite difference method for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model.....	16
3.1.4 Newton iterative method for nonlinear finite difference method of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model.....	17
3.2 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model.....	18
3.2.1 Governing equation of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model.....	18
3.2.2 Boundary conditions of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model.....	18
3.2.3 Finite difference method for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model.....	19
3.2.4 Newton iterative method for nonlinear finite difference method of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model.....	21
3.2.5 Quasi-Newton iterative method for nonlinear finite difference method of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model.....	22
Chapter 4 Numerical experiment of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts and a single moving belts.....	24
4.1 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model.....	24
4.2 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model with Newton iterative method.....	32
4.3 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model with quasi-Newton iterative method	39

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 5 Discussion and conclusion.....	56
5.1 Discussion.....	56
5.1.1 Paralleled moving belts.....	56
5.1.2 Single moving belt with the Newton iterative techniques.....	57
5.1.3 Single moving belt with the Quasi-Newton iterative techniques	60
5.2 conclusion.....	63
References.....	64
Appendices.....	65
Appendix A : . Research Papers.....	66
Author Biography.....	77



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

List of Tables

Table	Page
4.1 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.5$ and $\beta = 0.25$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54
4.2 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.5$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54
4.3 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.5$ and $\beta = 0.75$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54
4.4 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.125$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54
4.5 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.25$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54
4.6 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.75$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54
4.7 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54
4.8 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	54

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 4.9 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods..... 54
- 4.10 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods..... 54
- 4.11 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods. 54
- 4.12 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods. 54
- 4.13 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods..... 54
- 4.14 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods..... 47
- 4.15 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods. 48
- 4.16 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods. 49

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.17	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.	50
4.18	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.	51
4.19	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.	52
4.20	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.	37
5.1	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each physical parameters m and β by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.....	54
5.2	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.	56
5.3	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.....	57
5.4	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton Iterative methods.	58
5.5	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton Iterative methods.....	59

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 5.6 Comparison of nondimensional thin film flow velocity using OHAM, ADM, NM, Newton iterative, Quasi-Newton iterative for $m=0.5$ and $\beta=0.5...$ 60



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

List of Figures

Figure	Page
1.1 Oil Skimmer	2
1.2 Construction of oil skimmer.....	4
2.1 Water.....	9
2.2 Blood	9
2.3 Suspensions of cornstarch in water	9
2.4 Yogurt	10
2.5 Printer ink	10
2.6 Lubricant	11
2.7 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a between paralleled moving belts	12
2.8 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a single moving belt	13
3.1 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a between paralleled moving belts	15
3.2 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a single moving belt	18
4.1 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.5$ and $\beta = 0.25$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.	25
4.2 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.5$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.	26
4.3 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.5$ and $\beta = 0.75$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.	27
4.4 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.125$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.	28

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.25$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.	29
4.6	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belts with $m = 0.75$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.	30
4.7	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	31
4.8	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	32
4.9	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	33
4.10	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.	34
4.11	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	35
4.12	Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.....	36

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 4.13 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods..... 37
- 4.14 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods. 47
- 4.15 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods..... 48
- 4.16 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods..... 49
- 4.17 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods..... 50
- 4.18 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods..... 51
- 4.19 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods..... 52
- 4.20 Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.....	37
5.1	Comparison of thin film flow velocity ($m = 0.50$)	55
5.2	Comparison of thin film flow velocity ($\beta = 0.50$)	55
5.3	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ using the finite difference methods and Newton Iterative methods.....	56
5.4	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ using the finite difference methods and Newton Iterative methods.	57
5.5	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ using the finite difference methods and Quasi-Newton Iterative methods.	58
5.6	Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ using the finite difference methods and Quasi-Newton Iterative methods.	59

Chapter 1

Introduction

1.1 Research motivation

In just about every industrial process on earth, whether it's making steel or cosmetics, food processing, mining, railroads, or construction, water plays an important part of a company's operations. Similarly, in most, if not all of those same industries, oil plays some kind of role. It may be lubrication oil, fuel oil, or the process itself may consume or produce oil - such as in chemical plants and oil refineries. Chances are, at some point, water comes into contact with oil.

In today's world, the environmentally and economically conscious seek to recycle and reuse both water and oil. The very first step in any recycle or reuse process is to separate the oil from the water.

Removing oil from water, whether process water or wastewater – is important for a number of reasons and can offer significant benefits such as:

- reducing costs
- generating new revenue
- enhancing environmental responsibility
- providing safer work environments
- improving overall operations

It is important to remove oil as close to the point of origin as possible (where oil enters the wastewater stream).

First, removing oil before the wastewater stream “mixes” with oil-free water will greatly reduce the scope and associated costs of down-the-line wastewater treatment equipment. Oil tends to foul downstream filtration equipment. The more the oil mixes with water, the bigger the scope of the eventual recycling task.

Second, removing oil early in the process, before it can combine with other contaminants in the waste stream, allows it to retain its value for recycling and reuse within the facility, or for sale to oil recyclers.

Manufacturing

For manufacturing companies, water is typically used throughout the manufacturing process as part of the product, to cool or wash down machinery, or

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

clean parts, for example. During these processes, water often mixes with oil. This oil can come from the process, the machinery used, or in some cases, carried in on the finished product itself.

Power Generation, Oil & Gas, & Railroad

For companies in industries like power generation, oil and gas production, railroad, or transportation, used water often results in a waste solution that may encompass a variety of substances – from lubricant or hydraulic oil, to crude oil, fuel and more. Regardless of whether a facility reuses the water or sends it to a treatment plant, if oil is present, it must be removed.

Oil skimming is one methodology of removing oil from the surface of water. There are a number of oil skimming devices and technologies depending on the type and the scope of the challenge – from large systems used on the ocean, to small units found in a local machine shop as show in Figure 1. 1. Some skimmer designs feature rotating drums, discs, belts, ropes, or floating tubes to which oil adheres. Others float in the water and feature a central overflow weir. Depending on the application, some are more effective or efficient than others, but all are designed to remove the oil from the surface of an oily water mixture.



Figure 1.1 Oil Skimmer

<https://www.abanaki.com/products/oil-grabber-model-8/>

Typical Applications for Industrial Oil Skimmers

Wastewater Sumps : Most manufacturing or processing facilities have water systems where waste oil collects in a central tank or sump. Skimming the floating oils with little water content can reduce the cost of disposal and lower the contingent liabilities of wastewater discharge.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Coolants : When machine coolants become contaminated with tramp oils, four things usually occur:

- coolant life is reduced;
- quality of machined parts is reduced;
- in many cases, a smoke will begin to appear in the shop, causing irritation to the workers on the job; and
- the fluid takes on a “rotten egg” odor. Oil skimmers that remove tramp oils solve these problems and typically pay for themselves within a few months.

Heat Treating : Quench oils that must be removed from heat treated parts can be captured for re-use or disposal. The results are lower quench oil costs, prolonged wash water life and lower disposal costs.

Parts Washers : Floating oils re-contaminate parts as they are removed from a wash tank. Oil skimmers can remove this oil. The benefits of using an oil skimmer are oil free parts and extended fluid life.

Food Processing Facilities : Removal of vegetable oils, greases, and animal fats from a plant’s wastewater stream reduces the costs of processing and disposal.

Working principle of oil skimmer

The coolant liquid blended with oil that free from the greased up parts, for example, direct ways or responding segments is required to be isolated. The majority of the machine apparatuses, for example, a wide range of pounding machine, mechanizes processing machine and so forth the coolant subsequent to streaming over the forefronts, loses its quality because of the blending of oil as show in Figure 1.2. Additionally it ruins the pump or passing on pipe lines. The coolant is made to stream in to the gathering tank. From that point it is pulled in towards drum-belt surface when it stream over the surface with the roller. The upper rollers are impelled with the assistance of setscrew to raise or drop down to fix or extricate the belt. Oil in the coolant holder tank drifts at the upper layer is isolated and adheres up to the belt because of attachment between the belt material and the sticky property of the oil. It is then gathered in the plate and another tank (compartment) and unadulterated coolant is again re-coursed for its utilization in machine instrument.

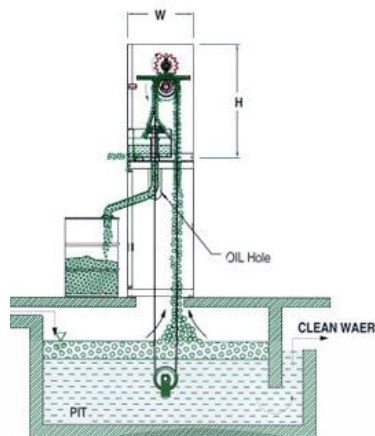


Figure 1.2 Construction of oil skimmer
http://oilseparator.co.kr/eng/img/sub04/s2_1_16.jpg

The oil skimmer is working well when the thin film flow velocity closed to speed moving belt need to be.

1.2 Literature reviews

Study and research on mathematical to estimate the nonlinear thin fluid film flow velocity of third grade fluid on a moving belt is important and useful. We also use mathematical models to describe the thin fluid film flow velocity in each layers.

In [1], studied the thin film flow of a non-newtonian fluid on a vertical moving belt. Two problems are discussed. In one problem, they use a Sisko fluid and where as in the second problem they use an Oldroyd 6-constant fluid. The results obtained in the two problems exhibit the effectiveness and reliability of He's homotopy perturbation method.

In [2], investigated the application of homotopy analysis method to thin film flows of third order fluid. The results obtained the effect of different parameters of interest on the velocity field both in the case of flow on a moving belt and down an inclined plane.

In [3], studied a comparison of variational iteration and adomain decomposition methods in solving nonlinear thin film flow problems. The results obtained analytic approximations of a nonlinear problem that arises in the thin film flow of a third grade fluid on a moving belt.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In [4], studied a comparison of optimal homotopy asymptotic methods (OHAM) and adomain decomposition methods (ADM) for a thin film flow of third grade fluid on a moving belt. The result of analysis is that the three terms OHAM solution is more accurate than five terms of ADM solution and this thus confirms the feasibility of the proposed method.

As mentioned, it can be seen that many researchers have studied about thin fluid film flow problems. Therefore, we are realized and interested in studying the thin fluid film flow problems. We proposed the numerical modeling of a thin fluid film flow velocity of third grade fluid on a moving belt, using the finite difference method, Newton iterative method and quasi-Newton iterative method. In our research, they indicate that velocity of thin fluid film for different parameters. However, the external accelerated force it affects the thin fluid film flow velocity over the ended layer. Thus, we distinguish two cases: there is the thin fluid film flow velocity in each nonnegative rates of change and there are the thin fluid film flow velocity in each negative rates of change.

1.3 Objectives of the thesis

- 1.3.1 We can introduce mathematical models of thin film flow velocity such as
 - 1.3.1.1 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a between paralleled moving belts.
 - 1.3.1.2 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a single moving belt.
- 1.3.2 We can propose a numerical technique that a combination between a finite difference method and a nonlinear system of equations solving method.
- 1.3.3 We can give numerical simulations of thin fluid film flow velocity nonlinear models of third grade fluid on moving belts in several different parameters.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 Research methodology

- 1.4.1 To analyze the conditions for the thin fluid film flow velocity model of third grade fluid on a between paralleled moving belt to describe the cohesiveness of fluid moves on a between paralleled moving belt.
- 1.4.2 To analyze the conditions for the thin fluid film flow velocity model of third grade fluid on a single moving belt to describe the cohesiveness of fluid moves on moving belt.
- 1.4.3 To simulate and approximate the numerical solution of the thin fluid film flow velocity model by using the finite difference methods (FDM) and Newton iterative methods.
- 1.4.4 To simulate and approximate the numerical solution of the thin fluid film flow velocity model by using the finite difference and Quasi-Newton iterative methods.

1.5 Scopes of the thesis

- 1.5.1 The fluid container having a non-Newtonian fluid in it.
- 1.5.2 Considering material constants of the third grade fluid.
- 1.5.3 Describe the thin film of fluid flowing over a surface.
- 1.5.4 To study the thin fluid film flow on a between paralleled moving belt and a single moving belts.
- 1.5.5 Describe the velocity of thin fluid film flow on moving belt in each layers.
- 1.5.6 To approximate the solution of thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a moving belt by finite difference method, Newton iterative method and quasi-Newton iterative method.
- 1.5.7 Give numerical experiments and construct computer program for supporting the numerical solution.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 Expected results

- 1.6.1 We can obtain the thin fluid film flow velocity model of third grade fluid on a between paralleled moving belts to describe the cohesiveness of fluid moves on a between paralleled moving belts.
- 1.6.2 We can obtain the thin fluid film flow velocity model of third grade fluid on a single moving belt to describe the cohesiveness of fluid moves on moving belt.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 2

Basic Knowledge and Governing Equations

2.1 Non-Newtonian Fluid

In recent times, the investigation of the “non-Newtonian fluid” has become a very interesting and popular research. Perhaps, it is due to their several engineering and technological applications such as polymers, greases, multi-grade oils, coolant, petrochemical, floating oil separator, food processing, parts washers, wastewater sumps and biological solutions etc. Moreover, the resulting problems in the study of non-Newtonian fluids pose a challenge to applied mathematics, physicists, modelers and computer scientists.

A thin film flow is defined as a thin layer of fluid flowing over a surface under the action of external force such as gravity, shear stress etc. Mathematical modeling of non-Newtonian incompressible thin film flow of third grade fluid gives rise to nonlinear differential equations. It is well known that exact solutions of these nonlinear boundary value problems are difficult to obtain. Therefore, numerical solutions methods and analytical solutions methods are used to handle such type of problems.

2.2 Types of Non-Newtonian Fluid

A non-Newtonian fluid is one whose flow curve (shear stress versus shear rate) is nonlinear or does not pass through the origin, i.e. where the apparent viscosity, shear stress divided by shear rate, is not constant at a given temperature and pressure but is dependent on flow conditions such as flow geometry, shear rate, etc. and sometimes even on the kinematic history of the fluid element under consideration. Such materials may be conveniently grouped into three general classes:

2.2.1 First grade fluid : Non-Newtonian Viscosity

Fluids for which the rate of shear at any point is determined only by the value of the shear stress at that point at that instant these fluids are variously.

2.2.1.1 Generalized Newtonian fluids : Viscosity is constant.

Stress depends on normal and shear strain rates and also the pressure applied on it such as custard, blood plasma, and water.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Figure 2.1 Water

(<https://www.pharmacy.mahidol.ac.th/knowledge/picture/0340-1.gif>)

2.2.1.2 Shear thinning (pseudoplastic) : Apparent viscosity decreases with increased stress such as blood, nail polish, whipped cream, ketchup, molasses, syrups, paper pulp in water, latex paint, ice, some silicone oils, some silicone coatings and sand in water.

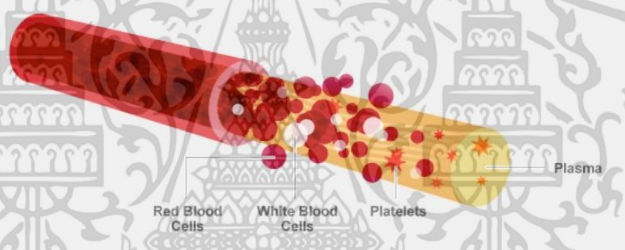


Figure 2.2 Blood

(https://www.oneblood.org/_resources/images/content/blood-components.jpg)

2.2.1.3 Shear thickening (dilatant) : Apparent viscosity increases with increased stress such as suspensions of corn starch in water.



Figure 2.3 Suspensions of cornstarch in water

(<https://homehe.ru/public/856-krem-743x785.jpg>)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2 Second grade fluid : Time-dependent viscosity

more complex fluids for which the relation between shear stress and shear rate depends, in addition, upon the duration of shearing and their kinematic history.

2.2.2.1 Thixotropic : Apparent viscosity decreases with duration of stress such as yogurt, peanut butter, xanthan gum solutions, aqueous iron oxide gels, gelatin gels, pectin gels, hydrogenated castor oil, some clays (including bentonite, and montmorillonite), carbon black suspension in molten tire rubber, some drilling muds, many paints, many floc suspensions and many colloidal suspensions.



Figure 2.4 Yogurt

(https://cravingchronicles.files.wordpress.com/2010/05/img_5915_wm.jpg)

2.2.2.2 Rheopecty : Apparent viscosity increases with duration of stress such as printer ink, synovial fluid and gypsum paste.



Figure 2.5 Printer Ink

(<http://www.ajcomputerspecialists.co.uk/images/LC980%201100.jpg>)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.3 Third grade fluid : Viscoelastic

substances exhibiting characteristics of both ideal fluids and elastic solids and showing partial elastic recovery and after deformation.

2.2.3.1 Kelvin material, Maxwell material : "Parallel" linear combination of elastic and viscous effects such as some lubricants, whipped cream and silly putty.



Figure 2.6 Lubricant

(<https://www.mmthailand.com/wp-content/uploads/2017/07/oil-analysis.jpg>)

2.3 Governing equations

2.3.1 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a between paralleled moving belt.

The thin film flow of third grade fluid on a moving belt is governed by the following nonlinear boundary value problem. [4]

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 6 \frac{(\beta_2 + \beta_3)}{\mu} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{\rho g}{\mu} = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq \delta, \quad (2.1)$$

where

v is the fluid velocity (m/s),

ρ is the density of fluid (Kg/m^3),

μ is the dynamic viscosity ($Pa \cdot S$),

β_2, β_3 are the material constants of the third grade fluid (non-unit),

g is gravity acceleration (m/s^2),

δ is the uniform thickness of the fluid film (m),

u_l, u_r are the left speed belt and right speed belt (m/s),

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

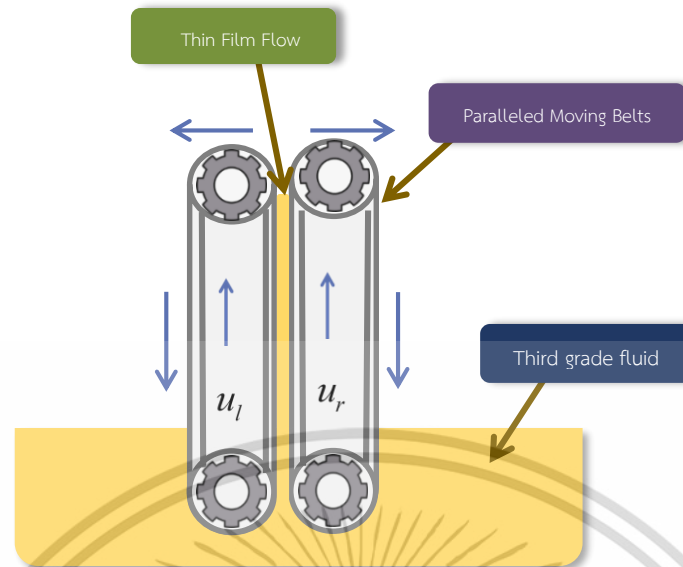


Figure 2.7: The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a between paralleled moving belt.

subject to the boundary conditions

$$v(0) = u_l, \quad (2.2)$$

$$v(\delta) = u_r. \quad (2.3)$$

2.3.2 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a single moving belt.

The thin film flow of third grade fluid on a moving belt is governed by the following nonlinear boundary value problem. [4]

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 6 \frac{(\beta_2 + \beta_3)}{\mu} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{\rho g}{\mu} = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq \delta, \quad (2.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

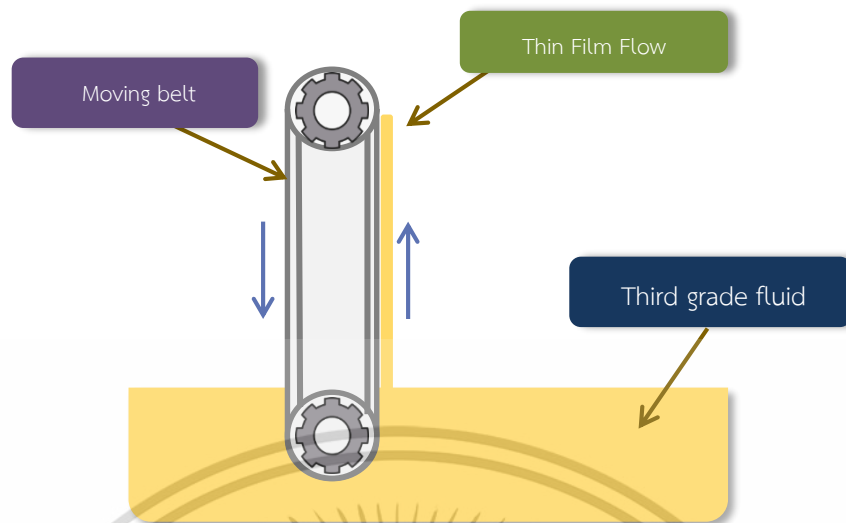


Figure 2.8: The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a single moving belt.

subject to the boundary conditions

$$v(0) = U_0, \quad (2.5)$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=\delta} = \kappa, \quad (2.6)$$

where

U_0 is the speed of the belt,

κ is the rate of change of the fluid velocity on the ended layer.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 3

Numerical method for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts and single moving belt

3.1 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model

3.1.1 The thin film flow of third grade fluid on a moving belt is governed by the following nonlinear boundary value problem. [4]

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 6\frac{(\beta_2 + \beta_3)}{\mu} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{\rho g}{\mu} = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq \delta, \quad (2.1)$$

where

v is the fluid velocity (m/s),

ρ is the density of fluid (Kg/m^3),

μ is the dynamic viscosity ($Pa \cdot S$),

β_2, β_3 are the material constants of the third grade fluid (non-unit),

g is gravity acceleration (m/s^2),

δ is the uniform thickness of the fluid film (m),

u_l, u_r are the left speed belt and right speed belt (m/s).

Here, we introduce the following dimensionless variables:

$$x^* = \frac{x}{\delta},$$

$$v^* = \frac{v}{u_l},$$

$$\beta = \frac{(\beta_2 + \beta_3)}{\mu \delta^2} u_l, \quad (3.1)$$

$$m = \frac{\rho g}{\mu u_l} \delta^2,$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

From (2.1) and (3.1), we obtain the dimensionless form as

$$\frac{d^2v}{d(x^*)^2} + 6\beta \left(\frac{dv}{dx^*} \right)^2 \frac{d^2v}{d(x^*)^2} - m = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1, \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2v}{d(x^*)^2} \left(1 + 6\beta \left(\frac{dv}{dx^*} \right)^2 \right) - m = 0$$

$$\frac{d^2v}{d(x^*)^2} = \frac{m}{1 + 6\beta \left(\frac{dv}{dx^*} \right)^2}$$

We get the simple dimensionless model as

$$v'' = \frac{m}{1 + 6\beta \left(\frac{dv}{dx^*} \right)^2}, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1,$$

3.1.2 Boundary conditions of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model

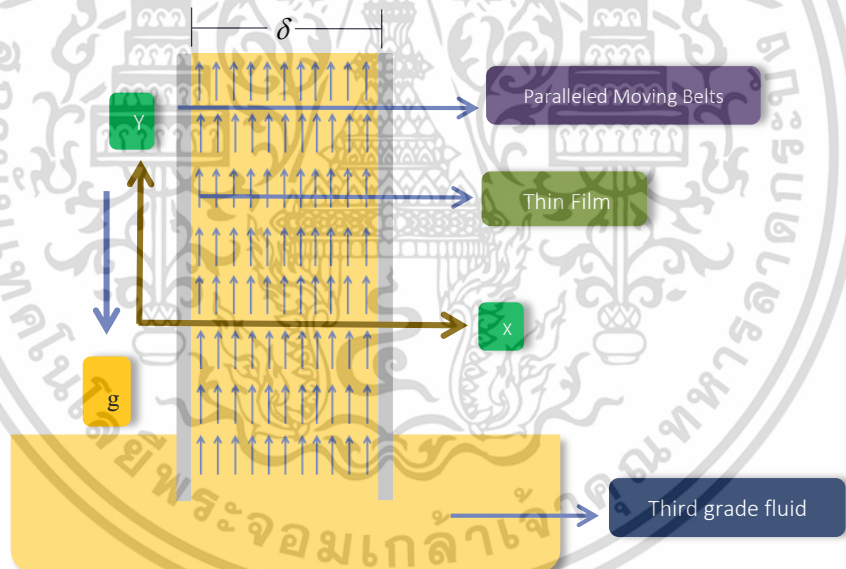


Figure 3.1: The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a between paralleled moving belt.

According to the paralleled moving belt, the left and the right belts speed are constants as show in Figure 3.1, we have

$$v(0) = u_l, \quad (3.3)$$

$$v(\delta) = u_r. \quad (3.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.3 Finite difference method for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model

We will approximate the solution by using finite difference methods for nonlinear boundary value problem with Dirichlet boundary conditions Eq.(3.2)-(3.4) that can be written in a compact form as below,

$$v'' = \frac{m}{1+6\beta(v')^2}, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1, \quad (3.5)$$

subject to

$$v(0) = u_l, \quad (3.6)$$

$$v(1) = u_r. \quad (3.7)$$

We divide $[0,1]$ into $N+1$ subintervals that endpoints are at $v_i = a + ih$, for all $i = 0, 1, \dots, N+1$, where $h = 1/(N+1)$. By using the centered finite difference method [5], the finite difference equation can be written as follows,

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = \frac{m}{1+6\beta\left(\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}\right)^2}, \text{ for all } i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.8)$$

and

$$v_0 = u_l, \quad (3.9)$$

$$v_{N+1} = u_r. \quad (3.10)$$

It follows that

$$\begin{aligned} v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^3) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^2 v_{i-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1} v_{i-1}^2) - 2v_i - 3\frac{\beta}{h^2}(v_i v_{i+1}^2) + 6\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1} v_i v_{i+1}) \\ - 3\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1}^2 v_i) + v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i-1}^3) = mh^2, \text{ for all } i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.11)$$

For $i = 1$, plug the known value of the left boundary $v_0 = u_l$ to Eq.(3.11) on the left hand side, we obtain

$$\left(-2 - 3\frac{\beta}{h^2}\right)v_1 + \left(1 - \frac{3\beta}{2h^2}\right)v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1 v_2^2 + 6\frac{\beta}{h^2}v_1 v_2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 = mh^2 - v_1 - \frac{3\beta}{2h^2}. \quad (3.12)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

For $i = 2, 3, \dots, N-1$, Eq.(3.10) becomes

$$v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_iv_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_i + 6\frac{\beta}{h^2}v_{i-1}v_iv_{i+1} + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 = mh^2. \quad (3.13)$$

For $i = N$, plug the known value of the right boundary $v_{N+1} = u_r$ to Eq.(3.10) on the right hand side, we obtain

$$(1 - \frac{3\beta}{2h^2})v_{N-1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2 + (-2 - 3\frac{\beta}{h^2})v_N - \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2v_N + 6\frac{\beta}{h^2}v_{N-1}v_N + \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^3 = mh^2 - u_r - \frac{3\beta}{2h^2}. \quad (3.14)$$

3.1.4 Newton iterative method for nonlinear finite difference method of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model

Apply the Newton iterative to the system of simultaneous on nonlinear equation Eqs.(3.12-3.14) that can be written in a vector form as

$F(V) = (f_1(v_1, \dots, v_N), f_2(v_2, \dots, v_N), \dots, f_N(v_1, \dots, v_N))^t$, where

$$f_1(v_1, \dots, v_N) := (-2 - 3\frac{\beta}{h^2})v_1 + (1 - \frac{3\beta}{2h^2})v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1v_2^2 + 6\frac{\beta}{h^2}v_1v_2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 - (mh^2 - v_1 - \frac{3\beta}{2h^2}), \quad (3.15)$$

$$f_i(v_1, \dots, v_N) := v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_iv_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_i + 6\frac{\beta}{h^2}v_{i-1}v_iv_{i+1} + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 - mh^2, \text{ for all } i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (3.16)$$

$$f_N(v_1, \dots, v_N) := (1 - \frac{3\beta}{2h^2})v_{N-1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2 + (-2 - 3\frac{\beta}{h^2})v_N - \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2v_N + 6\frac{\beta}{h^2}v_{N-1}v_N + \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^3 - (mh^2 - u_r - \frac{3\beta}{2h^2}). \quad (3.17)$$

The Jacobian matrix $J(V)$ for the system of Eqs.(3.15-3.17) is given by

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J(V) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial v_1 & \partial f_2 / \partial v_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial v_N \\ \partial f_2 / \partial v_1 & \partial f_2 / \partial v_2 & \cdots & \partial f_2 / \partial v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_N / \partial v_1 & \partial f_N / \partial v_2 & \cdots & \partial f_N / \partial v_N \end{bmatrix}.$$

Choosing that $V^0 = (v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)})^t$, we can obtain $F(V^0)$ and $J(V^0)$. Solving the linear system,

$$J(V^0)U^{(0)} = -F(V^0), \quad (3.18)$$

we will obtain $U^{(0)}$. Then

$$V^{(1)} = V^{(0)} + U^{(0)}. \quad (3.19)$$

Continuing for $k = 2, 3, \dots$, we have

$$V^{(k)} = V^{(k-1)} + U^{(k-1)}, \quad (3.20)$$

where

$$U^{(k-1)} = -(J(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)}))^{-1} F(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)}). \quad (3.21)$$

3.2 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model

3.2.1 Governing equation of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + 6\beta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - m = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1. \quad (3.2)$$

3.2.2 Boundary conditions of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model

According to the single moving belt is going up as show in Figure 3.2. The left boundary condition is assumed under the assumption that left end of the fluid film flow velocity is equal to the belt speed. The right boundary condition is also assumed to be the rate of change on the right end of the fluid flow velocity. These mean that the left and the right boundary conditions become,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v(0) = U_0, \quad (3.22)$$

and

$$v'(1) = \kappa. \quad (3.23)$$

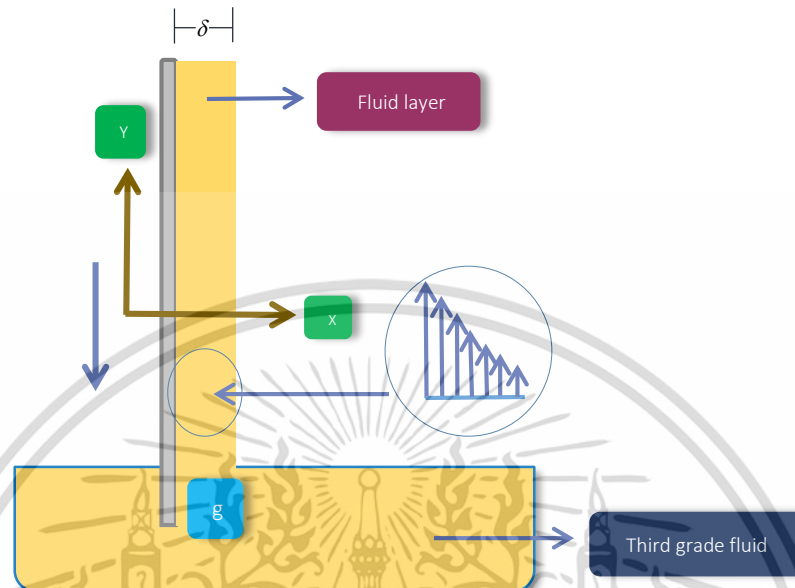


Figure 3.2: The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a single moving belt.

3.2.3 Finite difference method for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model

We will approximate the solution by using finite difference methods for nonlinear boundary value problem with Dirichlet boundary conditions Eq.(3.1)-(3.3) that can be written in a compact form as below,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 6\beta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \frac{d^2v}{dx^2} - m = 0, \quad \text{for all } 0 \leq x \leq 1. \quad (3.23)$$

subject to

$$v(0) = U_0, \quad (3.24)$$

and

$$v'(1) = \kappa. \quad (3.25)$$

where U_0 is the speed of belt and

κ is the rate of change of the fluid velocity on the ended layer.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

We divide $[0,1]$ into $N+1$ subintervals that endpoints are at $v_i = a + ih$ for all $i = 0, 1, \dots, N+1$, where $h = 1/(N+1)$. By using the centered finite difference method [5], the finite difference equation can be written as follows,

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = \frac{m}{1 + 6\beta \left(\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \right)^2}, \quad \text{for all } i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.26)$$

and

$$v(0) = U_0, \quad (3.27)$$

and

$$v'(1) = \kappa. \quad (3.28)$$

It follows that

$$\begin{aligned} v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^3) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^2 v_{i-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1} v_{i-1}^2) - 2v_i - 3\frac{\beta}{h^2}(v_i v_{i+1}^2) + 6\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1} v_i v_{i+1}) \\ - 3\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1}^2 v_i) + v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i-1}^3) = mh^2, \quad \text{for all } i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.29)$$

For $i = 1$, plug the known value of the left boundary $v_0 = U_0$ to Eq.(3.10) on the left hand side, we obtain

$$\left(-2 - 3\frac{\beta}{h^2}\right)v_1 + \left(1 - \frac{3\beta}{2h^2}\right)v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1 v_2^2 + 6\frac{\beta}{h^2}v_1 v_2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 = mh^2 - v_1 - \frac{3\beta}{2h^2}. \quad (3.30)$$

For $i = 2, 3, \dots, N-1$, Eq.(3.10) becomes

$$\begin{aligned} v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2 v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1} v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_i v_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2 v_i + 6\frac{\beta}{h^2}v_{i-1} v_i v_{i+1} \\ + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 = mh^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

To modify the finite difference method to a Neumann conditions, $v'(1) = \kappa$, Eq.(3.29)

For $i = N$,

$$\begin{aligned} 2hk + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(2hk + v_{N-1})^3 - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})^2 v_{N-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})v_{N-1}^2) - 2v_N \\ - 3\frac{\beta}{h^2}(v_N(2hk + v_{N-1})^2) + 6\frac{\beta}{h^2}(v_{N-1}v_N(2hk + v_{N-1})) - 3\frac{\beta}{h^2}v_N + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{N-1}^3) = mh^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.4 Newton iterative method for nonlinear finite difference method of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model

Apply the Newton iterative to the system of simultaneous on nonlinear equation Eqs.(3.11-3.13) that can be written in a vector form as

$F(V) = (f_1(v_1, \dots, v_N), f_2(v_2, \dots, v_N), \dots, f_N(v_1, \dots, v_N))^t$, where

$$f_1(v_1, \dots, v_N) := (-2 - 3 \frac{\beta}{h^2})v_1 + (1 - \frac{3\beta}{2h^2})v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1v_2^2 + 6 \frac{\beta}{h^2}v_1v_2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 - (mh^2 - v_1 - \frac{3\beta}{2h^2}), \quad (3.33)$$

$$f_i(v_1, \dots, v_N) := v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_iv_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_i + 6 \frac{\beta}{h^2}v_{i-1}v_iv_{i+1} + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 - mh^2, \text{ for all } i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (3.34)$$

$$f_N(v_1, \dots, v_N) := 2hk + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(2hk + v_{N-1})^3 - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})^2v_{N-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})v_{N-1}^2) - 2v_N - 3 \frac{\beta}{h^2}(v_N(2hk + v_{N-1})^2) + 6 \frac{\beta}{h^2}(v_{N-1}v_N(2hk + v_{N-1})) - 3 \frac{\beta}{h^2} + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{N-1}^3) - mh^2. \quad (3.35)$$

The Jacobian matrix $J(V)$ for the system of Eqs.(3.33-3.35) is given by

$$J(V) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial v_1 & \partial f_1 / \partial v_2 & \dots & \partial f_1 / \partial v_N \\ \partial f_2 / \partial v_1 & \partial f_2 / \partial v_2 & \dots & \partial f_2 / \partial v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_N / \partial v_1 & \partial f_N / \partial v_2 & \dots & \partial f_N / \partial v_N \end{bmatrix}.$$

Choosing that $V^0 = (v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)})^t$, we can obtain $F(V^0)$ and $J(V^0)$. Solving the linear system,

$$J(V^0)U^{(0)} = -F(V^0), \quad (3.36)$$

we will obtain $U^{(0)}$. Then

$$V^{(1)} = V^{(0)} + U^{(0)}. \quad (3.37)$$

Continuing for $k = 2, 3, \dots$, we have

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้เพื่อการศึกษาเท่านั้น, ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านอื่นๆ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

where

$$U^{(k-1)} = -(J(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)}))^{-1} F(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)}). \quad (3.39)$$

3.2.5 Quasi-Newton iterative method for nonlinear finite difference method of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model

Apply the Newton iterative to the system of simultaneous on nonlinear equation Eqs.(3.11-3.13) that can be written in a vector form as

$F(V) = (f_1(v_1, \dots, v_N), f_2(v_2, \dots, v_N), \dots, f_N(v_1, \dots, v_N))^t$, where

$$f_1(v_1, \dots, v_N) := (-2 - 3 \frac{\beta}{h^2})v_1 + (1 - \frac{3\beta}{2h^2})v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1v_2^2 + 6 \frac{\beta}{h^2}v_1v_2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 - (mh^2 - v_1 - \frac{3\beta}{2h^2}), \quad (3.40)$$

$$f_i(v_1, \dots, v_N) := v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_i v_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_i + 6 \frac{\beta}{h^2}v_{i-1}v_i v_{i+1} + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 - mh^2, \text{ for all } i=2,3,\dots,N-1, \quad (3.41)$$

$$f_N(v_1, \dots, v_N) := 2hk + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(2hk + v_{N-1})^3 - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})^2 v_{N-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})v_{N-1}^2) - 2v_N - 3 \frac{\beta}{h^2}(v_N(2hk + v_{N-1})^2) + 6 \frac{\beta}{h^2}(v_{N-1}v_N(2hk + v_{N-1})) - 3 \frac{\beta}{h^2} + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{N-1}^3) - mh^2. \quad (3.42)$$

The Jacobian matrix $J(V)$ for the system of Eqs.(3.40-3.42) is given by

$$J(V) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial v_1 & \partial f_1 / \partial v_2 & \cdots & \partial f_1 / \partial v_N \\ \partial f_2 / \partial v_1 & \partial f_2 / \partial v_2 & \cdots & \partial f_2 / \partial v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_N / \partial v_1 & \partial f_N / \partial v_2 & \cdots & \partial f_N / \partial v_N \end{bmatrix}.$$

Choosing that $V^0 = (v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)})^t$, we can obtain $F(V^0)$ and $J(V^0)$. Solving the linear system,

$$J(V^0)U^{(0)} = -F(V^0), \quad (3.43)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

we will obtain $U^{(0)}$. Then

$$V^{(1)} = V^{(0)} + U^{(0)}. \quad (3.44)$$

Continuing for $k = 2, 3, \dots$ we have

$$V^{(2)} = V^{(1)} + A_1^{-1}F(V^{(1)}). \quad (3.45)$$

So $V^{(2)}$ is also determined, the method is repeated to determine $V^{(3)}$, using $A_{(1)}$

in place of $A_{(0)} = J(V^0)$, and with $V^{(2)}$ and $V^{(1)}$ in place of $V^{(1)}$ and $V^{(0)}$.

In general, once $V^{(i)}$ has been determined, $V^{(i+1)}$ is computed by

$$A_i = A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1}s_i}{\|s_i\|_2^2} s_i^t \quad (3.46)$$

and

$$V^{(i+1)} = V^{(i)} + A_i^{-1}F(V^{(i)}), \quad (3.47)$$

where the notation $y_i = F(V^{(i)}) - F(V^{(i-1)})$ and $s_i = V^{(i)} - V^{(i-1)}$ is introduced to simplify the equations.

$$A_i s_{i+1} = -F(V^{(i)}). \quad (3.48)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 4

Numerical experiment of a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts and a single moving belts

4.1 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts model by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.1.1 Assume, that the third grade fluid is flowing on a couple of 2 paralleled moving belts. The gap between 2 belts is $\delta = 1$. Both of 2 belts have the same moving speed, $v(0) = 1, v(1) = 1$. The related parameter are $m = 0.5$ and $\beta = 0.25$. In this simulation, we will choose $h = 0.25$ and tolerance of computed is 0.5×10^{-5} . We will employ the finite difference method Eq.(3.11) and the Newton iterative method Eqs.(3.15)-(3.17).

$$v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^3) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^2 v_{i-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1} v_{i-1}^2) - 2v_i - 3\frac{\beta}{h^2}(v_i v_{i+1}^2) + 6\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1} v_i v_{i+1}) - 3\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1}^2 v_i) + v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i-1}^3) = mh^2, \text{ for all } i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.10)$$

If $i = 1$, then $-14v_1 - 5v_2 + 24v_1 v_2 - 12v_1 v_2^2 - 6v_2^2 + 6v_2^3 = -6.96875$.

If $i = 2$, then $v_1 + 6v_1^3 - 12v_1^2 v_2 - 6v_1 v_2^2 - 6v_1^2 v_3 - 2v_2 - 12v_2 v_3^2 + 24v_1 v_2 v_3 + v_3 + 6v_3^3 = 0.03125$.

If $i = 3$, then $-5v_2 - 6v_2^2 + 24v_2 v_3 + 6v_2^3 - 12v_2^2 v_3 - 14v_3 = -6.96875$.

Then $F(V) = (f_1(v_1, \dots, v_n), f_2(v_1, \dots, v_n), \dots, f_n(v_1, \dots, v_n))^t$, where

$$f_1(v_1, \dots, v_n) := -14v_1 - 5v_2 + 24v_1 v_2 - 12v_1 v_2^2 - 6v_2^2 + 6v_2^3 = -6.96875,$$

$$f_2(v_1, \dots, v_n) := v_1 + 6v_1^3 - 12v_1^2 v_2 - 6v_1 v_2^2 - 6v_1^2 v_3 - 2v_2 - 12v_2 v_3^2 + 24v_1 v_2 v_3 + v_3 + 6v_3^3 = 0.03125,$$

$$f_3(v_1, \dots, v_n) := -5v_2 - 6v_2^2 + 24v_2 v_3 + 6v_2^3 - 12v_2^2 v_3 - 14v_3 = -6.96875,$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J(F) = \begin{bmatrix} -14+24v_2-12v_2^2 & -5+24v_1-24v_1v_2-12v_2+18v_2^2 & 0 \\ 1+18v_1^2-24v_1v_2-6v_3^2-12v_2v_3 & -12v_1^2-2-12v_3^2+24v_1v_3 & -12v_1v_3-6v_1^2-24v_2v_3+24v_1v_2+1+18v_3^2 \\ 0 & -5-12v_2+24v_3+18v_2^2-24v_2v_3 & 24v_2-12v_2^2-14 \end{bmatrix}.$$

We choosing that

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Then } v^{(1)} = v^{(0)} - J(v^{(0)})^{-1} F(v^{(0)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.03125 \\ -0.03125 \\ -0.03125 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9531 \\ 0.9375 \\ 0.9531 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Then } v^{(2)} = v^{(1)} - J(v^{(1)})^{-1} F(v^{(1)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9531 \\ 0.9375 \\ 0.9531 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.0469 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2.0469 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0008 \\ -0.0001 \\ 0.0008 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9536 \\ 0.9377 \\ 0.9536 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Then } v^{(3)} = v^{(2)} - J(v^{(2)})^{-1} F(v^{(2)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9536 \\ 0.9377 \\ 0.9536 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.0466 & 1.0005 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1.0005 & -2.0466 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.0004 \\ 0.0005 \\ -0.0004 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9535 \\ 0.9379 \\ 0.9535 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Then } v^{(4)} = v^{(3)} - J(v^{(3)})^{-1} F(v^{(3)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9535 \\ 0.9379 \\ 0.9535 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.0463 & 1.0001 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1.0001 & -2.0463 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0004 \\ -0.0001 \\ 0.0004 \end{bmatrix},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{bmatrix} 0.9538 \\ 0.9382 \\ 0.9538 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Thus } v^{(5)} = v^{(4)} - J(v^{(4)})^{-1} F(v^{(4)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9538 \\ 0.9382 \\ 0.9538 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.0458 & 1.0002 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1.0002 & -2.0458 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9538 \\ 0.9382 \\ 0.9538 \end{bmatrix}.$$

We can get the solution as show in Table 4.1 and Figure 4.1.

Table 4.1: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m=0.5$ and $\beta=0.25$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$
0	1	1	1
1	0.9531	0.9375	0.9531
2	0.9536	0.9377	0.9536
3	0.9535	0.9379	0.9535
4	0.9538	0.9382	0.9538
5	0.9538	0.9382	0.9538

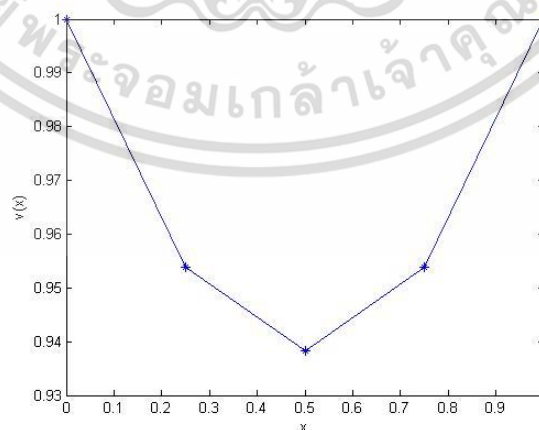


Figure 4.1: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m=0.5$ and $\beta=0.25$ by using the finite difference methods and

Newton iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Example 4.1.2 Assume, that the third grade fluid is flowing on a couple of 2 paralleled moving belts. The gap between 2 belts is $\delta = 1$. Both of 2 belts have the same moving speed, $v(0) = 1, v(1) = 1$. The related parameter are $m = 0.5$ and $\beta = 0.5$. In this simulation, we will choose $h = 0.25$ and tolerance of computed is 0.5×10^{-5} . We will employ the finite difference method Eq.(3.11) and the Newton iterative method Eqs.(3.15)-(3.17). We can get the solution as show in Table 4.2 and Figure 4.2.

Table 4.2: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.5$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$
0	1	1	1
1	0.9531	0.9375	0.9531
2	0.9544	0.9388	0.9544
3	0.9545	0.9388	0.9545
4	0.9545	0.9388	0.9545

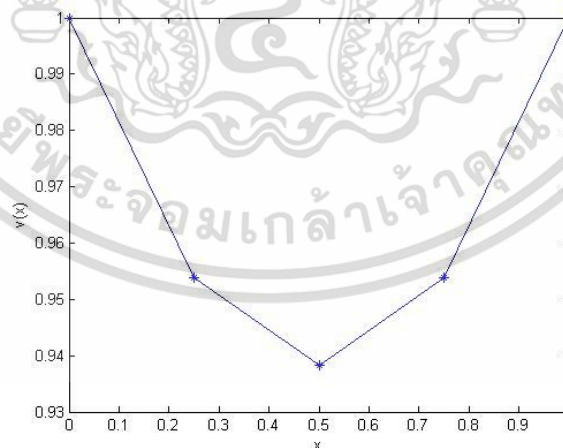


Figure 4.2: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.5$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Example 4.1.3 Assume, that the third grade fluid is flowing on a couple of 2 paralleled moving belts. The gap between 2 belts is $\delta = 1$. Both of 2 belts have the same moving speed, $v(0) = 1, v(1) = 1$. The related parameter are $m = 0.5$ and $\beta = 0.75$. In this simulation, we will choose $h = 0.25$ and tolerance of computed is 0.5×10^{-5} . We will employ the finite difference method Eq.(3.11) and the Newton iterative method Eqs.(3.15)-(3.17). We can get the solution as show in Table 4.3 and Figure 4.3.

Table 4.3: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.5$ and $\beta = 0.75$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$
0	1	1	1
1	0.9531	0.9375	0.9531
2	0.9551	0.9394	0.9551
3	0.9551	0.9394	0.9551

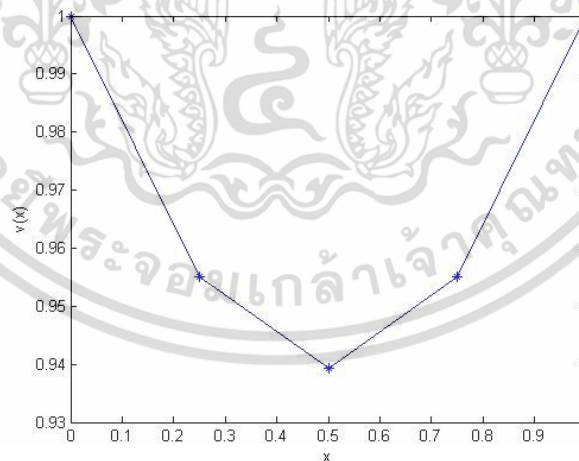


Figure 4.3: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.5$ and $\beta = 0.75$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Example 4.1.4 Assume, that the third grade fluid is flowing on a couple of 2 paralleled moving belts. The gap between 2 belts is $\delta = 1$. Both of 2 belts have the same moving speed, $v(0) = 1, v(1) = 1$. The related parameter are $m = 0.125$ and $\beta = 0.5$. In this simulation, we will choose $h = 0.25$ and tolerance of computed is 0.5×10^{-5} . We will employ the finite difference method Eq.(3.11) and the Newton iterative method Eqs.(3.15)-(3.17). We can get the solution as show in Table 4.4 and Figure 4.4.

Table 4.4: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.125$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$
0	1	1	1
1	0.9883	0.9844	0.9883
2	0.9883	0.9845	0.9883
3	0.9883	0.9844	0.9883
4	0.9883	0.9844	0.9883

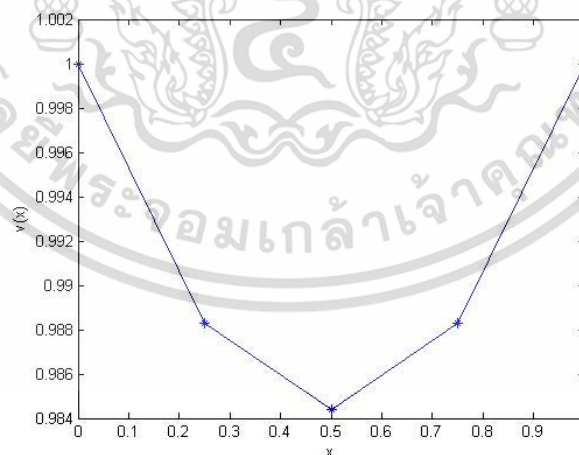


Figure 4.4: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.125$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Example 4.1.5 Assume, that the third grade fluid is flowing on a couple of 2 paralleled moving belts. The gap between 2 belts is $\delta = 1$. Both of 2 belts have the same moving speed, $v(0) = 1, v(1) = 1$. The related parameter are $m = 0.25$ and $\beta = 0.5$. In this simulation, we will choose $h = 0.25$ and tolerance of computed is 0.5×10^{-5} . We will employ the finite difference method Eq.(3.11) and the Newton iterative method Eqs.(3.15)-(3.17). We can get the solution as show in Table 4.5 and Figure 4.5.

Table 4.5: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.25$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$
0	1	1	1
1	0.9766	0.9688	0.9766
2	0.9767	0.9689	0.9767
3	0.9768	0.9690	0.9768
4	0.9768	0.9690	0.9768

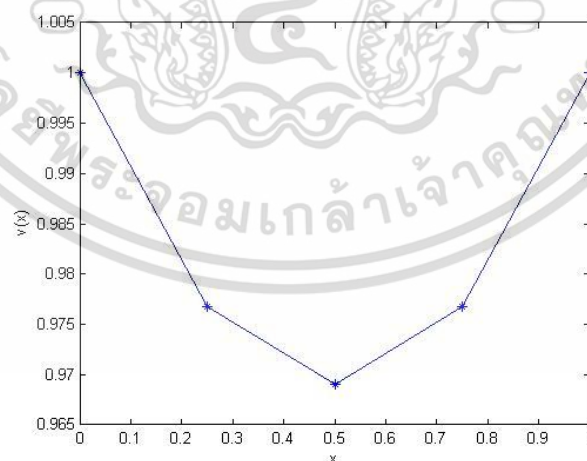


Figure 4.5: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.25$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Example 4.1.6 Assume, that the third grade fluid is flowing on a couple of 2 paralleled moving belts. The gap between 2 belts is $\delta = 1$. Both of 2 belts have the same moving speed, $v(0) = 1, v(1) = 1$. The related parameter are $m = 0.75$ and $\beta = 0.5$. In this simulation, we will choose $h = 0.25$ and tolerance of computed is 0.5×10^{-5} . We will employ the finite difference method Eq.(3.11) and the Newton iterative method Eqs.(3.15)-(3.17). We can get the solution as show in Table 4.6 and Figure 4.6.

Table 4.6: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.75$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$
0	1	1	1
1	0.9297	0.9062	0.9297
2	0.9337	0.9103	0.9337
3	0.9337	0.9103	0.9337

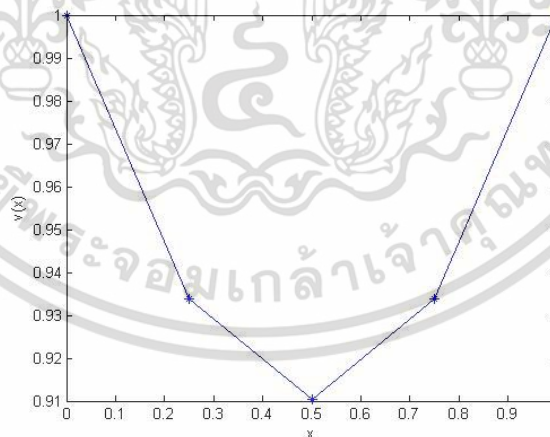


Figure 4.6: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a between paralleled moving belt with $m = 0.75$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.2.1 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$. By using the finite difference method Eq.(3.29) and the Newton iterative method Eqs.(3.33)-(3.35), We have

$$v_{i+1} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i+1}^3) - \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i+1}^2 v_{i-1}) - \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i+1} v_{i-1}^2) - 2v_i - 3 \frac{\beta}{h^2} (v_i v_{i+1}^2) + 6 \frac{\beta}{h^2} (v_{i-1} v_i v_{i+1}) - 3 \frac{\beta}{h^2} (v_{i-1}^2 v_i) + v_{i-1} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i-1}^3) = mh^2, \text{ for all } i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.29)$$

We can get the solution as show in Table 4.7 and Figure 4.7.

Table 4.7: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9748	0.9523	0.9324	0.9152	0.9006	0.8887	0.8794	0.8728	0.8688	0.8675
2	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8926	0.8834	0.8768	0.8729	0.8716
3	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8927	0.8835	0.8769	0.8729	0.8716
4	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8927	0.8835	0.8769	0.8729	0.8716

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

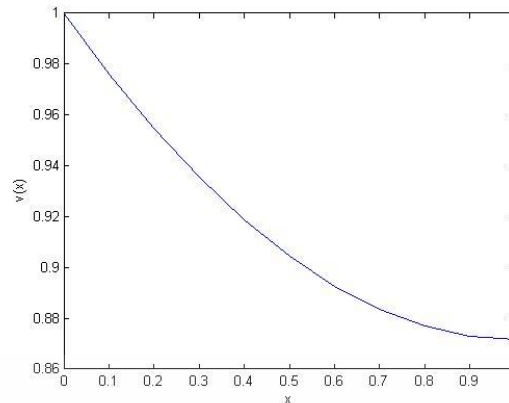


Figure 4.7: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.2.2 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$. We can get the solution as show in Table 4.8 and Figure 4.8.

Table 4.8: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9749	0.9524	0.9325	0.9153	0.9008	0.8889	0.8796	0.8730	0.8691	0.8678
2	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8926	0.8834	0.8768	0.8729	0.8716
3	0.9762	0.9547	0.9355	0.9188	0.9045	0.8928	0.8836	0.8770	0.8731	0.8718
4	0.9762	0.9547	0.9355	0.9188	0.9045	0.8928	0.8836	0.8770	0.8731	0.8718

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

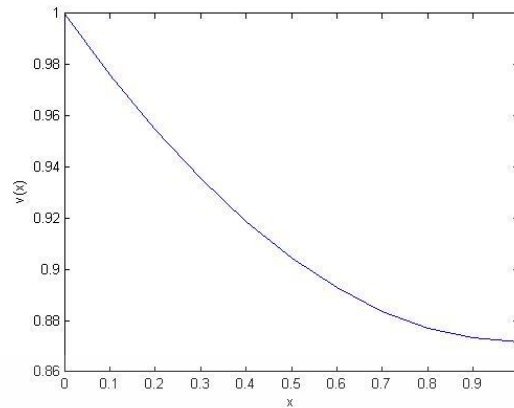


Figure 4.8: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.2.3 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$. We can get the solution as show in Table 4.9 and Figure 4.9.

Table 4.9: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9749	0.9524	0.9325	0.9153	0.9008	0.8889	0.8796	0.8730	0.8691	0.8678
2	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8926	0.8834	0.8768	0.8729	0.8716
3	0.9762	0.9547	0.9355	0.9188	0.9045	0.8928	0.8836	0.8770	0.8731	0.8718
4	0.9762	0.9547	0.9355	0.9188	0.9045	0.8928	0.8836	0.8770	0.8731	0.8718

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

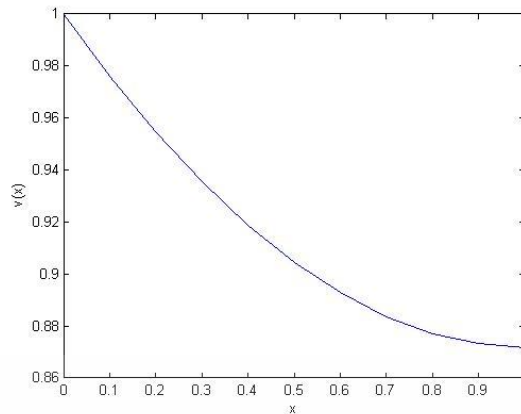


Figure 4.9: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.2.4 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$. We can get the solution as show in Table 4.10 and Figure 4.10.

Table 4.10: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9749	0.9525	0.9327	0.9156	0.9011	0.8893	0.8801	0.8736	0.8697	0.8685
2	0.9762	0.9548	0.9357	0.9190	0.9049	0.8932	0.8841	0.8776	0.8737	0.8725
3	0.9763	0.9548	0.9357	0.9191	0.9049	0.8932	0.8841	0.8776	0.8737	0.8725
4	0.9763	0.9548	0.9357	0.9191	0.9049	0.8932	0.8841	0.8776	0.8737	0.8725

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

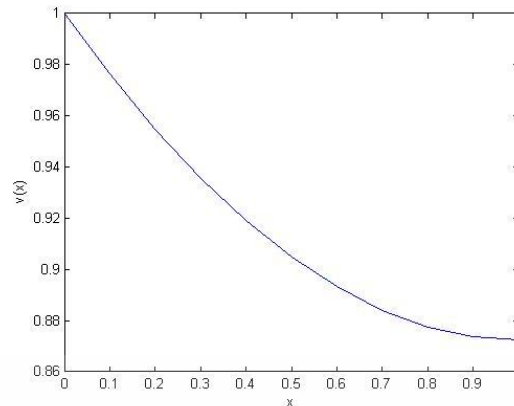


Figure 4.10: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.2.5 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$. We can get the solution as show in Table 4.11 and Figure 4.11.

Table 4.11: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9747	0.9521	0.9321	0.9148	0.9001	0.8881	0.8787	0.8720	0.8679	0.8665
2	0.9762	0.9548	0.9357	0.9190	0.9049	0.8932	0.8841	0.8776	0.8737	0.8725
3	0.9761	0.9545	0.9352	0.9184	0.9040	0.8921	0.8841	0.8828	0.8761	0.8706
4	0.9761	0.9545	0.9352	0.9184	0.9040	0.8921	0.8841	0.8828	0.8761	0.8706

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

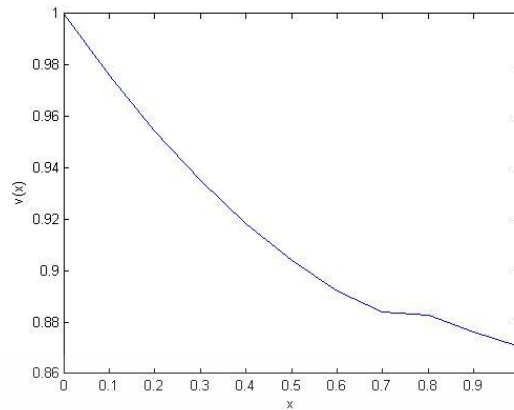


Figure 4.11: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.2.6 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$. We can get the solution as show in Table 4.12 and Figure 4.12.

Table 4.12: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9748	0.9522	0.9323	0.9150	0.9004	0.8884	0.8791	0.8724	0.8684	0.8670
2	0.9761	0.9545	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711
3	0.9761	0.9546	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711
4	0.9761	0.9546	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

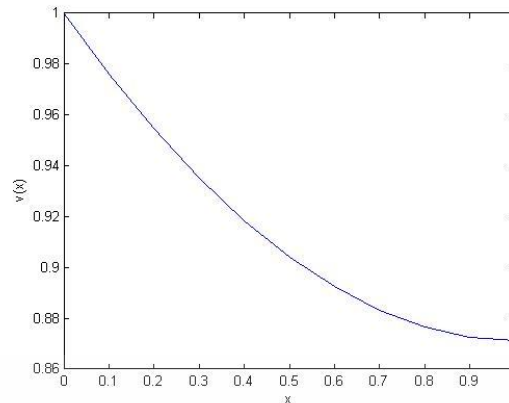


Figure 4.12: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

Example 4.2.7 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$. We can get the solution as show in Table 4.13 and Figure 4.13.

Table 4.13: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9748	0.9522	0.9323	0.9150	0.9004	0.8884	0.8791	0.8724	0.8684	0.8670
2	0.9761	0.9545	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711
3	0.9761	0.9546	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711
4	0.9761	0.9546	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

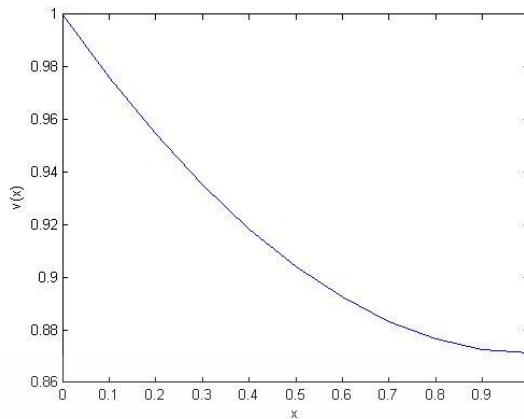


Figure 4.13: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Newton iterative methods.

4.3 A thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt model by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

Example 4.3.1 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$. By using the finite difference method Eq.(3.29) and the Quasi-Newton iterative method Eqs.(3.40)-(3.42), We have

$$v_{i+1} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i+1}^3) - \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i+1}^2 v_{i-1}) - \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i+1} v_{i-1}^2) - 2v_i - 3 \frac{\beta}{h^2} (v_i v_{i+1}^2) + 6 \frac{\beta}{h^2} (v_{i-1} v_i v_{i+1}) - 3 \frac{\beta}{h^2} (v_{i-1}^2 v_i) + v_{i-1} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{h^2} (v_{i-1}^3) = mh^2, \text{ for all } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.29)$$

$$\text{If } i = 1, \quad -152v_1 - 74v_2 + 300v_1v_2 - 150v_1v_2^2 - 75v_2^2 + 75v_2^3 = -75.9973$$

$$\text{If } i = 2, \quad v_1 + 75v_1^3 - 150v_1^2v_2 - 75v_1v_2^2 - 75v_1^2v_3 - 75v_1^2v_3 - 2v_2 - 150v_2v_3^2 + 300v_1v_2v_3 + v_3 + 75v_3^3 = 0.0027$$

$$\text{If } i = 3, \quad v_2 + 75v_2^3 - 150v_2^2v_3 - 75v_2v_3^2 - 75v_2^2v_4 - 75v_2^2v_4 - 2v_3 - 150v_3v_4^2 + 300v_2v_3v_4 + v_4 + 75v_4^3 = 0.0027$$

$$\text{If } i = 4, \quad v_3 + 75v_3^3 - 150v_3^2v_4 - 75v_3v_4^2 - 75v_3^2v_5 - 75v_3^2v_5 - 2v_4 - 150v_4v_5^2 + 300v_3v_4v_5 + v_5 + 75v_5^3 = 0.0027$$

$$\text{If } i = 5, \quad v_4 + 75v_4^3 - 150v_4^2v_5 - 75v_4v_5^2 - 75v_4^2v_6 - 75v_4^2v_6 - 2v_5 - 150v_5v_6^2 + 300v_4v_5v_6 + v_6 + 75v_6^3 = 0.0027$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ภายใต้การใช้นโยบายของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{If } i = 6, v_5 + 75v_5^3 - 150v_5^2v_6 - 75v_5v_7^2 - 75v_5^2v_7 - 2v_6 - 150v_6v_7^2 + 300v_5v_6v_7 + v_7 + 75v_7^3 = 0.0027$$

$$\text{If } i = 7, v_6 + 75v_6^3 - 150v_6^2v_7 - 75v_6v_8^2 - 75v_6^2v_8 - 2v_7 - 150v_7v_8^2 + 300v_6v_7v_8 + v_8 + 75v_8^3 = 0.0027$$

$$\text{If } i = 8, v_7 + 75v_7^3 - 150v_7^2v_8 - 75v_7v_9^2 - 75v_7^2v_9 - 2v_8 - 150v_8v_9^2 + 300v_7v_8v_9 + v_9 + 75v_9^3 = 0.0027$$

$$\text{If } i = 9, v_8 + 75v_8^3 - 150v_8^2v_9 - 75v_8v_{10}^2 - 75v_8^2v_{10} - 2v_9 - 150v_9v_{10}^2 + 300v_8v_9v_{10} + v_{10} + 75v_{10}^3 = 0.0027$$

$$\text{If } i = 10, 2v_9 - 2v_{10} = 0.0027. \text{ Then}$$

$$F(V) = (f_1(v_1, \dots, v_n), f_2(v_1, \dots, v_n), \dots, f_n(v_1, \dots, v_n))^t, \text{ where}$$

$$f_1(v_1, \dots, v_n) := -152v_1 - 74v_2 + 300v_1v_2 - 150v_1v_2^2 - 75v_2^2 + 75v_2^3 + 75.9973,$$

$$f_2(v_1, \dots, v_n) := v_1 + 75v_1^3 - 150v_1^2v_2 - 75v_1v_3^2 - 75v_1^2v_3 - 2v_2 - 150v_2v_3^2 + 300v_1v_2v_3 + v_3 + 75v_3^3 - 0.0027,$$

$$f_3(v_1, \dots, v_n) := v_2 + 75v_2^3 - 150v_2^2v_3 - 75v_2v_4^2 - 75v_2^2v_4 - 2v_3 - 150v_3v_4^2 + 300v_2v_3v_4 + v_4 + 75v_4^3 - 0.0027,$$

$$f_4(v_1, \dots, v_n) := v_2 + 75v_2^3 - 150v_2^2v_3 - 75v_2v_4^2 - 75v_2^2v_4 - 2v_3 - 150v_3v_4^2 + 300v_2v_3v_4 + v_4 + 75v_4^3 - 0.0027,$$

$$f_5(v_1, \dots, v_n) := v_4 + 75v_4^3 - 150v_4^2v_5 - 75v_4v_6^2 - 75v_4^2v_6 - 2v_5 - 150v_5v_6^2 + 300v_4v_5v_6 + v_6 + 75v_6^3 - 0.0027,$$

$$f_6(v_1, \dots, v_n) := v_5 + 75v_5^3 - 150v_5^2v_6 - 75v_5v_7^2 - 75v_5^2v_7 - 2v_6 - 150v_6v_7^2 + 300v_5v_6v_7 + v_7 + 75v_7^3 - 0.0027,$$

$$f_7(v_1, \dots, v_n) := v_6 + 75v_6^3 - 150v_6^2v_7 - 75v_6v_8^2 - 75v_6^2v_8 - 2v_7 - 150v_7v_8^2 + 300v_6v_7v_8 + v_8 + 75v_8^3 - 0.0027,$$

$$f_8(v_1, \dots, v_n) := v_7 + 75v_7^3 - 150v_7^2v_8 - 75v_7v_9^2 - 75v_7^2v_9 - 2v_8 - 150v_8v_9^2 + 300v_7v_8v_9 + v_9 + 75v_9^3 - 0.0027,$$

$$f_9(v_1, \dots, v_n) := v_8 + 75v_8^3 - 150v_8^2v_9 - 75v_8v_{10}^2 - 75v_8^2v_{10} - 2v_9 - 150v_9v_{10}^2 + 300v_8v_9v_{10} + v_{10} + 75v_{10}^3 - 0.0027,$$

$$f_{10}(v_1, \dots, v_n) := 2v_9 - 2v_{10} - 0.0027.$$

We choosing that

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Then

$$F(v^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \end{bmatrix}$$

$$\text{So, } v^{(1)} = v^{(0)} - A(v^{(0)})^{-1} F(v^{(0)}),$$

$$\text{Then } v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \\ -0.0027 \end{bmatrix},$$

$$\text{Then } v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.9748 \\ 0.9523 \\ 0.9324 \\ 0.9152 \\ 0.9006 \\ 0.8887 \\ 0.8794 \\ 0.8728 \\ 0.8688 \\ 0.8675 \end{bmatrix}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Then

$$F(v^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0004 \\ 0.0003 \\ 0.0002 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

So, $y_1 = F(v^{(1)}) - F(v^{(0)})$,

$$= \begin{bmatrix} 0.0031 \\ 0.0030 \\ 0.0029 \\ 0.0029 \\ 0.0028 \\ 0.0027 \\ 0.0027 \\ 0.0027 \\ 0.0027 \\ 0.0027 \end{bmatrix}.$$

Then $s_1 = v^{(1)} - v^{(0)}$,

$$= \begin{bmatrix} -0.0252 \\ -0.0477 \\ -0.0676 \\ -0.0848 \\ -0.0994 \\ -0.1113 \\ -0.1206 \\ -0.1272 \\ -0.1312 \\ -0.1325 \end{bmatrix}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

We have $A_1^{-1} = A_0^{-1} + \left(\frac{1}{s_1' A_0^{-1} y_1} \right) [(s_1 - A_0^{-1} y_1) s_1' A_0^{-1}]$,

$$= \begin{bmatrix} -0.9858 & -0.9721 & -0.9590 & -0.9469 & -0.9361 & -0.9268 & -0.9192 & -0.9133 & -0.9094 & -0.4537 \\ -0.9757 & -1.9520 & -1.9296 & -1.9089 & -1.8904 & -1.8744 & -1.8613 & -1.8513 & -1.8445 & -0.9206 \\ -0.9687 & -1.9383 & -2.9095 & -2.8828 & -2.8590 & -2.8385 & -2.8216 & -2.8087 & -2.8000 & -1.3978 \\ -0.9642 & -1.9294 & -2.8964 & -3.8659 & -3.8386 & -3.8151 & -3.7958 & -3.7810 & -3.7711 & -1.8830 \\ -0.9615 & -1.9240 & -2.8885 & -3.8557 & -4.8263 & -4.8010 & -4.7802 & -4.7643 & -4.7536 & -2.3741 \\ -0.9600 & -1.9211 & -2.8841 & -3.8501 & -4.8196 & -5.7933 & -5.7717 & -5.7552 & -5.7441 & -2.8692 \\ -0.9593 & -1.9197 & -2.8821 & -3.8475 & -4.8164 & -5.7897 & -6.7677 & -6.7509 & -6.7396 & -3.3670 \\ -0.9591 & -1.9192 & -2.8814 & -3.8465 & -4.8153 & -5.7884 & -6.7663 & -7.7494 & -7.7380 & -3.8661 \\ -0.9590 & -1.9191 & -2.8813 & -3.8463 & -4.8151 & -5.7881 & -6.7660 & -7.7491 & -8.7377 & -4.3660 \\ -0.9590 & -1.9191 & -2.8813 & -3.8463 & -4.8151 & -5.7881 & -6.7660 & -7.7491 & -8.7377 & -4.8660 \end{bmatrix}.$$

Next, $v^{(2)} = v^{(1)} - A(v^{(1)})^{-1} F(v^{(1)})$,

$$= \begin{bmatrix} 0.9764 \\ 0.9549 \\ 0.9358 \\ 0.9191 \\ 0.9048 \\ 0.8930 \\ 0.8838 \\ 0.8772 \\ 0.8733 \\ 0.8719 \end{bmatrix}.$$

Then

$$F(v^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0.0004 \\ 0.0003 \\ 0.0002 \\ 0.0001 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{So, } y_2 = F(v^{(2)}) - F(v^{(1)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0005 \\ -0.0004 \\ -0.0003 \\ -0.0002 \\ -0.0001 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Then } s_2 = v^{(2)} - v^{(1)},$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0.0026 \\ 0.0034 \\ 0.0039 \\ 0.0042 \\ 0.0043 \\ 0.0044 \\ 0.0044 \\ 0.0044 \\ 0.0044 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Then } A_2^{-1} = A_1^{-1} + \left(\frac{1}{s_2' A_1^{-1} y_2} \right) \left[(s_2 - A_1^{-1} y_2) s_2' A_1^{-1} \right],$$

$$= \begin{bmatrix} -0.9402 & -0.8826 & -0.8290 & -0.7805 & -0.7380 & -0.7021 & -0.6731 & -0.6512 & -0.6366 & -0.3146 \\ -0.9055 & -1.8146 & -1.7299 & -1.6533 & -1.5860 & -1.5292 & -1.4832 & -1.4485 & -1.4253 & -0.7069 \\ -0.8869 & -1.7780 & -2.6765 & -2.5846 & -2.5039 & -2.4357 & -2.3805 & -2.3388 & -2.3109 & -1.1485 \\ -0.8777 & -1.7600 & -2.6502 & -3.5507 & -3.4634 & -3.3895 & -3.3297 & -3.2846 & -3.2544 & -1.6196 \\ -0.8738 & -1.7522 & -2.6388 & -3.5360 & -4.4458 & -4.3693 & -4.3075 & -4.2608 & -4.2295 & -2.1069 \\ -0.8723 & -1.7494 & -2.6346 & -3.5306 & -4.4393 & -5.3619 & -5.2993 & -5.2520 & -5.2203 & -2.6022 \\ -0.8719 & -1.7486 & -2.6334 & -3.5291 & -4.4374 & -5.3598 & -6.2969 & -6.2494 & -6.2176 & -3.1008 \\ -0.8719 & -1.7484 & -2.6332 & -3.5288 & -4.4371 & -5.3594 & -6.2964 & -7.2489 & -7.2171 & -3.6006 \\ -0.8719 & -1.7484 & -2.6332 & -3.5288 & -4.4371 & -5.3593 & -6.2964 & -7.2489 & -8.2171 & -4.1006 \\ -0.8719 & -1.7484 & -2.6332 & -3.5288 & -4.4371 & -5.3593 & -6.2964 & -7.2489 & -8.2171 & -4.1006 \end{bmatrix},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Then, } \mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{v}^{(2)} - A(\mathbf{v}^{(2)})^{-1} F(\mathbf{v}^{(2)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9762 \\ 0.9546 \\ 0.9355 \\ 0.9187 \\ 0.9044 \\ 0.8927 \\ 0.8835 \\ 0.8769 \\ 0.8729 \\ 0.8716 \end{bmatrix}.$$

Then

$$F(\mathbf{v}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

$$\text{So, } \mathbf{y}_3 = F(\mathbf{v}^{(3)}) - F(\mathbf{v}^{(2)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{So, } s_3 = v^{(3)} - v^{(2)},$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0002 \\ -0.0003 \\ -0.0003 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Then } A_3^{-1} = A_2^{-1} + \left(\frac{1}{s_3^t A_2^{-1} y_3} \right) \left[(s_3 - A_2^{-1} y_3) s_3^t A_2^{-1} \right],$$

$$= \begin{bmatrix} -0.9199 & -0.8433 & -0.7724 & -0.7088 & -0.6533 & -0.6067 & -0.5690 & -0.5407 & -0.5218 & -0.2562 \\ -0.8849 & -1.7746 & -1.6723 & -1.5802 & -1.4998 & -1.4320 & -1.3773 & -1.3361 & -1.3086 & -0.6474 \\ -0.8718 & -1.7486 & -2.6342 & -2.5310 & -2.4407 & -2.3644 & -2.3028 & -2.2564 & -2.2253 & -1.1049 \\ -0.8679 & -1.7408 & -2.6226 & -3.5158 & -3.4222 & -3.3430 & -3.2790 & -3.2308 & -3.1985 & -1.5912 \\ -0.8672 & -1.7394 & -2.6203 & -3.5126 & -4.4182 & -4.3382 & -4.2736 & -4.2248 & -4.1921 & -2.0879 \\ -0.8672 & -1.7395 & -2.6203 & -3.5125 & -4.4179 & -5.3378 & -5.2730 & -5.2241 & -5.1914 & -2.5875 \\ -0.8673 & -1.7396 & -2.6205 & -3.5128 & -4.4181 & -5.3380 & -6.2732 & -6.2242 & -6.1915 & -3.0875 \\ -0.8674 & -1.7397 & -2.6206 & -3.5128 & -4.4182 & -5.3381 & -6.2732 & -7.2243 & -7.1915 & -3.5875 \\ -0.8674 & -1.7397 & -2.6206 & -3.5128 & -4.4182 & -5.3381 & -6.2732 & -7.2243 & -8.1915 & -4.0875 \\ -0.8674 & -1.7397 & -2.6206 & -3.5128 & -4.4182 & -5.3381 & -6.2732 & -7.2243 & -8.1915 & -4.0875 \end{bmatrix}.$$

Finally,

$$v^{(4)} = v^{(3)} - A(v^{(3)})^{-1} F(v^{(3)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9762 \\ 0.9546 \\ 0.9355 \\ 0.9187 \\ 0.9044 \\ 0.8927 \\ 0.8835 \\ 0.8769 \\ 0.8729 \\ 0.8716 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

So,

$$F(v^{(4)}) = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Then $y_4 = F(v^{(4)}) - F(v^{(3)})$,

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Then $s_4 = v^{(4)} - v^{(3)}$,

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Then } A_4^{-1} = A_3^{-1} + \left(\frac{1}{s_4' A_3^{-1} y_4} \right) \left[(s_4 - A_3^{-1} y_4) s_4' A_3^{-1} \right],$$

$$= \begin{bmatrix} -0.7709 & -0.5802 & -0.4303 & -0.3125 & -0.2183 & -0.1424 & -0.0823 & -0.0372 & -0.0072 & -0.0039 \\ -0.7537 & -1.5430 & -1.3711 & -1.2313 & -1.1168 & -1.0232 & -0.9487 & -0.8928 & -0.8554 & -0.4184 \\ -0.7826 & -1.5912 & -2.4295 & -2.2939 & -2.1804 & -2.0866 & -2.0116 & -1.9551 & -1.9174 & -0.9493 \\ -0.8059 & -1.6313 & -2.4802 & -3.3509 & -3.2411 & -3.1498 & -3.0764 & -3.0212 & -2.9843 & -1.4829 \\ -0.8167 & -1.6502 & -2.5043 & -3.3783 & -4.2707 & -4.1808 & -4.1086 & -4.0541 & -4.0177 & -1.9997 \\ -0.8201 & -1.6562 & -2.5120 & -3.3871 & -4.2803 & -5.1909 & -5.1190 & -5.0648 & -5.0285 & -2.5052 \\ -0.8207 & -1.6574 & -2.5136 & -3.3889 & -4.2822 & -5.1929 & -6.1210 & -6.0669 & -6.0306 & -3.0062 \\ -0.8208 & -1.6575 & -2.5137 & -3.3890 & -4.2823 & -5.1930 & -6.1212 & -7.0670 & -7.0308 & -3.5063 \\ -0.8208 & -1.6575 & -2.5137 & -3.3890 & -4.2823 & -5.1930 & -6.1212 & -7.0670 & -8.0307 & -4.0063 \\ -0.8208 & -1.6575 & -2.5137 & -3.3890 & -4.2823 & -5.1930 & -6.1212 & -7.0670 & -8.0307 & -4.5063 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Hence, } v^{(5)} = v^{(4)} - A(v^{(4)})^{-1} F(v^{(4)}),$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9762 \\ 0.9546 \\ 0.9355 \\ 0.9187 \\ 0.9044 \\ 0.8927 \\ 0.8835 \\ 0.8769 \\ 0.8729 \\ 0.8716 \end{bmatrix}.$$

We get the solution as show in Table 4.14 and Figure 4.14.

Table 4.14: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9748	0.9523	0.9324	0.9152	0.9006	0.8887	0.8794	0.8728	0.8688	0.8675
2	0.9764	0.9549	0.9358	0.9191	0.9048	0.8930	0.8838	0.8772	0.8733	0.8719
3	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8927	0.8835	0.8769	0.8729	0.8716
4	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8927	0.8835	0.8769	0.8729	0.8716
5	0.9762	0.9546	0.9355	0.9187	0.9044	0.8927	0.8835	0.8769	0.8729	0.8716

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

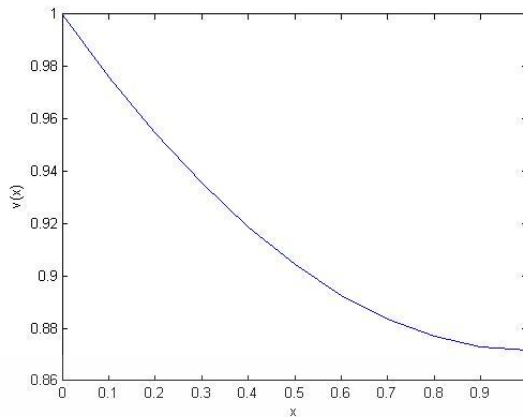


Figure 4.14: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

Example 4.3.2 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$. We get the solution as show in Table 4.15 and Figure 4.15.

Table 4.15: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9749	0.9524	0.9325	0.9153	0.9008	0.8889	0.8796	0.8730	0.8691	0.8678
2	0.9764	0.9550	0.9359	0.9192	0.9049	0.8932	0.8840	0.8774	0.8735	0.8722
3	0.9762	0.9547	0.9355	0.9188	0.9045	0.8928	0.8836	0.8771	0.8731	0.8718
4	0.9762	0.9547	0.9355	0.9188	0.9045	0.8928	0.8836	0.8771	0.8731	0.8718
5	0.9762	0.9547	0.9355	0.9188	0.9045	0.8928	0.8836	0.8770	0.8731	0.8718

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

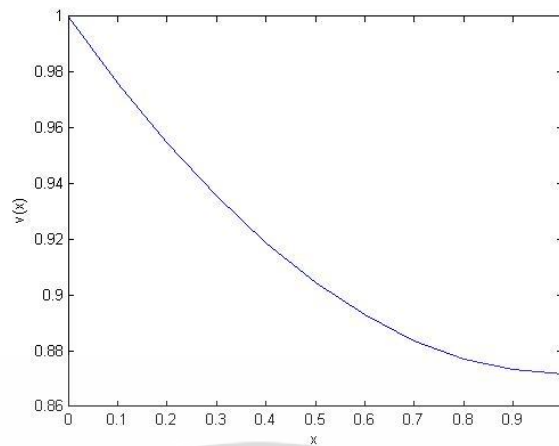


Figure 4.15: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

Example 4.3.3 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$. We get the solution as show in Table 4.16 and Figure 4.16.

Table 4.16: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9749	0.9524	0.9326	0.9154	0.9009	0.8890	0.8798	0.8732	0.8693	0.8680
2	0.9764	0.9550	0.9359	0.9192	0.9050	0.8933	0.8841	0.8776	0.8737	0.8724
3	0.9762	0.9547	0.9356	0.9189	0.9046	0.8929	0.8839	0.8772	0.8733	0.8720
4	0.9762	0.9547	0.9356	0.9189	0.9047	0.8929	0.8839	0.8772	0.8733	0.8720
5	0.9762	0.9547	0.9356	0.9189	0.9047	0.8929	0.8839	0.8772	0.8733	0.8720

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

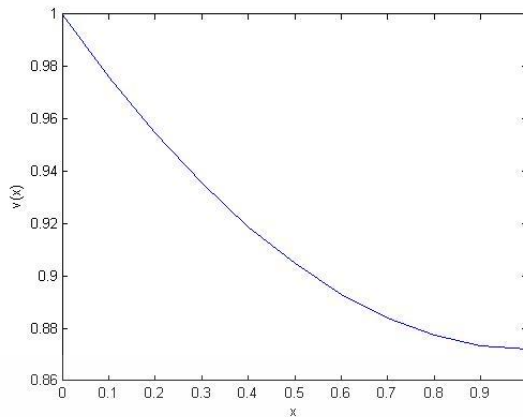


Figure 4.16: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

Example 4.3.4 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$. We get the solution as show in Table 4.17 and Figure 4.17.

Table 4.17: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9749	0.9525	0.9327	0.9156	0.9011	0.8893	0.8801	0.8736	0.8697	0.8685
2	0.9764	0.9551	0.9361	0.9194	0.9052	0.8936	0.8845	0.8780	0.8741	0.8729
3	0.9763	0.9548	0.9357	0.9191	0.9049	0.8932	0.8841	0.8776	0.8737	0.8725
4	0.9763	0.9548	0.9357	0.9191	0.9049	0.8932	0.8841	0.8776	0.8737	0.8725
5	0.9763	0.9548	0.9357	0.9191	0.9049	0.8932	0.8841	0.8776	0.8737	0.8725

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

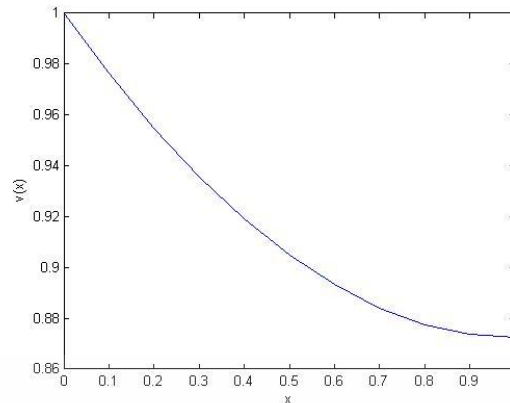


Figure 4.17: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = 0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

Example 4.3.5 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$. We get the solution as show in Table 4.18 and Figure 4.18.

Table 4.18: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9747	0.9521	0.9321	0.9148	0.9001	0.8881	0.8787	0.8720	0.8679	0.8665
2	0.9763	0.9548	0.9355	0.9187	0.9043	0.8925	0.8832	0.8765	0.8724	0.8710
3	0.9761	0.9545	0.9352	0.9184	0.9040	0.8921	0.8851	0.8799	0.8721	0.8706
4	0.9761	0.9545	0.9352	0.9184	0.9040	0.8921	0.8851	0.8799	0.8721	0.8706
5	0.9761	0.9545	0.9352	0.9184	0.9040	0.8921	0.8851	0.8799	0.8721	0.8706

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

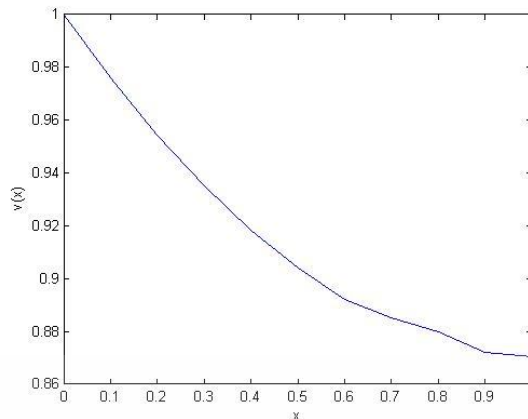


Figure 4.18: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.001$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

Example 4.3.6 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$. We get the solution as show in Table 4.19 and Figure 4.19.

Table 4.19: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9748	0.9522	0.9323	0.9150	0.9004	0.8884	0.8791	0.8724	0.8684	0.8670
2	0.9763	0.9548	0.9357	0.9189	0.9046	0.8928	0.8835	0.8769	0.8728	0.8715
3	0.9761	0.9545	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711
4	0.9761	0.9546	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711
5	0.9761	0.9546	0.9353	0.9185	0.9042	0.8924	0.8831	0.8765	0.8725	0.8711

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

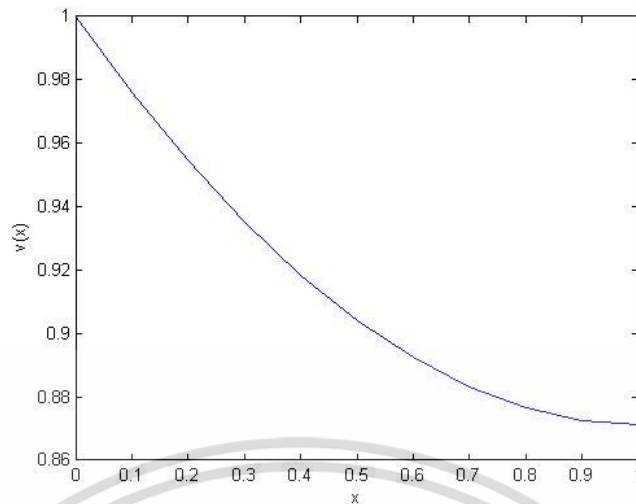


Figure 4.19: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.0005$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

Example 4.3.7 Assuming that the third grade fluid is flowing on a single moving belt. The thickness of the thin film is $\delta = 1$. The speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$. We get the solution as show in Table 4.20 and Figure 4.20.

Table 4.20: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$	$v_9^{(k)}$	$v_{10}^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.9748	0.9523	0.9324	0.9151	0.9005	0.8886	0.8793	0.8726	0.8686	0.8673
2	0.9763	0.9549	0.9357	0.9190	0.9047	0.8929	0.8837	0.8770	0.8730	0.8717
3	0.9761	0.9546	0.9354	0.9186	0.9043	0.8925	0.8833	0.8767	0.8727	0.8713
4	0.9762	0.9546	0.9354	0.9186	0.9043	0.8925	0.8833	0.8767	0.8727	0.8713
5	0.9762	0.9546	0.9354	0.9186	0.9043	0.8925	0.8833	0.8767	0.8727	0.8713

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

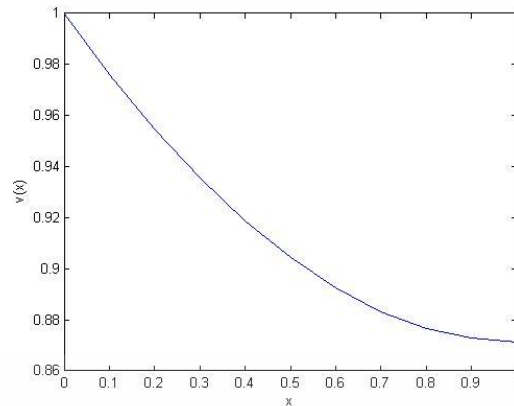


Figure 4.20: Thin film flow velocity of a third grade fluid on a single moving belt with speed of a considered moving belt is $v(0) = 1$. The rate of change of the thin film flow velocity about the frontier is $v'(1) = -0.00025$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 5

Discussion and Conclusion

5.1 Discussions

5.1.1 Paralleled moving belts

Assuming that there are two paralleled moving belts whose have space 0.001 m. The both of vertical moving belts has same speed that 1 m/s. We will consider physical parameters in 6 cases as show in Table 5.1. By using the finite difference equations Eqs. (3.12-3.14) with the Newton iterative technique Eqs. (3.15-3.17), we can obtain the thin film flow velocity of third grade fluid between a parallel moving belts in each physical parameters as shown in Table 5.1 and Figure 5.1-5.2. We can see that the ratio between the maximum speed and the dynamic viscosity does not affect to the thin film flow velocity. However, the ratio between the density and dynamic viscosity does higher influence to the flow velocity than another ratios. If the density is increasing, the thin film flow velocity becoming slow down as well.

Table 5.1: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each physical parameters m and β by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.

m	β	$x = 0$	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$
0.5000	0.2500	1.0000	0.9538	0.9382	0.9538	1.0000
0.5000	0.5000	1.0000	0.9545	0.9388	0.9545	1.0000
0.5000	0.7500	1.0000	0.9551	0.9394	0.9551	1.0000
0.1250	0.5000	1.0000	0.9883	0.9844	0.9883	1.0000
0.2500	0.5000	1.0000	0.9768	0.9690	0.9768	1.0000
0.7500	0.5000	1.0000	0.9337	0.9103	0.9337	1.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

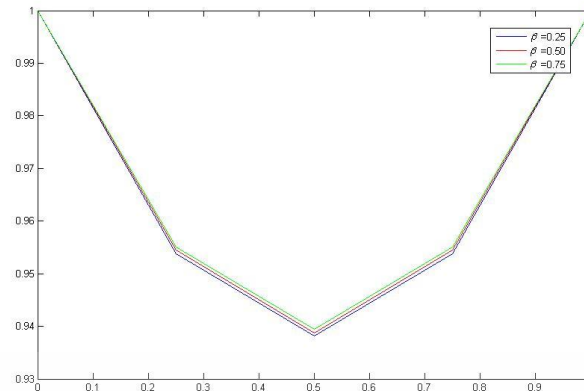


Figure 5.1: Comparison of thin film flow velocity ($m = 0.50$)



Figure 5.2: Comparison of thin film flow velocity ($\beta = 0.50$)

5.1.2 Single moving belt with the Newton iterative techniques

Assuming that there is a moving belt in a third grade fluid basis. The basin is filled by the engine oil SAE 15W-40 with the viscosity, $31.350 \text{ mm}^2 / \text{s}$ and the density, $0.8477 \text{ g} / \text{cm}^3$ at 70°C . The material constant of the engine oil is 1.5675×10^{-5} . The moving belt has speed $1 \text{ m} / \text{s}$ and the uniform thickness of fluid film is 0.001 m . We will consider physical parameters in 4 cases as show in Table 5.2. By using the finite difference equations Eqs.(3.30-3.32) with the Newton iterative techniques Eqs.(3.33-3.39), we can obtain the thin fluid film flow velocity in each layers. If the speed of moving belt is uniform and the rates of change of fluid film flow velocity over the ended layer are nonnegative due to external force, the approximated flow velocity in each layers are show in Table 5.2 and Figure 5.3.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

However, the cases of rates of change of fluid film flow velocity over the ended layer are negative due to gravity force and some external force are also investigated as show in Table 5.3 and Figure 5.4.

Table 5.2: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.

$x \setminus v_r$	0.0000	0.00025	0.0005	0.0010
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9762	0.9762	0.9762	0.9763
0.2	0.9546	0.9547	0.9547	0.9548
0.3	0.9355	0.9355	0.9356	0.9357
0.4	0.9187	0.9188	0.9189	0.9191
0.5	0.9044	0.9045	0.9047	0.9049
0.6	0.8927	0.8928	0.8929	0.8932
0.7	0.8835	0.8836	0.8838	0.8841
0.8	0.8769	0.8771	0.8772	0.8776
0.9	0.8729	0.8731	0.8733	0.8737
1.0	0.8716	0.8718	0.8720	0.8725

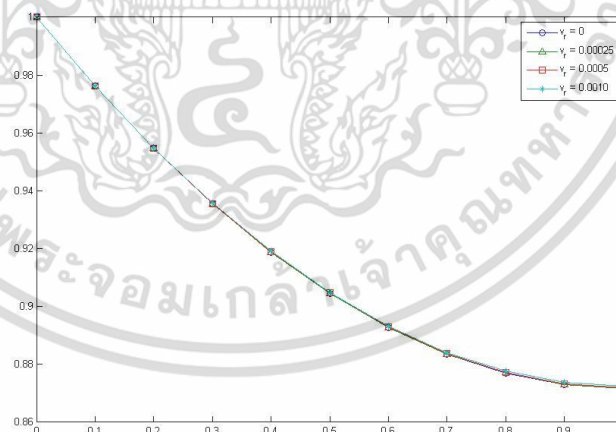


Figure 5.3: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$. by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 5.3: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$. by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.

$x \setminus v_r$	-0.001	-0.0005	-0.00025
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9761	0.9761	0.9762
0.2	0.9545	0.9546	0.9546
0.3	0.9352	0.9353	0.9354
0.4	0.9184	0.9185	0.9186
0.5	0.9040	0.9042	0.9043
0.6	0.8921	0.8924	0.8925
0.7	0.8828	0.8831	0.8833
0.8	0.8761	0.8765	0.8767
0.9	0.8721	0.8725	0.8727
1.0	0.8706	0.8711	0.8713

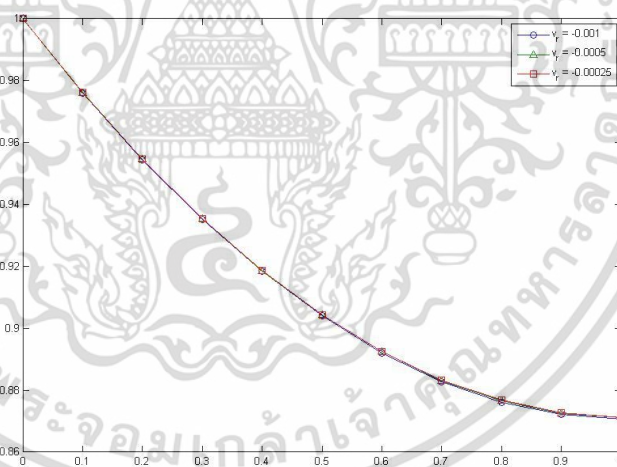


Figure 5.4: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Newton Iterative methods.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 Single moving belt with the Quasi-Newton iterative techniques

Assuming that there is a moving belt in a third grade fluid basis. The basin is filled by the engine oil SAE 15W-40 with the viscosity, $31.350 \text{ mm}^2 / \text{s}$ and the density, $0.8477 \text{ g} / \text{cm}^3$ at 70°C . The material constant of the engine oil is 1.5675×10^{-5} . The moving belt has speed $1 \text{ m} / \text{s}$ and the uniform thickness of fluid film is 0.001 m . We will consider physical parameters in 4 cases as show in Table 5.4. By using the finite difference equations Eqs.(3.30-3.32) with the Quasi-Newton iterative techniques Eqs.(3.40-3.48), we can obtain the thin fluid film flow velocity in each layers. If the speed of moving belt is uniform and the rates of change of fluid film flow velocity over the ended layer are nonnegative due to external force, the approximated flow velocity in each layers are show in Table 5.4 and Figure 5.5. However, the cases of rates of change of fluid film flow velocity over the ended layer are negative due to gravity force and some external force are also investigated as show in Table 5.5 and Figure 5.6.

Table 5.4: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$, using the finite difference and Quasi-Newton Iterative methods.

$x \setminus y_r$	0.0000	0.00025	0.0005	0.0010
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9762	0.9762	0.9762	0.9763
0.2	0.9546	0.9547	0.9547	0.9548
0.3	0.9355	0.9355	0.9356	0.9357
0.4	0.9187	0.9188	0.9189	0.9191
0.5	0.9044	0.9045	0.9047	0.9049
0.6	0.8927	0.8928	0.8929	0.8932
0.7	0.8835	0.8836	0.8839	0.8841
0.8	0.8769	0.8771	0.8772	0.8776
0.9	0.8729	0.8731	0.8733	0.8737
1.0	0.8716	0.8718	0.8720	0.8725

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

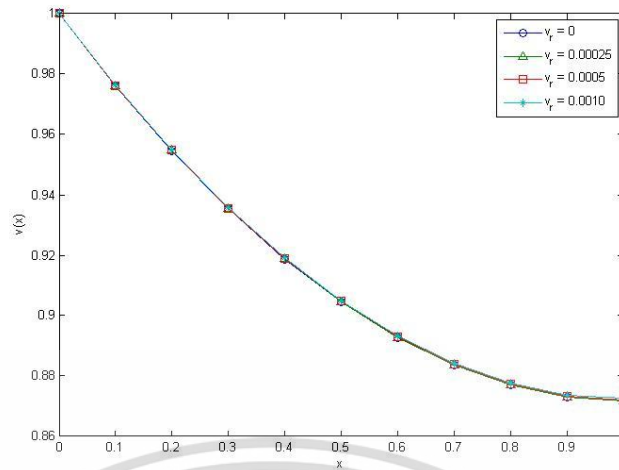


Figure 5.5: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton Iterative methods.

Table 5.5: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$, using the finite difference and Quasi-Newton Iterative methods.

$x \setminus v_r$	-0.001	-0.0005	-0.00025
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9761	0.9761	0.9762
0.2	0.9545	0.9546	0.9546
0.3	0.9352	0.9353	0.9354
0.4	0.9184	0.9185	0.9186
0.5	0.9040	0.9042	0.9043
0.6	0.8921	0.8924	0.8925
0.7	0.8828	0.8831	0.8833
0.8	0.8761	0.8765	0.8767
0.9	0.8721	0.8725	0.8727
1.0	0.8706	0.8711	0.8713

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

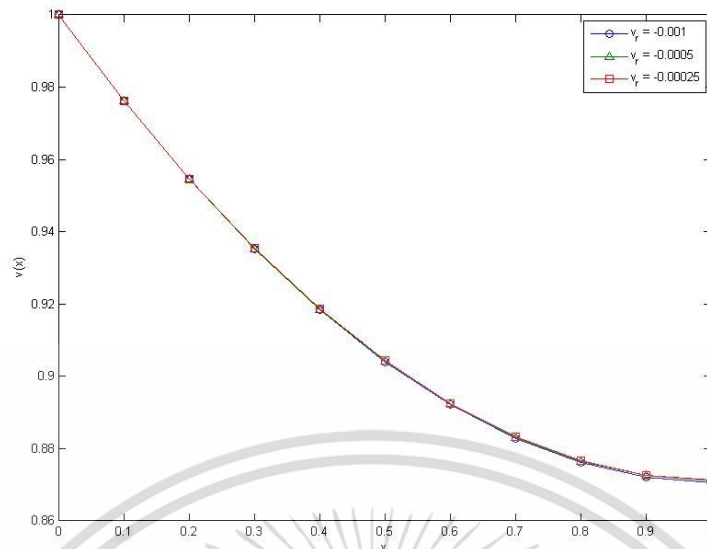


Figure 5.6: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$ by using the finite difference methods and Quasi-Newton Iterative methods.

Table 5.6 shows the comparison of nondimensional thin film flow velocity using Optimal homotopy asymptotic method (OHAM), Adomain decomposition method (ADM), Newton iterative, Quasi-Newton iterative methods, with $m = 0.5$ and $\beta = 0.5$.

Table 5.6: Comparison of nondimensional thin film flow velocity using Optimal homotopy asymptotic method (OHAM), Adomain decomposition method (ADM), Newton iterative, Quasi-Newton iterative methods, with $m = 0.5$ and $\beta = 0.5$.

x	OHAM [4]	ADM [4]	Newton iterative	Quasi- Newton iterative
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9792	0.9625	0.9592	0.9592
0.2	0.9518	0.9261	0.9219	0.9219
0.3	0.8880	0.8926	0.8882	0.8882
0.4	0.8581	0.8628	0.8584	0.8584
0.5	0.8322	0.8370	0.8326	0.8326
0.6	0.8106	0.8155	0.8111	0.8111
0.7	0.7935	0.7985	0.7940	0.7940
0.8	0.7812	0.7862	0.7817	0.7817
0.9	0.7737	0.7787	0.7743	0.7743
1.0	0.7712	0.7762	0.7718	0.7718

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 Conclusions

In numerical simulation, combinations of finite difference methods and Newton-iterative method are employed to investigate the approximate solution for a thin film flow velocity of third grade fluid on two paralleled moving belts and a single moving belt. The results of this study show that the cohesiveness of fluid moves on a between paralleled moving belts and a single moving belt. The results of the thin film flow velocity of a third grade fluid on paralleled moving belts are shown for the fluid parameters β and m are varied. In the case of the thin film flow velocity of third grade fluid on two paralleled moving belts the parameter m has higher effect on thin fluid film flow velocity than the parameter β .

In numerical simulation, combinations of finite difference methods and Quasi-Newton iterative method are employed to investigate the approximate solution for a thin film flow velocity of third grade fluid on a single moving belt. Both numeric and analytic results are obtained for the problem. When comparing between combinations of finite difference methods and Newton-iterative and combinations of finite difference methods and Quasi-Newton iterative we find that give similar results. The number of calculations of the Quasi-Newton iterative method must be iterative more times than the Newton iterative method.

In numerical simulations, the Quasi-Newton iterative method has advantages that the method give less computing time than the Newton iterative computing time because it is not need to find the solution of a system of linear equations. These means that the Quasi-Newton iterative method gives a simpler computational mainpulation than the Newton iterative method.

References

- [1] A. M. Siddiqui, R. Mahmood, and Q. K. Ghori, "Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method," *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 7, no. 1, pp. 7–14, 2006.
- [2] A. M. Siddiqui, R. Mahmood, and Q. K. Ghori, "Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 35, no. 1, pp. 140–147, 2008.
- [3] A. M. Siddiqui, A. A. Farooq, T. Haroon, and B. S. Babcock, "A comparison of variational iteration and Adomian decomposition methods in solving nonlinear thin film flow problems," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 97-100, pp. 4911-4919, 2012.
- [4] F. Mabood and N. Pochai, "Comparison of Optimal Homotopy Asymptotic and Adomian Decomposition Methods for a Thin Film Flow of a Third Grade Fluid on a Moving Belt," *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2015, Article ID 642835, 4 pages, 2015.
- [5] Burden. RL and Faires. JD, *Numerical Analysis* (Thomson Brooks/Cole, Singapore, 2005).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017)
 Department of Mathematics, Faculty of Science
 Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand



Numerical simulation for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts

Pantira Klankaw^{a,1,*} and Nopparat Pochai^{a,b}

^aDepartment of Mathematics, Faculty of Science
 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10620, Thailand

^bCentre of Excellence in Mathematics
 CHE, Si Ayutthaya Rd., Bangkok 10400, Thailand

Abstract

A thin film flow problem on a moving belt has been useful in scientific, engineering, biological and biomedical problems. A thin film flow velocity on a moving belt can be modeled by a nonlinear differential equation. The model is provides the film flow velocity in each thickness layers. In this research, a finite difference method and an iterative method are used to approximate the solutions of a nonlinear governing equation. Their numerical simulations of a thin film flow velocity of a third grade fluid in a parallel moving belts with varied physical parameters are investigated. The proposed numerical techniques give good agreement approximated solutions in cases of a similar parallel belts speed.

Keywords: thin fluid film, flow velocity, numerical simulation, iterative method, paralleled moving belts, third grade fluid.

2010 MSC: Primary 34B15; Secondary 65L10, 65L12.

1 Introduction

Many physical systems in fluid mechanics generally lead to nonlinear ordinary or partial differential equations. Due to complexity of Non-Newtonian fluid, it is difficult to solve nonlinear differential equation. The non-Newtonian fluid flow between two-parallel plates exhibiting characteristics of both ideal fluids and elastic solids and showing partial elastic recovery, after-deformation; these are categorized as "third grade fluid". A second grade fluid is one of the most acceptable fluids in this sub class of Non-Newtonian fluid, because of its mathematical simplicity in comparison to third grade and fourth grade fluids. In related literature many authors have effectively treated the complicated nonlinear equations governing the flow of a third grade fluid. It is also observed that the iterative method is a powerful approximate analytical

*This research was financially supported by the Center of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education, Thailand.

¹Corresponding author.

^bSpeaker.

E-mail address: lukpla_g4@hotmail.com (P. Klankaw), nop_math@yahoo.com (N. Pochai).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

tool that is simple and straightforward and does not require the existence of any small or large parameter as does traditional perturbation method. Iterative method has successfully been applied to a number of nonlinear problems arising in the science and engineering by various researchers. This proves the validity and acceptability of iterative method as a useful solution technique.

In this research, a couple of a finite difference method an iterative method is used to approximate the solutions of a nonlinear governing equation. The proposed numerical techniques give good agreement approximated solutions in cases of a similar parallel belts speed.

2 Thin Fluid Film Flow Velocity of a Third Grade Fluid Model

The thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on parallel moving belts is governed by the following nonlinear boundary value problem. [1-4].

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{6(\beta_2 + \beta_3)}{\mu} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{\rho g}{\mu} = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq \delta, \quad (2.1)$$

subject to the boundary conditions

$$v(0) = u_l, \quad (2.2)$$

$$v(\delta) = u_r, \quad (2.3)$$

where v is the fluid velocity (m/s), ρ is the density (Kg/m³), μ is the dynamic viscosity (Pa·s), β_2, β_3 are the material constants of the third grade fluid (non-units), g is the gravity acceleration (m/s²), δ is the uniform thickness of the fluid film (m), and u_l, u_r are the left speed belt and the right speed belt (m/s), respectively. Here, we introduce the following dimensionless variables,

$$x^* = \frac{x}{\delta}, \quad (2.4)$$

$$v^* = \frac{v}{\ell}, \quad (2.5)$$

$$\beta = \frac{(\beta_2 + \beta_3)\ell}{\mu\delta^2}, \quad (2.6)$$

$$m = \frac{\rho g \delta^2}{\mu\ell}, \quad (2.7)$$

where $\ell = \max\{u_l, u_r\}$. From Eqs.(2.4)-(2.7), we obtain the dimensionless form as (for simplicity we removed *),

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 6\beta \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \frac{d^2v}{dx^2} - m = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1, \quad (2.8)$$

subject to the boundary conditions

$$v(0) = v_l, \quad (2.9)$$

$$v(1) = v_r. \quad (2.10)$$

3 Numerical Techniques

3.1 Finite difference method for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid model

We will approximate the solution by using finite difference methods for nonlinear boundary value problem with Dirichlet boundary conditions Eq.(2.8)-(2.10) that can be written in a compact form as below,

$$v'' = \frac{m}{1 + 6\beta(v')^2}, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1, \quad (3.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

subject to

$$v(0) = v_l, \quad (3.2)$$

$$v(1) = v_r. \quad (3.3)$$

We divide $[0, 1]$ into $N+1$ subintervals that endpoints are at $x_i = a+ih$, for all $i = 0, 1, \dots, N+1$, where $h = 1/(N+1)$. By using the centered finite difference method [5], the finite difference equation can be written as follows,

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = \frac{m}{1 + \theta\beta\left(\frac{v_{i+1} + v_{i-1}}{2h}\right)^2}, \text{ for all } i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4)$$

and

$$v_0 = v_l, \quad (3.5)$$

$$v_{N+1} = v_r. \quad (3.6)$$

It follows that

$$v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^3) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^2 v_{i-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1} v_{i-1}^2) - 2v_i - 3\frac{\beta}{h^2}(v_i v_{i+1}^2) + 0\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1} v_i v_{i+1}) - 3\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1}^2 v_i) + v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i-1}^3) = mh^2, \text{ for all } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7)$$

For $i = 1$, plug the known value of the left boundary $v_0 = v_l$ to Eq.(3.7) on the left hand side, we obtain

$$\left(-2 - 3\frac{\beta}{h^2}\right)v_1 + \left(1 - \frac{3\beta}{2h^2}\right)v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1 v_2^2 + 0\frac{\beta}{h^2}v_1 v_2^2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 = mh^2 - v_l - \frac{3\beta}{2h^2}v_l^3. \quad (3.8)$$

For $i = 2, 3, \dots, N-1$, Eq.(3.7) becomes

$$v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2 v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1} v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_i v_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2 v_i + 0\frac{\beta}{h^2}v_{i-1} v_i v_{i+1} + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 = mh^2, \quad (3.9)$$

For $i = N$, plug the known value of the right boundary $v_{N+1} = v_r$ to Eq.(3.7) on the left hand side, we obtain

$$\left(1 - \frac{3\beta}{2h^2}\right)v_{N-1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2 + \left(-2 - 3\frac{\beta}{h^2}\right)v_N + \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2 v_N + 0\frac{\beta}{h^2}v_{N-1} v_N^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_N^3 = mh^2 - v_r - \frac{3\beta}{2h^2}v_r^3. \quad (3.10)$$

3.2 Newton Iterative method for the produced finite difference equations

Apply the Newton Iterative to the system of simultaneous on nonlinear equation Eqs.(3.8-3.10) that can be written in a vector form as $F(V) = (f_1(v_1, \dots, v_N), f_2(v_1, \dots, v_N), \dots, f_N(v_1, \dots, v_N))^T$, where

$$f_1(v_1, \dots, v_N) := \left(-2 - 3\frac{\beta}{h^2}\right)v_1 + \left(1 - \frac{3\beta}{2h^2}\right)v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1 v_2^2 + 0\frac{\beta}{h^2}v_1 v_2^2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 - (mh^2 - v_l - \frac{3\beta}{2h^2}v_l^3), \quad (3.11)$$

$$f_i(v_1, \dots, v_N) := v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2 v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1} v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_i v_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2 v_i + 0\frac{\beta}{h^2}v_{i-1} v_i v_{i+1} + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 - mh^2, \text{ for all } i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (3.12)$$

$$f_N(v_1, \dots, v_N) := \left(1 - \frac{3\beta}{2h^2}\right)v_{N-1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2 + \left(-2 - 3\frac{\beta}{h^2}\right)v_N + \frac{3\beta}{2h^2}v_{N-1}^2 v_N + 0\frac{\beta}{h^2}v_{N-1} v_N^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_N^3 - (mh^2 - v_r - \frac{3\beta}{2h^2}v_r^3). \quad (3.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The Jacobian matrix $J(V)$ for the system of Eqs.(3.11-3.13) is given by

$$J(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} & \frac{\partial f_1}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \frac{\partial f_2}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial v_m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial v_1} & \frac{\partial f_3}{\partial v_2} & \frac{\partial f_3}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial v_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v_1} & \frac{\partial f_m}{\partial v_2} & \frac{\partial f_m}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial v_m} \end{bmatrix}$$

Choosing that $V^0 = (v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)})^t$, we can obtain $F(V^{(0)})$ and $J(V^{(0)})$. Solving the linear system,

$$J(V^{(0)})U^{(0)} = -F(V^{(0)}), \quad (3.14)$$

we will obtain $U^{(0)}$. Then

$$V^{(1)} = V^{(0)} + U^{(0)}. \quad (3.15)$$

Continuing for $k = 2, 3, \dots$, we have

$$V^{(k)} = V^{(k-1)} + U^{(k-1)}, \quad (3.16)$$

where

$$U^{(k-1)} = -(J(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)}))^{-1} F(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)}). \quad (3.17)$$

4 Numerical experiment

Assume that there are two moving paralleled belts whose have space 0.001 m. The both of vertical moving belts has same speed that 1 m/s. We will consider physical parameters in 6 cases as show in Table 1. By using the finite difference equations Eqs.(3.8-3.10) with the Newton iterative technique Eqs.(3.11-3.17), we can obtain the thin film flow velocity of a third grade fluid between a parallel moving belts in each physical parameters as shown in Table (1-2) and Fig.1-3. We can see that the ratio between the maximum speed and the dynamic viscosity does not affect to the thin film flow velocity. However, the ratio between the density and dynamic viscosity does higher influence to the flow velocity than another ratios. If the density is increasing, the thin film flow velocity becoming slow down as well.

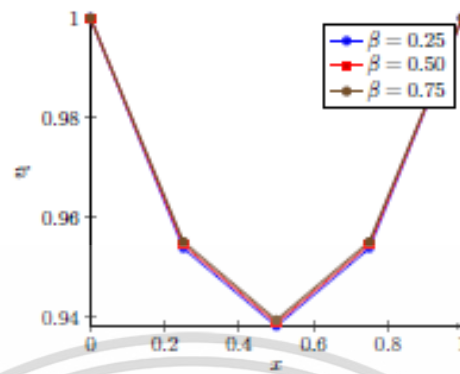
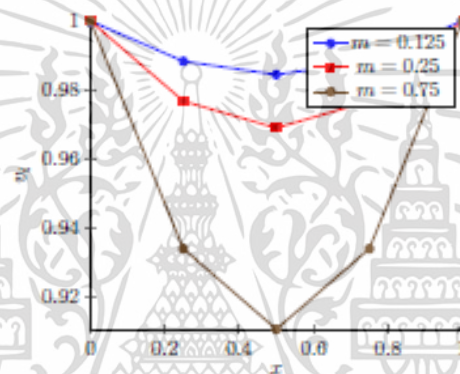
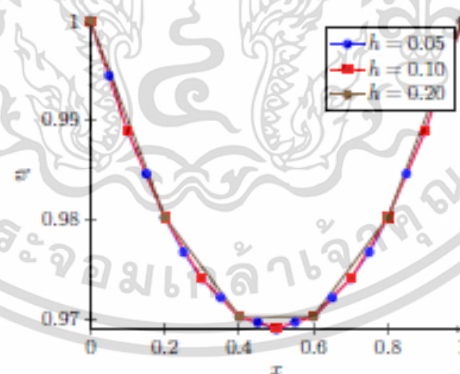
Table 1: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each physical parameters m and β .

m	β	$x = 0$	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$
0.5000	0.2500	1.0000	0.9538	0.9382	0.9538	1.0000
0.5000	0.5000	1.0000	0.9545	0.9388	0.9545	1.0000
0.5000	0.7500	1.0000	0.9551	0.9394	0.9551	1.0000
0.1250	0.5000	1.0000	0.9883	0.9844	0.9883	1.0000
0.2500	0.5000	1.0000	0.9767	0.9689	0.9767	1.0000
0.7500	0.5000	1.0000	0.9338	0.9104	0.9338	1.0000

Table 2: Comparison of nondimensional thin film flow velocity for some h with $\beta = 0.5$, $m = 0.25$.

x	$h = 0.20$	$h = 0.10$	$h = 0.25$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000
0.20	0.9802	0.9802	0.9802
0.40	0.9702	0.9702	0.9702
0.60	0.9702	0.9702	0.9702
0.80	0.9802	0.9802	0.9802
1.00	1.0000	1.0000	1.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Figure 1: Comparison of thin film flow velocity ($m = 0.50$)Figure 2: Comparison of thin film flow velocity ($\beta = 0.50$)Figure 3: Comparison of thin film flow velocity ($\beta = 0.5, m = 0.25$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5 Conclusion

The finite difference method for a nonlinear differential equation with the Newton iterative technique is employed to simulate the thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on parallel moving belts. The results are shown for the fluid parameters β and m are varied. The parameter m has higher affect on thin fluid film flow velocity than the parameter β . The proposed numerical techniques are simple and economical to implement.

Acknowledgment. This research is supported by the Centre of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education, Thailand. The authors are grateful to the referees for their careful reading of the manuscript and their useful comments.

References

- [1] A. M. Siddiqui, R. Mahmood, and Q. K. Ghori, Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 7, no. 1, pp. 714, 2006.
- [2] A. M. Siddiqui, R. Mahmood, and Q. K. Ghori, Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane, *Chaos, Solitons Fractals*, vol. 35, no. 1, pp. 140147, 2008.
- [3] A. M. Siddiqui, A. A. Farooq, T. Haroon, and B. S. Babcock, A comparison of variational iteration and Adomian decomposition methods in solving nonlinear thin film flow problems, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 97-100, pp. 49114919, 2012.
- [4] F. Mabood and N. Pochai, Comparison of Optimal Homotopy Asymptotic and Adomian Decomposition Methods for a Thin Film Flow of a Third Grade Fluid on a Moving Belt, *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2015, Article ID 642835, 4 pages, 2015.
- [5] Burden, RL and Faires, JD, *Numerical Analysis*, (Thomson Brooks/Cole, Singapore, 2005).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Numerical Simulation of a Nonlinear Thin Fluid Film Flow Velocity Model of a Third Grade Fluid on a Moving Belt using Finite Difference Method with Newton Iterative Scheme

Pantira Klankaw^{1,2} and Nopparat Pochai^{1,2,*}

Abstract—A thin film flow problem on a moving belt has been useful in scientific, engineering, biological and biomedical problems. A thin film flow velocity on a moving belt can be modeled by a nonlinear differential equation. This model is provides the film flow velocity in such thickness layers. In this research, a finite difference method and a Newton iterative method are used to approximate the solutions of the nonlinear thin fluid film flow velocity model. Their numerical simulations of a thin film flow velocity of a third grade fluid in on a moving belt with varied physical parameters are investigated. The proposed numerical techniques give good agreement approximated solutions in several moving belts speed levels.

Keywords: thin fluid film, flow velocity, numerical simulation, iterative method

1 Introduction

Nowadays, the Non-Newtonian fluid has a key role in the physical system. Physicist use of non-Newtonian fluid to adapt in the several ways such as mechanical engineering and manufacturing process which mean non-Newtonian fluid can lead many benefits in the future and so on. The Non-Newtonian fluid is referring a fluid whose viscosity is variable based on the applied stress or force. People familiar with a non-Newtonian fluid in every day. Behavior of Newtonian fluids like water can be described exclusively by temperature and pressure. The research of Non-Newtonian fluid is being up some interesting result when combined theory with mechanical engineering. Most of the scientific problems in fluid mechanics are modeled by nonlinear differential equations. It is well known that exact solutions of these nonlinear boundary value problems are difficult to obtain. Therefore, numerical solutions methods and analytical solutions methods are used to handle such type of problems. In [1], the re-

searchers studied thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method. In [2], the researchers develop a generalized approximation method (GAM) to obtain a solution of a thin film flow of a third grade fluid on a moving belt. The GAM generates a monotone sequence of solutions of linear problems. The sequence of solutions of linear problems converges monotonically and rapidly to a solution of the original nonlinear problem. We present some numerical simulations to illustrate and confirm our results. In [5], the researchers studied a thin film flow of a third grade fluid on a moving belt using a powerful and relatively new approximate analytical technique known as optimal homotopy asymptotic method (OHAM).

In this research, a couple of a finite difference method and Newton iterative method is used to approximate the solutions of a nonlinear governing equation. The proposed numerical techniques give good agreement approximated solutions in several moving belts speed levels.

2 The thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on a moving belt.

The thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on parallel moving belts is governed by the following nonlinear boundary value problem. [1, 2, 4, 5].

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\rho(\beta_1 + \beta_2)}{\mu} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{\rho g}{\mu} = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq \delta, \quad (1)$$

subject to the boundary conditions

$$v(0) = u_0, \quad (2)$$

$$v'(\delta) = u_1, \quad (3)$$

where v is the fluid velocity (m/s), ρ is the density (Kg/m^3), μ is the dynamic viscosity (Pa.s), β_1, β_2 are the material constants of the third grade fluid (non-unite), g is the gravity acceleration (m/s^2), δ is the uniform thickness of the fluid film (m), and u_0, u_1 are the belt speed and the rate of change of fluid flow velocity on ended layer.

We introduce the following dimensionless variables, side, we obtain

$$x^* = \frac{x}{\delta}, \tag{4}$$

$$v^* = \frac{v}{u_0}, \tag{5}$$

$$\beta = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\ell}{\mu\delta^2}, \tag{6}$$

$$m = \frac{\rho\omega\delta^2}{\mu\ell}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &(-2 - \frac{3\beta}{h^2})v_1 + (1 - \frac{3\beta}{2h^2})v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1v_2^2 \\ &+ 6\frac{\beta}{h^2}v_1v_2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^3 - mh^2 - v_1 - \frac{3\beta}{2h^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

where $\ell = \max\{u_1, u_2\}$. From Eqs.(4)-(7), we obtain the dimensionless form as (for simplicity we removed *),

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 6\beta\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \frac{d^2v}{dx^2} - m = 0, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1, \tag{8}$$

For $i = 2, 3, \dots, N-1$, Eq.(13) becomes

subject to the boundary conditions

$$v(0) = v_0, \tag{9}$$

$$v'(1) = v_1, \tag{10}$$

where v_1 is the nondimensional moving belt speed and v_1' is the rate of change of the fluid velocity on the ended layer.

$$\begin{aligned} v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}v_{i+1}^2 - 2v_i \\ - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^2v_{i-1} + 6\frac{\beta}{h^2}v_{i-1}v_{i+1} \\ + v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^3 - mh^2. \end{aligned} \tag{15}$$

3 Numerical Techniques

3.1 Finite difference method for a thin fluid film flow velocity model of a third grade fluid on moving belt ended layer

We will approximate the solution by using finite difference methods for nonlinear boundary value problem with Dirichlet boundary conditions Eq.(8)-(10) that can be written in a compact form as below.

$$v'' = \frac{mv}{1 + \beta(v')^2}, \text{ for all } 0 \leq x \leq 1, \tag{11}$$

We divide $[0, 1]$ into $N + 1$ subintervals that endpoints are at $x_i = i h$, for all $i = 0, 1, \dots, N + 1$, where $h = 1/(N + 1)$. By using the centered finite difference method [6], the finite difference equation can be written as follows.

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = \frac{mv_i}{1 + \beta\left(\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}\right)^2}, \tag{12}$$

for all $i = 1, 2, \dots, N$. It follows that

$$\begin{aligned} v_{i+1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^3 - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}^2v_{i-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i+1}v_{i-1}^2) \\ - 2v_i - \frac{3\beta}{h^2}(v_{i+1}^2v_{i-1}) + 6\frac{\beta}{h^2}(v_{i-1}v_{i+1}v_i) - \frac{3\beta}{h^2}(v_{i-1}^2v_i) \\ + v_{i-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{i-1}^3) - mh^2, \end{aligned} \tag{13}$$

for all $i = 1, 2, \dots, N$. For $i = 1$ plug the known value of the left boundary $v_0 = v_1$ to Eq.(13) on the left hand

To modify the finite difference method to a Neumann boundary conditions, $v'(1) = v_1'$, Eq.(13). For $i = N$,

$$\begin{aligned} 2hk + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(2hk + v_{N-1})^3 \\ - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})^2v_{N-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})v_{N-1}^2) \\ - 2v_N - \frac{3\beta}{h^2}(v_N(2hk + v_{N-1})^2) \\ + 6\frac{\beta}{h^2}(v_Nv_{N-1}(2hk + v_{N-1})) \\ - 3\frac{\beta}{h^2}v_{N-1}^2 + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{N-1})^3 - mh^2. \end{aligned} \tag{16}$$

3.2 Newton iterative method for nonlinear finite difference equations

Apply the Newton iterative to the system of simultaneous on nonlinear equation Eq.(14-16) that can be written in a vector form as

$$F(V) = (f_1(v_1, \dots, v_N), f_2(v_1, \dots, v_N), \dots, f_N(v_1, \dots, v_N))^T,$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

where

$$f_1(v_1, \dots, v_N) := (-2 - \frac{3\beta}{2h^2})v_1 + (1 - \frac{3\beta}{2h^2})v_2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_1v_2 + \frac{\beta}{h^2}v_1v_2 + \frac{3\beta}{2h^2}v_2^2 - (mh^2 - v_1 - \frac{3\beta}{2h^2}), \quad (17)$$

$$f_i(v_1, \dots, v_N) := v_i - 1 + \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}v_{i+1}^2 - 2v_i - \frac{3\beta}{2h^2}v_i^2v_{i+1}^2 - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i-1}^2v_i + \frac{\beta}{h^2}v_{i-1}v_iv_{i+1} + v_{i+1} - \frac{3\beta}{2h^2}v_{i+1}^2 - mh^2, \quad (18)$$

$$f_N(v_1, \dots, v_N) := 2hk + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(2hk + v_{N-1})^2 - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})^2v_{N-1}) - \frac{3\beta}{2h^2}((2hk + v_{N-1})v_{N-1}^2) - 2v_N - \frac{3\beta}{2h^2}(v_N(2hk + v_{N-1})^2) + \frac{\beta}{h^2}(v_N v_{N-1}(2hk + v_{N-1})) - \frac{3\beta}{2h^2}(v_N + v_{N-1} + \frac{3\beta}{2h^2}(v_{N-1})^2) - mh^2, \quad (19)$$

The Jacobian matrix $J(V)$ for the system of Eqs.(17-19) is given by

$$J(V) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial v_1 & \partial f_1/\partial v_2 & \partial f_1/\partial v_3 & \dots & \partial f_1/\partial v_N \\ \partial f_2/\partial v_1 & \partial f_2/\partial v_2 & \partial f_2/\partial v_3 & \dots & \partial f_2/\partial v_N \\ \partial f_3/\partial v_1 & \partial f_3/\partial v_2 & \partial f_3/\partial v_3 & \dots & \partial f_3/\partial v_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_N/\partial v_1 & \partial f_N/\partial v_2 & \partial f_N/\partial v_3 & \dots & \partial f_N/\partial v_N \end{bmatrix}$$

Choosing the $V^{(0)} = (v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)})^T$, we can obtain $F(V^{(0)})$ and $J(V^{(0)})$. Solving the linear system,

$$J(V^{(0)})U^{(0)} = -F(V^{(0)}), \quad (20)$$

we will obtain $U^{(0)}$. Then

$$v^{(1)} = v^{(0)} + U^{(0)}, \quad (21)$$

Continuing for $k = 2, 3, \dots$, we have

$$v^{(k)} = v^{(k-1)} + U^{(k-1)}, \quad (22)$$

where $U^{(k-1)} = -(J(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)}))^{-1}F(v_1^{(k-1)}, \dots, v_N^{(k-1)})$.

4 Numerical Experiment

Assuming that there is a moving belt in a third grade fluid basin. The basin is filled by the engine oil, SAE

15W-40 with the viscosity, $31.350 \text{ mm}^2/\text{s}$ and the density, 0.8477 g/cm^3 at 70°C . The material constant of the engine oil is 1.5675×10^{-5} . The moving belt has speed 1 m/s and the uniform thickness of fluid film is 0.001 m . We will consider physical parameters in 4 cases as show in Table 1. By using the finite difference equations Eqs.(14-16) with the Newton iterative techniques Eqs.(17-19), we can obtain the thin fluid film flow velocity in each layers. If the speed of moving belt is uniform and the rates of change of fluid film flow velocity over the ended layer are nonnegative due to external force, the approximated flow velocity in each layers are show in Table 1 and Figure 1. However, the cases of rates of change of fluid film flow velocity over the ended layer are negative due to gravity force and some external force are also investigated as show in Table 2. The comparison of thin film flow velocity when left belt speed are difference is shown in Table 3.

Table 1: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each nonnegative rates of change with $m = 0.285$ and $\beta = 0.5$.

$F \times v_i$	0.0000	0.0025	0.0050	0.0100
0.0	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9702	0.9702	0.9762	0.9763
0.2	0.9546	0.9547	0.9547	0.9548
0.3	0.9322	0.9325	0.9356	0.9357
0.4	0.9087	0.9088	0.9189	0.9191
0.5	0.9044	0.9045	0.9047	0.9049
0.6	0.8927	0.8928	0.8929	0.8932
0.7	0.8835	0.8836	0.8838	0.8841
0.8	0.8765	0.8770	0.8772	0.8776
0.9	0.8720	0.8731	0.8733	0.8737
1.0	0.8716	0.8718	0.8720	0.8725

Table 2: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each negative rates of change with $m = 0.285$ and $\beta = 0.5$.

$F \times v_i$	-0.001	-0.0025	-0.0050
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9703	0.9703	0.9702
0.2	0.9545	0.9545	0.9546
0.3	0.9302	0.9303	0.9304
0.4	0.9104	0.9105	0.9106
0.5	0.9040	0.9042	0.9049
0.6	0.8920	0.8924	0.8925
0.7	0.8828	0.8831	0.8832
0.8	0.8762	0.8765	0.8767
0.9	0.8720	0.8725	0.8727
1.0	0.8706	0.8711	0.8713

5 Conclusion

The finite difference method for a nonlinear differential equation with the Newton iterative technique is employed to simulate the thin fluid film flow velocity of a third grade fluid on a moving belt. The results are shown for the thin fluid film flow velocity of motor oil when external forces are positive or negative. If the external force is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 3: Comparison of nondimensional thin film flow velocity in each left speed belt with $m = 0.265$ and $\beta = 0.5$.

$\eta = h$	1.0000	0.9500	0.9000	0.2000
0.0	1.0000	0.9500	0.9000	0.2000
0.1	0.9762	0.7262	0.4762	0.2262
0.2	0.9546	0.7046	0.4546	0.2046
0.3	0.9355	0.6855	0.4355	0.1855
0.4	0.9187	0.6687	0.4187	0.1687
0.5	0.9044	0.6544	0.4044	0.1544
0.6	0.8927	0.6427	0.3927	0.1427
0.7	0.8835	0.6335	0.3835	0.1335
0.8	0.8763	0.6263	0.3763	0.1263
0.9	0.8720	0.6220	0.3720	0.1220
1.0	0.8716	0.6216	0.3716	0.1216

[4] Siddiqui, A.M., Farooq, A.A., Haroon, T. and Babcock, B.S., "A comparison of variational iteration and Adomian decomposition methods in solving nonlinear thin film flow problems", *Applied Mathematical Sciences*, V6, N97, pp. 4911-4919, 2012.

[5] Maheed, F. and Pochai, N., "Comparison of Optimal Homotopy Asymptotic and Adomian Decomposition Methods for a Thin Film Flow of a Third Grade Fluid on a Moving Belt", *Advances in Mathematical Physics*, V2015, Article ID 642835, 4 pages, 2015.

[6] Burden, R.L. and Faires, J.D., *Numerical Analysis*, Thomson Brooks/Cole, Singapore, 2006.

increased, the fluid film flow velocities at all layers are also increased.

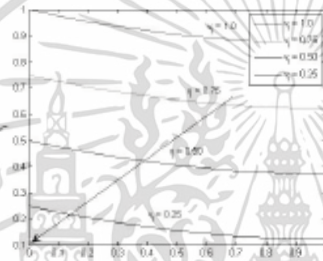


Figure 1: Comparison of thin film flow velocity (U , $0.6, m = 2.65$)

References

[1] Siddiqui, A.M., Mahmood, R. and Ghori, Q.K., "Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by homotopy perturbation method", *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, V7, N1, pp. 7-14, 2006.

[2] Siddiqui, A.M., Mahmood, R. and Ghori, Q.K., "Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane", *Chaos, Solitons & Fractals*, V35, N1, pp. 140-147, 2008.

[3] Khaliq, R.A., "Generalized approximation method and a thin film flow of a third grade fluid on a moving belt", *Computational Mathematics and Modeling*, V21, N1, 2010.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Author Biography

Name	Miss Pantira Klankaew
Date of Birth	27 th January 1994
Address	88/246, Gusto Bangna-Suvarnaphumi, Bangna-trad Road, Srisacharakeyai Sub-district, Bangsaothong District, Samuthprakarn Province, 10540, Thailand
Education	2016. Bachelor of Science in Applied Mathematics. GPA 3.26 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang 2018. Master of Science in Applied Mathematics. GPA 3.28 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Scholarship	2017. Research assistance scholarship, Centre of Excellence in Mathematics (CEM), Commission on Higher Education (CHE), Thailand
Academic Publications	1. Numerical simulation for a thin fluid film flow velocity of a third grade fluid between paralleled moving belts. Annual Meeting in Mathematics 2017 Proceeding. (AMM 2017) 2. Numerical Simulation of a Nonlinear Thin Fluid Film Flow Velocity Model of a Third Grade Fluid on a Moving Belt using Finite Difference Method with Newton Iterative Scheme. International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2019 Proceeding. (IMECS 2019)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้