



## รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

เมทริกซ์ในฐานะที่เป็นกึ่งกรุปแกมมา

Matrices as  $\Gamma$ -semigroups

นายรัชชัย คำประภัสสร

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินงบประมาณเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2557

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อโครงการ	เมทริกซ์ในฐานะที่เป็นเกมมาทริกซ์
แหล่งเงิน	ทุนส่งเสริมนักวิจัย เงินรายได้
ประจำปีงบประมาณ	2557 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 50,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย	1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2556 ถึง 30 กันยายน 2557
หัวหน้าโครงการ	นายวัชรชัย คำประภัสสร สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

### บทคัดย่อ

เราทราบว่า  $M_{mn}(R)$  เซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  บน  $R$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ใดๆ บทความวิจัยนี้เรากำหนดเซตย่อยไม่ว่าง  $T$  ของ  $M_{mn}(R)$  จุดประสงค์ก็คือนหาเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{mn}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$

คำสำคัญ :  $\Gamma$ -กึ่งกรุป และ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย

**Research Title:** Matrices as  $\Gamma$ -semigroups  
**Researcher:** Thawatchai Khumprapussorn  
**Faculty:** Science  
**Department:** Mathematics

### ABSTRACT

We know that  $M_{mn}(R)$ , the set of all  $m \times n$  matrices over  $R$ , is a  $\Gamma$ -semigroup under usual multiplication for any nonempty subsets  $\Gamma$  of  $M_{nm}(R)$ . In this research, we fix a nonempty subset  $T$  of  $M_{mn}(R)$  and then we give a characterization of a nonempty subsets  $P$  of  $M_{nm}(R)$  which  $T$  is a  $\Gamma$ -subsemigroup of  $M_{mn}(R)$ .

**Keywords:**  $\Gamma$ -semigroup,  $\Gamma$ -subsemigroup



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้โอกาสในการเรียนรู้และทำงานวิจัย และขอขอบคุณบุคลากรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกๆ ท่านที่มอบมิตรไมตรี ความช่วยเหลือ ตลอดจนกระทั่งให้คำแนะนำในการจัดทำรูปเล่มงานวิจัยนี้ เป็นอย่างดี นอกจากนี้ผู้เขียนขอขอบคุณกองบรรณาธิการวารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ที่ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา พร้อมทั้งนำผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 23 ฉบับที่ 2 ประจำเดือนกรกฎาคม – ธันวาคม 2557

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนส่งเสริมนักวิจัย เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ

เนื้อหา .....	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย .....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .....	II
กิตติกรรมประกาศ .....	III
สารบัญ .....	IV
สารบัญภาพ .....	V
บทที่ 1 บทนำ .....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา .....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย .....	1
1.3 ขอบเขตของการวิจัย .....	2
1.4 วิธีดำเนินการวิจัยและแผนการดำเนินงานวิจัย .....	2
บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....	4
2.1 $\Gamma$ -กึ่งกรุป .....	4
2.2 แนวคิดและเหตุจูงใจ .....	7
บทที่ 3 เมทริกซ์ในฐานะที่เป็น $\Gamma$ -กึ่งกรุป .....	8
บทที่ 4 สรุปลผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ .....	15
4.1 ตำแหน่งที่กำหนดมีค่าเป็น 0 .....	16
4.2 ตำแหน่งที่กำหนดมีค่าไม่เป็น 0 .....	22
4.3 ข้อเสนอแนะ .....	26
บทที่ 5 สรุปลผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย .....	28
เอกสารอ้างอิง .....	29
ประวัติผู้เขียน .....	30

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญภาพ

ภาพที่ .....	หน้า
4.1 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.10.....	17
4.2 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.12.....	18
4.3 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.1 .....	19
4.4 ภาพรวมสรุปทฤษฎีบท 2.1.10, 2.1.12 และ 3.1 .....	20
4.5 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.5 .....	21
4.6 ภาพประกอบบทแทรก 3.6.....	22
4.7 ภาพประกอบบทแทรก 3.7.....	22
4.8 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.11.....	23
4.9 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.14.....	23
4.10 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.4.....	25
4.11 ภาพรวมสรุปทฤษฎีบท 2.1.11, 2.1.14 และ 3.4 .....	26

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 1 บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โครงสร้างของกึ่งกรุปแกลมาปรากฏครั้งแรกในปี 1986 โดย M.K. Sen และ N.K. Saha [2] ได้ให้ข้อสังเกตไว้ว่ากึ่งกรุปแกลมาเป็นกรุปย่อยทั่วไปของกึ่งกรุป แต่สิ่งที่น่าสนใจมากกว่านั้น ก็คือ โครงสร้างกึ่งกรุปแกลมา และกึ่งกรุป ให้โครงสร้างซึ่งกันและกัน หมายความว่า ถ้า  $S$  เป็นกึ่งกรุป แล้ว  $S$  เป็น  $S$ -กึ่งกรุป ในทางกลับกัน ถ้า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุป และ  $\alpha \in \Gamma$  แล้ว  $(S, \circ)$  เป็นกึ่งกรุป เมื่อการดำเนินการ  $\circ$  บน  $S$  กำหนดโดย  $a \circ b = aab$  สำหรับทุก  $a, b \in S$

แนวทางหนึ่งที่ที่น่าสนใจในการศึกษาโครงสร้างของกึ่งกรุปแกลมา คือ การพิจารณารูปแบบของกึ่งกรุปย่อยแกลมา ถึงแม้ว่ากึ่งกรุปย่อยแกลมาจะเป็นเซตที่เล็กกว่า แต่ก็มีสมบัติเช่นเดียวกับกึ่งกรุปย่อยแกลมาทุกประการ ยิ่งไปกว่านั้นเรากล่าวได้ว่า ทุกกึ่งกรุปย่อยแกลมาของกึ่งกรุปแกลมาใดๆ เป็นกึ่งกรุปแกลมา ดังนั้นการศึกษากึ่งกรุปย่อยแกลมาก็มีความสำคัญไม่ต่างอะไรกับการศึกษากึ่งกรุปแกลมา ตัวอย่างแนวทางการศึกษานี้ เช่น จากงานวิจัย [1] ศึกษากรุปย่อยของ  $I$  ที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ  $R$  ทั้งภายใต้การบวกและการคูณปกติ และศึกษาว่าเมื่อใดที่ช่วงจริง  $I$  และ  $\Gamma$  ที่ทำให้  $I$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $R$  นอกจากนี้ เซตของเมทริกซ์ให้โครงสร้างของกึ่งกรุปแกลมาด้วยเช่นกัน โดยงานวิจัย [1] ศึกษาเงื่อนไขสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  $T$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  เมื่อ  $T$  เป็นเซตย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ตามที่กำหนดให้

หลังจากการศึกษาเบื้องต้นพบว่ามีรูปแบบของเซตย่อยไม่ว่าง  $T$  ของ  $M_{mn}(R)$  ที่ถูกกำหนดโดย [1] นั้น มีถึง 11 รูปแบบ แต่ถึงกระนั้น ยังมีรูปแบบของ เซตย่อยไม่ว่าง  $T$  ของ  $M_{mn}(R)$  ที่น่าสนใจและยังไม่ถูกศึกษาอีกจำนวนมาก เช่น เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง เซตของเมทริกซ์สามแนวเฉียง หรือ เซตของเมทริกซ์ที่ระบุตำแหน่งมากกว่า 2 ตำแหน่งซึ่งอยู่ในแถวหรือหลักเดียวกัน ในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นการศึกษาไปที่เซตของเมทริกซ์ที่ระบุตำแหน่งมากกว่า 2 ตำแหน่งซึ่งอยู่ในแถวหรือหลักเดียวกัน เพราะคาดว่าผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นการวางนัยทั่วไปของรูปแบบของเมทริกซ์ที่ศึกษาไว้แล้วโดย [1]

นอกจากนี้อาจนำไปสู่งานวิจัยต่อเนื่องในอนาคตสำหรับนักศึกษาหรือผู้วิจัยได้อีกด้วย กล่าวคือ ในงานวิจัยนี้มุ่งประเด็นไปที่ เมื่อกำหนดเซตย่อยไม่ว่าง  $T$  ของ  $M_{mn}(R)$  เราศึกษาเงื่อนไขและแยกแยะเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  แต่สำหรับงานวิจัยต่อเนื่องในอนาคตอาจจะศึกษาในทางกลับกัน นั่นคือ กำหนดเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  เราศึกษาเงื่อนไขและแยกแยะเซตย่อยไม่ว่าง  $T$  ของ  $M_{mn}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  หรือศึกษาในทำนองเดียวกันนี้ในเซตอื่นๆ เช่น เซตของการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ เซตของจำนวนตรรกยะ หรือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน เป็นต้น

### 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1) เพื่อศึกษารูปแบบที่เป็นไปได้ของเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$
- 2) เพื่อศึกษาเงื่อนไขของสมาชิกในเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$
- 3) เพื่อรวบรวมรูปแบบจากเดิมที่มีอยู่ นำเสนอให้เห็นภาพรวมของผลลัพธ์ชนิดต่างๆ พร้อมทั้งขยายผลลัพธ์และนำไปสู่กรณีทั่วไปมากยิ่งขึ้น
- 4) เพื่อศึกษาแนวโน้มการต่อยอดงานวิจัยในอนาคต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 1.3 ขอบเขตของของการวิจัย

ศึกษาเงื่อนไขของสมาชิกในเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  เมื่อ  $T$  เป็นเซตย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ที่เรากำหนดรูปแบบแตกต่างกันดังนี้

- 1)  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i\gamma} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\}$  เมื่อ  $k \in N_n, i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน
- 2)  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\}$  เมื่อ  $k \in N_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R \setminus \{0\}, i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน
- 3)  $T = \{[a_{rs}] \in M_2(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_2\}$
- 4)  $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_n\}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับ โดยที่  $n \geq 3$
- 5)  $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ เมื่อ } i \neq j\}$

### 1.4 วิธีดำเนินการวิจัย และ แผนการดำเนินงานวิจัย

#### วิธีดำเนินการวิจัย

- 1) ศึกษาความรู้พื้นฐานของกึ่งกรุปแกมมา
- 2) สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปแกมมา
- 3) วิเคราะห์และพิสูจน์สมบัติบางประการของกึ่งกรุปแกมมา
- 4) วิเคราะห์ข้อมูลตัวอย่างเพื่อให้เห็นถึงแนวโน้มรูปแบบของเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  โดยเริ่มจากเมทริกซ์ขนาดเล็กไปสู่ขนาด  $m \times n$  ใดๆ
- 5) แยกแยะเงื่อนไขของสมาชิกในเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$
- 6) ศึกษาการวางนัยทั่วไปของบางผลลัพธ์ของงานวิจัย [2]
- 7) สรุปผลการวิจัย

#### แผนการดำเนินงานวิจัย

##### ตารางผลงานในแต่ละช่วงเวลา

การดำเนินงาน	ระยะเวลา												
	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	
ศึกษาความรู้พื้นฐานของกึ่งกรุปแกมมา	←————→												
สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปแกมมา	←————→												

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



## บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราเริ่มต้นโดยการกล่าวถึงนิยามของ  $\Gamma$ -กึ่งกรุป ถือได้ว่าเป็นนิยามที่สำคัญสำหรับงานวิจัยชิ้นนี้

### 2.1 $\Gamma$ -กึ่งกรุป

บทนิยาม 2.1.1 [2] ให้  $S$  และ  $\Gamma$  เป็นเซตไม่ว่าง เราเรียก  $S$  ว่า  $\Gamma$ -กึ่งกรุป ถ้ามีการส่ง  $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$  เราแทนการส่ง  $(a, \gamma, b)$  ด้วย  $a\gamma b$  ซึ่งสอดคล้องสมบัติ

$$(aab)\beta c = a\alpha(b\beta c) \text{ สำหรับทุก } a, b, c \in S \text{ และสำหรับทุก } \alpha, \beta \in \Gamma$$

เราเรียกเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่าง  $B$  ของ  $S$  ว่า  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ถ้า  $a\gamma b \in B$  สำหรับทุกๆ  $a, b \in B$  และ  $\gamma \in \Gamma$

ตัวอย่าง 2.1.2 [1] ให้  $\Gamma$  เป็นเซตย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า  $M_{mn}(R)$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 2.1.3 [1] ให้  $X$  และ  $Y$  เป็นเซตไม่ว่าง  $S = \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ เป็นฟังก์ชัน}\}$  และ  $\Gamma = \{f: Y \rightarrow X \mid f \text{ เป็นฟังก์ชัน}\}$  จะได้ว่า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การประกอบของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 2.1.4 [3] ให้  $S = [-1, 1]$  และ  $\Gamma = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \right\}$  จะได้ว่า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.1.5 [4] ให้  $\Gamma = S = \{-i, 0, i\}$  จะได้ว่า  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับกึ่งกรุปใดๆ เราสามารถสร้าง  $\Gamma$ -กึ่งกรุปได้จากกึ่งกรุป  $S$  โดยการกำหนดให้  $S = \Gamma$  ในทางกลับกัน สำหรับ  $\Gamma$ -กึ่งกรุป  $S$  ใดๆ และ  $\alpha \in \Gamma$  จะได้ว่า  $(S, *)$  เป็นกึ่งกรุป โดยที่  $a * b = a\alpha b$  ทุกๆ  $a, b \in S$  ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า  $\Gamma$ -กึ่งกรุปและกึ่งกรุปให้โครงสร้างซึ่งกันและกัน

ผลจากการทบทวนวรรณกรรม ทำให้เรามองเห็นได้อย่างชัดเจนว่าโครงสร้าง  $\Gamma$ -กึ่งกรุป เป็นการวางนัยทั่วไปของโครงสร้างกึ่งกรุป ทั้งนี้จากผลการแยกแยะชนิดของ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยจากงานวิจัย [1] นำไปอธิบายชนิดของกึ่งกรุปย่อยบนจำนวนจริง ภายใต้การบวกและการคูณปกติ โดยการกำหนด  $\Gamma$  ที่เหมาะสม ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.6 [1] ให้  $\Gamma^* = \{a\}$  จะได้ว่า ช่วงของจำนวนจริง  $I$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง  $R$  ภายใต้การบวกปกติ ก็ต่อเมื่อ  $I$  อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| I. $R$                               | IV. $(y, \infty)$ เมื่อ $y \geq -a$  |
| II. $\{-a\}$                         | V. $(-\infty, y]$ เมื่อ $y \leq -a$  |
| III. $[y, \infty)$ เมื่อ $y \geq -a$ | VI. $(-\infty, y)$ เมื่อ $y \leq -a$ |

จากบทนิยามของ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ทำให้เราทราบว่า ภายใต้การบวกปกติ ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ  $R$  และ  $\{0\}$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $R$  เป็นสิ่งเดียวกัน ดังนั้นเมื่อเราแทนค่า  $a = 0$  ลงไปในทฤษฎีบทข้างต้น เราจะได้ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ  $R$  ดังนี้

บทแทรก 2.1.7 ให้  $I$  เป็นช่วงของจำนวนจริง จะได้ว่า  $I$  เป็นกึ่งกรุปย่อยภายใต้การบวกปกติ ก็ต่อเมื่อ  $I$  อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| I. $R$                              | IV. $(y, \infty)$ เมื่อ $y \geq 0$  |
| II. $\{0\}$                         | V. $(-\infty, y]$ เมื่อ $y \leq 0$  |
| III. $[y, \infty)$ เมื่อ $y \geq 0$ | VI. $(-\infty, y)$ เมื่อ $y \leq 0$ |

สำหรับรูปแบบของช่วง  $I$  ที่เป็น  $\{a\}$ -กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง  $R$  ภายใต้การคูณปกติ มีผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.8 [1] ให้  $a > 0$  จะได้ว่า ช่วงของจำนวนจริง  $I$  เป็น  $\{a\}$ -กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง  $R$  ภายใต้การคูณปกติ ก็ต่อเมื่อ  $I$  อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

- |   |  |
|---|--|
| I. $R$  | VIII. $[x, y]$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a \leq y \leq \frac{1}{a}$ |
| II. $\{0\}$                                   | IX. $[x, y)$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a < y \leq \frac{1}{a}$      |
| III. $\{\frac{1}{a}\}$                        | X. $(x, y]$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a \leq y \leq \frac{1}{a}$    |
| IV. $(0, \infty)$                             | XI. $(x, y)$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a < y \leq \frac{1}{a}$      |
| V. $[0, \infty)$                              |  |
| VI. $(x, \infty)$ เมื่อ $x \geq \frac{1}{a}$  |  |
| VII. $[x, \infty)$ เมื่อ $x \geq \frac{1}{a}$ |  |

ข้อสังเกตหนึ่งที่ได้ชัดจากนิยามของ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย นั่นคือ ภายใต้การคูณปกติ ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ  $R$  และ  $\{1\}$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $R$  เป็นสิ่งเดียวกัน จากทฤษฎีบทข้างต้น เมื่อแทนค่า  $a = 1$  เราจะได้รูปแบบทั้งหมดของช่วง  $I$  ที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ  $R$  ดังนี้

บทแทรก 2.1.9 ให้  $I$  เป็นช่วงของจำนวนจริง จะได้ว่า  $I$  เป็นกึ่งกรุปย่อยภายใต้การคูณปกติ ก็ต่อเมื่อ  $I$  อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| I. $R$                              | VIII. $(0, y)$ เมื่อ $0 < y \leq 1$                     |
| II. $\{0\}$                         | IX. $(0, y]$ เมื่อ $0 < y \leq 1$                       |
| III. $\{1\}$                        | X. $[0, y)$ เมื่อ $0 < y \leq 1$                        |
| IV. $(0, \infty)$                   | XI. $[0, y]$ เมื่อ $0 < y \leq 1$                       |
| V. $[0, \infty)$                    | XII. $(x, y]$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 \leq y \leq 1$ |
| VI. $(x, \infty)$ เมื่อ $x \geq 1$  | XIII. $[x, y)$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 < y \leq 1$   |
| VII. $[x, \infty)$ เมื่อ $x \geq 1$ | XIV. $[x, y]$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 \leq y \leq 1$ |

เราทราบจากตัวอย่าง 2.1.2 ว่า  $M_{mn}(R)$  เซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  บน  $R$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติ สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ใดๆ ของ  $M_{mn}(R)$  การแยกแยะว่าเมื่อใดที่เซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $M_{mn}(R)$  ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  โดยที่  $T$  เป็นเซตย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ตามที่กำหนดให้ ได้ศึกษาไว้แล้วโดย [1] ต่อจากนี้ไปจะกล่าวถึงผลลัพธ์เพียงบางส่วนจาก [1] ซึ่งเป็นแนวคิดหลักของงานวิจัยนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดสัญลักษณ์

$N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1, & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$$

$R$  แทนเซตของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.1.10 [1] ให้  $i \in N_m, j \in N_n$  และ  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i\}$

เราสังเกตว่า เมื่อ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุเพียงหนึ่งตำแหน่งมีค่าเป็น 0 (สมมติว่าในตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าเป็น 0 หรือ  $a_{ij} = 0$ ) จะเห็นว่าลักษณะของแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ใน  $\Gamma$  ส่วนมากมีค่าเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่อยู่ในแถว แถวที่  $j$  และหลักที่  $i$

ต่อไปจะพิจารณาเมื่อ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุเพียงหนึ่งตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 (สมมติว่าในตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าเป็น 0 หรือ  $a_{ij} \neq 0$ )

ทฤษฎีบท 2.1.11 [1] ให้  $\alpha \in R \setminus \{0\}, i \in N_m$  และ  $j \in N_n$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \alpha\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{ji} = \frac{1}{\alpha} \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$

ทฤษฎีต่อไป จะพิจารณาลักษณะของ  $\Gamma$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  โดยที่  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่งในแถวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 (สมมติว่า  $a_{ij} = a_{it} = 0$  โดยที่  $j \neq t$ )

ทฤษฎีบท 2.1.12 [1] ให้  $i \in N_m, j, t \in N_n$  และ  $j \neq t$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = a_{it} = 0\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j, t \text{ และ } q \neq i\}$

เมื่อนำทฤษฎีบท 2.1.10 และ ทฤษฎีบท 2.1.12 มาเปรียบเทียบกับจะเห็นว่า ในขณะที่  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุตำแหน่งที่มีค่าเป็น 0 เพิ่มขึ้นในแถวแถวเดียวกัน มีผลทำให้ลักษณะของแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ใน  $\Gamma$  เกิดหลักที่ไม่เป็น 0 เพิ่มขึ้นไปด้วย

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ กล่าวถึงกรณีที่  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง โดยทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0

ทฤษฎีบท 2.1.13 [1] ให้  $\lambda, \mu \in R \setminus \{0\}, i, p \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $p \neq i$  และ  $q \neq j$

ให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda \text{ และ } a_{pq} = \mu\}$  จะได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  สำหรับทุกเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$

ทฤษฎีบท 2.1.14 [1] ให้  $\lambda, \mu \in R \setminus \{0\}, i \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $q \neq j$

ให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda \text{ และ } a_{iq} = \mu\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{xy}] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \lambda b_{ji} + \mu b_{qi}, \forall t \in N_m \setminus \{i\}, 0 = \lambda b_{jt} + \mu b_{qt} \text{ และ}$

$$\forall x \in N_n \setminus \{j, q\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.2 แนวคิด และ เหตุจูงใจ

ทฤษฎีบท 2.1.13 แสดงให้เห็นว่า เมื่อ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง ทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 โดยที่ทั้งสองตำแหน่งต่างแถวและต่างหลักกัน ผลที่ได้คือไม่มีเซตย่อยไม่ว่างใดๆ  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุป ของ  $M_{mn}(R)$  สำหรับทฤษฎีบท 2.1.14 อธิบายถึงกรณี  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง ทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 โดยที่ทั้งสองตำแหน่งอยู่ในแถวเดียวกัน จะได้เงื่อนไขของเมทริกซ์ใน  $\Gamma$  ดังนี้

$$1 = \lambda b_{ji} + \mu b_{qi}, \forall t \in N_m \setminus \{i\}, 0 = \lambda b_{jt} + \mu b_{qt} \text{ และ } \forall x \in N_n \setminus \{j, q\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0$$

งานวิจัยของ Khumprapussorn [1] ศึกษาารูปแบบของเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  โดยที่กำหนด  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 1 ตำแหน่ง และ 2 ตำแหน่ง อีกทั้งในตำแหน่งที่ศึกษานั้น ระบุทั้งที่มีค่าเป็น 0 และไม่เป็น 0 นำมาซึ่งแรงบันดาลใจของงานวิจัยเล่มนี้ ที่จะขยายผลลัพธ์จากการระบุเพียง 1 หรือ 2 ตำแหน่ง ไปสู่จากระบุ  $k$  ตำแหน่งใดๆ ซึ่งจะเป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.13 และ ทฤษฎีบท 2.1.14



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3 เมทริกซ์ในฐานะที่เป็น $\Gamma$ -กึ่งกรุป

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  บนเซตของจำนวนจริง โดยมีแนวทางดำเนินการซึ่งกล่าวง่าย ๆ ได้ว่า “กำหนด  $T \subseteq M_{mn}(R)$  เป้าหมายคือ หา  $\Gamma \subseteq M_{mn}(R)$  ทั้งหมด ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$ ” โดยเริ่มจากการขยายผลของทฤษฎีบท 2.1.13 นั่นคือ กำหนดให้  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ  $k$  ตำแหน่งมีค่าเป็น 0 โดยที่ทั้ง  $k$  ตำแหน่งนั้นอยู่ในแถวเดียวกัน

สำหรับ  $[a_{r\beta}], [c_{\alpha s}] \in M_{mn}(R)$  และ  $[b_{\beta\alpha}] \in M_{nm}(R)$  จะได้ว่า  $[a_{r\beta}][b_{\beta\alpha}][c_{\alpha s}] \in M_{mn}(R)$  ยิ่งไปกว่านั้น ตำแหน่งแถวที่  $i$  และ หลักที่  $j$  ของเมทริกซ์  $[a_{r\beta}][b_{\beta\alpha}][c_{\alpha s}]$  คือ  $\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j}$  สำหรับทุกๆ  $i \in N_m$  และ  $j \in N_n$

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับ  $k \in N_n$  ให้  $i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i\gamma} = 0 \text{ ใดๆ } \gamma \in N_n\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ ใดๆ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i\}$$

บทพิสูจน์ ให้  $M = \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ ใดๆ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i\}$

( $\rightarrow$ ) สมมติ  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  และให้  $[b_{pq}] \in M_{nm}(R)$  โดยที่  $p \neq j_1, j_2, \dots, j_k$  และ  $q \neq i$

ให้  $[a_{r\beta}], [c_{\alpha v}] \in T$  โดยที่  $a_{i\beta} = \delta_{p\beta}$  และ  $c_{\alpha j_1} = \delta_{\alpha q}$  สำหรับทุกๆ  $\beta \neq j_1, j_2, \dots, j_k$  และ  $\alpha \neq i$

จะได้ว่า  $[a_{r\beta}][b_{pq}][c_{\alpha v}] \in T$  ดังนั้น

$$0 = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_1} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq j_1, j_2, \dots, j_k}}^n \delta_{p\beta} b_{\beta\alpha} \delta_{\alpha q} = b_{pq}$$

( $\leftarrow$ ) สมมติว่า  $\Gamma \subseteq M$

ให้  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  และ  $[b_{pq}] \in \Gamma$  เราต้องแสดงว่าในตำแหน่งแถวที่  $i$  และ หลักที่  $t$  ของเมทริกซ์  $[a_{rs}][b_{pq}][c_{uv}]$  มีค่าเป็น 0 สำหรับทุกๆ  $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า  $c_{it} = 0$  ใดๆ  $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

ให้  $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

จะได้ว่า

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha t} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha t} + \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta i} c_{it} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \left( \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq j_1, j_2, \dots, j_k}}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha t} \right) = 0$$

บทตั้งต่อไปนี้มีส่วนช่วยให้เราขยายผลลัพธ์ได้มากยิ่งขึ้น โดยกำหนดสัญลักษณ์เพื่อความสะดวก ดังนี้  $A^{tr}$  แทนทรานสโพสของเมทริกซ์  $A$  และ  $S^{tr} = \{A^{tr} \mid A \in S\}$  โดยที่  $\emptyset \neq S \subseteq M_{mn}(R)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทตั้ง 3.2 [1] ให้  $T$  และ  $\Gamma$  เป็นเซตย่อยไม่ว่างของ  $M_{mn}(R)$  และ  $M_{nm}(R)$  ตามลำดับ จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $T^{tr}$  เป็น  $\Gamma^{tr}$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{nm}(R)$

โดยทฤษฎีบท 3.1 และ บทตั้ง 3.2 ทำให้ได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

บทแทรก 3.3 สำหรับ  $k \in N_m$  ให้  $j \in N_n$  และ  $i_1, i_2, \dots, i_k \in N_m$  โดยที่  $i_1, i_2, \dots, i_k$  ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i_\gamma j} = 0 \text{ ทุก } \gamma \in N_k\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

บทพิสูจน์ ให้  $M = \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i_1, i_2, \dots, i_k\}$

( $\rightarrow$ ) สมมติว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  โดยบทตั้ง 2.2 ทำให้ได้ว่า  $T^{tr}$  เป็น  $\Gamma^{tr}$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{nm}(R)$  จะเห็นว่า

$$T^{tr} = \{[a_{rs}] \in M_{nm}(R) \mid a_{i_\gamma j} = 0 \text{ ทุก } \gamma \in N_k\} \text{ และ}$$

$$M^{tr} = \{[b_{pq}] \in M_{mn}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq i_1, i_2, \dots, i_k \text{ และ } q \neq j\}$$

โดยทฤษฎีบท 3.1 ทำให้ได้ว่า  $\Gamma^{tr} \subseteq M^{tr}$  เพราะฉะนั้น  $\Gamma \subseteq M$

( $\leftarrow$ ) สมมติว่า  $\Gamma \subseteq M$  ดังนั้น  $\Gamma^{tr} \subseteq M^{tr}$  จึงได้ว่า  $T^{tr}$  เป็น  $\Gamma^{tr}$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{nm}(R)$  เพราะฉะนั้น  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.13 โดยการกำหนดให้  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ  $k$  ตำแหน่งในแนวแถวเดียวกัน มีค่าไม่เป็น 0

ทฤษฎีบท 3.4 สำหรับ  $k \in N_n$  ให้  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R \setminus \{0\}$ ,  $i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i j_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุก } \gamma \in N_k\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \left\{ [b_{xy}] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall t \in N_m \setminus \{i\}, \sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0 \text{ และ}$$

$$\forall x \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0 \right\}$$

บทพิสูจน์ ให้  $M = \left\{ [b_{xy}] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall t \in N_m \setminus \{i\}, \sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0 \text{ และ}$

$$\forall x \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0 \right\}$$

( $\rightarrow$ ) สมมติว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  และสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่ามี  $p \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  ที่ทำให้  $b_{pi} \neq 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{เลือก } [a_{r\beta}], [c_{\alpha\nu}] \in T \text{ ซึ่ง } a_{i\beta} = \begin{cases} \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i \sum_{t=1}^k \lambda_t b_{jt}}{\lambda_i b_{pi}} & , \text{ ถ้า } \beta = p \\ 0 & , \text{ ถ้า } \beta \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k, p\} \end{cases}$$

และ  $c_{\alpha j_i} = 0$  สำหรับทุกๆ  $\alpha \neq i$

$$\text{จะได้ว่า } \lambda_i = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_i}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_i} + \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta i} c_{ij_i}$$

$$= \sum_{t=1}^k a_{ij_t} b_{jt_t} c_{ij_t} + a_{ip} b_{pi} c_{ij_i}$$

$$= \left( \sum_{t=1}^k \lambda_t b_{jt_t} \right) \lambda_i + \left( \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i \sum_{t=1}^k \lambda_t b_{jt_t}}{\lambda_i b_{pi}} \right) b_{pi} \lambda_i$$

$$= \lambda_{i+1} \text{ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น  $b_{pi} = 0$  สำหรับทุกๆ  $p \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ  $[a_{r\beta}], [c_{\alpha\nu}] \in T$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_i} + \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta i} c_{ij_i} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_i} + \sum_{t=1}^k a_{ij_t} b_{jt_t} c_{ij_t} \\ &= \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_i} + \lambda_i \sum_{\gamma=1}^k a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i} \end{aligned}$$

ต่อไปสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี  $p \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  มี  $t \in N_m \setminus \{i\}$  ที่ทำให้  $b_{pt} \neq 0$

$$\text{ให้ } [a_{r\beta}], [c_{\alpha\nu}] \in T \text{ ซึ่ง } a_{i\beta} = \begin{cases} \frac{\lambda_{i+1} - \sum_{\gamma=1}^k a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma t} - \lambda_i \sum_{\gamma=1}^k a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma t}}{b_{pt}} & , \text{ ถ้า } \beta = p \\ 0 & , \text{ ถ้า } \beta \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k, p\} \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{และ } c_{\alpha j_i} = \begin{cases} 1, & \alpha = t \\ 0, & \alpha \in N_m \setminus \{i, t\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \lambda_i &= \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_i} + \lambda_i \sum_{\gamma=1}^k a_{i\gamma} b_{\gamma i} = \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta i} + \lambda_i \sum_{\gamma=1}^k a_{i\gamma} b_{\gamma i} \\ &= \sum_{\gamma=1}^k a_{i\gamma} b_{\gamma i} + a_{ip} b_{pi} + \lambda_i \sum_{\gamma=1}^k a_{i\gamma} b_{\gamma i} = \lambda_i + 1 \text{ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง} \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกๆ  $p \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  และทุกๆ  $t \in N_m \setminus \{i\}$  ทำให้  $b_{pt} = 0$

$$\text{นั่นคือ สำหรับแต่ละ } [a_{r\beta}], [c_{\alpha v}] \in T \text{ จะได้ว่า } \lambda_i = \sum_{\alpha}^m \sum_{\gamma}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma, \alpha} c_{\alpha i}$$

ในขั้นสุดท้ายเราสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี  $u \in N_m \setminus \{i\}$  ที่ทำให้  $\sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma, u} \neq 0$

$$\text{เลือก } [c_{\alpha v}] \in T \text{ ซึ่ง } c_{\alpha i} = \begin{cases} \frac{\lambda_i + 1 - \sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma i}}{\sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma u}} & \text{ถ้า } \alpha = u \\ 0 & \text{ถ้า } \alpha \in N_m \setminus \{i, u\} \end{cases}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lambda_i = \sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma i} c_{ii} + \sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma u} c_{iu} = \lambda_i + 1 \text{ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น ทุกๆ  $u \in N_m \setminus \{i\}$  ทำให้  $\sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma u} = 0$  ยิ่งไปกว่านั้น  $\sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma i} = 1$

สรุปได้ว่า  $\Gamma \subseteq M$

( $\leftarrow$ ) สมมติ  $\Gamma \subseteq M$  และ กำหนดให้  $[a_{r\beta}], [c_{\alpha v}] \in T$  และ  $[b_{\beta\alpha}] \in \Gamma$

ให้  $v \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

$$\text{จะได้ว่า } \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha v} = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\gamma=1}^k a_{i\gamma} b_{\gamma, \alpha} c_{\alpha v} = \sum_{\gamma=1}^k a_{i\gamma} b_{\gamma i} c_{iv} = \sum_{\gamma=1}^k \lambda_{\gamma} b_{\gamma i} c_{iv} = c_{iv} = \lambda_v$$

ส่วนที่เหลือต่อจากนี้เราจะศึกษาบน  $M_n(R)$  เซตของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $n \times n$  บนจำนวนจริง ที่นิยมนำมาศึกษาบ่อยๆ เช่น เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง และ เซตของเมทริกซ์ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็น 0

การพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปจะสะดวกขึ้น เมื่อเราทราบบทตั้งต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทตั้ง 3.5 [1] ให้  $i, p \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $i \neq p$  และ  $q \neq j$

ให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ และ } a_{pq} = 0\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_{nm}(R) \mid b_{jp}, b_{qi} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$

โดยใช้บทตั้ง 3.5 ทำให้เราได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.6 ให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_2(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_2\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_2(R)$  ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_2(R) \mid b_{12}, b_{21} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$$

ทฤษฎีบท 3.7 ให้  $n$  เป็นจำนวนนับ โดยที่  $n \geq 3$  และ  $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_n\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma = \{0\}$

บทพิสูจน์( $\rightarrow$ ) เราพิสูจน์โดยการพิสูจน์ข้อความแย้งกลับที่ โดยสมมติว่า  $\Gamma \neq \{0\}$  ดังนั้น จะมีเมทริกซ์  $[b_{xy}] \in \Gamma$  โดยที่  $b_{pq} \neq 0$  สำหรับบางจำนวนนับ  $p, q \in N_n$  เราจะแสดงว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$  โดยแสดงว่า  $TTT \not\subset T$  และแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี คือ  $p=q$  และ  $p \neq q$

กรณี 1  $p=q$

กรณีย่อย 1.1  $p=1$

นั่นคือ  $b_{11} \neq 0$

เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } j=1 \\ 0, & \text{ถ้า } j \neq 1 \end{cases}$  และ  $c_{im} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } i=1 \\ 0, & \text{ถ้า } i \neq 1 \end{cases}$

$$\text{จะเห็นว่า } \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{n\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha n} = \sum_{\alpha=1}^n a_{n1} b_{1\alpha} c_{\alpha n} = \sum_{\alpha=1}^n b_{1\alpha} c_{\alpha n} = b_{11} \neq 0$$

ดังนั้น  $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$  สรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

กรณีย่อย 1.2  $p \neq 1$

นั่นคือ  $b_{pp} \neq 0$  เมื่อ  $p \neq 1$

เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } j=p \\ 0, & \text{ถ้า } j \neq p \end{cases}$  และ  $c_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } i=p \\ 0, & \text{ถ้า } i \neq p \end{cases}$

$$\text{จะเห็นว่า } \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^n a_{ip} b_{p\alpha} c_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^n b_{p\alpha} c_{\alpha i} = b_{pp} \neq 0$$

ดังนั้น  $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$  สรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี 2  $p \neq q$

กรณีย่อย 2.1  $p=1$  หรือ  $q=1$

สมมติว่า  $p=1$  ดังนั้น  $q \neq 1$  และ  $b_{1q} \neq 0$

เราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้  $q \neq n$  และ  $q=n$

กรณีย่อย 2.1.1  $q \neq n$

เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } j=1 \\ 0, & \text{ถ้า } j \neq 1 \end{cases}$  และ  $c_{in} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } i=q \\ 0, & \text{ถ้า } i \neq q \end{cases}$

จะเห็นว่า  $\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{n\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha n} = \sum_{\alpha=1}^n a_{n1} b_{1\alpha} c_{\alpha n} = b_{1q} \neq 0$

ดังนั้น  $[a_{rs}], [b_{xy}], [c_{uv}] \notin T$  สรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.1.2  $q=n$

เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } j=1 \\ 0, & \text{ถ้า } j \neq 1 \end{cases}$  และ  $c_{in} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } i=n \\ 0, & \text{ถ้า } i \neq n \end{cases}$

จะเห็นว่า  $\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{n\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha n} = \sum_{\alpha=1}^n a_{n1} b_{1\alpha} c_{\alpha n} = b_{1q} \neq 0$

ดังนั้น  $[a_{rs}], [b_{xy}], [c_{uv}] \notin T$  สรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

ต่อไปสมมติว่า  $q=1$  ดังนั้น  $p \neq 1$  และ  $b_{p1} \neq 0$

เราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้  $p \neq n$  และ  $p=n$

กรณีย่อย 2.1.3  $p \neq n$

เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } j=p \\ 0, & \text{ถ้า } j \neq p \end{cases}$  และ  $c_{in} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } i=1 \\ 0, & \text{ถ้า } i \neq 1 \end{cases}$

จะเห็นว่า  $\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{n\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha n} = \sum_{\alpha=1}^n a_{np} b_{p\alpha} c_{\alpha n} = b_{p1} \neq 0$

ดังนั้น  $[a_{rs}], [b_{xy}], [c_{uv}] \notin T$  สรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.1.4  $p=n$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{2j} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } j=p \\ 0, & \text{ถ้า } j \neq p \end{cases}$  และ  $c_{i2} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } i=1 \\ 0, & \text{ถ้า } i \neq 1 \end{cases}$

จะเห็นว่า  $\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{2\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha 2} = \sum_{\alpha=1}^n a_{2p} b_{p\alpha} c_{\alpha 2} = b_{p1} \neq 0$

ดังนั้น  $[a_{rs}], [b_{xy}], [c_{uv}] \notin T$  สรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.2  $p \neq 1$  และ  $q \neq 1$

นั่นคือ  $b_{pq} \neq 0$  เมื่อ  $p \neq 1$  และ  $q \neq 1$

เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{1j} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } j=p \\ 0, & \text{ถ้า } j \neq p \end{cases}$  และ  $c_{i1} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า } i=q \\ 0, & \text{ถ้า } i \neq q \end{cases}$

จะเห็นว่า  $\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{1\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^n a_{1p} b_{p\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^n b_{p\alpha} c_{\alpha 1} = b_{pq} \neq 0$

ดังนั้น  $[a_{rs}], [b_{xy}], [c_{uv}] \notin T$  สรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

จากทุกกรณีสรุปได้ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

( $\leftarrow$ ) เห็นได้ชัดว่า ถ้า  $\Gamma = \{0\}$  แล้ว  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

ทฤษฎีบทสุดท้าย เราพิจารณาบนเซตของเมทริกซ์แนวเฉียง ซึ่งเซตของเมทริกซ์แนวเฉียงเป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของเมทริกซ์ ทำให้ได้ว่า เมื่อ  $T$  คือ เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง จะได้  $T\Gamma T \subseteq T$  สำหรับทุก  $\emptyset \neq \Gamma \subseteq T$  แสดงให้เห็นว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$  สำหรับทุก  $\emptyset \neq \Gamma \subseteq T$

ทฤษฎีบท 3.8 ให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ เมื่อ } i \neq j\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_n(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq T$

บทพิสูจน์ ( $\rightarrow$ ) สมมติว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$  และให้  $[b_{xy}] \in \Gamma$

กำหนดให้  $p, q \in N_n$  โดยที่  $p \neq q$  และ เลือก  $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$  โดยที่  $a_{pp} = 1$  และ  $c_{qq} = 1$

จะได้ว่า  $0 = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{p\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha q} = \sum_{\alpha=1}^n a_{pp} b_{p\alpha} c_{\alpha q} = a_{pp} b_{pq} c_{qq} = b_{pq}$  ดังนั้น  $[b_{xy}] \in T$  สรุปได้ว่า  $\Gamma \subseteq T$

( $\leftarrow$ ) เห็นได้ชัดว่า ถ้า  $\Gamma \subseteq T$  แล้ว  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_n(R)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทความวิจัยชิ้นนี้ได้สร้างทฤษฎีบทที่เป็นการวางนัยทั่วไปกว่าเดิม นั่นคือ ทฤษฎีบท 3.1 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.13 และ ทฤษฎีบท 3.4 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.14 นอกจากนี้ เรายังศึกษารูปแบบของ เซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  เมื่อ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 (บทแทรก 3.6 และ ทฤษฎีบท 3.7) และ เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง (ทฤษฎีบท 3.8)

ผลจากงานวิจัยข้างต้นทำให้ได้ตัวอย่างของเซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อย ของ  $M_{mn}(R)$  เมื่อ  $T$  เป็นเซตย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ตามกำหนด ส่งผลให้ได้รับความสะดวกในการขยายงานวิจัยในอนาคต เช่น การศึกษารูปแบบของ เซตย่อย  $\Gamma$  ของ  $M_{nm}(R)$  ซึ่ง  $T$  เป็นไอดีลของ  $M_{mn}(R)$  เป็นต้น

ขอบเขตงานวิจัยของเรา กล่าวอย่างง่ายได้ว่า “กำหนด  $T \subseteq M_{mn}(R)$  จากนั้นพยายามหา  $\Gamma \subseteq M_{mn}(R)$  ทั้งหมด ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$ ” เราแยกการกำหนดเซต  $T$  ตามผลงานวิจัยออกเป็น 2 ส่วน ตามนี้

ส่วนที่หนึ่ง ตำแหน่งที่กำหนดนั้นมีค่าเป็น 0 เราสรุปรูปแบบเซต  $T$  ได้ดังนี้

1. ให้  $i \in N_m, j \in N_n$  และ  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.10)
2. ให้  $i \in N_m, j, t \in N_n$  โดยที่  $j \neq t$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = a_{it} = 0\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่  $j$  และหลักที่  $t$  ของแถวที่  $i$  มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.12)
3. สำหรับ  $k \in N_n$  ให้  $i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน  
กำหนดให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = 0 \text{ ใดๆ } \gamma \in N_k\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ของแถวที่  $i$  มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 3.1)
4. ให้  $i, p \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $i \neq p$  และ  $q \neq j$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ และ } a_{pq} = 0\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าเป็น 0 และกำหนดตำแหน่งแถวที่  $p$  และหลักที่  $q$  มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 3.5)
5. เซตของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ซึ่งทุกสมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 สำหรับกรณีนี้เราแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้ 5.1  $n = 2$  (บทแทรก 3.6) และ 5.2  $n \geq 3$  (บทแทรก 3.7)

ส่วนที่สอง ตำแหน่งที่กำหนดนั้นมีค่าไม่เป็น 0 เราสรุปรูปแบบเซต  $T$  ได้ดังนี้

1. ให้  $\alpha \in R \setminus \{0\}, i \in N_m$  และ  $j \in N_n$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \alpha\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.11)

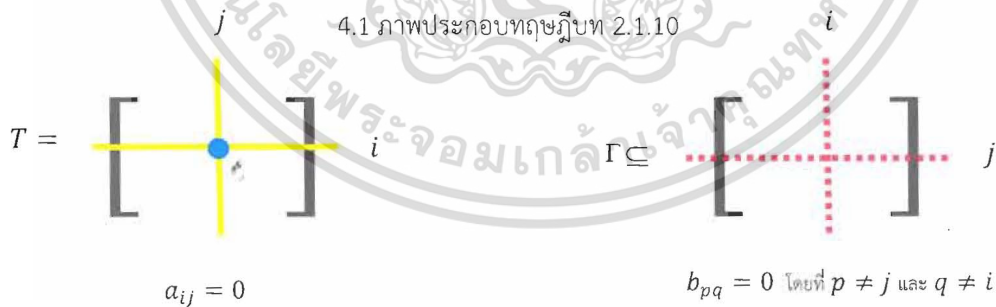
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ให้  $\lambda, \mu \in R \setminus \{0\}$ ,  $i \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $q \neq j$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda \text{ และ } a_{iq} = \mu\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่  $j$  และหลักที่  $q$  ของแถวที่  $i$  มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.14)
3. สำหรับ  $k \in N_n$  ให้  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R \setminus \{0\}$ ,  $i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน  
กำหนดให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุก } \gamma \in N_k\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ของแถวที่  $i$  มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 3.4)
4. ให้  $\lambda, \mu \in R \setminus \{0\}$ ,  $i, p \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $p \neq i$  และ  $q \neq j$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda \text{ และ } a_{pq} = \mu\}$   
นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าไม่เป็น 0 และกำหนดตำแหน่งแถวที่  $p$  และหลักที่  $q$  มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.13)

ลำดับถัดไปเราสรุปงานวิจัยโดยแบ่งตามผลงานวิจัยพร้อมทั้งนำเสนอตัวอย่างประกอบกับทฤษฎีบทที่เป็นแนวคิดสำคัญนำไปสู่งานวิจัย

#### 4.1 ตำแหน่งที่กำหนดมีค่าเป็น 0

เราเริ่มด้วยการพิจารณาเซตของเมทริกซ์ซึ่งกำหนดเพียงตำแหน่งเดียว โดยผลจากทฤษฎีบท 2.1.10 อธิบายได้ดังนี้ ให้  $i \in N_m$ ,  $j \in N_n$  และ  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0\}$  นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าเป็น 0 ผลจากทฤษฎีบท 2.1.10 ได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i\}$



ตัวอย่าง 4.1.1 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{32}(R) \mid a_{21} = 0\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \end{bmatrix} \mid b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{22} \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b_{11}, b_{12}, b_{13} \in R \right\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการทำงานวิจัยที่มหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรเวศน์บุรีรัมย์ อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \end{bmatrix} \mid b_{12}, b_{22} \in R \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ [b_{pq}] \in M_{23}(R) \mid b_{21} \neq 0 \right\}$$

$$\Gamma_5 = \left\{ [b_{pq}] \in M_{23}(R) \mid b_{23} \neq 0 \right\}$$

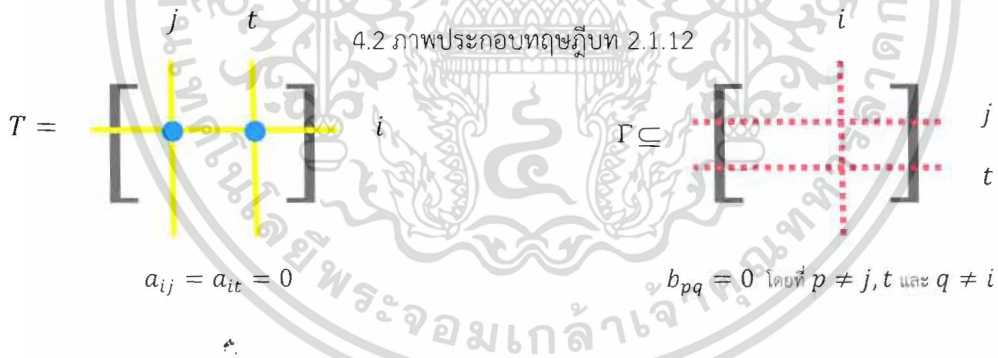
โดยทฤษฎีบท 2.1.10 ทำให้ได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{32}(R)$  และ  $T$  เป็น  $\Gamma_2$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{32}(R)$  และ  $T$  เป็น  $\Gamma_3$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{32}(R)$  แต่  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_4$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{32}(R)$  เพราะว่า  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_4$  และ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T \text{ ในทำนองเดียวกัน } T \text{ ไม่เป็น } \Gamma_4\text{-กึ่งกรุปย่อยของ } M_{32}(R) \text{ เพราะว่า}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma_4 \text{ และ } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$$

ลำดับถัดไป เราพิจารณาเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่  $j$  และหลักที่  $t$  ของแถวที่  $i$  มีค่าเป็น 0 ทฤษฎีบท 2.1.12 อธิบายไว้ดังนี้

ให้  $i \in N_m, j, t \in N_n$  โดยที่  $j \neq t$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = a_{it} = 0\}$  นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่  $j$  และหลักที่  $t$  ของแถวที่  $i$  มีค่าเป็น 0 เราได้ผลจากทฤษฎีบท 2.1.12 ดังนี้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{mn}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j, t \text{ และ } q \neq i\}$



ตัวอย่าง 4.1.2 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{32}(R) \mid a_{21} = a_{22} = 0\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.12 ทำให้ได้ว่า ทุกๆ เซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $M_{32}(R)$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{32}(R)$

ตัวอย่าง 4.1.3 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{23}(R) \mid a_{21} = a_{23} = 0\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \mid b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{31}, b_{32} \in R \right\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Gamma_2 = \left\{ [b_{pq}] \in M_{32}(R) \mid b_{21} \neq 0 \right\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.12 ทำให้ได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{23}(R)$  แต่ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_2$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{32}(R)$

เพราะว่า  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$  และ  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

ผลจากทฤษฎีบทต่อไปเป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.12 โดยการกำหนดให้  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนด  $k$  หลักของแถวที่  $i$  มีค่าเป็น 0 ทฤษฎีบท 3.1 สรุปลงได้ดังนี้

สำหรับ  $k \in N_n$  ให้  $i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน และกำหนดให้  $T = \{ [a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = 0 \text{ ทุก } \gamma \in N_k \}$  ทฤษฎีบท 3.1 สรุปลงว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \{ [b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i \}$$



ตัวอย่าง 4.1.4 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{ [a_{rs}] \in M_{44}(R) \mid a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0 \}$$

$$\Gamma_1 = \{ [b_{pq}] \in M_{44}(R) \mid b_{21} = b_{23} = b_{24} = 0 \}$$

$$\Gamma_2 = \{ [b_{pq}] \in M_{44}(R) \mid b_{21} \neq 0 \}$$

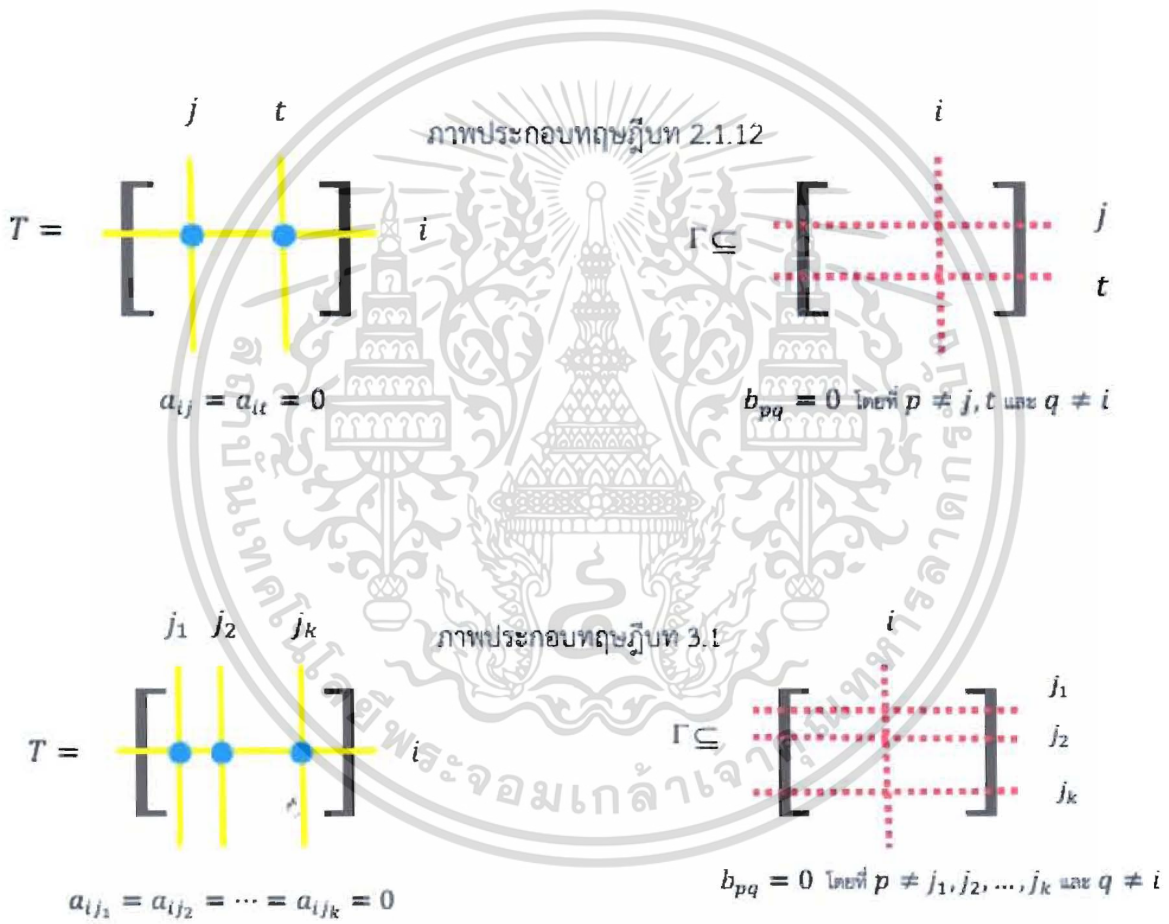
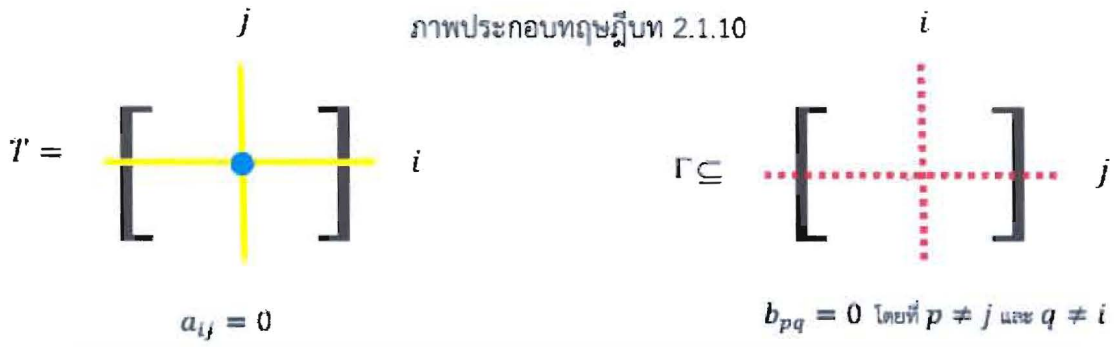
โดยทฤษฎีบท 3.1 ทำให้ได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{44}(R)$  แต่ว่า  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_2$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{32}(R)$

เพราะว่า  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$  และ  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

เราเห็นพัฒนาการของทฤษฎีบทเป็นขั้นตอน ซึ่งจะเห็นว่าทฤษฎีบท 2.1.10 เรากำหนดเพียงตำแหน่งเดียวมีค่าเป็น 0 ต่อมาทฤษฎีบท 2.1.12 เรากำหนดสองตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 จนกระทั่งทฤษฎีบท 3.1 เป็นการวางนัยทั่วไปของทั้ง ทฤษฎีบท 2.1.10 และทฤษฎีบท 2.1.12 นั่นคือทฤษฎีบท 3.1 เรากำหนด  $k$  หลักของแถวที่  $i$  มีค่าเป็น 0 เราสรุปด้วยรูปภาพดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4 ภาพรวมสรุปทฤษฎี 2.1.10, 2.1.12 และ 3.1

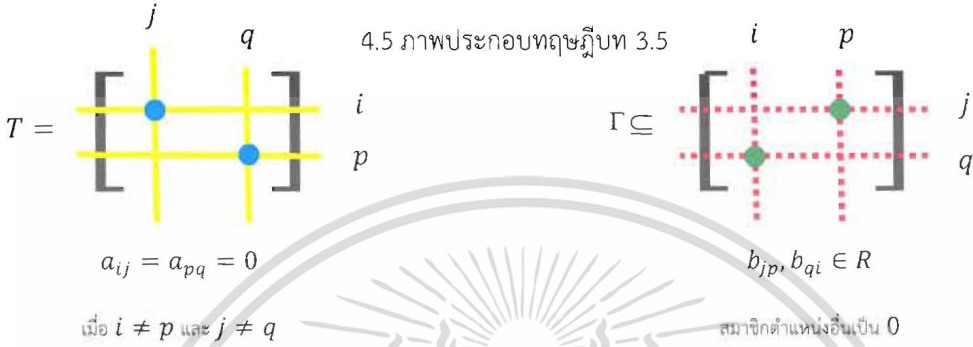


จากรูปเราจะเห็นแนวโน้มว่า เมื่อ  $T$  เป็นเซตที่กำหนดตำแหน่งที่เป็น 0 มากขึ้น เราพบว่า ในแนวแถวของเมทริกซ์ในเซต  $\Gamma$  มีโอกาสที่จะไม่เป็น 0 มากขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นต่อไปเราขยายผลลัพธ์จากทฤษฎีบท 2.1.10 โดยการกำหนดตำแหน่งที่เป็น 0 เพิ่มเป็น 2 ตำแหน่ง โดยที่ทั้ง 2 ตำแหน่งนั้นไม่ได้อยู่ในแถวเดียวกัน และไม่ได้อยู่ในหลักเดียวกัน

ให้  $i, p \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $i \neq p$  และ  $j \neq q$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ และ } a_{pq} = 0\}$  นั่นคือ  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  มีค่าเป็น 0 และกำหนดตำแหน่งแถวที่  $p$  และหลักที่  $q$  มีค่าเป็น 0 เราทราบจากทฤษฎีบท 3.5 ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_{nm}(R) \mid b_{jp}, b_{qi} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$



ตัวอย่าง 4.1.5 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{35}(R) \mid a_{14} = a_{32} = 0\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$$

โดยทฤษฎีบท 3.5 ทำให้ได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{35}(R)$  แต่  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_2$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{35}(R)$

เพราะว่า  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$  และ  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลำดับต่อไปเราพิจารณาเซตของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ซึ่งทุกสมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 สำหรับกรณีที่  $n = 2$  เราได้ผลลัพธ์โดยตรงจากทฤษฎีบท 3.5 ดังนี้

ให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_2(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุก } i \in N_2\}$  บทแทรก 3.6 พิสูจน์ได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_2(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_2(R) \mid b_{12}, b_{21} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$

#### 4.6 ภาพประกอบบทแทรก 3.6

$$T = \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma \subseteq \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับกรณีที่  $n \geq 3$  บทแทรก 3.7 อธิบายได้ดังนี้

ให้  $n$  เป็นจำนวนนับ โดยที่  $n \geq 3$  และ  $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุก } i \in N_n\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_n(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $\Gamma = \{0\}$

#### 4.7 ภาพประกอบบทแทรก 3.7

$$T = \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 4.1.6 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_3(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุก } i \in N_3\}$$

$$\Gamma_1 = \{[b_{pq}] \in M_3(R) \mid b_{11} \neq 0\}$$

$$\text{จะเห็นว่า } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_1 \text{ และ } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$$

ดังนั้น  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_3(R)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ตัวอย่าง 4.2.2 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{43}(R) \mid a_{12} = 1 \text{ และ } a_{13} = -1\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+z & w & u & v \\ z & w & u & v \end{bmatrix} \mid u, v, w, z \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \{[b_{pq}] \in M_{34}(R) \mid b_{21} = b_{31}\}$$

$$\Gamma_3 = \{[b_{pq}] \in M_{34}(R) \mid b_{11} \neq 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{[b_{pq}] \in M_{34}(R) \mid b_{23} \neq b_{33}\}$$

ผลจากทฤษฎีบท 2.1.14 ทำให้เราได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{43}(R)$  แต่  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_2$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{43}(R)$

เพราะว่า  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$  และ  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

เช่นเดียวกัน  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_3$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{43}(R)$  เพราะว่าง  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_3$  และ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T \text{ และจะเห็นว่า } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_4 \text{ แต่}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$$

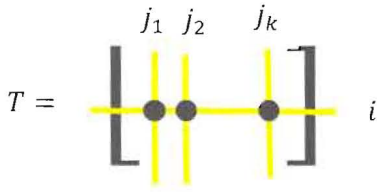
ผลจากทฤษฎีบท 3.4 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.14 โดยการกำหนดให้  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนด  $k$  หลักของแถวที่  $i$  มีค่าไม่เป็น 0 สรุปไว้ได้ดังนี้

สำหรับ  $k \in N_n$  ให้  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R \setminus \{0\}$ ,  $i \in N_m$  และ  $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$  โดยที่  $j_1, j_2, \dots, j_k$  ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}^*(R) \mid a_{ij_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุก } \gamma \in N_k\}$  จะได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ

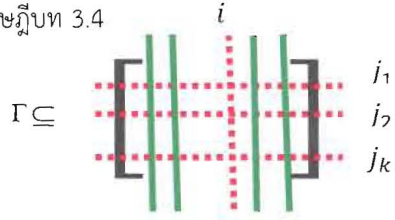
$$\Gamma \subseteq \left\{ [b_{xy}] \in M_{mn}(R) \mid 1 = \sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall i \in N_m \setminus \{i\}, \sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} = 0 \text{ และ } \forall x \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0 \right\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



$$a_{ij_\gamma} \neq 0 \quad \forall \gamma \in N_k$$

4.10 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.4



$$\sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} = 1$$

$$\forall t \in N_m \setminus \{i\}, \sum_{\gamma=1}^k \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0$$

$$\forall x \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0$$

ตัวอย่าง 4.2.3 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{44}(R) \mid a_{11} = a_{12} = 1 \text{ และ } a_{13} = -1\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ a+u-1 & b+v & c+w & d+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ a+u & b+v & c+w & d+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

ทฤษฎีบท 3.4 ทำให้เราได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{44}(R)$  แต่  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_2$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{44}(R)$  เพราะว่า  $[0]_{4 \times 4} \in \Gamma_2$  และ  $[0]_{4 \times 4} \notin T$

ตัวอย่าง 4.2.4 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{44}(R) \mid a_{11} = 2, a_{12} = 3 \text{ และ } a_{13} = \frac{1}{4}\}$$

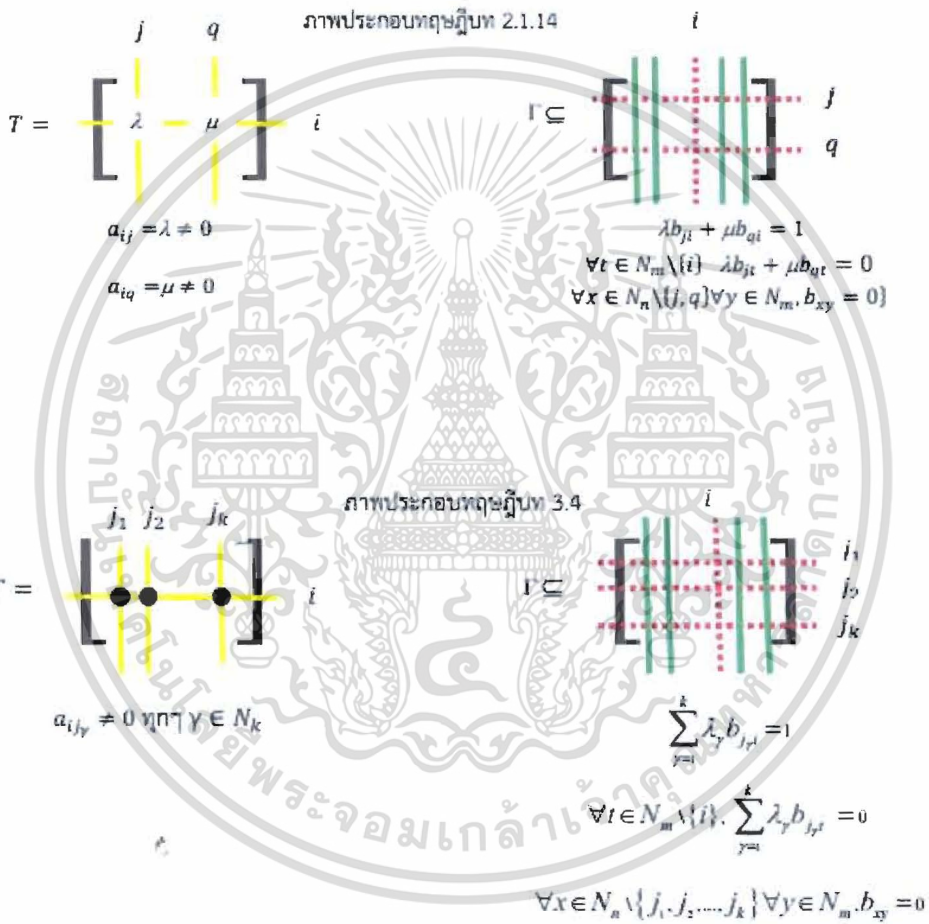
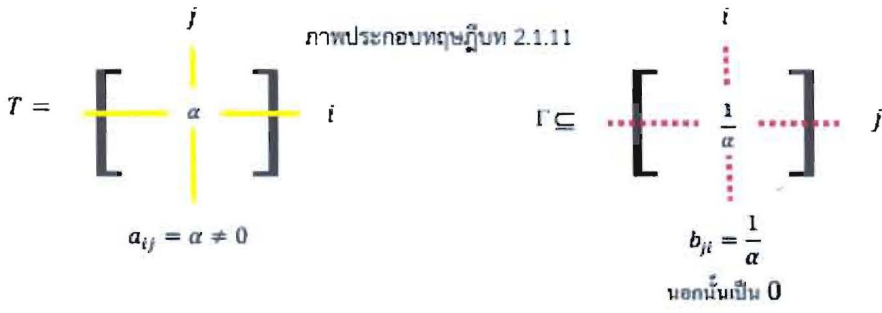
$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ 4(1-2a-3u) & 4(-2b-3v) & 4(-2c-3w) & 4(-2d-3z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ 1-2a-3u & -2b-3v & -2c-3w & -2d-3z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

ทฤษฎีบท 3.4 ทำให้เราได้ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma_1$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{44}(R)$  แต่  $T$  ไม่เป็น  $\Gamma_2$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{44}(R)$  เพราะว่า  $[0]_{4 \times 4} \in \Gamma_2$  และ  $[0]_{4 \times 4} \notin T$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.11 ภาพรวมสรุปทฤษฎี 2.1.11, 2.1.14 และ 3.4



จากรูปทำให้เราสังเกตเห็นแนวโน้มได้ว่า ถ้า  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ซึ่งกำหนดตำแหน่งที่ไม่เป็น 0 มากขึ้น จะทำให้แถวเมทริกซ์ใน เซต  $\Gamma$  เป็นแถว 0 น้อยลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สุดท้ายเราพิจารณาเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ซึ่งกำหนดตำแหน่งที่ไม่เป็น 0 เป็นเป็น 2 ตำแหน่ง โดยที่ทั้ง 2 ตำแหน่งนั้นไม่ได้อยู่ในแถวเดียวกัน และไม่ได้อยู่ในหลักเดียวกัน

ให้  $\lambda, \mu \in R \setminus \{0\}$ ,  $i, p \in N_m$  และ  $j, q \in N_n$  โดยที่  $p \neq i$  และ  $q \neq j$  และให้  $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda$  และ  $a_{pq} = \mu\}$  ผลของทฤษฎีบท 2.1.13 กล่าวว่าไม่มีเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $M_{mn}(R)$  ที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$

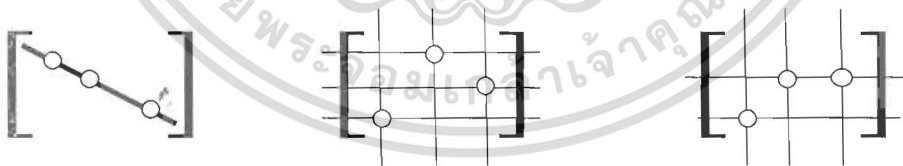
### 4.3 ข้อเสนอแนะ

จากการสรุปผลลัพธ์งานวิจัย 4.1 และ 4.2 ทำให้เราได้เห็นแนวโน้มงานวิจัยในอนาคต ดังนี้

#### 4.3.1 ตำแหน่งที่กำหนดมีค่าเป็น 0 จำนวน 3 ตำแหน่ง

รูปแบบของทฤษฎีบท 2.1.10 ทฤษฎีบท 2.1.12 และ ทฤษฎีบท 3.1 คือการกำหนดเซต  $T$  ซึ่งเป็นเซตของเมทริกซ์ที่กำหนดหนึ่งตำแหน่งมีค่าเป็น 0 สองตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 และ  $k$  ตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 ตามลำดับ นำมาซึ่งข้อสงสัยที่ว่า ถ้า  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 แล้ว เซต  $\Gamma$  ควรเป็นเช่นไร เพื่อให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  เราแบ่งกรณีที่น่าสนใจดังนี้

- 1) ทั้งสามตำแหน่งอยู่ในแนวแถว หรือหลักเดียวกัน เราสามารถใช้ผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 3.1 เพื่อหาเซต  $\Gamma$  ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยได้
- 2) ถ้า  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $n \times n$  ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 และทั้งสามตำแหน่งอยู่บนแนวเส้นทแยงมุม เราใช้ผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 3.7 สรุปได้ทันทีว่ามีเพียง  $\Gamma = \{0\}$  เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$
- 3) ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2 ถ้า  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 และทั้งสามตำแหน่งอยู่บนแนวเส้นทแยงมุม แล้วลักษณะของเซต  $\Gamma$  ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยควรเป็นเช่นไร
- 4) ถ้า  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 และทั้งสามตำแหน่งนั้นอยู่ต่างแถวและต่างหลักกัน แล้วลักษณะของเซต  $\Gamma$  ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยควรเป็นเช่นไร
- 5) ถ้า  $T$  เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 โดยมีเพียงสองตำแหน่งอยู่ในแนวแถวเดียวกัน แล้วลักษณะของเซต  $\Gamma$  ทำให้  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยควรเป็นเช่นไร



#### 4.3.2 การดำเนินการบนเซตของเมทริกซ์

ให้  $T$  และ  $\Gamma$  เป็นเซตย่อยไม่ว่างของ  $M_{mn}(R)$  และ  $M_{nm}(R)$  ตามลำดับ หากเราพิจารณาการสลับเปลี่ยน (ทรานสโพส) คือการดำเนินการบนเซต  $T$  และ  $\Gamma$  เราเห็นจากบทตั้ง 3.2 ว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $T^{tr}$  เป็น  $\Gamma^{tr}$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{nm}(R)$  นำไปสู่ข้อสงสัยที่ว่าหากเราดำเนินการแบบอื่นบนเซต  $T$  ผลลัพธ์ที่ได้จะคล้ายกับบทตั้ง 3.2 หรือไม่ เช่น ให้  $E$  เป็นเมทริกซ์มูลฐาน และสำหรับเซตของเมทริกซ์ใดๆ  $P$  กำหนดเซต  $EP = \{EA \mid A \in P\}$

ข้อความคาดการณ์ 1  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $ET$  เป็น  $E\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{nm}(R)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิพนธ์ให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 4.3.3 การแปลงเชิงเส้น

ให้  $L: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$  โดยที่  $L(A) = A^t$  จะได้ว่า  $L$  เป็นการแปลงเชิงเส้น เรากำหนดสัญลักษณ์ ดังต่อไปนี้ สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  $X$  ของ  $M_n(R)$  กำหนด  $L(X) = \{L(A) \mid A \in X\}$  ดังนั้นบทตั้ง 3.2 กล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_n(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $L(T)$  เป็น  $L(\Gamma)$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_n(R)$  นำมาสู่ปัญหาที่ว่า ถ้า  $L: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$  เป็นการแปลงเชิงเส้นใดๆ แล้ว เราจะได้ผลลัพธ์ที่คล้ายกับบทตั้ง 3.2 หรือไม่

ข้อความคาดการณ์ 2 สำหรับการแปลงเชิงเส้น  $L: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$  ใดๆ  $T$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_n(R)$  ก็ต่อเมื่อ  $L(T)$  เป็น  $L(\Gamma)$  กึ่งกรุปย่อยของ  $M_n(R)$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

เผยแพร่ผลงานวิจัยในวารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 23 ฉบับที่ 2 ประจำเดือนกรกฎาคม – ธันวาคม 2557



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Khumprapussorn, T., 2006. Some  $\Gamma$ -semigroup. M.Sc. Thesis, Chulalongkorn university.
- [2] Saha, N.K. and Sen, M.K., 1986. On  $\Gamma$ -semigroup-I. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 78, 180-186.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัติผู้เขียน

- 1) ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายรัชชัย คำประภัสสร  
ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Thawatchai khumprapussorn
- 2) เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3101203639019
- 3) ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
- 4) หน่วยงานและสถานที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์  
**หน่วยงาน** สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520  
ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120  
E-mail khthawat@kmitl.ac.th และ khthawat@hotmail.com  
โทร 0898191886
- 5) ประวัติการศึกษา  
วท.ด (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555  
วท.ม (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550  
วท.บ (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2547
- 6) ประสบการณ์งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ/หรือที่ผ่านมา  
กองทุนวิจัยสถาบัน ประเภททุนพัฒนานักวิจัยใหม่  
เรื่องการวางนัยทั่วไปของ (R,S)-มอดุลย้อยเฉพาะชนิดต่างๆ  
สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย  
ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี2557  
เรื่องเมทริกซ์ในฐานะที่เป็นกึ่งกรุปแกมมา  
สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้