กระบวนการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์

PROCESS OF COMPUTING THE DETERMINANT OF SOME MATRIX

ปิยะนุช ปิ่นแก้ว
พัชราวรรณ โฝงสูงเนิน
วชิรา นาคะเต

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2557

กระบวนการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์
PROCESS OF COMPUTING THE DETERMINANT OF SOME MATRIX

ปิยะนุช ปิ่นแก้ว
พัชราวรรณ โฝงสูงเนิน
วชิรา นาคะเต

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2557

PROCESS OF COMPUTING THE DETERMINANT OF SOME MATRIX

PIYANUT PINKAEW
PATCHARAWAN FONGSUNGNURN
WACHIRA NAKATE

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2014

หัวข้อปัญหาพิเศษ	กระบวนการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ Process of Computing The Determinant of Some Matrix
ชื่อนักศึกษา	นางสาวปิยะนุช ปิ่นแก้ว 54050041 นางสาวพัชราวรรณ โฝงสูงเนิน 54050048 นางสาววชิรา นาคะเต 54050067
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ ประธานกรรมการ	
ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร กรรมการ	
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	กระบวนการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์
	Process of Computing The Determinant of Some Matrix
ชื่อนักศึกษา	นางสาวปิยะนุช ปิ่นแก้ว 54050041
	นางสาวพัชราวรรณ โฝงสูงเนิน 54050048
	นางสาววชิรา นาคะเต 54050067
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาและรวบรวมวิธีการใหม่ๆ ในการคำนวณหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ขนาดต่าง ๆ ซึ่งได้แก่ วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3×3 วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 โดยลดรูปขนาดของตัวกำหนดตามวิธีการของ Dodgson วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n \geq 5$ โดยลดขนาดลงไป 4 อันดับ รวมทั้งศึกษาการนำวิธีการเหล่านี้มาประยุกต์ใช้คำนวณหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่อย่างเหมาะสม นอกจากนี้ยังมีวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรโดยใช้สูตรของ Sherman-Morrison

คำสำคัญ : ตัวกำหนด เมทริกซ์หัวลูกศร สูตรของ Sherman-Morrison

Title	Process of Computing The Determinant of Some Matrix
Students	Miss. Piyanut Pinkaew 54050041
	Miss. Patcharawan Fonsungnurn 54050048
	Miss. Wachira Nakate 54050067
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Academic Year	2014
Advisor	Dr. Sukrawan Mavecha

ABSTRACT

This special problem was to study and collect new methods for calculation the determinant of some matrix e.g. 3×3 matrix, 4×4 matrix by Dodgson's process and $n \times n$ matrix which $n \geq 5$ matrix by reducing their sizes by four. Also we applied above methods to find the determinant of some matrix. Furthermore there were the method to find the determinant of the arrowhead matrix by using Sherman-Morrison formula.

Keywords : Determinant, Arrowhead matrix, Sherman-Morrison formula

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่อง กระบวนการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์นี้ คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษาและความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้และช่วยตรวจสอบแก้ไขงานให้เกิดความถูกต้องครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ และ ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายที่สุด ทางคณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่านที่ท่านช่วยประสิทธิ์ประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำอันเกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมาตลอดจนขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ของทางสาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้ จนเป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี

นางสาวปิยะนุช ปิ่นแก้ว
นางสาวพัชราวรรณ โฝงสูงเนิน
นางสาววชิรา นาคะเต

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

การหาตัวกำหนดของเมทริกซ์เป็นสิ่งที่มีความจำเป็นมากในการศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน ดังนั้นมีนักวิจัยทางคณิตศาสตร์มากมายพยายามค้นคว้าหาวิธีการใหม่ๆ ในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่มีขนาดต่างๆ ในปี ค.ศ. 1866 C.L. Dodgson [1] ได้คิดค้นวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ โดยลดตัวกำหนดจากมิติ $n \times n$ เป็นมิติ $(n-1) \times (n-1)$ แต่วิธีนี้ใช้ได้สำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกแต่ละตำแหน่งห้ามเป็นศูนย์ ยกเว้นสมาชิกตำแหน่ง 11 และตำแหน่ง nn ต่อมาในปี ค.ศ. 2009 Dardan tlajrizaj [2] ได้คิดค้นวิธีการใหม่ในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ข้อดีของวิธีนี้เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่นที่รู้จักคือคำนวณได้รวดเร็ว ดังนั้นจึงสามารถสร้างรูปแบบที่ง่ายในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ได้ และในปีเดียวกัน Qefsere Gjonbalaj และ Armend Salihu [3] ได้คิดค้นวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยลดขนาดของเมทริกซ์ไป 4 อันดับ แต่วิธีนี้ใช้ได้สำหรับเมทริกซ์ตั้งแต่ขนาด 5×5 ขึ้นไป นอกจากนี้ Qefsere Gjonbalaj และ Armend Salihu [4] ได้คิดค้นวิธีใหม่ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 โดยวิธีการของ sarrus นั่นคือ คำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3×3 มาประยุกต์ใช้กับวิธีการนี้ ซึ่งแต่ละวิธีจะมีข้อดีที่แตกต่างกันแล้วแต่กระบวนการที่เราจะนำไปใช้ว่าเมทริกซ์ที่เราต้องการหาตัวกำหนดนั้นมีขนาดเท่าไร

โครงงานปัญหาพิเศษเรื่องนี้จะทำการรวบรวมเกี่ยวกับวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ เพื่อในอนาคตจะนำวิธีการต่าง ๆ นี้มาประยุกต์ใช้ร่วมกันในการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ซึ่งยากต่อการหาตัวกำหนดโดยใช้วิธีใดวิธีหนึ่งเท่านั้น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ต้องการศึกษาวิธีการในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆเพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ เนื่องจากการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่นั้นทำได้ยากและซับซ้อน จึงต้องอาศัยวิธีการใหม่ๆเหล่านี้เข้าช่วย ซึ่งแต่ละวิธีจะมีข้อดีที่แตกต่างกัน เราต้องการหาว่าวิธีใดเหมาะสมกับเมทริกซ์ขนาดต่างๆนั้น

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

จะพิจารณาวิธีการในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ โดยหลีกเลี่ยงวิธีการกระจายลาปลาซ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้เรียนรู้วิธีการในการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ

1.4.2 สามารถนำการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ขนาดต่างๆมาประยุกต์ใช้ในการหาตัวกำหนดของบางเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ได้

1.4.3 สามารถหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ ได้ง่ายขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาความรู้ขั้นพื้นฐาน

1.5.2 ศึกษาวิธีและรวบรวมการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ

1.5.3 นำวิธีการต่างๆมาประยุกต์ใช้กับบางเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่

1.5.4 ทำการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินงานตามแผนงาน 10 เดือน ได้แสดงไว้ในตาราง

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2557					ปี 2558				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
ศึกษาข้อมูล และกำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ										
ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีของเมทริกซ์และการดำเนินการมูลฐาน										
ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีของตัวกำหนด										
ศึกษาค้นคว้าเอกสารวิจัยเกี่ยวกับวิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ										
ค้นคว้าข้อมูลเพิ่มเติมเพื่อนำมาประกอบการทำปัญหาพิเศษ										
ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้า										
ทำการศึกษา วิเคราะห์ กระบวนการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่มีขนาดต่างๆ										
ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาทั้งหมด										
จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งจัดทำแบบการนำเสนอ										
ซ้อมนำเสนอปัญหาพิเศษ										
นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

2.1 เมทริกซ์ (Matrix)

นิยาม 2.1 เมทริกซ์เป็นการเขียนจำนวนเรียงแถวลำดับในรูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากภายในเครื่องหมาย $\left[\quad\right]$ และจำนวนในเมทริกซ์เรียกว่า สมาชิก (entries) ของเมทริกซ์

ปกติเขียนเมทริกซ์ด้วยอักษรตัวใหญ่ เช่น $A, B, C, \ldots$ ดังตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าเมทริกซ์มีหลายรูปแบบขึ้นอยู่กับจำนวนแนวนอนและแนวตั้ง เช่น A มี 2 แนวนอน 3 แนวตั้ง เมทริกซ์ใดๆ ที่มี m แนวนอน n แนวตั้ง จะเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด (size) $m \times n$ จากตัวอย่างเมทริกซ์ A, B และ C ข้างต้นมีขนาด 2×3, 2×2 และ 3×1 ตามลำดับ เมทริกซ์ที่มีขนาด $1 \times n$ เรียกว่า เมทริกซ์แนวนอนและเมทริกซ์ขนาด $m \times 1$ เรียกว่า เมทริกซ์แนวตั้ง

สมาชิกแต่ละตัวของเมทริกซ์สามารถระบุตำแหน่งของเมทริกซ์คือสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) คือ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแนวนอนที่ i และแนวตั้งที่ j ดังตัวอย่าง

สมาชิกตำแหน่งที่ $(1,2)$ ของ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ คือ 2

สมาชิกตำแหน่งที่ $(2,3)$ ของ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ คือ 5

เมทริกซ์ A มีขนาด $m \times n$ เขียนรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

สมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของ A เขียนแทนด้วย a_{ij} และแทนเมทริกซ์ A ด้วย $A = \left[a_{ij}\right]$ ซึ่ง a_{ij} เป็นสมาชิกที่อยู่ในแถวแนวนอนที่ i และแนวตั้งที่ j ของ A เช่น

เมทริกซ์ขนาด 3×2 แทนด้วย $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

ส่วนเมทริกซ์ A ซึ่งมีขนาด $n \times n$ เรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัส สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = \left[a_{ij}\right]$ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ จะอยู่บนแนวทแยงหลัก (main diagonal) ของ A ซึ่งแนวทแยงหลักของ A ตำแหน่งจากมุมซ้ายบนไปยังมุมขวาล่างของ A ดังตัวอย่าง (กรณี 3×3)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

การกล่าวถึงตำแหน่งของสมาชิกและขนาดของเมทริกซ์นั้น ปกติจะกล่าวถึงแนวนอนก่อนแนวตั้ง ตัวอย่าง เช่น ถ้ากล่าวถึง

เมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ หมายถึง เมทริกซ์มี m แนวนอน n แนวตั้ง

สมาชิกที่ (i, j) หมายถึง สมาชิกนั้นอยู่ในตำแหน่งแนวนอนที่ i และในแนวตั้งที่ j

ถ้าสมาชิกนั้นแทนด้วย a_{ij} แล้วหมายถึง สมาชิกในแนวนอนที่ i และในแนวตั้งที่ j

เมทริกซ์ A และ B เท่ากัน (เขียนแทนด้วย $A = B$) ก็ต่อเมื่อ

1. มีขนาดเท่ากัน
2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

ถ้าเมทริกซ์ A และ B เขียนในรูป $A = \left[a_{ij}\right], B = \left[b_{ij}\right]$ แล้วเงื่อนไขที่ 2 เขียนได้ในรูป $\left[a_{ij}\right] = \left[b_{ij}\right]$ ซึ่งหมายความว่า $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่า i และ j

<u>**ตัวอย่าง 2.2**</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

จงบอกความเป็นไปได้สำหรับ $A = B$, $B = C$, $A = C$

<u>**วิธีทำ**</u> $A = B$ เป็นไปไม่ได้ เพราะ A และ B มีขนาดต่างกัน สำหรับ A มีขนาด 2×2 ส่วน B มีขนาด 2×3 ในทำนองเดียวกัน เป็นไปไม่ได้ที่ $B = C$
สำหรับ $A = C$ เป็นไปได้ เนื่องจากขนาดของ A เท่ากับขนาดของ C นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ก็ต่อเมื่อ $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$ และ $d = 2$ #

2.1.1.การบวกเมทริกซ์

นิยาม 2.3 ถ้า A และ B มีขนาดเท่ากัน ผลบวกของ $A + B$ คือเมทริกซ์ที่ได้จากการบวกสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน ถ้า $A = \left[a_{ij}\right], B = \left[b_{ij}\right]$ แล้ว $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$

ตัวอย่าง 2.4 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $A+B$

วิธีทำ $A+B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+(-2) \\ -1+(-1) & 4+2 & 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ #

ตัวอย่าง 2.5 จงหา a,b และ c ถ้า $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ผลบวกของ 2 เมทริกซ์คือ $\begin{bmatrix} a+c & b+a & c+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

เนื่องจากเมทริกซ์เท่ากัน จะได้ $a+c=3, b+a=2$ และ $c+b=-1$

หาผลเฉลยของสมการจะได้ $a=3, b=-1$ และ $c=0$ #

ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มีขนาดเท่ากันแล้ว

$A+B=B+A$ (คุณสมบัติการสลับที่)

$A+(B+C)=(A+B)+C$ (คุณสมบัติการจัดหมู่)

พิสูจน์ ถ้า $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ แล้วสมาชิกที่ (i,j) ของ $A+B$ และ $B+A$ ตามลำดับ คือ $a_{ij}+b_{ij}$ และ $b_{ij}+a_{ij}$ เนื่องจากผลลัพธ์นี้เท่ากัน ดังนั้นจะได้

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{ij}+b_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ij}+a_{ij} \end{bmatrix} = B+A$$

ส่วนคุณสมบัติการจัดหมู่ก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน

เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix) และแทนด้วย 0 (หรือ 0_{mn} ถ้าต้องการระบุขนาด) ซึ่งจะได้ว่าสำหรับเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

$0+X=X$

นิเสธ (negative) ของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ (แทนด้วย $-A$) คือเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่ได้จากคูณสมาชิกทุกสมาชิกของ A ด้วย -1 ถ้า $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ แล้ว $-A=\begin{bmatrix} -a_{ij} \end{bmatrix}$ และ

$A+(-A)=0$

เป็นจริงสำหรับทุกๆ เมทริกซ์ A และเมทริกซ์ 0 ที่ได้นั้นต้องมีขนาดเดียวกันกับ A

ผลต่าง (difference) ของเมทริกซ์ A และ B ซึ่งมีขนาด $m \times n$ แทนด้วย $A-B$ และ $A-B=A+(-B)$ ถ้า $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} -b_{ij} \end{bmatrix}$

แล้ว $A-B=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}-b_{ij} \end{bmatrix}$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่สมาชิกแต่ละสมาชิกได้มาจากการหาผลต่างของสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

<u>**ตัวอย่าง 2.6**</u> กำหนด $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$

จงหา $A+B-C$

<u>**วิธีทำ**</u> $A+B-C \quad =\begin{bmatrix}1+0-(-1) & 2+1-2 & 3+1-0\\ -1+2-3 & 2+1-(-2) & 1+2-1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ -2 & 5 & 2\end{bmatrix}$$ #

<u>**ตัวอย่าง 2.7**</u> จงหาเมทริกซ์ X เมื่อกำหนด $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ $X=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1+x & 2+y\\ -3+z & 4+w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

จากกฎการเท่ากันของเมทริกซ์จะได้

$1+x=2, 2+y=0, -3+z=-1$ และ $4+w=1$

จากแต่ละสมการ $x=1, y=-2, z=2$ และ $w=-3$

$$X=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$ #

2.1.2 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

บทนิยาม 2.8 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ใดๆ k เป็นค่าคงที่ใดๆ แล้วผลคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ kA คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการคูณแต่ละสมาชิกของ A ด้วย k ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$ แล้ว

$$kA=\left[ka_{ij}\right]$$

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> ถ้า $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ จงหา $2A-3B$

<u>วิธีทำ</u> $2A-3B \quad =\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6 & -3\\ 6 & 0 & 9\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & -4 & 9\\ -8 & 4 & -7\end{bmatrix}$$ #

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะได้ kA เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มีขนาดเดียวกันกับ A (k เป็นค่าคงที่ใดๆ) เพราะว่า เมทริกซ์ศูนย์มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์จะได้

$$0A=0 \text{ และ } k0=0$$

จาก $0A=0$ ศูนย์ที่อยู่ทางซ้ายมือของสมการหมายถึงค่าคงที่ศูนย์ ส่วนศูนย์ที่อยู่ทางขวามือของสมการเป็นเมทริกซ์ศูนย์ สำหรับ $k0=0$ นั้นศูนย์ทั้งสองเทอมในสมการหมายถึง เมทริกซ์ศูนย์ หรือกล่าวอีกอย่างได้ว่า $kA=0$ ก็ต่อเมื่อ $k=0$ หรือ $A=0$

<u>ตัวอย่าง 2.10</u> จงแสดงว่า ถ้า $kA=0$ แล้ว $k=0$ หรือ $A=0$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$

เมื่อ $kA=0$ จะได้ $ka_{ij}=0$ สำหรับทุก i และ j

ถ้า $k=0$ แล้วไม่มีอะไรต้องทำ

ถ้า $k\neq 0$ แล้ว $ka_{ij}=0$

ดังนั้นจะได้ว่า $a_{ij}=1\cdot a_{ij}=\dfrac{1}{k}(ka_{ij})=\dfrac{1}{k}(0)=0$ สำหรับทุก i และ j

นั่นคือ $A=0$ #

ทฤษฎีบท 2.11 ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ใดๆ มีขนาด $m \times n$ ให้ k และ p แทนจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. มีเมทริกซ์ 0 ขนาด $m \times n$ ซึ่ง $0 + A = A$ สำหรับแต่ละ A
4. สำหรับแต่ละ A เมทริกซ์ $-A$ ขนาด $m \times n$ ซึ่ง $A + (-A) = 0$
5. $k(A + B) = kA + kB$
6. $(k + p)A = kA + pA$
7. $(kp)A = k(pA)$
8. $1A = A$

พิสูจน์ (1) ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]$ และ $B = \left[b_{ij}\right]$ แล้วสมาชิกที่ (i, j) ของ $A + B$ และ $B + A$ ตามลำดับ คือ $a_{ij} + b_{ij}$ และ $b_{ij} + a_{ij}$ เนื่องจากผลลัพธ์นี้เท่ากัน ดังนั้นจะได้

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] = \left[b_{ij} + a_{ij}\right] = B + A$$

ส่วนคุณสมบัติการจัดหมู่ (2) ก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน

พิสูจน์ (3) ให้ $0 = [0_{ij}]$ และ $A = [a_{ij}]$

$$\begin{aligned} 0 + A &= [0_{ij}] + [a_{ij}] \\ &= [0_{ij} + a_{ij}] \\ &= [a_{ij}] \\ &= A \quad , \forall A \end{aligned}$$

ดังนั้น $0 + A = A$

พิสูจน์ (4) ให้ $A = [a_{ij}]$ และ $-A = [a_{ij}]$

$$\begin{aligned} A + (-A) &= [a_{ij}] + (-[a_{ij}]) \\ &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] \\ &= [a_{ij} + (-a_{ij})] \\ &= [a_{ij} - a_{ij}] \\ &= [0_{ij}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A + (-A) = 0$

พิสูจน์ (5) ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$ และ $B=\left[b_{ij}\right]$ แทนเมทริกซ์ที่มีขนาดเดียวกัน แล้ว

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

ดังนั้นสมาชิกที่ (i,j) ของ $k(A+B)$ คือ

$$k(a_{ij}+b_{ij})=ka_{ij}+kb_{ij}$$

แต่ผลลัพธ์ดังกล่าวเป็นสมาชิกที่ (i,j) ของ $kA+kB$

ดังนั้น $k(A+B)=kA+kB$

ส่วนคุณสมบัติข้ออื่นๆ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

คุณสมบัติข้อ 5 ข้อ 6 ในทฤษฎีบท

เป็นจริงสำหรับเมทริกซ์และจำนวนจริงได้มากกว่า 2 เทอม ดังนี้

$$k(A+B+C)=kA+kB+kC$$

$$(k+p+m)A=kA+pA+mA$$

และคุณสมบัติข้อ 7 และ 8 ก็ขยายได้เช่นเดียวกัน □

<u>ตัวอย่าง 2.12</u> จงหาเมทริกซ์ X และ Y ขนาด 1×3 ที่ทำให้

$$X+2Y=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$X+Y=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ แล้วจะได้สมการ

$$X+2Y=A \qquad (1)$$

$$X+Y=B \qquad (2)$$

สมการ (1) ลบด้วยสมการ (2) จะได้

$$X-X+2Y-Y=A-B$$

$$Y=A-B$$

$$Y=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

สมการ (2) คูณด้วย 2 แล้วลบด้วยสมการ (1) จะได้

$$2X-X+2Y-2Y=2B-A$$

$$X=2B-A$$

$$X=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

#

2.1.3 การสลับเปลี่ยน (Transpose)

นิยาม 2.13 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ การสลับเปลี่ยนของ A แทนด้วย A^T เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$ ที่มีสมาชิกในตำแหน่งที่ (i,j) เท่ากับสมาชิกในตำแหน่งที่ (j,i) ของ A

จากนิยามเขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]$ แล้ว $A^T = \left[a_{ji}\right]$ หรือกล่าวง่ายๆ คือ การสลับเปลี่ยนจากแนวนอนเป็นแนวตั้ง

<u>ตัวอย่าง 2.14</u> จงหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ #

ทฤษฎีบท 2.15 ให้ A และ B แทนเมทริกซ์ขนาดเดียวกัน และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว A^T เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(kA)^T = kA^T$
4. $(A+B)^T = A^T + B^T$

พิสูจน์ จะพิสูจน์คุณสมบัติข้อ 3

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]$ แล้ว $kA = \left[ka_{ij}\right]$

ดังนั้น $(kA)^T = \left[ka_{ji}\right] = k\left[a_{ji}\right] = kA^T$ □

นิยาม 2.16 เมทริกซ์ A เรียกว่า เมทริกซ์สมมาตร (symmetric) ถ้า $A = A^T$

จากนิยามจะได้ว่าเมทริกซ์สมมาตรต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัส และชื่อของเมทริกซ์มาจากลักษณะที่เห็นว่าสมมาตรรอบแนวทแยงหลัก นั่นคือสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งตรงข้าม เมื่อเทียบกับแนวทแยงหลักเท่ากัน เช่น

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b' & d & e \\ c' & e' & f \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์สมมาตร เมื่อ $b = b', c = c'$ และ $e = e'$

<u>ตัวอย่าง 2.17</u> ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$ แล้ว จงแสดงว่า $A + B$ เป็นเมริกซ์สมมาตร

<u>วิธีทำ</u> จากที่กำหนด $A^T = A$ และ $B^T = B$

จากทฤษฎีบท จะได้ว่า $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$

ดังนั้น $A + B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร #

2.1.4 การคูณเมทริกซ์

นิยาม 2.18 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times k$ ผลคูณของ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times k$ ซึ่งสมาชิกที่ (i, j) หาได้ โดยคูณสมาชิกที่อยู่ในลำดับเดียวกันตามแนวนอนที่ i ของ A กับแนวตั้งที่ j ของ B แล้วนำมาหาผลบวก ซึ่งเรียกว่า ผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) ของแนวนอนที่ i ของ A กับแนวตั้งที่ j ของ B

<u>ตัวอย่าง 2.19</u> จงหาสมาชิกตำแหน่งที่ $(1,3)$ และ $(2,4)$ ของ AB และหา AB เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{และ } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> สมาชิกที่ $(1,3)$ ของ AB เป็นผลคูณเชิงสเกลาร์ของแนวนอนที่ 1 ของ A และแนวตั้งที่ 3 ของ B คำนวณโดยการคูณสมาชิกที่อยู่ในลำดับเดียวกันและหาผลบวก

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น สมาชิกที่ $(1,3) = 1(2) + (-1)(2) + 2(1) = 2$

เช่นเดียวกัน สมาชิกที่ $(2,4) = 0(3) + 1(1) + 4(4) = 17$
เนื่องจาก A มีขนาด 2×3 และ B มีขนาด 3×4 ผลคูณ AB มีขนาด 2×4

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 10 \\ -1 & 13 & 6 & 17 \end{bmatrix}$$ #

กฎการคูณ

สมมติ A มีขนาด $m\times n$ และ B มีขนาด $n'\times p$
ผลคูณ AB หาค่าได้เมื่อ $n = n'$ และผลคูณ AB มีขนาด $m\times p$

<u>ตัวอย่าง 2.20</u> ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ จงหา A^2, B^2, AB, BA

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ A มีขนาด 1×3 และ B มีขนาด 3×1 ดังนั้นจึงไม่สามารถหา A^2 และ B^2 ได้ จากกฎการคูณ ผลคูณ AB หาได้มีขนาด 1×1 และผลคูณ BA หาได้มีขนาด 3×3 นั่นคือ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3 \\ 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$ #

โดยทั่วไป $AB \neq BA$ แต่ถ้า $AB = BA$
เรียกว่ามีคุณสมบัติสอดคล้องตามกฎการสลับที่ (Commute) ของการคูณ

> **นิยาม 2.21** เมทริกซ์เอกลักษณ์(Identity matrix) เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกบนแนวทแยงหลักเป็น 1 และสมาชิกในตำแหน่งอื่นๆ แทนด้วย 0 (I_n เมื่อ I มีขนาด $n\times n$)

<u>ตัวอย่าง 2.22</u> เช่น $\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์เอกลักษณ์เป็นเมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติว่าเมื่อคูณกับเมทริกซ์ใดแล้ว จะได้เมทริกซ์เดิม ไม่ว่าจะเป็นการคูณเข้าทางซ้ายหรือทางขวา #

2.2 การดำเนินการมูลฐาน (Elementary Operations)

นิยาม 2.23 การดำเนินการมูลฐานตามแนวนอนมี 3 แบบ

1. สลับที่ระหว่างสองแนวนอน $\left(R_i \leftrightarrow R_j\right)$
2. คูณแนวนอนหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ $\left(R_i \leftarrow kR_i \,,\, k \neq 0\right)$
3. คูณแนวนอนหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์แล้วบวกกับอีกแนวนอนหนึ่งโดยที่แนวนอนแรกไม่เปลี่ยนแปลง$\left(R_i \leftarrow R_i + kR_j \,,\, k \neq 0\right)$

ในการอธิบายประกอบในตัวอย่างเกี่ยวกับการดำเนินการทั้ง 3 แบบ จะใช้ R_1, R_2, R_3 แทนแนวนอนที่ $1,2$ และ 3 ตามลำดับ พร้อมกับใช้สัญลักษณ์ $\leftrightarrow$ และ $\leftarrow$ ดังนี้

$\leftrightarrow$ แทนการดำเนินการสลับที่ระหว่างแนวนอน เช่น $R_1 \leftrightarrow R_2$ แทนการดำเนินการสลับที่ระหว่างแนวนอนที่ 1 กับแนวนอนที่ 2

$\leftarrow$ แทนผลลัพธ์การดำเนินการที่ได้ในแนวนอนที่อยู่หัวลูกศร เช่น

$R_1 \leftarrow 3R_1$ แทนการดำเนินการคูณแนวนอนที่ 1 ด้วย 3

$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$ แทนการดำเนินการคูณแนวนอนที่ 2 ด้วย 2 แล้วบวกเข้าแนวนอนที่ 1

<u>ตัวอย่าง 2.24</u> การหาผลเฉลยของสมการเริ่มต้น $x - 5y = 4, 3x + 2y = 3$ โดยแสดงเมทริกซ์แต่งเติมที่สมนัยกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} x - 5y &= 4 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

ขั้นแรก สมการที่ 2 ลบด้วย 3 เท่าของสมการที่ 1 (หรือแทนด้วย $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$) ได้

$$\begin{aligned} x - 5y &= 4 \\ 17y &= -9 \end{aligned} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 17 & -9 \end{array}\right]$$

ซึ่งจะได้ว่าระบบสมการนี้สมมูลกับระบบสมการแรก (ซึ่งจะกล่าวในทฤษฎีบท 2.27)

ในขั้นต่อไป คูณสมการที่ 2 ด้วย $\frac{1}{17}$ (หรือแทนด้วย $R_2 \leftarrow \frac{1}{17}R_2$) ได้ $y = -\frac{9}{17}$

$$\begin{aligned} x - 5y &= 4 \\ y &= -\frac{9}{17} \end{aligned} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{17} \end{array}\right]$$

ขั้นตอนสุดท้าย สมการที่ 1 บวกด้วย 5 เท่าของสมการที่ 2 (หรือแทนด้วย $R_1 \leftarrow R_1 + 5R_2$) ได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{23}{17} \\ y &= -\frac{9}{17} \end{aligned} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{23}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{17} \end{array}\right]$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า เมทริกซ์แต่งเติม ที่อยู่ในแต่ละขั้นตอนของการหาผลเฉลยของระบบสมการนั้น มีการใช้การดำเนินการที่เรียกว่า การดำเนินการมูลฐาน #

2.3 ตัวกำหนดและวิธีการหาตัวกำหนด

เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ สามารถหาจำนวนที่เรียกว่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ ตัวกำหนดนี้ทำให้ทราบว่าเมทริกซ์มีผกผันหรือไม่ นำไปใช้ในสูตรสำหรับหาเมทริกซ์ผกผัน ใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นซึ่งเรียกว่า กฎของคราเมอร์

2.3.1 นิยามตัวกำหนด

พิจารณาผลคูณของสมาชิกของเมทริกซ์จัตุรัส โดยที่ผลคูณนั้นประกอบด้วยสมาชิกจากทุกแถวที่ไม่ซ้ำกันและจากหลักที่ไม่ซ้ำกัน เช่น

เมทริกซ์ A ขนาด 2×2 เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้วผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้คือ $a_{11}a_{22}$ และ $a_{12}a_{21}$

เมทริกซ์ A ขนาด 3×3 เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้วผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้คือ

$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{11}a_{23}a_{32},\ a_{12}a_{21}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32},\ a_{13}a_{22}a_{31}$ ถ้าเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้น กรณีต่างๆของผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะมีหลายเทอมจึงต้องศึกษารูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะมีหลายเทอมจึงต้องศึกษารูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมด

นิยาม 2.25 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) ของเซตของจำนวนนับ $\{1, 2, \ldots, n\}$ เป็นการจัดจำนวนให้อยู่ในลำดับต่างๆ โดยไม่มีการเว้นหรือซ้ำจำนวนเหล่านั้น

เซตของการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปได้ทั้งหมดของจำนวน $1, 2, \ldots, n$ แทนด้วย S_n

<u>ตัวอย่าง 2.26</u> ถ้าให้ $S=\{1, 2\}$ แล้ว S_2 เป็นเซตของการเรียงสับเปลี่ยนของ S มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $2!=2$ โดยที่ $S_2=\{12, 21\}$

ถ้าให้ $S=\{1, 2, 3\}$ แล้ว S_3 เป็นเซตของการเรียงสับเปลี่ยนของ S มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $3!=6$ โดยที่ $S_3=\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ #

โดยทั่วไปเมื่อ $S=\{1, 2, \ldots, n\}$ แล้ว S_n มีจำนวนสมาชิกซึ่งแตกต่างกันเท่ากับ $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!$ และเมื่อให้แต่ละสมาชิกเซต S_n เขียนแทนด้วย $j_1 j_2 \ldots j_n$ เมื่อ j_1 เป็นจำนวนแรก j_2 เป็นจำนวนที่สอง และต่อไปเรื่อยๆ

การผกผัน (inversion) เกิดขึ้นในเรียงสับเปลี่ยนของ $j_1 j_2 \dots j_n$ เมื่อมีจำนวนเต็มที่มากกว่านำหน้าจำนวนเต็มที่น้อยกว่า จำนวนการผกผันที่เกิดขึ้นในแต่ละการเรียงสับเปลี่ยน
สามารถหาได้จาก

1. นับจำนวนตัวเลขที่น้อยกว่า j_1 ที่อยู่ทางขวาของ j_1
2. นับจำนวนตัวเลขที่น้อยกว่า j_2 ที่อยู่ทางขวาของ j_2
3. นับจำนวนตัวเลขที่น้อยกว่า $j_3 \dots j_{n-1}$ (ทำนองเดียวกับข้อ1.และข้อ2.)
4. รวมจำนวนที่นับได้ทั้งหมดซึ่งเป็นจำนวนการผกผันของแต่ละการเรียงสับเปลี่ยน

<u>**ตัวอย่าง 2.27**</u> ตารางแสดงการจำแนกว่าการเรียงสับเปลี่ยนของ $S = \{1, 2, 3\}$ เป็นคู่หรือคี่

<u>**วิธีทำ**</u>

การเรียงสับเปลี่ยน	จำนวนของการผกผัน	การเรียงสับเปลี่ยนคู่หรือคี่
123	0	คู่
132	1	คี่
213	1	คี่
231	2	คู่
312	2	คู่
321	3	คี่

ในการเรียงสับเปลี่ยนของ $S = \{1, 2, \dots, n\}$ นั้น S_n มีจำนวนสมาชิก $n!$ ในจำนวนนี้มีการเรียงสับเปลี่ยนคู่และการเรียงสับเปลี่ยนคี่อย่างละ $\dfrac{n!}{2}$ #

นิยาม 2.28 ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น**เมทริกซ์**ขนาด $n \times n$ ตัวกำหนดของ A แทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$ โดยที่ $\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$

ซึ่งเป็นผลบวกของการเรียงสับเปลี่ยน $j_1 j_2 \dots j_n$ ทั้งหมดของเซต $S = \{1, 2, \dots, n\}$ เครื่องหมายของแต่ละการเรียงสับเปลี่ยน ให้เป็นบวกถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ และให้เป็นลบถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่

ในแต่ละเทอมของ $(\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ ของ $\det(A)$ ดัชนีของแนวนอนจะเรียงกันเป็นจำนวนนับเสมอ ส่วนดัชนีของแนวตั้งเป็นการเรียงสับเปลี่ยน $j_1 j_2 \dots j_n$ และแต่ละเทอมของ $\det(A)$ จะมีเครื่องหมายบวกหรือลบเป็นผลคูณของ n สมาชิกของ A ซึ่งมาจากแต่ละแนวนอนที่ไม่ซ้ำกันและมาจากแต่ละแนวตั้งที่ไม่ซ้ำกัน

<u>**ตัวอย่าง 2.29**</u> ให้ $A = [a_{11}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×1 แล้ว $\det(A) = a_{11}$ #

<u>**ตัวอย่าง 2.30**</u> เมื่อให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A)$ เขียนในเทอมของ $a_{1\_} a_{2\_}$ และแทนที่ว่างด้วยสมาชิกของการเรียงสับเปลี่ยน ดัชนีคือ 12 และ 21 เมื่อ 12 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่มีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วน 21 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่มีเครื่องหมายเป็นลบ

ดังนั้น $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ หรือ $\det(A)$ ได้มาจากผลคูณของสมาชิกบนเส้นจากซ้ายไปขวาลบด้วยผลคูณของสมาชิกบนเส้นจากซ้ายไปขวาลบด้วยผลคูณของสมาชิกบนเส้นจากขวาไปซ้าย ดังนี้

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ดังนั้นถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = 1(4) - 2(3) = 4 - 6 = -2$ #

2.3.2 คุณสมบัติตัวกำหนด

ทฤษฎีบท 2.31 สำหรับ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $\det(A^T) = \det(A)$

พิสูจน์ ให้ $A = \left[a_{ij}\right]$ และ $A^T = \left[b_{ij}\right]$ เมื่อ $b_{ij} = a_{ji}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum(\pm)\ b_{1j_1}b_{2j_2}\ldots b_{nj_n} \\ &= \sum(\pm)\ a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n}\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}b_{1j_1}b_{2j_2}\ldots b_{nj_n} &= a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n} \\ &= a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}\end{aligned}$$

ซึ่งก็เป็นเทอมของ $\det(A)$ และ $\det(A^T)$ เหมือนกัน

ต่อไปจะตรวจสอบเครื่องหมายของเทอมที่สมนัยกันว่าเหมือนกันทำได้โดยใช้คุณสมบัติของการเรียงสับเปลี่ยนที่ว่าจำนวนการผกผันในการเรียงสับเปลี่ยน $k_1k_2\ldots k_n$ ซึ่งกำหนดเครื่องหมายของเทอม $a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}$ เหมือนกับจำนวนการผกผันในการเรียงสับเปลี่ยน $j_1j_2\ldots j_n$ ซึ่งกำหนดเครื่องหมายของเทอม $b_{1j_1}b_{2j_2}\ldots b_{nj_n}$ ดังตัวอย่าง

$$\begin{aligned}b_{13}b_{24}b_{35}b_{41}b_{52} &= a_{31}a_{42}a_{53}a_{14}a_{25} \\ &= a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}\end{aligned}$$

จำนวนการผกผันในการเรียงสับเปลี่ยนของ 45123 คือ 6 และจำนวนการผกผันในการเรียงสับเปลี่ยนของ 34512 คือ 6 ด้วย ทำให้เครื่องหมายเหมือนเดิม

เนื่องจาก เครื่องหมายของเทอมที่สัมพันธ์กันของ A และ A^T เหมือนกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\det(A^T) = \det(A)$ □

<u>ตัวอย่าง 2.32</u> จงหา $\det(A^T)$ เมื่อกำหนด $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> จากที่กำหนดจะได้ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\det(A^T) &= 1(1)(2) + (2)(3)(1) + 1(-1)(1) - 1(1)(2) - 2(-1)(2) - 1(3)(1) \\ &= 2 + 12 - 1 - 2 + 4 - 3 \\ &= 12\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่า $\det(A^T) = \det(A)$ #

ทฤษฎีบท 2.33 ถ้า B ได้มาจาก A โดยการสลับที่ 2 แนวนอน (หรือแนวตั้ง) แล้ว $\det(B) = -\det(A)$

พิสูจน์ สมมติ B ได้มาจาก A โดยการสลับที่แนวนอนที่ r และ s ของ A โดยที่ $r < s$ แล้วจะได้ว่า

$b_{rj} = a_{sj}, b_{sj} = a_{rj}$ และ $b_{ij} = a_{ij}$ สำหรับ $i \neq r$ และ $i \neq s$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum(\pm)\, b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{rj_r} \dots b_{sj_s} \dots b_{nj_n} \\
&= \sum(\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{sj_r} \dots a_{rj_s} \dots a_{nj_n} \\
&= \sum(\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{rj_s} \dots a_{sj_r} \dots a_{nj_n}
\end{aligned}$$

การเรียงสับเปลี่ยน $j_1 j_2 \dots j_s \dots j_r \dots j_n$ ได้มาจากการเรียงสับเปลี่ยน $j_1 j_2 \dots j_r \dots j_s \dots j_n$ โดยการเปลี่ยนจำนวน 2 จำนวน และ จำนวนการผกผันตามรูปแบบแตกต่างกับจำนวนการผกผันที่ได้ถัดมาเป็นจำนวนคี่ซึ่งหมายความว่าเครื่องหมายในแต่ละเทอมใน $\det(B)$ เป็นตรงกันข้ามกับเครื่องหมายของเทอมใน $\det(A)$ ที่สมนัยกัน ดังนั้น $\det(B) = -\det(A)$

ต่อไปให้ B ได้มาจาก A โดยการสลับที่ระหว่าง 2 แนวตั้งของ A ซึ่งก็คือ B^T ได้มาจาก A^T โดยการสลับที่ระหว่าง 2 แนวนอนของ A^T ดังนั้น

$\det(B^T) = -\det(A^T)$

แต่ $\det(B^T) = \det(B)$ และ $\det(A^T) = \det(A)$

ดังนั้น $\det(B) = -\det(A)$ □

<u>**ตัวอย่าง 2.34**</u> $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

(การสลับที่แนวนอนและการสลับเปลี่ยนเมทริกซ์) #

ทฤษฎีบท 2.35 ถ้า A มี 2 แนวนอน (หรือแนวตั้ง) เท่ากันหรือเป็นสัดส่วนกันแล้ว $\det(A) = 0$

พิสูจน์ สมมติให้แนวนอนที่ r และ s ของ A เท่ากัน

สลับที่ระหว่างแนวนอนที่ r และ s ของ A แล้วได้ B จะได้ว่า

$\det(B) = -\det(A)$

แต่เนื่องจาก $B = A$

ดังนั้น $\det(B) = \det(A)$

นั่นคือ $\det(A) = \det(A)$

ดังนั้น $\det(A) = 0$ □

ตัวอย่าง 2.36 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

(เนื่องจากมีแนวนอนที่ 1 และ 3 เหมือนกัน) #

ทฤษฎีบท 2.37 ถ้าแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ของ A ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นศูนย์ แล้ว $\det(A) = 0$

พิสูจน์ ให้แนวนอนที่ i ของ A มีสมาชิกที่เป็นศูนย์เท่านั้น
เนื่องจากแต่ละเทอมในการหา $\det(A)$ มีสมาชิกที่มาจากแนวนอนที่ i ทำให้แต่ละเทอมใน $\det(A)$ เป็นศูนย์ ดังนั้น $\det(A) = 0$ □

ตัวอย่าง 2.39 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(โดยทฤษฎีบท 2.37)

ตัวอย่าง 2.38 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(โดยทฤษฎีบท 2.37) #

ทฤษฎีบท 2.39 ถ้า B ได้มาจาก A โดยการคูณแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ของ A ด้วยค่าคงที่ c แล้ว $\det(B) = c\det(A)$

พิสูจน์ สมมติแนวนอนที่ r ของ $A = \left[a_{ij}\right]$ คูณด้วย c แล้วได้ $B = \left[b_{ij}\right]$
แล้ว $b_{ij} = a_{ij}$ สำหรับ $i \neq r$ และ $b_{rj} = ca_{rj}$ สำหรับ $i = r$
ดังนั้น

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum(\pm)\, b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{rj_r} \ldots b_{nj_n} \\ &= \sum(\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots ca_{rj_r} \ldots a_{nj_n} \\ &= \sum(\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{rj_r} \ldots a_{nj_n} \\ &= c\det(A)\end{aligned}$$

□

<u>ตัวอย่าง 2.40</u> $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 8(8-5) = 24$ #

<u>ตัวอย่าง 2.41</u> $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(0) = 0$

โดยการดึงตัวร่วม 4 ออกจากแนวนอนที่ 3
แล้วมีแนวนอนที่ 1 และ 3 เหมือนกัน โดยทฤษฎีบท 2.35 #

<u>ตัวอย่าง 2.42</u> $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$$|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 54 = 18 - 3^2(-2) = 3^2|A|$$ #

ทฤษฎีบท 2.43 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว $\det(uA) = u^n \det(A)$ เมื่อ u เป็นจำนวนใดๆ

พิสูจน์
$$\begin{aligned} |A| &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \\ |uA| &= \sum (\pm) ua_{1j_1} ua_{2j_2} \ldots ua_{nj_n} \\ &= u^n \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \\ &= u^n |A| \end{aligned}$$ □

ทฤษฎีบท 2.44 ถ้า $B = \left[b_{ij}\right]$ ได้มาจาก $A = \left[a_{ij}\right]$ โดยการบวกแต่ละสมาชิกของแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ที่ r ของ A ด้วย c เท่าของสมาชิกที่สมนัยในแนวนอน (หรือแนวตั้ง) ที่ $s(r \neq s)$ ของ A แล้ว $\det(B) = \det(A)$ (ตัวกำหนดไม่เปลี่ยน)

พิสูจน์ จากแนวนอนซึ่ง $b_{ij} = a_{ij}\ (i \neq r)$ และ $b_{ij} = a_{ij} + ca_{sj}\ (r \neq s$ และ $r < s)$ แล้ว

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum (\pm)\, b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{rj_r} \ldots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots (a_{rj_r} + ca_{sj_r}) \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n} \\ &= \sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{rj_r} \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n} + \sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots ca_{sj_r} \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n} \\ &= \det(A) + c\sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{sj_r} \ldots a_{sj_s} \ldots a_{nj_n} \end{aligned}$$

$$\text{จาก} \sum(\pm)\, a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{sj_r}\dots a_{sj_s}\dots a_{nj_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

เนื่องจากมี 2 แนวนอนเหมือนกัน

ดังนั้น $\det(B) = \det(A) + c(0) = \det(A)$ □

<u>ตัวอย่าง 2.45</u> $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 18-(-6) = 24$

ดำเนินการ $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ และ $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$ และตามทฤษฎีบท 2.45 ตัวกำหนดของเมทริกซ์แรกและเมทริกซ์ที่สองมีค่าเท่ากัน #

<u>ตัวอย่าง 2.46</u> จงหา $\det(A)$ ถ้า $\begin{vmatrix} a+x & p & x \\ b+y & q & y \\ c+z & r & z \end{vmatrix} = 2$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a+x & 3x & -p \\ b+y & 3y & -q \\ c+z & 3z & -r \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\det(A) = 3(-1)\begin{vmatrix} a+x & x & p \\ b+y & y & q \\ c+z & z & r \end{vmatrix}$ ดึงตัวร่วม 3 จากแนวตั้งที่ 2 และ

ดึงตัวร่วม -1 จากแนวตั้งที่ 3

$= -3\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix}$ คูณแนวตั้งที่ 2 ด้วย -1 แล้วรวมกับแนวตั้งที่ 1

$= 3\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$ สลับที่ระหว่างแนวตั้งที่ 2 และ 3

$= 3(2) = 6$ #

เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกที่อยู่เหนือแนวทแยงหลักเป็นศูนย์เรียกว่า**เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง** ทำนองเดียวกันถ้าเมทริกซ์จัตุรัสมีสมาชิกที่อยู่ใต้แนวทแยงหลักเป็นศูนย์เรียกว่า**เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน** ซึ่งเมทริกซ์ไม่ว่าจะเป็นสามเหลี่ยมบนหรือล่างก็ตาม ตัวกำหนดคำนวณได้จากผลคูณของสมาชิกตามแนวทแยงหลัก ดังทฤษฎีบท 2.47

ทฤษฎีบท 2.47 ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน(ล่าง) แล้ว $\det(A)=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ นั่นคือตัวกำหนดของเมทริกซ์สามเหลี่ยมคือผลคูณของสมาชิกบนแนวทแยงหลัก

พิสูจน์ ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (นั่นคือ $a_{ij}=0$ เมื่อ $i>j$)
เทอม $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ ในการหา $\det(A)$ นั้นไม่เป็นศูนย์เมื่อ $1\le j_1, 2\le j_2,\ldots,n\le j_n$
จะเห็นว่า $j_1j_2\ldots j_n$ ต้องเป็นการเรียงสับเปลี่ยนหรือการจัดของ $\{1,2,\ldots,n\}$
เพราะฉะนั้น $j_1=1, j_2=2,\ldots,j_n=n$ และเทอม $\det(A)$ ที่ไม่เป็นศูนย์นั้นคือผลคูณของสมาชิกบนแนวทแยงหลักของ A ดังนั้น $\det(A)=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ □

จะเห็นว่าการคำนวณหาตัวกำหนดสามารถใช้การดำเนินการมูลฐานตามแนวนอนหรือแนวตั้ง ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท 2.33, 2.39 และ 2.44 โดยทำให้สมาชิกบางตัวเป็นศูนย์เพื่อให้สามารถคำนวณได้รวดเร็ว

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการหา $\det(A)$ โดยใช้การดำเนินการมูลฐานตามแนวนอนหรือแนวตั้ง ที่ทำให้เมทริกซ์เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนหรือล่างแต่มีข้อระวังคือในการใช้การดำเนินการมูลฐานนั้นมีการดำเนินการบางอย่างที่มีผลต่อค่าตัวกำหนด

<u>ตัวอย่าง 2.48</u> จงหา $\det(A)$ เมื่อ $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\3&-1&6\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\3&-1&6\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&-4&0\end{vmatrix} \qquad R_2\leftarrow R_2+R_1 \text{ และ } R_3\leftarrow R_3-3R_1\\
&= \begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&12\end{vmatrix} \qquad R_3\leftarrow R_3+4R_2\\
&= 12
\end{aligned}
$$

#

2.3.3 วิธีการหาตัวกำหนด

2.3.3.1 การหาตัวกำหนดโดยการกระจายลาปลาซ

การกระจายโดยตัวประกอบร่วมเกี่ยว

นิยาม 2.49 ไมเนอร์ที่ (i,j) ของเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย $M_{ij}(A)$ เป็นตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด $(n-1)\times(n-1)$ ที่ได้จาก A โดยตัดแนวนอนที่ i และแนวตั้งที่ j ตัวประกอบร่วมเกี่ยวที่ (i,j) ของ A แทนด้วย $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$ โดยที่ $(-1)^{i+j}$ เรียกว่า เครื่องหมายของตำแหน่งที่ (i,j)

ดังนั้น $C_{ij}(A)$ เท่ากับ $M_{ij}(A)$ หรือ $-M_{ij}(A)$ ขึ้นอยู่กับค่า i และ j ไดอะแกรมของเครื่องหมายต่อไปนี้ มีไว้เพื่อพิจารณาเครื่องหมายของแต่ละตำแหน่ง

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

<u>ข้อสังเกต</u> เครื่องหมายในแต่ละแนวนอนและแนวตั้งที่ได้มีเครื่องหมายสลับกันระหว่าง $+$ และ $-$ โดยตำแหน่งที่ $(1,1)$ คือ $+1$

<u>ตัวอย่าง 2.50</u> จงหาไมเนอร์และตัวประกอบร่วมเกี่ยวของตำแหน่งที่ $(1,2),(3,2)$ และ $(3,3)$ ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> $M_{12}(A)$ เกิดจากการตัดแนวนอนที่ 1 และแนวตั้งที่ 2

$$M_{12}(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 6 = -2$$

$$C_{12}(A) = (-1)^{1+2} M_{12}(A) = (-1)(-2) = 2$$

$M_{32}(A)$ เกิดจากการตัดแนวนอนที่ 3 และแนวตั้งที่ 2

$$M_{32}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$$

$$C_{32}(A) = (-1)^{3+2} M_{32}(A) = (-1)(-14) = 14$$

$M_{33}(A)$ เกิดจากการตัดแนวนอนที่ 3 และแนวตั้งที่ 3

$$M_{33}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$$

$$C_{33}(A) = (-1)^{3+3} M_{33}(A) = (1)(6) = 6$$ #

ทฤษฎีบท 2.51 การกระจายลาปลาซ

ตัวกำหนดของเมทริกซ์ A ขนาด $n\times n$ $(n\geq 2)$ คำนวณได้โดยใช้กระจายลาปลาซตามแนวนอนหรือแนวตั้งใดๆของ A ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$ เมื่อ a_{ij} คือสมาชิกที่ (i,j) ของ A แล้วการกระจายตามแนวนอนที่ i คือ

$$\det(A)=a_{i1}C_{i1}(A)+a_{i2}C_{i2}(A)+a_{i3}C_{i3}(A)+\ldots+a_{in}C_{in}(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{ik}(A)$$

การกระจายตามแนวตั้งที่ j คือ

$$\det(A)=a_{1j}C_{1j}(A)+a_{2j}C_{2j}(A)+a_{3j}C_{3j}(A)+\ldots+a_{nj}C_{nj}(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}C_{kj}(A)$$

พิสูจน์ สูตรแรกได้มาจากสูตรที่สองโดยทฤษฎีบท 2.31 จาก $\det(A^T)=\det(A)$ ละเว้นการพิสูจน์ในรูปทั่วไป แต่ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $A=\left[a_{ij}\right]$ มีขนาด 3×3 ตามนิยาม 2.33

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

$$C_{11}(A)=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$$C_{12}(A)=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

$$C_{13}(A)=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

ดังนั้น $\det(A)=a_{11}C_{11}(A)+a_{12}C_{12}(A)+a_{13}C_{13}(A)$

ซึ่งเป็นการกระจายของ $\det(A)$ ตามแนวนอนที่ 1

หรืออาจแสดงได้อีกแบบหนึ่ง คือ

จาก $\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$

$$\det(A)=a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})+a_{23}(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})+a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

ซึ่งสามารถแสดงได้ว่า $\det(A)=a_{13}C_{13}(A)+a_{23}C_{23}(A)+a_{33}C_{33}(A)$

ซึ่งเป็นการกระจายของ $\det(A)$ ตามแนวตั้งที่ 3 □

ตัวอย่าง 2.52 จงหาตัวกำหนดของ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ใช้การกระจายลาปลาซตามแนวนอนที่ 1 จะได้

$$\det(A) = 2C_{11}(A) - 1C_{12}(A) + 3C_{13}(A)$$
$$= 2\left(-1\right)^{1+1} M_{11}(A) + 1(-1)^{1+2} M_{12}(A) + 3(-1)^{1+3} M_{13}(A)$$
$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(24) + (-14) + 3(-13)$$
$$= 48 - 14 - 39 = -5$$

การคำนวณตัวกำหนดโดยการกระจายลาปลาซ จะมีการคูณสมาชิกในแนวนอนหรือในแนวตั้งกับตัวประกอบร่วมเกี่ยว เพื่อให้การคำนวณรวดเร็ว จึงควรเลือกแนวนอนหรือแนวตั้งที่มีสมาชิกเป็นศูนย์มากที่สุดและถ้ามีแนวนอนหรือแนวตั้งที่เป็นสมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมดแล้ว $\det(A) = 0$ #

ตัวอย่าง 2.53 จงหา $\det(A)$ เมื่อกำหนด $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ขั้นแรกหาตัวกำหนดโดยใช้การกระจายลาปลาซซึ่งสามารถใช้ตามแนวนอนใดแนวนอนหนึ่งหรือแนวตั้งใดแนวตั้งหนึ่ง ซึ่งจากการพิจารณาแนวตั้งที่ดีที่สุดคือแนวตั้งที่ 1 เพราะว่ามีสมาชิกเป็นศูนย์หลายตำแหน่ง จะได้

$$\det(A) = -7\,C_{11}(A) + 0C_{21}(A) + 0C_{31}(A) + 0C_{41}(A)$$
$$= -7(-1)^{1+1} M_{11}(A) + 0 + 0 + 0$$
$$= -7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

จากนั้นเลือกกระจายลาปลาซตามแนวนอนที่ 1 ของเมทริกซ์ข้างต้น

$$= -7\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -7(1(0) + 1(2))$$
$$= -14$$

#

<u>ตัวอย่าง 2.54</u> จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $\det(A)=0$ เมื่อ $A=\begin{bmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{bmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1 & x & x\\ 0 & 1-x^2 & x-x^2\\ 0 & x-x^2 & 1-x^2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1-x^2 & x-x^2\\ x-x^2 & 1-x^2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}(1-x)(1+x) & x(1-x)\\ x(1-x) & (1-x)(1+x)\end{vmatrix}\\
&= (1-x)^2\begin{vmatrix}1+x & x\\ x & 1+x\end{vmatrix}\\
&= (1-x)^2\left((1+x^2)-x^2\right)\\
&= (1-x)^2
\end{aligned}$$

และ $\det(A)=(1-x)^2=0$ เมื่อ $(1-x)(1-x)=0$ ดังนั้น $x=1$ #

ทฤษฎีบท 2.55 ถ้าเมทริกซ์ $\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}A & 0\\ B & D\end{bmatrix}$ อยู่ในรูปแบบบล็อก (Block form) เมื่อ A และ D เป็นเมริกซ์จัตุรัส แล้ว $\det\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D\end{bmatrix}=\det\mathrm{A}\det D$ และ $\det\begin{bmatrix}A & 0\\ B & D\end{bmatrix}=\det\mathrm{A}\det D$

พิสูจน์ พิจารณาเมทริกซ์ $\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D\end{bmatrix}$ ให้ $A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ $B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ และ $D\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ บนขนาดของ A ให้ $C:=\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D\end{bmatrix}$

สมมติให้เมทริกซ์ $A=a\in\mathbb{R}$ จะทำการหา $\det C$ โดยใช้การกระจายโดยตัวประกอบร่วมเกี่ยวในแนวตั้งแรกจะได้ว่า $\det C=a\det D+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}c_{i1}\det C_{i1}=a\det D=\det A\det D$

สมมติให้ $\det C=\det A\det D$ ทุก $A\in M_{k\times k}(\mathbb{R})$

พิจารณาที่เมทริกซ์ A ขนาด $(k+1)\times(k+1)$ แล้วทำการกระจายโดยตัวประกอบร่วมเกี่ยวในแนวตั้งแรก

จะได้ว่า $\det C = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det C_{i1}$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \det D$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \right) \det D$$

$$= \det A \det D$$

สำหรับการพิสูจน์อื่นๆก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน □

ทฤษฎีบท 2.56 ถ้าเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & A_2 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & A_n \end{bmatrix}$ อยู่ในรูปแบบบล็อก เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอยู่ในรูปแบบบล็อก แล้ว $\det \begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix} = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_n$

พิสูจน์ พิจารณาเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix}$ พิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $C := \begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{bmatrix}$

และ $P(n)$ แทนข้อความ "ถ้า C เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว $\det C = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_n$"

เมื่อ $n = 1$ ดังนั้น $C = [A_1]$

จากทฤษฎีบท 2.55 จะได้ว่า $\det C = \det A_1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(n)$ เป็นจริงเมื่อ $n = k$

นั่นคือ ถ้า $C = \begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix}$ แล้ว $\det C = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_k$

พิจารณาที่ $n=k+1$ ดังนั้น $C=\begin{bmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & A_k & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{k+1} \end{bmatrix}$ จากนั้นเราจะทำการแบ่งเมทริกซ์ C

เป็น 2 บล็อก นั่นคือ บล็อค A_1 และบล็อก $C'=\begin{bmatrix} A_2 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & A_{k+1} \end{bmatrix}$

จากทฤษฎีบท 2.55 จะได้ว่า $\det C=\det A_1 \det C'$

และจาก $P(k)$ เป็นจริง ดังนั้น $\det C'=\det A_2 \ldots \det A_{k+1}$

เพราะฉะนั้น $\det C=\det A_1 \det A_2 \ldots \det A_{k+1}$

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงเมื่อ $n=k+1$

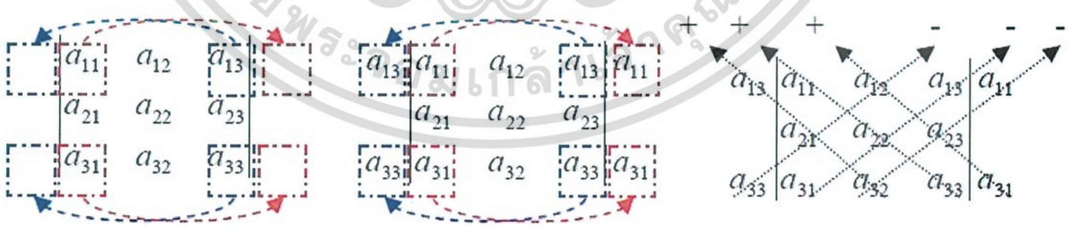
ดังนั้น $\det C=\det A_1 \det A_2 \ldots \det A_n$ □

2.3.3.2 วิธีใหม่ในการคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3×3

จาก [2] Dardan tlajrizaj ได้ค้นพบวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ 3×3 ในรูปแบบต่างๆดังที่จะกล่าวต่อไปนี้

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

เราจะทำการตัดแนวนอนแรกแนวตั้งที่สาม และตัดแนวนอนที่สามแนวตั้งที่สาม (a_{13} และ a_{33}) จากนั้นเราจะตัแนวนอนแรกแนวตั้งที่หนึ่ง และตัดแนวนอนที่สามแนวตั้งที่หนึ่ง (a_{11} และ a_{31}) ซึ่งจะได้เป็นโครงสร้างที่ 1 ดังนี้



โครงสร้างที่ 1

โครงสร้างนี้จะมีรูปแบบ 6 แนวทแยงมุม โดยมี 3 ส่วนที่แตกต่างกันของตัวกำหนด ผลคูณที่ได้จาก 3 แนวทแยงทางด้านซ้ายจะมีค่าเป็นบวกและผลคูณที่ได้จาก 3 แนวทแยงทางด้านขวาจะมีค่าเป็นลบ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ที่เป็นค่าบวกจำนวน 3 พจน์กับผลลัพธ์ที่เป็นค่าลบจำนวน 3 พจน์

พิสูจน์โครงสร้างที่ 1 ดังนี้

$$\begin{array}{cccccc} + & + & & + & - & - \quad - \\ a_{13} & \multicolumn{1}{|c}{a_{11}} & a_{12} & \multicolumn{1}{c|}{a_{13}} & a_{11} & \\ & \multicolumn{1}{|c}{a_{21}} & a_{22} & \multicolumn{1}{c|}{a_{23}} & & \\ a_{33} & \multicolumn{1}{|c}{a_{31}} & a_{32} & \multicolumn{1}{c|}{a_{33}} & a_{31} & \end{array}$$

$$|A| = a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

วิธีใหม่นี้ประกอบด้วย 2 โครงสร้างซึ่งจะมีรูปแบบเหมือนกันและไปในทางเดียวกันเหมือนกับโครงสร้างที่ 1 ที่กล่าวมาข้างต้น แต่จะมีโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนแปลงแนวนอนและแนวตั้งที่แตกต่างจากโครงสร้างที่ 1

__ตัวอย่าง2.57__ ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

__วิธีทำ__

$$|A| = \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ & 5 & 2 & 7 & \\ 4 & 8 & 9 & 4 & 8 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ & 5 & 2 & 7 & \\ 4 & 8 & 9 & 4 & 8 \end{array}$$

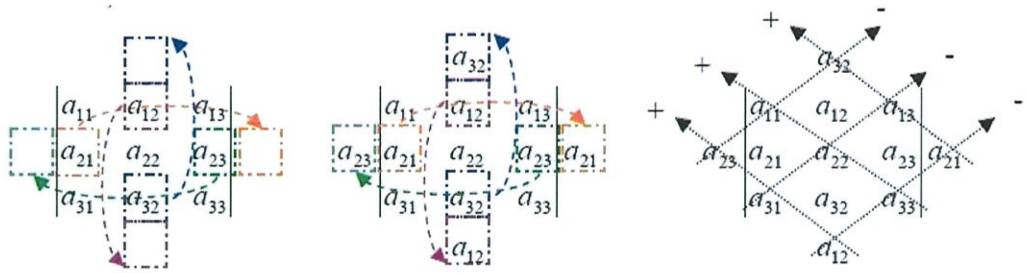
$$= (0 + 24 - 56) - (-20 + 0 + 189)$$

$$= -32 - 169$$

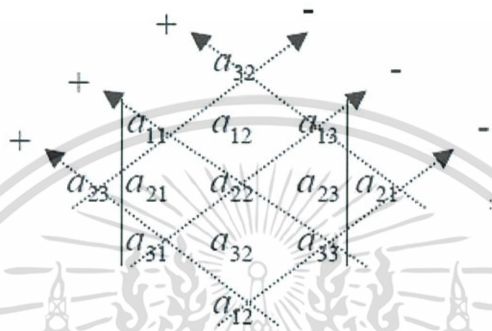
$$= -201$$

#

จากวิธีนี้เป็นที่มาของโครงสร้างที่ 2 และโครงสร้างที่ 3 ต่อไปนี้



โครงสร้างที่ 2

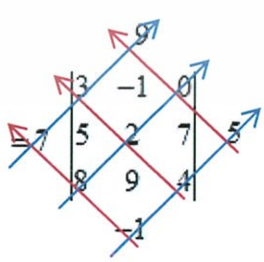


$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

<u>ตัวอย่าง2.58</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

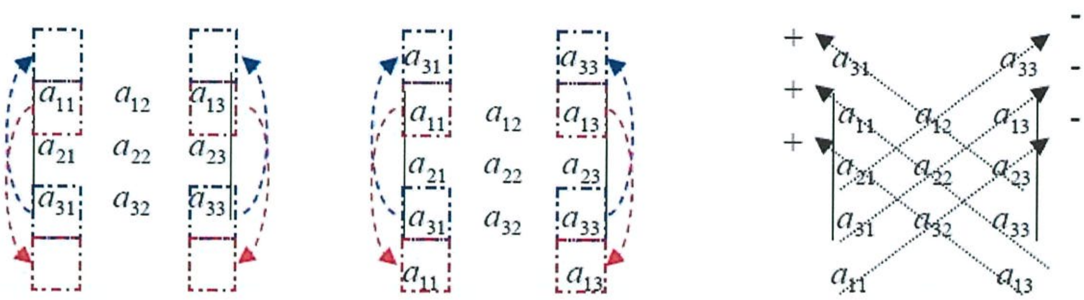
<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{array}{cc} & \quad 9 \\ |A| \; = \; 7 & \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{vmatrix} 5 \\ & \quad -1 \end{array}$$

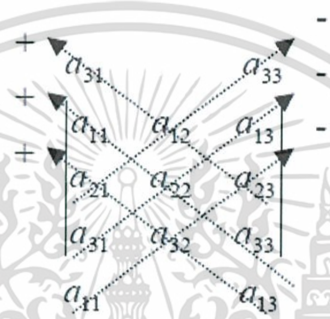


$$= (-56 + 24 + 0) - (189 + 0 - 20)$$

$$= -32 - 169 = -201$$ #



โครงสร้างที่ 3



$$|A| = a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

<u>ตัวอย่าง2.59</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 8 & \quad & 4 \end{matrix} \\ |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & \quad & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} 8 & \quad & 4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & \quad & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$= (-56 + 24 + 0) - (-20 + 0 + 189)$$
$$= -32 - 169 = -201$$ #

2.3.3.3 วิธีใหม่ในการคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4

จาก [5] Qefsere Gjonbalaj และ Armend Salihu ได้ค้นพบวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 โดยใช้กฎของ Sarrus ซึ่งจะทำคล้ายกับการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ได้ดังนี้

$$H_1 = \left|\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right|$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$$
$$+ a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$$

ในรูปแบบนี้เราจะมีรูปแบบ 8 แนวทแยงมุม โดยมี 4 ส่วนที่แตกต่างกันของตัวกำหนด ผลคูณที่ได้จากแนวทแยงแรกและแนวทแยงที่สามของแนวทแยงทางด้านซ้ายและด้านขวาจะมีค่าเป็นลบและผลคูณที่ได้จากแนวทแยงที่สองและแนวทแยงที่สี่ของแนวทแยงทางด้านซ้ายและด้านขวาจะมีค่าเป็นบวก จาก H_1 เราจะทำการสลับแนวนอนที่ 1 กับแนวนอนที่ 2 แล้วคูณกันในลักษณะเดิม จะได้ว่า

$$H_2 = \left|\begin{array}{cccc|ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right|$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$$
$$- a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$$

จาก H_2 เราจะทำการสลับแนวนอนที่ 2 กับแนวนอนที่ 3 แล้วคูณกันในลักษณะเดิม จะได้ว่า

$$H_3 = \left|\begin{array}{cccc|ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right|$$

$$= a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$
$$+ a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$$

ดังนั้นจะได้ค่ามา 3 ค่า คือ H_1, H_2, H_3 ถ้านำค่าทั้งหมดมารวมกันเราจะมี 24 เทอม

$$|A| = H_1 + H_2 + H_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} \\
&\quad + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\
&\quad - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\
&\quad - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\
&\quad + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}
\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง 2.60</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&4&5&2\\0&0&3&2\\2&1&0&5\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$H_1=\left|\begin{array}{cccc|ccc}1&2&3&0&1&2&3\\0&4&5&2&0&4&5\\0&0&3&2&0&0&3\\2&1&0&5&2&1&0\end{array}\right.$$

$$=+60-40+0-0+0-6+0-0=14$$

$$H_1=\left|\begin{array}{cccc|ccc}0&4&5&2&0&4&5\\1&2&3&0&1&2&3\\0&0&3&2&0&0&3\\2&1&0&5&2&1&0\end{array}\right.$$

$$=-0+48-0+0-0+0-0+0=48$$

$$H_3=\left|\begin{array}{cccc|ccc}0&4&5&2&0&4&5\\0&0&3&2&0&0&3\\1&2&3&0&1&2&3\\2&1&0&5&2&1&0\end{array}\right.$$

$$=+0-0+10-0+24-0+0-0=34$$

$H_1+H_2+H_3 = 14+48+34 = 96$ #

2.3.3.4 วิธีใหม่ในการคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 โดยลดรูปขนาดของตัวกำหนดตามวิธีของ Dodgson

จาก [1] วิธีการของ Dodgson จะใช้ได้กับเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 4$

กำหนด เมทริกซ์ ขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 4$ มีรูปแบบทั่วไปคือ $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$

1. ให้ $B=\left[b_{ij}\right]$ มีขนาด $(n-1)\times(n-1)$ โดยที่ $b_{ij}=\begin{vmatrix}a_{ij}&a_{i,j+1}\\a_{i+1,j}&a_{i+1,J+1}\end{vmatrix}$ เมื่อ $i=1,2,\ldots,n-1$ และ $j=1,2,\ldots,n-1$

2. ลดขนาดของเมทริกซ์ B จากข้อ 1 ลง 1 อันดับ โดยการทำดังนี้

$C=\left[c_{ij}\right]$ มีขนาด $(n-2)\times(n-2)$ ได้ $c_{ij}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_{ij} & b_{i,j+1} \\ b_{i+1,j} & b_{i+1,J+1}\end{vmatrix}}{a_{i+1,J+1}}$

3. ลดขนาดเมทริกซ์ C จากข้อ 2 ลง 1 อันดับ ได้ดังนี้ $D=\left[d_{ij}\right]$มีขนาด $(n-3)\times(n-3)$

ได้ $d_{ij}=\dfrac{\begin{vmatrix} c_{ij} & c_{i,j+1} \\ c_{i+1,j} & c_{i+1,J+1}\end{vmatrix}}{b_{i+1,J+1}}$

4. ทำซ้ำจนกว่าจะได้เมทริกซ์ขนาด 1×1 นั่นคือค่าคงที่ ซึ่งเป็นค่าตัวกำหนดของ A

ตัวอย่าง 2.61 ยกตัวอย่างเมทริกซ์ขนาด 4×4

$$A=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1

$$|A|=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}}{-2} & \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}}{-1} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 3

$$=\dfrac{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{-5}$$

$$=-8$$

#

2.3.3.5 วิธีการใหม่ในการคำนวณหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 5$ โดยลดขนาดลงไป 4 อันดับ

จาก [1] Qefsere Gjonbalaj และ Armend Salihu ได้ค้นพบวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 5$ โดยลดขนาดลงไป 4 อันดับ ดังนี้

ให้ $|A_{n\times n}|$ เป็นตัวกำหนดขนาด $n\times n$:

$$|A_{n\times n}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

ทำการดำเนินการมูลฐานให้เมทริกซ์ $A_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ $C_{n\times n}$ มีเงื่อนไขคือ

$C_{2j}=C_{n-1,j}=0$ สำหรับทุก $j\in\{2,3,\ldots,n-1\}$ และ

$C_{i2}=C_{i,n-1}=0$ สำหรับทุก $i\in\{2,3,\ldots,n-1\}$

เรียกว่า Cornice determinants และเขียนให้อยู่ในรูป

$$|(C_{n\times n})|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,n} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & 0 & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & 0 & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & 0 & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n,n-2} & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

ทฤษฎีบท 2.62 สำหรับทุก Cornice determinants $|C_{n\times n}|$ ขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 5$ สามารถคำนวณโดยลดอันดับของ determinant ลง 4 อันดับ

$$|C_{n\times n}|=\left(c_{12}c_{21}c_{n,n-1}c_{n-1,n}-c_{12}c_{2n}c_{n,n-1}c_{n-1,1}-c_{21}c_{n2}c_{1,n-1}c_{n-1,n}+c_{1,n-1}c_{2n}c_{n2}c_{n-1,1}\right)\left|C_{(n-4)\times(n-4)}\right|,$$

เมื่อ $\left|C_{(n-4)\times(n-4)}\right|=\begin{vmatrix} c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$

ให้

$$|C_{n\times n}|=\left(c_{12}c_{21}c_{n,n-1}c_{n-1,n}-c_{12}c_{2n}c_{n,n-1}c_{n-1,1}-c_{21}c_{n2}c_{1,n-1}c_{n-1,n}+c_{1,n-1}c_{2n}c_{n2}c_{n-1,1}\right)\left|C_{(n-4)\times(n-4)}\right| \qquad (8)$$

หรือแสดงตามรูป ดังนี้

$$\left|(\mathrm{C}_{n\times n})\right| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,n} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & 0 & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & 0 & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & 0 & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n,n-2} & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{vmatrix}$$

พิสูจน์ ให้ $n=5$ โดยการกระจายลาปลาซ จะได้ว่า

$$\left|C_{5\times 5}\right| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{25} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & 0 & c_{35} \\ c_{41} & 0 & 0 & 0 & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}c_{11}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{25} \\ 0 & c_{33} & 0 & c_{35} \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} \\ c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}c_{12}\begin{vmatrix} c_{21} & 0 & 0 & c_{25} \\ c_{31} & c_{33} & 0 & c_{35} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{45} \\ c_{51} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}c_{13}\begin{vmatrix} c_{21} & 0 & 0 & c_{25} \\ c_{31} & 0 & 0 & c_{35} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}c_{14}\begin{vmatrix} c_{21} & 0 & 0 & c_{25} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{35} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{55} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+5}c_{15}\begin{vmatrix} c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} \end{vmatrix}$$

$$= -c_{12}\left((-1)^{1+1}c_{21}\begin{vmatrix} c_{33} & 0 & c_{35} \\ 0 & 0 & c_{45} \\ c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}c_{25}\begin{vmatrix} c_{31} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{54} \end{vmatrix} \right)$$

$$-c_{14}\left((-1)^{1+1}c_{21}\begin{vmatrix} 0 & c_{33} & c_{35} \\ 0 & 0 & c_{45} \\ c_{52} & c_{53} & c_{55} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}c_{25}\begin{vmatrix} c_{31} & 0 & c_{33} \\ c_{41} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \end{vmatrix} \right)$$

$$= -c_{12}\left[c_{21}\left(-c_{33}c_{45}c_{54}\right) - c_{25}\left(-c_{33}c_{41}c_{54}\right)\right] - c_{14}\left[c_{21}\left(c_{33}c_{45}c_{52}\right) - c_{25}\left(c_{33}c_{41}c_{52}\right)\right]$$

$$= c_{12}c_{21}c_{33}c_{45}c_{54} - c_{12}c_{25}c_{33}c_{41}c_{54} - c_{14}c_{21}c_{33}c_{45}c_{52} + c_{14}c_{25}c_{33}c_{41}c_{52}$$

$$= \left(c_{12}c_{21}c_{45}c_{54} - c_{12}c_{25}c_{41}c_{54} - c_{14}c_{21}c_{45}c_{52} + c_{14}c_{25}c_{41}c_{52}\right)c_{33}$$

ดังนั้น สอดคล้องกับรูปแบบสมการที่ (8)

ต่อไปนี้ เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบท Cornice determinants $|C_{n\times n}|$ ขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 6$ โดยการกระจายลาปลาซโดยเลือกแนวตั้งที่ 2 จะได้ว่า

$$|C_{n\times n}|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,n} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & 0 & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & 0 & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & 0 & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n,n-2} & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2}c_{12}\begin{vmatrix} c_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2n} \\ c_{31} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & 0 & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & 0 & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n3} & \cdots & c_{n,n-2} & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$+(-1)^{n+2}c_{n2}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2n} \\ c_{31} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & 0 & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & 0 & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1,n} \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}. \tag{9}$$

ตัวกำหนดของสมการที่ (9) สามารถกระจายลาปลาซในหลักที่ $n-1$ จะได้ว่า

$$|C_{n\times n}|=(-1)^{1+2}c_{12}(-1)^{n-1+n-2}c_{n,n-1}\begin{vmatrix} c_{21} & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ c_{31} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$+(-1)^{n+2}c_{n2}(-1)^{1+n-2}c_{1,n-1}\begin{vmatrix} c_{21} & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ c_{31} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$= \left((-1)^{2n} c_{12} c_{n,n-1} + (-1)^{2n+1} c_{n2} c_{1,n-1}\right) \begin{vmatrix} c_{21} & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ c_{31} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

ดังนั้น

$$\left|C_{n\times n}\right| = \left((-1)^{2n} c_{12} c_{n,n-1} + (-1)^{2n+1} c_{n2} c_{1,n-1}\right) \begin{vmatrix} c_{21} & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ c_{31} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n} \\ c_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

ใช้การกระจายลาปลาซโดยเลือกแนวนอนที่ 1 จะได้ว่า

$$\left|C_{n\times n}\right| = (c_{12} c_{n,n-1} - c_{n2} c_{1,n-1}) \left[(-1)^{1+1} c_{21} \begin{vmatrix} c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} & c_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,\mathrm{n}} \end{vmatrix}_{(n-3)\times(\mathrm{n}-3)} \right.$$

$$\left. +(-1)^{1+n-2} c_{2n} \begin{vmatrix} c_{31} & c_{33} & \cdots & c_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,1} & c_{n-2,3} & \cdots & c_{n-2,n-2} \\ c_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(n-3)\times(\mathrm{n}-3)} \right] \quad (10)$$

ตัวกำหนดของสมการที่ (10) ใช้กระจายลาปลาซในแนวนอนสุดท้าย จะได้ว่า $\left|C_{n\times n}\right|$

$$= (c_{12} c_{n,n-1} - c_{n2} c_{1,n-1}) \left[c_{21} (-1)^{n-3+n-3} c_{n-1,n} \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3,n-2} \\ c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}_{(n-4)\times(\mathrm{n}-4)} \right.$$

$$\left. +(-1)^{n-1} c_{2n} (-1)^{n-2} c_{n-1,1} \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3,n-2} \\ c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}_{(n-4)\times(\mathrm{n}-4)} \right]$$

$$= (c_{12}c_{n,n-1} - c_{n2}c_{1,n-1})(c_{21}(-1)^{n-3+n-3}c_{n-1,n} + (-1)^{n-1}c_{2n}(-1)^{n-2}c_{n-1,1})\begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3,n-2} \\ c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}_{(n-4)\times(n-4)}$$

$$= (c_{12}c_{n,n-1} - c_{n2}c_{1,n-1})((-1)^{2n-6}c_{21}c_{n-1,n} + (-1)^{2n-3}c_{2n}c_{n-1,1})\begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3,n-2} \\ c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}_{(n-4)\times(n-4)}$$

$$= (c_{12}c_{n,n-1} - c_{n2}c_{1,n-1})((+1)c_{21}c_{n-1,n} + (-1)c_{2n}c_{n-1,1})\begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3,n-2} \\ c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}_{(n-4)\times(n-4)}$$

$$= (c_{12}c_{n,n-1}c_{21}c_{n-1,n} - c_{12}c_{n,n-1}c_{2n}c_{n-1,1} - c_{n2}c_{1,n-1}c_{21}c_{n-1,n} + c_{n2}c_{1,n-1}c_{2n}c_{n-1,1})\begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3,n-2} \\ c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}_{(n-4)\times(n-4)}$$

$$= (c_{12}c_{21}c_{n,n-1}c_{n-1,n} - c_{12}c_{2n}c_{n,n-1}c_{n-1,1} - c_{21}c_{n2}c_{1,n-1}c_{n-1,n} + c_{1,n-1}c_{2n}c_{n2}c_{n-1,1})\begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3,n-2} \\ c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2,3} & c_{n-2,4} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{vmatrix}_{(n-4)\times(n-4)}$$

$$= (c_{12}c_{21}c_{n,n-1}c_{n-1,n} - c_{12}c_{2n}c_{n,n-1}c_{n-1,1} - c_{21}c_{n2}c_{1,n-1}c_{n-1,n} + c_{1,n-1}c_{2n}c_{n2}c_{n-1,1})\left|C_{(n-4)\times(n-4)}\right|$$

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 2.62

<u>ตัวอย่าง 2.63</u>

$$\left|C_{6\times 6}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 11 & 9 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & -5 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 10 & 9 & -2 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$= \left[8\cdot1\cdot5\cdot11 - 1\cdot2\cdot3\cdot5 - 8\cdot9\cdot9\cdot11 + 9\cdot2\cdot3\cdot9\right]\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (440 - 30 - 7128 + 486)\cdot 50$$ #

$$= -311600$$

บทที่ 3

ตัวกำหนดของบางเมทริกซ์

จากการศึกษาและรวบรวมวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดต่างๆ พบว่าวิธีการลดขนาดลง 4 อันดับนั้นทำได้ค่อนข้างยาก เนื่องจากต้องลดรูปเมทริกซ์ $A_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ $C_{n\times n}$ ปัญหาพิเศษต่อไปนี้จะเป็นการค้นหาแนวทางการลดรูป $A_{n\times n}$ เป็น $C_{n\times n}$ โดยมีการทดสอบกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ เมทริกซ์สามเหลี่ยมบนและเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง แล้วจะนำไปประยุกต์ใช้กับการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรใดๆ ซึ่งจะกล่าวในบท 4

3.1 เมทริกซ์เอกลักษณ์

กรณีเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n\times n$ โดยการลดขนาดลงไป 4 อันดับ ได้ดังต่อไปนี้

1. สลับแนวตั้งที่ 1 และแนวตั้งที่ 2
2. สลับแนวตั้งที่ n และแนวตั้งที่ $n-1$
3. หาตัวกำหนดโดยใช้ทฤษฎีบท 2.62

<u>**ตัวอย่าง 3.1**</u> เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 5×5 (I_5)

$$|\mathrm{I}_5| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_4 \leftrightarrow C_5$$

$$= (+1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0)|1|$$

$$= (1)|1| = 1$$

#

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ $(\mathrm{I}_{n\times n})$

$$\left|\mathrm{I}_{n\times n}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_{n-1} \leftrightarrow C_n$$

$$= (+1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1) = 1$$

#

3.2 เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

กรณีเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $n \times n$ โดยการลดขนาดลงไป 4 อันดับ ได้ดังต่อไปนี้

1. สลับแนวนอนที่ 2 และแนวนอนที่ n
2. สลับแนวตั้งที่ 1 และแนวตั้งที่ $n-1$
3. หาตัวกำหนดโดยใช้ทฤษฎีบท 2.62

ตัวอย่าง 3.3 เมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด 5×5 $(A_{5\times 5})$

$$
\begin{aligned}
|A_{5\times5}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}_{5\times5} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{vmatrix}_{5\times5} \qquad R_2 \leftrightarrow R_5 \\
&= \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \\ a_{34} & 0 & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{44} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} \end{vmatrix}_{5\times5} \qquad C_1 \leftrightarrow C_4 \\
&= (a_{12}\cdot 0\cdot 0\cdot a_{45} - a_{12}a_{55}\cdot 0\cdot a_{44} - 0\cdot a_{22}a_{11}a_{45} + a_{11}a_{55}a_{22}a_{44})|a_{33}| \\
&= a_{11}a_{55}a_{22}a_{44}a_{33} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}
\end{aligned}
$$

#

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> เมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $n\times n$ $\left(A_{n\times n}\right)$

$$
\begin{aligned}
\left|A_{n\times n}\right| &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n}
\end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n}
\end{vmatrix} \qquad R_2 \leftrightarrow R_n \\
&= \begin{vmatrix}
a_{1,n-1} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{11} & a_{1n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \\
a_{3,n-1} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-2,n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & a_{n-2,n} \\
a_{n-1,n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\
a_{2,n-1} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & 0 & a_{2n}
\end{vmatrix} \qquad C_n \leftrightarrow C_{n-1} \\
&= (+a_{12}\cdot 0\cdot 0\cdot a_{n-1,n} - a_{12}a_{n,n}\cdot 0\cdot a_{n-1,n-1} - 0\cdot a_{22}a_{11}a_{n-1,n} + a_{11}a_{nn}a_{22}a_{n-1,n-1})\begin{vmatrix}
a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3,n-3} & a_{3,n-2} \\
0 & a_{44} & \cdots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{n-3,n-3} & a_{n-3,n-2} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2,n-2}
\end{vmatrix} \\
&= (a_{11}a_{22}a_{n-1,n-1}a_{nn})\begin{vmatrix}
a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3,n-3} & a_{3,n-2} \\
0 & a_{44} & \cdots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{n-3,n-3} & a_{n-3,n-2} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2,n-2}
\end{vmatrix} \\
&= (a_{11}a_{22}a_{n-1,n-1}a_{nn})(a_{33}a_{44}\ldots a_{n-3,n-3}a_{n-2,n-2}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\ldots a_{n-3,n-3}a_{n-2,n-2}a_{n-,n-1}a_{nn}
\end{aligned}
$$

#

3.3 เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

กรณีเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างขนาด $n \times n$ โดยการลดขนาดลงไป 4 อันดับ ได้ดังต่อไปนี้

1. สลับแนวนอนที่ 1 และแนวนอนที่ $n-1$
2. สลับแนวตั้งที่ 2 และแนวตั้งที่ n
3. หาตัวกำหนดโดยใช้ทฤษฎีบท 2.62

<u>**ตัวอย่าง 3.5**</u> เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างขนาด 5×5 $(B_{5\times5})$

$$
\begin{aligned}
\left|B_{5\times5}\right| &= \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix}_{5\times5} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 \\ b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix}_{5\times5} \qquad R_1 \leftrightarrow R_4 \\
&= \begin{vmatrix} b_{41} & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{42} \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & b_{22} \\ b_{31} & 0 & b_{33} & 0 & b_{32} \\ b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{55} & b_{53} & b_{54} & b_{52} \end{vmatrix}_{5\times5} \qquad C_2 \leftrightarrow C_5 \\
&= (0\cdot b_{21}b_{54}\cdot 0 - 0\cdot b_{22}b_{54}b_{11} - b_{21}b_{55}b_{44}\cdot 0 + b_{44}b_{22}b_{55}b_{11})\left|b_{33}\right| \\
&= b_{44}b_{22}b_{55}b_{11}b_{33} \\
&= b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}
\end{aligned}
$$

#

<u>ตัวอย่าง 3.6</u> เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างขนาด $n\times n$ $(B_{n\times n})$

$$|B_{n\times n}| = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2,1} & b_{n-2,2} & b_{n-2,3} & \cdots & b_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-2} & b_{n-1,n-1} & 0 \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \cdots & b_{n,n-2} & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-2} & b_{n-1,n-1} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2,1} & b_{n-2,2} & b_{n-2,3} & \cdots & b_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \cdots & b_{n,n-2} & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{vmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_{n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{n-1,1} & 0 & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n-2} & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & 0 & 0 & b_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2,1} & 0 & b_{n-2,3} & \cdots & b_{n-2,n-2} & 0 & b_{n-2,2} \\ b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{n,1} & b_{n,n} & b_{n,3} & \cdots & b_{n,n-2} & b_{n,n-1} & b_{n,2} \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftrightarrow C_n$$

$$= (0\cdot 0\cdot b_{n,n-1}\cdot 0 - 0\cdot b_{22}b_{n,n-1}a_{11} - 0\cdot b_{nn}b_{n-1,n-1}\cdot 0 + b_{n-1,n-1}b_{22}b_{nn}b_{11})$$

$$\cdot\begin{vmatrix} b_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{43} & b_{44} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-3,3} & b_{n-3,4} & \cdots & b_{n-3,n-3} & 0 \\ b_{n-2,3} & b_{n-2,4} & \cdots & b_{n-2,n-3} & b_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (b_{n-1,n-1}b_{22}b_{nn}b_{11})(b_{33}a_{44}\ldots b_{n-3,n-3}b_{n-2,n-2})$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}\ldots b_{n-3,n-3}b_{n-2,n-2}b_{n-,n-1}b_{nn}$$ #

บทที่ 4

กระบวนการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศร

เริ่มต้นเป็นการศึกษางานวิจัยของ Gerzson Kéri [5] เกี่ยวกับสูตรของ Sherman – Morrison ต่อจากนั้นจะเป็นการแสดงวิธีการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรรูปแบบทั่วไปโดยใช้วิธีการลดรูป 4 อันดับ แล้วจะได้สูตรทั่วไปของตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรทั่วไป สุดท้ายเป็นการนำสูตรมาตรวจสอบว่าถูกต้องกับสูตรของตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรเฉพาะแบบ

4.1 สูตรของ Sherman – Morrison และหัวข้อที่เกี่ยวข้อง

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $r \times r$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

ให้ u และ v เป็นเวกเตอร์แนวตั้งขนาด $r \times 1$

ให้ U และ V เป็นเมทริกซ์ขนาด $r \times k$

ให้ $\mathrm{I}^{(r)}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ r

ให้ h เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

บทตั้ง 4.1 (Sherman-Morrison-Woodbury formula)

ถ้า $A, A+huv^T$ และ $D^{(k)}(h)$ มีผกผัน ซึ่ง $D^{(k)}(h) = \mathrm{I}^{(k)} + hV^TA^{-1}U$ แล้ว

$(A+hUV^T)^{-1} = A^{-1} - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}$ (11)

พิสูจน์

เนื่องจาก $(A+hUV^T)\{A^{-1} - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}\}$

$$= AA^{-1} + hUV^TA^{-1} - hAA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1} - h^2UV^TA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hUV^TA^{-1} - hI^{(r)}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1} - h^2UV^TA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hUV^TA^{-1} - hU(\mathrm{I}^{(k)} + hV^TA^{-1}U)[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hUV^TA^{-1} - hU[D^{(k)}(h)][D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hUV^TA^{-1} - hUI^{(k)}V^TA^{-1}$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hUV^TA^{-1} - hUV^TA^{-1}$$
$$= \mathrm{I}^{(r)}$$

เนื่องจาก $\{A^{-1} - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}\}(A+hUV^T)$

$$= A^{-1}A - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}A + hA^{-1}UV^T - h^2A^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}UV^T$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} - hA^{-1}UV^T - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}A - h^2A^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}UV^T$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hA^{-1}UV^T - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TI^{(r)} - h^2A^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}UV^T$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hA^{-1}UV^T - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}(\mathrm{I}^{(r)} + hV^TA^{-1}U)V^T$$

$$= \mathrm{I}^{(r)} + hA^{-1}UV^T - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}[D^{(k)}(h)]V^T$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hA^{-1}UV^T - hA^{-1}U\mathrm{I}^{(k)}V^T$$
$$= \mathrm{I}^{(r)} + hA^{-1}UV^T - hA^{-1}UV^T$$
$$= \mathrm{I}^{(r)}$$

ดังนั้น $(A+hUV^T)^{-1} = A^{-1} - hA^{-1}U[D^{(k)}(h)]^{-1}V^TA^{-1}$ □

บทตั้ง 4.2 (Sherman-Morrison formula)
ถ้า A มีผกผัน โดยที่ $1+hv^TA^{-1}u \neq 0$ และ $A+huv^T$ แล้ว

$$(A+huv^T)^{-1} = A^{-1} - h \cdot \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+hv^TA^{-1}u} \tag{12}$$

พิสูจน์ พิจารณาบทตั้ง 4.1 ให้ U และ V เป็นเมทริกซ์ขนาด $r \times 1$
นั่นคือ แทน U ด้วยเวกเตอร์ u และ V ด้วยเวกเตอร์ v
พิจารณา $(D^{(k)}(h))^{-1}$
เนื่องจาก $k=1$ ดังนั้น $D^{(k)}(h) = D^{(1)}(h) = I^{(1)} + hv^TA^{-1}u$
$$= 1 + hv^TA^{-1}u$$
แทนในบทตั้ง 4.1 จะได้ว่า $(A+huv^T)^{-1} = A^{-1} - hA^{-1}u[1+hv^TA^{-1}u]^{-1}v^TA^{-1}$
$$= A^{-1} - \frac{hA^{-1}uv^TA^{-1}}{1+hv^TA^{-1}u}$$ □

บทตั้ง 4.3 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส
$\left|A+B\right| = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\cdots\sum_{i_r=0}^{1}\left|C^{(i_1i_2\ldots i_r)}\right|$ โดยใช้แนวตั้งที่ j ของเมทริกซ์ $C_j^{(i_1i_2\ldots i_r)}$
เมื่อนิยามเมทริกซ์ $C_j^{(i_1i_2\ldots i_r)}$ ดังนี้
$C_j^{(i_1i_2\ldots i_r)} = a_j$ ถ้า $i_j = 0$ และ $C_j^{(i_1i_2\ldots i_r)} = b_j$ ถ้า $i_j = 1$ เมื่อ $(j = 1,2,\ldots,r)$

บทตั้ง 4.4 ถ้าค่าลำดับชั้นของ $B \le 1$ แล้ว

$$\left|A+B\right| = \left|A\right| + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} b_{ij} A_{ij}$$

พิสูจน์ จาก บทตั้ง 4.3 $\left|A+B\right| = \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \cdots \sum_{i_r=0}^{1} \left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right|$

เราจะพิจารณา $C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}$ โดยแบ่งเป็น 3 กรณีตามค่าของ i_j เมื่อ $j = 1,2,\ldots,r$

กรณีที่ 1 ถ้า $i_j = 0$ สำหรับทุกค่า $j = 1,2,\ldots,r$ แล้ว $\left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right| = \left|A\right|$

กรณีที่ 2 ถ้า $i_1 + i_2 + \ldots + i_r \ge 2$ แล้ว $C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}$ มีอย่างน้อย 2 หลักจากเมทริกซ์ B เนื่องจากค่าลำดับชั้นของ $B \le 1$ แสดงว่า $C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}$ มีอย่างน้อย 1 หลักมีสมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมด แล้ว $\left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right| = 0$

กรณีที่ 3 ถ้า $i_j = 1$ และ $i_t = 0$ สำหรับทุก $t \in \{1,2,\ldots,r\} - \{j\}$

แล้ว $\left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right| = \left|a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{j-1} \quad b_j \quad a_{j+1} \quad \ldots \quad a_r\right| = \sum_{i=1}^{r} b_{ij} A_{ij}$

เมื่อ A_{ij} คือ โคแฟคเตอร์ที่ (i,j)

จาก 3 กรณีจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|A+B\right| &= \left|C^{(0,0,\ldots,0)}\right| + \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r \ge 2} \left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right| + \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r = 1} \left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right| \\
&= \left|A\right| + \sum 0 + \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r = 1} \left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right| \\
&= \left|A\right| + \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r = 1} \left|C^{(i_1 i_2 \ldots i_r)}\right| \\
&= \left|A\right| + \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} b_{ij} A_{ij} \right) \\
&= \left|A\right| + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} b_{ij} A_{ij}
\end{aligned}$$

$\therefore \left|A+B\right| = \left|A\right| + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} b_{ij} A_{ij}$ □

บทแทรก 4.5 Sherman – Morrison huv^T มีค่าลำดับชั้นเป็น 1 แล้ว
$\left|A+huv^T\right| = \left|A\right| + hv^T(adjA)u$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $\left|A+huv^T\right| = \left|A\right| + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} hu_i v_j A_{ij}$

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,r-1} & a_{1,r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,r-1} & a_{r-1,r} \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r-1} & a_{r,r} \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$ และ $v^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_r \end{bmatrix}$

ได้ว่า

$$huv^T = \begin{bmatrix} hu_1v_1 & hu_1v_2 & \cdots & hu_1v_{r-1} & hu_1v_r \\ hu_2v_1 & hu_2v_2 & \cdots & hu_2v_{r-1} & hu_2v_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ hu_{r-1}v_1 & hu_{r-1}v_2 & \cdots & hu_{r-1}v_{r-1} & hu_{r-1}v_r \\ hu_rv_1 & hu_rv_2 & \cdots & hu_rv_{r-1} & hu_rv_r \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $(huv^T)_{ij} = hu_iv_j$

เนื่องจาก $rank(huv^T) = 1$ และโดยบทตั้ง 4.4 ได้ว่า

$$\left|A+huv^T\right| = \left|A\right| + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h(uv^T)_{ij}A_{ij} = \left|A\right| + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} hu_iv_jA_{ij}$$

จงแสดงว่า $\left|A\right| + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} hu_iv_jA_{ij} = \left|A\right| + hv^T(adjA)u$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\left|A\right| + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} hu_iv_jA_{ij} \\ &= \left|A\right| + \sum_{j=1}^{r} hu_1v_jA_{1i} + \sum_{j=2}^{r} hu_2v_jA_{2i} + \dots + \sum_{j=1}^{r} hu_rv_jA_{ri} \\ &= \left|A\right| + (hu_1v_1A_{11} + hu_1v_2A_{12} + \dots + hu_1v_rA_{1r}) + (hu_2v_1A_{21} + hu_2v_2A_{22} + \dots + hu_2v_rA_{2r}) \\ &\quad + \dots + (hu_rv_1A_{r1} + hu_rv_2A_{r2} + \dots + hu_rv_rA_{rr}) \\ &= \left|A\right| + h\{(u_1v_1A_{11} + u_1v_2A_{12} + \dots + u_1v_rA_{1r}) + (u_2v_1A_{21} + u_2v_2A_{22} + \dots + u_2v_rA_{2r}) \\ &\quad + \dots + (u_rv_1A_{r1} + u_rv_2A_{r2} + \dots + u_rv_rA_{rr})\} \\ &= \left|A\right| + h\{(v_1A_{11} + v_2A_{12} + \dots + v_rA_{1r})u_1 + (v_1A_{21} + v_2A_{22} + \dots + v_rA_{2r})u_2 \\ &\quad + \dots + (v_1A_{r1} + v_2A_{r2} + \dots + v_rA_{rr})u_r\} \end{aligned}$$

$$= \left|A\right| + h\left[v_1A_{11} + v_2A_{12} + \ldots + v_rA_{1r} \quad v_1A_{21} + v_2A_{22} + \ldots + v_rA_{2r} \quad \cdots \quad v_1A_{r1} + v_2A_{r2} + \ldots + v_rA_{rr}\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$= \left|A\right| + h\left[v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_r\right]\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{r1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r} & A_{2r} & \ldots & A_{rr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$= \left|A\right| + hv^T(adjA)u$$

ดังนั้น $\left|A + huv^T\right| = \left|A\right| + hv^T(adjA)u$ □

บทแทรก 4.6 ถ้า A มีผกผัน แล้ว $\left|A + huv^T\right| = \left|A\right| \cdot (1 + hv^TA^{-1}u)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $adjA = \left|A\right| \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot \left|A\right|$ และจากบทแทรก 4.5

$$\begin{aligned} \left|A + huv^T\right| &= \left|A\right| + hv^T(adjA)u \\ &= \left|A\right| + hv^TA^{-1} \cdot \left|A\right|u \\ &= \left|A\right|(1 + hv^TA^{-1}u) \end{aligned}$$ □

บทแทรก 4.7 ถ้า A และ $A + huv^T$ มีผกผัน แล้ว $1 + hv^TA^{-1}u \neq 0$

พิสูจน์ จากบทแทรก 4.6

$$\left|A + huv^T\right| = \left|A\right| \cdot (1 + hv^TA^{-1}u)$$

เนื่องจาก A และ $1 + hv^TA^{-1}u \neq 0$ หาผกผันได้

ดังนั้น $\left|A + huv^T\right| \neq 0$, $\left|A\right| \neq 0$

ดังนั้น $1 + hv^TA^{-1}u \neq 0$ □

บทตั้ง 4.8 ให้ $D = D^{(k)} = \left[d_{ij}\right]_{i,j=1,2,\ldots,k}$ แทนเมทริกซ์ขนาด $k \times k$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน และให้เมทริกซ์ $D^{(t)} = \left[d_{ij}\right]_{i,j=1,2,\ldots,t}$ เป็นเมทริกซ์ย่อยอันดับแรกของเมทริกซ์ D แล้ว $\left|D^{(k)}\right| = d_{kk} \cdot \left|D^{(k-1)}\right| - \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}(adj\,D^{(k-1)})_{ij}d_{ki}d_{jk}$

พิสูจน์ เราจะทำการหาตัวกำหนดโดยการกระจายลาปลาซโดยเลือกแถวสุดท้ายของเมทริกซ์ $D^{(k)}$ จากนั้นคำนวณไมเนอร์ตามแต่ละตำแหน่งสมาชิก โดยทำการกระจายลาปลาซซึ่งเลือกหลักสุดท้ายของไมเนอร์ตามแต่ละตำแหน่งสมาชิก โดยเราจะยกเว้นการคำนวณไมเนอร์ของตำแหน่ง d_{kk} ซึ่งก็คือ $\left|D^{(k-1)}\right|$ ดังนั้นจะได้สมการตามบทตั้ง 4.8 □

ทฤษฎีบท 4.9 Sherman-Morrison-Woodbury formula for the determinant
ถ้า A และ $D^{(k)}(h)$ มีผกผัน แล้ว $\left|A+hUV^T\right|=|A|\cdot\left|D^{(k)}(h)\right|$
เมื่อ $D^{(k)}(h)=I^{(k)}+hV^TA^{-1}U$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนขนาดของ k
ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$$\left|A+hUV^T\right|=|A|\cdot\left|D^{(k)}(h)\right| \text{ เมื่อ } D^{(k)}(h)=I^{(k)}+hV^TA^{-1}U$$

พิจารณา $P(1)$ เมื่อ $k=1$ จากบทแทรก 4.6 ได้ว่า
ถ้า A มีผกผัน แล้ว $\left|A+hUV^T\right|=|A|\left(1+hv^TA^{-1}u\right)$
โดยที่ $1+hv^TA^{-1}u=I^{(1)}+hv^TA^{-1}u$

$$=D^{(1)}(h)$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $U=[u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_k]$ เมื่อ u_i เป็นเวกเตอร์แนวตั้งขนาด $r\times 1$
และ $V=[v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_k]$ เมื่อ v_i เป็นเวกเตอร์แนวตั้งขนาด $r\times 1$
ดังนั้น $UV^T=\sum_{i=1}^{k}u_iv_i^T$
ดังนั้น $A+hUV^T=A+h\sum_{i=1}^{k}u_iv_i^T$
สมมติ $P(k-1)$ เป็นจริง นั่นคือ $\left|A+hUV^T\right|=|A|\cdot\left|D^{(k-1)}(h)\right|$
เมื่อ $D^{(k-1)}(h)=I^{(k-1)}+hV^TA^{-1}U$
พิจารณาที่ $P(k)$

$$\left|A+hUV^T\right|=\left|A+h\sum_{i=1}^{k}u_iv_i^T\right|$$

$$=\left|\left(A+h\sum_{i=1}^{k-1}u_iv_i^T\right)+hu_kv_k^T\right|$$

จากบทแทรก 4.6

$$\left|A+hUV^T\right|=\left|A+h\sum_{i=1}^{k-1}u_iv_i^T\right|\cdot\left(1+hv_k^T\left(A+h\sum_{i=1}^{k-1}u_iv_i^T\right)^{-1}u_k\right) \tag{14}$$

จากสมการ (14) พิจารณา $\left(A+h\sum_{i=1}^{k-1}u_iv_i^T\right)^{-1}$ จากบทตั้ง 4.1 จะได้ว่า

$$\left(A+h\sum_{i=1}^{k-1}u_iv_i^T\right)^{-1}=A^{-1}-hA^{-1}\left[U^{(k-1)}\right]\left[D^{(k-1)}(h)\right]^{-1}\left[V^{(k-1)}\right]^TA^{-1}$$

เมื่อ $U^{(k-1)}=[u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_k]$ และ $V^{(k-1)}=[v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_k]$
เนื่องจาก $D^{(k)}(h)=I^{(k)}+hV^TA^{-1}U$ และ $(hV^TA^{-1}U)_{ij}=hv_iA^{-1}u_j$

นิยามสมาชิก d_{ij} ของเมทริกซ์ $D^{(k)}(h)$ ดังนี้

$$d_{ij} = 0 + hv_i A^{-1} u_j \qquad \text{เมื่อ } i \neq j \text{ และ}$$

$$d_{ii} = 1 + hv_i A^{-1} u_i \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, \ldots, k$$

ดังนั้น

$$hv_k^T \left(A + h\sum_{i=1}^{k-1} u_i v_i^T \right)^{-1} u_k = hv_k^T \left(A^{-1} - hA^{-1}\left[U^{(k-1)}\right]\left[D^{(k-1)}(h)\right]^{-1}\left[V^{(k-1)}\right]^T A^{-1} \right) u$$

$$= hv_k^T \left(A^{-1} - hA^{-1}\left[U^{(k-1)}\right] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k-1}\left[D^{(k-1)}(h)\right]_{1j}^{-1} v_j^T \\ \sum_{j=1}^{k-1}\left[D^{(k-1)}(h)\right]_{2j}^{-1} v_j^T \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k-1}\left[D^{(k-1)}(h)\right]_{k-1,j}^{-1} v_j^T \end{bmatrix} A^{-1} \right) u_k$$

$$= hv_k^T \left(A^{-1} - hA^{-1} \left(u_1 \sum_{j=1}^{k-1}\left[D^{(k-1)}(h)\right]_{1j}^{-1} v_j^T + u_2 \sum_{j=1}^{k-1}\left[D^{(k-1)}(h)\right]_{2j}^{-1} v_j^T + \ldots + u_{k-1} \sum_{j=1}^{k-1}\left[D^{(k-1)}(h)\right]_{k-1,j}^{-1} v_j^T \right) A^{-1} \right) u_k$$

$$= hv_k^T \left(A^{-1} - hA^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i \sum_{j=1}^{k-1}\left[D^{(k-1)}(h)\right]_{ij}^{-1} v_j^T \right) A^{-1} \right) u_k$$

$$= hv_k^T \left(A^{-1} - hA^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} u_i \left[D^{(k-1)}(h)\right]_{ij}^{-1} v_j^T \right) A^{-1} \right) u_k$$

$$= hv_k^T \left(A^{-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} hA^{-1} u_i \left[D^{(k-1)}(h)\right]_{ij}^{-1} v_j^T A^{-1} \right) u_k$$

$$= hv_k^T A^{-1} u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \left(hv_k^T A^{-1} u_i \right) \left[D^{(k-1)}(h)\right]_{ij}^{-1} \left(hv_j^T A^{-1} u_k \right)$$

$$= hv_k^T A^{-1} u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} d_{ki}(h) \cdot \frac{\left(adjD^{(k-1)}(h)\right)_{ij}}{\left|D^{(k-1)}(h)\right|} \cdot d_{jk}(h)$$

แทนลงในสมการที่ (14) จะได้ว่า

$$\left|A + hUV^T\right| = \left|A + h\sum_{i=1}^{k-1} u_i v_i^T\right| \cdot \left(1 + hv_k^T A^{-1} u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} d_{ki}(h) \cdot \frac{\left(adjD^{(k-1)}(h)\right)_{ij}}{\left|D^{(k-1)}(h)\right|} \cdot d_{jk}(h) \right)$$

$$= |A| \cdot \left|D^{(k-1)}(h)\right| \cdot \left(d_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} d_{ki}(h) \cdot \frac{\left(adjD^{(k-1)}(h)\right)_{ij}}{\left|D^{(k-1)}(h)\right|} \cdot d_{jk}(h) \right)$$

$$= |A| \cdot \left\{ d_{kk} \cdot \left|D^{(k-1)}(h)\right| - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \left(adjD^{(k-1)}(h)\right)_{ij} d_{ki}(h) d_{jk}(h) \right\}$$

$$= |A| \cdot \left|D^{(k)}(h)\right|$$

ดังนั้น $P(k)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ □

4.2 สูตรการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรรูปแบบเฉพาะ

ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์หัวลูกศรขนาด $n\times n$ เมื่อ $n\geq 2$

เมื่อ a,b,c,d เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ $a-b-c\neq 0$
เราสามารถเขียนเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูป $A=B+UV^T$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b-c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & c \\ 0 & c \\ \vdots & \vdots \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $B=\begin{bmatrix} a-b-c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & c \\ 0 & c \\ \vdots & \vdots \\ 0 & c \end{bmatrix}, V^T=\begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\det(B)\neq 0$ ดังนั้น B หาผกผันได้ โดยทฤษฎีบท 4.9 ได้ว่า
$\det(A)=\det\left(B+UV^T\right)=\det\left(\mathrm{I}+V^TB^{-1}U\right)\det(B)$

$$\det\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$=\det\left(\mathrm{I}+\begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/a-b-c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & c \\ 0 & c \\ \vdots & \vdots \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)(a-b-c)d^{n-1}$$

$$=\det\left(\mathrm{I}+\begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a-b-c} & \frac{c}{a-b-c} \\ 0 & \frac{c}{d} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{c}{d} \end{bmatrix}\right)(a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \det\left(\mathrm{I} + \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a-b-c} & \dfrac{bc}{a-b-c} + \dfrac{bc}{d} + \ldots + \dfrac{bc}{d} \\ \dfrac{1}{a-b-c} & \dfrac{c}{a-b-c} \end{pmatrix} \right)(a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \det\left(\mathrm{I} + \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a-b-c} & \dfrac{bc}{a-b-c} + \dfrac{bc(n-1)}{d} \\ \dfrac{1}{a-b-c} & \dfrac{c}{a-b-c} \end{pmatrix} \right)(a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \dfrac{b}{a-b-c} + 1 & \dfrac{bc}{a-b-c} + \dfrac{bc(n-1)}{d} \\ \dfrac{1}{a-b-c} & \dfrac{c}{a-b-c} + 1 \end{pmatrix}(a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \dfrac{b+(a-b-c)}{a-b-c} & \dfrac{bc}{a-b-c} + \dfrac{bc(n-1)}{d} \\ \dfrac{1}{a-b-c} & \dfrac{c+(a-b-c)}{a-b-c} \end{pmatrix}(a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \dfrac{a-c}{a-b-c} & \dfrac{bc}{a-b-c} + \dfrac{bc(n-1)}{d} \\ \dfrac{1}{a-b-c} & \dfrac{a-b}{a-b-c} \end{pmatrix}(a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \left[\left(\frac{a-c}{a-b-c}\right)\left(\frac{a-b}{a-b-c}\right) - \left(\frac{1}{a-b-c}\right)\left(\frac{bc}{a-b-c} + \frac{bc(n-1)}{d}\right) \right](a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \left[\left(\frac{a^2-ab-ac+bc}{(a-b-c)(a-b-c)}\right) - \left(\frac{bc}{(a-b-c)^2} + \frac{bc(n-1)}{d(a-b-c)}\right) \right](a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \left[\frac{a(a-b-c)+bc}{(a-b-c)(a-b-c)} - \frac{bc}{(a-b-c)^2} - \frac{bc(n-1)}{d(a-b-c)} \right](a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \left[\frac{a(a-b-c)}{(a-b-c)(a-b-c)} + \frac{bc}{(a-b-c)^2} - \frac{bc}{(a-b-c)^2} + \frac{bc(1-n)}{d(a-b-c)} \right](a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \left[\frac{a}{(a-b-c)} + \frac{bc(1-n)}{d(a-b-c)} \right](a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \left[\frac{ad}{\mathrm{d}(a-b-c)} + \frac{bc(1-n)}{d(a-b-c)} \right](a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \frac{bc(1-n)+ad}{d(a-b-c)}(a-b-c)d^{n-1}$$

$$= \left(bc(1-n)+ad\right)d^{n-2}$$

ดังนั้น $\det\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{bmatrix} = \left(bc(1-n)+ad\right)d^{n-2}$ #

4.3 ขั้นตอนการหาตัวกำหนดเมทริกซ์หัวลูกศรรูปแบบทั่วไป

ให้ A เป็นเมทริกซ์หัวลูกศรรูปแบบทั่วไป ขนาด $n \times n \left(A_{n\times n}\right)$ และ $n \geq 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_{12} \neq 0$ และ
$a_{ii} \neq 0$ ทุก $i = 3,4,5,\ldots,n-1$

จะหาตัวกำหนดสูตรของตัวกำหนดของเมทริกซ์ A โดยลดขนาดลง 4 อันดับโดยใช้ขั้นตอนต่อไปนี้

1. ลดรูปเมทริกซ์ A โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_{n-1} \leftrightarrow R_n$ ได้เมทริกซ์

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

2. ลดรูปเมทริกซ์ A_1 โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_2 \leftarrow R_2 - \frac{a_{22}}{a_{12}} R_1$ ได้เมทริกซ์

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \frac{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{12}}{a_{12}} & 0 & \frac{-a_{13}a_{22}}{a_{12}} & \cdots & \frac{-a_{1,n-2}a_{22}}{a_{12}} & \frac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}} & \frac{-a_{1n}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

3. ลดรูปเมทริกซ์ A_2 โดยใช้การดำเนินการมูลฐานทั้งหมด $n-4$ ครั้ง

$R_2 \leftarrow R_2 - \left(\dfrac{-a_{1i}a_{22}}{a_{12}a_{ii}} \right) R_i$ เมื่อ $i = 3, 4, \ldots, n-2$ ได้เมทริกซ์

$$A_{n-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dfrac{-a_{11}\prod\limits_{i=2}^{n-2} a_{ii} + \sum\limits_{i=2}^{n-2} a_{1i}a_{i1}\Big(\prod\limits_{\substack{2\le j\le n-2 \\ and\, i\ne j}} a_{jj}\Big)}{a_{12}\prod\limits_{i=3}^{n-2} a_{ii}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}} & \dfrac{-a_{1n}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

จะพิสูจน์ว่าการลดรูปเมทริกซ์ A_2 โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_2 \leftarrow R_2 - \left(\dfrac{-a_{1i}a_{22}}{a_{12}a_{ii}} \right) R_3$

เมื่อ $i = 3,4,5,\ldots,n-2$ แล้วได้เมทริกซ์ A_{n-2} ดัง (17)

โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ดังแสดงต่อไปนี้

พิจารณาที่ $P(3)$ นั่นคือ $A_2 \rightarrow A_3$ โดย $R_2 \leftarrow R_2 - \left(\dfrac{-a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{33}} \right) R_3$ จะได้

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ b_3 & 0 & 0 & \dfrac{-a_{14}a_{22}}{a_{12}} & \cdots & \dfrac{-a_{1,n-2}a_{22}}{a_{12}} & \dfrac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}} & \dfrac{-a_{1n}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $b_3 = \dfrac{a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}}{a_{12}a_{33}} = \dfrac{-a_{11}\prod\limits_{i=2}^{3} a_{ii} + \sum\limits_{i=2}^{3} a_{1i}a_{i1}\Big(\prod\limits_{\substack{2\le j\le 3 \\ and\, i\ne j}} a_{jj}\Big)}{a_{12}\prod\limits_{i=3}^{3} a_{ii}}$

ดังนั้น $P(3)$ เป็นจริง

ให้ $P(k)$ แทนการลดรูปเมทริกซ์ A_2 โดยใช้ $R_2 \leftarrow R_2 - \left(\frac{-a_{1i}a_{22}}{a_{12}a_{ii}}\right)R_i$ เมื่อ $i = 3,4,5,\dots,k$

แล้วได้เมทริกซ์

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{11} & a_{11} & a_{11} \\ b_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{-a_{1,k-1}a_{22}}{a_{12}} & \cdots & \frac{-a_{1,n-2}a_{22}}{a_{12}} & \frac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}} & \frac{-a_{1n}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{k,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{k+1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{k+1k+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $b_k = \dfrac{-a_{11}\prod_{i=2}^{k} a_{ii} + \sum_{i=2}^{k} a_{1i}a_{i1}(\prod_{\substack{2\le j\le k \\ and\, i\neq j}} a_{jj})}{a_{12}\prod_{i=3}^{k} a_{ii}}$

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริงเมื่อ $k = 3,4,5,\dots,n-3$ จะได้เมทริกซ์ คือ

$$A_{n-3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ b_{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-a_{1,n-2}a_{22}}{a_{12}} & \frac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}} & \frac{-a_{1n}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-3,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3,n-3} & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $b_{n-3} = \dfrac{-a_{11}\prod_{i=2}^{n-3} a_{ii} + \sum_{i=2}^{n-3} a_{1i}a_{i1}(\prod_{\substack{2\le j\le n-3 \\ and\, i\neq j}} a_{jj})}{a_{12}\prod_{i=3}^{n-3} a_{ii}}$

พิจารณา $P(n-2)$ นั่นคือ $A_{n-3} \rightarrow A_{n-2}$

โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_2 \leftarrow R_2 - \left(\dfrac{-a_{1,n-2}a_{22}}{a_{12}a_{n-2,n-2}}\right)R_{n-2}$ ได้เมทริกซ์

$$A_{n-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ b_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}} & \dfrac{-a_{1n}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $b_{n-2} = b_{n-3} - \left(\dfrac{-a_{1,n-2}a_{22}}{a_{12}a_{n-2,n-2}}\right)a_{n-2,1}$

$$= \frac{-a_{11}\prod_{i=2}^{n-3}a_{ii} + \sum_{i=2}^{n-3}a_{1i}a_{i1}\Big(\prod_{\substack{2\le j\le n-3 \\ and\ i\ne j}}a_{jj}\Big)}{a_{12}\prod_{i=3}^{n-3}a_{ii}} - \left(\frac{-a_{1,n-2}a_{22}}{a_{12}a_{n-2,n-2}}\right)a_{n-2,1}$$

$$= \frac{-a_{11}\prod_{i=2}^{n-3}a_{ii} + \sum_{i=2}^{n-3}a_{1i}a_{i1}\Big(\prod_{\substack{2\le j\le n-3 \\ and\ i\ne j}}a_{jj}\Big)}{a_{12}\prod_{i=3}^{n-3}a_{ii}} + \frac{a_{1,n-2}a_{22}a_{n-2,1}}{a_{12}a_{n-2,n-2}}$$

$$= \frac{-a_{11}\prod_{i=2}^{n-2}a_{ii} + \sum_{i=2}^{n-2}a_{1i}a_{i1}\Big(\prod_{\substack{2\le j\le n-2 \\ and\ i\ne j}}a_{jj}\Big)}{a_{12}\prod_{i=3}^{n-2}a_{ii}}$$

4. ลดรูป A_{n-2} เป็น A_{n-1} โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_2 \leftarrow R_2 - \left(\frac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}a_{n-1,n-1}}\right)R_n$ จะได้

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dfrac{-a_{11}\prod\limits_{i=2}^{n-1} a_{ii} + \sum\limits_{i=2}^{n-1} a_{1i}a_{i1}(\prod\limits_{\substack{2\le j\le n-1 \\ and\, i\ne j}} a_{jj})}{a_{12}\prod\limits_{i=3}^{n-1} a_{ii}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dfrac{-a_{1n}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

5. หาตัวกำหนดโดยทฤษฎีบท 2.62

$$|A| = -\left[a_{12} \frac{\left(-a_{11}\prod\limits_{i=2}^{n-1} a_{ii} + \sum\limits_{i=2}^{n-1} a_{1i}a_{i1}(\prod\limits_{\substack{2\le j\le n-1 \\ and\, i\ne j}} a_{jj})\right)}{a_{12}\prod\limits_{i=3}^{n-1} a_{ii}} a_{n-1,n-1}a_{nn} - a_{12}\left(-\frac{a_{1n}a_{22}}{a_{12}}\right)a_{n1}a_{n-1,n-1} \right.$$
$$\left. - \frac{\left(-a_{11}\prod\limits_{i=2}^{n-1} a_{ii} + \sum\limits_{i=2}^{n-1} a_{1i}a_{i1}(\prod\limits_{\substack{2\le j\le n-1 \\ and\, i\ne j}} a_{jj})\right)}{a_{12}\prod\limits_{i=3}^{n-1} a_{ii}} \cdot 0 \cdot a_{1,n-1} \cdot a_{nn} + a_{1,n-1}\left(-\frac{a_{1n}a_{22}}{a_{12}}\right) \cdot a_{n1} \cdot 0 \right] \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

<u>**ตัวอย่าง 4.10**</u> เมทริกซ์หัวลูกศรรูปแบบทั่วไป ขนาด 5×5 $\left(A_{5\times5}\right)$

<u>**วิธีทำ**</u>

$$A_{5\times5}\rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \end{bmatrix} \qquad R_4\leftrightarrow R_5$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \dfrac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{12}} & 0 & -\dfrac{a_{13}a_{22}}{a_{12}} & -\dfrac{a_{14}a_{22}}{a_{12}} & -\dfrac{a_{15}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2\leftarrow R_2-\frac{a_{22}}{a_{12}}R_1$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \dfrac{\left(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}\right)a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}}{a_{12}a_{33}} & 0 & 0 & -\dfrac{a_{14}a_{22}}{a_{12}} & -\dfrac{a_{15}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 \quad R_2 \quad \left(\quad \frac{a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{33}}\right)R_3$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \dfrac{\left\{\left(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}\right)a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}\right\}a_{44}+a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}}{a_{12}a_{33}a_{44}} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{a_{15}a_{22}}{a_{12}} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2\leftarrow R_2-\left(-\frac{a_{14}a_{22}}{a_{12}a_{44}}\right)R_5$$

ดังนั้น

$$\left|A_{5\times5}\right|=-\Bigg[\left(\frac{\left\{\left(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}\right)a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}\right\}a_{44}+a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}}{a_{12}a_{33}a_{44}}\right)\left(a \;\; a \;\; a \quad\right)$$

$$-a_{12}\left(-\frac{a_{15}a_{22}}{a_{12}}\right)a_{51}a_{44}-a_{12}\cdot0\cdot a_{14}a_{55}+a_{14}\left(-\frac{a_{15}a_{22}}{a_{12}}\right)a_{51}\cdot0\Bigg]\left|a_{33}\right|$$

$$=-\left[\left(\frac{\left\{\left(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}\right)a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}\right\}a_{44}+a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}}{a_{33}}\right)\left(a_{55}\right)+a_{15}a_{22}a_{44}a_{51}\right]\left|a_{33}\right| \qquad \#$$

จะทดสอบว่าสูตรทั่วไปของการหาตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรรูปแบบทั่วไปเป็นจริงเมื่อนำไปหาตัวกำหนดของเมทริกซ์หัวลูกศรรูปแบบเฉพาะ

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ เมื่อ $a_{12}\neq 0$ และ $a_{22}\neq 0$

เมื่อ

$a_{11}=a_{11}$

$a_{12}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=\ldots=a_{1n}$

$a_{21}=a_{21}=a_{31}=a_{41}=\ldots=a_{n1}$

$a_{22}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=\ldots=a_{nn}$

จะได้ว่า

$$-\left\{\left[\frac{\begin{array}{l}(-a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{n-1,n-1}\\ \quad +a_{12}a_{21}a_{33}\ldots a_{n-1,n-1}\\ \quad +a_{13}a_{31}a_{22}a_{44}\ldots a_{n-1,n-1}\\ \quad +\ldots+a_{1,n-1}a_{n-1,1}a_{22}a_{33}\ldots a_{n-2,n-2})\end{array}}{a_{33}a_{44}\ldots a_{n-1,n-1}}\right]\cdot(a_{n-1,n-1}a_{nn})+a_{1n}a_{n1}a_{22}a_{n-1,n-1}\right\}\cdot(a_{33}a_{44}\ldots a_{n-2,n-2})$$

$$=-\left\{\left[\frac{\begin{array}{l}(-a_{11}a_{22}a_{22}\ldots a_{22}\\ \quad +a_{12}a_{21}a_{22}\ldots a_{22}\\ \quad +a_{12}a_{21}a_{22}a_{22}\ldots a_{22}\\ \quad +\ldots+a_{12}a_{21}a_{22}a_{22}\ldots a_{22})\end{array}}{a_{22}a_{22}\ldots a_{22}}\right]\cdot(a_{22}a_{22})+a_{12}a_{21}a_{22}a_{22}\right\}\cdot(a_{22}a_{22}\ldots a_{22})$$

$$=-\left\{\left[\left(\frac{-a_{11}\left(a_{22}\right)^{n-2}+\left(n-2\right)a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{n-3}}{\left(a_{22}\right)^{n-5}}\right)+a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{2}\right]\cdot\left(a_{22}\right)^{n-4}\right\}$$

$$=-\left\{\left[-a_{11}\left(a_{22}\right)^{n-2}+\left(n-2\right)a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{n-3}\right]a_{22}+a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=-\left\{-a_{11}\left(a_{22}\right)^{n-1}+\left(n-2\right)a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{n-2}+a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=-\left\{-a_{11}\left(a_{22}\right)^{n-1}+\left(n-2+1\right)a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=-\left\{-a_{11}\left(a_{22}\right)^{n-1}+\left(n-1\right)a_{12}a_{21}\left(a_{22}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=-\left\{\left[-a_{11}a_{22}+\left(n-1\right)a_{12}a_{21}\right]\left(a_{22}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=\left[a_{12}a_{21}\left(1-n\right)+a_{11}a_{22}\right]\left(a_{22}\right)^{n-2}$$

ซึ่งตรงกับสูตรในหัวข้อ 4.2

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์หัวลูกศรแบบทั่วไป เมื่อ $a_{12}\neq 0$ และ $a_{22}\neq 0$

วิธีการลดรูปเมทริกซ์ A ให้เป็น C ทำได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. ลดรูปเมทริกซ์ A โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_{n-1}\leftrightarrow R_n$ ได้เมทริกซ์ A_1
2. ลดรูปเมทริกซ์ A_1 โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_2\leftarrow R_2-\dfrac{a_{22}}{a_{12}}R_1$ ได้เมทริกซ์ A_2
3. ลดรูปเมทริกซ์ A_2 โดยใช้การดำเนินการมูลฐานทั้งหมด $n-4$ ครั้ง
   $R_2\leftarrow R_2-\left(\dfrac{-a_{1i}a_{22}}{a_{12}a_{ii}}\right)R_i$ เมื่อ $i=3,4,\ldots,n-2$ ได้เมทริกซ์ A_{n-2}
4. ลดรูป A_{n-2} เป็น A_{n-1} โดยใช้การดำเนินการมูลฐาน $R_2\leftarrow R_2-\left(\dfrac{-a_{1,n-1}a_{22}}{a_{12}a_{n-1,n-1}}\right)R_n$
5. หาตัวกำหนดโดยทฤษฎีบท 2.62

และสามารถหาสูตรตัวกำหนดของ A ได้คือ

$$|A|=-\left[\frac{\left(-a_{11}\prod_{i=2}^{n-1}a_{ii}+\sum_{i=2}^{n-1}a_{1i}a_{i1}\Big(\prod_{\substack{2\le j\le n-1\\ and\, i\neq j}}a_{jj}\Big)\right)}{\prod_{i=3}^{n-1}a_{ii}}a_{n-1,n-1}a_{nn}+a_{12}a_{1n}a_{n1}a_{22}a_{n-1,n-1}\right]\cdot a_{33}a_{44}\cdots a_{n-2,n-2}$$

5.2 ข้อเสนอแนะ

เราอาจจะนำเมทริกซ์อื่นๆมาพิจารณาค่าตัวกำหนดโดยการทำการลดรูปให้เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง หรือเมทริกซ์หัวลูกศร

เอกสารอ้างอิง

[1] C.L. Dodgson , Condensation of Determinants , Being a New and Bricf Method for Computing their Arithmetic Values , Proc . Soc . Ser . A , 15 (1866) , 150-155 .

[2] Dardan Hajrizaj , International Journal of Algebra , Vol.3 , 2009 , no. 5 , 211-219 .

[3] Qefsere Gjonbalaj and Armend Salihu , Applied E-notes , Computing The Determinants By Reduing The Order By Four , 10 (2010) , 151-157 .

[4] Qefsere Gjonbalaj and Armend Salihu , New Method to Computing the Determinant of a 4x4 Matrix .

Available from : http : // www.researchgate.net / profile / Qefsere_Doko_Gjonbalaj / publication / 257068341_Armend_Salihu_Qefsere_Gjonbalaj_New_method_to_compute_the_determinant_of_a_4x4_matrix / links / 0c9605244ab33c5a9f000000 /

[5] Gerzson Kéri , The Sherman-Morrison formula for the determinant and its application for optimizing quadratic functions on condition sets given by extreme generators : The Sherman-Morrison formula and related topics, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht,(2001), 119-138.

[6] รศ. พัชรินทร์ เหมโชติ . พีชคณิตเชิงเส้น 1 . พิมพ์ครั้งที่ 6 . กรุงเทพมหานคร : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง , 2555 .