การนำรูปแบบนิวตัน-โค้ตไปใช้ในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา

NEWTON-COTES FORMULAE IN RUNGE-KUTTA METHODS

สมศกุล พุ่มมาก

SOMSAKUN PHUMMARK

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2548

ISBN 974-15-1841-2

การนำรูปแบบนิวตัน-โค้ตไปใช้ในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา

NEWTON-COTES FORMULAE IN RUNGE-KUTTA METHODS

สมสกุล พุ่มมาก

SOMSAKUN PHUMMARK

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2548

ISBN 974-15-1841-2

NEWTON-COTES FORMULAE IN RUNGE-KUTTA METHODS

SOMSAKUN PHUMMARK

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2005

ISBN 974-15-1841-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การนำรูปแบบนิวตัน-โค้ตไปใช้ในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา
นักศึกษา	นายสมสกุล พุ่มมาก
รหัสประจำตัว	43065301
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2548
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข

บทคัดย่อ

รูปแบบนิวตัน-โค้ตเป็นการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันโดยการแทนที่ด้วยฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณระหว่างค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบและค่าจุดถ่วง เนื้อหาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำจุดถ่วงกับจุดของรูปแบบจากรูปแบบนิวตัน-โค้ต มาใช้ในการกำหนดจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา และเปรียบเทียบค่าความคาดเคลื่อนที่เกิดจากระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาแบบใหม่ กับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาแบบที่นิยมใช้ พร้อมทั้งระเบียบวิธีรูปแบบอื่นที่พัฒนาจากระเบียบวิธี รุงเง-กุตตา ในการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

Thesis	Newton-Cotes Formulae in Runge – Kutta Methods
Student	Mr. Somsakun Phummark
Student ID.	43065301
Degree	Master of Science
Programme	Applied Mathematics
Year	2005
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk

ABSTRACT

Newton-Cotes formulae approximate the integral of the complicated functions by replacing the function with the sum of the product by the values of the function at the nodal points and its weights. In this research, we use the points and weights from Newton-Cotes formulae to be points and weights in the Runge-Kutta method. Then we compare the new Runge-Kutta method with classical Runge-Kutta method and other methods that have been developed from Runge-Kutta method to solve first order ordinary differential equation.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหาตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้า

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ นักศึกษาทุกคนที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำต่าง ๆ และยังให้กำลังใจต่อผู้วิจัยอย่างใกล้ชิดเสมอมา

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ อาจารย์มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ทุกท่านที่ให้กำลังใจและความช่วยเหลือต่าง ๆ

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบให้กับบิดามารดา ซึ่งเป็นที่รักและเคารพยิ่ง ตลอดจนครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่านที่ได้ถ่ายทอดวิชาความรู้และประสบการณ์ที่ดีให้แก่ข้าพเจ้า

สมสกุล พุ่มมาก

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย I

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ II

กิตติกรรมประกาศ III

สารบัญ IV

สารบัญตาราง V

สารบัญรูป VI

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2

1.3 ขอบเขตของการวิจัย 2

1.4 ขั้นตอนของการวิจัย 3

1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ 3

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 4

2.1 รูปแบบนิวตัน-โค้ต 4

2.2 ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา 6

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 10

บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย 13

3.1 ค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ต 13

3.1.1 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสอง 13

3.1.2 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสาม 14

3.1.3 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสี่ 17

3.1.4 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับห้า 17

3.1.5 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับหก 18

3.2 รูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา 19

3.2.1 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสอง 19

3.2.2 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสาม 22

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ II
กิตติกรรมประกาศ III
สารบัญ IV
สารบัญตาราง V
สารบัญภาพ VI
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ 1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย 2
1.4 ขั้นตอนของการวิจัย 3
1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ 3

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 4
2.1 รูปแบบนิวตัน-โค้ต 4
2.2 ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา 6
2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 10

บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย 13
3.1 ค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ต 13
3.1.1 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสอง 13
3.1.2 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสาม 14
3.1.3 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสี่ 17
3.1.4 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับห้า 17
3.1.5 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับหก 18
3.2 รูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา 19
3.2.1 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสอง 19
3.2.2 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสาม 22

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

3.2.3 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่....27

3.2.4 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้า....30

3.2.5 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับหก....38

บทที่ 4 ผลของการวิจัย....42

4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข....42

4.2 บทสรุป....48

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ....49

5.1 สรุปผลการวิจัย....49

5.2 ข้อเสนอแนะ....50

เอกสารอ้างอิง....51

ภาคผนวก....52

ประวัติผู้เขียน....

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

2.1 แสดงค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตชนิดปิด.....6

2.2 แสดงค่าButcher-array สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาทั่วไป.....7

2.3 แสดงค่าButcher-array สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาแบบชัดแจ้ง.....7

4.1 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการแก้ปัญหาที่ 1 45

4.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการแก้ปัญหาที่ 2 46

4.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการแก้ปัญหาที่ 3 47

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

1.1 แสดงวงจรไฟฟ้าแบบ RC...1

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปัญหาที่สำคัญทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์และเศรษฐศาสตร์หลาย ๆ ปัญหาสามารถอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น ปัญหาวงจรไฟฟ้าแบบ RC ดังรูปที่ 1.1 ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ [1]

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{q}{RC} \tag{1.1}$$

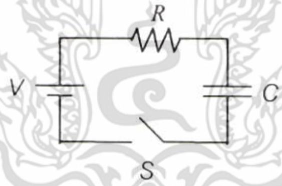
เมื่อ q แทน ประจุไฟฟ้า (charge)

t แทน เวลา

V แทน ความต่างศักย์

R แทน ความต้านทานไฟฟ้า (resistance)

C แทน ตัวเก็บประจุ (capacitance)



รูปที่ 1.1 แสดงวงจรไฟฟ้าแบบ RC

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้อธิบายปัญหาต่าง ๆ มักจะมีการกำหนดเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นให้กับสมการที่สร้างขึ้น และเรียกสมการในลักษณะนี้ว่า ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น(initial value problem) สำหรับรูปแบบทั่วไปของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 คือ

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นเป็น $$y(a) = c \tag{1.3}$$

มีวิธีในการแก้ปัญหา 2 ประเภท คือ วิธีในการหาผลเฉลยจริง และวิธีในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้แก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ในปัจจุบันคือระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา (Runge-Kutta method)

รูปแบบนิวตัน - โค้ต (Newton-Cotes formulae) เป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้ในการประมาณค่าหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนให้อยู่ในรูปแบบผลรวมของผลคูณของจุดถ่วง(weighting coefficient) และค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ(function at the nodal point) ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเอาค่าของจุดถ่วง จากรูปแบบนิวตัน-โค้ตนี้ไปใช้เป็นค่าของจุดถ่วงในระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา ซึ่งแตกต่างกันไปในแต่ละอันดับ แล้วทำการหาตัวแปรไม่ทราบค่าที่เหลือในระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาให้ครบ

รูปแบบนิวตัน - โค้ตเป็นการประมาณค่าปริพันธ์ที่มีความแม่นยำ และระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาเป็นการประมาณค่าหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จึงมีแนวคิดว่า ควรนำจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน - โค้ตนี้ไปใช้เป็นจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีรุงเง - กุตตารูปแบบต่าง ๆ และวิธีการสร้างรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา

1.2.2 เพื่อศึกษารูปแบบนิวตัน - โค้ต และหาจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน - โค้ต

1.2.3 เพื่อหารูปแบบระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน - โค้ตมาประยุกต์ใช้ เพื่อแก้ปัญหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับสอง ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับสาม ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับสี่ ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับห้าและระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับหก โดยการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน –โค้ตมาประยุกต์ใช้ เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาค่าเริ่มต้น ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูปแบบ

$$y'(x) = f(x, y) \qquad ; x \in [a, b]$$

โดยมีค่าเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(a) = c$$

การปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาสำหรับงานวิจัยนี้ ยังคงรักษาการเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบขั้นเดียว (single-step method)

1.4 ขั้นตอนของการวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 : ค้นคว้าเอกสาร แนวคิด ทฤษฎี หลักการ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา

ขั้นตอนที่ 2 : ศึกษาเอกสาร แนวคิด ทฤษฎี หลักการ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา เพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย

ขั้นตอนที่ 3 : ทำการสร้างระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับสองถึงอันดับหก โดยนำจุดถ่วงและจุดของรูปแบบของนิวตัน – โค้ต มาเป็นจุดถ่วงและจุดของรูปแบบในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา

ขั้นตอนที่ 4 : เปรียบเทียบระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาที่ได้จากการวิจัยกับระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาที่นิยมใช้ในปัจจุบัน

ขั้นตอนที่ 5 : สรุปผลและเขียนวิทยานิพนธ์

1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

คำจำกัดความของคำศัพท์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ มีดังนี้

1.5.1 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta methods) หมายถึง ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาแบบชัดแจ้ง (explicit Runge - Kutta) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.5.2 รูปแบบนิวตัน - โค้ต (Newton-Cotes formulae) หมายถึง รูปแบบที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์ (integration) ที่มีความแม่นยำ

บทที่ 2
ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ที่ใช้ในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา ในส่วนของความรู้พื้นฐานจะกล่าวถึง การหาค่าจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน - โค้ต ทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบวิธีรุงเง - กุตตารวมทั้งทฤษฎีการหาค่าผิดพลาด ส่วนของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องจะเป็นงานวิจัยที่มีจุดประสงค์เพื่อพัฒนาระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา ซึ่งเป็นแนวทางในการทำวิจัย ซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

2.1 รูปแบบนิวตัน - โค้ต (Newton - Cotes formulae)

รูปแบบของนิวตัน – โค้ตมีรูปแบบทั่วไป[2] ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f] \tag{2.1}$$

เรียกรูปแบบที่ (2.1) ว่าการปริพันธ์ด้วยรูปแบบของนิวตัน - โค้ต x_k เรียกว่า จุดของรูปแบบ (nodal point), A_k เรียกว่าจุดถ่วง (weight point), $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E[f]$ เป็นค่าความคาดเคลื่อน

นิยาม 2.1 ถ้า $x_1 = a$ และ $x_n = b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน – โค้ตจาก (2.1) ว่า รูปแบบนิวตัน - โค้ตชนิดปิด (closed Newton - Cotes formula) และถ้า $x_1 > a$ และ $x_n < b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน -โค้ตนี้ว่า รูปแบบนิวตัน - โค้ตชนิดเปิด (open Newton - Cotes formula)

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้ากำหนดจุด $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นจุดต่าง ๆ กันในช่วงปิด $[a, b]$ ซึ่ง $x_i \neq x_j$ สำหรับ $i \neq j$ และค่า $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$ แล้วจะมีจำนวนจริง $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{2.2}$$

สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่กำลังน้อยกว่า หรือเท่ากับ $n-1$

พิสูจน์

ต้องการรูปแบบที่เป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$

นั่นคือ

$$\int_a^b dx = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$\int_a^b x dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot x_k$$

$$\int_a^b x^2 dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot x_k^2$$

$$\int_a^b x^3 dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot x_k^3$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b x^{n-1} dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot x_k^{k-1}$$

กำหนดให้ $c_k = \int_a^b x^{k-1} dx$

$$\begin{aligned} \therefore \quad A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n &= c_1 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \ldots + A_nx_n &= c_2 \\ A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 + \ldots + A_nx_n^2 &= c_3 \\ &\vdots \\ A_1x_1^{n-1} + A_2x_2^{n-1} + A_3x_3^{n-1} + \ldots + A_nx_n^{n-1} &= c_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\therefore$ ได้สมการเชิงเส้น $Ax = c$

โดย $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นจุดต่าง ๆ กันในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น $|A| \neq 0$

$\therefore$ สมการ $Ax = c$ จะมีค่าคำตอบและมีเพียงชุดเดียวเท่านั้น

นั่นคือมี $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ที่ทำให้รูปแบบที่ (2.2) เป็นจริง

ตัวอย่างค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตแบ่งช่วงระหว่างจุดที่เท่ากัน แสดงดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน – โค้ตชนิดปิด[3]

จำนวนจุด	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$				
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$		
6	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$	
7	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

2.2 ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา (Runge-Kutta Method)

วิธีการนี้เกิดจาก รุงเง (Runge) เมื่อปี ค.ศ.1895 และ ฮวน (Heun) เมื่อปี ค.ศ.1900 ได้คิดค้นระเบียบวิธีนี้มาจากระเบียบวิธีออยเลอร์และต่อมา กุตตา (Kutta) ได้ปรับปรุงระเบียบวิธีให้เป็นขั้นตอน เมื่อปี ค.ศ. 1901 จึงได้ชื่อว่าระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา (Runge - Kutta Methods) ซึ่งมีรูปแบบทั่วไป[4]ดังนี้

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^{s} b_j k_j \tag{2.4}$$

เมื่อ
$$k_j = f\left(x_n + c_j h, y_n + h\sum_{i=1}^{s} a_{ji} k_i\right) \tag{2.5}$$

ซึ่ง b_j, c_j และ a_{ji} เป็นสัมประสิทธิ์ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา

โดยที่ [5],
$$c_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \tag{2.6}$$

ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับสี่ที่นิยมใช้ในปัจจุบันมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.7}$$

โดยที่
$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

เพื่อให้กระชับขึ้น บุธเชอร์ (Butcher) ได้นำเสนอ Butcher-array ซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงค่า Butcher-array [4] สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาทั่วไป

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

ตามความจริงแล้วในปัจจุบันนี้ ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา ที่เรานิยมใช้เป็นระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาแบบชัดแจ้ง (explicit Runge-Kutta method) ซึ่ง $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \geq i$ ซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 แสดงค่า Butcher-array สำหรับระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาแบบชัดแจ้ง (explicit Runge-Kutta method)

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาเป็นระเบียบวิธีขั้นเดียว (one-step method) โดยรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ s คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \qquad , m = 1,2,... \tag{2.8}$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (increment function) $\phi(x_m, y_m; h)$ คือความชันเฉลี่ยตลอดขนาดขั้น h ซึ่งกำหนดให้มีรูปแบบโดยทั่วไป [4] ดังนี้

$$\phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{2.9}$$

เมื่อ
$$k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; i = 1 \\ f(x_m + hc_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j & ; i = 2,3,..., s \end{cases} \tag{2.10}$$

และ
$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \tag{2.11}$$

โดยที่ a_i, c_i และ b_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา, h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้นมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ และ s เป็นอันดับ (order) ของระเบียบวิธี

นิยาม 2.2 วิธีการขั้นเดียว (One-step method) ที่มีรูปแบบตาม (2.8) จะมีอันดับ p ถ้า p เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ที่ทำให้ผลการกระจายฟังก์ชันรอบจุด x โดยวิธีเทย์เลอร์เป็นไปตามสมการ

$$y(x+h) - y(x) - h\phi(x, y(x); h) = O(h^{p+1}) \tag{2.12}$$

เมื่อ $y(x)$ เป็นผลเฉลยที่แท้จริง

จากนิยาม 2.2 ทำให้ได้ว่า ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ s จะให้ผลเฉลยในการคำนวณที่มีความคาดเคลื่อนอยู่ในรูป $O(h^{s+1})$ ซึ่งหมายความว่า ความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการคำนวณ โดยระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ s จะแปรผันตรงกับขนาดของขั้น h อันดับ s+1

ในช่วงต่อมา ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านทำการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีความถูกต้องเพิ่มมากยิ่งขึ้น ดังเช่น ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา-เมอร์สัน [5] ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}K_1 + \frac{4}{6}K_4 + \frac{1}{6}K_5 \tag{2.13}$$

เมื่อ $K_1 = hf(x_m, y_m)$

$$K_2 = hf(x_m + \frac{1}{3}h, y_m + \frac{1}{3}hK_1)$$

$$K_3 = hf(x_m + \frac{1}{3}h, y_m + \frac{1}{6}hK_1 + \frac{1}{6}hK_2)$$

$$K_4 = hf(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{8}hK_1 + \frac{3}{8}hK_3)$$

$$K_5 = hf(x_m + h, y_m + \frac{1}{2}hK_1 - \frac{3}{2}hK_3 + 2hK_4)$$

และระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาไฟล์เบิร์ก เสนอไว้เมื่อปี ค.ศ. 1969 โดยนักวิจัยชื่อ ไฟล์เบิร์ก (E. Fehlberg) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการหนึ่งที่เป็นที่ยอมรับ โดยระเบียบวิธีดังกล่าวเป็นระเบียบวิธีที่ปรับปรุงรูปแบบจากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา ในกรณีที่ $s = 5$ และตัดเทอม K_2 ออก ทำให้ได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา-ไฟล์เบิร์ก ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5 \tag{2.14}$$

เมื่อ $K_1 = hf(x_m, y_m)$

$$K_2 = hf(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \frac{1}{4}hK_1)$$

$$K_3 = hf(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}hK_1 + \frac{9}{32}hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}hK_1 - \frac{7200}{2197}hK_2 + \frac{7296}{2197}hK_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h, y_m + \frac{439}{216}hK_1 - 8hK_2 + \frac{3680}{513}hK_3 - \frac{845}{4104}hK_4)$$

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1995 F. Costabile, R. Caira และ M.I. Gualtieri [6] ได้เสนองานวิจัยเรื่อง "Economical Runge - Kutta methods" ซึ่งได้รับการตีพิมพ์ในวารสาร "Rendiconti di Matematica, Serie VII" ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาโดยใช้ Butcher-array เป็นสื่อในการศึกษาว่าในแต่ละอันดับของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตานั้นเป็นอะไรได้บ้าง ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้ได้แสดงตระกูลของสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่และอันดับห้า และสำหรับตระกูลสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่คือ

$$c_1 = 0, \qquad c_3 \neq 0, 1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{-1 + 2c_3}{-2 + 6c_3}, \qquad c_4 = 1$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{2c_3 - 1}{12c_2(c_3 - c_2)(1 - c_2)}, \quad b_3 = \frac{1 - 2c_2}{12c_3(c_3 - c_2)(1 - c_3)},$$

$$b_4 = \frac{3 - 4(c_2 + c_3) + 6c_2c_3}{12(1 - c_2)(1 - c_3)}$$

$$a_{21} = c_2, \quad a_{31} = \frac{c_3(3c_2 - c_3 - 4c_2^2)}{2c_2(1 - 2c_2)}, \quad a_{32} = \frac{c_3(c_3 - c_2)}{2c_2(1 - 2c_2)}$$

$$a_{41} = \frac{c_3^2(12c_2^2 - 12c_2 + 4) - c_3(12c_2^2 - 15c_2 + 5) + (4c_2^2 - 6c_2 + 2)}{2c_2c_3[3 - 4(c_2 + c_3) + 6c_2c_3]},$$

$$a_{42} = \frac{(-4c_3^2 + 5c_3 + c_2 - 2)(1 - c_2)}{2c_2(c_3 - c_2)[3 - 4(c_2 + c_3) + 6c_2c_3]},$$

$$a_{43} = \frac{(1 - 2c_2)(1 - c_3)(1 - c_2)}{c_3(c_3 - c_2)[3 - 4(c_2 + c_3) + 6c_2c_3]}$$

ในปี ค.ศ. 1999 David Goeken และ Olin Johnson [7] ได้เสนองานวิจัยเรื่อง "Fifth-order Runge-Kutta with higher order derivative approximations" ซึ่งได้เสนองานวิจัยชิ้นนี้ในการสัมมนา "15TH ANNUAL CONFERENCE OF APPLIED MATHEMATICS" ซึ่งจัดขึ้นที่ University of Oklahoma และได้รับการตีพิมพ์ในวารสาร "Electronic Journal of Differential Equations" ได้

ปรับปรุงพจน์ใหม่ โดยตัดพจน์ที่มีความผิดพลาดในการประมาณสูง ซึ่งก็คือพจน์สุดท้าย เช่น ในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่ จะตัดพจน์ k_4 ออกไป แล้วปรับปรุงพจน์ที่เหลืออยู่โดยเพิ่มพจน์อนุพันธ์ของ $ha_{ji} f_y(y_n) k_m$ จะมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$y_{n+1} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3$$

และ $$k_1 = hf(y_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + a_{21} k_1 + ha_{22} f_y(y_n) k_1)$$

$$k_3 = hf(y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2 + ha_{33} f_y(y_n) k_1 + ha_{34} f_y(y_n) k_2)$$

ซึ่งมีผลทำให้ ค่าความผิดพลาดลดลง และสำหรับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้าซึ่งเป็นผลของงานวิจัยชิ้นนี้ คือ

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{5}{8} k_1 + \tfrac{27}{56} k_2 + \tfrac{125}{336} k_3 + \tfrac{1}{4} k_4$$

$$k_1 = hf(y_n)$$

$$k_2 = hf(y_n + \tfrac{1}{3} k_1 + \tfrac{1}{18} hf_y k_1)$$

$$k_3 = hf(y_n - \tfrac{152}{125} k_1 + \tfrac{252}{125} k_2 - \tfrac{44}{125} hf_y k_1)$$

$$k_4 = hf(y_n + \tfrac{19}{2} k_1 - \tfrac{72}{7} k_2 + \tfrac{25}{14} k_3 + \tfrac{5}{2} hf_y k_1)$$

ซึ่งระเบียบวิธีนี้ใช้สำหรับปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่อยู่ในรูปสมการออโตโนมัสเท่านั้น

ในปี ค.ศ. 2003 Xinyuan Wu [8] ได้เสนองานวิจัย “A class of Runge-Kutta formulae of order three and four with reduced evaluations of function” ซึ่งเป็นงานวิจัยที่เสนอระเบียบวิธีที่ได้จากการปรับปรุงรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา กรณีที่ $s = 3$ และ $s = 4$ โดยทำการเพิ่มพจน์อนุพันธ์ f' ในฟังก์ชันส่วนเพิ่ม $\phi(t_n, y_n; h)$ ของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา ซึ่งระเบียบวิธีที่ได้จะ

เป็นระเบียบวิธีที่ได้จะเป็นระเบียบวิธีแบบหลายขั้น(multi-step method) และใช้สำหรับปัญหาเงื่อนไข เริ่มต้นที่อยู่ในรูปสมการออโตโนมัส โดยรูปแบบหนึ่งที่ได้จากงานวิจัยนี้คือ

$$
\begin{aligned}
y_{m+1} = {} & \frac{3}{2}y_m - \frac{1}{2}y_{m-1} + h(\frac{1}{2}f_m + \frac{121}{192}f(y_m + \frac{8}{11}hf_m) \\
& + \frac{23}{192}f(y_m - \frac{44}{23}hf_m + \frac{44}{23}hf(y_m + \frac{8}{11}hf_m)) - \frac{121}{192}f(y_{m-1} + \frac{20}{29}hf_{m-1}) \\
& - \frac{23}{192}hf(y_{m-1} - \frac{44}{23}hf_{m-1} + \frac{44}{23}f(y_{m-1} + \frac{8}{11}hf_{m-1})))
\end{aligned}
$$

ในบทนี้ได้กล่าวถึงรายละเอียดต่าง ๆ เกี่ยวกับ รูปแบบของนิวตัน-โค้ตและระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา เพื่อใช้ในการศึกษาลักษณะการสร้างระเบียบวิธีที่ได้จากงานวิจัยดังกล่าวและได้นำระเบียบวิธีรุงเง-กุตตารูปแบบต่าง ๆ มาเปรียบเทียบประสิทธิภาพ

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้กล่าวถึงวิธีการดำเนินการวิจัย โดยขั้นแรกทำการหาค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ต จากจุดของรูปแบบ หลังจากนั้นเรานำจุดถ่วงที่ได้นี้ไปแทนค่าในจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา ขั้นต่อมาทำการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาจากจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ต หลังจากนั้นทำการศึกษาความคลาดเคลื่อนและวิเคราะห์เสถียรภาพของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา

3.1 ค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ต

ในหัวข้อนี้จะแสดงการหาค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตที่จะนำมาพัฒนาระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา

3.1.1 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสอง

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสองชนิดปิด สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) โดยให้ x_1, x_2 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด $[0,1]$ จะได้ว่า $x_1 = 0, x_2 = 1$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 dx = 1 \tag{3.1}$$

$$A_2 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{1}{2}, \qquad A_2 = \frac{1}{2} \tag{3.2}$$

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสองชนิดเปิด สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) เช่นเดียวกัน แต่ว่า จุด x_1, x_2 เป็นจุดที่กำหนดขึ้นมาเอง เช่น

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 dx = 1 \tag{3.3}$$

$$\frac{3}{4}A_2 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

ทำการแก้ระบบสมการได้

$$A_1 = \frac{1}{3}, \qquad A_2 = \frac{2}{3} \tag{3.4}$$

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 dx = 1 \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2}A_2 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

ทำการแก้ระบบสมการได้

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 1 \tag{3.6}$$

3.1.2 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสาม

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสามชนิดปิด สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) โดยให้ x_1, x_2, x_3 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด $[0,1]$ จะได้ว่า $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 + A_3 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\frac{1}{2}A_2 + A_3 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{4}A_2 + A_3 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{1}{6}, \qquad A_2 = \frac{4}{6}, \qquad A_3 = \frac{1}{6} \tag{3.8}$$

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสามชนิดเปิด สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) แต่ว่าจุด x_1, x_2, x_3 เป็นจุดที่กำหนดขึ้นมาเอง เช่น

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}, x_3 = \frac{2}{3}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{3}A_2 + \frac{2}{3}A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{9}A_2 + \frac{4}{9}A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.9}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{1}{4}, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = \frac{3}{4} \tag{3.10}$$

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{2}A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{16}A_2 + \frac{1}{4}A_3 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{2}{3}, \qquad A_2 = -\frac{4}{3}, \qquad A_3 = \frac{5}{3} \tag{3.12}$$

ถ้า $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{1}{3}A_1 + \frac{2}{3}A_2 + A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9}A_1 + \frac{4}{9}A_2 + A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.13}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{3}{4}, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = \frac{1}{4} \tag{3.14}$$

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{10}, x_3 = \frac{3}{5}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{3}{10}A_2 + \frac{3}{5}A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \frac{9}{100}A_2 + \frac{9}{25}A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.15}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{19}{54}, \qquad A_2 = -\frac{10}{27}, \qquad A_3 = \frac{55}{54} \tag{3.16}$$

3.1.3 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสี่

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสี่ชนิดปิด สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) โดยให้ x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด $[0,1]$ จะได้ว่า $x_1 = 0, x_2 = 1/3, x_3 = 2/3, x_4 = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= \int_0^1 dx = 1 \\
\tfrac{1}{3}A_2 + \tfrac{2}{3}A_3 + A_4 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \\
\tfrac{1}{9}A_2 + \tfrac{4}{9}A_3 + A_4 &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \\
\tfrac{1}{27}A_2 + \tfrac{8}{27}A_3 + A_4 &= \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{1}{8}, \qquad A_2 = \frac{3}{8}, \qquad A_3 = \frac{3}{8}, \qquad A_4 = \frac{1}{8} \tag{3.18}$$

3.1.4 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับที่ห้า

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับที่ห้า สามารถทำการหาในลักษณะคล้ายกับการหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับที่สี่ คือ จากสมการที่ (2.3) โดยให้ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด $[0,1]$ จะได้ว่า $x_1 = 0, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2, x_4 = 3/4, x_5 = 1$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\tfrac{1}{4}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{3}{4}A_4 + A_5 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{16}A_2 + \tfrac{1}{4}A_3 + \tfrac{9}{16}A_4 + A_5 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \qquad (3.19)$$

$$\tfrac{1}{64}A_2 + \tfrac{1}{8}A_3 + \tfrac{27}{64}A_4 + A_5 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$\tfrac{1}{256}A_2 + \tfrac{1}{16}A_3 + \tfrac{81}{256}A_4 + A_5 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{7}{90}, A_2 = \frac{32}{90}, A_3 = \frac{12}{90}, A_4 = \frac{32}{90}, A_5 = \frac{7}{90} \qquad (3.20)$$

3.1.5 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับที่หก

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับที่หกชนิดปิด สามารถทำการหาในลักษณะคล้ายกับการหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับที่สี่และอันดับที่ห้า คือ จากสมการที่ (2.3) โดยให้ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด [0,1] จะได้ว่า $x_1 = 0, x_2 = 1/5, x_3 = 2/5, x_4 = 3/5, x_5 = 4/5, x_6 = 1$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\tfrac{1}{5}A_2 + \tfrac{2}{5}A_3 + \tfrac{3}{5}A_4 + \tfrac{4}{5}A_5 + A_6 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{25}A_2 + \tfrac{4}{25}A_3 + \tfrac{9}{25}A_4 + \tfrac{16}{25}A_5 + A_6 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \qquad (3.21)$$

$$\frac{1}{125}A_2 + \frac{8}{125}A_3 + \frac{27}{125}A_4 + \frac{64}{125}A_5 + A_6 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{625}A_2 + \frac{16}{625}A_3 + \frac{81}{625}A_4 + \frac{256}{625}A_5 + A_6 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3125}A_2 + \frac{32}{3125}A_3 + \frac{243}{3125}A_4 + \frac{1024}{3125}A_5 + A_6 = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$$

แล้วทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{19}{288}, A_2 = \frac{75}{288}, A_3 = \frac{50}{288}, A_4 = \frac{50}{288}, A_5 = \frac{75}{288}, A_6 = \frac{19}{288} \tag{3.22}$$

3.2 รูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา

นำค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน – โค้ตจากหัวข้อ 3.1มาใส่ในจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง – กุตตาในแต่ละอันดับดังต่อไปนี้

3.2.1 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสอง

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองได้มาจากสมการ (2.4) และกำหนดให้ $s = 2$ จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2) \tag{3.23}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + c_2h, y_m + \beta hK_1)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.4) มาแทนในสมการ (3.23) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(K_1 + 2K_2) \tag{3.24}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \beta h K_1)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย K_1 และ K_2 จะได้

$$K_1 = f \qquad ; f \text{ คือ } f(x_m, y_m) \tag{3.25}$$

$$K_2 = f + \frac{3}{4}hf_x + \beta hff_y + \ldots$$

สมการที่ (3.24) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + \frac{4\beta}{3}ff_y) + O(h^3) \tag{3.26}$$

นำสมการที่ (3.26) ไปเทียบกับอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned}
y_{m+1} &= y_m + hy_m' + \tfrac{1}{2}h^2 y_m'' + \tfrac{1}{6}h^3 y_m''' + \tfrac{1}{24}h^4 y_m'''' + \tfrac{1}{120}h^5 y_m''''' + \ldots \\
&= y_m + hf + \tfrac{1}{2}h^2(f_x + ff_y) + \tfrac{1}{6}h^3(f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + ff_y^2 \\
&\quad + f^2 f_{yy}) + \tfrac{1}{24}h^4(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + f_x f_y^2 + ff_y^3 + f_{xx}f_y \\
&\quad + 5ff_{xy}f_y + 3ff_x f_{yy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy}) \\
&\quad + \tfrac{1}{120}h^5(f_{xxxx} + 4ff_{xxxy} + 12ff_x f_{xyy} + 9ff_{xxy}f_y + 4ff_{xx}f_{yy} \\
&\quad + 13ff_x f_y f_{yy} + 8ff_{xy}^2 + 9ff_{xy}f_y^2 + ff_y^4 + 6f^2 f_{xxyy} + 6f^2 f_x f_{yyy} \\
&\quad + 15f^2 f_{xyy}f_y + 12f^2 f_{xy}f_{yy} + 11f^2 f_y^2 f_{yy} + 4f^3 f_{xyyy} \\
&\quad + 7f^3 f_y f_{yyy} + 4f^3 f_{yy}^2 + f^4 f_{yyyy} + 6f_x f_{xxy} + 4f_{xx}f_{xy} \\
&\quad + 7f_x f_{xy}f_y + f_x f_y^3 + 3f_x^2 f_{yy} + f_{xx}f_y^2 + f_{xxx}f_y) + \ldots
\end{aligned} \tag{3.27}$$

เทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ $\beta = \frac{3}{4}$ ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองแบบที่ 1 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(K_1 + 2K_2) \tag{3.28}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{3}{4}hK_1)$$

ในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองรูปแบบต่อไป ให้นำจุดถ่วงจากสมการ (3.6) มาแทนในสมการ (3.23) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + hK_2 \tag{3.29}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \beta hK_1)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย K_1 และ K_2 จะได้

$$K_1 = f \qquad ; f \text{ คือ } f(x_m, y_m) \tag{3.30}$$

$$K_2 = f + \frac{1}{2}hf_x + \beta hff_y + \ldots$$

สมการที่ (3.29) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + 2\beta ff_y) + O(h^3) \tag{3.31}$$

เทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ $\beta = \frac{1}{2}$ ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองแบบที่ 2 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hK_2 \tag{3.32}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hK_1)$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองจำนวน 2 รูปแบบ

3.2.2 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสาม

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามได้มาจากสมการ (2.4) และกำหนดให้ $s = 3$ จะได้รูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3) \tag{3.33}$$

โดยที่
$$K_1 = f(x_m + c_1, y_m + c_1 f(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + c_2h, y_m + \beta_1 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + c_3h, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

ถ้านำจุดถ่วงจากสมการ (3.10) มาแทนในสมการ (3.33) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3) \tag{3.34}$$

โดยที่
$$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}h, y_m + \beta_1 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย K_1, K_2 และ K_3 จะได้

$$K_1 = f \qquad ; f \text{ คือ } f(x_m, y_m) \tag{3.35}$$

$$K_2 = f + \frac{\sqrt{2}}{3} hf_x + \beta_1 hff_y + \ldots$$

$$K_3 = f + \frac{2}{3} hf_x + \beta_2 hff_y + \gamma_1 hff_y + \frac{\sqrt{2}}{3}\gamma_1 h^2 f_x f_y + \beta_1\gamma_1 h^2 ff_y^2$$
$$+ \frac{2}{9} h^2 f_{xx} + \frac{2}{3}\beta_2 h^2 ff_{xy} + \frac{2}{3}\gamma_1 h^2 ff_{xy} + \beta_2^2 h^2 f^2 f_{yy}$$
$$+ \gamma_1^2 h^2 f^2 f_{yy} + \beta_2\gamma_1 h^2 f^2 f_{yy} + \ldots$$

สมการที่ (3.34) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + (\frac{3}{2}\beta_2 + \frac{3}{2}\gamma_1) ff_y) \tag{3.36}$$
$$+ \frac{h^3}{6}(f_{xx} + (3\beta_2 + 3\gamma_1) ff_{xy} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\gamma_1 f_x f_y + \frac{9}{2}\beta_1\gamma_1 ff_y^2$$
$$+ (\frac{9}{2}\beta_2^2 + \frac{9}{2}\gamma_1^2 + \frac{9}{2}\beta_2\gamma_1) f^2 f_{yy} + O(h^4))$$

เทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้

$$\frac{3}{2}\beta_2 + \frac{3}{2}\gamma_1 = 1$$

$$3\beta_2 + 3\gamma_1 = 2$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\gamma_1 = 1 \tag{3.37}$$

$$\frac{9}{2}\beta_1\gamma_1 = 1$$

$$\frac{9}{2}\beta_2^2 + \frac{9}{2}\gamma_1^2 + \frac{9}{2}\beta_2\gamma_1 = 1$$

จากการแก้สมการ (3.37) จะได้

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \beta_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}, \gamma_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \tag{3.38}$$

นำไปแทนลงในสมการที่ (3.34) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3) \tag{3.39}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}h, y_m + \frac{\sqrt{2}}{3}hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \frac{(2-\sqrt{2})}{3}hK_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}hK_2)$$

เป็นระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามแบบที่ 1

ถ้านำจุดถ่วงจากสมการที่ (3.12)มาแทนในสมการที่(3.33) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(2K_1 - 4K_2 + 5K_3) \tag{3.40}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \beta_1 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย K_1, K_2 และ K_3 แล้วทำตามวิธีการเดียวกับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามแบบที่ 1 จะได้

$$\beta_1 = \frac{1}{4}, \beta_2 = -\frac{1}{30}, \gamma_1 = \frac{8}{15} \tag{3.41}$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามแบบที่ 2 ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(2K_1 - 4K_2 + 5K_3) \tag{3.42}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \frac{1}{4}hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m - \frac{1}{30}hK_1 + \frac{8}{15}hK_2)$$

ถ้านำจุดถ่วงจากสมการที่ (3.14)มาแทนในสมการที่(3.33) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(3K_1 + K_3) \tag{3.43}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}f(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \beta_1 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

กระจายอนุกรมเทย์เลอร์แล้วทำตามข้างต้นจะได้

$$\beta_1 = \frac{2}{3}, \beta_2 = 0, \gamma_1 = 1 \tag{3.44}$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามแบบที่ 3 ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(3K_1 + K_3) \tag{3.45}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3} f(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \frac{2}{3}hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h, y_m + hK_2)$$

ถ้านำจุดถ่วงจากสมการที่ (3.16)มาแทนในสมการที่(3.33) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{54}(19K_1 - 20K_2 + 55K_3) \tag{3.46}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{3}{10}h, y_m + \beta_1 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{3}{5}h, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

กระจายอนุกรมเทย์เลอร์แล้วทำตามข้างต้นจะได้

$$\beta_1 = \frac{3}{10}, \beta_2 = \frac{3}{55}, \gamma_1 = \frac{6}{11} \tag{3.47}$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามแบบที่ 4 ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{54}(19K_1 - 20K_2 + 55K_3) \tag{3.48}$$

โดยที่ $$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + \frac{3}{10}h, y_m + \frac{3}{10}hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{3}{5}h, y_m + \frac{3}{55}hK_1 + \frac{6}{11}hK_2)$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามจำนวน 4 รูปแบบ

3.2.3 ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา อันดับสี่

จากการนำค่าจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน - โค้ตจากสมการ (3.18) มาใส่ในระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับสี่ จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{8}(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4) \tag{3.49}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \beta_1 h K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \tfrac{2}{3}h, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h, y_m + \beta_3 hK_1 + \gamma_2 hK_2 + \lambda_1 hK_3)$$

กระจายโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์จะได้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} K_2 = {} & f + h(\tfrac{1}{3}f_x + \beta_1 ff_y) + h^2(\tfrac{1}{18}f_{xx} + \tfrac{1}{3}\beta_1 ff_{xy} + \tfrac{1}{2}\beta_1^2 f^2 f_{yy}) \\ & + h^3(\tfrac{1}{162}f_{xxx} + \tfrac{1}{18}\beta_1 ff_{xy} + \tfrac{1}{6}\beta_1^2 f^2 f_{xyy} + \tfrac{1}{6}\beta_1^3 f^3 f_{yyy}) \\ & + h^4(\tfrac{1}{1944}f_{xxxx} + \tfrac{1}{162}\beta_1 ff_{xxxy} + \tfrac{1}{36}\beta_1^2 f^2 f_{xxyy} + \tfrac{1}{18}\beta_1^3 f^3 f_{xyyy} \\ & + \tfrac{1}{24}\beta_1^4 f^4 f_{yyyy}) + \ldots \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} K_3 = {} & f + h(\tfrac{2}{3}f_x + \beta_2 ff_y + \gamma_1 ff_y) + h^2(\tfrac{1}{3}\gamma_1 f_x f_y + \gamma_1\beta_1 ff_y^2 + \tfrac{2}{9}f_{xx} \\ & + \tfrac{2}{3}\beta_2 ff_{xy} + \tfrac{2}{3}\gamma_1 ff_{xy} + \tfrac{1}{2}\beta_2^2 f^2 f_{yy} + \beta_2\gamma_1 f^2 f_{yy} + \tfrac{1}{2}\gamma_1^2 f^2 f_{yy}) \\ & + h^3(\tfrac{1}{18}\gamma_1 f_{xx} f_y + \tfrac{1}{3}\gamma_1\beta_1 ff_{xy} f_y + \tfrac{1}{2}\gamma_1\beta_1^2 f^2 f_{yy} f_y + \tfrac{2}{9}\gamma_1 f_x f_{xy} \\ & + \tfrac{2}{3}\gamma_1\beta_1 ff_y f_{xy} + \tfrac{1}{3}\beta_2\gamma_1 ff_x f_{yy} + \beta_1\beta_2\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{1}{6}\gamma_1^2 ff_x f_{yy} \\ & + \tfrac{1}{2}\gamma_1^2\beta_1 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{4}{81}f_{xxx} + \tfrac{2}{9}\beta_2 ff_{xxy} + \tfrac{2}{9}\gamma_1 ff_{xxy} + \tfrac{1}{3}\beta_2^2 f^2 f_{xyy} \\ & + \tfrac{2}{3}\beta_2\gamma_1 f^2 f_{xyy} + \tfrac{1}{3}\gamma_1^2 f^2 f_{xyy} + \tfrac{1}{6}\beta_2^3 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{2}\beta_2^2\gamma_1 f^3 f_{yyy} \\ & + \tfrac{1}{2}\beta_2\gamma_1^2 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{6}\gamma_1^3 f^3 f_{yyy}) + \ldots \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
K_4 = {} & f + h(f_x + \beta_3 ff_y + \gamma_2 ff_y + \lambda_1 ff_y) + h^2(\tfrac{1}{3}\gamma_2 f_x f_y + \gamma_2\beta_1 ff_y^2 \\
& + \tfrac{2}{3}\lambda_1 f_x f_y + \lambda_1\beta_2 ff_y^2 + \gamma_1\lambda_1 ff_y^2 + \tfrac{1}{2} f_{xx} + \beta_3 ff_{xy} + \gamma_2 ff_{xy} + \lambda_1 ff_{xy} \\
& + \tfrac{1}{2}\beta_3^2 f^2 f_{yy} + \tfrac{1}{2}\gamma_2^2 f^2 f_{yy} + \tfrac{1}{2}\lambda_1^2 f^2 f_{yy} + \beta_3\gamma_2 f^2 f_{yy} + \beta_3\lambda_1 f^2 f_{yy} \\
& + \gamma_2\lambda_1 f^2 f_{yy}) + h^3(\tfrac{1}{18}\gamma_2 f_{xx} f_y + \tfrac{1}{3}\gamma_2\beta_1 ff_{xy} f_y + \tfrac{1}{2}\gamma_2\beta_1^2 f^2 f_{yy} f_y \\
& + \tfrac{1}{3}\lambda_1\gamma_1 f_x f_y^2 + \gamma_1\beta_1\lambda_1 ff_y^3 + \tfrac{2}{9}\lambda_1 f_{xx} f_y + \tfrac{2}{3}\lambda_1\beta_2 ff_{xy} f_y + \tfrac{2}{3}\gamma_1\lambda_1 ff_{xy} f_y \\
& + \tfrac{1}{2}\beta_2^2\lambda_1 f^2 f_{yy} f_y + \beta_2\lambda_1\gamma_1 f^2 f_{yy} f_y + \tfrac{1}{2}\gamma_1^2\lambda_1 f^2 f_{yy} f_y + \tfrac{1}{3}\gamma_2 f_x f_{xy} \\
& + \gamma_2\beta_1 ff_y f_{xy} + \tfrac{2}{3}\lambda_1 f_x f_{xy} + \lambda_1\beta_2 ff_y f_{xy} + \gamma_1\lambda_1 ff_y f_{xy} + \tfrac{1}{6}\gamma_2^2 ff_x f_{yy} \\
& + \tfrac{1}{2}\gamma_2^2\beta_1 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{1}{3}\lambda_1^2 ff_x f_{yy} + \tfrac{1}{2}\lambda_1^2\beta_2 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{1}{2}\lambda_1^2\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} \\
& + \tfrac{1}{3}\beta_3\gamma_2 ff_x f_{yy} + \beta_1\beta_3\gamma_2 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{2}{3}\beta_3\lambda_1 ff_x f_{yy} + \beta_3\lambda_1\beta_2 f^2 f_y f_{yy} \\
& + \beta_3\lambda_1\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{1}{3}\gamma_2\lambda_1 ff_x f_{yy} + \gamma_2\lambda_1\beta_1 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{2}{3}\gamma_2\lambda_1 ff_x f_{yy} \\
& + \gamma_2\lambda_1\beta_2 f^2 f_y f_{yy} + \gamma_2\lambda_1\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} + \tfrac{1}{6} f_{xxx} + \tfrac{1}{2}\beta_3 ff_{xxy} + \tfrac{1}{2}\gamma_2 ff_{xxy} \\
& + \tfrac{1}{2}\lambda_1 ff_{xxy} + \tfrac{1}{2}\beta_3^2 f^2 f_{xyy} + \tfrac{1}{2}\gamma_2^2 f^2 f_{xyy} + \tfrac{1}{2}\lambda_1^2 f^2 f_{xyy} + \beta_3\gamma_2 f^2 f_{xyy} \\
& + \beta_3\lambda_1 f^2 f_{xyy} + \gamma_2\lambda_1 f^2 f_{xyy} + \tfrac{1}{6}\beta_3^3 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{6}\gamma_2^3 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{6}\lambda_1^3 f^3 f_{yyy} \\
& + \tfrac{1}{2}\beta_3^2\gamma_1 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{2}\beta_3^2\lambda_1 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{2}\beta_3\lambda_1^2 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{2}\beta_3\gamma_2^2 f^3 f_{yyy} \\
& + \tfrac{1}{2}\gamma_2^2\lambda_1 f^3 f_{yyy} + \tfrac{1}{2}\gamma_2\lambda_1^2 f^3 f_{yyy} + \beta_3\gamma_2\lambda_1 f^3 f_{yyy}) + \ldots
\end{aligned} \tag{3.52}$$

แทนค่า K_1, K_2, K_3 และ K_4 ลงในสมการที่ (3.49) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y_{m+1} = {} & y_m + h[(\tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8}) f] + \tfrac{1}{2} h^2 [(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) f_x + (\tfrac{3}{4}\beta_1 + \tfrac{3}{4}\beta_2 \\
& + \tfrac{3}{4}\gamma_1 + \tfrac{1}{4}\beta_3 + \tfrac{1}{4}\gamma_2 + \tfrac{1}{4}\lambda_1) ff_y] + \tfrac{1}{6} h^3 [(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}) f_{xx} + (\tfrac{3}{4}\gamma_1 \\
& + \tfrac{1}{4}\gamma_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_1) f_x f_y + (\tfrac{9}{4}\gamma_1\beta_1 + \tfrac{3}{4}\gamma_2\beta_1 + \tfrac{3}{4}\lambda_1\beta_2 + \tfrac{3}{4}\gamma_1\lambda_1) ff_y^2 \\
& + (\tfrac{9}{8}\beta_1^2 + \tfrac{9}{8}\beta_2^2 + \tfrac{9}{4}\beta_2\gamma_1 + \tfrac{9}{8}\gamma_1^2 + \tfrac{3}{8}\beta_3^2 + \tfrac{3}{8}\gamma_2^2 + \tfrac{3}{8}\lambda_1^2 + \tfrac{3}{4}\beta_3\gamma_2 \\
& + \tfrac{3}{4}\beta_3\lambda_1 + \tfrac{3}{4}\gamma_2\lambda_1) f^2 f_{yy} + (\tfrac{3}{4}\beta_1 + \tfrac{3}{2}\beta_2 + \tfrac{3}{2}\gamma_1 + \tfrac{3}{4}\beta_3 + \tfrac{3}{4}\gamma_2 \\
& + \tfrac{3}{4}\lambda_1) ff_{xy}] + \tfrac{1}{24} h^4 [(\tfrac{1}{18} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{2}) f_{xxx} + (\tfrac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_2 + 2\gamma_1 + \tfrac{3}{2}\beta_3 \\
& + \tfrac{3}{2}\gamma_2 + \tfrac{3}{2}\lambda_1) ff_{xxy} + (2\gamma_1 + \gamma_2 + 2\lambda_1) f_x f_{xy} + (\tfrac{1}{2}\gamma_1 + \tfrac{1}{6}\gamma_2 \\
& + \tfrac{2}{3}\lambda_1) f_{xx} f_y + (3\gamma_1\beta_1 + 6\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_1 + 2\lambda_1\beta_2 + 2\gamma_1\lambda_1 + 3\gamma_2\beta_1 \\
& + 3\lambda_1\beta_2 + 3\gamma_1\lambda_1) ff_{xy} f_y + (\tfrac{3}{2}\beta_1^3 + \tfrac{3}{2}\beta_2^3 + \tfrac{9}{2}\beta_2^2\gamma_1 + \tfrac{9}{2}\beta_2\gamma_1^2 \\
& + \tfrac{3}{2}\gamma_1^3 + \tfrac{1}{2}\beta_3^3 + \tfrac{1}{2}\gamma_2^3 + \tfrac{1}{2}\lambda_1^3 + \tfrac{3}{2}\beta_3^2\gamma_1 + \tfrac{3}{2}\beta_3^2\lambda_1 + \tfrac{3}{2}\beta_3\lambda_1^2 \\
& + \tfrac{3}{2}\beta_3\gamma_2^2 + \tfrac{3}{2}\gamma_2^2\lambda_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_2\lambda_1^2 + 3\beta_3\gamma_2\lambda_1) f^3 f_{yyy} + (3\beta_2\gamma_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_1^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\gamma_2^2 + \lambda_1^2 + \beta_3\gamma_2 + 2\beta_3\lambda_1 + 3\gamma_2\lambda_1) ff_x f_{yy} + (\tfrac{3}{2}\beta_1^2 + 3\beta_2^2 \\
& + 6\beta_2\gamma_1 + 3\gamma_1^2 + \tfrac{3}{2}\beta_3^2 + \tfrac{3}{2}\gamma_2^2 + \tfrac{3}{2}\lambda_1^2 + 3\beta_3\gamma_2 + 3\beta_3\lambda_1
\end{aligned}$$

$$+3\gamma_2\lambda_1)f^2 f_{xyy} + (\tfrac{9}{2}\gamma_1\beta_1^2 + 9\beta_1\beta_2\gamma_1 + \tfrac{9}{2}\gamma_1^2\beta_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_2\beta_1^2$$
$$+\tfrac{3}{2}\beta_2^2\lambda_1 + 3\beta_2\lambda_1\gamma_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_1^2\lambda_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_2^2\beta_1 + \tfrac{3}{2}\lambda_1^2\beta_2 + \tfrac{3}{2}\lambda_1^2\gamma_1$$
$$+3\beta_1\beta_3\gamma_2 + 3\beta_2\beta_3\lambda_1 + 3\beta_3\lambda_1\gamma_1 + 3\gamma_2\lambda_1\beta_1 + 3\gamma_2\lambda_1\beta_2$$
$$+3\gamma_2\lambda_1\gamma_1)f^2 f_y f_{yy} + (\lambda_1\gamma_1) f_x f_y^2 + (\gamma_1\beta_1\lambda_1) ff_y^3 + \ldots \tag{3.53}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ในเทอมของ h จากสมการ (3.53) กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้

$$\tfrac{3}{4}\beta_1 + \tfrac{3}{4}\beta_2 + \tfrac{1}{4}\beta_3 + \tfrac{3}{4}\gamma_1 + \tfrac{1}{4}\gamma_2 + \tfrac{1}{4}\lambda_1 = 1$$

$$\tfrac{3}{4}\gamma_1 + \tfrac{1}{4}\gamma_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_1 = 1$$

$$\tfrac{9}{4}\gamma_1\beta_1 + \tfrac{3}{4}\gamma_2\beta_1 + \tfrac{3}{4}\lambda_1\beta_2 + \tfrac{3}{4}\gamma_1\lambda_1 = 1$$

$$\tfrac{9}{8}\beta_1^2 + \tfrac{9}{8}\beta_2^2 + \tfrac{3}{8}\beta_3^2 + \tfrac{9}{8}\gamma_1^2 + \tfrac{3}{8}\gamma_2^2 + \tfrac{3}{8}\lambda_1^2 + \tfrac{9}{4}\beta_2\gamma_1 + \tfrac{3}{4}\beta_3\gamma_2 + \tfrac{3}{4}\gamma_2\lambda_1 = 1$$

$$\tfrac{3}{4}\beta_1 + \tfrac{3}{2}\beta_2 + \tfrac{3}{2}\beta_3 + \tfrac{3}{2}\gamma_1 + \tfrac{3}{4}\gamma_2 + \tfrac{3}{4}\lambda_1 = 2$$

$$\tfrac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_2 + \tfrac{3}{2}\beta_3 + 2\gamma_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_2 + \tfrac{3}{2}\lambda_1 = 3$$

$$2\gamma_1 + \gamma_2 + 2\lambda_1 = 3$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma_1 + \tfrac{1}{6}\gamma_2 + \tfrac{2}{3}\lambda_1 = 1 \tag{3.54}$$

$$9\gamma_1\beta_1 + 4\gamma_2\beta_1 + 5\lambda_1\beta_2 + 5\gamma_1\lambda_1 = 5$$

$$\tfrac{3}{2}\beta_1^3 + \tfrac{3}{2}\beta_2^3 + \tfrac{1}{2}\beta_3^3 + \tfrac{3}{2}\gamma_1^3 + \tfrac{1}{2}\gamma_2^3 + \tfrac{1}{2}\lambda_1^3 + \tfrac{9}{2}\beta_2^2\gamma_1 + \tfrac{9}{2}\beta_2\gamma_1^2 + \tfrac{3}{2}\beta_3^2\gamma_1$$
$$+\tfrac{3}{2}\beta_3^2\lambda_1 + \tfrac{3}{2}\beta_3\lambda_1^2 + \tfrac{3}{2}\beta_3\gamma_2^2 + \tfrac{3}{2}\gamma_2^2\lambda_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_2\lambda_1^2 + 3\beta_3\gamma_2\lambda_1 = 1$$

$$3\beta_2\gamma_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_1^2 + \tfrac{1}{2}\gamma_2^2 + \lambda_1^2 + \beta_3\gamma_2 + 2\beta_3\lambda_1 + 3\gamma_2\lambda_1 = 3$$

$$\tfrac{3}{2}\beta_1^2 + 3\beta_2^2 + \tfrac{3}{2}\beta_3^2 + 3\gamma_1^2 + \tfrac{3}{2}\gamma_2^2 + \tfrac{3}{2}\lambda_1^2 + 6\beta_2\gamma_1 + 3\beta_3\gamma_2 + 3\beta_3\lambda_1 + 3\gamma_2\lambda_1 = 3$$

$$\tfrac{9}{2}\gamma_1\beta_1^2+\tfrac{9}{2}\gamma_1^2\beta_1+\tfrac{3}{2}\gamma_2\beta_1^2+\tfrac{3}{2}\beta_2^2\lambda_1+\tfrac{3}{2}\gamma_1^2\lambda_1+\tfrac{3}{2}\gamma_2^2\beta_1+\tfrac{3}{2}\lambda_1^2\beta_2$$
$$+\tfrac{3}{2}\lambda_1^2\gamma_1+9\beta_1\beta_2\gamma_1+3\beta_2\gamma_1\lambda_1+3\beta_1\beta_3\gamma_2+3\beta_2\beta_3\lambda_1+3\beta_3\lambda_1\gamma_1$$
$$+3\beta_1\gamma_2\lambda_1+3\beta_2\gamma_2\lambda_1+3\gamma_1\gamma_2\lambda_1=4$$

จากการแก้สมการจะได้

$$\beta_1=\tfrac{1}{3},\beta_2=-\tfrac{1}{3},\beta_3=1$$

$$\gamma_1=1,\gamma_2=-1,\lambda_1=1 \tag{3.55}$$

เอาไปแทนค่าในสมการ(3.49)จะได้

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{8}(K_1+3K_2+3K_3+K_4) \tag{3.56}$$

โดยที่ $$K_1=f(x_m,y_m)$$

$$K_2=f(x_m+\frac{h}{3},y_m+\frac{h}{3}k_1)$$

$$K_3=f(x_m+\frac{2}{3}h,y_m-\frac{h}{3}k_1+hk_2)$$

$$K_4=f(x_m+h,y_m+hk_1-hk_2+hk_3)$$

เป็นระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่ ที่ต้องการ

3.2.4 ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา อันดับห้า

จากการนำค่าจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน - โค้ตจากสมการ (3.20) มาใส่ในระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับห้า จะได้

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{90}(7K_1+32K_2+12K_3+32K_4+7K_5) \tag{3.57}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \beta_1 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \beta_3 hK_1 + \gamma_2 hK_2 + \lambda_1 hK_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h, y_m + \beta_4 hK_1 + \gamma_3 hK_2 + \lambda_2 hK_3 + \alpha_1 hK_4)$$

กระจายโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์จะได้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} K_2 = {} & f + h(\frac{1}{4}f_x + \beta_1 ff_y) + h^2(\frac{1}{32}f_{xx} + \frac{1}{4}\beta_1 ff_{xy} + \frac{1}{2}\beta_1^2 f^2 f_{yy}) + h^3(\frac{1}{384}f_{xxx} \\ & + \frac{1}{32}\beta_1 ff_{xxy} + \frac{1}{8}\beta_1^2 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{6}\beta_1^3 f^3 f_{yyy}) + \ldots \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} K_3 = {} & f + h(\frac{1}{2}f_x + \beta_2 ff_y + \gamma_1 ff_y) + h^2(\frac{1}{4}\gamma_1 f_x f_y + \gamma_1\beta_1 ff_y^2 + \frac{1}{8}f_{xx} + \frac{1}{2}\beta_2 ff_{xy} \\ & + \frac{1}{2}\gamma_1 ff_{xy} + \beta_2^2 f^2 f_{yy}) + h^3(\frac{1}{32}\gamma_1 f_{xx} f_y + \frac{1}{4}\gamma_1\beta_1 ff_{xy} f_y + \frac{1}{2}\gamma_1\beta_1^2 f^2 f_{yy} f_y \\ & + \frac{1}{8}\gamma_1 f_x f_{xy} + \frac{1}{2}\gamma_1\beta_1 ff_y f_{xy} + 2\beta_2^2\gamma_1 ff_{yy} + 2\beta_2\gamma_1^2 ff_{yy} + \frac{1}{48}f_{xxx} \\ & + \frac{1}{8}\beta_2 ff_{xxy} + \frac{1}{8}\gamma_1 ff_{xxy} + \frac{1}{4}\beta_2^2 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{4}\gamma_1^2 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{2}\beta_2\gamma_1 f^2 f_{xyy} \\ & + \frac{1}{6}\beta_2^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{6}\gamma_1^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2}\beta_2^2\gamma_1 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2}\beta_2\gamma_1^3 f^3 f_{yyy}) + \ldots \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} K_4 = {} & f + h(\frac{3}{4}f_x + \beta_3 ff_y + \gamma_2 ff_y + \lambda_1 ff_y) + h^2(\frac{1}{4}\gamma_2 f_x f_y + \gamma_2\beta_1 ff_y^2 + \frac{1}{2}\lambda_1 f_x f_y \\ & + \lambda_1\beta_2 ff_y^2 + \lambda_1\gamma_1 ff_y^2 + \frac{9}{32}f_{xx} + \beta_3 ff_{xy} + \gamma_2 ff_{xy} + \lambda_1 ff_{xy} + \frac{1}{2}\beta_3^2 f^2 f_{yy} \\ & + \frac{1}{2}\gamma_2^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2}\lambda_1^2 f^2 f_{yy} + \beta_3\gamma_2 f^2 f_{yy} + \beta_3\lambda_1 f^2 f_{yy} + \gamma_2\lambda_1 f^2 f_{yy}) \\ & + h^3(\frac{1}{32}\gamma_2 f_{xx} f_y + \frac{1}{4}\gamma_2\beta_1 ff_{xy} f_y + \frac{1}{2}\beta_1^2\gamma_2 f^2 f_{yy} f_y + \frac{1}{4}\lambda_1\gamma_1 f_x f_y^2 \\ & + \lambda_1\gamma_1\beta_1 ff_y^3 + \frac{1}{8}\lambda_1 f_{xx} f_y + \frac{1}{2}\beta_2\lambda_1 ff_{xy} f_y + \frac{1}{2}\gamma_1\lambda_1 ff_{xy} f_y + \lambda_1\beta_2^2 f^2 f_{yy} f_y \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\gamma_2 f_x f_{xy}+\gamma_2\beta_1 ff_y f_{xy}+\frac{1}{2}\lambda_1 f_x f_{xy}+\lambda_1\beta_2 ff_y f_{xy}+\lambda_1\gamma_1 ff_y f_{xy}$$
$$+\frac{1}{8}\gamma_2^2 ff_x f_{yy}+\frac{1}{2}\gamma_2^2\beta_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{4}\lambda_1^2 ff_x f_{yy}+\frac{1}{2}\lambda_1^2\beta_2 f^2 f_y f_{yy}$$
$$+\frac{1}{2}\lambda_1^2\gamma_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{4}\beta_3\gamma_2 ff_x f_{yy}+\beta_1\beta_3\gamma_2 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{2}\beta_3\lambda_1 ff_x f_{yy}$$
$$+\beta_2\beta_3\lambda_1 f^2 f_y f_{yy}+\beta_3\lambda_1\gamma_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{2}\gamma_2\lambda_1 ff_x f_{yy}+\gamma_2\lambda_1\beta_2 f^2 f_y f_{yy}$$
$$+\gamma_2\lambda_1\gamma_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{4}\gamma_2\lambda_1 ff_x f_{yy}+\gamma_2\lambda_1\beta_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{27}{384}f_{xxx}$$
$$+\frac{9}{32}\beta_3 ff_{xxy}+\frac{9}{32}\gamma_2 ff_{xxy}+\frac{9}{32}\lambda_1 ff_{xxy}+\frac{9}{24}\beta_3^2 f^2 f_{xyy}+\frac{9}{24}\gamma_2^2 f^2 f_{xyy}$$
$$+\frac{9}{24}\lambda_1^2 f^2 f_{xyy}+\frac{18}{24}\beta_3\gamma_2 f^2 f_{xyy}+\frac{9}{24}\beta_3\lambda_1 f^2 f_{xyy}+\frac{9}{24}\gamma_2\lambda_1 f^2 f_{xyy}$$
$$+\frac{1}{6}\beta_3^3 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{6}\gamma_2^3 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{6}\lambda_1^3 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_3^2\gamma_2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_3^2\lambda_1 f^3 f_{yyy}$$
$$+\frac{1}{2}\beta_3\lambda_1^2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_3\gamma_2^2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\gamma_2^2\lambda_1 f^3 f_{yyy}+3\gamma_2\lambda_1^2 f^3 f_{yyy}$$
$$+6\beta_3\gamma_2\lambda_1 f^3 f_{yyy})+\ldots \tag{3.60}$$

$$K_5=f+h(f_x+\beta_4 ff_y+\gamma_3 ff_y+\lambda_2 ff_y+\alpha_1 ff_y)+h^2(\frac{1}{4}\gamma_3 f_x f_y+\gamma_3\beta_1 ff_y^2$$
$$+\frac{1}{2}\lambda_2 f_x f_y+\lambda_2\beta_2 ff_y^2+\lambda_2\gamma_1 ff_y^2+\frac{3}{4}\alpha_1 f_x f_y+\alpha_1\beta_3 ff_y^2+\gamma_2\alpha_1 ff_y^2$$
$$+\alpha_1\lambda_1 ff_y^2+\frac{1}{2}f_{xx}+\beta_4 ff_{xy}+\gamma_3 ff_{xy}+\lambda_2 ff_{xy}+\alpha_1 ff_{xy}+\frac{1}{2}\beta_4^2 f^2 f_{yy}$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_3^2 f^2 f_{yy}+\frac{1}{2}\lambda_2^2 f^2 f_{yy}+\frac{1}{2}\alpha_1^2 f^2 f_{yy}+\beta_4\gamma_3 f^2 f_{yy}+\beta_4\lambda_2 f^2 f_{yy}$$
$$+\beta_4\alpha_1 f^2 f_{yy}+\gamma_3\alpha_1 f^2 f_{yy}+\gamma_3\lambda_2 f^2 f_{yy}+\lambda_2\alpha_1 f^2 f_{yy})+h^3(\frac{1}{32}\gamma_3 f_{xx} f_y$$
$$+\frac{1}{4}\gamma_3\beta_1 ff_{xy} f_y+\frac{1}{2}\beta_1^2\gamma_3 f^2 f_{yy} f_y+\frac{1}{4}\lambda_2\gamma_1 f_x f_y^2+\gamma_1\beta_1\lambda_2 ff_y^3$$
$$+\frac{1}{8}\lambda_2 f_{xx} f_y+\frac{1}{2}\beta_2\lambda_2 ff_{xy} f_y+\frac{1}{2}\gamma_1\lambda_2 ff_{xy} f_y+\lambda_2\beta_2^2 f^2 f_{yy} f_y$$
$$+\frac{1}{4}\alpha_1\gamma_2 f_x f_y^2+\gamma_2\beta_1\alpha_1 ff_y^3+\frac{1}{2}\lambda_1\alpha_1 f_x f_y^2+\lambda_1\beta_2\alpha_1 ff_y^3+\lambda_1\gamma_1\alpha_1 ff_y^3$$
$$+\frac{9}{32}\alpha_1 f_{xx} f_y+\beta_3\alpha_1 ff_{xy} f_y+\gamma_2\alpha_1 ff_{xy} f_y+\lambda_1\alpha_1 ff_{xy} f_y+\frac{1}{2}\beta_3^2\alpha_1 f^2 f_{yy} f_y$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_2^2\alpha_1 f^2 f_{yy} f_y+\frac{1}{2}\lambda_1^2\alpha_1 f^2 f_{yy} f_y+\beta_3\gamma_2\alpha_1 f^2 f_{yy} f_y+\beta_3\lambda_1\alpha_1 f^2 f_{yy} f_y$$
$$+\gamma_2\lambda_1\alpha_1 f^2 f_{yy} f_y+\frac{1}{4}\gamma_3 f_x f_{xy}+\gamma_3\beta_1 ff_y f_{xy}+\frac{1}{2}\lambda_2 f_x f_{xy}+\lambda_2\beta_2 ff_y f_{xy}$$
$$+\lambda_2\gamma_1 ff_y f_{xy}+\frac{3}{4}\alpha_1 f_x f_{xy}+\alpha_1\beta_3 ff_y f_{xy}+\alpha_1\gamma_2 ff_y f_{xy}+\alpha_1\lambda_1 ff_y f_{xy}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{8}\gamma_3^2 ff_x f_{yy}+\frac{1}{2}\gamma_3^2\beta_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{4}\lambda_2^2 ff_x f_{yy}+\frac{1}{2}\lambda_2^2\beta_2 f^2 f_y f_{yy}\\
&+\frac{1}{2}\lambda_2^2\gamma_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{3}{8}\alpha_1^2 ff_x f_{yy}+\frac{1}{2}\alpha_1^2\beta_3 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{2}\alpha_1^2\gamma_2 f^2 f_y f_{yy}\\
&+\frac{1}{2}\alpha_1^2\lambda_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{4}\beta_4\gamma_3 ff_x f_{yy}+\beta_4\gamma_3\beta_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{2}\beta_4\lambda_2 ff_x f_{yy}\\
&+\beta_2\beta_4\lambda_2 f^2 f_y f_{yy}+\beta_4\lambda_2\gamma_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{3}{4}\beta_4\alpha_1 ff_x f_{yy}+\gamma_3\alpha_1\beta_1 f^2 f_y f_{yy}\\
&+\frac{3}{4}\gamma_3\alpha_1 ff_x f_{yy}+\gamma_3\alpha_1\beta_3 f^2 f_y f_{yy}+\gamma_3\alpha_1\gamma_2 f^2 f_y f_{yy}+\gamma_3\alpha_1\lambda_1 f^2 f_y f_{yy}\\
&+\frac{1}{4}\gamma_3\lambda_2 ff_x f_{yy}+\gamma_3\lambda_2\beta_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{2}\gamma_3\lambda_2 ff_x f_{yy}+\gamma_3\lambda_2\beta_2 f^2 f_y f_{yy}\\
&+\gamma_3\lambda_2\lambda_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{2}\lambda_2\alpha_1 ff_x f_{yy}+\lambda_2\alpha_1\beta_2 f^2 f_y f_{yy}+\lambda_2\alpha_1\gamma_1 f^2 f_y f_{yy}\\
&+\frac{1}{4}\lambda_2\alpha_1 ff_x f_{yy}+\lambda_2\alpha_1\beta_1 f^2 f_y f_{yy}+\frac{1}{6}f_{xxx}+\frac{1}{2}\beta_4 ff_{xxy}+\frac{1}{2}\gamma_3 ff_{xxy}\\
&+\frac{1}{2}\lambda_2 ff_{xxy}+\frac{1}{2}\alpha_1 ff_{xxy}+\frac{1}{2}\beta_4^2 f^2 f_{xyy}+\frac{1}{2}\gamma_3^2 f^2 f_{xyy}+\frac{1}{2}\lambda_2^2 f^2 f_{xyy}\\
&+\frac{1}{2}\alpha_1^2 f^2 f_{xyy}+\beta_4\gamma_3 f^2 f_{xyy}+\beta_4\lambda_2 f^2 f_{xyy}+\beta_4\alpha_1 f^2 f_{xyy}+\gamma_3\lambda_2 f^2 f_{xyy}\\
&+\gamma_3\alpha_1 f^2 f_{xyy}+\lambda_2\alpha_1 f^2 f_{xyy}+\frac{1}{6}\beta_4^3 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{6}\gamma_3^3 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{6}\lambda_2^3 f^3 f_{yyy}\\
&+\frac{1}{6}\alpha_1^3 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_4^2\gamma_3 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_4^2\lambda_2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_4^2\alpha_1 f^3 f_{yyy}\\
&+\frac{1}{2}\gamma_3^2\lambda_2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\gamma_3^2\alpha_1 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\lambda_2^2\alpha_1 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_4\alpha_1^2 f^3 f_{yyy}\\
&+\frac{1}{2}\gamma_3\lambda_2^2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\gamma_3\alpha_1^2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\lambda_2\alpha_1^2 f^3 f_{yyy}+\frac{1}{2}\beta_4\gamma_3^2 f^3 f_{yyy}\\
&+\frac{1}{2}\beta_4\lambda_2^2 f^3 f_{yyy}+\beta_4\gamma_3\lambda_2 f^3 f_{yyy}+\beta_4\gamma_3\alpha_1 f^3 f_{yyy}+\beta_4\lambda_2\alpha_1 f^3 f_{yyy}\\
&+\gamma_3\lambda_2\alpha_1 f^3 f_{yyy})+\dots
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

แทนค่า K_2, K_3, K_4 และ K_5 ลงในสมการที่ (3.57) จะได้

$$
\begin{aligned}
y_{m+1} = y_m + hf + \frac{1}{2}h^2[f_x &+ (\frac{32}{45}\beta_1+\frac{12}{45}\beta_2+\frac{12}{45}\gamma_1+\frac{32}{45}\beta_3+\frac{32}{45}\gamma_2+\frac{32}{45}\lambda_1\\
&+\frac{7}{45}\beta_4+\frac{7}{45}\gamma_3+\frac{7}{45}\lambda_2+\frac{7}{45}\alpha_1)ff_y]+\frac{1}{6}h^3[f_{xx}+(\frac{1}{5}\gamma_1+\frac{8}{15}\gamma_2+\frac{16}{15}\lambda_1\\
&+\frac{7}{60}\gamma_3+\frac{7}{30}\lambda_2+\frac{7}{20}\alpha_1)f_x f_y+(\frac{4}{5}\gamma_1\beta_1+\frac{32}{15}\gamma_2\beta_1+\frac{32}{15}\lambda_1\beta_2+\frac{32}{15}\lambda_1\gamma_1\\
&+\frac{7}{15}\gamma_3\beta_1+\frac{7}{15}\lambda_2\beta_2+\frac{7}{15}\lambda_2\gamma_1+\frac{7}{15}\alpha_1\beta_3+\frac{7}{15}\gamma_2\alpha_1+\frac{7}{15}\alpha_1\lambda_1)ff_y^2
\end{aligned}
$$

$$+(\frac{16}{15}\beta_1^2+\frac{4}{5}\beta_2^2+\frac{16}{15}\beta_3^2+\frac{16}{15}\gamma_2^2+\frac{16}{15}\lambda_1^2+\frac{32}{15}\beta_3\gamma_2+\frac{32}{15}\beta_3\lambda_1+\frac{32}{15}\gamma_2\lambda_1$$
$$+\frac{7}{30}\beta_4^2+\frac{7}{30}\gamma_3^2+\frac{7}{30}\lambda_2^2+\frac{7}{30}\alpha_1^2+\frac{7}{15}\beta_4\gamma_3+\frac{7}{15}\beta_4\lambda_2+\frac{7}{15}\beta_4\alpha_1$$
$$+\frac{7}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{7}{15}\gamma_3\lambda_2+\frac{7}{15}\lambda_2\alpha_1)f^2f_{yy}+(\frac{8}{15}\beta_1+\frac{2}{5}\beta_2+\frac{2}{5}\gamma_1+\frac{32}{15}\beta_3$$
$$+\frac{32}{15}\gamma_2+\frac{32}{15}\lambda_1+\frac{7}{15}\beta_4+\frac{7}{15}\gamma_3+\frac{7}{15}\lambda_2+\frac{7}{15}\alpha_1)ff_{xy}]+\frac{1}{24}h^4[f_{xxx}$$
$$+(\frac{4}{15}\beta_1+\frac{6}{15}\beta_2+\frac{6}{15}\gamma_1+\frac{12}{5}\beta_3+\frac{12}{5}\gamma_2+\frac{12}{5}\lambda_1+\frac{14}{15}\beta_4+\frac{14}{15}\gamma_3+\frac{14}{15}\lambda_2$$
$$+\frac{14}{15}\alpha_1)ff_{xxy}+(\frac{2}{5}\gamma_1+\frac{32}{15}\gamma_2+\frac{14}{15}\lambda_1+\frac{7}{15}\gamma_3+\frac{14}{15}\lambda_2+\frac{21}{15}\alpha_1)f_xf_{xy}$$
$$+(\frac{12}{15}\gamma_1\beta_1+\frac{24}{15}\gamma_1\beta_1+\frac{32}{15}\gamma_2\beta_1+\frac{64}{15}\beta_2\lambda_1+\frac{64}{15}\gamma_1\lambda_1+\frac{128}{15}\gamma_2\beta_1$$
$$+\frac{128}{15}\lambda_1\beta_2+\frac{128}{15}\lambda_1\gamma_1+\frac{7}{15}\gamma_3\beta_1+\frac{14}{15}\beta_2\lambda_2+\frac{14}{15}\gamma_1\lambda_2+\frac{28}{15}\beta_3\alpha_1$$
$$+\frac{28}{15}\gamma_2\alpha_1+\frac{28}{15}\lambda_1\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_3\beta_1+\frac{28}{15}\lambda_1\beta_2+\frac{28}{15}\lambda_2\gamma_1+\frac{28}{15}\alpha_1\beta_3+\frac{28}{15}\alpha_1\gamma_2$$
$$+\frac{28}{15}\alpha_1\lambda_1)ff_{xy}f_y+(\frac{1}{10}\gamma_1+\frac{4}{15}\gamma_2+\frac{16}{15}\lambda_1+\frac{7}{120}\gamma_3+\frac{7}{30}\lambda_2$$
$$+\frac{21}{40}\alpha_1)f_{xx}f_y+(\frac{64}{45}\beta_1^3+\frac{8}{15}\beta_2^3+\frac{8}{15}\gamma_1^3+\frac{24}{15}\beta_2^2\gamma_1+\frac{24}{15}\beta_2\gamma_1^2+\frac{64}{45}\beta_3^3$$
$$+\frac{64}{45}\gamma_2^3+\frac{64}{45}\lambda_1^3+\frac{64}{15}\beta_3^2\gamma_2+\frac{64}{15}\beta_3^2\lambda_1+\frac{64}{15}\beta_3\lambda_1^2+\frac{64}{15}\beta_3\gamma_2^2+\frac{64}{15}\gamma_2^2\lambda_1$$
$$+\frac{128}{5}\gamma_2\lambda_1^2+\frac{256}{5}\beta_3\gamma_2\lambda_1+\frac{14}{45}\beta_4^3+\frac{14}{45}\gamma_3^3+\frac{14}{45}\lambda_2^3+\frac{14}{45}\alpha_1^3+\frac{14}{15}\beta_4^2\gamma_3$$
$$+\frac{14}{15}\beta_4^2\lambda_2+\frac{14}{15}\beta_4^2\alpha_1+\frac{14}{15}\gamma_3^2\lambda_2+\frac{14}{15}\gamma_3^2\alpha_1+\frac{14}{15}\lambda_2^2\alpha_1+\frac{14}{15}\beta_4\alpha_1^2$$
$$+\frac{14}{15}\gamma_3\lambda_2^2+\frac{14}{15}\gamma_3\alpha_1^2+\frac{14}{15}\lambda_2\alpha_1^2+\frac{14}{15}\beta_4\gamma_3^2+\frac{14}{15}\beta_4\lambda_2^2+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3\lambda_2$$
$$+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3\alpha_1+\frac{28}{15}\beta_4\lambda_1\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\alpha_1)f^3f_{yyy}+(\frac{16}{15}\gamma_2^2+\frac{32}{15}\lambda_1^2+\frac{32}{15}\beta_3\gamma_2$$
$$+\frac{64}{15}\beta_3\lambda_1+\frac{64}{15}\gamma_2\lambda_1+\frac{32}{15}\gamma_2\lambda_1+\frac{7}{30}\gamma_3^2+\frac{7}{15}\lambda_2^2+\frac{7}{10}\alpha_1^2+\frac{7}{15}\beta_4\gamma_3$$
$$+\frac{14}{15}\beta_4\lambda_2+\frac{21}{15}\beta_4\alpha_1+\frac{7}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{21}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{7}{15}\gamma_3\lambda_2+\frac{14}{15}\gamma_3\lambda_2+\frac{14}{15}\lambda_2\alpha_1$$
$$+\frac{7}{15}\lambda_2\alpha_1)ff_xf_{yy}+(\frac{16}{15}\beta_1^2+\frac{4}{5}\beta_2^2+\frac{4}{5}\gamma_1^2+\frac{8}{5}\beta_2\gamma_1+\frac{16}{5}\beta_3^2+\frac{16}{5}\gamma_2^2$$
$$+\frac{16}{5}\lambda_1^2+\frac{32}{5}\beta_3\gamma_2+\frac{16}{5}\beta_3\lambda_1+\frac{16}{5}\gamma_2\lambda_1+\frac{14}{15}\beta_4^2+\frac{14}{15}\gamma_3^2+\frac{14}{15}\lambda_2^2+\frac{14}{15}\alpha_1^2$$
$$+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3+\frac{28}{15}\beta_4\lambda_2+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{28}{15}\lambda_2\alpha_1)f^2f_{xyy}$$
$$+(\frac{64}{15}\beta_1^2\gamma_2+\frac{128}{15}\lambda_1\beta_2^2+\frac{64}{15}\gamma_2^2\beta_1+\frac{64}{15}\lambda_1^2\beta_2+\frac{64}{15}\lambda_1^2\gamma_1+\frac{128}{15}\beta_1\beta_3\gamma_2$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{128}{15}\beta_2\beta_3\lambda_1+\frac{128}{15}\beta_3\lambda_1\gamma_1+\frac{128}{15}\gamma_2\lambda_1\beta_2+\frac{128}{15}\gamma_2\lambda_1\gamma_1+\frac{128}{15}\gamma_2\lambda_1\beta_1\\
&+\frac{14}{15}\beta_1^2\gamma_3+\frac{28}{15}\lambda_2\beta_2^2+\frac{14}{15}\beta_3^2\alpha_1+\frac{14}{15}\gamma_2^2\alpha_1+\frac{14}{15}\lambda_1^2\alpha_1+\frac{28}{15}\beta_3\gamma_2\alpha_1\\
&+\frac{28}{15}\beta_3\lambda_1\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_2\lambda_1\alpha_1+\frac{14}{15}\gamma_3^2\beta_1+\frac{14}{15}\lambda_2^2\beta_2+\frac{14}{15}\lambda_2^2\gamma_1+\frac{14}{15}\alpha_1^2\beta_3\\
&+\frac{14}{15}\alpha_1^2\gamma_2+\frac{14}{15}\alpha_1^2\lambda_1+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3\beta_1+\frac{28}{15}\beta_2\beta_4\lambda_2+\frac{28}{15}\beta_4\lambda_2\gamma_1\\
&+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1\beta_3+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1\gamma_2+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1\lambda_1+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\beta_1+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\beta_3\\
&+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\gamma_2+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\lambda_1+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\beta_1+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\beta_2+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\gamma_1\\
&+\frac{28}{15}\lambda_2\alpha_1\beta_2+\frac{28}{15}\lambda_2\alpha_1\gamma_1+\frac{28}{15}\lambda_2\alpha_1\beta_1)f^2f_yf_{yy}+(\frac{32}{15}\lambda_1\gamma_1+\frac{7}{15}\lambda_2\gamma_1\\
&+\frac{7}{15}\alpha_1\gamma_2+\frac{14}{15}\lambda_1\alpha_1)f_xf_y^2+(\frac{128}{15}\lambda_1\gamma_1\beta_1+\frac{28}{15}\gamma_1\beta_1\lambda_2+\frac{28}{15}\gamma_2\beta_1\alpha_1\\
&+\frac{28}{15}\lambda_1\beta_2\alpha_1+\frac{28}{15}\lambda_1\gamma_1\alpha_1)ff_y^3+\ldots
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (3.62) กับอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้

$$
\begin{aligned}
&\frac{32}{45}\beta_1+\frac{12}{45}\beta_2+\frac{12}{45}\gamma_1+\frac{32}{45}\beta_3+\frac{32}{45}\gamma_2+\frac{32}{45}\lambda_1+\frac{7}{45}\beta_4+\frac{7}{45\gamma_3}\\
&\qquad+\frac{7}{45}\lambda_2+\frac{7}{45}\alpha_1=1
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{5}\gamma_1+\frac{8}{15}\gamma_2+\frac{16}{15}\lambda_1+\frac{7}{60}\gamma_3+\frac{7}{30}\lambda_2+\frac{7}{20}\alpha_1=1
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{5}\gamma_1\beta_1+\frac{32}{15}\gamma_2\beta_1+\frac{32}{15}\lambda_1\beta_2+\frac{32}{15}\lambda_1\gamma_1+\frac{7}{15}\gamma_3\beta_1+\frac{7}{15}\lambda_2\beta_2+\frac{7}{15}\lambda_2\gamma_1\\
&\qquad+\frac{7}{15}\alpha_1\beta_3+\frac{7}{15}\gamma_2\alpha_1+\frac{7}{15}\alpha_1\lambda_1=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{16}{15}\beta_1^2+\frac{4}{5}\beta_2^2+\frac{16}{15}\beta_3^2+\frac{16}{15}\gamma_2^2+\frac{16}{15}\lambda_1^2+\frac{32}{15}\beta_3\gamma_2+\frac{32}{15}\beta_3\lambda_1+\frac{32}{15}\gamma_2\lambda_1+\frac{7}{30}\beta_4^2\\
&+\frac{7}{30}\gamma_3^2+\frac{7}{30}\lambda_2^2+\frac{7}{30}\alpha_1^2+\frac{7}{15}\beta_4\gamma_3+\frac{7}{15}\beta_4\lambda_2+\frac{7}{15}\beta_4\alpha_1+\frac{7}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{7}{15}\gamma_3\lambda_2\\
&\qquad+\frac{7}{15}\lambda_2\alpha_1=1
\end{aligned}
$$

$$\frac{8}{15}\beta_1+\frac{2}{5}\beta_2+\frac{2}{5}\gamma_1+\frac{32}{15}\beta_3+\frac{32}{15}\gamma_2+\frac{32}{15}\lambda_1+\frac{7}{15}\beta_4+\frac{7}{15}\gamma_3+\frac{7}{15}\lambda_2+\frac{7}{15}\alpha_1=2$$

$$\frac{4}{15}\beta_1+\frac{6}{15}\beta_2+\frac{6}{15}\gamma_1+\frac{12}{5}\beta_3+\frac{12}{5}\gamma_2+\frac{12}{5}\lambda_1+\frac{14}{15}\beta_4+\frac{14}{15}\gamma_3+\frac{14}{15}\lambda_2+\frac{14}{15}\alpha_1=3$$

$$\frac{2}{5}\gamma_1+\frac{32}{15}\gamma_2+\frac{64}{15}\lambda_1+\frac{7}{15}\gamma_3+\frac{14}{15}\lambda_2+\frac{21}{15}\alpha_1=3 \tag{3.63}$$

$$\begin{gathered}\frac{12}{15}\gamma_1\beta_1+\frac{24}{15}\gamma_1\beta_1+\frac{32}{15}\gamma_2\beta_1+\frac{64}{15}\beta_2\lambda_1+\frac{64}{15}\gamma_1\lambda_1+\frac{128}{15}\gamma_2\beta_1+\frac{128}{15}\lambda_1\beta_2+\frac{128}{15}\lambda_1\gamma_1\\ \frac{7}{15}\gamma_3\beta_1+\frac{14}{15}\beta_2\lambda_2+\frac{14}{15}\gamma_1\lambda_2+\frac{28}{15}\beta_3\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_2\alpha_1+\frac{28}{15}\lambda_1\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_3\beta_1+\frac{25}{18}\lambda_1\beta_2\\ \frac{28}{15}\lambda_2\gamma_1+\frac{28}{15}\alpha_1\beta_3+\frac{28}{15}\alpha_1\gamma_2+\frac{28}{15}\alpha_1\lambda_1=5\end{gathered}$$

$$\frac{1}{10}\gamma_1+\frac{4}{15}\gamma_2+\frac{16}{15}\lambda_1+\frac{7}{120}\gamma_3+\frac{7}{30}\lambda_2+\frac{21}{40}\alpha_1=1$$

$$\begin{gathered}\frac{64}{45}\beta_1^3+\frac{8}{15}\beta_2^3+\frac{8}{15}\gamma_1^3+\frac{24}{15}\beta_2^2\gamma_1+\frac{24}{15}\beta_2\gamma_1^2+\frac{64}{45}\beta_3^3+\frac{64}{45}\gamma_2^3+\frac{64}{45}\lambda_1^3+\frac{64}{15}\beta_3^2\gamma_2+\frac{64}{15}\beta_3^2\lambda_1\\ +\frac{64}{15}\beta_3\lambda_1^2+\frac{64}{15}\beta_3\gamma_2^2+\frac{64}{15}\gamma_2^2\lambda_1+\frac{128}{5}\gamma_2\lambda_1^2+\frac{256}{5}\beta_3\gamma_2\lambda_1+\frac{14}{45}\beta_4^3+\frac{14}{45}\gamma_3^3+\frac{14}{45}\lambda_2^3+\frac{14}{45}\alpha_1^3\\ +\frac{14}{15}\beta_4^2\gamma_3+\frac{14}{15}\beta_4^2\alpha_1+\frac{14}{15}\gamma_3^2\lambda_2+\frac{14}{15}\gamma_3^2\alpha_1+\frac{14}{15}\lambda_2^2\alpha_1+\frac{14}{15}\beta_4\alpha_1^2+\frac{14}{15}\gamma_3\lambda_2^2+\frac{14}{15}\gamma_3\alpha_1^2\\ +\frac{14}{15}\lambda_2\alpha_1^2+\frac{14}{15}\beta_4\gamma_3^2+\frac{14}{15}\beta_4\lambda_2^2+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3\lambda_2+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3\alpha_1+\frac{28}{15}\beta_4\lambda_2\alpha_1\\ +\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\alpha_1=1\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{16}{15}\gamma_2^2+\frac{32}{15}\lambda_1^2+\frac{32}{15}\beta_3\gamma_2+\frac{64}{15}\beta_3\lambda_1+\frac{64}{15}\gamma_2\lambda_1+\frac{32}{15}\gamma_2\lambda_1+\frac{7}{30}\gamma_3^2+\frac{7}{15}\lambda_2^2+\frac{7}{10}\alpha_1^2\\ +\frac{7}{15}\beta_4\gamma_3+\frac{14}{15}\beta_4\lambda_2+\frac{21}{15}\beta_4\alpha_1+\frac{7}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{21}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{7}{15}\gamma_3\lambda_2+\frac{14}{15}\gamma_3\lambda_2+\frac{14}{15}\lambda_2\alpha_1\\ +\frac{7}{15}\lambda_2\alpha_1=3\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{16}{15}\beta_1^2+\frac{4}{5}\beta_2^2+\frac{4}{5}\gamma_1^2+\frac{8}{5}\beta_2\gamma_1+\frac{16}{5}\beta_3^2+\frac{16}{5}\gamma_2^2+\frac{16}{5}\lambda_1^2+\frac{32}{5}\beta_3\gamma_2+\frac{16}{5}\beta_3\gamma_2+\frac{16}{5}\gamma_2\lambda_1\\ +\frac{14}{15}\beta_4^2+\frac{14}{15}\gamma_3^2+\frac{14}{15}\lambda_2^2+\frac{14}{15}\alpha_1^2+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3+\frac{28}{15}\beta_4\lambda_2+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\end{gathered}$$

$$+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1+\frac{28}{15}\lambda_2\alpha_1=3$$

$$\begin{aligned}
&\frac{64}{15}\beta_1^2\gamma_2+\frac{128}{15}\lambda_1\beta_2^2+\frac{64}{15}\gamma_2^2\beta_1+\frac{64}{15}\lambda_1^2\beta_2+\frac{64}{15}\lambda_1^2\gamma_1+\frac{128}{15}\beta_1\beta_3\gamma_2+\frac{128}{15}\beta_2\beta_3\lambda_1\\
&+\frac{128}{15}\beta_3\lambda_1\gamma_1+\frac{128}{15}\gamma_2\lambda_1\beta_2+\frac{128}{15}\gamma_2\lambda_1\gamma_1+\frac{128}{15}\gamma_2\lambda_1\beta_1+\frac{14}{15}\beta_1^2\gamma_3+\frac{28}{15}\lambda_2\beta_2^2\\
&+\frac{14}{15}\beta_3^2\alpha_1+\frac{14}{15}\gamma_2^2\alpha_1+\frac{14}{15}\lambda_1^2\alpha_1+\frac{28}{15}\beta_3\gamma_2\alpha_1+\frac{28}{15}\beta_3\lambda_1\alpha_1+\frac{28}{15}\gamma_2\lambda_1\alpha_1+\frac{14}{15}\gamma_3^2\beta_1\\
&+\frac{14}{15}\lambda_2^2\beta_2+\frac{14}{15}\lambda_2^2\gamma_1+\frac{14}{15}\alpha_1^2\beta_3+\frac{14}{15}\alpha_1^2\gamma_2+\frac{14}{15}\alpha_1^2\lambda_1+\frac{28}{15}\beta_4\gamma_3\beta_1+\frac{28}{15}\beta_2\beta_4\lambda_2\\
&+\frac{28}{15}\beta_4\lambda_2\gamma_1+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1\beta_3+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1\gamma_2+\frac{28}{15}\beta_4\alpha_1\lambda_1+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\beta_1+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\beta_3\\
&+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\gamma_2+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\lambda_1+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\beta_1+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\beta_2+\frac{28}{15}\gamma_3\lambda_2\gamma_1+\frac{28}{15}\gamma_3\alpha_1\gamma_2\\
&+\frac{28}{15}\lambda_2\alpha_1\gamma_1+\frac{28}{15}\lambda_2\alpha_1\beta_1=4
\end{aligned}$$

$$\frac{32}{15}\lambda_1\gamma_1+\frac{7}{15}\lambda_2\gamma_1+\frac{7}{15}\alpha_1\gamma_2+\frac{14}{15}\lambda_1\alpha_1=1$$

$$\frac{128}{15}\lambda_1\gamma_1\beta_1+\frac{28}{15}\gamma_1\beta_1\lambda_2+\frac{28}{15}\gamma_2\beta_1\alpha_1+\frac{28}{15}\lambda_1\beta_2\alpha_1+\frac{28}{15}\lambda_1\gamma_1\alpha_1=1$$

จากการแก้สมการจะได้ $\beta_1=\frac{1}{4},\beta_2=-1,\beta_3=\frac{9}{16},\beta_4=-1,$

$$\gamma_1=\frac{3}{2},\gamma_2=-\frac{3}{8},\gamma_3=\frac{18}{7}, \tag{3.64}$$

$$\lambda_1=\frac{9}{16},\lambda_2=-\frac{12}{7},\alpha_1=\frac{8}{7}$$

เอาไปแทนค่าในสมการ(3.57)จะได้

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{90}(7K_1+32K_2+12K_3+32K_4+7K_5) \tag{3.65}$$

โดยที่ $K_1=f(x_m,y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m - hK_1 + \frac{3}{2}hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{9}{16}hK_1 - \frac{3}{8}hK_2 + \frac{9}{16}hK_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h, y_m - hK_1 + \frac{18}{17}hK_2 - \frac{12}{17}hK_3 + \frac{8}{7}hK_4)$$

เป็นระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้า ที่ต้องการ

3.2.5 ระเบียบวิธีรุงเง - กุตตา อันดับหก

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับหกมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6) \tag{3.66}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + c_2h, y_m + \beta_1hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + c_3h, y_m + \beta_2hK_1 + \gamma_1hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + c_4h, y_m + \beta_3hK_1 + \gamma_2hK_2 + \lambda_1hK_3)$$

$$K_5 = f(x_m + c_5h, y_m + \beta_4hK_1 + \gamma_3hK_2 + \lambda_2hK_3 + \alpha_1hK_4)$$

$$K_6 = f(x_m + c_6h, y_m + \beta_5hK_1 + \gamma_4hK_2 + \lambda_3hK_3 + \alpha_2hK_4 + \omega_1hK_5)$$

จากการนำค่าจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน - โค้ตจากสมการ (3.22) มาใส่ในระเบียบวิธีรุงเง - กุตตาอันดับหก จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{288}(19K_1 + 75K_2 + 50K_3 + 50K_4 + 75K_5 + 19K_6) \tag{3.67}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{5}, y_m + \beta_1 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \tfrac{2}{5}h, y_m + \beta_2 hK_1 + \gamma_1 hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + \frac{3}{5}h, y_m + \beta_3 hK_1 + \gamma_2 hK_2 + \lambda_1 hK_3)$$

$$K_5 = f(x_m + \frac{4}{5}h, y_m + \beta_4 hK_1 + \gamma_3 hK_2 + \lambda_2 hK_3 + \alpha_1 hK_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h, y_m + \beta_5 hK_1 + \gamma_4 hK_2 + \lambda_3 hK_3 + \alpha_2 hK_4 + \omega_1 hK_5)$$

นำสมการที่ (3.67) ไปกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ แล้วเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ ทำการแก้สมการจะได้

$$\begin{gathered}\beta_1 = \frac{1}{15}, \beta_2 = -\frac{1}{5}, \beta_3 = \frac{3}{20}, \beta_4 = -\frac{1}{15}, \\ \beta_5 = \frac{23}{38}, \gamma_1 = \frac{3}{5}, \gamma_2 = -\frac{3}{10}, \gamma_3 = \frac{6}{5}, \\ \gamma_4 = -\frac{45}{19}, \lambda_1 = \frac{3}{4}, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \frac{135}{38}, \\ \alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = -\frac{30}{19}, \omega_1 = \frac{15}{19}\end{gathered} \tag{3.68}$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับหก ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{288}(19K_1 + 75K_2 + 50K_3 + 50K_4 + 75K_5 + 19K_6) \tag{3.69}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{5}, y_m + \frac{h}{5}K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \tfrac{2}{5}h, y_m - \frac{h}{5}K_1 + \frac{3}{5}hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + \frac{3}{5}h, y_m + \frac{3}{20}hK_1 - \frac{3}{10}hK_2 + \frac{3}{4}hK_3)$$

$$K_5 = f(x_m + \frac{4}{5}h, y_m - \frac{h}{15}K_1 + \frac{6}{5}hK_2 - hK_3 + \frac{2}{3}hK_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h, y_m + \frac{23}{38}hK_1 - \frac{45}{19}hK_2 + \frac{135}{38}hK_3 - \frac{30}{19}hK_4 + \frac{15}{19}hK_5)$$

จากผลการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาในงานวิจัยนี้ทั้ง 9 รูปแบบ สามารถนำมาเขียนในรูปของ บุธเชอร์-อาร์เรย์ ได้ดังต่อไปนี้

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสอง

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสาม

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{30} & \frac{8}{15} & \\ \hline & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{array}$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{3}{10} & \frac{3}{10} & & \\
\frac{3}{5} & \frac{3}{55} & \frac{6}{11} & \\
\hline
 & \frac{19}{4} & -5 & \frac{55}{4}
\end{array}
$$

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่

$$
\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\
1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้า

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & \\
\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & & & \\
\frac{3}{4} & \frac{9}{16} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{16} & & \\
1 & -1 & \frac{18}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} & \\
\hline
 & \frac{7}{90} & \frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90}
\end{array}
$$

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับหก

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & \\
\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & & & & \\
\frac{3}{5} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{10} & \frac{3}{4} & & & \\
\frac{4}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{6}{5} & -1 & \frac{2}{3} & & \\
1 & \frac{23}{38} & -\frac{45}{19} & \frac{135}{38} & -\frac{30}{19} & \frac{15}{19} & \\
\hline
 & \frac{19}{288} & \frac{75}{288} & \frac{25}{144} & \frac{25}{144} & \frac{75}{288} & \frac{19}{288}
\end{array}
$$

ในบทนี้ได้แสดงวิธีการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา เห็นได้ชัดว่าถ้าระเบียบวิธีรุงเง-กุตตามีอันดับที่สูงขึ้น ก็จะใช้เวลาในการสร้างที่นาน ซึ่งประสิทธิภาพในการคำนวณของแต่ละระเบียบวิธีนั้นจะแสดงในบทต่อไป

บทที่ 4

ผลของงานวิจัย

ในบทนี้จะแสดงการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาจากการนำรูปแบบของนิวตัน-โค้ตมาปรับปรุงใช้ ซึ่งได้แสดงการสร้างไว้ในบทที่ 3 โดยในการทดสอบจะนำระเบียบวิธีดังกล่าว มาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง และแสดงการเปรียบเทียบความคาดเคลื่อนของผลเฉลยที่ได้ กับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา พร้อมทั้งระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา-ไฟล์เบิร์ก รูปแบบ Goeken และ Johnson และรูปแบบของ Wu ดังต่อไปนี้

4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในส่วนนี้จะแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีรูปแบบ

$$y'(x) = f(x, y) \qquad ; y(x_0) = y_0 \tag{4.1}$$

ที่ได้จากระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาแบบใหม่ทั้ง 9 รูปแบบ และระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาที่นิยมใช้ พร้อมทั้งระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา-ไฟล์เบิร์ก รูปแบบ Goeken และ Johnson และรูปแบบของ Wu ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 2 ที่นิยมใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \tag{4.2}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + h, y_m + hK_1)$$

2. ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 3 ที่นิยมใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \tag{4.3}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h, y_m - hK_1 + 2hK_2)$$

3. ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 4 ที่นิยมใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{4.4}$$

โดยที่ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h, y_m + hK_3)$$

4. ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา-ไฟล์เบิร์ก

$$y_{m+1} = y_m + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5 \tag{4.5}$$

โดยที่ $K_1 = hf(x_m, y_m)$

$$K_2 = hf(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}K_1)$$

$$K_3 = hf(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}hK_1 + \frac{9}{32}hK_2)$$

$$K_4 = hf(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}hK_1 - \frac{7200}{2197}hK_2 + \frac{7296}{2197}hK_3)$$

$$K_5 = hf(x_m + h, y_m + \frac{439}{216} hK_1 - 8hK_2 + \frac{3680}{513} hK_3 - \frac{845}{4104} hK_4)$$

5. รูปแบบของ Goeken และ Johnson

$$y_{m+1} = y_m + \frac{5}{48} K_1 + \frac{27}{56} K_2 + \frac{125}{336} K_3 + \frac{1}{24} K_4 \tag{4.6}$$

โดยที่ $K_1 = hf(y_m)$

$$K_2 = hf(y_m + \frac{1}{3} K_1 + \frac{1}{18} hf_y K_1)$$

$$K_3 = hf(y_m - \frac{152}{125} K_1 + \frac{252}{125} K_2 - \frac{44}{125} hf_y K_1)$$

$$K_4 = hf(y_m + \frac{19}{2} K_1 - \frac{72}{7} K_2 + \frac{25}{14} K_3 + \frac{5}{2} hf_y K_1)$$

6. รูปแบบของ Wu

$$\begin{aligned} y_{m+1} = {} & \frac{3}{2} y_m - \frac{1}{2} y_{m-1} + h(\frac{1}{2} f_m + \frac{121}{192} f(y_m + \frac{8}{11} hf_m) \\ & + \frac{23}{192} f(y_m - \frac{44}{23} hf_m + \frac{44}{23} hf(y_m + \frac{8}{11} hf_m)) - \frac{121}{192} f(y_{m-1} + \frac{20}{29} hf_{m-1}) \\ & - \frac{23}{192} hf(y_{m-1} - \frac{44}{23} hf_{m-1} + \frac{44}{23} f(y_{m-1} + \frac{8}{11} hf_{m-1}))) \end{aligned} \tag{4.7}$$

จากระเบียบวิธีดังกล่าว กำหนดให้มีเงื่อนไขในการคำนวณ ดังต่อไปนี้

เงื่อนไขที่ 1 กำหนดให้ขนาดขั้น(Step size) h = 0.1 และพิจารณาผลการคำนวณ $y(x_m)$ ที่ m = 1 ซึ่งใช้สำหรับการเปรียบเทียบเพื่อแสดงประสิทธิภาพของแต่ละระเบียบวิธี

เงื่อนไขที่ 2 พิจารณาค่า $y(x_m)$ จากการคำนวณโดยใช้ขนาดขั้น h = 0.0001 ที่ m = 1000

เงื่อนไขที่ 3 กำหนดให้ขนาดขั้น h = 0.0001 และพิจารณา $y(x_m)$ ที่ m มีค่าเท่ากับ $h(x - x_0)$ เพื่อทดสอบความมีเสถียรภาพของระเบียบวิธี

จากรูปแบบของระเบียบวิธีและเงื่อนไขของการคำนวณดังกล่าว นำมาเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์โดยใช้ภาษาปาสคาล เพื่อคำนวณหาผลเฉลยพร้อมทั้งความคาดเคลื่อนของปัญหาดังต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1: พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = \frac{4}{x(x-4)} \quad \text{เมื่อ} \quad y(5) = 5. \tag{4.8}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริง คือ $y(x) = 5 + \ln 5 - \ln x + \ln(x-4)$ (4.9)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.1 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 1

	X=5.1,h=0.1, y=5.0755075525		x=5.1,h=0.0001, y=5.0755075525		x=100.0,h=0.0001, y=6.5686159179	
	Calculated Value y	Absolute Error	Calculated Value y	Absolute Error	Calculated Value y	Absolute Error
K2	5.0756506239	1.430714×10^{-4}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159581	4.020694×10^{-8}
K3	5.0755076180	6.548362×10^{-8}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159588	6.547634×10^{-8}
K4	5.0755076180	6.548362×10^{-8}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159588	6.547634×10^{-8}
FB	5.0755075507	1.833541×10^{-9}	5.0755788503	7.129782×10^{-5}	6.5686159586	4.276080×10^{-8}
N21	5.0754361150	7.143747×10^{-5}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159581	4.020694×10^{-8}
N22	5.0754361150	7.143747×10^{-5}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159581	4.020694×10^{-8}
N31	5.0755098684	2.315908×10^{-6}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159586	4.072353×10^{-8}
N32	5.0754361150	7.143747×10^{-5}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159581	4.020694×10^{-8}
N33	5.0755052949	2.257664×10^{-6}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N34	5.0755788498	3.363501×10^{-6}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N4	5.0755075816	2.912566×10^{-8}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N5	5.0755075525	2.910383×10^{-11}	5.0755788498	7.129731×10^{-5}	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N6	5.0755075525	7.275958×10^{-12}	5.0755352950	1.010629×10^{-5}	6.5686159586	4.071626×10^{-8}

ปัญหาที่ 2 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1 \tag{4.10}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริง คือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$ (4.11)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 2

	x=0.1,h=0.1, y=1.0050251887		x=0.1,h=0.0001, y=1.0050251887		x=1.1,h=0.0001, y=6.1100397659	
	Calculated Value y	Absolute Error	Calculated Value y	Absolute Error	Calculated Value y	Absolute Error
K2	1.0049937617	3.142699×10^{-5}	1.0050352950	1.010627×10^{-5}	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
K3	1.0050377575	1.256881×10^{-5}	1.0050352750	1.256881×10^{-5}	6.1100398300	6.413757×10^{-8}
K4	1.0050252274	3.869718×10^{-8}	1.0050352950	1.010627×10^{-5}	6.1100398412	7.534254×10^{-8}
FB	1.0050225892	5.894264×10^{-6}	1.0050352950	1.010627×10^{-5}	6.1100398413	7.537164×10^{-8}
N21	1.0049937617	3.142699×10^{-5}	1.0050352950	1.010627×10^{-5}	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
N22	1.0049937617	3.142699×10^{-5}	1.0050352950	1.010627×10^{-5}	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
N31	1.0050222220	2.966481×10^{-6}	1.0050352950	1.010629×10^{-5}	6.1100397947	2.879800×10^{-8}
N32	1.0050137571	1.143155×10^{-5}	1.0050352950	1.010628×10^{-5}	6.1100274339	1.233201×10^{-5}
N33	1.0050365138	1.132511×10^{-5}	1.0050352950	1.010629×10^{-5}	6.1100398855	1.196240×10^{-7}
N34	1.0050195109	5.677741×10^{-6}	1.0050352950	1.010629×10^{-5}	6.1100397755	1.363514×10^{-8}
N4	1.0049999965	2.519221×10^{-6}	1.0050352822	1.009355×10^{-5}	6.1100398412	7.534254×10^{-8}
N5	1.0050251662	2.250636×10^{-8}	1.0050352950	1.010629×10^{-5}	6.1100398412	7.535709×10^{-8}
N6	1.0050251911	2.417437×10^{-9}	1.0050352950	1.010629×10^{-5}	6.1100398412	7.533527×10^{-8}

ปัญหาที่ 3 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = y^3 \text{ เมื่อ } y(0) = 0.1 . \tag{4.12}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริง คือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$ (4.13)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 3

	x=0.1,h=0.1, y=0.10010015025		x=0.1,h=0.0001, y=0.10010015025		x=49.9,h=0.0001, y=2.2360679778	
	Calculated Value y	Absolute Error	Calculated Value y	Absolute Error	Calculated Value y	Absolute Error
K2	0.10010015008	1.753051×10^{-10}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360675851	3.927089×10^{-7}
K3	0.10010015025	1.136868×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680765	9.071066×10^{-8}
K4	0.10010015025	1.136868×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680767	9.894939×10^{-8}
FB	0.10010015025	1.136868×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680781	7.002954×10^{-7}
GJ	0.10010030624	1.559881×10^{-7}	0.10010025072	1.004693×10^{-7}	2.2418914989	5.823521×10^{-3}
WU*	0.10010584213	5.691884×10^{-6}	0.10000010599	1.000443×10^{-4}	17.085971673	14.8499882389
N21	0.10010015008	1.753051×10^{-10}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360675851	3.927089×10^{-7}
N22	0.10010015008	1.753051×10^{-10}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360675851	3.927089×10^{-7}
N31	0.10010015030	5.013590×10^{-11}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680058	2.806337×10^{-8}
N32	0.10010015020	5.513812×10^{-11}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360679230	5.478796×10^{-8}
N33	0.10010015025	2.273737×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680754	9.762516×10^{-8}
N34	0.10010015025	1.136868×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680765	9.875293×10^{-8}
N4	0.10010015025	1.136868×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680754	9.762516×10^{-8}
N5	0.10010015025	1.136868×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680675	9.873474×10^{-8}
N6	0.10010015025	1.136868×10^{-13}	0.10010025055	1.003013×10^{-7}	2.2360680754	9.765427×10^{-8}

*** รูปแบบของ Wu ใช้จุด $y(0)$ และ $y(0.5h)$ เป็น 2 ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น**

หมายเหตุ : K2 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 2 ที่นิยมใช้
K3 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 3 ที่นิยมใช้
K4 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 4 ที่นิยมใช้
FB แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา-ไฟล์เบิร์ก
GJ แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาจากงานวิจัยของ David Goeken และ Olin Johnson
WU แทน รูปแบบของ Wu
N21 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 2 แบบที่ 1 จากการวิจัย
N22 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 2 แบบที่ 2 จากการวิจัย
N31 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 3 แบบที่ 1 จากการวิจัย
N32 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 3 แบบที่ 2 จากการวิจัย
N33 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 3 แบบที่ 3 จากการวิจัย
N34 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 3 แบบที่ 4 จากการวิจัย
N4 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 4 จากการวิจัย
N5 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 5 จากการวิจัย
N6 แทน ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 6 จากการวิจัย

4.2 บทสรุป

จากตารางที่ 4.1 - 4.3 เมื่อทำการเปรียบเทียบความคาดเคลื่อนของผลเฉลยจากการแก้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาจากการวิจัย กับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาแบบอื่น ๆ พบว่า

ในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสอง รูปแบบที่ได้จากการวิจัย มีความคาดเคลื่อนใกล้เคียงกับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองที่นิยมใช้

ในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสาม รูปแบบที่ได้จากการวิจัย มีความคาดเคลื่อนใกล้เคียงกับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสามที่นิยมใช้ โดยเฉพาะรูปแบบที่ 1 และรูปแบบที่ 4 แต่ว่ามีรูปแบบที่กระชับกว่า และใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่ารูปแบบที่นิยมใช้

จากการเปรียบเทียบค่าผิดพลาดจากโจทย์ปัญหาทั้ง 3 ข้อ พบว่า ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ 6 มีค่าความคาดเคลื่อนน้อยที่สุดซึ่งเห็นได้ชัดจากทั้งโจทย์ปัญหาทั้ง 3 ข้อ แต่ว่าใช้เวลาในการคำนวณสูง

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะทำการสรุปผลของการสร้างระเบียบวิธี ที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา โดยการนำรูปแบบนิวตัน-โค้ตมาใช้ในการกำหนดจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา พร้อมทั้งข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา สำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษา

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาระเบียบวิธีรุงเง-กุตตารูปแบบต่าง ๆ และวิธีการสร้างรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาที่ได้นำรูปแบบนิวตัน-โค้ตมาใช้ปรับปรุง จะได้รูปแบบทั่วไปสำหรับระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับ k ในงานวิจัยนี้ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + \ldots + A_kK_k) \tag{5.1}$$

เมื่อ

$$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_1K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_2K_1 + h\beta_3K_2)$$

$$\vdots$$

$$K_k = f(x_m + h\alpha_{k-1}, y_m + h\beta_jK_1 + h\beta_{j+1}K_2 + \ldots + h\beta_{j+k-2}K_{K-1})$$

ซึ่ง β_i เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา และสำหรับ A_i, α_i จะถูกกำหนดโดยรูปแบบของนิวตัน-โค้ต โดยสามารถสร้างระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาสำหรับงานวิจัย ได้ 9 รูปแบบดังแสดงในสมการที่ (3.28), (3.32), (3.39), (3.42), (3.45), (3.48), (3.56), (3.65) และ (3.69) ดังแสดงในบทที่ 3

จากการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาทั้ง 9 รูปแบบที่ได้จากการวิจัยกับโจทย์ปัญหา ทั้ง 3 โจทย์ โดยใช้ขนาดขั้น h = 0.1, 0.0001 ดังกล่าวในบทที่ 4 แสดงให้เห็นว่า

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาทั้ง 9 รูปแบบที่ได้จากการวิจัย สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และมีผลเฉลยที่ดีมีความแม่นยำ และมีค่าความผิดพลาดไม่แตกต่างไปจากรูปแบบที่นิยมใช้

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองและอันดับสามในงานวิจัยนี้จะอยู่ในรูปแบบเปิด(open formula) เพราะว่าระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองและสามรูปแบบปิด (closed formula) เป็นรูปแบบที่นิยมใช้กันอยู่แล้ว แต่ในงานวิจัยนี้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่, อันดับห้า, และอันดับหกเป็นรูปแบบปิด

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เป็นการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาที่มีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงมาจากรูปแบบนิวตัน-โค้ต จากงานวิจัยนี้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสองและสามจะเป็นรูปแบบเปิด ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับสี่ห้าและหก จะเป็นรูปแบบปิด เพราะฉะนั้นสำหรับผู้ที่สนใจเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบต่าง ๆ ของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา สามารถนำแนวคิดวิธีการสร้างไปประยุกต์ใช้ เพื่อสร้างระเบียบวิธีรูปแบบใหม่ที่อยู่ในรูปแบบเปิด สำหรับหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] Marvin L. De Jong. **Introduction to Computational Physics**. Singapore : Addison-Wesley. 1991.

[2] ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขขั้นพื้นฐาน**. กรุงเทพมหานคร : โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2529.

[3] ภัคคินี ชิตสกุล. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข**. กรุงเทพมหานคร : โครงการตำราวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2535.

[4] Shijie Liu. **"Runge-Kutta Methods."** [Online]. Available : http://www.ualberta.ca/~carolina/CHE674.html. 2003.

[5] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. **Solving Ordinary Differential Equations**. 2nd Ed. Michigan : Springer-Verlag. 1993.

[6] F. Costabile, R. Caira, M.I. Gualtieri. "Economical Runge-Kutta method." **Rendiconti di Mathematica, Serie VII.**, vol.15, 1995. pp. 57-77.

[7] David Goeken and Olin Johnson. "Fifth-order Runge-Kutta with higher order derivative approximations." **Electronic Journal of Differential Equations**., vol.2, November 1999. pp. 1-9.

[8] Xingyuan Wu. "A class of Runge-Kutta formulae of order three and four with reduced evaluations of function." **Applied Mathematics and Computation**., vol.146, December 2003. pp. 417-432.

ภาคผนวก

งานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method

Maitree Podisuk and Somsakun Phummark
Department of Mathematics and Computer Science
King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang
Ladkrabang Bangkok 10520
THAILAND
mpodisuk@yahoo.com somsakun@hotmail.com http://www.kmitl.ac.th

Abstract: In this paper, we will introduce some formulas of Runge-Kutta method for solving the initial value problem of the ordinary differential equations by using the points and weights from the Newton-Cotes formulas for the numerical integration. We will use these formulas to find the numerical solutions of some examples and compare these results with the classical known Runge-Kutta formulas.

Key-Words: Runge-Kutta Newton-Cotes Fehlberg Goeken Johnson Wu

1 Introduction

The initial value problem of the ordinary differential equation is of the form

(1) $y'(x) = f(x,y), x \in [a,b]$

with the initial condition

(2) $y(a) = c$.

The partition P over the closed interval $[a,b]$ is the finite sequence of numbers, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ where $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $x_m = a + mh$ where $h = \frac{b-a}{n}$. The n-points Runge-Kutta formula, the explicit single step method, to find the numerical solution of the above problem (1)-(2) at the point x_{m+1} is of the form

(3) $y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + \ldots + A_nK_n)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_1K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_2K_1 + h\beta_3K_2)$

.

.

.

$K_n = f(x_m + h\alpha_{n-1}, y_m + h\beta_jK_1 + h\beta_{j+1}K_2 + \ldots + h\beta_{j+n-2}K_{n-1})$

with $j = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$.

The most frequently used are the three points classical formula

(4) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1)$

$K_3 = f(x_m + h, y_m - hK_1 + 2hK_2)$,

the four points classical formula

(5) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1)$

$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_2)$

$K_4 = f(x_m + h, y_m + hK_3)$,

and the five points Runge-Kutta Fehlberg formula

(6) $y_{m+1} = y_m + h(\frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}K_1)$

$$K_3 = f(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}hK_1 + \frac{9}{32}hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}hK_1 - \frac{7200}{2197}hK_2 + \frac{7296}{2197}hK_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h, y_m + \frac{439}{216}hK_1 - 8hK_2 + \frac{3680}{513}hK_3 - \frac{845}{4104}hK_4).$$

In 1999 Goeken and Johnson[1] introduced the following four points Runge-Kutta method for finding the numerical solutions of the autonomous initial value problem of the ordinary differential equations and it is of the form

$$(7)\quad y_{m+1} = y_m + \frac{5}{48}K_1 + \frac{27}{56}K_2 + \frac{125}{336}K_3 + \frac{1}{24}K_4)$$

where $K_1 = hf(y_m)$

$$K_2 = hf(y_m + \frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{18}hf_y K_1)$$

$$K_3 = hf(y_m - \frac{152}{125}K_1 + \frac{252}{125}K_2 - \frac{44}{125}hf_y K_1)$$

$$K_4 = hf(y_m + \frac{19}{2}K_1 + \frac{22}{7}K_2 + \frac{25}{14}K_3 + \frac{5}{2}hf_y K_1).$$

In 2003 Wu[2] introduced the two-step formula Runge-Kutta method for finding the numerical solutions of the autonomous initial value problem of the ordinary differential equations and it is of the form

$$(8)\quad y_{m+1} = \frac{3}{2}y_m - \frac{1}{2}y_{m-1} + h(\frac{1}{2}f_m + \frac{121}{192}f(y_m, \frac{8}{11}hf_m) + \frac{23}{192}f(y_m - \frac{44}{23}hf_m + \frac{44}{23}hf(y_m + \frac{8}{11}hf_m)) - \frac{121}{192}f(y_{m-1} + \frac{20}{29}hf_{m-1}) - \frac{23}{192}hf(y_{m-1} - \frac{44}{23}hf_{m-1} + \frac{44}{23}f(y_{m-1} + \frac{8}{11}hf_{m-1}))).$$

2 Problem Formulation

The idea of our new formulas is to use the points and weights of the Newton-Cotes formulas for finding the numerical solutions of the definite integrals. We obtain the following formulas.

2.1 Two Points Formulas

There are three formulas of this type. The first formula is of the form

$$(9)\quad y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(2K_1 + K_2)$$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{3}{2}h, y_m + \frac{3}{2}hK_1).$$

The second formula is of the form

$$(10)\quad y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(K_1 + 2K_2)$$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{3}{4}K_1).$$

The third formula is of the form

$$(11)\quad y_{m+1} = y_m + hK_2$$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1).$$

2.2 Three Points Formulas

There are four formulas of this type. The first formula is of the form

$$(12)\quad y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3)$$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}h}{3}, y_m + \frac{\sqrt{2}h}{3}K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \frac{(2-\sqrt{2})h}{3}K_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}hK_2).$$

The second formula is of the form

(13) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(2K_1 - 4K_2 + 5K_3)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}K_1)$

$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m - \frac{h}{30}K_1 + \frac{8h}{15}K_2)$.

The third formula is of the form

(14) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(3K_1 + K_3)$

where

$K_1 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + \frac{2h}{3}, y_m + \frac{2h}{3}K_1)$

$K_3 = f(x_m + h, y_m + hK_2)$.

The fourth formula is of the form

(15) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{54}(19K_1 - 20K_2 + 55K_3)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{3h}{10}, y_m + \frac{3h}{10}K_1)$

$K_3 = f(x_m + \frac{3h}{5}, y_m \frac{3h}{55}K_1 + \frac{6h}{11}K_2)$.

2.3 Four Points Formulas

There is one formula of this type and it is of the form

(16) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{8}(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}K_1)$

$K_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m - \frac{h}{3}K_1 + hK_2)$

$K_4 = f(x_m + h, y_m + hK_1 - hK_2 + hK_3)$.

2.4 The Five Points Formula

There is one formula of this type and it is of the form

(17) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{90}(7K_1 + 32K_2 + 12K_3 + 32K_4 + 7K_5)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}K_1)$

$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m - hK_1 + \frac{3}{2}hK_2)$

$K_4 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{9}{16}hK_1 - \frac{3}{8}hK_2 + \frac{9}{16}hK_3)$

$K_5 = f(x_m + h, y_m - hK_1 + \frac{18}{7}hK_2 - \frac{12}{7}hK_3 + \frac{8}{7}hK_4)$.

2.5 The Six Points Formula

There is one formula of this type and it is of the form

(18) $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{288}(19K_1 + 75K_2 + 50K_3 + 50K_4 + 75K_5 + 19K_6)$

where $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + \frac{h}{5}, y_m + \frac{h}{5}K_1)$

$K_3 = f(x_m + \frac{2}{5}h, y_m - \frac{h}{5}K_1 + \frac{3}{5}hK_2)$

$K_4 = f(x_m + \frac{3}{5}h, y_m + \frac{3}{20}hK_1 - \frac{3}{10}hK_2 + \frac{3}{4}hK_3)$

$K_5 = f(x_m + \frac{4}{5}h, y_m - \frac{h}{15}K_1 + \frac{6}{5}hK_2 - hK_3 + \frac{2}{3}hK_4)$

$K_6 = f(x_m + h, y_m + \frac{23}{38}hK_1 - \frac{45}{19}hK_2 + \frac{135}{38}hK_3 - \frac{30}{19}hK_4 + \frac{15}{19}hK_5)$.

3 Examples

There will be three examples in this section. We will use the following symbols for the formulas used for these three examples:

K3 for three points formula (4)
K4 for four points formula (5)
FB for five points formula (6)
GJ for formula (7)
WU formula (8)
N21 for our formula (9)
N22 for our formula (10)
N23 for our formula (11)
N31 for our formula (12)
N32 for our formula (13)
N33 for our formula (14)
N34 for our formula (15)
N4 for our formula (16)
N5 for our formula (17)
N6 for our formula (18)

We use these fifteen formulas to find the numerical solutions of the following three ordinary differential equations which include one equation of the autonomous initial value problem of the ordinary differential equations.

3.1 Example 1

Find the numerical solution of the equation

(19) $y' = \dfrac{4}{x(x-4)},\ x \in [5,100]$

with the initial condition

(20) $y(5) = 5$.

The analytical solution of the above equation is

$$y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4).$$

The numerical results are in following table 1, 2 and 3.

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.0755075525$	
	Calculated y	Error
K3	5.07565076180	6.548363×10^{-8}
K4	5.07565076180	6.548363×10^{-8}
FB	5.0755075507	1.840817×10^{-9}
N21	5.0758463487	3.387962×10^{-4}
N22	5.07554361150	7.143748×10^{-5}
N23	5.0754361150	7.143748×10^{-5}
N31	5.0755098684	2.315908×10^{-6}
N32	5.0754361150	7.143748×10^{-5}
N33	5.0755052949	2.257664×10^{-6}
N34	5.0755788498	3.363501×10^{-6}
N4	5.0755075816	2.911838×10^{-8}
N5	5.0755075525	2.182787×10^{-11}
N6	5.0755075525	7.275958×10^{-12}

Table 1

	$x = 5.1$ $h = 0.0001$ $y = 5.0755075525$	
	Calculated y	Error
K3	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
K4	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
FB	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
N21	5.0755788503	7.129782×10^{-5}
N22	5.0755788498	7.129725×10^{-5}
N23	5.0755788498	7.129725×10^{-5}
N31	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
N32	5.0755788498	7.129725×10^{-5}
N33	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
N34	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
N4	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
N5	5.0755788498	7.129731×10^{-5}
N6	5.07550352950	1.010629×10^{-5}

Table 2

	$x = 100.0$ $h = 0.0001$ $y = 6.5686159179$	
	Calculated y	Error
K3	6.5686159588	6.547634×10^{-8}
K4	6.5686159588	6.547634×10^{-8}
FB	6.5686159586	4.276080×10^{-8}
N21	6.5686159607	4.276080×10^{-8}
N22	6.5686159581	4.020694×10^{-8}
N23	6.5686159581	4.020694×10^{-8}
N31	6.5686159586	4.072353×10^{-8}
N32	6.5686159581	4.020694×10^{-8}
N33	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N34	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N4	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N5	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
N6	6.5686159586	4.071626×10^{-8}

Table 3

3.2 Example 2

Find the numerical solution of the equation

(21) $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \in [0,1.1]$

with the initial condition

(22) $y(0) = 1.$

The analytical solution of the above equation is $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$.

The numerical results are in following table 4, 5 and 6.

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.0050251887$	
	Calculated y	Eerror
K3	1.0050377575	1.256881×10^{-5}
K4	1.0050252274	3.869718×10^{-8}
FB	0.011640225892	5.894264×10^{-6}
N21	1.0049446818	8.050692×10^{-5}
N22	1.0049937617	3.142699×10^{-5}
N23	1.0049937617	3.142699×10^{-5}
N31	1.005022222	2.966481×10^{-6}
N32	1.0050137571	1.143155×10^{-5}
N33	1.00503651380	1.132511×10^{-5}
N34	1.0050195109	5.677741×10^{-6}
N4	1.0049999965	2.519221×10^{-6}
N5	1.0050251662	2.250636×10^{-8}
N6	1.0050251911	2.417437×10^{-9}

Table 4

	$x = 0.1$ $h = 0.0001$ $y = 1.0050251887$	
	Calculated y	Eerror
K3	1.0050352750	1.256881×10^{-5}
K4	1.0050352950	1.010627×10^{-5}
FB	1.0050352950	1.010627×10^{-5}
N21	1.0050352950	1.010627×10^{-5}
N22	1.0050352950	1.010627×10^{-5}
N23	1.0050352950	1.010627×10^{-5}
N31	1.0050352950	1.010629×10^{-5}
N32	1.0050352950	1.010628×10^{-5}
N33	1.0050352950	1.010629×10^{-5}
N34	1.0050352950	1.010629×10^{-5}
N4	1.0050352822	1.009355×10^{-5}
N5	1.0050352950	1.010629×10^{-5}
N6	1.0050352950	1.010629×10^{-5}

Table 5

	$x = 1.1$ $h = 0.0001$ $y = 6.1100397659$	
	Calculated y	Eerror
K3	6.1100398300	6.413757×10^{-8}
K4	6.1103398412	7.534254×10^{-8}
FB	6.110398413	7.537164×10^{-8}
N21	6.1100353435	4.422414×10^{-6}
N22	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
N23	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
N31	6.1100397947	2.879800×10^{-8}
N32	6.1100274339	1.233201×10^{-5}
N33	6.1100398855	1.196240×10^{-7}
N34	6.1100397755	1.363514×10^{-8}
N4	6.0998529267	1.018684×10^{-2}
N5	6.1100398412	7.535709×10^{-8}
N6	6.1100398412	7.533527×10^{-8}

Table 6

3.3 Example 3

Find the numerical solution of the equation

(23) $y' = y^3, \ x \in [0,49.9]$

with the initial condition

(24) $y(0) = 0.1$

The analytical solution of the above equation is $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$.

The numerical results are in following table 7, 8 and 9.

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 0.1001001502$	
	Calculated y	Eerror
K3	0.10010015025	1.136868×10^{-13}
K4	0.10010015025	1.136868×10^{-13}
FB	0.10010015025	1.136868×10^{-13}
GJ	0.10010030624	1.559881×10^{-7}
WU*	0.10010584213	5.691884×10^{-6}
N21	0.10010015023	2.523848×10^{-11}
N22	0.10010015008	1.753051×10^{-10}
N23	0.10010015008	1.753051×10^{-10}
N31	0.10010015030	5.013590×10^{-11}
N32	0.10010015020	5.513812×10^{-11}

N33	0.10010015025	2.273737×10^{-13}
N34	0.10010015025	1.136868×10^{-13}
N4	0.10010003749	1.127629×10^{-7}
N5	0.10010015025	1.136868×10^{-13}
N6	0.10010015025	1.136868×10^{-13}

Table 7

	x = 0.1 h = 0.0001 y = 0.1001001502	
	Calculated y	Eerror
K3	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
K4	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
FB	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
GJ	0.10010025072	1.004693×10^{-7}
WU*	0.10000010599	1.000443×10^{-4}
N21	0.10010025055	1.003014×10^{-7}
N22	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
N23	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
N31	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
N32	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
N33	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
N34	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
N4	0.10010015051	3.819878×10^{-11}
N5	0.10010025055	1.003013×10^{-7}
N6	0.10010025055	1.003013×10^{-7}

Table 8

	x = 49.9 h = 0.0001 y = 2.2360679778	
	Calculated y	Error
K3	2.2360680765	9.0710655×10^{-8}
K4	2.2360680767	9.894939×10^{-8}
FB	2.2360680781	1.002954×10^{-7}
GJ	2.2418914989	5.823521×10^{-3}
WU*	17.085971673	14.8499882389
N21	2.2360680058	2.806337×10^{-8}
N22	2.2360675851	3.927089×10^{-7}
N23	2.2360675851	3.927089×10^{-7}
N31	2.2360680058	2.806337×10^{-8}
N32	2.2360679230	5.478796×10^{-8}
N33	2.2360680754	9.762516×10^{-8}
N34	2.2360680765	9.875293×10^{-8}
N4	2.2347659623	1.302016×10^{-3}
N5	2.2360680675	9.873474×10^{-8}
N6	2.2360680754	9.765427×10^{-8}

Table 9

* WU formula used y(0) and y(0.5h) as the initial two points.

4 Conclusion

All new formulas are as good as we expected, except the formula N4. These new formulas will give us more freedom to find the way of finding the numerical solutions of the initial value problem of the ordinary differential equations. However we have to keep in mind that the above numerical solutions are just for only these three equations and the Wu formula is the 2-step formula. We would like to recommend the formula N31, the formula N34 and the formula N5.

References:

[1] David Goeken and Olin Johnson, Fifth-Order Runge-Kutta with Higher Order Derivative Approximations, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol.2, November 1999, pp.1-9.

[2] Xinyuan Wu, A Class of Runge-Kutta of Order Three and Four with Reduced Evaluations of Function, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.146, December 2003, pp.417-432.

[3] *Proceedings of the 6th WSEAS Conferences on Applied Mathematics*, Corfu, Greece, August 17-19, 2004

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล นายสมสกุล พุ่มมาก

วันเดือนปีเกิด 15 พฤษภาคม 2521 ที่จังหวัดอุตรดิตถ์

ที่อยู่ 1/14 ซอย 14 ถ.บรมอาสน์ ต.ท่าอิฐ อ.เมือง จ.อุตรดิตถ์ 53000

ประวัติการศึกษา วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยนเรศวร จ.พิษณุโลก พ.ศ.2541

ประสบการณ์ทำงาน

พ.ศ.2542-2543 อาจารย์หมวดวิชาวิทยาศาสตร์ โรงเรียนขุนไกรพิทยาคม จ.สุโขทัย

พ.ศ.2546-ปัจจุบัน อาจารย์คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ จ.ปทุมธานี