ฟังก์ชันผลเฉลยของ $f^q(n) = an + b$ บนจำนวนเต็ม
Solution functions of $f^q(n) = an + b$ on integer numbers

พรเนตร ยมรักษ์
พิณรัตน์ โพธะศรี
รัฐไกร วาระรังษี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

ฟังก์ชันผลเฉลยของ $f^{q}(n)=an+b$ บนจำนวนเต็ม

Solution functions of $f^{q}(n)=an+b$ on integer numbers

พรเนตร ยมรักษ์
พิณรัตน์ โพธะศรี
รัฐไกร วาระรังษี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

Solution functions of $f^{q}(n)=an+b$ on integer numbers

Pornnet Yomrug
Phinnarat Phothasri
Rattagai Vararungsee

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ฟังก์ชันผลเฉลยของ $f^q(n) = an+b$ บนจำนวนเต็ม
	Solution functions of $f^q(n) = an+b$ on integer numbers.
ชื่อนักศึกษา	1.นางสาวพรเนตร ยมรักษ์ 56050090
	2.นางสาวพิณรัตน์ โพธะศรี 56050096
	3.นายรัฐไกร วาระรังษี 56050112
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	พรชัย ชัยสนิท
ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการ	
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ อาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ฟังก์ชันผลเฉลยของ $f^q(n)=an+b$ บนจำนวนเต็ม		
	Solution functions of $f^q(n)=an+b$ on integer numbers		
ชื่อนักศึกษา	1.นางสาวพรเนตร	ยมรักษ์	56050090
	2.นางสาวพิณรัตน์	โพธะศรี	56050096
	3.นายรัฐไกร	วาระรังษี	56050112
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต		
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
ปีการศึกษา	2559		
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ		

บทคัดย่อ

งานวิจัยของ Sarkaria [11] พิจารณาฟังก์ชัน $f:X\to X\ ;X=\mathbb{N}_0,\mathbb{Z},\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n)=n+k$ สำหรับทุกจำนวน $n\in X$ เมื่อ q และ k เป็นจำนวนนับใดๆ ในงานวิจัยนี้พิจารณาฟังก์ชันผลเฉลย $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation) $f^q(n)=an+b$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{Z}$ โดยที่ a,b และ q เป็นจำนวนเต็มที่ซึ่ง $q\geq 2$ และ $a\neq 0,\pm 1$

คำสำคัญ : สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ

Special Problem Title	Solution functions of $f^q(n) = an + b$ on integer numbers	
Students	Ms. Pornnet Yomrug	56050090
	Ms. Phinnarat Phothasri	56050096
	Mr. Rattagai Vararungsee	56050112
Degree	Bachelor of Science	
Major Program	Applied Mathematics	
Academic Year	2016	
Advisor	Dr.Sukrawan Mavecha	

ABSTRACT

In the work of Sarkaria [11], he considered a function $f : X \to X$; $X = \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ satisfies the iterative functional equation $f^q(n) = n + k$ for all $n \in X$ where q and k are natural numbers.

In this research, we consider the solution function $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfies the iterative functional equation $f^q(n) = an + b$ for all $n \in \mathbb{Z}$ where a, b and q are integer numbers, $q \geq 2$ and $a \neq 0, \pm 1$.

Keywords : Iterative functional equation

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่องฟังก์ชันผลเฉลยของ $f^{q}(n)=an+b$ บนจำนวนเต็ม คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษาและความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้และช่วยตรวจสอบแก้ไขงานให้เกิดความถูกต้องครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ อ.พรชัย ชัยสนิท และ ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายที่สุด ทางคณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่านที่ท่านช่วยประสิทธิ์ประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำอันเกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมาตลอดจนขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ของทางภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้ จนเป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จไปด้วยดี

พรเนตร ยมรักษ์
พิณรัตน์ โพธะศรี
รัฐไกร วาระรังษี

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

รูปแบบการทำซ้ำของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์สมัยใหม่ถูกพัฒนาอย่างรวดเร็วในเวลา 10 ปีที่ผ่านมาในสายฟิสิกส์ ชีววิทยา และเศรษฐศาสตร์

ให้ฟังก์ชัน f บนช่วง I และจำนวนเต็มบวก n สัญลักษณ์ f^n แทนฟังก์ชันประกอบ (composite function) บนช่วง I นั่นคือ

$$f^0(x)=x, f^{n+1}(x)=f(f^n(x)) \text{ สำหรับ } n=1,2,...$$

ฟังก์ชัน f^n เป็นการทำซ้ำ ของ f จำนวน n ครั้งกำหนด x_0 ใน I เขียนว่า $x_n=f^n(x_0)$, $n=1,2,...$

พิจารณาตัวอย่างจากเรื่องชีววิทยา สมมติให้สิ่งแวดล้อมที่กำหนดคือกระต่าย เราจะสนใจในสิ่งที่เราต้องการรู้คือจำนวนที่แปรผันกับเวลา สมมติให้เวลาเหล่านั้นเป็นการวัดปีละครั้ง ทุกๆฤดูใบไม้ผลิ ที่เวลาเริ่มต้น เรามี x_0 แทนจำนวนตัว หลังจากปีแทนด้วย x_1 ปีต่อไปแทนด้วย x_2 เป็นต้น ความแน่นอนภายใต้เงื่อนไขบางส่วน จำนวนของตัวในปี $n+1$ ขึ้นอยู่กับ x_n เท่านั้น $x_{n+1}=f(x_n), n=0,1,2,...$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า (unknown function)

ตัวอย่างข้างต้นเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายของการเติบโตของประชากรของสายพันธุ์เดียวของสิ่งมีชีวิตนั่นคือ ได้มาโดยการนับจำนวนรายตัวของสายพันธุ์ในเวลาที่กำหนด ดังนั้นเราจะกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งเทอมจะแทนด้วยประชากรของสายพันธุ์ที่กำหนดในขอบเขตที่กำหนดให้ที่เวลา n=1,2,3,... ซึ่งแทนค่าลิมิตของ $n \to \infty$ เราอาจจะศึกษาระบบพลวัต (dynamical system) ของประชากร

ซึ่งกระบวนการนี้สำคัญในทุกๆแขนงวิชาในทางวิทยาศาสตร์ บางตัวอย่างอาจประกอบด้วยการเคลื่อนไหวของดาวและกาแล็กซีในจักรวาล การขึ้นและลงของตลาดหุ้น อากาศโลก การเปลี่ยนแปลงของสารเคมีในอุณหภูมิที่เหมาะสม การขึ้นลงของจำนวนประชากร และการเคลื่อนไหวของลูกตุ้มอย่างง่าย

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ให้ q,a,b เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดย $q \geq 2$, $a \neq 0, \pm 1$ งานวิจัยนี้ศึกษาฟังก์ชัน $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n)=an+b$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

พิจารณาฟังก์ชัน f บนเซตของจำนวนเต็มเท่านั้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 มีความรู้เกี่ยวกับการทำซ้ำของฟังก์ชัน

1.4.2 มีความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equations)

1.4.3 สามารถหารูปแบบฟังก์ชันผลเฉลยที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = an + b$ บนจำนวนเต็มภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดได้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 รวบรวมเอกสารที่จำเป็นและเกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆทั้งในและต่างประเทศเพื่อให้ได้ข้อมูลทั้งหมดที่จำเป็นต่อการวิจัย

1.5.2 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำจากเอกสารอ้างอิงต่างๆเพื่อให้ได้ความรู้เกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยและเป็นแนวทางในการทำวิจัยต่อไป

1.5.3 พิจารณาสมบัติของฟังก์ชันผลเฉลยที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = an + b$ บนเซตจำนวนเต็มแล้วหารูปแบบของฟังก์ชันผลเฉลย

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินงานตามแผนงาน 10 เดือน ได้แสดงไว้ในตารางนี้

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2559					ปี 2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.รวบรวมเอกสารอ้างอิงที่จำเป็นและเกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆทั้งในและต่างประเทศ										
2.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันทำซ้ำในรูปแบบความสัมพันธ์ต่างๆ										
3.หาสมบัติที่เกี่ยวข้องและรูปแบบของฟังก์ชัน f บน $\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n)=an+b$ ทุกๆ n กับเงื่อนไขต่างๆที่กำหนด										
4.ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาทั้งหมด										
5.จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษพร้อมทั้งจัดทำแบบการนำเสนอ										
6.ซ้อมนำเสนอปัญหาพิเศษ										
7.นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

สำหรับฟังก์ชัน f และ $q \in \mathbb{N}$

นิยามการทำซ้ำ q ครั้งของ f โดย

$$f^q = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (q\text{ ครั้ง})$$

เมื่อ $\circ$ แทนฟังก์ชันประกอบ (composition of function)

ทฤษฎีของสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equations) มีมาอย่างยาวนานและแพร่หลายมาก [4] ในที่นี้ เราจะพิจารณาสมการเชิงฟังก์ชันเสมือนพหุนาม (polynomial-like functional equations) ระดับขั้นที่ n มีรูปแบบ

$$a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + a_{n-2} f^{n-2}(x) + \ldots + a_1 f(x) + a_0 x = F(x) \qquad (2.1)$$

เมื่อ $f : X \to X$ คือฟังก์ชันไม่ทราบ (unknown function) F คือ ฟังก์ชันกำหนดให้ และ $a_0, \ldots, a_{n-1}$ คือ จำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

นิยามสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของ (2.1) มีรูปแบบ

$$P(r) := a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 \qquad (2.2)$$

และ $P(r)$ เรียกว่าพหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) ของ (2.2)

2.1. กรณีเซตไม่วิยุต (Non-discrete set)

ให้ X เป็นปริภูมิเชิงเส้นจำนวนจริงหรือเชิงซ้อน

ในปี 1996 Jarczyk,[3] หาผลเฉลยของกรณีพิเศษของ (2.1)

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f^{n_i}(x) = x \qquad (2.3)$$

ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.1 ([3]) สมมติให้ $\gcd(n_1,\dots,n_k)=1$ ถ้าแต่ละ $D\subset(-\infty,0)$ หรือ $D\subset(0,\infty)$ และ ถ้า $f:D\to D$ สอดคล้องกับ (2.3) เมื่อ $a_1,\dots,a_k$ เป็นจำนวนบวก แล้ว

$$cD\subset D \text{ และ } f(x)=cx \qquad (x\in D)$$

เมื่อ c เป็นรากบวกรากเดียวของสมการลักษณะเฉพาะ $\sum_{i=1}^{k}a_i\lambda^{n_i}=1$
นอกจากนี้ ถ้า $\gcd(n_1,\dots,n_k)=p$ แล้ว

$$c^pD\subset D \quad \text{และ} \quad f^p(x)=c^px \qquad (x\in D)$$

แนวคิดหลักของการพิสูจน์คือแปลง (2.3) ให้เป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้น (linear difference equation) บน $\mathbb{N}^k$ และสนใจวิธีการเวียนบังเกิด (recurrent method)

ในปี 2000 Matkowski และ Zhang[7] แสดงในทฤษฎีบทถัดไปว่าผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันเสมือนพหุนามที่มีระดับขั้นที่ต่ำกว่าเป็นผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันเสมือนพหุนามที่มีระดับขั้นที่สูงกว่าเช่นเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2.1.2 ([7]) ให้ X แทนปริภูมิเชิงเส้นจำนวนจริงหรือเชิงซ้อนและให้

$$Q(x)=x^k-b_{k-1}x^{k-1}-\cdots-b_1x-b_0\in\mathbb{C}[x]$$
$$P(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0\in\mathbb{C}[x]$$

สมมติ $k\le n$ และ $Q|P$ ถ้า $f:X\to X$ สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f^k(x)=b_{k-1}f^{k-1}(x)+b_{k-2}f^{k-2}(x)+\cdots+b_0x, \quad (x\in X) \tag{2.4}$$

แล้ว f สอดคล้อง

$$f^n(x)=a_{n-1}f^{n-1}(x)+a_{n-2}f^{n-2}(x)+\cdots+a_0x, \quad (x\in X)$$

ในปีเดียวกันพวกเขาอธิบายความเกี่ยวข้องกันของผลเฉลยต่อเนื่องของ (2.4) ที่มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวกับพฤติกรรมของค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะของมัน พวกเขาวิเคราะห์กรณี $k=2$ คือสมการ

$$f^2(x)=a_1f(x)+a_0x, \qquad a_0\ne0, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{2.5}$$

และอธิบายกรณีทั่วไป ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท2.1.3 ([8]) 1) ให้ $a_k \in \mathbb{R}$ $(k=1,\ldots,n)$ $, a_0 \neq 0$

สมมติพหุนาม $r^{n+1} - a_n r^n - a_{n-1} r^{n-1} - \ldots - a_0$
มีสองค่ารากคือ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ที่ซึ่ง $1 < r_1 < r_2$ หรือ $0 < r_1 < r_2 < 1$ หรือ $0 < r_1 < 1 < r_2$ หรือ $r_1 < r_2 < -1$ หรือ $-1 < r_1 < 1 < r_2 < 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง แล้วผลเฉลยฟังก์ชันต่อเนื่องของ

$$f^{n+1}(x) = a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + \ldots + a_0 x \ , \quad a_0 \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (2.6)$$

ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันต่างๆ นอกจากนั้นทุกฟังก์ชันผลเฉลยต่อเนื่องเป็นสมานสัณฐาน (homeomorphism) ของ $\mathbb{R}$

2) ให้ $a_k \geq 0$ $(k=1,\ldots,n), a_0 \neq 0$ ที่ซึ่ง $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1$ ถ้า $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นผลเฉลยต่อเนื่องของ(2.6) แล้ว $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \geq 0$

ในปี 2004 Yang และ Zhang[12] ได้ศึกษาทฤษฎีลักษณะเฉพาะของสมการทำซ้ำเสมือนพหุนาม (characteristic theory of polynomial like iterative equations) ในกรณีทั่วไปเมื่อภาวะรากซ้ำของค่าลักษณะเฉพาะรวมอยู่ด้วย พวกเขาพิจารณาสมการ (2.1) เมื่อ $a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$

งานของพวกเขาใช้ความคิดของออยเลอร์ เกี่ยวกับผลเฉลยลักษณะเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์แล้วพวกเขาได้หาผลเฉลยรูปแบบ $f(x) = rx$ เมื่อ $r \in \mathbb{C}$ ไม่ทราบว่า พวกเขาได้แสดงว่าสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำไม่มีผลเฉลยฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้าสมการนั้นไม่มีรากลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง

ในปี 2009 Berg[2] พิจารณาสมการเชิงฟังก์ชัน $f^k = F(x, f, \ldots f^{k-1})$
เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ และ $F: I^k \to I$ โดยที่ $I \subset \mathbb{R}$ โดยใช้สมการที่สัมพันธ์กัน

$$y_{n+k}(z) = F(y_n(\mathrm{z}), y_{n+1}(z), \ldots, y_{n+k-1}(z))$$

ให้ $y: \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางเดียวโดยแท้ (Strictly monotone continuous function) และผกผันของ y คือ $y^{[-1]}: I \to \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน

$$f^n(x) = y(n + y^{[-1]}(x)) \qquad ; n \in \mathbb{Z}$$

คือการทำซ้ำกัน n ครั้งของ f

ประพจน์ 2.1.4 ([2]) ถ้า y_n เป็นผลเฉลยของสมการ $y_{n+2} = y_n(1+y_{n+1})$ ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น $y_0 = y_1 = z$ เมื่อ z เป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดให้ แล้วฟังก์ชัน $f_n = y_{n+1}(y_n^{[-1]})$ สอดคล้องกับ $f_{2n} < f_{2n+2} < f_{2n+3} < f_{2n+1}$ สำหรับ $x > 0$ และทุกๆจำนวนเต็ม $n \geq 0$

2.2. กรณีเซตวิยุต (Discrete set case)

ตามที่กล่าวไว้ใน [1] Mallows สังเกตว่ามีลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียว $(a(n))_{n\geq 0}$ ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่ซึ่ง $a(a(n)) = 2n$ สำหรับ $n \neq 1$

ในปี 1979 Propp [9,10] แนะนำ ลำดับ $(s(n))_{n\geq 0}$ ที่นิยามให้เป็นลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียวที่ซึ่ง $s(s(n)) = 3n$ ในปี 2005 Allouche และคณะ [1] แสดงว่ามีลำดับเพิ่มเป็นจำนวนนับไม่ได้ $(a(n))_{n\geq 0}$ ที่ซึ่ง $a(a(n)) = dn$ สำหรับทุก $d \geq 4$ ขณะที่มีลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียวที่สอดคล้องกับ $a(a(n)) = dn$ สำหรับ $d = 2,3$

ทฤษฎีบท 2.2.1 ([1]) ให้ $b_1,\ldots,b_n$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $b_i \in \{2\cdot d^i - 3, 2\cdot d^i - 2\}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots$ มีลำดับเพิ่ม $a = (a(n))_{n\geq 0}$ ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่ซึ่ง $a(a(n)) = dn; d \geq 4$ และ $a(d^i - 1) = b_i$

ในปี 2008 Sarkaria[11] พิจารณาฟังก์ชันทั้งหมด $f: X \to X$ เมื่อ $X = \mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ หรือ $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = n + k$ ซึ่งขยายมาจากปัญหาหนึ่งของคณิตศาสตร์โอลิมปิกนานาชาติ (International Mathematical Olympiad) ในปี 1987: จงพิสูจน์ว่าไม่มีฟังก์ชัน $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $f(f(n)) = n + 1987$

นอกจากนี้, Sarkaria พิสูจน์ว่า

- สำหรับ $q \geq 1, k \geq 1,$ มีจริง ฟังก์ชัน $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับ $f^q(n) = n + k$ ก็ต่อเมื่อ q หาร k ลงตัว
- มีฟังก์ชันดังกล่าวจำนวน $k!/(k/q)!$
- มีฟังก์ชัน $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ จำนวนอนันต์ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = n + k$ ก็ต่อเมื่อ q หาร k ลงตัว
- มีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับ $f^q(n) = n + k$ และรูปแบบของฟังก์ชันได้ถูกพิจารณา

ในปี 2014 ผลของ Propp [9,10] และ Allouche และคณะ [1] ได้ถูกขยาย โดย Laohakosol และ Yuttanan ใน [6] ซึ่งได้แสดงว่า สำหรับ $q \ge 2, D \ge 2$ ถ้า $D-1$ หาร q ลงตัวแล้วมีฟังก์ชันเพิ่ม $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = Dn$ $(\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$ นอกจากนี้ มีฟังก์ชันเพิ่มจำนวนอนันต์สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำนี้

2.3 รากของการเลื่อนขนาน (Roots of translations)

ปัญหาพิเศษต้องการขยายงานวิจัยของ Sarkaria [11] ดังนั้นต้องศึกษางานวิจัยของ Sarkaria ตามรายละเอียดต่อไปนี้ให้ $q,k \in \mathbb{N}$ พิจารณาฟังก์ชัน $f: X \to X; X = \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = n+k$ สำหรับทุกจำนวน $n \in X$

ประพจน์ 2.3.1 ถ้า q หาร k ลงตัว แล้วฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = n+k$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}_0$ เป็นรูปแบบหนึ่งของ f_π ที่นิยามต่อไปนี้

ให้ $m_i \in \mathbb{N}_0$ โดยที่ไม่มีจำนวน $n \in \mathbb{N}_0$ ที่ซึ่ง $f^q(n) = m_i$

ให้ $C_i = \{m_i + tk; t \ge 0\}$ และ $0 \le i < q$ เรียกเซต C_i นี้ว่าโคเซต (coset)

ให้ $(C_0, C_1, \ldots, C_{q-1})$ เป็นวงโคจร (Orbit) ใดๆ

นิยาม $f_\pi : C_i \to C_{i+1}$ โดย $f_\pi(m_i + tk) = m_{i+1} + tk$ สำหรับ $0 \le i < q-1$

และ $f_\pi : C_{q-1} \to C_0 - \{m_0\}$ โดย $f_\pi(m_{q-1} + tk) = m_0 + (t+1)k$

<u>**ตัวอย่าง2.3.1**</u> ให้ $k=6$ และ $q=3$ พิจารณาการส่งของ $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ m_i ที่ไม่มีจำนวน $n \in \mathbb{N}_0$ ซึ่ง $f^q(n) = m_i$ คือ $\{0,1,2,3,4,5\}$ ดังนั้นมีโคเซตทั้งหมด 6 โคเซต เมื่อเลือก $m_0 = 0, m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3, m_4 = 4$ และ $m_5 = 5$

จะได้ $C_0 = \{0, 6, 12, 18, \ldots, 0+6t, \ldots\}$

$C_1 = \{1, 7, 13, 19, \ldots, 1+6t, \ldots\}$

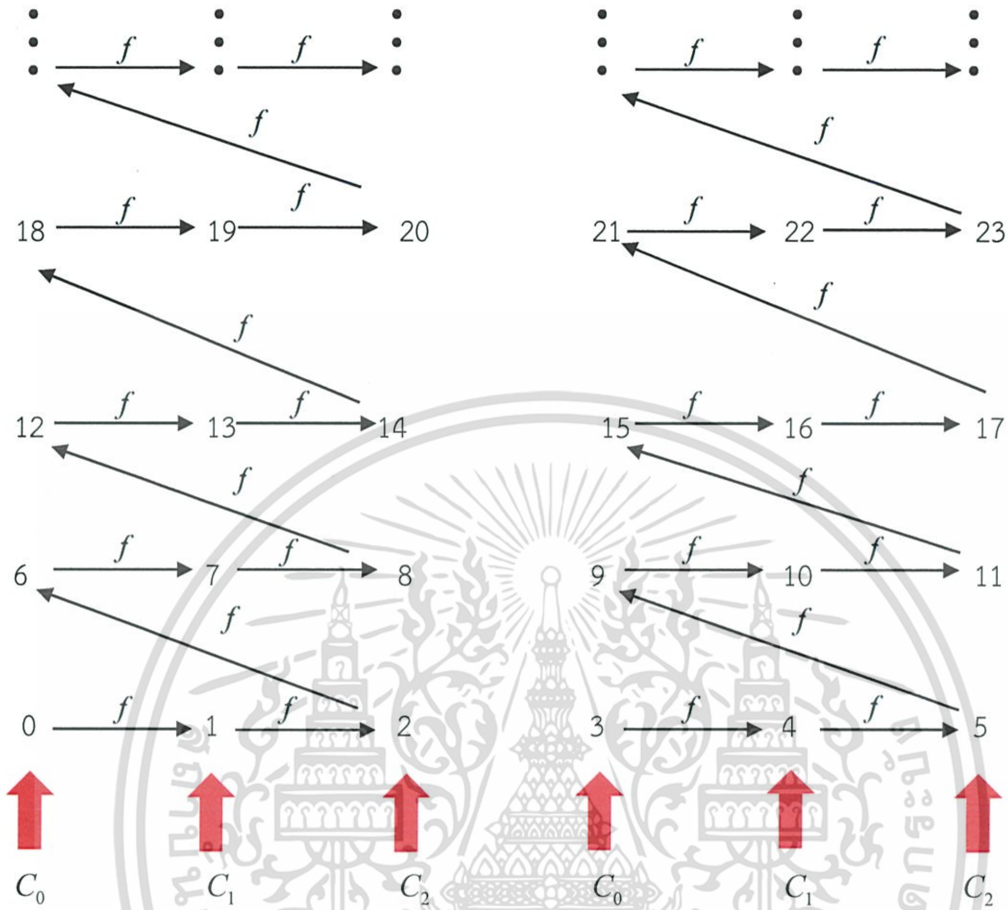
$C_2 = \{2, 8, 14, 20, \ldots, 2+6t, \ldots\}$

$C_3 = \{3, 9, 15, 21, \ldots, 3+6t, \ldots\}$

$C_4 = \{4, 10, 16, 22, \ldots, 4+6t, \ldots\}$

$C_5 = \{5, 11, 17, 23, \ldots, 5+6t, \ldots\}$

แผนภาพด้านล่างแสดงตัวอย่างของการส่งของฟังก์ชัน f ในรูปแบบหนึ่ง



การส่งของฟังก์ชัน f ดังภาพข้างบนนี้เป็นเพียงหนึ่งตัวอย่างจากทั้งหมด ซึ่งการส่งของ f ขึ้นอยู่กับการเลือกค่า m_i เมื่อ $i = 0,1,\ldots,5$

ประพจน์ 2.3.2 บน $\mathbb{N}_0$ จำนวนฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้อง $f^q(n) = n + k$ เมื่อ $k = qr$ บางจำนวนเต็มบวก r คือ $k!/r!$

<u>ตัวอย่าง2.3.2</u> จากตัวอย่าง 2.3.1

จำนวน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้อง $f^3(n) = n + 6$

มีทั้งหมด $6!/2! = 360$ ฟังก์ชัน

ประพจน์ 2.3.3 มีฟังก์ชัน $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้อง $f^{q}(n)=n+k$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ q หาร k ลงตัวและมีฟังก์ชันผลเฉลย f ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของ f_π ที่นิยามต่อไปนี้

ให้ $m_i\in\mathbb{N}_0$ เมื่อ $0\le i\le q-1$ โดย $m_i\notin C_j$ เมื่อ $i\ne j, 0\le j\le q-1$

ให้ $C_i=\{m_i+tk;t\in\mathbb{Z}\}$ และ $0\le i\le q-1$

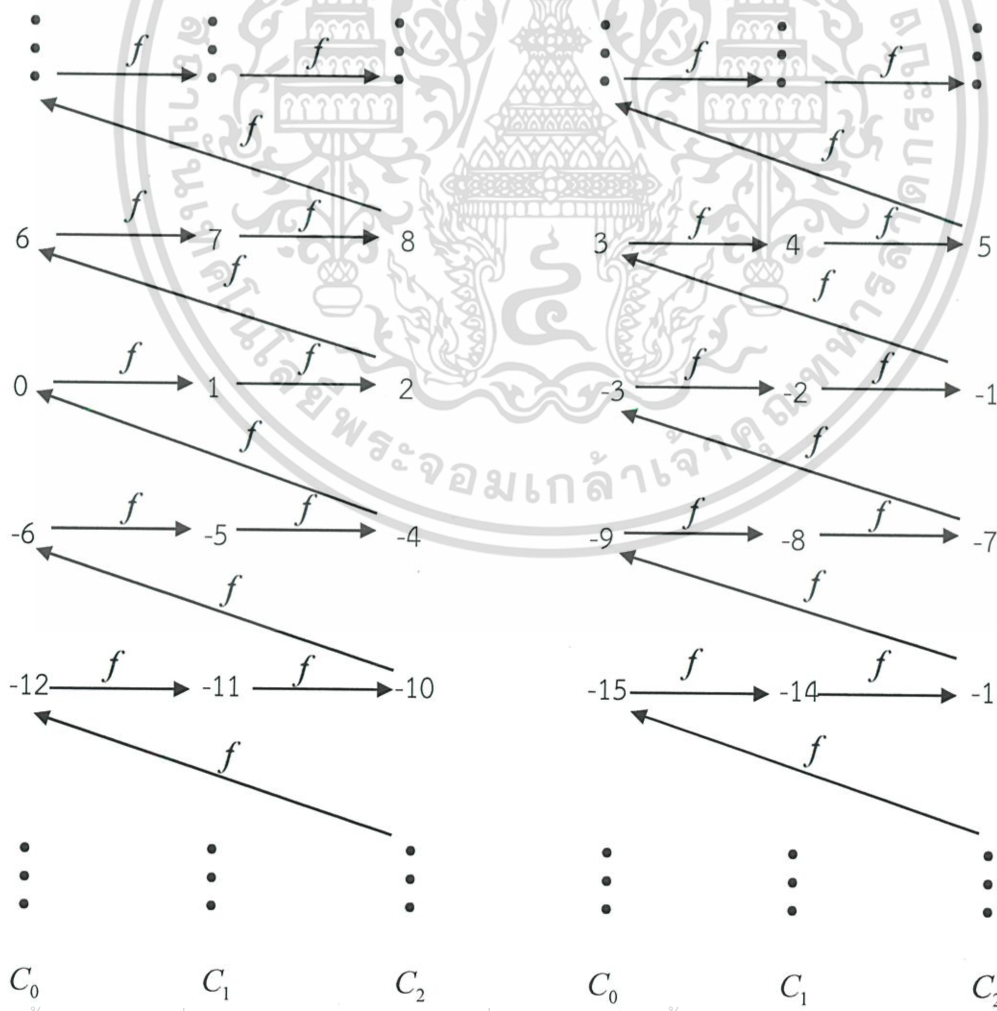
ให้ $(C_0,C_1,...,C_{q-1})$ เป็นวงโคจร (orbit) ใดๆ

นิยาม $f_\pi:C_i\to C_{i+1}$ โดย $f_\pi(m_i+tk)=m_{i+1}+tk$ สำหรับ $0\le i<q-1$

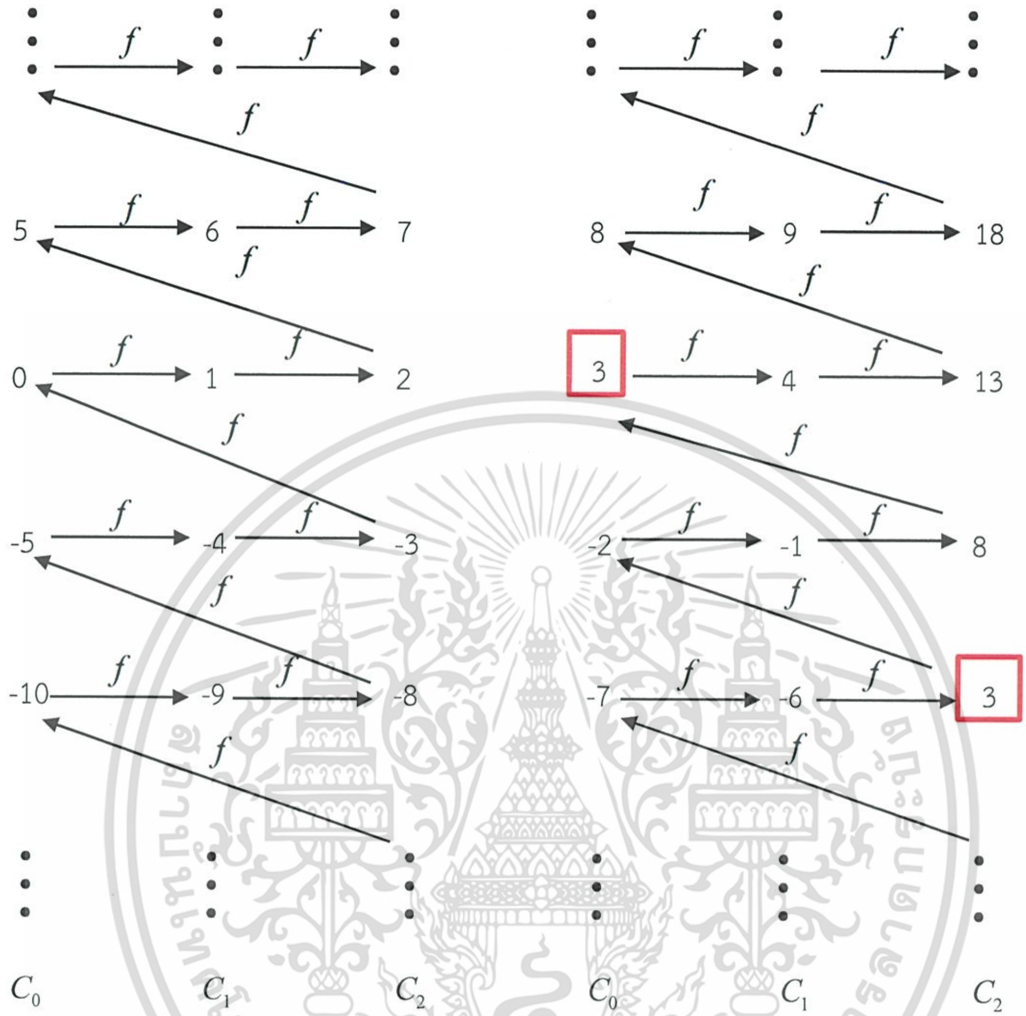
และ $f_\pi:C_{q-1}\to C_0\text{-}\{m_0\}$ โดย $f_\pi(m_{q-1}+tk)=m_0+(t+1)k$

<u>ตัวอย่าง2.3.3</u> กรณี q หาร k ลงตัว สมมติ $k=6$ และ $q=3$

จาก $q\,|\,k$ ตัวอย่าง 2.3.1 มี $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ เป็นผลเฉลยของ $f^{3}(n)=n+6$ ดังตัวอย่างแผนภาพต่อไปนี้



ตัวอย่าง2.3.4 กรณี q หาร k ไม่ลงตัว สมมติ $k=5$ และ $q=3$ จะได้ $f^3(n)=n+5$



จะสังเกตได้ว่ากรณีนี้ f ไม่เป็นฟังก์ชัน

บทที่ 3

ผลการดำเนินงาน

3.1 คุณสมบัติของฟังก์ชันผลเฉลย

พิจารณาฟังก์ชัน $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation)

$$f^q(n)=an+b \quad \text{สำหรับทุก } n\in\mathbb{Z} \tag{3.1}$$

ให้ a,b และ q เป็นจำนวนเต็มที่ซึ่ง $q\geq 2$ และ $a\neq 0,\pm 1$

$$g(n)=an+b\ ,\quad p=\frac{b}{1-a}$$

บทตั้ง 3.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันผลเฉลยของสมการ (3.1)

1) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ดังนั้น f^{-1} นิยาม บน $R_f\subseteq\mathbb{Z}$ เมื่อ R_f แทนเซตของเรนจ์ของฟังก์ชัน)
2) ฟังก์ชัน f แบ่ง (partition) $\mathbb{Z}$ เป็นคลาสที่สมมูล (equivalence class) (ไม่เป็นเซตว่าง) ภายใต้ความสัมพันธ์ $x\sim y\Leftrightarrow y=f^{tq}(x)$ สำหรับบาง $t\in\mathbb{Z}$
3) f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว (unique fixed point) คือ p เมื่อ $(1-a)|b$

พิสูจน์

1) ให้ $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$

สมมติ $f(n_1)=f(n_2)$

$$f(f(n_1))=f(f(n_2))$$

$$f^2(n_1)=f^2(n_2)$$

$$f(f^2(n_1))=f(f^2(n_2))$$

$$f^3(n_1) = f^3(n_2)$$

$$\vdots$$

$$f^q(n_1) = f^q(n_2)$$

$$an_1 + b = an_2 + b$$

จะได้ $n_1 = n_2$

2) 2.1) $x \sim x$ เนื่องจาก $x = f^{0\cdot q}(x) = x$

2.2) จะพิสูจน์ว่าถ้า $x \sim y$ แล้ว $y \sim x$

ให้ $x \sim y$

ดังนั้น $y = f^{tq}(x)$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{Z}$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f^{tq}(x))$$

$$f^{-1}(y) = f^{tq-1}(x)$$

$$f^{-1}(f^{-1}(y)) = f^{-1}(f^{tq-1}(x))$$

$$f^{-2}(y) = f^{tq-2}(x)$$

$$\vdots$$

$$f^{-tq}(y) = f^{0}(x) = x$$

$$x = f^{-tq}(y) \qquad ; -t \in \mathbb{Z}$$

2.3) จะพิสูจน์ว่า $x \sim y$ และ $y \sim z$ แล้ว $x \sim z$

ให้ $x \sim y$ และ $y \sim z$

จะได้ $y = f^{tq}(x)$ และ $z = f^{sq}(y)$ สำหรับบาง $t, s \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = f^{sq}(f^{tq}(x)) = f^{(s+t)q}(x)$ สำหรับบาง $s + t \in \mathbb{Z}$

สรุปว่า $x \sim z$

3) จากสมการ (3.1) จะได้ $f(ax+b) = f^{q+1}(x) = af(x) + b$

แทน $x = \dfrac{b}{1-a}$

$$f(a\left(\frac{b}{1-a}\right) + b) = af\left(\frac{b}{1-a}\right) + b$$

$$f\left(\frac{b}{1-a}\right) = af\left(\frac{b}{1-a}\right) + b$$

$$(1-a)f\left(\frac{b}{1-a}\right) = b$$

$$f\left(\frac{b}{1-a}\right)=\frac{b}{1-a}$$

ดังนั้น $\frac{b}{1-a}$ เป็นจุดตรึงของ f

จะแสดงว่าจุดตรึงของ f มีเพียงจุดเดียว

สมมติ d เป็นจุดตรึงของ f

ถ้า $f(d)=d$

จาก $f^2(d)=f(f(d))=f(d)=d$

$f^3(d)=f(f^2(d))=f(f(d))=f(d)=d$

$\vdots$

$f^q(d)=f(f^{q-1}(d))=f(d)=d$

ดังนั้น $ad+b=d$

$d-ad=b$

$d(1-a)=b$

$$d=\frac{b}{1-a}$$

สรุปว่า จุดตรึงของ f มีเพียงจุดเดียว □

บทตั้ง 3.1.2 ให้ $\beta\in\mathbb{Z}$

1) ถ้า $g^{-i}(\beta)\notin\mathbb{Z}$ สำหรับบาง $i\in\mathrm{N}$ แล้ว $g^{-(i+1)}(\beta)\notin\mathbb{Z}$

2) ถ้า $\beta=p$ แล้ว $g^{-j}(\beta)\in\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j\ge 1$

3) ถ้า $\beta\ne p$ แล้วจำนวนเต็มบวก J ที่ซึ่ง $g^{-j}(\beta)\in\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j\le J$ และ $g^{-j}(\beta)\notin\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j>J$

พิสูจน์

1) สมมติให้ $g^{-(i+1)}(\beta)=n\in\mathbb{Z}$

$$g(g^{-(i+1)}(\beta))=g^{-i}(\beta)=g(n)$$

ซึ่ง $g(n)=an+b\in\mathbb{Z}$

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะ $g^{-i}(\beta)\notin\mathbb{Z}$

2) ถ้า $\beta=p$ จะแสดงว่า $g^{-j}(\beta)\in\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j\geq 1$

จาก $g(n)=an+b$

จะเห็นว่า $g(p)=a\left(\dfrac{b}{1-a}\right)+b=\dfrac{b}{1-a}=p$

ดังนั้น
$$g(p)=p$$
$$p=g^{-1}(p)$$
$$g^{-2}(p)=g^{-1}(p)=p$$
$$\vdots$$
$$g^{-j}(p)=p\in\mathbb{Z}\quad \text{สำหรับทุก } j\geq 1$$

3) สมมติ $\beta\neq p$

กรณี $p\in\mathbb{Z}$ แล้ว $a^{J}\,\|\,\beta-p$ สำหรับบาง $J\in\mathbb{N}_0$ เมื่อ $i=0,1,2,...,J$

มี $\dfrac{\beta-p}{a^{i}}+p\in\mathbb{Z}$

และ
$$\frac{\beta-p}{a^{i}}+p=\frac{\beta}{a^{i}}-\frac{b}{a^{i}}\left(\frac{a^{i}-1}{a-1}\right)$$
$$=\frac{\beta}{a^{i}}-\frac{b}{a^{i}}\left(a^{i-1}+a^{i-2}+...+a+1\right)$$
$$=\frac{\beta}{a^{i}}-\frac{b}{a}-\frac{b}{a^{2}}-\frac{b}{a^{3}}-\cdots-\frac{b}{a^{i-1}}-\frac{b}{a^{i}}$$
$$=\frac{\beta-b}{a^{i}}-\frac{b}{a^{i-1}}-\frac{b}{a^{i-2}}-\cdots-\frac{b}{a^{3}}-\frac{b}{a^{2}}-\frac{b}{a}$$
$$=\frac{1}{a}\left\{\left(\frac{\beta-b}{a^{i-1}}-\frac{b}{a^{i-2}}-\cdots-\frac{b}{a}\right)-b\right\}$$

$$= g^{-1}\left(\frac{\beta-b}{a^{i-1}}-\frac{b}{a^{i-2}}-\cdots-\frac{b}{a}\right)$$

$$= \cdots = g^{-i}(\beta)$$

เมื่อ $j > J$ แสดงว่า $g^{-j}(\beta) = \dfrac{\beta-p}{a^j}+p \notin \mathbb{Z}$

กรณี $p \notin \mathbb{Z}$ แล้วพิจารณา $\dfrac{\beta-p}{a^k}+p$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}_0$

$k=0$ สังเกตว่า $\dfrac{\beta-p}{a^k}+p \in \mathbb{Z}$

ให้ $K \in \mathbb{N}$ ที่ใหญ่เพียงพอที่ทำให้อสมการ $\left|\dfrac{\beta-p}{a^K}\right| < |p| - \lfloor |p| \rfloor$ เป็นจริง

ดังนั้น $\dfrac{\beta-p}{a^K}+p \notin \mathbb{Z}$

ให้ J เป็นจำนวนบวกที่ใหญ่ที่สุดที่ซึ่ง $\dfrac{\beta-p}{a^j}+p \in \mathbb{Z}$ สำหรับ $j = 0,1,\dots,J$

สำหรับ $j > J$ จะมี $g^{-j}(\beta) = \dfrac{\beta-p}{a^j}+p \notin \mathbb{Z}$ □

จากบทตั้ง 3.1.2 มีการนิยามดังต่อไปนี้ จำนวนเต็ม α กล่าวว่า เป็น**จุดเริ่มต้น**(starter) ถ้าไม่มีจำนวนเต็ม n ที่ซึ่ง $g(n) = \alpha$ นอกจากนั้น α กล่าวว่า **ไม่เป็นจุดเริ่มต้น** (nonstarter)

ให้ S แทน**เซตจุดเริ่มต้น** (starter) ใน $\mathbb{Z}$

ให้ N แทน**เซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจุดเริ่มต้น** (nonstarter) ใน $\mathbb{Z}$

บทตั้ง 3.1.3 เซต $\{ma+b-1 \mid m \in \mathbb{N}_0\} \subset S$

พิสูจน์ S เป็นเซตอนันต์ จะแสดงว่า $\{ma+b-1 \mid m \in \mathbb{N}_0\} \subset S$

ให้ $x \in \{ma+b-1 \mid m \in \mathbb{N}_0\}$

ดังนั้น $\exists m \in \mathbb{N}_0$ ที่ซึ่ง $x = ma+b-1$

จะแสดงว่า $x \in S$ นั่นคือ ไม่มีจำนวนเต็ม n ที่ซึ่ง $g(n) = x$

สมมติ $\exists n \in \mathbb{Z}$ ที่ซึ่ง $g(n) = x$

$$an+b = ma+b-1$$

$$a(n-m) = -1$$

เนื่องจาก $-1 = (-1)(1)$ แต่ $a \neq \pm 1$ เกิดข้อขัดแย้ง

เนื่องจาก $\{ma+b-1 \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ เป็นเซตอนันต์ ดังนั้น S เป็นเซตอนันต์ด้วย □

โดยบทตั้ง 3.1.2 คลาสสมมูล (equivalence class) ที่ถูกสร้างผ่านความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) ในบทตั้ง 3.1.1 มีรูปแบบดังนี้

$$C_\alpha = \left\{ g^m(\alpha) \mid m \in \mathbb{N}_0 \right\} \text{ เมื่อ } \alpha \in S$$

และ

$$C_p = \begin{cases} \{p\}, p \in \mathbb{Z} \\ \varnothing, p \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

บทตั้ง 3.1.4 ให้ $\alpha, \alpha_1 \in S$ และ $\alpha \neq \alpha_1 \quad C_\alpha \cap C_{\alpha_1} = \varnothing$

พิสูจน์ ให้ $x \in C_\alpha \cap C_{\alpha_1}$

ดังนั้น $x \in C_\alpha$ และ $x \in C_{\alpha_1}$

เนื่องจาก $x \in C_\alpha, \exists m \in \mathbb{N}_0$ ที่ซึ่ง $x = g^m(\alpha)$

เนื่องจาก $x \in C_{\alpha_1}, \exists m_1 \in \mathbb{N}_0$ ที่ซึ่ง $x = g^{m_1}(\alpha_1)$

ดังนั้น $g^m(\alpha) = g^{m_1}(\alpha_1)$

ไม่เสียความหมายเมื่อสมมติ $m \leq m_1$

ทำให้ได้ว่า $\alpha = g^{m_1 - m}(\alpha_1)$ ดังนั้น $\alpha \notin S$ เกิดข้อขัดแย้ง □

บทตั้ง 3.1.5 $\mathbb{Z} = \left(\bigcup_{\alpha \in S} C_\alpha \right) \bigcup C_p$

พิสูจน์ ถ้า $x = p$ โดยนิยามของคลาสสมมูลได้ว่า $x \in C_p$

ดังนั้น $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in S} C_\alpha \right) \bigcup C_p$

ถ้า $x \neq p$ จะแสดงว่า $x \in \bigcup_{\alpha \in S} C_\alpha$

นั่นคือจะต้องแสดงว่า $x \in C_\alpha \;\; ; \exists \alpha \in S$

คือ $x = g^t(\alpha) \; ; \exists t \in \mathbb{N}_0$

จากบทตั้ง 3.1.2 ; $\exists J \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $g^{-j}(x) \in \mathbb{Z} \;\; \forall j \leq J$ และ

$g^{-j}(x) \notin \mathbb{Z} \;\; \forall j > J$

แสดงว่า $g^{-J}(x)$ เป็นจุดเริ่มต้น (starter) ซึ่ง $x = g^J(g^{-J}(x)) \in C_{g^{-J}(x)} \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} C_\alpha$ □

เพื่อสะดวก ให้ $C=\{C_\alpha \mid \alpha \in S\}$ โดยใช้คุณสมบัติของคลาสที่รวมกันต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1.6 ถ้า r และ l อยู่ใน S แต่ $r \neq l$ แล้ว r และ l อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน

พิสูจน์ สมมติให้ r และ l อยู่ในคลาสเดียวกัน

จะได้ $r = f^{tq}(l)$ สำหรับ $t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

โดยการสับเปลี่ยนระหว่าง r และ l เราสามารถสมมติ $t > 0$

เนื่องจาก $r = f^{tq}(l)$

จะได้ $r = f^{q}(f^{(t-1)q}(l))$

ดังนั้น $r = g(f^{(t-1)q}(l))\ ;t>0$

สรุปได้ว่า $r \notin S$ เกิดข้อขัดแย้ง □

บทตั้ง 3.1.7 1) สำหรับแต่ละ $\alpha \in S$ f ส่งคลาสของ C_α ไปยังคลาสเดียวเท่านั้นใน C ที่บรรจุ $f(\alpha)$

2) $f^{q}(C_\alpha) \subset C_\alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in S$

3) f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน $\mathbb{Z}$

พิสูจน์

1) ให้ $x \in C_\alpha$; $a \in S$

ดังนั้น $x = g^{m}(\alpha)\ ;m \in \mathbb{N}_0$

เนื่องจาก $f(x) = f(g^{m}(\alpha)) = f(f^{qm}(\alpha)) = f^{qm}(f(\alpha)) = g^{m}(f(\alpha))$

ดังนั้น $f(x)$ และ $f(\alpha)\ \in C_{\overline{\alpha}}\ ;\overline{\alpha} \in S$

จะแสดงว่า $f(C_\alpha) \subseteq C_{\overline{\alpha}}$ เท่านั้น

โดยบทตั้ง 3.1.4 แสดงว่า $C_{\overline{\alpha}}$ แตกต่างจากทุกคลาสยกเว้น C_p

ดังนั้น เราต้องแสดงว่า $C_{\overline{\alpha}}$ และ C_p แตกต่างกัน

นั่นคือจะแสดงว่า $C_{\overline{\alpha}} \cap C_p = \varnothing$

เนื่องจาก $C_p = \{p\}$ ถ้า $C_{\overline{\alpha}} \cap C_p \neq \varnothing$

แล้ว $p = g^{m}(f(\alpha)) = f(g^{m}(\alpha))$; p เป็นจุดตรึง (fixed point) ของ f

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น $g^{m}(\alpha) = p\ ;m \in \mathbb{N}_0$

สรุปว่า $\alpha = p$ เกิดข้อขัดแย้ง

2) ให้ $\alpha \in S$

และ $x \in C_\alpha$ ดังนั้น $x = g^m(\alpha)$ สำหรับบาง $m \in \mathbb{N}_0$

แล้ว $f^q(x) = f^q(g^m(\alpha))$

$= g(g^m(\alpha))$

$= g^{m+1}(\alpha) \in C_\alpha \ ; m+1 \in \mathbb{N}_0$

ดังนั้นแสดงว่า $f^q(C_\alpha) \subset C_\alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in S$

3) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $\alpha \in S$

มี $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ ที่ซึ่ง $\alpha = f(\alpha_1)$

ในทำนองเดียวกันมี $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ ที่ซึ่ง $\alpha_1 = f(\alpha_2)$

นั่นคือ $\alpha = f^2(\alpha_2)$

ทำซ้ำจนได้ว่า $\alpha = f^q(\alpha_q)$ สำหรับบาง $\alpha_i \in \mathbb{Z}; \forall i = 1,2,...,q$

เนื่องจาก $f^q(\alpha_q) = g(\alpha_q)$

ดังนั้น $\alpha = g(\alpha_q)$ เกิดข้อขัดแย้ง □

บทตั้ง 3.1.8 ถ้า $k \in S \setminus \mathbb{R}_f$ แล้ว $f^{q-1}(x), f^{q-2},..., f(k), k$ เป็นจุดเริ่มต้น (starter) ของคลาสที่แตกต่างกันทั้งหมด q คลาส

พิสูจน์ สมมติให้ $f^i(k) \in C_{\alpha_i}$; $i = 0,1,...,q-1$

จะแสดงว่า $f^i(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส C_{α_i}

เริ่มจาก $C_{\alpha_{q-1}}$ จะได้ว่า

$$f^{q-1}(k) = g^t(a_{q-1}) \quad ; \exists t \in \mathbb{N}_0$$

เนื่องจาก α_{q-1} และ $f^{q-1}(k)$ อยู่ใน $C_{\alpha_{q-1}}$

โดยบทตั้ง 3.1.7 ข้อ 1 อ้างว่า $f(\alpha_{q-1})$ และ $f^q(k)$ อยู่ในคลาสเดียวกัน

โดยบทตั้ง 3.1.7 ข้อ 2 เรามี $f^q(k) \in C_{\alpha_0}$ ดังนั้น $f(\alpha_{q-1}) \in C_{\alpha_0}$

นั่นคือ $f(\alpha_{q-1}) = g^s(k)$; $\exists s \in \mathbb{N}$ แล้ว

$$g(k) = f^q(k) = f(f^{q-1}(k)) = f(g^t(\alpha_{q-1})) = g^t(f(\alpha_{q-1})) = g^{t+s}(k)$$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$g^{-1}(g(k)) = g^{-1}(g^{t+s}(k))$$

$$k = g^{t+s-1}(k)$$

จาก $g(k) = ak + b$

$$g^2(k) = g(ak+b) = a(ak+b) + b = a^2k + ab + b$$

$$g^3(k) = g(a^2k + ab + b) = a(a^2k + ab + b) + b = a^3k + a^2b + ab + b$$

$$\vdots$$

$$g^{t+s-1}(k) = a^{t+s-1}k + a^{t+s-2}b + a^{t+s-3}b + \ldots + ab + b$$

เนื่องจาก $a^{t+s-2}b + a^{t+s-3}b + \ldots + ab + b = b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{t+s-3} + a^{t+s-2})$ เป็น อนุกรมเรขาคณิต $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1}$

จากสูตร $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}; r \neq 1$ ดังนั้น $r = a$

$$= \frac{1(1-a^{t+s-1})}{1-a}$$

$$= \frac{1-a^{t+s-1}}{1-a}$$

ดังนั้น $g^{t+s-1}(k) = a^{t+s-1}k + b\left(\dfrac{1-a^{t+s-1}}{1-a}\right)$

$$= a^{t+s-1}k + \frac{b}{1-a} - \frac{ba^{t+s-1}}{1-a}$$

$$g^{t+s-1}(k) = a^{t+s-1}(k-p) + p$$

เนื่องจาก k ไม่เป็นจุดตรึง

จะได้ $t+s=1$ ดังนั้น $t=0, s=1$

ดังนั้น $f^{q-1}(k) = \alpha_{q-1}$

ใช้เหตุผลคล้ายกับ $f^{q-2}(k), \ldots, f(k), k$ เป็นจุดเริ่มต้น (starter) ของคลาส $C_{\alpha_{q-2}}, \ldots, C_{\alpha_1}, C_{\alpha_0}$ ที่แตกต่างกันตามลำดับ □

3.2 รูปแบบของฟังก์ชันผลเฉลย

ทฤษฎีบท ให้ q, a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $q \geq 2$ และ $a \notin \{0,1,-1\}$ แล้ว $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation) $f^{q}(n) = an + b$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน f_{π} ที่นิยามดังต่อไปนี้

พิสูจน์ กำหนด $C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots\}, r_{j,i} = a^j i - (a^j - 1)p \ \ (i \in \mathbb{Z})$

และ $C_p = \{p\}$ เมื่อ $p \in \mathbb{Z}$

ให้ π เป็น partition ของ $\{C_i\}_{i \neq p}$ อยู่ในวงโคจร (orbits) แต่ละวงโคจร (orbits) บรรจุคลาสทั้งหมด q คลาส

ให้ $\left(C_{i_0}, C_{i_1}, \ldots, C_{i_{q-1}}\right)$ เป็นวงโคจร (orbits)

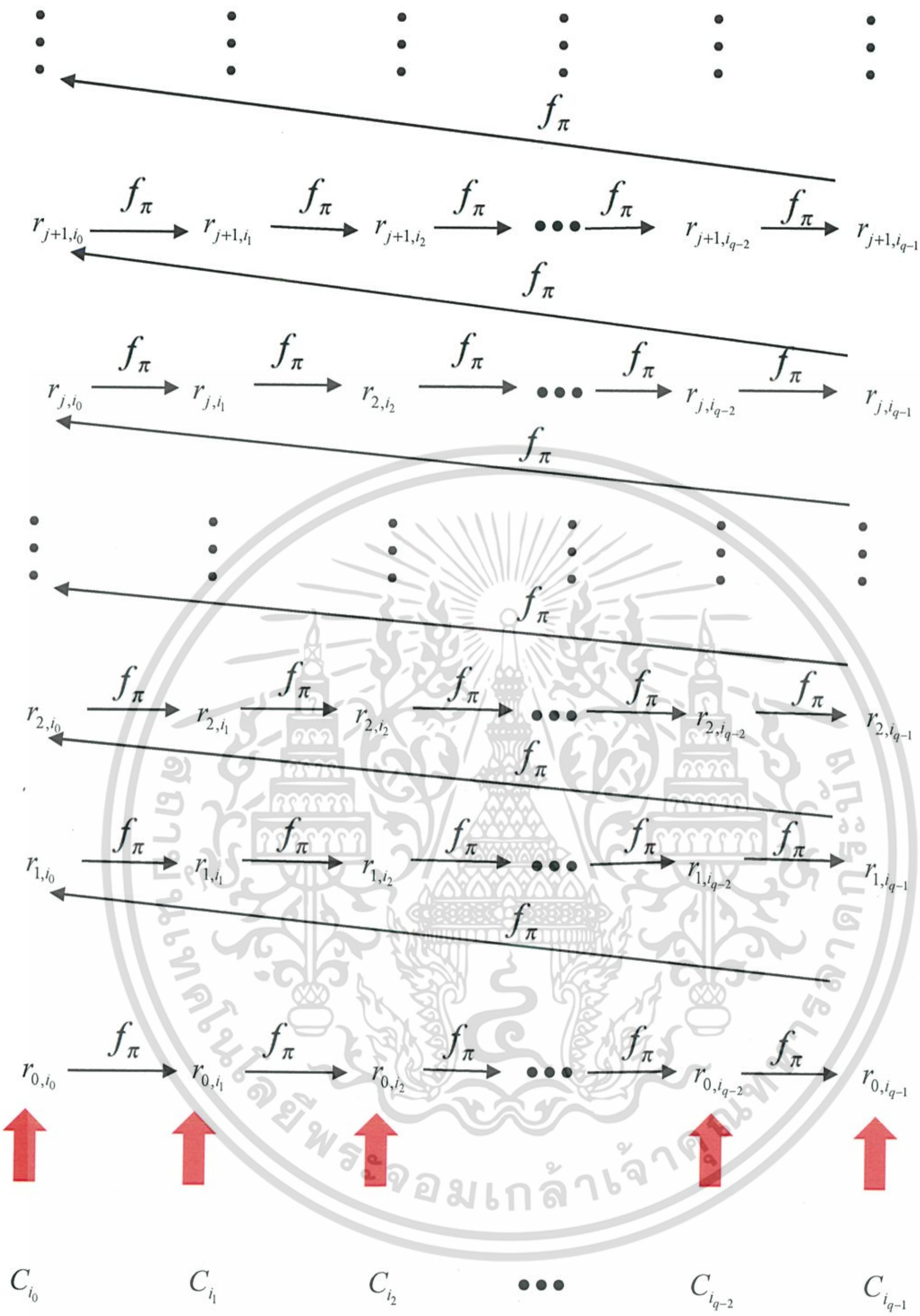
นิยาม $\quad f_{\pi} : C_{i_h} \to C_{i_{h+1}} \quad (h = 0,1,\ldots,q-2)$

โดย $\quad f_{\pi}(r_{j,i_h}) = r_{j,i_{h+1}} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$

และ $\quad f_{\pi} : C_{i_{q-1}} \to C_{i_0}$

โดย $\quad f_{\pi}(r_{j,i_{q-1}}) = r_{j+1,i_0} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$

กำหนดให้ $f_{\pi}(p) = p$ เมื่อ $p \in \mathbb{Z}$



รูปแสดงรูปแบบการส่งของฟังก์ชัน f_π

เนื่องจาก p เป็นจุดตรึงของ f_π ดังนั้น $f_\pi^q(p) = ap+b$
ให้ $r_{j,i_h} \in C_{i_h}$ เนื่องจาก

$$f_\pi(r_{j,i_h}) = r_{j,i_{h+1}} , \qquad f_\pi^2(r_{j,i_h}) = f(r_{j,i_{h+1}}) = r_{j,i_{h+2}} ,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_\pi^{q-1-h}(r_{j,i_h}) = r_{j,i_{h+(q-1-h)}} = r_{j,i_{q-1}} , \qquad f_\pi^{(q-1-h)+1}(r_{j,i_h}) = f_\pi(r_{j,i_{q-1}}) = r_{j+1,i_0} ,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_\pi^q(r_{j,i_h}) = f_\pi^{(q-1-h)+h+1}(r_{j,i_h}) = r_{j+1,i_h} , \qquad ar_{j,i_h} + b = r_{j+1,i_h} ,$$

จะได้

$$f_\pi^q(r_{j,i_h}) = ar_{j,i_h} + b$$

ถ้า $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = an+b \ (n\in\mathbb{Z})$
จากบทตั้ง 3.1.8 จะเห็นว่า $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-1}$ คือจุดเริ่มต้น (starter) ของแต่ละคลาส ที่ซึ่ง $\alpha_i \neq p$ สำหรับทุกๆ i

โดยความจริงแล้ว $\alpha_i = f^i(\alpha_0)$ คือจุดเริ่มต้น (starter) ของ C_{α_i} ถ้ามี $\alpha_i = \alpha_j$ เมื่อ $i<j$ สำหรับบาง $i,j\in\{0,1,\ldots,q-1\}$ แล้ว

กรณี $i\neq 0$ เนื่องจาก f จะส่งคลาสไปยังอีกคลาสไม่สามารถย้อนกลับไปยัง C_{α_0} ได้หลังจากการทำซ้ำ q ครั้ง เกิดข้อขัดแย้ง

กรณี $i=0$ หลังจากการทำซ้ำ q ครั้ง f จะส่งคลาสกลับไปยังคลาสตัวเอง เราจะต้องมี $j\,|\,q$ และเนื่องจาก $f^m(\alpha_0)$ คือจุดเริ่มต้น (starter) สำหรับทุกๆ $m=0,1,\ldots,q-1$ จะได้ $\alpha_0 = f^q(\alpha_0) = a\alpha_0 + b$ เกิดข้อขัดแย้ง
เราเรียกการวนกลับ $\left\{C_{\alpha_0},\ldots,C_{\alpha_{q-1}}\right\}$ นี้ว่า วงโคจร (orbit)
ประยุกต์ขั้นตอนในบทตั้ง 3.1.8 พิจารณาเซต $\mathbb{Z}\setminus(C_{\alpha_0}\cup\ldots\cup C_{\alpha_{q-1}})$ เราจะได้วงโคจร (orbit) อื่นๆอีก ทำซ้ำจนเหลือเซตของ $\mathbb{Z}\setminus\{p\}$ เราจะเห็นว่า f ส่งจากคลาสไปยังคลาสอื่นๆและจำนวนสมาชิกของแต่ละวงโคจร (orbit) คือ q ตัวเท่านั้น ในแต่ละวงโคจร (orbit) จะมีสมาชิก 1 ตัวเท่านั้นที่ไม่อยู่ในการส่งของ f คือไม่มีจำนวนเต็มที่ f ส่งหาตัวนั้น แต่เราก็มีว่า $f(p)=p$ แสดงว่า f คือฟังก์ชันแบบหนึ่งของ f_π □

บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

พิจารณาฟังก์ชัน $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation)

$$f^{q}(n)=an+b \qquad \text{สำหรับทุก } n\in\mathbb{Z} \tag{3.1}$$

ให้ a,b และ q เป็นจำนวนเต็มที่ซึ่ง $q\geq 2$ และ $a\neq 0,\pm 1$

$$g(n)=an+b\ ,\quad p=\frac{b}{1-a}$$

บทตั้ง 3.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันผลเฉลยของสมการ (3.1)

1) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ดังนั้น f^{-1} นิยาม บน $R_f\subseteq\mathbb{Z}$ เมื่อ R_f แทนเซตของเรนจ์ของฟังก์ชัน)
2) ฟังก์ชัน f แบ่ง (partition) $\mathbb{Z}$ เป็นคลาสที่สมมูล (equivalence class) (ไม่เป็นเซตว่าง) ภายใต้ความสัมพันธ์ $x\sim y\Leftrightarrow y=f^{tq}(x)$ สำหรับบาง $t\in\mathbb{Z}$
3) f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว (unique fixed point) คือ p เมื่อ $(1-a)|b$

บทตั้ง 3.1.2 ให้ $\beta\in\mathbb{Z}$

1) ถ้า $g^{-i}(\beta)\notin\mathbb{Z}$ สำหรับบาง $i\in\mathbb{N}$ แล้ว $g^{-(i+1)}(\beta)\notin\mathbb{Z}$

2) ถ้า $\beta=p$ แล้ว $g^{-j}(\beta)\in\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j\geq 1$

3) ถ้า $\beta\neq p$ แล้วจำนวนเต็มบวก J ที่ซึ่ง $g^{-j}(\beta)\in\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j\leq J$ และ $g^{-j}(\beta)\notin\mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j>J$

บทตั้ง 3.1.3 เซต $\{ma+b-1\,|\,m\in\mathbb{N}_0\}\subset S$

บทตั้ง 3.1.4 ให้ $\alpha,\alpha_1\in S$ และ $\alpha\neq\alpha_1$ $C_\alpha\cap C_{\alpha_1}=\varnothing$

บทตั้ง 3.1.5 $\mathbb{Z}=\left(\bigcup_{\alpha\in S}C_\alpha\right)\bigcup C_p$

บทตั้ง 3.1.6 ถ้า r และ l อยู่ใน S แต่ $r\neq l$ แล้ว r และ l อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน

บทตั้ง 3.1.7 1) สำหรับแต่ละ $\alpha \in S$ f ส่งคลาสของ C_α ไปยังคลาสเดียวเท่านั้นใน C ที่บรรจุ $f(\alpha)$

2) $f^q(C_\alpha) \subset C_\alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in S$

3) f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน $\mathbb{Z}$

บทตั้ง 3.1.8 ถ้า $k \in S \setminus \mathbb{R}_f$ แล้ว $f^{q-1}(x), f^{q-2}, \ldots, f(k), k$ เป็นจุดเริ่มต้น (starter) ของคลาสที่แตกต่างกันทั้งหมด q คลาส

ทฤษฎีบท ให้ q, a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $q \geq 2$ และ $a \notin \{0, 1, -1\}$ แล้ว $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation) $f^q(n) = an + b$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน f_π ที่นิยามดังต่อไปนี้

กำหนด $C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots\}, r_{j,i} = a^j i - (a^j - 1)p \quad (i \in \mathbb{Z})$

และ $C_p = \{p\}$ เมื่อ $p \in \mathbb{Z}$

ให้ π เป็น partition ของ $\{C_i\}_{i \neq p}$ อยู่ในวงโคจร (orbits) แต่ละวงโคจร (orbits) บรรจุคลาสทั้งหมด q คลาส

ให้ $\left(C_{i_0}, C_{i_1}, \ldots, C_{i_{q-1}}\right)$ เป็นวงโคจร (orbits)

นิยาม $f_\pi : C_{i_h} \to C_{i_{h+1}} \quad (h = 0, 1, \ldots, q-2)$

โดย $f_\pi(r_{j,i_h}) = r_{j,i_{h+1}} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$

และ $f_\pi : C_{i_{q-1}} \to C_{i_0}$

โดย $f_\pi(r_{j,i_{q-1}}) = r_{j+1,i_0} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$

4.2 ข้อเสนอแนะ

อาจจะพิจารณาช่วงของฟังก์ชันเป็นเซตของ $\mathbb{R}$ ซึ่งจะต้องมีการแยกกรณีเป็น $0 < a < 1$ $a = 1$ $a = -1$ และ $a > -1$

เอกสารอ้างอิง

[1] J.-P. Allouche, N. Rampersad, J.O. Shallit, On integer sequences whose first iterates are linear, Aequationes Math. 69 (1-2) (2005) 114-127.

[2] L. Berg, Iterative functional equations, Restock. Math. Kolloq. 64 (2009) 3-10.

[3] W. Jarczyk, On an equation of linear iteration, Aequationes Math. 51 (1996) 303-310.

[4] M. Kuczama, B. Choczewski and R. Ger, Iterative Functional Equations, Encyclopedia of Mathermatics and Its Applications, Vol. 32, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[5] M. Kulczycki and J.Tabor, Iterative functional equations in the class of Lipschitz functions, Aequationes Math. 64 (2002) 24-33.

[6] V. Laohakosol and B. Yuttanan, Iterates of increasing sequence of positive integers, Aequationes Math. 87 (2014) 89-103.

[7] J. Matkowski and W. Zhang, On linear dependence of iterates, J. of Appl. Anal. 6 (1) (2000) 149-157.

[8] J. Matkowski and W. Zhang, On the polynomial-like iterative functional equation, Th. M. Rassias (Ed.) Functional Equations and Inequalities (2000) 145-170.

[9] J. Propp, Problem proposal 474, Crux Math. 5 (1979) 229.

[10] J. Propp, Solution by G. Patruno, Crux Math. 6 (1980) 198.

[11] K.S. Sarkaria, Roots of translations, Aequations Math. 75 (2008) 304-307.

[12] D.Yang and W. Zhang, Characteristic solutions of polynomial-like iterative equations, Aequationes Math. 67 (2004) 80-105

[13] GY. TARGONSKI, Topics in Iteration Theory, Vandenhoeck und Ruprecht, Gottingen, 1981.