การหาผลเฉลยของสมการพหุนามทั่วไปดีกรีน้อยกว่า 8

Solving general polynomial Equations of Degree Less Than eight

นางสาวณิชารีย์ อังสุมาลิน

นายนนท์ปวิธ สีคำ

นายบงกช ธนวงศ์วิสูตร

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

การหาผลเฉลยของสมการพหุนามทั่วไปดีกรีน้อยกว่า 8

Solving general polynomial Equations of Degree Less Than eight

นางสาวณิชารีย์ อังสุมาลิน

นายนนท์ปวิธ สีคำ

นายบงกช ธนวงศ์วิสูตร

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

SOLVING GENERAL POLYNOMIAL EQUATIONS OF DEGREE LESS THAN EIGHT

NICHAREE AUNGSUMALIN

NONPAWIT SEEKAM

BONGKOTE THANAWONGWISOOT

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2014

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยของสมการพหุนามทั่วไปดีกรีน้อยกว่า 8 SOLVING GENERAL POLYNOMIAL EQUATIONS OF DEGREE LESS THAN EIGHT
ชื่อนักศึกษา	นางสาวณิชารีย์ อังสุมาลิน 54050022 นายนนท์ปวิธ สีคำ 54050032 นายบงกช ธนวงศ์วิสูตร 54050036
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ปีการศึกษา	2557
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

คณะวิทยาศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังอนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา2557

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ประธานกรรมการ	
อ. พรชัย ชัยสนิท กรรมการ	พรชัย ชัยสนิท
อ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ศุกระวรรณ มะเวชะ

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยของสมการพหุนามทั่วไปดีกรีน้อยกว่า 8 SOLVING GENERAL POLYNOMIAL EQUATIONS OF DEGREE LESS THAN EIGHT
ชื่อนักศึกษา	นางสาวณิชารีย์ อังสุมาลิน 54050022 นายนนท์ปวิธ สีคำ 54050032 นายบงกช ธนวงศ์วิสูตร 54050036
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ปีการศึกษา	2557
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ศึกษา วิธีการรากของสมการพหุนามดีกรีน้อยกว่า 8 ที่มีสัมประสิทธิ์จำนวนจริง โดยรวบรวมทฤษฎีและวิธีการต่างๆที่เกี่ยวข้องเพื่อพัฒนาและต่อยอด หารากของการหาพหุนามดีกรีน้อยกว่า 8 สำหรับหรับบางเงื่อนไขและเปรียบเทียบข้อดีและข้อเสียของแต่ละวิธีที่ได้ศึกษา

คำสำคัญ : รากของสมการพหุนาม สมการพหุนาม

Thesis Title	SOLVING GENERAL POLYNOMIAL EQUATIONS OF DEGREE LESS THAN EIGHT
Student Name	Nicharee Aungsumalin 54050022
	Nonpawit Seekam 54050032
	Bongkote Thanawongwisoot 54050036
Degree	Bachelor of Science (**Applied Mathematics**)
Department	Mathematics
Academic Year	2014
Thesis Advisor	Dr.Sukrawan Mavecha

Abstract

The special problem is education how to solve polynomial equations of degree less than eight coefficients are real numbers. By combining theories and many methods related for development and extension. A solution of a polynomial of degree less than eight for the certain conditions and compare the adventages and disadventages of each method was studied.

Keywords : Roots of Polynomial Equations , Polynomial Equations

กิตติกรรมประกาศ

ในการคิด วิเคราะห์เกี่ยวกับการหารากของสมการพหุนามทั่วไปดีกรีน้อยกว่า 8 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง สามารถประสบความสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี อันเนื่องมาจากได้รับความกรุณาอย่างสูงจาก อ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาที่กรุณาให้คำแนะนำปรึกษา ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง ขอขอบคุณ อาจารย์พรชัย ชัยสนิท และ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ที่ให้คำแนะนำเพื่อที่จะนำผลงานดังกล่าวให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้ทำการวิจัยตระหนักถึงความตั้งใจจริงและทุ่มเทของอาจารย์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ผู้วิจัยหวังว่างานวิจัยเรื่องนี้จะมีประโยชน์อยู่ไม่มากก็น้อยจึงขอมอบงานวิจัยทั้งหมดนี้ให้แก่เหล่าคณาจารย์ที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาจนทำให้ผลงานวิจัยเป็นประโยชน์ต่อผู้เกี่ยวข้องและขอมอบความกตัญญูกตเวทิตาแด่บิดามารดาและผู้มีพระคุณทุกท่าน

สิ่งที่มีคุณค่าและคุณประโยชน์ที่ได้จากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยขอมอบให้แก่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

นางสาวณิชารีย์ อังสุมาลิน

นายนนท์ปวิธ สีคำ

นายบงกช ธนวงศ์วิสูตร

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญ / ที่มาของปัญหา

การแสวงหาวิธีการหาค่ารากโดยการแก้สมการพหุนามไม่ใช่เรื่องใหม่และเราสังเกตจากประวัติศาสตร์ในช่วงก่อนคริสต์ศักราช 2,000 ในกรีก,ฮินดูและบาบิโลเนีย เราทราบค่ารากของสมการพหุนามดีกรีสองในรูปแบบเดียวหรือสองรูปแบบ หลังจากนั้นการหารากของสมการพหุนามดีกรีสามนักคณิตศาสตร์ได้หาวิธีการมานานกว่าสามพันปี ในศตวรรษที่ 11 Omer Khayyam สามารถหารากสมการพหุนามดีกรีสามโดยวิธีทางเรขาคณิต โดยการหาจุดตัดของกราฟพาราโบลาและวงกลม และในปี 1515 Scipione del Ferro ได้หารากของสมการพหุนามดีกรีสามได้สำเร็จแต่ไม่ได้ตีพิมพ์ ในปี 1535 Tartaglia พบสูตรที่สามารถแก้สมการบางอย่างของสมการพหุนามดีกรีสาม ในขณะที่ในปี 1539 Cardano ตีพิมพ์เกี่ยวกับค่ารากของสมการพหุนามดีกรีสามในหนังสือ “ศิลปะที่ดีที่สุด”(The great art) โดยพิจารณาค่ารากเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งการพิจารณาดังกล่าวเป็นเรื่องที่ยาก ในขณะเดียวกันเพื่อนของ Cardano นั่นคือ Ferrari ได้ตีพิมพ์เกี่ยวกับการหารากของสมการพหุนามดีกรีสองในรูปแบบทั่วไป ต่อมานักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงหลายคนพยายามจะแก้สมการพหุนามดีกรีสี่รูปแบบทั่วไปโดยใช้วิธีเดียวกับสมการพหุนามดีกรีสองและสามแต่ประสบความล้มเหลว ในปี 1770 ลากรองจ์แสดงให้เห็นว่าสมการพหุนามดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับห้าไม่สามารถแก้ได้โดยวิธีการที่เคยทำมา ในปี 1799 Ruffini ได้ตีพิมพ์รูปแบบทั่วไปของสมการดีกรีสองและดีกรีสามในหนังสือ “ทฤษฎีทั่วไปของสมการ” สมการพหุนามดีกรีห้าและมากกว่าได้รับการศึกษาโดย Abel และ Galois ในปี 1826, Abel ตีพิมพ์การพิสูจน์ว่าเป็นไปไม่ได้ที่จะแก้สมการพหุนามดีกรีมากกว่าสี่โดยวิธีเชิงพีชคณิตได้ ในขณะที่ Galois (ปี 1832) ได้ค้นพบข้อเท็จจริงนี้โดยใช้ทฤษฎีกรุปแต่การค้นพบนี้ไม่ได้แสดงว่าไม่มีรากของพหุนามทั่วไปดีกรีห้าและสูงกว่า ในปี 1876 ที่แสดงให้เห็นว่า ทุกสมการพหุนามดีกรีห้าสามารถทำให้อยู่ในรูปเป็น $x^5+ax+b=0$ วิธีการแก้สมการพหุนามดีกรีห้าและหกได้ถูกค้นพบโดย Kulkarni ในปี 2,006 และ 2,008 [1,2] และในปี 2008 [3] เขาได้หารากของสมการพหุนามดีกรีเจ็ดด้วย

ดังนั้นเราจึงเห็นถึงความสำคัญในวิธีการหาค่ารากของสมการพหุนามต่างๆ เพื่อนำไปใช้ในการแก้สมการพหุนามต่างๆให้ง่ายต่อการหาค่ารากมากยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์

ต้องการศึกษาวิธีการต่างๆที่ใช้ในการหาค่ารากของพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดและมีดีกรีน้อยกว่า 8 เนื่องจากพหุนามที่มีดีกรีต่างกันจะมีวิธีหาค่ารากที่แตกต่างกันอีกทั้งยังมีข้อดีและข้อเสียต่างกัน โดยมีการเปรียบเทียบวิธีการต่างๆว่าแบบใดเหมาะสมกับพหุนามดีกรีนั้นๆ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

พิจารณาพหุนามดีกรีน้อยกว่า 8 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้เรียนรู้วิธีการพิสูจน์
2. ทราบถึงกระบวนการต่างๆในการหาค่ารากของพหุนามดีกรีน้อยกว่า 8 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง
3. ทำให้ได้สูตรทั่วไปในการหาค่ารากของพหุนามดีกรีน้อยกว่า 8 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาความรู้ขั้นพื้นฐาน
3. เก็บรวบรวมข้อมูล
4. ทำการตั้งข้อสันนิษฐานต่างๆเพื่อนำไปใช้
5. มีการยกตัวอย่างเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง
6. เตรียมการนำเสนอและจัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ
7. นำเสนอปัญหาพิเศษ

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ระยะเวลา 10 เดือน

การดำเนินการ	ระยะเวลาในการดำเนินการ									
	ปี 2557					ปี 2558				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1) ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง										
2) ศึกษาความรู้ขั้นพื้นฐาน										
3) เก็บรวบรวมข้อมูล										
4) ทำการตั้งข้อสันนิษฐานต่างๆเพื่อนำไปใช้										
5) มีการยกตัวอย่างเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง										
6) เตรียมการนำเสนอและจัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ										
7) นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2

สมการพหุนามตัวแปรเดียว

2.1 ความหมายของพหุนาม (Polynomials)

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$ เมื่อ $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ เป็นจำนวนคงค่าและ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือ 0

$P(x)$ เรียกว่า พหุนามใน x ดีกรี n $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ a_ix^i เรียกว่า พจน์หรือเทอมที่ $i+1$ ของพหุนาม

เมื่อ $i=0,1,2,3,...,n$

ถ้า $a_i=0 \quad \forall i \in \{0,1,2,3,...,n\}$ แล้ว เรียก $P(x)=0$ ว่าเป็นพหุนามอันตรธานรูป (พหุนามไม่มีดีกรี)

ตัวอย่างที่ 2.1 x^3-3x^2+4x-1 เป็นพหุนามใน x ดีกรี 3

$6x^8+3x+1$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี 8

$3y+1$ เป็นพหุนามใน y ดีกรี 1

t^2 เป็นพหุนามใน t ดีกรี 2

0 เป็นพหุนามอันตรธานรูป

บทนิยาม 2.2 ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว เรียกว่า $P(x)=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี n และถ้า $P(a)=0$ แล้ว a เรียกว่า รากของสมการพหุนาม $P(x)=0$

ตัวอย่างที่ 2.2 $P(x)=x^2+x-2=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี 2 โดยมี -2 และ 1 เป็นค่ารากของสมการ $P(x)=0$

ตัวอย่างที่ 2.3 ก) $f(x)=3x^3-x+2=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี 3 นิยมเรียกว่า สมการพหุนามกำลังสาม (Cubic equation) เนื่องจาก $f(-1)=0$ ดังนั้น -1 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

ข) $g(x)=4x^4-x^3+2x-1=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี 4 นิยมเรียกว่า สมการพหุนามกำลังสี่ (Biquadratic equation)

2.2 การดำเนินการเบื้องต้นเกี่ยวกับพหุนาม

2.2.1 การบวกและการลบพหุนาม

บทนิยาม 2.3 ให้ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \neq 0$ และ $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n \neq 0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n $P(x)=Q(x)$ ก็ต่อเมื่อ $a_i=b_i; \forall i \in \{0,1,2,3,\ldots,\mathrm{n}\}$

ตัวอย่าง 2.4 ให้ $f(x)=7x^3+10$ และ $g(x)=(3a+2)x^3+4bx^2-5c$

ถ้า $f(x)=g(x)$ จงหาค่า a,b และ c

วิธีทำ เพราะว่า $f(x)=g(x)$ โดยบทนิยาม 2.3

จะได้ว่า $3a+2=7 \Rightarrow a=\dfrac{5}{3}$

$$4b=0 \Rightarrow b=0$$

$$-5c=10 \Rightarrow c=-2$$

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ และ $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$ เป็นพหุนามสองพหุนามใดๆ

(1) $f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$

(2) $f(x)-g(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_n-b_n)x^n$

ตัวอย่าง 2.5 กำหนดให้ $f(x)=x^3+2x^2-2x+1$ และ $g(x)=x^3+2x^2-4x+5$

จะได้ว่า (1) $f(x)+g(x)=(1+1)x^3+(2+2)x^2+[(-2)+(-4)]\mathrm{x}+(1+5)]$

$$=2x^3+4x^2-6x+6$$

(2) $f(x)-\mathrm{g}(x)=(1-1)\mathrm{x}^3+(2-2)\mathrm{x}^2+[(-2)-(-4)]\mathrm{x}+(1-5)]$

$$=0x^3+0x^2+2x-5 \quad =2x-5$$

หมายเหตุ

การบวกและการลบพหุนาม จะเห็นว่าจำนวนที่มีบทบาทสำคัญในการหาผลบวกหรือผลลบ คือ สัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆของพหุนาม ดังนั้นเราอาจนำเอาสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆของพหุนามมาเรียงตามลำดับดีกรี แล้วดำเนินการหาผลบวกหรือผลลบของพหุนามได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $P(\mathrm{x}) = x^4 + 3x^2 - 5x + 3$ และ $Q(x) = 3x^2 - 6x + 4$

หาค่า $P(x)+Q(x)$ และ $P(x)-Q(x)$ ได้ดังนี้

(1) หาค่า $P(x)+Q(x)$

x^4	x^3	x^2	x	x^0
1	0	3	−5	3
0	0	3	−6	4
1	0	6	−11	7

จะได้ว่า $P(x)+Q(x) = x^4 + 6x^2 - 11x + 7$

(2) หาค่า $P(x)-Q(x)$

x^4	x^3	x^2	x	x^0
1	0	3	−5	3
0	0	3	−6	4
1	0	0	1	−1

ดังนั้น $P(x)-Q(x) = x^4 + x - 1$

2.2.2 การคูณพหุนาม

บทนิยาม 2.5 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามใดๆ $f(x)\cdot g(x)$ คือ พหุนามที่ได้จากผลรวมพจน์ต่างๆที่เกิดจากการเอาพจน์แต่ละพจน์ของ $g(x)$ คูณกับพจน์ของพหุนาม $f(x)$ ทุกๆพจน์

จากบทนิยาม 2.5 ถ้า $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ และ
$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ จะได้ว่า

$$f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot b_0+f(x)\cdot b_1x+f(x)\cdot b_2x^2+\ldots+f(x)\cdot b_mx^m$$

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนดให้ $f(x)=x^2+3x-1$ และ $g(x)=x^2+2x+1$

จะได้ว่า $f(x)\cdot g(x)=(x^2+3x-1)(x^2+2x+1)$

$$\begin{aligned}
&=(x^2+3x-1)x^2+(x^2+3x-1)\big((2x)+(x^2+3x-1)\big)\\
&=(x^4+3x^3-x^2)+(2x^3+6x^2-2x)+(x^2+3x-1)\\
&=x^4+5x^3+6x^2+x-1
\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 2.6 นำมาเขียนแจกแจงวิธีคูณ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{rl}
\underline{(x^2+3x-1)(x^2+2x+1)} & \\
x^4+3x^3-x^2\qquad\qquad & (x^2+3x-1)x^2\\
+2x^3+6x^2-2x\qquad & (x^2+3x-1)(2x)\\
\underline{+x^2-3x-1} & (x^2+3x-1)(1)\\
\underline{\underline{x^4+5x^3+6x^2+x-1}} &
\end{array}$$

หมายเหตุ

ในการหาผลคูณของพหุนาม จำนวนที่มีบทบาทสำคัญในการหาผลคูณคือ สัมประสิทธิ์ของตัวคูณและตัวตั้ง ถ้าเรานำสัมประสิทธิ์ของตัวคูณและตัวตั้งมาจัดเรียงลำดับจากพจน์ที่มีดีกรีสูงสุดไปหาพจน์ที่มีดีกรีต่ำสุดแล้วนำสัมประสิทธิ์เหล่านี้มาคูณกันให้สอดคล้องกับนิยามการคูณพหุนาม ก็จะทราบสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆของคำตอบได้ วิธีคูณดังกล่าวนี้ เรียกว่า **วิธีคูณโดยการแยกสัมประสิทธิ์ออกจากตัวแปร (Method of detached coefficients)**

ตัวอย่าง 2.7 จงหาผลคูณของ $(x^2+3x-1)(x^2+2x+1)$ แสดงวิธีคูณโดยการแยกสัมประสิทธิ์ ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccccc}
(1 & 3 & -1) & \times & (1 & 2 & 1)\\
\hline
1 & 3 & -1 & & & & \\
 & 2 & 6 & & -2 & & \\
 & & 1 & & 3 & -1 & \\
\hline
1 & 5 & 6 & & 1 & -1 & \\
\hline
\end{array}$$

ดังนั้น $\left(x^2+3x-1\right)\left(x^2+2x+1\right)=x^4+5x^3+6x^2+x-1$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาค่า $\left(x^5+2x^3-x^2+2\right)\left(3x^4-x^3+x^2-1\right)$ แสดงวิธีคูณโดยการแยกสัมประสิทธิ์ ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2) & (3 & -1 & 1 & 0 & -1) \\
\hline
3 & 0 & 6 & -3 & 0 & 6 & & & & & \\
 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & & & & \\
 & & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & \\
\hline
3 & -1 & 7 & -5 & 2 & 5 & -4 & 3 & 0 & -2 & \\
\hline
\end{array}
$$

จะได้ว่า

$\left(x^5+2x^3-x^2+2\right)\left(3x^4-x^3+x^2-1\right)=3x^9-x^8+7x^7-5x^6+2x^5+5x^4-4x^3+3x^2-2$

2.2.3 การหารพหุนาม

ให้ $f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ และ

$g\left(x\right)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ เป็นพหุนามสองพหุนามใดๆโดยที่ $n\geq m$ ซึ่ง $a_n\neq 0$ และ $b_m\neq 0$ เราสามารถจะหาจำนวนคงค่า c_k โดยที่ $c_k=\dfrac{a_n}{b_m}$ และ

$$f\left(x\right)=c_kx^{n-m}\cdot g\left(x\right)+f_1\left(x\right) \tag{1}$$

จากสมการ (1) ถ้า $f_1\left(x\right)=0$ จะได้ $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=c_kx^{n-m}$ แต่ถ้า $f_1\left(x\right)\neq 0$ แล้ว $f_1\left(x\right)$ จะเป็นพหุนามใน x และสมมุติว่ามีดีกรี n_1 ถ้า $n_1<m$ แล้ว $f_1\left(x\right)$ เรียกว่า เศษของการหาร $f\left(x\right)$ ด้วย $g\left(x\right)$

ถ้า $n_1\geq m$ จะได้

$$f_1\left(x\right)=c_{k-1}x^{n_1-m}\cdot g\left(x\right)+f_2\left(x\right) \tag{2}$$

จาก (2) ถ้า $f_2\left(x\right)=0$ จะได้ $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=c_kx^{n-m}+c_{k-1}x^{n_1-m}$

แต่ถ้า $f_2\left(x\right)\neq 0$ แล้ว $f_2\left(x\right)$ จะเป็นพหุนามใน x สมมุติว่ามีดีกรี n_2 ถ้า $n_2<n_1$ $f_2\left(x\right)$ เรียกว่า เศษของการหาร $f\left(x\right)$ ด้วย $g\left(x\right)$

ถ้า $n_2 \ge n_1$ จะได้

$$f_2(x) = c_{k-2} \cdot x^{n_2-m} \cdot g(x) + f_3(x) \tag{3}$$

เมื่อ $f_3(x)$ เป็นพหุนามใน x สมมุติว่ามีดีกรี $n_3 < n_2$

ถ้า $f_3(x) \ne 0$ และ $n_3 \ge m$ จะได้

$$f_3(x) = c_{k-3} \cdot x^{n_3-m} \cdot g(x) + f_4(x) \tag{4}$$

โดยกระบวนวิธีการกระทำต่อเนื่องดังกล่าวต่อไปเรื่อยๆจนกระทั่งได้

$f_k(x) = c_0 x^{n_k-m} \cdot g(x) + f_{k+1}(x)$ เมื่อ $f_{k+1}(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรี $n_{k+1} < m$ หรือ $f_{k+1}(x) = 0$

โดยการแทนค่ากลับได้ว่า

$f(x) = \left(c_0 x^{n_k-m} + c_1 x^{n_{k-1}-m} + c_2 x^{n_{k-2}-m} + \ldots + c_{k-1} x^{n_1-m} + c_k x^{n-m}\right) g(x) + f_{k+1}(x)$

ให้ $q(x) = \left(c_0 x^{n_k-m} + c_1 x^{n_{k-1}-m} + c_2 x^{n_{k-2}-m} + \ldots + c_{k-1} x^{n_1-m} + c_k x^{n-m}\right)$

และ $r(x) = f_{k+1}(x)$

ดังนั้น $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ (5)

เมื่อดีกรีของ $r(x) < m$ หรือ $r(x) = 0$

จากสมการ (5) จะได้ว่า $q(x)$ เป็นผลหารของ $f(x) \div g(x)$ และ $r(x)$ เป็นเศษของการหาร โดยกระบวนการดังกล่าว สามารถนำมาแจกแจงแสดงวิธีการหารได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาค่า $\left(x^8+x^7+3x^4-1\right)\div\left(x^4-3x^3+4x-1\right)$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4+4x^3+12x^2+32x+84 \\
\hline
x^4-3x^3+0x^2+4x-1 & x^8+x^7+0x^6+0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x-1 \\
 & \underline{x^8-3x^7+0x^6+4x^5-x^4} \\
 & \quad 4x^7+0x^6-4x^5+4x^4+0x^3+0x^2+0x-1 \\
 & \quad \underline{4x^7-12x^6+0x^5+16x^4-4x^3} \\
 & \qquad 12x^6-4x^5-12x^4+4x^3+0x^2+0x-1 \\
 & \qquad \underline{12x^6-36x^5+0x^4+48x^3-12x^2} \\
 & \qquad\quad 32x^5-12x^4-44x^3+12x^2+0x-1 \\
 & \qquad\quad \underline{32x^5-96x^4+0x^3+128x^2-32x} \\
 & \qquad\qquad 84x^4-44x^3-116x^2+32x-1 \\
 & \qquad\qquad \underline{84x^4-252x^3+0x^2+336x-84} \\
 & \qquad\qquad\quad 208x^3-116x^2-304x+83
\end{array}
$$

จะได้ว่า $\left(x^8+x^7+3x^4-1\right)\div\left(x^4-3x^3+4x-1\right)$ ได้ผลลัพธ์เท่ากับ $x^4+4x^3+12x^2+32x+84$ เหลือเศษเท่ากับ $208x^3-116x^2-304x+83$

ในการหารพหุนาม เราจะเห็นว่าค่าที่มีบทบาทสำคัญในกระบวนการหาร คือ สัมประสิทธิ์ของพหุนามทั้งของตัวตั้งและตัวหาร ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการหารเราอาจใช้วิธีการแยกสัมประสิทธิ์ (Method of detached coefficient) เช่นเดียวกับกระบวนวิธีการคูณที่กล่าวมาแล้ว

ตัวอย่างที่ 2.10 จากโจทย์ในตัวอย่าง 2.9 หาผลหารโดยวิธีแยกสัมประสิทธิ์ ได้ดังนี้

วิธีทำ **ตัวตั้ง** **ตัวหาร**

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0		x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	1	0	0	3	0	0	0	−1		1	−3	0	4	−1	
1	−3	0	4	−1											
4	0	4	4	0						x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
4	−12	0	16	−4						1	4	12	32	84	ผลหาร
	12	−4	−12	4	0										
		12	−36	0	48	−12									
			32	−12	−44	12	0								
			32	−96	0	128	−32								
				84	−44	−116	32	−1							
				84	−252	0	336	−84							
					208	−116	−304	83	เศษเหลือจากการหาร						

ดังนั้น $\left(x^8+x^7+3x^4-1\right)\div\left(x^4-3x^3+4x-1\right)$ ได้ผลลัพธ์เท่ากับ $x^4+4x^3+12x^2+32x+84$ เหลือเศษเท่ากับ $208x^3-116x^2-304x+83$

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาผลหาร $\left(x^5-3x^2+6x-1\right)\div\left(x^2+x+1\right)$ โดยวิธีแยกสัมประสิทธิ์

วิธีทำ **ตัวตั้ง** **ตัวหาร**

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0		x^2	x^1	x^0		
1	0	0	−3	6	−1		1	1	1		
	1	1	1								
	−1	−1	−3				x^3	x^2	x^1	x^0	
	−1	−1	−1				1	−1	0	−2	ผลหาร
		0	−2	6							
		0	0	0							
			−2	6	−1						
			−2	−2	−2						
				8	1	เศษเหลือจากการหาร					

ดังนั้น $\left(x^5-3x^2+6x-1\right)\div\left(x^2+x+1\right)$ ได้ผลลัพธ์เท่ากับ x^3-x^2-2 เหลือเศษเท่ากับ $8x+1$

2.3 ทฤษฎีเศษเหลือ (The Remainder Theorem)

การหาเศษเหลือของการหารพหุนาม $f(x)$ ด้วย $x-c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ เราสามารถหาได้โดยไม่ต้องแสดงกระบวนการหาร แต่ใช้ทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 (The Remainder Theorem)

ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 และ c เป็นค่าคงที่ใดๆเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $f(x)$ ด้วย $(x-c)$ เท่ากับ $f(c)$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 $f(x)$ หารด้วย $(x-c)$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $f(c)=0$

ตัวอย่างที่ 2.12 ให้ $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ จงแสดงให้เห็นว่า $f(x)$ หารด้วย $x+3$ ลงตัว

วิธีทำ จาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

จะได้ว่า $f(-3)=-27+9+15+3=0$ เป็นเศษเหลือเมื่อ $f(x)$ หารด้วย $x+3$ $=[x-(-3)]$ โดยบทแทรกของทฤษฎีเศษเหลือสรุปได้ว่า $f(x)$ หารด้วย $x+3$ ลงตัว

ตัวอย่างที่ 2.13 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า $(x+c)\big|(x^n+c^n)$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ $n=2k-1$ เมื่อ $k=1,2,3,\ldots$

$$f(x)=x^n+c^n=x^{2k-1}+c^{2k-1}$$

$$=\frac{x^{2k}}{x}+\frac{c^{2k}}{c}$$

จะได้ว่า $$f(-c)=\frac{(-c)^{2k}}{-c}+\frac{c^{2k}}{c}$$

$$=-\frac{c^{2k}}{c}+\frac{c^{2k}}{c};\ (-c)^{2k}=c^{2k}$$

$$=0$$

โดยบทแทรกของทฤษฎีเศษเหลือ จะได้ว่า $(x+c)\big|(x^n+c^n)$

(2) กำหนดให้ $(x+c)\big|(x^n+c^n)$ โดยบทแทรกของทฤษฎีเศษเหลือ

จะได้ว่า $(-c)^n+c^n=0$

สมมุติให้ $n=2k$ เมื่อ $k=1,2,3,\dots$ หรือ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

จะได้ว่า $(-c)^{2k}+c^{2k}=c^{2k}+c^{2k}$; เพราะว่า $(-c)^{2k}=\left[(-c)^2\right]^k=c^{2k}$

$=2c^{2k}\neq 0$ ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้

โดยหลักการอุปมานทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า n ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกคี่

2.4 การหารแบบสังเคราะห์ (Synthetic Division)

กำหนดให้ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n การหาผลหารและเศษเหลือ จากการหาร $f(x)$ ด้วย $x-c$ อาจกระทำได้ โดยการหารแบบสังเคราะห์โดยอาศัยกระบวนการวิธีดังต่อไปนี้

จากทฤษฎีเศษเหลือ สมมุติให้ $f(x)$ หารด้วย $x-c$ ได้ผลลัพธ์ $g(x)$ เศษเหลือเท่ากับ r จะได้ว่า $f(x)=(x-c)g(x)+r$ โดยที่ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี $n-1$ และ
$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n$ ดังนั้น
$(x-c)g(x)=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-cb_{n-1})x^{n-1}+(\mathrm{b}_{n-3}-\mathrm{cb}_{n-2})\mathrm{x}^{n-2}+\dots+(\mathrm{b}_0-\mathrm{cb}_1)\mathrm{x}-\mathrm{cb}_0$

แต่ $f(x)=(x-c)g(x)+r=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+\mathrm{a}_n\,x^n$

จะได้ว่า $b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-cb_{n-1})x^{n-1}+(\mathrm{b}_{n-3}-\mathrm{cb}_{n-2})\mathrm{x}^{n-2}+\dots+(b_0-cb_1)x+(r-cb_0)$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$

โดยคุณสมบัติการเท่ากันของพหุนาม จะได้ว่า

$$b_{n-1}=a_n$$
$$b_{n-2}cb_{n-1}=a_{n-1}\Rightarrow b_{n-1}=a_{n-1}+cb_{n-1}=a_{n-1}+ca_n$$
$$b_{n-3}cb_{n-2}=a_{n-2}\Rightarrow b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}$$
$$b_{n-4}cb_{n-3}=a_{n-3}\Rightarrow b_{n-4}=a_{n-3}+cb_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$b_0-cb_1=a_1\Rightarrow b_0=a_1+cb_1$$
$$r-cb_0=a_0\Rightarrow \boxed{r=a_0-cb_0}$$

$\boxed{r=a_0-cb_0}$ เป็นเศษเหลือ

จากกระบวนวิธีการดังกล่าวนี้ นำมาสร้างแบบการหารสังเคราะห์ ของ $f(x)\div(x-c)$ ได้ดังนี้

จัดเรียงสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆของ $f(x)$ ตามลำดับดีกรีจากมากไปหาน้อยดังรูปต่อไปนี้

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0	c
	$+cb_{n-1}$	$+cb_{n-2}$	...	$+cb_1$	$+cb_0$	
$a_n=b_{n-1}$	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	$\boxed{r}$	

สัมประสิทธิ์ของผลหาร

เศษเหลือจากการหาร $f(x)\div(x-c)$

ตัวอย่าง 2.14 จงหาผลหารและเศษเหลือเมื่อ $3x^6-7x^5+5x^4-x^2-6x-8$ หารด้วย $x+2$

วิธีทำ

3	−7	5	0	−1	−6	−8	−2
	−6	26	−62	124	−246	504	
3	−13	31	−62	123	−252	$\boxed{496}$	

ดังนั้น $3x^6-7x^5+5x^4-x^2-6x-8$ หารด้วย $x+2$ เศษเหลือเท่ากับ 496

2.5 กระบวนวิธีของฮอร์เนอร์ (Horner's Process)

พิจารณา x^m เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก c เป็นค่าคงที่ใดๆ

จาก $x^m=\left[c+(x-c)\right]^m$ โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$x^m=c^m+mc^{m-1}(m-c)+\frac{m(m-1)}{2!}c^{m-2}(x-c)^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots2\cdot1}{m!}(x-c)^m$$

จะเห็นว่า x^m สามารถกระจายให้อยู่ในรูปผลบวกของกำลังของ $x-c$ ได้ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว $f(x)$ สามารถกระจายในรูปผลบวกของกำลังของ $x-c$ ได้ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

สมมุติให้ $f(x)=A_0+A_1(x-c)+A_2(x-c)^2+\ldots+A_n(x-c)^n$ เมื่อ

$A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n$ เป็นค่าคงที่ สามารถหาค่าได้โดยกระบวนการหารแบบสังเคราะห์เมื่อ $f(x)$ หารด้วย $x-c$ แบบต่อเนื่องไปเรื่อยๆดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 $f(x)=A_0+(x-c)f_1(x)$ เมื่อ

$$f_1(x)=A_1+A_2(x-c)+A_3(x-c)^2+\ldots+A_n(x-c)^{-1}$$

A_0 คือเศษเหลือเมื่อ $f(x)$ หารด้วย $x-c$

ขั้นที่ 2 $f_1(x)=A_1+(x-c)f_2(x)$ เมื่อ

$$f_2(x)=A_2+A_3(x-c)+A_4(x-c)^2+\ldots+A_n(x-c)^{n-2}$$

A_1 คือเศษเหลือเมื่อ $f_1(x)$ หารด้วย $x-c$

ขั้นที่ 3 $f_2(x)=A_2+(x-c)f_3(x)$ เมื่อ

$$f_3(x)=A_3+A_4(x-c)+A_5(x-c)^2+\ldots+A_n(x-c)^{n-3}$$

A_2 คือเศษเหลือเมื่อ $f_2(x)$ หารด้วย $x-c$

$\vdots$

กระทำเช่นนี้ต่อเนื่องไปเรื่อยๆจะได้ว่า

ขั้นที่ n $f_{n-1}(x)=A_{n-1}+(x-c)f_n(x)$ เมื่อ $f_n(x)=A_n$ และ A_{n-1} คือเศษเหลือเมื่อ $f_{n-1}(x)$ หารด้วย $x-c$

กระบวนการวิธีการหาสัมประสิทธิ์ $A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n$ ดังกล่าวนี้ เรียกว่า **กระบวนวิธีของฮอร์เนอร์** (Horner's Process) และ กระบวนวิธีหาเศษเหลือ เมื่อ $f_1(x)+(x-c)=0$ สามารถใช้วิธีสังเคราะห์การหารได้

ตัวอย่าง 2.15 ให้ $f(x)=4x^5-6x^4+3x^3+x^2-x-1$

จงกระจาย $f(x)$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x-1)$

วิธีทำ โดยใช้วิธีการสังเคราะห์การหาร กระทำได้ดังนี้

กำหนดให้ $f(x)=A_0+A_1(x-1)+A_2(x-1)^2+A_3(x-1)^3+A_4(x-1)^4+A_5(x-1)^5$

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x	
4	-6	3	1	-1	-1	1
	4	-2	1	2	1	
4	-2	1	2	1	$\boxed{0 = A_0}$	
	4	2	3	5		
4	2	3	5	$\boxed{6 = A_1}$		
	4	6	9			
4	6	9	$\boxed{14 = A_2}$			
	4	10				
4	10	$\boxed{19 = A_3}$				
	4					
4	$\boxed{14 = A_4}$					
$\boxed{4 = A_5}$						

ดังนั้น $f(x) = 0 + 6(x-1) + 14(x-1)^2 + 19(x-1)^3 + 14(x-1)^4 + 4(x-1)^5$

$$= 6(x-1) + 14(x-1)^2 + 19(x-1)^3 + 14(x-1)^4 + 4(x-1)^5$$

2.6 สูตรของเทเลอร์ (Taylor's Formula)

กำหนดให้ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n จากทฤษฎีการหาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4 + 5\cdot 4\cdot 3a_5x^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = (n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1)a_n$$

ซึ่งจะได้ว่า $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^n(x)$ หาค่าได้ สำหรับ x ใดๆ

สมมุติว่า เราต้องการกระจาย $f(x)$ ในรูปผลบวกของกำลังสอง $(x-c)$ กระทำได้ดังกระบวนวิธีต่อไปนี้

กำหนดให้ $f(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \ldots + A_n(x-c)^n$ จะได้ว่า

(1) $f(c)=A_0$

(2) $f'(x)=A_1+2A_2(x-c)+3A_3(x-c)^2+\ldots+nA_n(x-c)^{n-1}$ และ

$$f'(c)=A_1$$

(3) $f''(x)=2A_2+3\cdot 2A_3(x-c)+4\cdot 3A_4(x-c)^2+\ldots+n(n-1)A_n(x-c)^{n-2}$ และ

$$f''(c)=2A_2 \Rightarrow A_2=\frac{f''(c)}{2}=\frac{f''(c)}{2!}$$

(4) $f'''(x)=3\cdot 2A_3+4\cdot 3\cdot 2A_4(x-c)+\ldots+n(n-1)(n-2)A_n(x-c)^{n-3}$ และ

$$f'''(c)=3\cdot 2A_3 \Rightarrow A_3=\frac{f'''(c)}{3\cdot 2}=\frac{f'''(c)}{3!}$$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1A_n$ และ

$$f^{(n)}(c)=n!A_n \Rightarrow A_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

ดังนั้น $f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

สรุปได้ว่า ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว $f(x)$ สามารถเขียนในรูปผลบวกของกำลังของ $(x-c)$ ได้ดังนี้

$$\boxed{f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

สูตรนี้เรียกว่า **สูตรของเทเลอร์ (Taylor's Formula)**

ตัวอย่าง 2.16 จงใช้สูตรของเทเลอร์ กระจายพหุนาม $4x^3-7x^2+5x+3$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x+2)$

วิธีทำ ให้ $f(x)=4x^3-7x^2+5x+3$ โดยสูตรของเทเลอร์จะได้ว่า

$$f(x)=f(-2)+f'(-2)(x+2)+\frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2+\frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3$$

$$f(-2)=4(-8)-7(4)+5(-2)+3=-67$$

$$f'(x)=12x^2-14x+5$$

$$f'(-2)=12(4)-14(-2)+5=81$$

$$f''(x) = 24x - 14$$

$$f''(-2) = -48 - 14 = -62$$

$$f'''(x) = 24$$

$$f'''(-2) = 24$$

ดังนั้น $4x^3 - 7x^2 + 5x + 3 = -67 + 81(x+2) - \frac{62}{2!}(x+2)^2 + \frac{24}{3!}(x+2)^3$

$$= -67 + 81(x+2) - 31(x+2)^2 + 4(x+2)^3$$

2.7 ตัวหารร่วมมากของพหุนามสองพหุนาม

บทนิยาม 2.6 ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใดๆ ถ้ามีพหุนาม $g(x)$ โดยที่ $P(x) = g(x) \cdot Q(x)$ แล้ว เรียกว่า $P(x)$ หารด้วย $Q(x)$ ลงตัว เขียนแทนด้วย $Q(x) | P(x)$ เรียก $Q(x)$ ว่าเป็นตัวหาร หรือ ตัวประกอบของ $P(x)$

ตัวอย่าง 2.17 ให้ $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

เนื่องจาก $P(x) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + x + 1)$

ดังนั้น $Q(x) | P(x)$ หรือ $x^2 + x + 1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$

บทนิยาม 2.7 ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใดๆ ถ้า $g(x)$ เป็นพหุนามที่ $g(x) | P(x)$ และ $g(x) | Q(x)$ แล้ว เรียก $g(x)$ ว่าเป็นตัวหารร่วมของ $P(x)$ และ $Q(x)$

ตัวอย่าง 2.18 ให้ $f(x) = (x+1)(x+2)(x^2 + x - 1)$

$$g(x) = (x+1)(x+2)(x^4 - x^3 + x^2 + 1)$$

จะได้ว่า $(x+1), (x+2)$ และ $x^2 + 3x + 2$ เป็นตัวหารร่วมของ $f(x)$ และ $g(x)$

บทนิยาม 2.8 ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใดๆ ตัวหารร่วมของ $P(x)$ และ $Q(x)$ มีดีกรีสูงสุด เรียกพหุนามนั้นว่า เป็นตัวหารร่วมมากของ $P(x)$ และ $Q(x)$

ตัวอย่าง 2.19 ให้ $f(x)=(x+1)(x+2)(x^2+x-1)$

$$g(x)=(x+1)(x+2)(x^4-x^3+x^2+1)$$

จะได้ว่า x^2+3x+2 เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $g(x)$

การหาตัวหารร่วมมากของพหุนามสองพหุนามใดๆ หาได้จากกระบวนวิธีของยูคลิด (Euclidean algorithm) เช่นเดียวกับกระบวนวิธีการหาตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนใดๆ ซึ่งมีกระบวนวิธีดังนี้

กำหนดให้ $f(x)$ และ $f_1(x)$ เป็นพหุนามสองพหุนามใดๆโดยที่ดีกรีของ $f(x)$ มากกว่าดีกรีของ $f_1(x)$โดยกระบวนวิธีของยูคลิด จะได้ว่า จะมีพหุนาม $g_1(x)$ และ $f_2(x)$ โดยที่

$f(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)+f_2(x)$ เมื่อดีกรีของ $f_2(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $f_1(x)$

ถ้า $f_2(x)=0$ จะได้ว่า $f_1(x)$ เป็นตัวหารร่วมมาก ของ $f(x)$ กับ $f_1(x)$

ถ้า $f_2(x)\neq 0$ จะได้ว่าจะมี $g_2(x)$ และ $f_3(x)$ โดยที่

$f_1(x)=g_2(x)\cdot f_2(x)+f_3(x)$ เมื่อดีกรีของ $f_3(x)$น้อยกว่าดีกรีของ $f_2(x)$

ถ้า $f_3(x)=0$ แล้ว จะได้ว่า $f_2(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f_1(x)$ กับ $f_2(x)$ และจะเป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f_1(x)$ด้วย

ถ้า $f_3(x)\neq 0$ จะมี $g_3(x)$ และ $f_4(x)$ โดยที่

$f_2(x)=g_3(x)\cdot f_3(x)+f_4(x)$ เมื่อดีกรีของ $f_4(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $f_3(x)$

ถ้า $f_4(x)=0$ จะได้ว่า $f_3(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f_2(x)$ กับ $f_3(x)$ และจะเป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f_1(x)$ ด้วย แต่ถ้า $f_4(x)\neq 0$ จะมี $g_4(x)$ และ $f_5(x)$ โดยที่ $f_3(x)=g_4(x)\cdot f_4(x)+f_5(x)$ เมื่อดีกรี $f_5(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $f_4(x)$

โดยกระบวนวิธีเช่นเดียวกันกับที่กล่าวมาแล้วกระทำต่อเนื่องไปเรื่อยๆจนกระทั่งได้ขั้นตอนสุดท้ายในรูป $f_{r-1}(x)=f_r(x)\cdot g_r(x)+0$ หรือ $k\neq 0$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งสรุปเป็นกระบวนวิธีแบบต่อเนื่องได้ดังนี้

ถ้า $f(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)+f_2(x)$ และ $f_2(x)\neq 0$

จะได้ว่า $f_1(x)=g_2(x)\cdot f_2(x)+f_3(x)$ และ ถ้า $f_3(x)\neq 0$

จะได้ว่า $f_2(x)=g_3(x)\cdot f_3(x)+f_4(x)$ และถ้า $f_4(x)\neq 0$

จะได้ว่า $f_3(x)=g_4(x)\cdot f_4(x)+f_5(x)$ และถ้า $f_5(x)\neq 0$

$\vdots$

ถ้า $f_{r-1}(x)\neq 0$ จะได้ว่า $f_{r-2}(x)=f_{r-1}(x)\cdot g_{r-1}(x)+f_r(x)$

ถ้า $f_r(x)\neq 0$ จะได้ว่า $f_{r-1}(x)=f_r(x)\cdot g_r(x)+0$ ซึ่งจะได้ว่า

$f_r(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f_{r-1}(x)$ กับ $f_r(x)$ และ จะได้ว่า

$f_r(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f_{r-2}(x)$ กับ $f_{r-1}(x)$ และ จะได้ว่า

$f_r(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f_{r-3}(x)$ กับ $f_{r-2}(x)$

$\vdots$

จะได้ว่า $f_r(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f_1(x)$

ในกรณีที่ $f_{r-1}(x)=f_r(x)\cdot g_r(x)+k$ เมื่อ $k\neq 0$ เป็นค่าคงที่ จะได้ว่าตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f_1(x)$ คือ 1 และเรียกว่า $f(x)$ กับ $f_1(x)$ เป็น **พหุนามเฉพาะสัมพัทธ์** (Relatively prime polynomial)

ตัวอย่าง 2.20 ให้ $f(x)=x^6+2x^5+x^3+3x^2+3x+2$ และ $g(x)=x^4+4x^3+4x^2-x-2$ จงหาตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $g(x)$ โดยกระบวนวิธีของยูคลิด

วิธีทำ หา $f(x)\div g(x)$ ดังนี้

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	x^4	x^3	x^2	x	x^0
1	2	0	1	3	3	2	1	4	4	-1	-2
1	4	4	-1	-2			x^2	x	x^0		
	-2	-4	2	5	3	2	1	-2	4		
	-2	-8	-8	2	4						
		4	10	3	-1	2					
		4	16	16	-4	-8					
			-6	-13	3	10					

จะได้ว่า $f(x)=g(x)\cdot(x^2-2x+4)+(-6x^3-13x^2+3x+10)$

ให้ $f_1(x)=-6x^3-13x^2+3x+10$

หา $g(x)\div f_1(x)$ เพื่อไม่ให้ผลหารมีสัมประสิทธิ์เป็นเศษส่วน นำ 6 คูณกับ $g(x)$ จะได้ $6g(x)=6x^4+24x^3+24x^2-6x-12$ (เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของตัวหารร่วมมากของพหุนาม ไม่มีบทบาทสำคัญในการกำหนดตัวหารร่วมมากซึ่งสามารถตัดทอนหรือจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้)

หา $6g(x)\div f_1(x)$ ดังนี้

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	x^3	x^2	x^1	x^0
6	24	24	−6	−12	−6	−13	3	10
6	13	−3	−10		x^1	x^0		
	11	27	4	−12	−1	−11		
	66	162	24	−72	คูณด้วย 6			
	66	143	−33	−110				
		19	57	38				
		1	3	2	หารด้วย 19			

ให้ $f_2(x)=x^2+3x+2$ หา $f_1(x)\div f_2(x)$ ดังนี้

x^3	x^2	x^1	x^0	x^2	x^1	x^0
−6	−13	3	10	1	3	2
−6	−18	−12		x	x^0	
	5	15	10	−6	6	ผลหาร
	5	15	10			
		0				

จะได้ว่า ตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $g(x)$ คือ x^2+3x+2

2.8 สมการเชิงพีชคณิต (Algebraic Equation)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ที่มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน และ ดีกรี $n\geq 1$ จากบทนิยาม 2.2 เราจะทราบว่า $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนาม ซึ่ง ณ ที่นี้ จะเรียกว่า $f(x)=0$ เป็น**สมการเชิงพีชคณิตดีกรี** n เช่น

ในกรณีที่ $n=1$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x=0$ เรียกว่า **สมการเชิงเส้น** (Linear equation)

ในกรณีที่ $n=2$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x+a_2x^2=0$ เรียกว่า **สมการกำลังสอง** (Quadratic equation)

ในกรณีที่ $n=3$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$ เรียกว่า **สมการกำลังสาม** (Cubic equation)

ในกรณีที่ $n=4$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=0$ เรียกว่า **สมการกำลังสี่** (Biquadratic equation) เป็นต้น

c เรียกว่า เป็นรากของสมการ $f(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $f(c)=0$ จากความหมายของค่ารากของสมการพหุนาม เราอาจพิจารณาหาค่ารากของสมการ $f(x)$ ได้โดยอาศัยกระบวนวิธีคิดดังต่อไปนี้

(1) ถ้า c_1 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $f(c_1)=0$ โดยทฤษฎีเศษเหลือ จะได้ว่า

$$(x-c_1)\,|\,\mathrm{f}(x) \tag{6}$$

(2) ถ้า c_2 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ และ $c_2\neq c_1$ จะได้ว่า $f(c_2)=0$ และ $f_1(c_2)=0$ (เพราะว่า $c_2-c_1\neq 0$) ดังนั้นจะมีพหุนาม $f_2(x)$ ที่มีดีกรี $n-2$ โดยที่

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)\cdot f_2(x) \tag{7}$$

(3) ถ้า c_3 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f(x)=0$ โดยที่ $c_3\neq c_2$ และ $c_3\neq c_1$ โดยเหตุผลเช่นเดียวกันกับข้อ (1) และ (2) จะมีพหุนาม $f_3(x)$ ที่มีดีกรี $n-3$ โดยที่

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\cdot f_3(x) \tag{8}$$

โดยกระบวนวิธีคิดเช่นเดียวกันกับ ข้อ (1),(2) และ (3) กระทำต่อเนื่องกันไปเรื่อยจะได้ $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)=0$ ซึ่งสรุปได้ว่า $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n$ เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ทั้งหมด n ค่าที่ต่างกัน

ทฤษฎีบทที่ 2.3 กำหนดให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ค่ารากที่ต่างกันของ $f(x)=0$ มีได้ n ค่า

พิสูจน์ สมมุติให้ $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n$ เป็นค่ารากที่ต่างกันของ $f(x)=0$ จะได้ว่า $(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)$ เป็นตัวหารของ $f(x)$ ที่มีดีกรี n เช่นเดียวกันกับ $f(x)$

ดังนั้น $\dfrac{f(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)}$ เป็นค่าคงที่ เมื่อ

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)\right]$$

สมมุติให้ $\dfrac{f(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)}=k$

จะได้ว่า $\left[k\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0\right]$

โดยนิยามการเท่ากันของพหุนามจะได้ว่า $k=a_n$ ซึ่งจะได้ว่า

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-c_i) \text{ หรือ}$$

$$f(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n) \tag{9}$$

จากสมการ (9) จะได้ว่า $f(x)=0$ เมื่อ $x\in\{c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n\}$ เท่านั้น ทั้งนี้เพราะว่า $a_n\neq 0$

นั้นคือ ค่ารากที่ต่างกันของ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ มีได้ n ค่า

ทฤษฎีบทที่ 2.4 กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ c_1 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f(x)=0$ โดยที่ $f(x)=(x-c_1)f_1(x)$ เมื่อ $f_1(x)=0$ แล้ว c_2 จะเป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

พิสูจน์ เพราะว่า $f(x)=(x-c_1)f_1(x)=0$ โดยที่ $c_2\neq c_1$ และ c_2 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f_1(x)=0$

จะได้ว่า $(x-c_2)\mid f_1(x)$

ดังนั้น จะมีพหุนาม $f_2(x)$ โดยที่ $f_1(x)=(x-c_2)f_2(x)$

เพราะฉะนั้น $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)f_2(x)$ ซึ่งจะได้ว่า

$$f(c_2)=(c_2-c_1)(c_2-c_2)f_2(c_2)=0$$

นั้นคือ c_2 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

บทนิยาม 2.9 กำหนดให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x)=(x-c_1)f_1(x)$ เมื่อ $f_1(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี $n-1$ สมการ $f_1(x)=0$ เรียกว่า **สมการลดกำลัง**ของ $f(x)=0$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทที่ 2.4 การแก้สมการพหุนาม $f(x)=0$ อาจกำหนดกระบวนวิธีในการแก้สมการได้ดังนี้

(1) หาค่ารากค่าหนึ่งของ $f(x)=0$ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ สมมุติว่า $f(c_1)=0$ จะได้ว่า c_1 เป็นค่ารากค่าหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

(2) จาก (1) นำ $(x-c_1)$ ไปหาร $f(x)$ สมมุติว่าได้ผลลัพธ์เท่ากับ $f_1(x)$ จะได้ $f(x)=(x-c_1)f_1(x)=0$

พิจารณาหาค่ารากของสมการลดกำลังของ $f(x)=0$ ซึ่งก็คือสมการ $f_1(x)=0$ ค่ารากของสมการ $f_1(x)=0$ ก็จะเป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ด้วย กระทำโดยวิธีการดังกล่าวต่อไปเรื่อยๆ จนถึง การหาค่ารากของสมการลดกำลังสุดท้ายของ $f(x)=0$ ซึ่งจะอยู่ในรูป $a_1x+a_0=0$ ค่ารากของสมการลดกำลังทั้งหมด $f(x)=0$ ทั้งหมดจะเป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$

ตัวอย่าง 2.21 จงแก้สมการ $x^3+4x^2-47x-210=0$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x)=x^3+4x^2-47x-210$

เพราะว่า $f(-5)=-125+100+235-210=0$

จะได้ว่า -5 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

พิจารณาหา $f(x)\div(x+5)$ ดังนี้

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & \\
\hline
1 & 4 & -47 & -210 & -5 \\
\cline{5-5}
 & -5 & 5 & 210 & \\
\hline
1 & -1 & -42 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

จะได้ว่า $f(x)=(x+5)(x^2-x-42)$

ให้ $f_1(x)=x^2-x-42$

เพราะว่า $f_1(7)=(7)^2-7-42=0$

ดังนั้น 7 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f_1(x)=0$

พิจารณา $f_1(x)\div(x-7)$ ดังนี้

x^2	x^1	x^0	
1	-1	-42	7
	7	42	
1	6	$\boxed{6}$	

จะได้ว่า $x^2 - x - 42 = (x+6)(x-7)$

ดังนั้น $f(x) = (x+5)(x+6)(x-7) = 0$

นั้นคือ ค่ารากของสมการ $x^3 + 4x^2 - 47x - 210 = 0$ คือ $-6,5$ และ 7

2.9 ทฤษฎีเอกลักษณ์และทฤษฎีพื้นฐานทางพีชคณิต

ทฤษฎีบทที่ 2.5 กำหนดให้ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n ถ้า $f(x) = 0$ มีค่ารากที่ต่างกันมากกว่า n ค่าแล้ว $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots a_1 = a_0 = 0$

พิสูจน์ สมมุติให้ $a_n \neq 0$ จากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $f(x) = 0$ จะมีค่ารากที่ต่างกันไม่เกิน n ค่า ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ว่า $f(x) = 0$ มีค่ารากที่ต่างกันมากกว่า n ค่า ดังนั้น $a_n = 0$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้
$f_k(x) = a_{n-k}x^{n-k} + a_{n-k-1}x^{n-k-1} + a_{n-k-2}x^{n-k-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ $k = 1,2,3,\ldots,n$ มีค่ารากที่ต่างกันมากกว่า $n-k$ ค่าโดยที่ $a_{n-k} \neq 0, a_{n-k-1} \neq 0, a_{n-k-2} \neq 0,\ldots, a_1 \neq 0, a_0 \neq 0$ ซึ่งจะเกิดข้อขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ 2.3 ดังนั้น $a_{n-k} = a_{n-k-1} = a_{n-k-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$

นั้นคือ ถ้า $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ มีค่ารากที่ต่างกันมากกว่า n ค่าแล้ว $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 (Identity Theorem)

ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n สองพหุนามใดๆ โดยที่ $f(x) = g(x)$ สำหรับค่า x ที่ต่างกันมากกว่า n ค่า แล้ว $f(x)$ และ $g(x)$ จะเป็นพหุนามเดียวกัน

พิสูจน์ กำหนดให้ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ และ

$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ เป็นพหุนามสองพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x) = g(x)$ สำหรับ x มากกว่า n ค่า จะได้ว่า
$f(x) - g(x) = 0$ สำหรับค่า x ที่มีมากกว่า n ค่าดังนั้น
$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$ เป็นสมการ

พหุนามใน x ดีกรี n ที่มีค่ารากต่างกันมากกว่า n ค่า โดยทฤษฎีบทที่ 2.5 จะได้ว่า
$(a_n - b_n) = (a_{n-1} - b_{n-1}) = (a_{n-2} - b_{n-2}) = \ldots = (a_1 - b_1) = (a_0 - b_0) = 0$

เพราะฉะนั้น $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, a_{n-2} = b_{n-2}, \ldots, a_1 = b_1$ และ $a_0 = b_0$

นั้นคือ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามเดียวกัน

บทนิยาม 2.10 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x) = (x-c)^m \cdot g(x)$ เมื่อ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x ถ้า c ไม่ใช่ค่ารากของ $g(x) = 0$ แล้ว เรียกว่า c เป็นค่ารากซ้ำที่ n ของ $f(x) = 0$ และสมการ $f(x) = 0$ มี c เป็นค่ารากซ้ำ m ตัว

หมายเหตุ จากบทนิยาม 2.10

กรณีที่ $m = 1$; c เรียกว่า รากเชิงเดียว (Simple root) ของ $f(x) = 0$ กรณีที่ $m = 2$; c เรียกว่า รากซ้ำที่สอง(Double root) ของ $f(x) = 0$ กรณีที่ $m = 3$; c เรียกว่า รากซ้ำที่สาม (Triple root) ของ $f(x) = 0$ กรณีที่ $m = 4$; c เรียกว่า รากซ้ำที่สี่ (Quadruple root) ของ $f(x) = 0$ และในกรณีที่ $m = p$; c เรียกว่า รากซ้ำที่ p ของ $f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 2.22 (1) ให้ $f(x) = x^2 + 2x + 1 = 0$

จะได้ว่า -1 เป็นค่ารากซ้ำที่สองของ $f(x) = 0$ เนื่องจาก $f(x) = (x+1)^2 = 0$

(2) ให้ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$

เนื่องจาก $f(x) = x(x-1)^3 = 0$; 0 เป็นค่ารากเชิงเดียวของ $f(x) = 0$ และ 1 เป็นค่ารากซ้ำที่สามของ $f(x) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 2.7 ถ้า $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ที่มี $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ เป็นค่ารากที่ต่างกันของสมการ $f(x) = 0$ และ เป็นค่ารากซ้ำที่ $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ ตามลำดับ แล้ว

$f(x) = a_n (x-c_1)^{m_1} \cdot (x-c_2)^{m_2} \cdot (x-c_3)^{m_3} \cdot \ldots \cdot (x-c_k)^{m_k} = 0$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$

ทฤษฎีบทที่ 2.8 สมการพหุนามดีกรี n จะมีจำนวนค่ารากทั้งหมด n ค่า โดยนับรวมจำนวนค่า รากซ้ำด้วย

สมมุติให้ ค่ารากของสมการ $f(x)=0$ มีจำนวน $n+1$ ตัว โดยนับจำนวนค่ารากที่ซ้ำกันด้วย และ ให้ $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_k$ เป็นค่ารากที่ต่างกันของ สมการ $f(x)=0$ และเป็นค่ารากซ้ำที่ $m_1,m_2,m_3,\ldots,m_k$ ตามลำดับโดยที่ $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ และให้ c_0 เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ และ $c_0 \notin \{c_1,c_2,c_3,\ldots,c_k\}$ โดย ทฤษฎีบทที่ 2.7 จะได้ว่า

$f(x)=a_n(x-c_1)^{m_1}\cdot(x-c_2)^{m_2}\cdot(x-c_3)^{m_3}\cdot\ldots\cdot(x-c_k)^{m_k}$ และ

$f(c_0)=a_n(c_0-c_1)^{m_1}\cdot(c_0-c_2)^{m_2}\cdot(c_0-c_3)^{m_3}\cdot\ldots\cdot(c_0-c_k)^{m_k}=0$

ซึ่งจะได้ว่า $a_n=0$ ทั้งนี้เพราะว่า $c_0-c_i\neq 0$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,3,\ldots,\mathrm{k}$

แต่ $a_n\neq 0$ ตามที่กำหนดให้ ดังนั้น ที่สมมุติให้ว่า จำนวนค่ารากของสมการ $f(x)=0$ มีจำนวน $n+1$ ตัว ซึ่งไม่จริง

เพราะฉะนั้น จำนวนค่ารากของ สมการ $f(x)=0$ มีได้ทั้งหมด n ตัว โดยนับรวมจำนวนค่ารากที่ซ้ำกันด้วย

ทฤษฎีบทที่ 2.9 ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ แล้ว c จะเป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f'(x)=0$ ด้วยเมื่อ $f(x)$ เป็น พหุนามใดๆ

พิสูจน์ เพราะว่า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)$ ดังนั้น $(x-c)^m \mid f(x)$ และ $f(x)$ หารด้วย $(x-c)^{m+1}$ ไม่ลงตัว

ดังนั้นจะมี พหุนาม $g(x)$ โดยที่ $f(x)=(x-c)^m\cdot g(x)$ และ c ไม่ใช่ค่ารากของสมการลดกำลัง $g(x)=0$

เพราะว่า $f'(x)=(x-c)^m\cdot g'(x)+g(x)\cdot m(x-c)^{m-1}$

ซึ่งจะได้ว่า $f'(c)=(c-c)^m\cdot g'(c)+g(c)\cdot m(c-c)^{m-1}=0$

นั่นก็คือ c เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f'(x)=0$

จาก $f'(x)=(x-c)^m\cdot g'(x)+g(x)\cdot m(x-c)^{m-1}$

$=(x-c)^{m-1}\left[(x-c)\cdot g'(x)+mg(x)\right]$

ซึ่งจะได้ว่า $(x-c)^{m-1}$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f'(x)$

แต่ $(x-c)^m=(x-c)(x-c)^{m-1}$ ไม่ใช่ตัวประกอบของ $f'(x)$ ทั้งนี้

เพราะว่า $g(x)$ หารด้วย $(x-c)$ ไม่ลงตัว ซึ่งทำให้ $f'(x)$ หารด้วย $(x-c)$ ไม่ลงตัวด้วย

นั้นคือ c จะเป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f^{/}(x)=0$

ทฤษฎีบทที่ 2.10 กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ c เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f^{/}(x)=0$ แล้ว c จะเป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

พิสูจน์ สมมุติให้ c จะเป็นค่ารากซ้ำที่ k เมื่อ $k>1$ ของสมการ $f(x)=0$ และ c เป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f^{/}(x)=0$ โดย ทฤษฎีบทที่ 2.9 จะได้ว่า c เป็นค่ารากซ้ำที่ $k-1$ ของสมการ $f^{/}(x)=0$

ดังนั้น $k-1=m-1$ ซึ่งจะได้ว่า $k=m$

นั้นคือ c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$

ทฤษฎีบทที่ 2.11 กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n

ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ แล้ว

$f(c)=f^{/}(c)=f^{//}(c)=f^{///}(c)=\ldots=f^{(m-1)}(c)=0$ แต่ $f^{(\mathrm{m})}(C)\neq 0$

พิสูจน์ พิจารณา พหุนาม $f(x)$ กระจายในรูปผลบวกของกำลังของ $(x-c)$ โดยสูตรของเทเลอร์ จะได้ว่า $f(x)=\dfrac{f(c)}{0!}+\dfrac{f^{/}(c)}{1!}(x-c)+\dfrac{f^{//}(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\dfrac{f^{n}(c)}{n!}$

เพราะว่า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$

ดังนั้น $(x-c)^m \mid f(x)$ แต่ $f(x)$ หารด้วย $(x-c)^{m+1}$ ไม่ลงตัว

โดยทฤษฎีบทที่ 2.10 จะได้ว่า

c เป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f^{/}(x)=0$

c เป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f^{//}(x)=0$

$\vdots$

c เป็นค่ารากเชิงเดียว ของสมการ $f^{m-1}(x)=0$

นั้นคือ $f(c)=f^{/}(c)=f^{//}(c)=f^{///}(c)=\ldots=f^{m-1}(c)=0$ และ $f^{m}(c)\neq 0$ เพราะว่า c ไม่ใช่ค่ารากของสมการ $f^{m}(x)=0$

ตัวอย่าง 2.23 กำหนดให้ $f(x)=x^4-4x+3$ จะเห็นว่า 1 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ จงพิจารณาว่า 1 เป็นค่ารากซ้ำที่เท่าไหร่ ของสมการ $f(x)=0$

วิธีทำ จาก $f(x)=x^4-4x+3$

$$f'(x)=4x^3-4$$

$$f'(1)=4(1)^3-4=0$$

$$f''(x)=12x$$

$$f''(1)=12\neq 0$$

ดังนั้น 1 เป็นค่ารากซ้ำที่ 2 ของสมการ $f(x)=x^4-4x+3=0$ และ $(x-1)^2\mid(x^4-4x+3)$ แต่ x^4-4x+3 หารด้วย $(x-1)^3$ ไม่ลงตัว

บทที่ 3

กระบวนการหาค่ารากของสมการพหุนาม

3.1 วิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน (Unified method)

กำหนดรูปแบบทั่วไปของสมการพหุนามดีกรี N คือ

$$x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \ldots + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{10}$$

เมื่อ a_j ($j = 0$ ถึง $N-1$) เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนจริง ในสมการที่ (10) และเมื่อ N น้อยกว่า 5 เราจะทำการแยกตัวประกอบในสมการที่ (10) ให้อยู่ในรูปของตัวประกอบ 2 ตัว โดยวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน เราจะกำหนดโครงสร้างของสมการพหุนามดีกรี N คือ

$$\frac{\left[V_M(x)\right]^K - p^K\left[W_M(x)\right]^K}{1-p^K} = 0 \tag{11}$$

เมื่อ V_M และ W_M เป็นตัวประกอบของพหุนามในลำดับที่ M โดยที่ $M < N$ และ p ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า โดยมีจำนวนเต็ม K มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$KM = N \tag{12}$$

ดังนั้น สมการที่ (11) เป็นสมการพหุนามดีกรี N

นั้นคือ สมการพหุนาม V_M และ W_M จะสามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} V_M(x) &= x^M + b_{(M-1)}x^{(M-1)} + \ldots + b_j x^j + \ldots + b_1 x + b_0 \\ W_M(x) &= x^M + c_{(M-1)}x^{(M-1)} + \ldots + c_j x^j + \ldots + c_1 x + c_0 \end{aligned} \tag{13}$$

เมื่อ b_j และ c_j โดยที่ $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{M}-1$ คือค่าในสัมประสิทธิ์ของพหุนาม V_M และ W_M ตามลำดับ ในสมการที่ (11) สามารถแยกตัวประกอบออกมาได้เป็น 2 ตัวประกอบ โดยที่หนึ่งในตัวประกอบนั้นคือ

$$Y_M(x) = \frac{V_M(x) - pW_M(x)}{1-p} \tag{14}$$

ดังนั้น ถ้าเราแปลงจากสมการที่ (10) ไปสู่ในรูปแบบของสมการที่ (11) แล้ว เราจะสามารถแยกสมการที่ (10) ออกมาเป็น 2 ตัวประกอบ และหนึ่งในตัวประกอบนั้นก็คือสมการที่ (14) สำหรับการแปลงจากสมการที่ (10) เป็นสมการที่ (11) สัมประสิทธิ์ N ตัวในสมการที่ (10) และ (11) จะเท่ากัน

ดังนั้นต้องกระจายและจัดรูปสมการที่ (11) (ซึ่งจะคล้ายกับสมการที่ (10)) จะแสดงได้ดังนี้

$$x^N + d_{N-1}x^{n-1} + \ldots + d_j x^j + \ldots + d_1 x + d_0 = 0 \tag{15}$$

เมื่อ d_j โดยที่ $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{M}-1$ ซึ่ง d_j คือ สัมประสิทธิ์ที่เกิดขึ้นหลังจากกระจายและจัดรูปสมการที่ (11) และค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดคือ b_j, c_j และ p ตอนนี้เราสามารถแปลงสมการที่ (10) ไปเป็นสมการที่ (11) โดยการเทียบสัมประสิทธิ์สมการที่ (10) และสมการที่ (15) โดยที่จะเกิด N สมการ และ $(2M+1)$ ค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า ก็คือ $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ และ p โดยที่จะแสดงดังนี้

$$b_j = a_j \tag{16}$$

โดยที่ $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{M}-1$

ถ้าจำนวนค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่ามีทั้งหมด $(2M+1)$ ตัว (b_j, c_j และ p) น้อยกว่าสมการ N สมการแล้ว จะไม่สามารถหารากในรูปแบบทั่วไปได้ ดังนั้น จำนวนค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า $(2M+1)$ จะเท่ากับจำนวนสมการ N สมการ เมื่อ N เป็นจำนวนคี่ และ ค่าคงที่ไม่ทราบค่าจะเท่ากับ $N+1$ เมื่อ N เป็นจำนวนคู่ดังต่อไปนี้

$$2M+1 = N \text{ ,สำหรับ } N \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

$$2M+1 = N+1 \text{ ,สำหรับ } N \text{ เป็นจำนวนคู่} \tag{17}$$

จำนวนเต็ม M สามารถทราบค่าได้เป็นอันดับแรกจากสมการที่ (17) และต่อมาก็คือ ค่า K สามารถทราบค่าได้ในสมการที่ (12) เมื่อ N เป็นจำนวนคู่ จำนวนค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าจะมากกว่าจำนวนสมการอยู่ 1 ตัว ดังนั้นในกรณีนี้จะทำการกำหนดค่าให้กับค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า 1 ตัว แล้วจึงหารากโดยสมการ N สมการที่กำหนดในการที่ (16)

ในตอนนี้เราอยู่ในกระบวนการแปลงสมการที่ (10) ไปเป็นสมการที่ (11) ดังนั้น สมการพหุนามข้างต้นสามารถแยกเป็น 2 ตัวประกอบ หนึ่งในตัวประกอบนั้นก็คือ $Y_M(x)$ ในสมการที่ (14) ตัวประกอบนี้ คือ สมการพหุนามดีกรี M นั้นคือ

$$x^M + \ldots + \frac{b_j - pc_j}{1-p}x^j + \ldots + \frac{b_1 - pc_1}{1-p}x + \frac{b_0 - pc_0}{1-p} = 0 \tag{18}$$

หารากจากสมการที่ (18) จะได้รากของสมการ M ราก และอีกตัวประกอบหนึ่งของสมการที่ (11) จะเท่ากับ 0 จะได้สมการพหุนามดีกรี $(N-M)$ หาราก จะได้รากของสมการอีก $(N-M)$ ราก ดังนั้น รากทั้งหมด N รากของสมการ (1) หารากได้เป็นที่เรียบร้อย ซึ่งหมายความว่า หาค่ารากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน C ด้วย

และ Unified Method นี้สามารถใช้ได้กับ สมการพหุนามดีกรีสอง ดีกรีสาม และดีกรีสี่ ในรูปแบบทั่วไปได้

3.1.1 สมการพหุนามดีกรี 2 (The Quadratic Equation)

ให้รูปทั่วไปของสมการพหุนามดีกรีสองสำหรับหารากในรูปทั่วไปคือ

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{19}$$

เมื่อ a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ และเป็นอิสระต่อกันคือตัวใดตัวหนึ่งห้ามเป็น 0 (เมื่อ a_1 และ a_0 เท่ากับศูนย์ จะหารากได้โดยง่าย และเมื่อเข้าสู่วิธีการหารากในวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกันจะเกิดขั้นตอนที่เพิ่มมากขึ้น) ใช้วิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน หารากสมการข้างต้น ($N=2$) เราจะสามารถหาค่าของ M และ K ได้จากสมการ (12) และ(17) นั่นก็คือ $M=1$ และ $K=2$ และโครงสร้างสมการในรูปแบบสมการที่ (11) เป็นดังนี้

$$\frac{\left[V_1(x)\right]^2 - p^2\left[W_1(x)\right]^2}{1-p^2} = 0 \tag{20}$$

เมื่อ $V_1(x)$ และ $W_1(x)$ ก็คือ (ใช้สมการที่ (13))

$$V_1(x) = x + b_0$$

$$W_1(x) = x + c_0 \tag{21}$$

ค่า b_0 และ c_0 เป็นค่าคงที่ที่เราไม่ทราบค่าในพหุนาม $V_1(x)$ และ $W_1(x)$ ตามลำดับ เมื่อแทนค่า $V_1(x)$ และ $W_1(x)$ ในสมการที่ (21) ลงไปในสมการที่ (20) เราจะได้สมการพหุนามดีกรีสอง ดังนี้

$$\frac{\left[x+b_0\right]^2 - p^2\left[x+c_0\right]^2}{1-p^2} = 0 \tag{22}$$

นำสมการที่ (22) มากระจายและจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$\frac{[x+b_0]^2 - p^2[x+c_0]^2}{1-p^2} = 0$$

$$\frac{\left(x^2+2xb_0+b_0^2\right)-p^2\left(x^2+2xc_0+c_0^2\right)}{1-p^2} = 0$$

$$\frac{\left(1-p^2\right)x^2}{1-p^2} + \left(\frac{\left(2b_0-2p^2c_0\right)x}{1-p^2}\right) + \frac{\left(b_0^2-c_0^2p^2\right)}{1-p^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{2\left(b_0-c_0p^2\right)}{1-p^2}x + \frac{{b_0}^2-{c_0}^2p^2}{1-p^2} = 0 \qquad (23)$$

ต่อไปจะนำสัมประสิทธิ์ ในสมการที่ (19) มาเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการที่ (23) ทำให้เกิดเป็น 2 สมการดังนี้

$$\frac{2\left(b_0-c_0p^2\right)}{1-p^2} = a_1 \qquad (24)$$

$$\frac{{b_0}^2-{c_0}^2p^2}{1-p^2} = a_0 \qquad (25)$$

จะได้ว่า มีค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าอยู่ 3 ค่า (b_0, c_0 และ p) แต่มีเพียงแค่สองสมการเท่านั้น (สมการที่ (15) และ (16)) ที่จะหาราก ดังนั้นต้องกำหนดค่าให้ค่าคงที่ไม่ทราบค่า 1 ค่า โดยที่เราจะให้ $c_0 = 0$ และหารากจากสมการที่ (15) และ (16) หาค่า b_0 และ p จะได้ว่า

$$b_0 = \frac{2a_0}{a_1}$$

$$p = \frac{\left({a_1}^2-4a_0\right)^{1/2}}{a_1} \qquad (26)$$

เมื่อทราบค่า b_0 และ p จากสมการพหุนามในสมการที่ (18) จะสามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบสมการพหุนามในสมการที่ (22) และได้ว่า สามารถแยกออกมาเป็น 2 ตัวประกอบ ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\frac{[x+b_0]^2 - p^2[x+c_0]^2}{1-p^2} = 0$$

ให้ $A = x + b_0$ และ $B = p^2\left(x + c_0\right)$

จะได้
$$\frac{[A]^2 - [B]^2}{1 - p^2} = 0$$

$$\frac{\left(A - B\right)\left(A + B\right)}{1 - p^2} = 0$$

$$\frac{\left(x + b_0 - px - pc_0\right)\left(x + b_0 + px + pc_0\right)}{1 - p^2} = 0$$

จาก $c_0 = 0$ จะได้
$$\frac{\left(x + b_0 - px\right)\left(x + b_0 + px\right)}{1 - p^2} = 0$$

$$\frac{x + b_0 - px}{1 - p} \cdot \frac{x + b_0 + px}{1 + p} = 0 \qquad (27)$$

กำหนดให้แต่ละตัวประกอบเท่ากับศูนย์ จากสมการที่ (27) จะได้สองสมการพีชคณิตเชิงเส้น นั้นก็คือ

$$x + \frac{b_0}{1 - p} = 0$$

และ
$$x + \frac{b_0}{1 + p} = 0$$

เมื่อแทนค่า b_0 และ p จากสมการ (26) ลงในสมการพีชคณิตเชิงเส้นด้านบน จะได้ 2 ราก x_1 และ x_2 ของสมการพหุนามดีกรีสองในสมการที่ (19) นั้นคือ

$$x_1 = \frac{b_0}{1 - p}$$

$$= -\frac{2a_0 / a_1}{1 - \left[\dfrac{\left(a_1^2 - 4a_1\right)^{\frac{1}{2}}}{a_1}\right]}$$

$$= -\frac{2a_0 / a_1}{\dfrac{a_1 - \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{a_1}}$$

$$= -\frac{2a_0}{a_1 - \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{1/2}}$$

$$= -\frac{2a_0\left[a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{a_1^2 - \left(a_1^2 - 4a_0\right)}$$

$$= -\frac{2a_0\left[a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{4a_0}$$

$$= \frac{-a_1 - \left(a_1{}^2 - 4a_0\right)^{1/2}}{2} \qquad (28)$$

และ

$$x_2 = \frac{b_0}{1+p}$$

$$= -\frac{2a_0 / a_1}{1 + \left[\dfrac{\left(a_1^2 - 4a_1\right)^{\frac{1}{2}}}{a_1}\right]}$$

$$= -\frac{2a_0 / a_1}{\dfrac{a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{a_1}}$$

$$= -\frac{2a_0}{a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{1/2}}$$

$$= -\frac{2a_0\left[a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{a_1^2 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)}$$

$$= -\frac{2a_0\left[a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{4a_0}$$

$$= \frac{-a_1 + \left(a_1{}^2 - 4a_0\right)^{1/2}}{2} \qquad (29)$$

ดังนั้นจะได้รากของสมการพหุนามดีกรีสองในรูปทั่วไป และต่อไปจะไปหารากสมการพหุนามดีกรีสาม โดยใช้วิธีเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.1 จงหาค่ารากของสมการ $x^2+2.0182x+4.3302=0$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $a_1=2.0182, a_0=4.3302$

จากสูตรสมการพหุนามดีกรีสองจะได้ว่า $x_1=\dfrac{-a_1-\left(a_1{}^2-4a_0\right)^{1/2}}{2}$

$$x_2=\frac{-a_1+\left(a_1{}^2-4a_0\right)^{1/2}}{2}$$

นำค่า a_1, a_0 ไปแทนในสมการข้างต้น จะได้คำตอบก็คือ

$$x_1=-1.0091-1.8198967355i$$

$$x_2=-1.0091+1.8198967355i$$

3.1.2 สมการพหุนามดีกรี 3 (The Cubic Equation)

พิจารณาสมการพหุนามดีกรีสามสำหรับหารากในรูปทั่วไปคือ

$$x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \tag{30}$$

เมื่อ a_0, a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริงและเป็นอิสระต่อกัน (ถ้า $a_2=0$ แล้ว แทนค่า x ในสมการที่ (30) ด้วย $x+r$ โดยที่ $r\neq 0$ จะทำให้เทอมของ a_2 ไม่เท่ากับศูนย์) กรณี $N=3$ และจำนวนเต็ม M และ K สามารถหาได้จากสมการ (17) และ (12) ตามลำดับ คือ $M=1$ และ $K=3$ สมการพหุนามดีกรีสาม จะได้โครงสร้างใหม่เหมือนกับสมการที่ (11) ดังนี้

$$\frac{\left[V_1(x)\right]^3-p^3\left[W_1(x)\right]^3}{1-p^3}=0 \tag{31}$$

เมื่อพหุนาม $V_1(x)$ และ $W_1(x)$ ก็คือ

$$V_1(x)=x+b_0$$

และ
$$W_1(x)=x+c_0 \tag{32}$$

เมื่อ b_0, c_0 และ p คือค่าคงที่ไม่ทราบค่า จากสมการ (31) และ (32) จะได้ว่า

$$\frac{[x+b_0]^3 - p^3[x+c_0]^3}{1-p^3} = 0 \quad (33)$$

จากสมการ (33) เราจะนำมาแยกตัวประกอบและจัดรูป จะได้ว่า

$$\frac{[x+b_0]^3 - p^3[x+c_0]^3}{1-p^3} = 0$$

$$\frac{\left[x^3+3x^2b_0+3xb_0^2+b_0^3\right] - p^3\left[x^3+3x^2c_0+3xc_0^2+c_0^3\right]}{1-p^3} = 0$$

$$\frac{\left(1-p^3\right)\left(x^3\right)+3\left(b_0-p^3c_0\right)x^2+3\left(b_0^2-p^3c_0^2\right)x+\left(b_0^3-p^2c_0^3\right)}{1-p^3} = 0$$

$$x^3+\frac{3\left(b_0-c_0p^3\right)}{1-p^3}x^2+\frac{3\left({b_0}^2-{c_0}^2p^3\right)}{1-p^3}x+\frac{\left({b_0}^3-{c_0}^3p^3\right)}{1-p^3} = 0 \quad (34)$$

จากกระบวนการในวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน เราจะแปลงสมการพหุนามดีกรีสามในสมการที่ (30) มาเป็นรูปแบบสมการพหุนามดีกรีสาม ในสมการที่ (33) สามารถแทนสมการที่ (30) ต่อไปจะนำสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (30) และสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (34) มาเท่ากัน เกิดเป็น 3 สมการและ 3 ค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า (b_0, c_0 และ p) แสดงดังนี้

$$\frac{3\left(b_0-c_0p^3\right)}{1-p^3} = a_2 \quad (35)$$

$$\frac{3\left({b_0}^2-{c_0}^2p^3\right)}{1-p^3} = a_1 \quad (36)$$

$$\frac{\left({b_0}^3-{c_0}^3p^3\right)}{1-p^3} = a_0 \quad (37)$$

ต่อไปจะเป็นกระบวนการการหาค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า โดยนำสมการที่ (36) หารด้วยสมการที่ (35) และ สมการที่ (37) หารด้วยสมการที่ (35) จะได้ว่า

$$\frac{\left({b_0}^2-{c_0}^2p^3\right)}{\left(b_0-c_0p^3\right)} = \frac{a_1}{a_2} \quad (38)$$

$$\frac{\left({b_0}^3-{c_0}^3p^3\right)}{\left(b_0-c_0p^3\right)} = \frac{3a_0}{a_2} \quad (39)$$

สมการที่ (35) นำมาจัดรูปเพื่อหาค่าสำหรับ p^3 จะได้ว่า

$$p^3 = \frac{a_2 - 3b_0}{a_2 - 3c_0} \tag{40}$$

ใช้สมการที่ (40) แทน p^3 ลงไปแทนในสมการที่ (38) และทำการจัดรูปของสมการจะได้

$$\left[b_0^2 - c_0^2\left(\frac{a_2 - 3b_0}{a_2 - 3c_0}\right)\right]a_2 = \left[b_0 - c_0\left(\frac{a_2 - 3b_0}{a_2 - 3c_0}\right)\right]a_1$$

$$\frac{b_0^2\left(a_2 - 3c_0\right)a_2 - c_0^2\left(a_2 - 3b_0\right)a_2}{a_2 - 3c_0} = \frac{b_0\left(a_2 - 3c_0\right)a_1 - c_0\left(a_2 - 3b_0\right)a_1}{a_2 - 3c_0}$$

$$b_0^2 a_2\left(a_2 - 3c_0\right) - c_0^2 a_2\left(a_2 - 3b_0\right) = b_0 a_1\left(a_2 - 3c_0\right) - c_0 a_1\left(a_2 - 3b_0\right)$$

$$\left(b_0^2 a_2 - b_0 a_1\right)\left(a_2 - 3c_0\right) = \left(c_0^2 a_2 - c_0 a_1\right)\left(a_2 - 3b_0\right)$$

$$b_0\left(b_0 a_2 - a_1\right)\left(a_2 - 3c_0\right) = c_0\left(c_0 a_2 - a_1\right)\left(a_2 - 3b_0\right)$$

$$b_0\left(b_0 a_2^2 - 3c_0 b_0 a_2 - a_1 a_2 + 3a_1 c_0\right) = c_0\left(c_0 a_2^2 - 3b_0 c_0 a_2 - a_1 a_2 + 3b_0 a_1\right)$$

$$b_0^2 a_2^2 - 3c_0 b_0^2 a_2 - a_1 a_2 b_0 + 3a_1 c_0 b_0 = c_0^2 a_2^2 - 3b_0 c_0^2 a_2 - a_1 a_2 c_0 + 3b_0 a_1 c_0$$

$$b_0^2 a_2^2 - a_1 a_2 b_0 = c_0^2 a_2^2 - a_1 a_2 c_0$$

$$a_2^2\left(b_0^2 - c_0^2\right) + a_1 a_2\left(c_0 - b_0\right) = 0$$

$$a_2\left(a_2\left(b_0^2 - c_0^2\right) + a_1\left(c_0 - b_0\right)\right) = 0$$

เนื่องจาก $a_2 \neq 0$ ดังนั้น

$$a_2\left(b_0^2 - c_0^2\right) + a_1\left(c_0 - b_0\right) = 0$$

คูณ -1 ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$a_1\left(b_0 - c_0\right) - a_2\left(b_0^2 - c_0^2\right) = 0$$

$$a_1 b_0 - a_1 c_0 + 3b_0^2 c_0 - 3b_0 c_0^2 - a_2\left(b_0^2 - c_0^2\right) = 0$$

$$\left(b_0 - c_0\right)a_1 + 3b_0 c_0\left(b_0 - c_0\right) - a_2\left(b_0 + c_0\right)\left(b_0 - c_0\right) = 0$$

$$\left(b_0-c_0\right)\left[a_1+3b_0c_0-a_2\left(b_0+c_0\right)\right]=0 \tag{41}$$

ถ้า $\left(b_0-c_0\right)=0$ และ $b_0=c_0$ แทนในสมการ (33) ได้ว่า

$$\frac{\left(x+c_0\right)^3-p^3\left(x+c_0\right)^3}{1-p^3}=0$$

$$\frac{\left(1-p^3\right)\left(x+c_0\right)^3}{1-p^3}=0$$

$$\left[x+c_0\right]^3=0$$

จากสมการ (41) ในกรณีที่ $b_0=c_0$ จะทำให้สมการที่ (40) หรือก็คือ $p=1$ เราจะไม่สามารถหาค่า a_0 a_1 และ a_2 ในสมการที่ (35) (36) และ (37) ได้

ดังนั้น เราจะพิจารณาตัวประกอบอื่น ในสมการที่ (41) และตัวประกอบนั้นเท่ากับ 0 เราจะได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง b_0 และ c_0 เป็นดังที่แสดงไว้

$$\left[a_1+3b_0c_0-a_2\left(b_0+c_0\right)\right]=0 \tag{42}$$

นำค่า p^3 ในสมการ (40) ไปแทนในสมการ (39) จะได้ว่า

$$\left[b_0^3-c_0^3\left(\frac{a_2-3b_0}{a_2-3c_0}\right)\right]a_2=\left[b_0-c_0\left(\frac{a_2-3b_0}{a_2-3c_0}\right)\right]3a_0$$

$$a_2b_0^3-\left(\frac{c_0^3\left(a_2-3b_0\right)a_2}{a_2-3c_0}\right)=3a_0b_0-\frac{c_0\left(a_2-3b_0\right)3a_0}{a_2-3c_0}$$

$$\left(a_2-3c_0\right)\left(a_2b_0^3\right)-c_0^3a_2\left(a_2-3b_0\right)=3a_0b_0\left(a_2-3c_0\right)-c_0\left(a_2-3b_0\right)3a_0$$

$$\left(3a_0c_0-c_0^3a_2\right)\left(a_2-3b_0\right)=\left(3a_0b_0-a_2b_0^3\right)\left(a_2-3c_0\right)$$

$$3a_0c_0a_2-9a_0c_0b_0-c_0^3a_2^2+3b_0c_0^3a_2=3a_0b_0a_2-9a_0b_0c_0-a_2^2b_0^3+3a_2b_0^3c_0$$

$$3a_0a_2c_0-3a_2b_0a_2=c_0^3a_2^2-a_2^2b_0^3+3a_2b_0^3c_0-3b_0c_0^3a_2$$

$$a_2\left[3a_0b_0-3a_0c_0+3b_0^3c_0-3b_0c_0^3-a_2b_0^3+a_2c_0^3\right]=0$$

จาก $a_2\neq 0$

ดังนั้น
$$3a_0b_0 - 3a_0c_0 + 3b_0^3c_0 - 3b_0c_0^3 - a_2b_0^3 + a_2c_0^3 = 0$$

$$3a_0b_0 - 3a_0c_0 + 3b_0^3c_0 - 3b_0c_0^3 - a_2\left(b_0^3 - c_0^3\right) = 0$$

$$3a_0b_0 - 3a_0c_0 + 3b_0^3c_0 - 3b_0c_0^3 - a_2\left(b_0^3 - b_0^2c_0 + b_0^2c_0 - b_0c_0^2 + b_0c_0^2 + b_0c_0^2 - c_0^3\right) = 0$$

$$3a_0\left(b_0 - c_0\right) + 3b_0c_0\left(b_0^2 - c_0^2\right) - a_2\left(b_0^2 + b_0c_0 + c_0^2\right)\left(b_0 - c_0\right) = 0$$

$$3a_0\left(b_0 - c_0\right) + 3b_0c_0\left(b_0 + c_0\right)\left(b_0 - c_0\right) - a_2\left(b_0^2 + b_0c_0 + c_0^2\right)\left(b_0 - c_0\right) = 0$$

$$\left(b_0 - c_0\right)[3a_0 + 3b_0c_0\left(b_0 + c_0\right) - a_2\left(b_0{}^2 + b_0c_0 + c_0{}^2\right)] = 0 \qquad (43)$$

จะเกิดเทอม $\left(b_0 - c_0\right)$ อีกครั้ง ซึ่งจะไม่พิจารณาจากกรณีข้างต้น เราจะพิจารณาตัวประกอบอื่นในสมการที่ (43) และตัวประกอบนั้นเท่ากับศูนย์ เราจะได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง b_0 และ c_0 เป็นดังที่แสดงดังนี้

$$3a_0 + a_2b_0c_0 + 3b_0c_0\left(b_0 + c_0\right) - a_2\left(b_0 + c_0\right)^2 = 0 \qquad (44)$$

พิจารณาสมการ (42) และ (44) ของผลบวกและผลคูณของ b_0 และ c_0 จึงกำหนดให้

$$f_1 = b_0 + c_0 \qquad (45)$$

$$f_2 = b_0c_0 \qquad (46)$$

แทนในสมการ (42) และ (44) ได้ว่า

$$a_1 + 3f_2 - a_2f_1 = 0 \qquad (47)$$

$$3a_0 + a_2f_2 + 3f_1f_2 - a_2f_1^2 = 0 \qquad (48)$$

หารากของสมการ (47) และ (48) ดังต่อไปนี้ จากสมการ(37)

$$f_2 = \frac{a_2}{3}f_1 - \frac{a_1}{3} \qquad (49)$$

แทนสมการ (49) ในสมการ (48) จะได้

$$3a_0 + a_2\left(\frac{a_2}{3}f_1 - \frac{a_1}{3}\right) + 3f_1\left(\frac{a_2}{3}f_1 - \frac{a_1}{3}\right) - a_2f_1^2 = 0$$

$$3a_0 + \frac{a_2^2}{3} f_1 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_2 f_1^2 - a_1 f_1 - a_2 f_1^2 = 0$$

$$\frac{9a_0}{3} + \left(\frac{a_2^2 - 3a_1}{3} \right) f_1 - \frac{a_1 a_2}{3} = 0$$

$$f_1 = \frac{a_1 a_2 - 9a_0}{a_2^2 - 3a_1} \qquad (50)$$

แทน(50)ใน(49)จะได้

$$f_2 = \frac{a_2}{3} \left(\frac{a_1 a_2 - 9a_0}{a_2^2 - 3a_1} \right) - \frac{a_1}{3}$$

$$f_2 = \frac{a_1 a_2^2 - 9a_0 a_2}{3\left(a_2^2 - 3a_1\right)} - \frac{a_1 a_2^2 - 3a_1^2}{3\left(a_2^2 - 3a_1\right)}$$

$$f_2 = \frac{a_1^2 - 3a_0 a_2}{a_2^2 - 3a_1} \qquad (51)$$

ในกรณีเทอมของ $\left(a_2^2 - 3a_1\right)$ ในสมการที่ (50) และ (51) เท่ากับศูนย์ แล้วสมการที่ (20) จะเกิดเปลี่ยนรูป ในกรณีพิเศษ ซึ่งจะแสดงดังนี้

$$\left(x + \frac{a_2}{3} \right)^3 = \left(\frac{a_2}{3} \right)^3 - a_0$$

เราต้องการที่จะหาค่าของ b_0 และ c_0 โดยใช้ f_1 และ f_2 ซึ่งหาได้จากสมการ

$$y^2 - f_1 y + f_2 = 0$$

จากสมการข้างทน ถ้าแทนค่า f_1 และ f_2 ด้วยสมการ(45)และ(46)ตามลำดับ จะได้

$$y = b_0, c_0$$

ดังนั้นเราจะได้คำตอบของ b_0 และ c_0 จากสูตรของสมการพหุนามดีกรีสอง

$$b_0 = \frac{f_1 + \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}{2} \qquad (52)$$

$$c_0 = \frac{f_1 - \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}{2} \tag{53}$$

และค่าคงที่ไม่ทราบค่าอีกหนึ่งตัวซึ่งก็คือ p ซึ่งหาได้จากสมการที่ (40) จะได้

$$p = \left[\frac{2a_2 - 3f_1 - 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}{2a_2 - 3f_1 + 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{54}$$

เนื่องจาก

$$\frac{\left[x+b_0\right]^3 - p^3\left[x+c_0\right]^3}{1-p^3} = 0$$

ให้ $B = x + b_0$,$C = p\left(x+c_0\right)$ จะได้

$$\frac{B^3 - C^3}{1-p^3} = 0$$

$$\frac{(B-C)\left(B^2+CB+C^2\right)}{(1-p)\left(1+p+p^2\right)} = 0$$

$$\left(\frac{(x+b_0) - p(x+c_0)}{1-p}\right)\left(\frac{(x+b_0)^2 + p(x+b_0)(x+c_0) + p^2(x+c_0)^2}{1+p+p^2}\right) = 0 \tag{55}$$

เนื่องจากเราแปลงสมการที่ (30) ให้อยู่ในรูปสามการที่ (33) โดยที่ทราบค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด ทำให้เราแยกตัวประกอบของสมการที่ (30) ซึ่งแสดงใน (55) และแต่ละตัวประกอบในสมการที่ (44) เท่ากับศูนย์ เราจะได้สองสมการดังนี้

$$(x+b_0) - p(x+c_0) = 0 \tag{56}$$

$$(x+b_0)^2 + p(x+b_0)(x+c_0) + p^2(x+c_0)^2 = 0 \tag{57}$$

สมการที่ (56) คือสมการเชิงเส้น เราจะได้หนึ่งรากจากสมการที่ (56) สมการที่ (57) คือสมการพหุนามดีกรีสอง เราจะได้สองรากจากสมการที่ (57)

ดังนั้น รากจากสมการ (56) คือรากที่หนึ่ง x_1 ของสมการพหุนามดีกรีสามในสมการ (30) คือ

$$(x+b_0) - p(x+c_0) = 0$$

$$(1-p)x + b_0 - pc_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{pc_0 - b_0}{1-p} \tag{58}$$

และอีกสองราก ก็คือ x_2 และ x_3 หาได้จากสมการที่ (46) คือ

$$(x+b_0)^2 + p(x+b_0)(x+c_0) + p^2(x+c_0)^2 = 0$$

$$x^2 + 2xb_0 + b_0^2 + px^2 + pxc_0 + pb_0x + pb_0c_0^2 + p^2x^2 + 2p^2xc_0 + p^2c_0^2 = 0$$

$$\left(1+p+p^2\right)x^2 + \left(2b_0 + pc_0 + pb_0 + 2p^2c_0\right)x + \left(b_0^2 + pb_0c_0^2 + p^2c_0^2\right) = 0$$

$$\left(1+p+p^2\right)x^2 + \left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right)x + \left(b_0^2 + p^2c_0^2 + pf_2\right) = 0$$

จากการหาค่ารากของสมการพหุนามกำลังสอง

$$x = \frac{-B \pm \left(B^2 - 4AC\right)^{1/2}}{2A}$$

จะได้ $A = \left(1+p+p^2\right)$ $B = \left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right)$

และ $C = \left(b_0^2 + p^2c_0^2 + pf_2\right)$

นำค่า A, B และ C ไปแทนเพื่อที่จะหาค่า x_2 และ x_3

$$x_2 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} + \frac{\left[\left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(b_0^2 + p^2c_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2} \tag{59}$$

$$x_3 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} - \frac{\left[\left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(b_0^2 + p^2c_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2} \tag{60}$$

นี้คือรากของสมการพหุนามดีกรีสาม ในรูปทั่วไป โดยวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.2 จงหาค่ารากของสมการ
$x^3-2.049888x^2+3.1010205x+11.313708=0$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $a_2=-2.04988, a_1=3.1010205, a_0=11.313708$

ในการหาค่ารากของสมการพหุนามดีกรีสามนั้น ก่อนที่เราจะหาค่า x เราต้องหาค่า f_1, f_2 ซึ่งได้จาก

$$f_1=\frac{a_1a_2-9a_0}{a_2^2-3a_1}$$

$$f_2=\frac{a_1^2-3a_0a_2}{a_2^2-3a_1}$$

จะได้ $f_1=21.20755$ และ $f_2=-15.52471$

นำค่าที่ได้ไปในสมการ

$$b_0=\frac{f_1+\left(f_1^2-4f_2\right)^{1/2}}{2}=21.91592\ ,\ c_0=\frac{f_1-\left(f_1^2-4f_2\right)^{1/2}}{2}=-0.708376$$

$$p=\left[\frac{2a_2-3f_1-3\left(f_1^2-4f_2\right)^{1/2}}{2a_2-3f_1+3\left(f_1^2-4f_2\right)^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}}=-9.658787$$

นำค่าที่ได้ทั้งหมดไปแทนในสมการเพื่อหาค่า x_1, x_2, x_3

$$x_1=\frac{pc_0-b_0}{1-p}=-1.4142$$

$$x_2=\frac{-\left(2b_0+2p^2c_0+pf_1\right)}{2+2p+2p^2}+\frac{\left[\left(2b_0+2p^2c_0+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(b_0^2+p^2c_0^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}=1.73205+2.23607i$$

$$x_3=\frac{-\left(2b_0+2p^2c_0+pf_1\right)}{2+2p+2p^2}-\frac{\left[\left(2b_0+2p^2c_0+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(b_0^2+p^2c_0^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}=1.73205-2.23607i$$

ดังนั้น จะได้ค่ารากของสมการพหุนามดีกรีสามคือ

$x_1=-1.4142\ ,\ x_2=1.73205+2.23607i$ และ $x_3=1.73205-2.23607i$

3.1.3 สมการพหุนามดีกรี 4 (The Quartic Equation)

พิจารณาสมการพหุนามดีกรีสี่ในรูปแบบทั่วไปคือ

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{61}$$

เมื่อ a_0, a_1, a_2 และ a_3 เป็นจำนวนจริงและเป็นอิสระต่อกัน เพื่อแยกตัวประกอบของสมการข้างต้น จึงต้องใช้ Unified method เราเริ่มจากหาค่าจำนวนเต็ม M และ K โดยสมการ (17) และ (12) ตามลำดับ จะได้ค่า $N = 4$, $M = 2$ และ $K = 2$

จาก (11)

$$\frac{\left[V_2(x)\right]^2 - p^2\left[W_2(x)\right]^2}{1-p^2} \tag{62}$$

เมื่อสมการพหุนาม $V_2(x)$ และ $W_2(x)$ กำหนดโดย

$$V_2(x) = x^2 + b_1x + b_0$$

$$W_2(x) = x^2 + c_1x + c_0 \tag{63}$$

เมื่อ b_0, b_1, c_0 และ c_1 คือสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม $V_2(x)$ และ $W_2(x)$ ตามลำดับ

จากสมการที่ (63) และ (62) จะได้รูปแบบโครงสร้างสมการพหุนามดีกรีสี่ใหม่ ดังนี้

$$\frac{(x^2 + b_1x + b_0)^2 - p^2\left(x^2 + c_1x + c_0\right)^2}{1-p^2} = 0 \tag{64}$$

จากสมการ (64) นำมากระจายและจัดรูป จะได้ดังนี้

$$\frac{(x^2 + b_1x + b_0)^2 - p^2\left(x^2 + c_1x + c_0\right)^2}{1-p^2}$$

$$= \frac{\left(x^4 + 2b_1x^3 + 2b_0x^2 + b_1^2x^2 + 2b_0b_1x + b^2\right) - \left(p^2x^4 + 2c_1p^2\right)}{1-p^2}$$

$$= \frac{\left(1-p^2\right)x^4}{1-p^2} + \frac{2b_1 - 2c_1p^2)}{1-p^2}x^3 + \frac{b_1^2 + 2b_0 - \left(c_1^2 + 2c_0\right)p^2}{1-p^2}x^2 + \frac{2b_0b_1 - 2c_0c_1p^2)}{1-p^2} + \frac{b_0^2 - c_0^2p^2}{1-p^2}$$

$$= x^4 + \frac{2\left(b_1 - c_1p^2\right)}{1-p^2}x^3 + \frac{b_1^2 + 2b_0 - \left(c_1^2 + 2c_0\right)p^2}{1-p^2}x^2 + \frac{2\left(b_0b_1 - c_0c_1p^2\right)}{1-p^2} + \frac{b_0^2 - c_0^2p^2}{1-p^2} \tag{65}$$

ต่อไปจะมาเทียบสัมประสิทธิ์ระหว่างสมการที่ (61) และ (65) จะได้ 4 สมการดังนี้

$$\frac{2\left(b_1 - c_1 p^2\right)}{1-p^2} = a_3 \tag{66}$$

$$\frac{b_1^2 + 2b_0 - \left(c_1^2 + 2c_0\right)p^2}{1-p^2} = a_2 \tag{67}$$

$$\frac{2\left(b_0 b_1 - c_0 c_1 p^2\right)}{1-p^2} = a_1 \tag{68}$$

$$\frac{b_0^2 - c_0^2 p^2}{1-p^2} = a_0 \tag{69}$$

เนื่องจากว่า มี 5 ค่าคงที่ไม่ทราบค่า (b_0, b_1, c_0, c_1 และ p) แต่มี 4 สมการเพื่อหารากเท่านั้น จึงกำหนดค่าขึ้นมาให้กับค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าหนึ่งตัว ดังนั้นเราจึงทราบค่าแล้วหนึ่งค่าคงที่ โดยที่ ให้ $c_1 = 0$ และใช้สมการที่มีค่าคงที่ c_1 อยู่ ดังนั้นสมการ (66) (67) และ (68) จะเปลี่ยนไปดังนี้

$$\frac{2b_1}{1-p^2} = a_3 \tag{70}$$

$$\frac{b_1^2 + 2b_0 - 2c_0 p^2}{1-p^2} = a_2 \tag{71}$$

$$\frac{2b_0 b_1}{1-p^2} = a_1 \tag{72}$$

(ถ้าเราสมมุติ $b_1 = 0$ จะได้ว่า $a_1 = a_3 = 0$ เราสามารถใช้สมการพหุนามดีกรีสองหารากได้)

จะหาค่า b_0, b_1, c_0 และ p ดังต่อไปนี้

นำสมการ (69) (71) และ (72) สมการ หารด้วยสมการ (70) ตามลำดับ ได้ว่า

$$b_0 = \frac{a_1}{a_3} \tag{73}$$

$$\frac{b_1^2 + 2b_0 - 2c_0 p^2}{1-p^2} = \frac{a_0}{a_3} \tag{74}$$

$$\frac{b_1^2 + 2b_0 - 2c_0 p^2}{2b_1} = \frac{a_2}{a_3} \tag{75}$$

จากสมการ(70) นำมาจัดรูป เพื่อค่าของ p^2 ได้

$$p^2 = \frac{a_3 - 2b_1}{a_3} \tag{76}$$

แทน p^2 จากสมการที่ (65) ลงในสมการที่ (74) และ (75) แทนลงไปและจัดรูปสมการ

$$\left[b_0^2 - c_0^2 p^2\right] a_3 = 2b_1 a_0$$

$$a_3 b_0^2 - c_0^2 p^2 a_3 = 2b_1 a_0$$

$$a_3 b_0^2 - c_0^2 \left(\frac{a_3 - 2b_1}{a_3}\right) a_3 = 2b_1 a_0$$

$$a_3^2 b_0^2 - c_0^2 a_3^2 + 2b_1 a_3 c_0^2 = 2b_1 a_0 a_3$$

$$a_3 a_0^2 \left(2b_1 - a_3\right) = 2a_0 a_3 b_1 - \left(a_3 b_0\right)^2$$

จากสมการ (73) เนื่องจาก $b_0 a_3 = a_1$

$$a_3 a_0^2 \left(2b_1 - a_3\right) = 2a_0 a_3 b_1 - a_1^2 \tag{77}$$

แทนค่า p^2 จากสมการ (76) แทนลงในสมการ (75) จะได้

$$\left[b_1^2 + 2b_0 - 2c_0 p^2\right] a_3 = 2b_1 a_2$$

$$b_1^2 a_3 + 2b_0 a_3 - 2c_0 \left(\frac{a_3 - 2b_1}{a_3}\right) a_3 = 2b_1 a_2$$

$$2c_0 \left(2b_1 - a_3\right) = 2a_2 b_1 - 2\left(b_0 a_3\right) - a_3 b_1^2$$

จากสมการ(73) จะได้

$$2c_0 \left(2b_1 - a_3\right) = 2a_2 b_1 - 2a_1 - a_3 b_1^2 \tag{78}$$

ทั้งสมการที่ (77) และ (78) ประกอบด้วยเทอมของ $c_0\left(2b_1 - a_3\right)$ ตรงด้านซ้ายของสมการ ดังนั้น นำสมการที่ (77) หารด้วย (78) แล้วจัดรูป เราจะได้ค่า c_0 ในเทอมของ b_1 ดังต่อไปนี้

$$c_0 = \frac{2\left(2a_0 a_3 b_1 - a_1^2\right)}{a_3\left(2a_2 b_1 - 2a_1 - a_3 b_1^2\right)} \tag{79}$$

(ถ้า $c_0\left(2b_1-a_3\right)=0$ แล้ว $c_0=0$ ในกรณีนี้ $W_2\left(x\right)$ จะเกิดตัวประกอบอย่างง่าย (สมการที่ (63)) หรือ $2b_1-a_3=0$ จะเกิดกรณีที่ $p=0$ (สมการที่(70)) ดังนั้นสมการที่ (61) สามารถเป็น $[V_2\left(x\right)]^2=0$ (สมการที่(63))และสามารถหารากได้โดยสมการพหุนามดีกรีสอง

แทน c_0 จากสมการที่ (79) ลงในสมการที่ (78) จะได้สมการที่อยู่ในเทอม b_1 เท่านั้น

$$2c_0\left(2b_1-a_3\right)=2a_2b_1-2a_1-a_3b_1^2$$

$$2\left(\frac{2\left(2a_0a_3b_1-a_1^2\right)}{a_3\left(2a_2b_1-2a_1-a_3b_1^2\right)}\right)\left(2b_1-a_3\right)=2a_2b_1-2a_1-a_3b_1^2$$

$$4\left(2a_0a_3b_1-a_1^2\right)\left(2b_1-a_3\right)=a_3\left(2a_2b_1-2a_1-a_3b_1^2\right)^2$$

$$\begin{aligned}8a_0a_3b_1\left(2b_1-a_3\right)-4a_1^2\left(2b_1-a_3\right)=a_3[&4a_2^2b_1^2-4a_1a_2b_1-2a_2a_3b_1^3-4a_1a_2b_1+4a_1^2\\&+2a_1a_3b_1^2-2a_2a_3b_1^3+2a_1a_3b_1^3+2a_1a_3b_1^2+a_3^2b_1^4]\end{aligned}$$

$$16a_0a_3b_1^2-8a_0a_3^2b_1-8a_1^2b_1+4a_1^2a_3=a_3\left[4a_2^2b_1^2-8a_1a_2b_1-4a_2a_3b_1^3+4a_1a_3b_1^3+4a_1^2+a_3^2b_1^4\right]$$

$$16a_0a_3b_1^2-8a_0a_3^2b_1-8a_1^2b_1+4a_1^2a_3=4a_2^2a_3b_1^2-8a_1a_2a_3b_1-4a_2a_3^2b_1^3+4a_1a_3^2b_1^3+4a_1^2a_3+a_3^3b_1^4$$

$$a_3^3b_1^4-4a_2a_3^2b_1^3+4\left(a_1a_3^2+a_2^2a_3-4a_0a_3\right)b_1^2+8\left(a_0a_3^2+a_1^2-a_1a_2a_3\right)b_1=0 \qquad (80)$$

ในสมการที่ (80) ถ้า $b_1=0$ จะทำให้ค่า $p=1$ ในสมการ (76) และจะทำให้สมการ (74) ไม่สามารถหาคำตอบได้

ดังนั้น หารด้วย b_1 ทั้งสมการในสมการ (80) ได้เป็นสมการพหุนามดีกรีสามดังนี้

$$b_1^3-\frac{4a_2}{a_3}b_1^2+\frac{4\left(a_1a_3+a_2^2-4a_0\right)}{a_3^2}b_1+\frac{8\left(a_0a_3^2+a_1^2-a_1a_2a_3\right)}{a_3^3}=0 \qquad (81)$$

หารากของสมการที่ (81) จึงได้ค่า b_1 p^2 และ c_0 หาค่าได้จากสมการที่ (76) และ (79) ตามลำดับ

เนื่องจากทราบค่าคงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดแล้ว เราจึงสามารถแปลงสมการพหุนามดีกรีสี่ในสมการที่ (61) ให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (64) ซึ่งเป็นสมการพหุนามดีกรีสี่เช่นกัน ดังนั้น เราสามารถแยกสมการพหุนามดีกรีสี่ออกเป็นสองตัวประกอบ ก็คือ

$$\frac{(x^2+b_1x+b_0)^2-p^2\left(x^2+c_1x+c_0\right)^2}{1-p^2}=0$$

ให้ $B=x^2+b_1x+b_0$ และ $C=p^2\left(x^2+c_1x+c_0\right)$

จะได้

$$\frac{B^2-C^2}{1-p^2}=0$$

$$\frac{(B-C)(B+C)}{(1-p)(1+p)}=0$$

$$\left(\frac{\left(x^2+b_1x+b_0\right)-p\left(x^2+c_0\right)}{1-p}\right)\left(\frac{\left(x^2+b_1x+b_0\right)+p\left(x^2+c_0\right)}{1+p}\right)=0 \quad (82)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (82) จะได้สมการพหุนามดีกรีสอง สองสมการดังนี้

$$x^2+\frac{b_1}{1-p}x+\frac{b_0-c_0p}{1-p}=o \quad (83)$$

$$x^2+\frac{b_1}{1+p}x+\frac{b_0+c_0p}{1+p}=o \quad (84)$$

เราหาค่ารากทั้งหมดสี่ราก (x_1, x_2, x_3 และ x_4) ของสมการพหุนามดีกรีสี่ในสมการที่(50) โดยการหารากของสมการพหุนามดีกรีสองในสมการที่ (84) และ (85) ซึ่งสมการที่ (83) ได้ราก $(x_1$ และ $x_2)$ ดังนี้

$$x^2+\frac{b_1}{1-p}x+\frac{b_0-c_0p}{1-p}=o$$

คูณ $1-p$ ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$(1-p)x^2+b_1x+b_0-c_0p=o$$

จากการหาค่ารากของสมการพหุนามกำลังสอง

$$x=\frac{-B\pm\left(B^2-4AC\right)^{1/2}}{2A}$$

เมื่อ $A=(1-p)$,$B=b_1$,$C=b_0-c_0p$

ให้ x_1 และ x_2 คือ

$$x_1 = \frac{-b_1 + \left[b_1^2 - 4\left(b_0 - c_0 p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_2 = \frac{-b_1 - \left[b_1^2 - 4\left(b_0 - c_0 p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)} \qquad (85)$$

รากอื่นๆอีกสองราก x_3 และ x_4 หาได้จากสมการที่ (73) นั้นคือ

$$x^2 + \frac{b_1}{1+p}x + \frac{b_0 + c_0 p}{1+p} = o$$

คูณ $1+p$ ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\left(1+p\right)x^2 + b_1 x + b_0 + c_0 p = o$$

จากการหาค่ารากของสมการพหุนามกำลังสอง

$$x = \frac{-B \pm \left(B^2 - 4AC\right)^{1/2}}{2A}$$

เมื่อ $A = \left(1+p\right), B = b_1 \ , C = b_0 + c_0 p$

ให้ x_3 และ x_4 นั้นคือ

$$x_3 = \frac{-b_1 + \left[b_1^2 - 4\left(b_0 + c_0 p\right)\left(1+p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_4 = \frac{-b_1 - \left[b_1^2 - 4\left(b_0 + c_0 p\right)\left(1+p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)} \qquad (86)$$

เราได้หารากในรูปทั่วไปของสมการพหุนามดีกรีสี่ นั้นคือ รากทั้งสี่รากในข้างต้น โดยใช้ Unified Method ในส่วนถัดไป เราจะเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลขในส่วนของพหุนามดีกรีต่างๆโดยใช้ Unified method

ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่ารากของสมการ

$x^4 + 2.0533927x^3 - 2.8917903x^3 + 7.8758959x + 29.5803989 = 0$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $a_3 = 2.0533927\,,\, a_2 = -2.8917903$

$$a_1 = 7.6758959\,,\, a_0 = 29.5803989$$

ในการหาค่ารากของสมการพหุนามดีกรีสี่นั้น ก่อนที่เราจะหาค่า X เราต้องหาค่า b_0, b_1, c_0 และ p ซึ่งได้จาก

$$b_0 = \frac{a_1}{a_3} = -2.236067$$

$$b_1^3 - \frac{4a_2}{a_3}b_1^2 + \frac{4\left(a_1a_3 + a_2^2 - 4a_0\right)}{a_3^2}b_1 + \frac{8\left(a_0a_3^2 + a_1^2 - a_1a_2a_3\right)}{a_3^3} = 0 \quad \text{ได้ } b_1 = -2645752$$

$$p^2 = \frac{a_3 - 2b_1}{a_3}\,,\ \text{จะได้}\ \ p = 3.754882\,,\quad c_0 = \frac{2\left(2a_0a_3b_1 - a_1^2\right)}{a_3\left(2a_2b_1 - 2a_1 - a_3b_1^3\right)} = 5.336053$$

นำค่าที่ได้ทั้งหมดไปแทนในสมการเพื่อหาค่า x_1, x_2, x_3 และ x_4

$$x_1 = \frac{-b_1 + \left[b_1^2 - 4\left(b_0 - c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)} = -2.236067$$

$$x_2 = \frac{-b_1 - \left[b_1^2 - 4\left(b_0 - c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)} = -2.645752$$

$$x_3 = \frac{-b_1 + \left[b_1^2 - 4\left(b_0 + c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)} = 1.414213 + 1.732051i$$

$$x_4 = \frac{-b_1 - \left[b_1^2 - 4\left(b_0 + c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)} = 1.414213 - 1.732051i$$

ดังนั้น จะได้ค่ารากทั้งหมดของสมการคือ

$$x_1 = -2.236067, x_2 = -2.645752,$$

$$x_3 = 1.414213 + 1.732051i,\ \ x_4 = 1.414213 - 1.732051i$$

3.1.4 สมการพหุนามดีกรี 7 (Solving soptics in radicals)

พิจารณาหาค่ารากสมการพหุนามกำลังเจ็ดจากสมการดังนี้

$$x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{87}$$

ให้ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 และ a_6 เป็นค่าสัมประสิทธิ์จำนวนจริง จากสมการที่ (87) เปลี่ยนสมการโดยการเพิ่มรากโดยที่ $x = 0$ จากสมการที่ (87) ให้คูณ x ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$x^8 + a_6x^7 + a_5x^6 + a_4x^5 + a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x = 0 \tag{88}$$

จากสมการที่ (88) จะแยกได้เป็นสมการพหุนามกำลังสี่ 2 เทอม จะได้ว่า

$$\frac{\left[\left(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right)^2 - p^2\left(x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0\right)^2\right]}{(1 - p^2)} = 0 \tag{89}$$

โดย $b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2$ และ c_2 เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า และ p เป็นค่าคงที่ไม่ทราบค่า แต่ $p^2 \neq 1$ ข้อดีของการเปลี่ยนแปลงสมการที่ (88) ให้เป็นสมการที่ (89) คือจะทำให้การแยกตัวประกอบง่ายขึ้น จากสมการที่ (89) เราสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$\left[\frac{(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) - p\left(x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0\right)}{(1 - p)}\right] \cdot \left[\frac{(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + p\left(x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0\right)}{(1 + p)}\right] = 0 \tag{90}$$

จากสมการที่ (79) จะได้ว่า

$$\frac{1}{(1 - p^2)}\left[\left(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right) - p\left(x^4 + c_3x^4 + c_2x^2 + c_1x + c_0\right)\right] \cdot \left[\left(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right) + p\left(x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{\left(1 - p^2\right)}\left[\left(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right) - px^4 - pc_3x^3 - pc_2x^2 - pc_1x - pc_0\right] \cdot \left[\left(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right) + px^4 + pc_3x^3 + pc_2x^2 + pc_1x + pc_0\right] = 0$$

$$\frac{1}{\left(1 - p^2\right)}\left[(x^4 - px^4) + (b_3x^3 - pc_3x^3) + (b_2x^2 - pc_2x^2) + (b_1x - pc_1x) + (b_0 - pc_0)\right] \cdot \left[(x^4 + px^4) + (b_3x^3 + pc_3x^3) + (b_2x^2 + pc_2x^2) + (b_1x + pc_1x) + (b_0 + pc_0)\right] = 0$$

$$\frac{1}{\left(1 - p^2\right)}\left[(1 - p)x^4 + (b_3 - pc_3)x^3 + (b_2 - pc_2)x^2 + (b_1 - pc_1)x + (b_0 - pc_0)\right] \cdot \left[(1 + p)x^4 + (b_3 + pc_3)x^3 + (b_2 + pc_2)x^2 + (b_1 + pc_1)x + (b_0 + pc_0)\right] = 0$$

$$x^8 + \left(\frac{2(b_3 - p^2c_3)}{(1 - p^2)}\right)x^7 + \left(\frac{(b_3^2 + 2b_2) - (c_3^2 + 2c_2)p^2}{(1 - p^2)}\right)x^6 + \left(\frac{2(b_1 + b_2b_3) - (c_1 + c_2c_3)p^2}{(1 - p^2)}\right)x^5 + \left(\frac{(b_2^2 + 2b_0 + 2b_1b_3) - (c_2^2 + 2c_0 + 2c_1c_3)p^2}{(1 - p^2)}\right)x^4 + \left(\frac{2(b_0b_3 + b_1b_2) + (c_0c_3 + c_1c_2)p^2}{(1 - p^2)}\right)x^3 + \left(\frac{(b_1^2 + 2b_0b_2) - (c_1^2 + 2c_0c_1)p^2}{(1 - p^2)}\right)x^2 + \left(\frac{2(b_0b_1 - c_0c_1p^2)}{(1 - p^2)}\right)x + \left(\frac{(b_2^2 - c_0^2p^2)}{(1 - p^2)}\right) = 0 \tag{91}$$

เทียบสัมประสิทธิ์สมการที่ (88) กับสมการที่ (91) จะได้ว่า

$$\frac{2(b_3 - c_3 p^2)}{(1-p^2)} = a_6 \tag{92}$$

$$\frac{\left[(b_3^2 + 2b_2) - (c_3^2 + 2c_3)p^2\right]}{(1-p^2)} = a_5 \tag{93}$$

$$\frac{2\left[(b_1 + b_2 b_3) - (c_1 + c_2 c_3)p^2\right]}{(1-p^2)} = a_4 \tag{94}$$

$$\frac{\left[(b_2^2 + 2b_0 + 2b_1 b_3) - (c_2^2 + 2c_0 + c_1 c_3)p^2\right]}{(1-p^2)} = a_3 \tag{95}$$

$$\frac{2\left[(b_0 b_3 + b_1 b_2) - (c_0 c_3 + c_1 c_2)p^2\right]}{(1-p^2)} = a_2 \tag{96}$$

$$\frac{\left[(b_1^2 + 2b_0 b_2) - (c_1^2 + 2c_0 c_2)p^2\right]}{(1-p^2)} = a_1 \tag{97}$$

$$\frac{2(b_0 b_1 - c_0 c_1 p^2)}{(1-p^2)} = a_0 \tag{98}$$

$$\frac{(b_0^2 - c_0^2 p^2)}{(1-p^2)} = 0 \tag{99}$$

พิจารณา $b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3$ และ p ในเทอมของ $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ จากสมการที่ (92) ถึง (99) เนื่องจากจำนวนสมการข้างต้นไม่เพียงพอที่จะหาค่าได้

ให้

$$b_3 = c_3 \tag{100}$$

นำสมการที่ (100) แทนในสมการที่ (92) จะได้

$$\frac{2(c_3 - c_3 p^2)}{(1-p^2)} = a_6$$

$$\frac{2c_3(1-p^2)}{(1-p^2)} = a_6$$

ได้ว่า

$$c_3 = \frac{a_6}{2} \text{ และ } b_3 = \frac{a_6}{2} \tag{101}$$

นำสมการที่ (90) แทนในสมการที่ (82) จะได้

$$\frac{\left(\left(\frac{a_6}{2}\right)^2 + 2b_2\right) - \left(\left(\frac{a_6}{2}\right)^2 + 2c_2\right)p^2}{(1-p^2)} = a_5$$

$$\left(\frac{a_6}{2}\right)^2 + 2b_2 - \left(\frac{a_6}{2}\right)p^2 - 2c_2 p^2 = a_5(1-p^2)$$

$$2(b_2 - c_2 p^2) = a_5(1-p^2) - \left(\frac{a_6}{2}\right)^2 (1-p^2)$$

$$b_2 - c_2 p^2 = \frac{a_5}{2}(1-p^2) - \frac{{a_6}^2}{8}(1-p^2)$$

$$b_2 - c_2 p^2 = \left(\frac{a_5}{2} - \frac{{a_6}^2}{8}\right)\left(1-p^2\right)$$

$$b_2 = c_2 p^2 + \left(\frac{a_5}{2} - \frac{{a_6}^2}{8}\right)\left(1-p^2\right)$$

ให้ $F_2 = \frac{a_5}{2} - \frac{a_6}{8}$ จะได้ $$b_2 = c_2 p^2 + F_2(1-p^2) \tag{102}$$

นำสมการที่ (101) แทนในสมการที่ (94) จะได้

$$2\left[(b_1 + b_2 b_3) - (c_1 + c_2 c_3)p^2\right] = a_4(1-p^2)$$

$$(b_1 + b_2 b_3) - (c_1 + c_2 c_3)p^2 = \frac{a_4(1-p^2)}{2}$$

$$b_1 + b_2 b_3 - c_1 p^2 - c_2 c_3 p^2 = \frac{a_4(1-p^2)}{2}$$

$$b_1 = \frac{a_4(1-p^2)}{2} - b_2\left(\frac{a_6}{2}\right) + c_1 p^2 + c_2\left(\frac{a_6}{2}\right)p^2$$

$$b_1 = c_1 p^2 + \frac{a_4(1-p^2) + a_6 c_2 p^2 - a_6 b_2}{2} \tag{103}$$

นำสมการที่ (101) แทนในสมการที่ (95) จะได้

$$(b_2^2 + 2b_0 + 2b_1 b_3) - (c_2^2 + 2c_0 + c_1 c_3)p^2 = a_3(1-p^2)$$

$$b_2^2 + 2b_0 + 2b_1\left(\frac{a_6}{2}\right) - c_2^2 p^2 - 2c_0 p^2 - 2c_1\left(\frac{a_6}{2}\right)p^2 = a_3(1-p^2)$$

$$2(b_0 - c_0 p^2) + (b_1 - c_1 p^2)a_6 + (b_2^2 - c_2^2 p^2) = a_3(1-p^2)$$

$$2(b_0 - c_0 p^2) = a_3(1-p^2) - (b_2^2 - c_2^2 p^2) - (b_1 - c_1 p^2)a_6$$

$$b_0 - c_0 p^2 = \frac{a_3(1-p^2) - (b_2^2 - c_2^2 p^2) - (b_1 - c_1 p^2)a_6}{2} \tag{104}$$

นำสมการที่ (101) แทนในสมการที่ (96) จะได้

$$2\left[(b_0 b_3 + b_1 b_2) - (c_0 c_3 + c_1 c_2)p^2\right] = a_2(1-p^2)$$

$$(b_0 b_3 + b_1 b_2) - (c_0 c_3 + c_1 c_2)p^2 = \frac{a_2(1-p^2)}{2}$$

$$b_0\left(\frac{a_6}{2}\right) + b_1 b_2 - c_0\left(\frac{a_6}{2}\right)p^2 - c_1 c_2 p^2 = \frac{a_2(1-p^2)}{2}$$

$$(b_0 - c_0 p^2)\left(\frac{a_6}{2}\right) + (b_1 b_2 - c_1 c_2 p^2) = \frac{a_2(1-p^2)}{2}$$

$$(b_0 - c_0 p^2)\left(\frac{a_6}{2}\right) = \frac{a_2(1-p^2)}{2} - (b_1 b_2 - c_1 c_2 p^2)$$

$$(b_0 - c_0 p^2)a_6 = \frac{a_2(1-p^2)2}{2} - 2(b_1 b_2 - c_1 c_2 p^2)$$

$$(b_0 - c_0 p^2)a_6 = a_2(1-p^2) - 2(b_1 b_2 - c_1 c_2 p^2) \tag{105}$$

พิจารณา (86),(87),(88),(89) ,... ,(94) และตัวที่ไม่ทราบค่าคือ $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ และ p โดยนำสมการที่ (88) มาพิจารณา

จะได้ว่า
$$\frac{(b_0 - c_0 p^2)}{(1-p^2)} = 0$$

$$b_0 = c_0 p, -c_0 p \tag{106}$$

ซึ่งจาก $b_0 = c_0 p, -c_0 p$ เราสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีนั้นก็คือ

กรณีที่ 1 $b_0 = c_0 p$

ใช้สมการที่ (106) แทนในสมการที่ (97), (98), (104) และ (105) จะได้ว่า

นำสมการที่ (106) แทนในสมการที่ (97) จะได้

$$\frac{(b_1^2 + 2b_0 b_2) - (c_1^2 + 2c_0 c_2) p^2}{(1-p^2)} = a_1$$

$$(b_1^2 + 2c_0 p b_2) - (c_1^2 + 2c_0 c_2) p^2 = a_1(1-p^2)$$

$$b_1^2 + 2c_0 p b_2 - c_1^2 p^2 - 2c_0 c_2 p^2 = a_1(1-p^2)$$

$$2c_0 p(b_2 - c_2 p) + (b_1^2 - c_1^2 p^2) = a_1(1-p^2)$$

$$2c_0 p(b_2 - c_2 p) = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2 p^2) \tag{107}$$

นำสมการที่ (106) แทนในสมการที่ (98) จะได้

$$2(c_0 p b_1 - c_0 c_1 p^2) = a_0(1-p^2)$$

$$2c_0 p(b_1 - c_1 p) = a_0(1-p^2) \tag{108}$$

นำสมการที่ (106) แทนในสมการที่ (104) จะได้

$$c_0 p - c_0 p^2 = \frac{a_3(1-p^2) - (b_2^2 - c_2^2 p^2) - (b_1 - c_1 p^2) a_6}{2}$$

$$2c_0 p(1-p) = a_3(1-p^2) - (b_2^2 - c_2^2 p^2) - (b_1 - c_1 p^2) a_6 \tag{109}$$

นำสมการที่ (106) แทนในสมการที่ (105) จะได้

$$(c_0 p - c_0 p^2) a_6 = a_2(1-p^2) - 2(b_1 b_2 - c_1 c_2 p^2)$$

$$a_6 c_0 p(1-p) = a_2(1-p^2) - 2(b_1 b_2 - c_1 c_2 p^2) \tag{110}$$

ใช้สมการที่ (102) $b_2 = c_2 p^2 + f_2(1-p^2)$ แทนสมการที่ (103),(107),(109) และ (110)

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (103) จะได้

$$b_1 = c_1 p^2 + \frac{a_4(1-p^2) + a_6 c_2 p^2 - a_6(c_2 p^2 + F_2(1-p^2))}{2}$$

$$b_1 = c_1 p^2 + \frac{a_4(1-p^2) + a_6 c_2 p^2 - a_6 c_2 p^2 - a_6 F_2(1-p^2)}{2}$$

$$b_1 = c_1 p^2 + \frac{(a_4 - a_6 F_2)}{2}(1-p^2)$$

ให้ $F_1 = \dfrac{(a_4 - a_6 F_2)}{2}$

จะได้ $$b_1 = c_1 p^2 + F_1(1-p^2) \tag{111}$$

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (107) จะได้

$$2c_0pb_2 - c_0c_2p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2p^2)$$
$$2c_0p(c_2p^2 + F_2 - F_2p^2) - 2c_0c_2p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2p^2)$$
$$2c_0p(c_2p^2 + F_2(1-p^2)) - 2c_0c_2p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2p^2)$$
$$2c_0c_2p^3 + 2c_0pF_2 - 2c_0F_2p^3 - 2c_0c_2p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2p^2)$$
$$2c_0c_2(p-1) + 2c_0F_2p(1-p^2) = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2p^2)$$
$$2c_0c_2(p-1) = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2p^2) - 2F_2c_0p(1-p^2) \tag{112}$$

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (109) จะได้

$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) - [(c_2^2p^2 + F_2(1-p^2))^2 - c_2^2p^2] - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) - [c_2^2p^4 + 2c_2^2p^2F_2^2(1-p^2) + F_2^2(1-p^2) - c_2^2p^2] - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) - c_2^2p^4 - 2c_2^2p^2F_2^2(1-p^2) - F_2^2(1-p^2) + c_2^2p^2 - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) + c_2^2p^2(1-p^2) - 2c_2p^2F_2(1-p^2) - F_2^2(1-p^2)(1-p^2) - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) + c_2^2p^2(1-p^2) - 2c_2p^2F_2(1-p^2)$$
$$-F_2^2(1-p^2) + F_2^2p^2(1-p^2) - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) + (c_2^2p^2 - 2c_2p^2F_2 - F_2^2 + F_2^2p^2)(1-p^2) - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) + [-F_2^2 + p^2(c_2^2 - 2c_2F_2 + F_2^2)](1-p^2) - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = a_3(1-p^2) + [-F_2^2 + p^2(c_2^2 - F_2^2)](1-p^2) - a_6(b_1 - c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p) = (1-p^2)[a_3 - F_2^2 + p^2(c_2 - F_2)^2] - a_6(b_1 - c_1p^2) \tag{113}$$

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (110) จะได้

$$a_6c_0p(1-p) = a_2(1-p^2) - 2b_1b_2 + 2c_1c_2p^2$$
$$a_6c_0p(1-p) = a_2(1-p^2) - 2b_1(c_2p^2 + F_2(1-p^2)) + 2c_1c_2p^2$$
$$a_6c_0p(1-p) = a_2(1-p^2) + 2c_1c_2p^2 - 2b_1(c_2p^2 + F_2(1-p^2)) \tag{114}$$

ใช้สมการที่ (111) ก็คือ $b_1 = c_1p^2 + F_1(1-p^2)$ แทนในสมการที่ (108),(112),(113) และ (114)

เพื่อกำจัดค่า b_1

นำสมการที่ (111) แทนในสมการที่ (108) จะได้

$$2c_0p(c_1p^2 + F_1(1-p^2) - c_1p) = a_0(1-p^2)$$
$$2c_0c_1p^3 + 2c_0pF_1(1-p^2) - 2c_0c_1p^2 = a_0(1-p^2)$$
$$2c_0c_1p^2(p-1) + 2c_0pF_1(1-p^2) = a_0(1-p^2)$$
$$2c_0c_1p^2(p-1) = a_0(1-p^2) - 2c_0pF_1(1-p^2)$$
$$2c_0c_1p^2(p-1) = (1-p^2)(a_0 - 2F_1c_0p)$$
$$2c_0c_1p^2(p-1) - (1-p^2)(a_0 - 2F_1c_0p) = 0$$
$$2c_0c_1p^2(p-1) - (1-p)(1+p)(a_0 - 2F_1c_0p) = 0$$

นำ -1 คูณทั้งสมการ จะได้ $2c_0c_1p^2(1-p) + (1-p)(1+p)(a_0 - 2F_1c_0p) = 0$

$$(1-p)[2c_0c_1p^2 + (1+p)(a_0 - 2F_1c_0p)] = 0 \tag{115}$$

จากสมการที่ (115) นำตัวประกอบ $(1-p)$ ออกมาจากสมการ จากสมการที่ (89) $p^2 \neq 1$

ดังนั้น $(1-p) \neq 0$ ตัวประกอบที่เหลือในสมการที่ (115) จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$2c_0c_1p^2 + (1+p)(a_0 - 2F_1c_0p) = 0 \tag{116}$$

นำสมการที่ (111) แทนในสมการที่ (112) จะได้

$$2c_0c_2(p-1)=a_1(1-p^2)-[(c_1p^2+F_1(1-p^2))^2-c_1^2p^2]-2F_2c_0p(1-p^2)$$
$$2c_0c_2(p-1)=a_1(1-p^2)-[c_1^2p^4+2c_1p^2F_1+F_1^2(1-p^2)^2-c_1^2p^2]-2F_2c_0p(1-p^2)$$
$$2c_0c_2(p-1)=a_1(1-p^2)-c_1^2p^4-2c_1p^2F_1(1-p^2)-F_1^2(1-p^2)^2+c_1^2p^2-2F_2c_0p(1-p^2)$$
$$2c_0c_2(p-1)=a_1(1-p^2)-2c_1p^2F_1(1-p^2)-2F_2c_0p(1-p^2)+c_1^2p^2-c_1^2p^4-F_1^2(1-p^2)^2$$
$$2c_0c_2(p-1)=(1-p^2)(a_1-2F_1c_1p^2-2F_2c_0p)+c_1^2p^2(1-p^2)-F_1^2(1-p^2)(1-p^2)$$
$$2c_0c_2(p-1)=(1-p^2)(a_1-2F_1c_1p^2-2F_2c_0p+c_1^2p^2)+(-F_1^2+F_1^2p^2)(1-p^2)$$
$$2c_0c_2(p-1)=(1-p^2)(a_1-F_1^2-2F_2c_0p+c_1^2p^2-2F_1c_1p^2+F_1^2p^2)$$

กำหนดให้ $F_4=a_1-F_1^2$ จะได้

$$2c_0c_2(p-1)=(1-p)(1+p)(F_4-2F_2c_0p+c_1^2p^2-2F_1c_1p^2+F_1^2p^2)$$
$$-2c_0c_2(1-p)=(1-p)(1+p)[F_4-2F_2c_0p+p^2(c_1^2-2F_1c_1+F_1^2)]$$
$$-2c_0c_2(1-p)=(1-p)(1+p)[F_4-2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1)^2]$$
$$(1-p)(1+p)[F_4-2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1)^2]+2c_0c_2(1-p)=0$$
$$(1-p)[2c_0c_2p^2+(1+p)(F_4-2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1^2))]=0 \qquad (117)$$

เนื่องจาก $(1-p)\neq 0$ ดังนั้น ตัวประกอบที่เหลือในสมการที่ (117) จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$2c_0c_2p^2+(1+p)[F_4-2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1)^2]=0 \qquad (118)$$

นำสมการที่ (111) แทนในสมการที่ (113) จะได้

$$2c_0p(1-p)=(1-p^2)[a_3-F_2^2+p^2(c_2-F_2)^2]-a_6(c_1p^2+F_1(1-p^2)-c_1p^2)$$
$$2c_0p(1-p)=(1-p^2)[a_3-F_2^2+p^2(c_2-F_2)^2]-a_6F_1(1-p^2)$$
$$2c_0p(1-p)=(1-p^2)[a_3-F_2^2+p^2(c_2-F_2)^2-a_6F_1]$$

กำหนดให้ $F_0=a_3-F_2^2-a_6F_1$ จะได้

$$2c_0p(1-p)=(1-p)(1+p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]$$
$$2c_0p(1-p)-(1-p)(1+p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]=0$$
$$(1-p)[2c_0p-(1+p)(F_0+p^2(c_2-F_2)^2)]=0 \qquad (119)$$

เนื่องจาก $(1-p)\neq 0$ ดังนั้น ตัวประกอบที่เหลือในสมการ จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$2c_0p-(1+p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]=0$$
$$2c_0p=(1+p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]$$

จะได้

$$c_0=\frac{(1+p)}{2p}[F_0+p^2(c_2-F_2)^2] \qquad (120)$$

นำสมการที่ (110) แทนในสมการที่ (114) จะได้

$$a_6c_0p(1-p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2b_1c_2p^2+2b_1F_2(1-p^2)$$
$$a_6c_0p(1-p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2b_1c_2p^2+2b_1F_2-2b_1F_2p^2)$$
$$a_6c_0p(1-p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2[c_1p^2+F_1(1-p^2)]c_2p^2-2[c_1p^2+F_1(1-p^2)]F_2 +2[c_1p^2+F_1(1-p^2)]F_2p^2$$
$$a_6c_0p(1-p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2c_1c_2p^4-2F_1c_2p^2(1-p^2)-2F_2c_1p^2-2F_1F_2(1-p^2) +2F_2c_1p^4+2F_1F_2p^2(1-p^2)$$
$$a_6c_0p(1-p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2(1-p^2)-2F_2c_1p^2(1-p^2)-2F_1c_2p^2(1-p^2) -2F_1F_2(1-p^2)+2F_1F_2p^2(1-p^2)$$

$$a_6c_0p(1-p)=a_2(1-p^2)+2(1-p^2)(c_1c_2p^2-F_2c_1p^2-F_1c_2p^2-F_1F_2+F_1F_2p^2)$$
$$a_6c_0p(1-p)=(1-p^2)(a_2+2c_1c_2p^2-2F_2c_1p^2-2F_1c_2p^2-2F_1F_2+2F_1F_2p^2)$$
$$a_6c_0p(1-p)=(1-p)(1+p)(a_2+2p^2(c_1c_2-F_2c_1-F_1c_2+F_1F_2)-2F_1F_2)$$
$$a_6c_0p(1-p)-(1-p)(1+p)(a_2+2p^2(c_1c_2-F_2c_1-F_1c_2+F_1F_2)-2F_1F_2)$$
$$=a_6c_0p(1-p)-(1-p)(1+p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_2(c_1-F_1)-F_2(c_1-F_1))]$$
$$=(1-p)\{a_6c_0p-(1+p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]\}=0 \qquad (121)$$

เนื่องจาก $(1-p)\neq 0$ ดังนั้น ตัวประกอบที่เหลือในสมการที่ (121) จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$a_6c_0p-(1+p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]=0$$
$$a_6c_0p=(1+p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$$

จะได้ $c_0=\dfrac{(1+p)}{a_6p}[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$

ให้ $F_3=a_2-2F_1F_2$ จะได้

$$c_0=\frac{(1+p)}{a_6p}[F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)] \qquad (122)$$

ใช้สมการที่ (120) แทนในสมการที่ (122),(118) และ (116) จะพิจารณาค่า c_0

นำ c_0 จากสมการที่ (109) แทนใน c_0 ของสมการที่ (111) จะได้

$$\frac{(1+p)}{2p}[F_0+p^2(F_2-c_2)^2]=\frac{(1+p)}{a_6p}[F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$$
$$\left(\frac{a_6p}{(1+p)}\right)\left(\frac{(1+p)}{2p}\right)[F_0+p^2(F_2-c_2)^2]=[F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$$
$$\frac{a_6}{2}F_0+\frac{a_6}{2}p^2(F_2-c_2)^2=F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)$$

นำ 2 คูณทั้งสมการจะได้

$$a_6F_0+a_6p^2(F_2-c_2)^2=2F_3+4p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)$$
$$a_6F_0+a_6p^2(F_2-c_2)^2-2F_3=4p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)$$
$$\frac{a_6F_0+a_6p^2(F_2-c_2)^2-2F_3}{4p(c_2-F_2)}=p(c_1-F_1)$$

กำหนดให้ $F_5=a_6F_0-2F_3$ จะได้

$$p(c_1-F_1)=\frac{F_5+a_6p^2(c_2-F_2)^2}{4p(c_2-F_2)} \qquad (123)$$

นำสมการที่ (120) แทนในสมการที่ (118) จะได้

$$2\left(\frac{(1+p)}{2p}[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]\right)c_2p^2+(1+p)[F_4-2F_2p\left(\frac{(1+p)}{2p}[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]\right)+p^2(c_1-F_1)^2]$$
$$=(1+p)c_2p[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]+(1+p)[F_4-F_0F_2(1+p)-F_2p^2(1+p)(c_2-F_2)^2+p^2(c_1-F_1)^2]$$
$$=(1+p)[F_0c_2p+c_2p^3(c_2-F_2)^2]+(1+p)[F_4-F_0F_2(1+p)-F_2p^2(1+p)(c_2-F_2)^2+p^2(c_1-F_1)^2]$$
$$=F_0c_2p+c_2p^3(c_2-F_2)^2+F_4-F_0F_2(1+p)-F_2p^2(c_2-F_2)^2-F_2p^3(c_2-F_2)^2+p^2(c_1-F_1)^2$$

$$= F_0c_2p + c_2p^3(c_2-F_2)^2 + F_4 - F_0F_2 - F_0F_2p - F_2p^2(c_2-F_2)^2 - F_2p^3(c_2-F_2)^2 + p^2(c_1-F_1)^2 = 0$$
$$p^2(c_1-F_1)^2 = -F_0c_2p - c_2p^3(c_2-F_2)^2 - F_4 + F_0F_2 + F_0F_2p + F_2p^2(c_2-F_2)^2 + F_2p^3(c_2-F_2)^2$$
$$p^2(c_1-F_1)^2 = -F_0c_2p + F_0F_2p - c_2p^3(c_2-F_2)^2 + F_2p^2(c_2-F_2)^2 + F_2p^3(c_2-F_2)^2 - F_4 + F_0F_2$$
$$p^2(c_1-F_1)^2 = -F_0c_2p - p^3(c_2-F_2)^2(c_2-F_2) + F_2p^2(c_2-F_2)^2 - F_4 + F_0F_2$$
$$p^2(c_1-F_1)^2 = F_2p^2(c_2-F_2)^2 - [p^3(c_2-F_2)^3 + F_0p(c_2-F_2) + F_4 - F_0F_2$$

กำหนดให้ $F_6 = F_4 - F_0F_2$ จะได้

$$p^2(c_1-F_1)^2 = F_2p^2(c_2-F_2)^2 - [p^3(c_2-F_2)^3 + F_0p(c_2-F_2) + F_6 = 0 \tag{124}$$

นำสมการที่ (120) แทนในสมการที่ (116)

$$2c_1p^2\left(\frac{(1+p)}{2p}[F_0 + p^2(c_2-F_2)^2]\right) + (1+p)\left[a_0 - 2F_1p\left(\frac{(1+p)}{2p}(F_0 + p^2(c_2-F_2)^2)\right)\right]$$
$$= (1+p)\left[c_1pF_0 + c_1p^3(c_2-F_2)^2\right] + (1+p)\left[a_0 - F_0F_1(1+p) - F_1p^2(1+p)(c_2-F_2)^2\right]$$
$$= (1+p)\left[c_1pF_0 + c_1p^3(c_2-F_2)^2 + a_0 - F_0F_1(1+p) - F_1p^2(1+p)(c_2-F_2)^2\right]$$
$$= c_1pF_0 + c_1p^3(c_2-F_2)^2 + a_0 - F_0F_1(1+p) - F_1p^2(1+p)(c_2-F_2)^2$$
$$= c_1pF_0 + c_1p^3(c_2-F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 - F_0F_1p - F_1p^2(c_2-F_2)^2 - F_1p^3(c_2-F_2)^2$$
$$= c_1pF_0 - F_0F_1p - F_1p^2(c_2-F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 + c_1p^3(c_2-F_2)^2 - F_1p^3(c_2-F_2)^2$$
$$= F_0p(c_1-F_1) - F_1p^2(c_2-F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 + p^3(c_2-F_2)^2(c_1-F_1)$$
$$= F_0p(c_1-F_1) + p^3(c_2-F_2)^2(c_1-F_1) - F_1p^2(c_2-F_2)^2 + a_0 - F_0F_1$$
$$p(c_1-F_1)[F_0 + p^2(c_2-F_2)^2] - F_1p^2(c_2-F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 = 0$$
$$p(c_1-F_1)[p^2(c_2-F_2)^2 + F_0] = F_1p^2(c_2-F_2)^2 - a_0 + F_0F_1$$
$$p(c_1-F_1) = \frac{F_1p^2(c_2-F_2)^2 - a_0 + F_0F_1}{[p^2(c_2-F_2)^2 + F_0]}$$

กำหนดให้ $F_7 = a_0 - F_0F_1$ จะได้

$$p(c_1-F_1) = \frac{F_1p^2(c_2-F_2)^2 - F_7}{[p^2(c_2-F_2)^2 + F_0]} \tag{125}$$

ตอนนี้เราได้สมการ 3 สมการ คือสมการที่ (123),(124) และ (125) และ 3 ตัวแปรที่ไม่รู้ค่า คือ c_1, c_2 และ p เราจะใช้สมการที่ (123) $p(c_1-F_1) = \dfrac{F_5 + a_6p^2(c_2-F_2)^2}{4p(c_2-F_2)}$ แทนในสมการที่ (124) และ (125)

จากสมการที่ (124) จะได้

$$p^2(c_1-F_1)^2 = F_2p^2(c_2-F_2)^2 - [p^3(c_2-F_2)^3 + F_0p(c_2-F_2) + F_6]$$
$$\left[\frac{F_5 + a_6p^2(c_2-F_2)^2}{4p(c_2-F_2)}\right]^2 = F_2p^2(c_2-F_2)^2 - [p^3(c_2-F_2)^3 + F_0p(c_2-F_2) + F_6]$$
$$\frac{F_5^2}{16p^2(c_2-F_2)^2} + \frac{2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2}{16p^2(c_2-F_2)^2} + \frac{a_6^2p^4(c_2-F_2)^4}{16p^2(c_2-F_2)^2}$$
$$= F_2p^2(c_2-F_2)^2 - p^3(c_2-F_2)^3 - F_0p(c_2-F_2) - F_6$$

$$F_5^{\,2}+2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2+a_6^{\,2}p^4(c_2-F_2)^4$$
$$=F_2p^2(c_2-F_2)^2 16p^2(c_2-F_2)^2-p^3(c_2-F_2)^3 16p^2(c_2-F_2)^2$$
$$-F_0p(c_2-F_2)16p^2(c_2-F_2)^2-F_6 16p^2(c_2-F_2)^2$$
$$F_5^{\,2}+2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2+a_6^{\,2}p^4(c_2-F_2)^4$$
$$=16F_2p^4(c_2-F_2)^4-16p^5(c_2-F_2)^5$$
$$-16F_0p^3(c_2-F_2)^3-16F_6p^2(c_2-F_2)^2$$
$$=F_5^{\,2}+2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2+a_6^{\,2}p^4(c_2-F_2)^4-16F_2p^4(c_2-F_2)^4$$
$$+16p^5(c_2-F_2)^5+16F_0p^3(c_2-F_2)^3+16F_6p^2(c_2-F_2)^2$$
$$=16p^5(c_2-F_2)^5-16F_2p^4(c_2-F_2)^4+a_6^{\,2}p^4(c_2-F_2)^4+16F_0p^3(c_2-F_2)^3$$
$$+16F_6p^2(c_2-F_2)^2+2F_5a_6(c_2-F_2)^2+F_5^{\,2}$$
$$=16p^5(c_2-F_2)^5-(16F_2-a_6^2)p^4(c_2-F_2)^4+16F_0p^3(c_2-F_2)^3 \qquad (126)$$
$$+(16F_6+2F_2a_6)p^2(c_2-F_2)^2+F_5^{\,2}=0$$

จากสมการที่ (125) จะได้

$$p(c_1-F_1)=\frac{F_1p^2(c_2-F_2)^2-F_7}{[p^2(c_2-F_2)^2+F_0]}$$
$$\frac{F_5+a_6p^2(c_2-F_2)^2}{4p(c_2-F_2)}=\frac{F_1p^2(c_2-F_2)^2-F_7}{[p^2(c_2-F_2)^2+F_0]}$$
$$[F_5+a_6p^2(c_2-F_2)^2][p^2(c_2-F_2)^2+F_0]=[F_1p^2(c_2-F_2)^2-F_7][4p(c_2-F_2)]$$
$$F_5p^2(c_2-F_2)^2+F_0F_5+a_6p^4(c_2-F_2)^4+a_6F_0p^2(c_2-F_2)^2=4F_1p^3(c_2-F_2)^3-4F_7p(c_2-F_2)$$
$$F_5p^2(c_2-F_2)^2+F_0F_5+a_6p^4(c_2-F_2)^4+a_6F_0p^2(c_2-F_2)^2-4F_1p^3(c_2-F_2)^3+4F_7p(c_2-F_2)$$
$$=a_6p^4(c_2-F_2)^4-4F_1p^3(c_2-F_2)^3+(F_5+a_6F_0)p^2(c_2-F_2)^2$$
$$+4F_7p(c_2-F_2)+F_0F_5=0 \qquad (127)$$

กำหนดให้ $$g=p(c_2-F_2) \qquad (128)$$

นำสมการที่ (128) แทนในสมการที่ (126) และ (127)

จากสมการที่ (126) จะได้

$$16p^5(c_2-F_2)^5-(16F_2-a_6^2)p^4(c_2-F_2)^4+16F_0p^3(c_2-F_2)^3+(16F_6+2F_2a_6)p^2(c_2-F_2)^2+F_5^{\,2}$$
$$=16p^5(c_2-F_2)^5+(a_6^2-16F_2)p^4(c_2-F_2)^4+16F_0p^3(c_2-F_2)^3+(16F_6+2a_6F_2)p^2(c_2-F_2)^2+F_5^{\,2}$$
$$=16g^5+(a_6^2-16F_2)g^4+16F_0g^3+(16F_6+2F_2a_6)g^2+F_5^{\,2}=0 \qquad (129)$$

จากสมการที่ (127) จะได้

$$a_6p^4(c_2-F_2)^4-4F_1p^3(c_2-F_2)^3+(F_5+a_6F_0)p^2(c_2-F_2)^2+4F_7p(c_2-F_2)+F_0F_5$$
$$=a_6g^4-4F_1g^3+(F_5+a_6F_0)g^2+4F_7g+F_0F_5=0 \qquad (130)$$

หา c_2 ได้จากสมการที่ (128)

จากสมการที่ (127) จะได้

$$g=p(c_2-F_2)$$
$$\frac{g}{p}=c_2-F_2$$
$$\frac{g}{p}+F_2=c_2$$

$$c_2 = \frac{g}{p} + F_2 \tag{131}$$

นำสมการที่ (128) แทนในสมการที่ (120) และ (125)

จากสมการที่ (120) จะได้

$$c_0 = \frac{(1+p)}{2p}[F_0 + p^2(c_2 - F_2)^2]$$

$$c_0 = \frac{(1+p)}{2p}[F_0 + g^2]$$

กำหนดให้ $F_8 = F_0 + g^2$ จะได้

$$c_0 = \frac{(1+p)}{2p}F_8 \tag{132}$$

จากสมการที่ (125) จะได้

$$p(c_1 - F_1) = \frac{F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 - F_7}{p^2(c_2 - F_2)^2 + F_0}$$

$$p(c_1 - F_1) = \frac{F_1 g^2 - F_7}{g^2 + F_0}$$

$$(c_1 - F_1) = \frac{F_1 g^2 - F_7}{(F_0 + g^2)p}$$

$$c_1 = \frac{F_1 g^2 - F_7}{(F_0 + g^2)p} + F_1$$

กำหนดให้ $F_9 = \frac{F_1 g^2 - F_7}{F_8} + F_1$ จะได้

$$c_1 = F_1 + \frac{F_9}{p} \tag{133}$$

หา b_0 จากสมการที่ (132) แทนในสมการที่ (106)

จากสมการที่ (95) จะได้

$$b_0 = \frac{(1+p)}{2p}F_8 p$$

$$b_0 = \frac{(1+p)}{2}F_8 \tag{134}$$

หา b_1 จากการนำสมการที่ (133) แทนในสมการที่ (111)

จากสมการที่ (111) จะได้

$$b_1 = (F_1 + \frac{F_9}{p})p^2 + F_1(1-p^2)$$

$$b_1 = F_1 p^2 + \frac{F_9 p^2}{p} + F_1(1-p^2)$$

$$b_1 = F_1 p^2 + F_9 p + F_1 - F_1 p^2$$

$$b_1 = F + F_9 p \tag{135}$$

หา b_2 จากการนำสมการที่ (131) แทนในสมการที่ (102)

จากสมการที่ (102) จะได้

$$b_2 = \left(F_2 + \frac{g}{p}\right)p^2 + F_2(1-p^2)$$

$$b_2 = F_2 p^2 + g + F_2 - F_2 p^2$$

$$b_2 = F_2 + gp \tag{136}$$

จากสมการที่ (90) จะได้

$$\left[\frac{x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 - px^4 - pc_3x^3 - pc_2x^2 - pc_1x - pc_0}{(1-p)}\right]$$

$$\bullet\left[\frac{x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 + px^4 + pc_3x^3 + pc_2x^2 + pc_1x + pc_0}{(1+p)}\right]$$

$$=\left[\frac{x^4 - px^4 + b_3x^3 - pc_3x^3 + b_2x^2 - pc_2x^2 + b_1x - pc_1x + b_0 - pc_0}{(1-p)}\right]$$

$$\bullet\left[\frac{x^4 + px^4 + b_3x^3 + pc_3x^3 + b_2x^2 + pc_2x^2 + b_1x + pc_1x + b_0 + pc_0}{(1+p)}\right]$$

$$=\left[\frac{(1-p)x^4}{(1-p)} + \frac{(b_3 - pc_3)x^3}{(1-p)} + \frac{(b_2 - pc_2)x^2}{(1-p)} + \frac{(b_1 - pc_1)x}{(1-p)} + \frac{(b_0 - pc_0)}{(1-p)}\right]$$

$$\bullet\left[\frac{(1+p)x^4}{(1+p)} + \frac{(b_3 + pc_3)x^3}{(1+p)} + \frac{(b_2 + pc_2)x^2}{(1+p)} + \frac{(b_1 + pc_1)x}{(1+p)} + \frac{(b_0 + pc_0)}{(1+p)}\right] = 0$$

กำหนดให้ $b_3 = c_3$ จะได้

$$\left[x^4 + \frac{(c_3 - pc_3)x^3}{(1-p)} + \frac{(b_2 - pc_2)x^2}{(1-p)} + \frac{(b_1 - pc_1)x}{(1-p)} + \frac{(b_0 - pc_0)}{(1-p)}\right]$$

$$\bullet\left[x^4 + \frac{(c_3 + pc_3)x^3}{(1+p)} + \frac{(b_2 + pc_2)x^2}{(1+p)} + \frac{(b_1 + pc_1)x}{(1+p)} + \frac{(b_0 + pc_0)}{(1+p)}\right]$$

$$=\left[x^4 + \frac{(1-p)c_3x^3}{(1-p)} + \frac{(b_2 - pc_2)x^2}{(1-p)} + \frac{(b_1 - pc_1)x}{(1-p)} + \frac{(b_0 - pc_0)}{(1-p)}\right]$$

$$\bullet\left[x^4 + \frac{(1+p)c_3x^3}{(1+p)} + \frac{(b_2 + pc_2)x^2}{(1+p)} + \frac{(b_1 + pc_1)x}{(1+p)} + \frac{(b_0 + pc_0)}{(1+p)}\right]$$

$$=\left[x^4 + c_3x^3 + \frac{(b_2 - pc_2)x^2}{(1-p)} + \frac{(b_1 - pc_1)x}{(1-p)} + \frac{(b_0 - pc_0)}{(1-p)}\right]$$

$$\bullet\left[x^4 + c_3x^3 + \frac{(b_2 + pc_2)x^2}{(1+p)} + \frac{(b_1 + pc_1)x}{(1+p)} + \frac{(b_0 + pc_0)}{(1+p)}\right] = 0$$

กำหนดให้ $c_3 = \dfrac{a_6}{2}$

$$\left[x^4 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^3 + \frac{(b_2 - pc_2)x^2}{(1-p)} + \frac{(b_1 - pc_1)x}{(1-p)} + \frac{(b_0 - pc_0)}{(1-p)}\right]$$

$$\bullet\left[x^4 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^3 + \frac{(b_2 + pc_2)x^2}{(1+p)} + \frac{(b_1 + pc_1)x}{(1+p)} + \frac{(b_0 + pc_0)}{(1+p)}\right] = 0 \tag{137}$$

เมื่อกำหนดให้ h_0, h_1, h_2, k_0, k_1 และ k_2 มีค่าดังนี้

$$h_0 = \frac{(b_0 - pc_0)}{(1-p)} \qquad h_1 = \frac{(b_1 - pc_1)}{(1-p)} \qquad h_2 = \frac{(b_2 - pc_2)}{(1-p)} \tag{138}$$

$$k_0 = \frac{(b_0 + pc_0)}{(1+p)} \qquad k_1 = \frac{(b_1 + pc_1)}{(1+p)} \qquad k_2 = \frac{(b_2 + pc_2)}{(1+p)} \tag{139}$$

ค่าของ h_0, h_1, h_2, k_0, k_1 และ k_2 จะได้จากการนำ b_0, b_1, b_2, c_0, c_1 และ c_2 จากสมการที่ (131), (132),(133),(134),(135) และ (136) มาแทนค่า ดังนั้น จะได้ว่า

จาก $h_0 = \frac{(b_0 - pc_0)}{(1-p)}$

$$h_0 = \frac{\frac{(1+p)}{2}F_8 - p\frac{(1+p)}{2p}F_8}{(1-p)}$$

$$h_0 = 0$$

จาก $h_1 = \frac{(b_1 - pc_1)}{(1-p)}$

$$h_1 = \frac{F_1 + F_9 p - p\left(F_1 + \frac{F_9}{p}\right)}{(1-p)}$$

$$h_1 = \frac{F_1 + F_9 p - pF_1 + F_9}{(1-p)}$$

$$h_1 = \frac{(1-p)F_1}{(1-p)} + \frac{(-1+p)F_9}{(1-p)}$$

$$h_1 = F_1 - \frac{(1-p)F_9}{(1-p)}$$

$$h_1 = F_1 - F_9$$

จาก $h_2 = \frac{(b_2 - pc_2)}{(1-p)}$

$$h_2 = \frac{F_2 + gp - p\left(\frac{g}{p} + F_2\right)}{(1-p)}$$

$$h_2 = \frac{F_2 + gp - g + pF_2}{(1-p)}$$

$$h_2 = \frac{(1-p)F_2}{(1-p)} + \frac{(-1+p)g}{(1-p)}$$

$$h_2 = F_2 - \frac{(1-p)g}{(1-p)}$$

$$h_2 = F_2 - g$$

จาก $k_0 = \frac{(b_0 + pc_0)}{(1+p)}$

$$k_0 = \frac{\frac{(1+p)}{2}F_8 + p\frac{(1+p)}{2p}F_8}{(1+p)}$$

$$k_0 = \frac{\frac{F_8 + pF_8}{2} + \frac{F_8 + pF_8}{2}}{(1+p)}$$

$$k_0 = \frac{\frac{F_8}{2} + \frac{pF_8}{2} + \frac{F_8}{2} + \frac{pF_8}{2}}{(1+p)}$$

$$k_0 = \frac{\frac{2F_8}{2} + \frac{2pF_8}{2}}{(1+p)}$$

$$k_0 = \frac{F_8 + pF_8}{(1+p)}$$

$$k_0 = \frac{(1+p)F_8}{(1+p)}$$

$$k_0 = F_8$$

จาก $$k_1 = \frac{(b_1 + pc_1)}{(1+p)}$$

$$k_1 = \frac{F + F_9 p + p\left(F_1 + \frac{F_9}{p}\right)}{(1+p)}$$

$$k_1 = \frac{F_1 + F_9 p + pF_1 + F_9}{(1+p)}$$

$$k_1 = \frac{(1+p)F_1 + (1+p)F_9}{(1+p)}$$

$$k_1 = F_1 + F_9$$

จาก $$k_2 = \frac{(b_2 + pc_2)}{(1+p)}$$

$$k_2 = \frac{F_2 + gp + p\left(\frac{g}{p} + F_2\right)}{(1+p)}$$

$$k_2 = \frac{F_2 + gp + pF_2 + g}{(1+p)}$$

$$k_2 = \frac{(1+p)F_2 + (1+p)g}{(1+p)}$$

$$k_2 = F_2 + g \qquad (140)$$

ดังนั้น จะได้ $h_0 = 0$, $h_1 = F_1 - F_9$, $h_2 = F_2 - g$, $k_0 = F_8$, $k_1 = F_1 + F_9$ และ $k_2 = F_2 + g$

ให้นำค่า h_0, h_1, h_2, k_0, k_1 และ k_2 จากสมการที่ (140) มาแทนในสมการที่ (137)

จากสมการที่ (137) จะได้

$$\left[x^4+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^3+(F_2-g)x^2+(F_1-F_9)x+0\right]\left[x^4+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^3+(F_2+g)x^2+(F_1+F_9)x+F_8\right]=0$$

$$x\left[x^3+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^2+(F_2-g)x+(F_1-F_9)\right]\left[x^4+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^3+(F_2+g)x^2+(F_1+F_9)x+F_8\right]=0 \qquad (141)$$

เนื่องจากตัวประกอบ x ในสมการข้างต้นเป็นรากที่เราเพิ่มเข้าไปในสมการพหุนามกำลังเจ็ดตอนแรก เราจึงไม่สนใจกรณีที่ $x=0$ จะได้ว่า

$$\left[x^3+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^2+(F_2-g)x+(F_1-F_9)\right]\left[x^4+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^3+(F_2+g)x^2+(F_1+F_9)x+F_8\right]=0 \qquad (142)$$

จากสมการที่ (131) ในแต่ละเทอมของตัวประกอบจะมีค่าเท่ากับ 0 จะได้ว่า

$$x^3+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^2+(F_2-g)x+(F_1-F_9)=0 \qquad (143)$$

$$x^4+\left(\frac{a_6}{2}\right)x^3+(F_2+g)x^2+(F_1+F_9)x+F_8=0 \qquad (144)$$

เมื่อเราได้สมการที่ (143) และ (144) มาแล้ว เราจะใช้วิธีการแก้สมการของกำลังสามและสี่มาหาค่ารากต่อไป

กรณีที่ 2 $b_0=-c_0p$

ใช้สมการที่ (106) แทนในสมการที่ (97),(98),(104) และ (105) จะได้ว่า

นำสมการที่ (95) แทนในสมการที่ (86) ;

$$\frac{(b_1^2+2b_0b_2)-(c_1^2+2c_0c_2)p^2}{(1-p^2)}=a_1$$

$$(b_1^2-2c_0pb_2)-(c_1^2+2c_0c_2)p^2=a_1(1-p^2)$$

$$b_1^2-2c_0pb_2-c_1^2p^2-2c_0c_2p^2=a_1(1-p^2)$$

$$-2c_0p(b_2+c_2p)+(b_1^2-c_1^2p^2)=a_1(1-p^2)$$

$$-2c_0p(b_2+c_2p)=a_1(1-p^2)-(b_1^2-c_1^2p^2) \qquad (145)$$

นำสมการที่ (106) แทนในสมการที่ (98) จะได้

$$2(-c_0pb_1-c_0c_1p^2)=a_0(1-p^2)$$

$$-2c_0p(b_1-c_1p)=a_0(1-p^2) \qquad (146)$$

นำสมการที่ (106) แทนในสมการที่ (104) จะได้

$$-c_0p-c_0p^2=\frac{a_3(1-p^2)-(b_2^2-c_2^2p^2)-(b_1-c_1p^2)a_6}{2}$$

$$-2c_0p(1+p)=a_3(1-p^2)-(b_2^2-c_2^2p^2)-(b_1-c_1p^2)a_6 \qquad (147)$$

นำสมการที่ (106) แทนในสมการที่ (105) จะได้

$$(-c_0p-c_0p^2)a_6=a_2(1-p^2)-2(b_1b_2-c_1c_2p^2)$$

$$-a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)-2(b_1b_2-c_1c_2p^2) \qquad (148)$$

ใช้สมการที่ (102) $b_2=c_2p^2+f_2(1-p^2)$ แทนสมการที่ (103), (145), (147) และ (148)

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (103) จะได้

$$b_1 = c_1 p^2 + \frac{a_4(1-p^2) + a_6 c_2 p^2 - a_6(c_2 p^2 + F_2(1-p^2))}{2}$$
$$b_1 = c_1 p^2 + \frac{a_4(1-p^2) + a_6 c_2 p^2 - a_6 c_2 p^2 - a_6 F_2(1-p^2)}{2}$$
$$b_1 = c_1 p^2 + \frac{(a_4 - a_6 F_2)}{2}(1-p^2)$$

กำหนดให้ $F_1 = \dfrac{(a_4 - a_6 F_2)}{2}$ จะได้

$$b_1 = c_1 p^2 + F_1(1-p^2) \tag{149}$$

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (145) จะได้

$$-2c_0 p b_2 - 2c_0 c_2 p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2 p^2)$$
$$-2c_0 p(c_2 p^2 + F_2 - F_2 p^2) - 2c_0 c_2 p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2 p^2)$$
$$-2c_0 p(c_2 p^2 + F_2(1-p^2)) - 2c_0 c_2 p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2 p^2)$$
$$-2c_0 c_2 p^3 - 2c_0 pF + 2c_0 F_2 p^3 - 2c_0 c_2 p^2 = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2 p^2)$$
$$-2c_0 c_2(p+1) - 2c_0 F_2 p(1-p^2) = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2 p^2)$$
$$-2c_0 c_2(p+1) = a_1(1-p^2) - (b_1^2 - c_1^2 p^2) + 2F_2 c_0 p(1-p^2) \tag{150}$$

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (147) จะได้

$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) - [(c_2^2 p^2 + F_2(1-p^2))^2 - c_2^2 p^2] - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) - [c_2^2 p^4 + 2c_2^2 p^2 F_2^2(1-p^2) + F_2^2(1-p^2) - c_2^2 p^2] - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) - c_2^2 p^4 - 2c_2^2 p^2 F_2^2(1-p^2) - F_2^2(1-p^2) + c_2^2 p^2 - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) + c_2^2 p^2(1-p^2) - 2c_2 p^2 F_2(1-p^2) - F_2^2(1-p^2)(1-p^2) - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) + c_2^2 p^2(1-p^2) - 2c_2 p^2 F_2(1-p^2) - F_2^2(1-p^2) + F_2^2 p^2(1-p^2) - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) + (c_2^2 p^2 - 2c_2 p^2 F_2 - F_2^2 + F_2^2 p^2)(1-p^2) - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) + [-F_2^2 + p^2(c_2^2 - 2c_2 F_2 + F_2^2)](1-p^2) - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = a_3(1-p^2) + [-F_2^2 + p^2(c_2^2 - F_2^2)](1-p^2) - a_6(b_1 - c_1 p^2)$$
$$-2c_0 p(1+p) = (1-p^2)[a_3 - F_2^2 + p^2(c_2 - F_2)^2] - a_6(b_1 - c_1 p^2) \tag{151}$$

นำสมการที่ (102) แทนในสมการที่ (148) จะได้

$$-a_6 c_0 p(1+p) = a_2(1-p^2) - 2b_1 b_2 + 2c_1 c_2 p^2$$
$$-a_6 c_0 p(1+p) = a_2(1-p^2) - 2b_1(c_2 p^2 + F_2(1-p^2)) + 2c_1 c_2 p^2$$
$$-a_6 c_0 p(1+p) = a_2(1-p^2) + 2c_1 c_2 p^2 - 2b_1(c_2 p^2 + F_2(1-p^2)) \tag{152}$$

ใช้สมการที่ (148) $b_1 = c_1 p^2 + F_1(1-p^2)$ แทนในสมการที่ (146), (150),(151) และ (152) เพื่อกำจัดค่า $\boldsymbol{b_1}$

นำสมการที่ (148) แทนในสมการที่ (146) จะได้

$$-2c_0 p(c_1 p^2 + F_1(1-p^2) + c_1 p) = a_0(1-p^2)$$
$$-2c_0 c_1 p^3 - 2c_0 pF_1(1-p^2) - 2c_0 c_1 p^2 = a_0(1-p^2)$$
$$-2c_0 c_1 p^2(p+1) - 2c_0 pF_1(1-p^2) = a_0(1-p^2)$$
$$-2c_0 c_1 p^2(p+1) = a_0(1-p^2) + 2c_0 pF_1(1-p^2)$$
$$-2c_0 c_1 p^2(p+1) = (1-p^2)(a_0 + 2F_1 c_0 p)$$

$$-2c_0c_1p^2(p+1)-(1-p^2)(a_0+2F_1c_0p)=0$$
$$-2c_0c_1p^2(p+1)-(1-p)(1+p)(a_0+2F_1c_0p)=0$$
$$(1+p)[-2c_0c_1p^2-(1-p)(a_0+2F_1c_0p)]=0 \qquad (153)$$

จากสมการที่ (153) นำตัวประกอบ $(1+p)$ ออกมาจากสมการ จาก $p^2 \neq 1$ ดังนั้น $(1+p)\neq 0$ ตัวประกอบที่เหลือในสมการที่ (142) จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$-2c_0c_1p^2-(1-p)(a_0+2F_1c_0p)=0 \qquad (154)$$

นำสมการที่ (149) แทนในสมการที่ (150) จะได้

$$-2c_0c_2(p+1)=a_1(1-p^2)-[(c_1p^2+F_1(1-p^2))^2-c_1^2p^2]+2F_2c_0p(1-p^2)$$
$$-2c_0c_2(p+1)=a_1(1-p^2)-[c_1^2p^4+2c_1p^2F_1+F_1^2(1-p^2)^2-c_1^2p^2]+2F_2c_0p(1-p^2)$$
$$-2c_0c_2(p+1)=a_1(1-p^2)-c_1^2p^4-2c_1p^2F_1(1-p^2)-F_1^2(1-p^2)^2+c_1^2p^2+2F_2c_0p(1-p^2)$$
$$-2c_0c_2(p+1)=a_1(1-p^2)-2c_1p^2F_1(1-p^2)+2F_2c_0p(1-p^2)+c_1^2p^2-c_1^2p^4-F_1^2(1-p^2)^2$$
$$-2c_0c_2(p+1)=(1-p^2)(a_1-2F_1c_1p^2+2F_2c_0p)+c_1^2p^2(1-p^2)-F_1^2(1-p^2)(1-p^2)$$
$$-2c_0c_2(p+1)=(1-p^2)(a_1-2F_1c_1p^2+2F_2c_0p+c_1^2p^2)+(-F_1^2+F_1^2p^2)(1-p^2)$$
$$-2c_0c_2(p+1)=(1-p^2)(a_1-F_1^2+2F_2c_0p+c_1^2p^2-2F_1c_1p^2+F_1^2p^2)$$

ให้ $F_4=a_1-F_1^2$ จะได้

$$-2c_0c_2(p+1)=(1-p)(1+p)(F_4+2F_2c_0p+c_1^2p^2-2F_1c_1p^2+F_1^2p^2)$$
$$2c_0c_2(1+p)=(1-p)(1+p)[F_4+2F_2c_0p+p^2(c_1^2-2F_1c_1+F_1^2)]$$
$$2c_0c_2(1+p)=(1-p)(1+p)[F_4+2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1)^2]$$
$$(1-p)(1+p)[F_4+2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1)^2]-2c_0c_2(1+p)=0$$
$$(1+p)[2c_0c_2p^2+(1-p)(F_4+2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1^2))]=0 \qquad (155)$$

เนื่องจาก $(1-p)\neq 0$ ดังนั้น ตัวประกอบที่เหลือในสมการที่ (155) จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$2c_0c_2p^2+(1-p)[F_4+2F_2c_0p+p^2(c_1-F_1)^2]=0 \qquad (156)$$

นำสมการที่ (149) แทนในสมการที่ (151) จะได้

$$-2c_0p(1+p)=(1-p^2)[a_3-F_2^2+p^2(c_2-F_2)^2]-a_6(c_1p^2+F_1(1-p^2)-c_1p^2)$$
$$-2c_0p(1+p)=(1-p^2)[a_3-F_2^2+p^2(c_2-F_2)^2]-a_6F_1(1-p^2)$$
$$-2c_0p(1+p)=(1-p^2)[a_3-F_2^2+p^2(c_2-F_2)^2-a_6F_1]$$

ให้ $F_0=a_3-F_2^2-a_6F_1$ จะได้

$$-2c_0p(1+p)=(1-p)(1+p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]$$
$$-2c_0p(1+p)-(1-p)(1+p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]=0$$
$$(1+p)[-2c_0p-(1-p)(F_0+p^2(c_2-F_2)^2)]=0 \qquad (157)$$

เนื่องจาก $(1+p)\neq 0$ ดังนั้น ตัวประกอบที่เหลือในสมการ จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$-2c_0p-(1-p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]=0$$
$$-2c_0p=(1-p)[F_0+p^2(c_2-F_2)^2]$$

จะได้
$$c_0=\frac{(1-p)}{-2p}[F_0+p^2(c_2-F_2)^2] \qquad (158)$$

นำสมการที่ (149) แทนในสมการที่ (152) จะได้

จาก $\quad -a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2b_1[c_2p^2+F_2(1-p^2)]$

$$-a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2b_1c_2p^2+2b_1F_2(1-p^2)$$
$$-a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2b_1c_2p^2+2b_1F_2-2b_1F_2p^2)$$
$$-a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2[c_1p^2+F_1(1-p^2)]c_2p^2-2[c_1p^2+F_1(1-p^2)]F_2$$
$$+2[c_1p^2+F_1(1-p^2)]F_2p^2$$
$$-a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2-2c_1c_2p^4-2F_1c_2p^2(1-p^2)-2F_2c_1p^2-2F_1F_2(1-p^2)$$
$$+2F_2c_1p^4+2F_1F_2p^2(1-p^2)$$
$$-a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)+2c_1c_2p^2(1-p^2)-2F_2c_1p^2(1-p^2)-2F_1c_2p^2(1-p^2)$$
$$-2F_1F_2(1-p^2)+2F_1F_2p^2(1-p^2)$$
$$-a_6c_0p(1+p)=a_2(1-p^2)+2(1-p^2)(c_1c_2p^2-F_2c_1p^2-F_1c_2p^2-F_1F_2+F_1F_2p^2)$$
$$-a_6c_0p(1+p)=(1-p^2)(a_2+2c_1c_2p^2-2F_2c_1p^2-2F_1c_2p^2-2F_1F_2+2F_1F_2p^2)$$
$$-a_6c_0p(1+p)=(1-p)(1+p)(a_2+2p^2(c_1c_2-F_2c_1-F_1c_2+F_1F_2)-2F_1F_2)$$
$$-a_6c_0p(1+p)-(1-p)(1+p)(a_2+2p^2(c_1c_2-F_2c_1-F_1c_2+F_1F_2)-2F_1F_2)=0$$
$$-a_6c_0p(1+p)-(1-p)(1+p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_2(c_1-F_1)-F_2(c_1-F_1))]=0$$
$$(1+p)\{-a_6c_0p-(1-p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]\}=0 \qquad (159)$$

เนื่องจาก $(1+p)\neq 0$ ดังนั้น ตัวประกอบที่เหลือในสมการที่ (159) จึงเท่ากับ 0 จะได้

$$-a_6c_0p-(1-p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]=0$$
$$-a_6c_0p=(1-p)[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$$

จะได้ $c_0=\dfrac{(1-p)}{-a_6p}[a_2-2F_1F_2+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$

ให้ $F_3=a_2-2F_1F_2$ จะได้

$$c_0=\frac{(1-p)}{-a_6p}[F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)] \qquad (160)$$

ใช้สมการที่ (158) แทนในสมการที่ (160),(156) และ (154) จะพิจารณาค่า c_0

นำ c_0 จากสมการที่ (158) แทนใน c_0 ของสมการที่ (160) จะได้

$$\frac{(1-p)}{-2p}[F_0+p^2(F_2-c_2)^2]=\frac{(1-p)}{-a_6p}[F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$$
$$\left(\frac{-a_6p}{(1-p)}\right)\left(\frac{(1-p)}{-2p}\right)[F_0+p^2(F_2-c_2)^2]=[F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)]$$
$$\frac{a_6}{2}F_0+\frac{a_6}{2}p^2(F_2-c_2)^2=F_3+2p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)$$

นำ 2 คูณทั้งสมการ จะได้

$$a_6F_0+a_6p^2(F_2-c_2)^2=2F_3+4p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)$$
$$a_6F_0+a_6p^2(F_2-c_2)^2-2F_3=4p^2(c_1-F_1)(c_2-F_2)$$
$$\frac{a_6F_0+a_6p^2(F_2-c_2)^2-2F_3}{4p(c_2-F_2)}=p(c_1-F_1)$$

ให้ $F_5 = a_6 F_0 - 2F_3$ จะได้

$$p(c_1 - F_1) = \frac{F_5 + a_6 p^2 (c_2 - F_2)^2}{4p(c_2 - F_2)} \qquad (161)$$

นำสมการที่ (158) แทนในสมการที่ (156) จะได้

$$2\left(\frac{(1+p)}{2p}[F_0 + p^2(c_2 - F_2)^2]\right)c_2 p^2 + (1+p)[F_4 - 2F_2 p\left(\frac{(1+p)}{2p}[F_0 + p^2(c_2 - F_2)^2]\right) + p^2(c_1 - F_1)^2]$$

$$= (1+p)c_2 p[F_0 + p^2(c_2 - F_2)^2] + (1+p)[F_4 - F_0F_2(1+p) - F_2 p^2(1+p)(c_2 - F_2)^2 + p^2(c_1 - F_1)^2]$$

$$= (1+p)[F_0 c_2 p + c_2 p^3 (c_2 - F_2)^2] + (1+p)[F_4 - F_0F_2(1+p) - F_2 p^2(1+p)(c_2 - F_2)^2 + p^2(c_1 - F_1)^2]$$

$$= F_0 c_2 p + c_2 p^3 (c_2 - F_2)^2 + F_4 - F_0F_2(1+p) - F_2 p^2 (c_2 - F_2)^2 - F_2 p^3 (c_2 - F_2)^2 + p^2(c_1 - F_1)^2$$

$$= F_0 c_2 p + c_2 p^3 (c_2 - F_2)^2 + F_4 - F_0F_2 - F_0 F p - F_2 p^2 (c_2 - F_2)^2 - F_2 p^3 (c_2 - F_2)^2 + p^2(c_1 - F_1)^2 = 0$$

$$p^2(c_1 - F_1)^2 = -F_0 c_2 p - c_2 p^3 (c_2 - F_2)^2 - F_4 + F_0F_2 + F_0F_2 p + F_2 p^2 (c_2 - F_2)^2 + F_2 p^3 (c_2 - F_2)^2$$

$$p^2(c_1 - F_1)^2 = -F_0 c_2 p + F_0F_2 p - c_2 p^3 (c_2 - F_2)^2 + F_2 p^2 (c_2 - F_2)^2 + F_2 p^3 (c_2 - F_2)^2 - F_4 + F_0F_2$$

$$p^2(c_1 - F_1)^2 = -F_0 c_2 p - p^3 (c_2 - F_2)^2 (c_2 - F_2) + F_2 p^2 (c_2 - F_2)^2 - F_4 + F_0F_2$$

$$p^2(c_1 - F_1)^2 = F_2 p^2 (c_2 - F_2)^2 - [p^3 (c_2 - F_2)^3 + F_0 p(c_2 - F_2) + F_4 - F_0F_2 = 0$$

กำหนดให้ $F_6 = F_4 - F_0F_2$ จะได้

$$p^2(c_1 - F_1)^2 = -F_2 p^2 (c_2 - F_2)^2 - [-p^3 (c_2 - F_2)^3 - F_0 p(c_2 - F_2) + F_6 = 0 \qquad (162)$$

นำสมการที่ (158) แทนในสมการที่ (154) จะได้

$$2c_1 p^2\left(\frac{(1+p)}{2p}[F_0 + p^2(c_2 - F_2)^2]\right) + (1+p)\left[a_0 - 2F_1 p\left(\frac{(1+p)}{2p}(F_0 + p^2(c_2 - F_2)^2)\right)\right]$$

$$= (1+p)\left[c_1 p F_0 + c_1 p^3 (c_2 - F_2)^2\right] + (1+p)\left[a_0 - F_0F_1(1+p) - F_1 p^2 (1+p)(c_2 - F_2)^2\right]$$

$$= (1+p)\left[c_1 p F_0 + c_1 p^3 (c_2 - F_2)^2 + a_0 - F_0F_1(1+p) - F_1 p^2 (1+p)(c_2 - F_2)^2\right]$$

$$= c_1 p F_0 + c_1 p^3 (c_2 - F_2)^2 + a_0 - F_0F_1(1+p) - F_1 p^2 (1+p)(c_2 - F_2)^2$$

$$= c_1 p F_0 + c_1 p^3 (c_2 - F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 - F_0F_1 p - F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 - F_1 p^3 (c_2 - F_2)^2$$

$$= c_1 p F_0 - F_0F_1 p - F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 + c_1 p^3 (c_2 - F_2)^2 - F_1 p^3 (c_2 - F_2)^2$$

$$= F_0 p(c_1 - F_1) - F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 + p^3 (c_2 - F_2)^2 (c_1 - F_1)$$

$$= F_0 p(c_1 - F_1) + p^3 (c_2 - F_2)^2 (c_1 - F_1) - F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 + a_0 - F_0F_1$$

$$= p(c_1 - F_1)[F_0 + p^2(c_2 - F_2)^2] - F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 + a_0 - F_0F_1 = 0$$

$$p(c_1 + F_1)[p^2(c_2 - F_2)^2 + F_0] = F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 + a_0 + F_0F_1$$

$$p(c_1 + F_1) = \frac{F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 + a_0 + F_0F_1}{[p^2(c_2 - F_2)^2 + F_0]}$$

กำหนดให้ $F_7 = a_0 - F_0F_1$ จะได้

$$p(c_1 + F_1) = \frac{F_1 p^2 (c_2 - F_2)^2 - F_7}{[p^2(c_2 - F_2)^2 + F_0]} \qquad (163)$$

ตอนนี้เราได้สมการ 3 สมการ คือสมการที่ (161),(162) และ (163) และ 3 ตัวแปรที่ไม่รู้ค่าคือ c_0, c_1 และ p เราจะใช้สมการที่ (150) $p(c_1-F_1)=\dfrac{F_5+a_6p^2(c_2-F_2)^2}{4p(c_2-F_2)}$ แทนในสมการที่ (162) และ (163)

จากสมการที่ (151) จะได้

$$p^2(c_1-F_1)^2=F_2p^2(c_2-F_2)^2-[p^3(c_2-F_2)^3+F_0p(c_2-F_2)+F_6]=0$$

$$\left[\frac{F_5+a_6p^2(c_2-F_2)^2}{4p(c_2-F_2)}\right]^2=F_2p^2(c_2-F_2)^2-[p^3(c_2-F_2)^3+F_0p(c_2-F_2)+F_6]=0$$

$$\frac{F_5^{\ 2}}{16p^2(c_2-F_2)^2}+\frac{2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2}{16p^2(c_2-F_2)^2}+\frac{a_6^{\ 2}p^4(c_2-F_2)^4}{16p^2(c_2-F_2)^2}=F_2p^2(c_2-F_2)^2-p^3(c_2-F_2)^3-F_0p(c_2-F_2)-F_6$$

$$F_5^{\ 2}+2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2+a_6^{\ 2}p^4(c_2-F_2)^4$$
$$=F_2p^2(c_2-F_2)^2 16p^2(c_2-F_2)^2-p^3(c_2-F_2)^3 16p^2(c_2-F_2)^2-F_0p(c_2-F_2)16p^2(c_2-F_2)^2$$
$$-F_6 16p^2(c_2-F_2)^2$$

$$F_5^{\ 2}+2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2+a_6^{\ 2}p^4(c_2-F_2)^4$$
$$=16F_2p^4(c_2-F_2)^4-16p^5(c_2-F_2)^5-16F_0p^3(c_2-F_2)^3-16F_6p^2(c_2-F_2)^2$$

$$F_5^{\ 2}+2F_5a_6p^2(c_2-F_2)^2+a_6^{\ 2}p^4(c_2-F_2)^4-16F_2p^4(c_2-F_2)^4$$
$$+16p^5(c_2-F_2)^5+16F_0p^3(c_2-F_2)^3+16F_6p^2(c_2-F_2)^2=0$$

$$16p^5(c_2-F_2)^5-16F_2p^4(c_2-F_2)^4+a_6^{\ 2}p^4(c_2-F_2)^4+16F_0p^3(c_2-F_2)^3$$
$$+16F_6p^2(c_2-F_2)^2+2F_5a_6(c_2-F_2)^2+F_5^{\ 2}=0$$

$$16p^5(c_2-F_2)^5-(16F_2-a_6^2)p^4(c_2-F_2)^4+16F_0p^3(c_2-F_2)^3$$
$$+(16F_6+2F_2a_6)p^2(c_2-F_2)^2+F_5^{\ 2}=0 \qquad (164)$$

จากสมการที่(153)จะเห็นว่ามีค่าเท่ากันกับสมการที่(115) ดังนั้น ทำนองเดียวกัน สุดท้ายแล้ว ในกรณีที่ $b_0=c_0p$ จะมีผลลัพธ์ออกมาเหมือนกันกับกรณีที่ $b_0=c_0p$

เงื่อนไขของค่าสัมประสิทธิ์

จากสมการที่ (129) เราจะหาค่าของ a_1 โดยที่ $F_6=F_4-F_0F_2$ แล้ว $F_4=a_1-F_1^2$ จะได้ว่า

$F_6=a_1-F_1^2-F_0F_2$

นำค่าใหม่ของ F_6 แทนในสมการที่ (129)

จากสมการที่ (118) จะได้

$$16g^5+(a_6^2-16F_2)g^4+16F_0g^3+[16(a_1-F_1^2-F_0F_2)+2a_6F_5]g^2+F_5^2=0$$

$$16g^5+a_6^2g^4-16F_2g^4+16F_0g^3+16a_1g^2-16F_1^2g^2-16F_0F_2g^2+2a_6F_5g^2+F_5^2=0$$

$$16a_1g^2=-16g^5-a_6^2g^4+16F_2g^4-16F_0g^3+16F_1^2g^2+16F_0F_2g^2-2a_6F_5g^2-F_5^2$$

$$a_1=\frac{-16g^5}{16g^2}-\frac{a_6^2g^4}{16g^2}+\frac{16F_2g^4}{16g^2}-\frac{16F_0g^3}{16g^2}+\frac{16F_1^2g^2}{16g^2}+\frac{16F_0F_2g^2}{16g^2}-\frac{2a_6F_5g^2}{16g^2}-\frac{F_5^2}{16g^2}$$

$$a_1=-g^3-\frac{a_6^2g^2}{16}+\frac{16F_2g^2}{16}-F_0g+F_1^2+F_0F_2-\frac{a_6F_5}{8}-\frac{F_5^2}{16g^2}$$

$$a_1 = F_1^2 + F_0F_2 - \frac{a_6F_5}{8} - F_0g + \frac{(16F_2 - a_6^2)}{16}g^2 - g^3 - \frac{F_5^2}{16g^2} \quad (165)$$

จากนิพจน์ a_1 ข้างต้นเป็นเงื่อนไขสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนามกำลังเจ็ดถ้าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของสมการพหุนามกำลังเจ็ด เป็นจริงตามเงื่อนไขที่ (165) แล้วเราสามารถใช้เทคนิคนี้ ในการหาค่ารากทั้งหมดของสมการได้

ตัวอย่าง 3.4 จงหาค่ารากทั้งหมดของสมการพหุนามกำลังเจ็ดต่อไปนี้

$$x^7 + 4x^6 + 6x^5 + 2x^4 - 4x^3 - x^2 + a_1x + 2 = 0$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

$a_0 = 2$ $a_2 = -1$ $a_3 = -4$ $a_4 = 2$ $a_5 = 6$ $a_6 = 4$ และ $a_7 = 1$

1) หาค่าของ

$$F_0 = a_3 - F_2^2 - a_6F_1 = -4 - 1^2 - 4(-1) = -1$$

$$F_1 = \frac{(a_4 - a_6F_2)}{2} = \frac{2-4(1)}{2} = -1$$

$$F_2 = \frac{a_5}{2} - \frac{a_6}{8} = \frac{6}{2} - \frac{4^2}{8} = 1$$

$$F_3 = a_2 - 2F_1F_2 = -1 - 2(-1)(1) = 1$$

$$F_5 = a_6F_0 - 2F_3 = 4(-1) - 2(1) = -6$$

$$F_7 = a_0 - F_0F_1 = 2 + 1(-1) = 1$$

2) นำค่าที่ได้ทั้งหมดมาแทนในสมการ

$$a_6g^4 - 4F_1g^3 + (F_5 + a_6F_0)g^2 + 4F_7g + F_0F_5 = 0$$

จะได้

$$4g^4 - 4g^3 + (-6-4)g^2 + 4g + 6 = 0$$

$$4g^4 - 4g^3 - 10g^2 + 4g + 6 = 0$$

นำ 4 หารตลอดทั้งสมการ จะได้

$$g^4 + g^3 - 2.5g^2 + g + 1.5 = 0$$

3) หาค่า g จากสมการพหุนามกำลังสี่

$$g^4 + g^3 - 2.5g^2 + g + 1.5 = 0$$

$$a_0 = 1.5, a_1 = 1, a_2 = 2.5, a_3 = 1$$

3.1 จงหาค่า p จากสมการ

$$p_1^3 - a_2p_1^2 + (a_1a_3 - 4a_0)p_1 + 4a_0F_1 - a_1^2 = 0$$

จะได้

$$p_1^3 - (-2.5)p_1^2 + ((1)(1) - 4(1.5))p_1 + 4(1.5)F_1 - 1^2 = 0$$

$$p_1^3 + 2.5p_1^2 - 5p_1 + 6F_1 - 1 = 0$$

หา F_1 จาก

$$F_1 = a_2 - \frac{a_3^2}{4}$$

$$F_1 = 2.5 - \frac{1}{4}$$

$F_1 = -2.75$ นำไปแทนใน $p_1^3 + 2.5p_1^2 - 5p_1 + 6F_1 - 1 = 0$ จะได้

$$p_1^3 + 2.5p_1^2 - 5p_1 + 6(-2.75) - 1 = 0$$

$p_1^3 + 2.5p_1^2 - 5p_1 - 16.5 - 1 = 0$

$p_1^3 + 2.5p_1^2 - 5p_1 - 17.5 = 0$

$p_1 = 2.45149$

3.2 หาค่าของ

$$p = p_1 - F_1 = 2.45149 - (-2.75) = 5.2015$$

$$b_1 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$c_0 = \frac{\left[\frac{a_3 p}{2} + \frac{a_2 a_3}{2} - \frac{a_3^3}{8} - a_1\right]}{2p} = \frac{\left[\frac{(1)(5.2015)}{2} + \frac{(-2.5)(1)}{2} - \frac{1}{8} - 1\right]}{2(5.2015)} = 0.0217$$

3.3 นำค่าทั้งหมดแทนในสมการ

$$x_1 = \frac{\left\{-(b_1 - p^{1/2}) + \left[(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_1 - p^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\left\{-(0.5 - (5.2015)^{1/2}) + \left[(0.5 - (5.2015)^{1/2})^2 - 4(1.2258 - (5.2015)^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$$x_1 = 0.890339 + 0.619315i$$

$$x_2 = \frac{\left\{-(b_1 - p^{1/2}) - \left[(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_1 - p^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\left\{-(0.5 - (5.2015)^{1/2}) - \left[(0.5 - (5.2015)^{1/2})^2 - 4(1.2258 - (5.2015)^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$$x_2 = 0.890339 - 0.619315i$$

$$x_3 = \frac{\left\{-(b_1 + p^{1/2}) + \left[(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_1 + p^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$$x_3 = \frac{\left\{-(0.5 + (5.2015)^{1/2}) + \left[(0.5 + (5.2015)^{1/2})^2 - 4(1.2258 + (5.2015)^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$$x_3 = -0.579286$$

$$x_4 = \frac{\left\{-(b_1 + p^{1/2}) - \left[(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_1 + p^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$$x_4 = \frac{\left\{-(0.5 + (5.2015)^{1/2}) - \left[(0.5 + (5.2015)^{1/2})^2 - 4(1.2258 + (5.2015)^{1/2})\right]^{1/2}\right\}}{2}$$

$x_4 = -2.20139$

จะได้ค่า g 4 ค่า คือ

$0.890339 + 0.619315i, 0.890339 - 0.619315i, -0.579286, -2.20139$ แต่เราจะใช้ค่าที่ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อนนั่นคือ g = -2.201391 -0.579286

4) เลือกค่า 2 จากข้อ 3) มา 1 ค่า ในตัวอย่างนี้เราจะเลือก g = -0.579286

5) หาค่า a_1 จาก $a_1 = F_1^2 + F_0F_2 - \frac{a_6F_5}{8} - F_0g + \frac{(16F_2 - a_6^2)}{16}g^2 - g^3 - \frac{F_5^2}{16g^2}$

จะได้

$$a_1 = (-1)^2 + (-1)(1) - \frac{4(-6)}{8} - (-1)(-0.579286) + \frac{(16(1) - 4^2)}{16}(-0.579286)^2 - (-0.579286)^3 - \frac{(-6)^2}{16(-0.579286)}$$

$a_1 = -4.089859$

6) นำค่า a_1 ที่ได้ไปแทนในโจทย์ จะได้ว่า

$x^7 + 4x^6 + 6x^5 + 2x^4 - 4x^3 - x^2 - 4.089859x + 2 = 0$

7) หาค่าของ

$F_8 = F_0 + g^2 = (-1) + (-0.579286)^2 = -0.6644278$

$F_9 = \frac{F_1g^2 - F_7}{F_8} + F_1 = (-1)(-0.579286)^2 - 1 = 2.010109$

8) นำค่าที่ได้ทั้งหมดมาแทนในสมการ

$$\left[x^3 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^2 + (F_2 - g)x + (F_1 - F_9)\right]\left[x^4 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^3 + (F_2 + g)x^2 + (F_1 + F_9)x + F_8\right] = 0$$

จะได้

$$\left[x^3 + \left(\frac{4}{2}\right)x^2 + (1 - (-0.579286))x + (-1) - 2.010109\right]$$

$$\left[x^4 + \left(\frac{4}{2}\right)x^3 + (1 + (-0.579286))x^2 + ((-1) + 2.010109)x - 0.6644.278\right] = 0$$

$$(x^3 + 2x^2 + 1.579286x - 3.010109)(x^4 + 2x^3 + 0.420714x^2 + 1.010109x - 0.6644.278) = 0$$

จะได้ว่า

$x^3 + 2x^2 + 1.579286x - 3.010109 = 0$

$x^4 + 2x^3 + 0.420714x^2 + 1.010109x + 0.6644278 = 0$

เราสามารถหาค่ารากทั้งเจ็ดราก ได้จากสมการพหุนามกำลังสามและสี่ทั้งสองสมการข้างต้น ค่ารากที่ได้คือ $-1.3966, -0.3017 \pm 0.80346i, 0.1329187, -2.051865, -0.040527 \pm 0.7323i$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$

3.1.5 สรุปสูตรของวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน

สมการพหุนามดีกรีสอง $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

$$x_1 = \frac{-a_1 - \left(a_1^{\ 2} - 4a_0\right)^{1/2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-a_1 + \left(a_1^{\ 2} - 4a_0\right)^{1/2}}{2}$$

สมการพหุนามดีกรีสาม $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

$$x_1 = \frac{pc_0 - b_0}{1 - p}$$

$$x_2 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2 c_0 + pf_1\right)}{2 + 2p + 2p^2} + \frac{\left[\left(2b_0 + 2p^2 c_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1 + p + p^2\right)\left(b_0^2 + p^2 c_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2 + 2p + 2p^2}$$

$$x_3 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2 c_0 + pf_1\right)}{2 + 2p + 2p^2} - \frac{\left[\left(2b_0 + 2p^2 c_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1 + p + p^2\right)\left(b_0^2 + p^2 c_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2 + 2p + 2p^2}$$

$$f_1 = \frac{a_1 a_2 - 9a_0}{a_2^2 - 3a_1}, \ f_2 = \frac{a_1^2 - 3a_0 a_2}{a_2^2 - 3a_1}$$

$$b_0 = \frac{f_1 + \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}{2}$$

$$c_0 = \frac{f_1 - \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}{2}$$

$$p = \left[\frac{2a_2 - 3f_1 - 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}{2a_2 - 3f_1 + 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

สมการพหุนามดีกรีสี่ $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$x_1 = \frac{-b_1 + \left[b_1^2 - 4(b_0 - c_0p)(1-p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

$$x_2 = \frac{-b_1 - \left[b_1^2 - 4(b_0 - c_0p)(1-p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

$$x_3 = \frac{-b_1 + \left[b_1^2 - 4(b_0 + c_0p)(1+p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

$$x_4 = \frac{-b_1 - \left[b_1^2 - 4(b_0 + c_0p)(1+p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

$$b_0 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$b_1^3 - \frac{4a_2}{a_3}b_1^2 + \frac{4\left(a_1a_3 + a_2^2 - 4a_0\right)}{a_3^2}b_1 + \frac{8\left(a_0a_3^2 + a_1^2 - a_1a_2a_3\right)}{a_3^3} = 0$$

ได้ b_1

$$p^2 = \frac{a_3 - 2b_1}{a_3}$$

$$c_0 = \frac{2\left(2a_0a_3b_1 - a_1^2\right)}{a_3\left(2a_2b_1 - 2a_1 - a_3b_1^3\right)}$$

สมการพหุนามดีกรีเจ็ด $x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

1) หาค่าของ

$F_0 = a_3 - F_2^2 - a_6F_1$ $\qquad$ $F_1 = \dfrac{(a_4 - a_6F_2)}{2}$

$F_2 = \dfrac{a_5}{2} - \dfrac{a_6}{8}$ $\qquad$ $F_3 = a_2 - 2F_1F_2$

$F_5 = a_6F_0 - 2F_3$ $\qquad$ $F_7 = a_0 - F_0F_1$

2) นำค่าที่ได้ทั้งหมดมาแทนในสมการ

$$a_6g^4 - 4F_1g^3 + (F_5 + a_6F_0)g^2 + 4F_7g + F_0F_5 = 0$$

3) หาค่า g จากสมการพหุนามกำลังสี่

4) เลือกค่า g จากข้อ 3) มา 1 ค่า

5) หาค่า a_1 จาก

$$a_1 = F_1^2 + F_0F_2 - \frac{a_6F_5}{8} - F_0g + \frac{(16F_2 - a_6^2)}{16}g^2 - g^3 - \frac{F_5^2}{16g^2}$$

6) นำค่า a_1 ที่ได้ไปแทนในโจทย์

7) หาค่าของ

$F_8 = F_0 + g^2$ $\qquad$ $F_9 = \dfrac{F_1g^2 - F_7}{F_8} + F_1$

8) นำค่าที่ได้ทั้งหมดมาแทนในสมการ

$$\left[x^3 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^2 + (F_2 - g)x + (F_1 - F_9)\right]\left[x^4 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^3 + (F_2 + g)x^2 + (F_1 + F_9)x + F_8\right] = 0$$

จะได้ว่า

$$x^3 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^2 + (F_2 - g)x + (F_1 - F_9) = 0$$

$$x^4 + \left(\frac{a_6}{2}\right)x^3 + (F_2 + g)x^2 + (F_1 + F_9)x + F_8 = 0$$

ดังนั้น เราสามารถหาค่ารากทั้งเจ็ดราก ได้จากสมการพหุนามกำลังสามและสี่ทั้งสองสมการข้างต้น

3.2 การค้นหาค่ารากซ้ำของสมการพหุนาม (discovery of multiple roots)

การค้นหาค่ารากซ้ำของสมการพหุนาม สามารถดำเนินดำเนินการค้นหาได้โดยการดำเนินการทางพีชคณิต ดังนั้น

(1) กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_k$ เป็นค่ารากซ้ำที่ $m_1,m_2,m_3,\ldots,m_k$ ของ $f(x)=0$ ตามลำดับ โดยที่ $m_1>1$ เมื่อ $i=1,2,3,\ldots,k$ และ $m_1+m_1+m_3+\ldots+m_k=n$

จากทฤษฎีบทที่ 2.7 เราทราบว่าค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ จะเป็นค่ารากซ้ำ ที่ $m-1$ ของ $f^{/}(x)=0$ ด้วย (เมื่อ $m>1$) ซึ่งจะเห็นชัดแจ้งว่า

$(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$ หาร $f(x)$ และ $f^{/}(x)$ ลงตัว ซึ่งถ้าให้ $D(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f^{/}(x)$ แล้ว จะได้ว่า

$D(x)=(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$ ทั้งนี้เพราะว่า ถ้า $D(x)=(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}g(x)$ โดยที่ $g(x)$ ไม่เป็นค่าคงที่ และ $g(x)$ เป็นพหุนาม จะได้ว่าจะมี $(x-m)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $g(x)$ และ m ก็จะเป็นค่ารากหนึ่งของ $f(x)=0$ สมมุติว่า $m=c_i$ จะได้ว่า $(x-c_1)^{m_1}$ หาร $f^{/}(x)$ ลงตัว ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า c_1 เป็นค่ารากซ้ำที่ m_1-1 ของ $f^{/}(x)=0$

ดังนั้น $(x-c_1)^{m_1}$ หาร $f^{/}(x)$ ไม่ลงตัว ในทำนองเดียวกัน ถ้า $m=c_1$ เมื่อ $i=2,3,4,\ldots,k$ ก็จะได้ว่า $(x-c_i)^{m_i}$ หาร $f^{/}(x)$ มาลงตัว

นั้นคือ ตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f^{/}(x)$ คือ

$$D(x)=(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$$

(2) กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x)=0$ มีทั้งค่ารากเชิงเดียว ค่ารากซ้ำที่ k เมื่อ $k=2,3,4,\ldots,m$ ปนกันอยู่ เราสามารถใช้หลักการเช่นเดียวกันกับข้อ (1) พิจารณาค้นหาค่ารากซ้ำได้ดังนี้

สมมุติให้ X_1 เป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$

X_k เป็นผลคูณของตัวประกอบที่สอดคล้องกับค่ารากซ้ำที่ k ของ $f(x)=0$ เมื่อ $k=2,3,4,\ldots,m$ และ X_c เป็นค่าคงที่ เมื่อ $f(x)=0$ ไม่มีค่ารากซ้ำ

จะได้ว่า $X_1X_2^2X_3^3\ldots X_m^m$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ และจะแตกต่างกับ $f^{/}(x)$ เฉพาะตัวค่าคงที่ปรากฏอยู่ในเทอม x^n เท่านั้น จะได้ว่า

(ก) $D = X_2X_3^2X_4^3\ldots X_m^{m-1}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f'(x)$

(ข) $D_1 = X_3X_4^2X_5^3\ldots X_m^{m-2}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ D กับ D'

(ค) $D_2 = X_4X_5^2X_6^3\ldots X_m^{m-3}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ D_1 กับ D_1'

โดยการพิจารณาเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ เมื่อจัดลำดับของตัวหารร่วมมากดังกล่าวจะได้ดังนี้ $D, D_1, D_2, \mathrm{D}_3, \ldots, D_{m-1}$ ซึ่ง D_{m-1} จะเป็นค่าคงที่ ดังนั้นจะได้ว่า

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{D} = X_1X_2X_3\ldots X_m$$
$$f_2(x) = \frac{D}{D_1} = X_2X_3X_4\ldots X_m$$
$$f_3(x) = \frac{D_1}{D_2} = X_3X_4X_5\ldots X_m$$
$$\vdots$$
$$f_m(x) = \frac{D_{m-2}}{D_{m-1}} = X_m$$

จะเห็นว่า $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = X_1, \dfrac{f_2(x)}{f_3(x)} = X_2, \dfrac{f_3(x)}{f_4(x)} = X_3, \ldots, \dfrac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)} = X_{m-1}$ และ $f_m(x) = X_m$

จากการหา $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ พิจารณาการแก้สมการ $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, \ldots, X_m = 0$ **จะได้คำตอบเป็นค่ารากเชิงเดียวของสมการดังกล่าวและค่ารากของสมการดังกล่าวที่ได้ จะเป็น ค่ารากเชิงเดียว ค่ารากซ้ำที่ 2 ค่ารากซ้ำที่ 3 ค่ารากซ้ำที่ 4 ต่อไปเรื่อยๆถึงค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x) = 0$ ตามลำดับ และถ้าหากว่า X_k เป็นค่าคงที่ แสดงว่า ค่ารากซ้ำที่ k ของ $f(x) = 0$ ไม่มี**

จากหลักการดังกล่าวมาแล้วนี้ นำไปใช้ในการค้นหาค่ารากซ้ำของสมการ $f(x) = 0$ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5 จงพิจารณาหาค่ารากซ้ำของสมการ $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

จะได้ว่า $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$

หาตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f'(x)$ ดังนี้

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	x^4	x^3	x^2	x	x^0	
	1	−1	−2	2	1	−1	5	−4	−6	4	1	
คูณด้วย 5	5	−5	−10	10	5	−5	x	x^0				
	5	−4	−6	4	1		1	−1				
		1	−4	6	4	−5						
คูณด้วย 5		5	−20	30	20	−25						
		−5	4	6	−4	−1						
			−24	24	24	−24						
หารด้วย -24			1	−1	−1	1						สัมประสิทธิ์ของเศษเหลือ

x^4	x^3	x^2	x	x^0	x^3	x^2	x	x^0
5	−4	−6	4	1	1	−1	−1	1
5	−5	−5	5		x	x^0		
	1	−1	−1	1	5	1		
	1	−1	−1	1				
			0					

ตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f^{/}(x)$ คือ $D(x)=x^3-x^2-x+1$

จะได้ $D^{/}(x)=3x^2-2x-1$

พิจารณาหาตัวหารร่วมมากของ $D(x)$ และ $D^{/}(x)$ ดังนี้

	x^3	x^2	x	x^0	x^2	x	x^0	
	1	−1	−1	1	3	−2	−1	
คูณด้วย 3	3	−3	−3	3	x	x^0		
	3	−2	−1		1	−1		
		−1	−2	3				
คูณด้วย 3		−3	−6	9				
		−3	2	1				
			−8	8				
หารด้วย 8			−1	1				สัมประสิทธิ์ของเศษเหลือ

x^2	x	x^0	x	x^0
3	-2	-1	-1	1
3	-3		x	x^0
	1	-1	-3	-1
	1	-1		
		0		

ดังนั้นตัวหารร่วมมากของ $D(x)$ กับ $D'(x)$ คือ $D_1(x)=x-1$

และตัวหารร่วมมากของ $D_1(x)$ กับ $D_1'(x)$ คือ $D_2(x)=1$

ซึ่งจะได้ว่าสมการ $f(x)=0$ จะมีค่ารากซ้ำไม่เกินค่ารากซ้ำที่ 3 พิจารณาหาค่า X_1, X_2 และ X_3 โดยการพิจารณาจากสมการต่อไปนี้

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{D(x)}=x^2-1 \qquad f_2(x)=\frac{D(x)}{D_1(x)}=x^2-1$$

$$f_3(x)=\frac{D_1(x)}{D_2(x)}=x-1$$

จะได้ว่า $X_1=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=1, X_2=\dfrac{f_2(x)}{f_3(x)}=x+1, X_3=x-1$

นั่นคือ $f(x)=(x+1)^2(x-1)^3=0$

สมการ $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$ ไม่มีค่ารากเชิงเดียวและมี -1 เป็นค่ารากซ้ำที่ 2 และ 1 เป็นค่ารากซ้ำที่ 3

3.3 การหารากของสมการพหุนามดีกรี 6 (Solving Sextic Equation)

ในปีคศ.2008 R.G. Kulkarni ได้พบการหารากของสมการพหุนามดีกรี 6 ดังต่อไปนี้

ให้รูปแบบทั่วไปของสมการพหุนามดีกรี 6 มีรูปแบบดังนี้

$$x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad (166)$$

เมื่อ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 และ a_5 คือ สัมประสิทธิ์จำนวนจริง พิจารณาสมการพหุนามดีกรี 6 อื่นอีก ซึ่งคือสมการดังนี้

$$\left(x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\right)^2-\left(c_2x^2+c_1x+c_0\right)^2=0 \qquad (167)$$

เมื่อ b_0, b_1, b_2, c_0, c_1 และ c_2 คือค่าคงที่ไม่ทราบค่าในสมการพหุนามดีกรี 3 และ ดีกรี 2 ตามลำดับ โดยที่สมการที่ (166) และ (167) สามารถแยกตัวประกอบออกมาได้

ในสมการที่ (167) สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย 2 ตัวประกอบ ดังต่อไปนี้

$$\left[x^3+\left(b_2-c_2\right)x^2+\left(b_1-c_1\right)x+b_0-c_0\right]\left[x^3+\left(b_2+c_2\right)x^2+\left(b_1+c_1\right)x+b_0+c_0\right]=0 \quad (168)$$

ดังนั้นจะสามารถแยกตัวตัวแบ่งออกเป็น 2 ตัวประกอบได้คือ

$$x^3+\left(b_2-c_2\right)x^2+\left(b_1-c_1\right)x+b_0-c_0=0$$

$$x^3+\left(b_2+c_2\right)x^2+\left(b_1+c_1\right)x+b_0+c_0=0 \quad (169)$$

จะเห็นว่า 6 รากของสมการ (166) สามารถหาได้จากสมการ (169) ดังนั้นในการแปลงสมการ (166) ให้อยู่ในรูปแบบสมการ (167) สัมประสิทธิ์ในสมการพหุนาม (166) ต้องเท่ากับสมการพหุนาม (167)

ดังนั้น สมการพหุนามดีกรี 6 ในสมการ (167) นำมากระจายและจัดรูป เพื่อเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการพหุนาม (166) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}&x^6+2b_2x^5+\left(b_2^2+2b_1-c_2^2\right)x^4+2\left(b_0+b_1b_2-c_1c_2\right)x^3\\&+\left[b_1^2+2b_0b_2-\left(c_1^2+2c_0c_2\right)\right]x^2+2\left(b_0b_1-c_0c_1\right)x+b_0^2-c_0^2=0\end{aligned} \quad (170)$$

นำสมการ (170) เทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ (166) จะได้ทั้งหมด 6 สมการดังนี้

$$2b_2=a_5 \quad (171)$$

$$b_2^2+2b_1-c_2^2=a_4 \quad (172)$$

$$2\left(b_0+b_1b_2-c_1c_2\right)=a_3 \quad (173)$$

$$b_1^2+2b_0b_2-\left(c_1^2+2c_0c_2\right)=a_2 \quad (174)$$

$$2\left(b_0b_1-c_0c_1\right)=a_1 \quad (175)$$

$$b_0^2-c_0^2=a_0 \quad (176)$$

ใช้ สมการ (171) ถึงสมการ (176) ในการหาค่าคงที่ 6 ค่า(b_0, b_1, b_2, c_0, c_1 และ c_2) โดยเพื่อที่จะช่วยหาค่าคงที่ดังกล่าว โดยการให้

$$c_0=0 \quad (177)$$

จากสมการ (171) จะได้ค่า b_2 คือ

$$b_2 = a_5 / 2 \tag{178}$$

ให้นำสมการ (177) และ (178) แทนลงใน (172) จะหาค่า b_1 ก็คือ

$$b_1 = \left(a_4 / 2\right) - \left(a_5^2 / 8\right) \tag{179}$$

ให้นำสมการ (177) (178) และ (179) นั้นคือค่า c_2, b_2, b_1 แทนลงในสมการ (8) จะได้ค่า b_0 คือ

$$b_0 = \left(a_3 / 2\right) + \left(a_5^3 / 16\right) - \left(a_4 a_5 / 4\right) \tag{180}$$

ให้นำสมการ (177),(178),(179),(180) นั้นคือค่า c_2, b_2, b_1, b_0 ตามลำดับแทนลงไปในสมการ (174) จะได้

$$c_1^2 = \left[\left(5a_5^4 / 64\right) - \left(3a_4 a_5^2 / 8\right) + \left(a_4^2 / 4\right) + \left(a_3 a_5 / 2\right) - a_2\right] \tag{181}$$

จากสมการ (181) เราจะได้ค่า c_1 ทั้งหมด 2 ค่า โดยที่กำหนดให้เป็น c_{11} และ c_{12} จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_6 \\ c_{12} &= -a_6 \end{aligned} \tag{182}$$

เมื่อ a_6 กำหนดให้

$$a_6 = \sqrt{\left(5a_5^4 / 64\right) - \left(3a_4 a_5^2 / 8\right) + \left(a_4^2 / 4\right) + \left(a_3 a_5 / 2\right) - a_2} \tag{183}$$

พิจารณาสมการ (175) แทนค่า c_2, b_2, b_1, b_0 และ c_1 ในสมการ (177) (178) (179) (180) และ (172) ตามลำดับ ในสมการที่ (175) จะทราบค่า c_0 เนื่องจาก c_1 มี 2 ค่านั้นก็คือ c_{11}, c_{12} ดังนั้น c_0 จะมี 2 ค่าเช่นกัน โดยกำหนดให้เป็น c_{11}, c_{12} จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c_{01} &= a_7 / a_6 \\ c_{02} &= -a_7 / a_6 \end{aligned} \tag{184}$$

เมื่อ a_7 กำหนดโดย

$$a_7 = \left(a_3 a_4 / 4\right) + \left(a_4 a_5^3 / 16\right) - \left(a_4^2 a_5 / 8\right) - \left(a_3 a_2^5 / 16\right) - \left(a_5^5 / 128\right) - \left(a_1 / 2\right) \tag{185}$$

เราทราบค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดแล้ว ดังนั้นให้นำค่าทั้งหมดไปแทนลงในสมการที่ (169) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^3 + b_2 x^2 + \left(b_1 - a_6\right)x + b_0 - \left(a_7 / a_6\right) &= 0 \\ x^3 + b_2 x^2 + \left(b_1 + a_6\right)x + b_0 + \left(a_7 / a_6\right) &= 0 \end{aligned} \tag{186}$$

จาก c_0 และ c_1 มีค่า 2 ค่า เมื่อ c_0 ขึ้นอยู่กับ c_1 จึงเกิดแค่ 2 กรณี จะได้มาซึ่งสมการที่ (186) เช่นกัน

ดังนั้น จะสามารถทราบค่ารากทั้ง 6 รากของสมการที่ (186)

<u>เงื่อนไขสัมประสิทธิ์</u> พิจาณาสมการ (176) และแทนค่า b_0, c_0 ลงในสมการที่ (176) โดยใช้ (180) และ (184) ตามลำดับจะได้ว่า

$$a_0 = \left[(a_3/2) + \left(a_5^3/16\right) - \left(a_4 a_5/4\right)^2 - \left(a_7/a_6\right)^2 \right] \tag{187}$$

ตัวอย่าง 3.6 $x^6 - 8x^5 + 32x^4 - 78x^3 + 121x^2 - 110x + 50 = 0$

วิธีทำ อันดับแรก ตรวจสอบเงื่อนไขในสมการ (187) ซึ่งจะได้ว่า $a_0 = 50$ ดังนั้นให้นำค่าดังกล่าวไปแทนลงในสมการที่ (179),(180),(181),(182) และ (184) ก็คือค่า $b_2\, b_1\, b_0\, c_1\, c_0$ ตามลำดับ จะได้ $b_2 = -4$,$b_1 = 8$,$b_0 = -7$,$c_1 = \mathrm{i}$ และ $c_0 = i$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ นำไปแทนลงในสมการที่ (186) จะได้

$$x^3 + 4x^2 + (8+i)x - 7 + i = 0$$
$$x^3 + 4x^2 + (8-i)x - 7 - i = 0$$

จากข้างต้นให้หาค่ารากสมการของสมการพหุนามดีกรี 3 ตามปกติ จะได้ค่ารากของสมการทั้งหมดคือ $1+i$,$2+i$,$1-2i$,$1-i$,$2-i$ และ $1+2i$ เป็นค่ารากของสมการดีกรี 6

บทที่ 4

รูปแบบของค่ารากของสมการพหุนามดีกรีน้อยกว่า 8

4.1) ค่ารากของสมการพหุนามดีกรี 2 โดยวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน

จากการศึกษาบทความพบว่า มีอีกหนึ่งวิธีที่ได้มาซึ่งค่ารากของสมการพหุนาม นอกเหนือจากที่บทความดังกล่าวได้นำเสนอ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ให้สมการรูปแบบทั่วไปของสมการพหุนามดีกรีสองที่มีสัมประสิทธิเป็นจำนวนจริง คือ $x^2+a_1x+a_0=0$ แล้วรากของสมการพหุนามดีกรี 2 คือ

$$x_1=\frac{-a_1+\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{และ} \quad x_2=\frac{-a_1-\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

พิสูจน์ จากวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกันนั้น ค่า M สามารถหาได้โดย

$$2M+1=N+1$$

โดยที่ N คือจำนวนดีกรีที่สูงที่สุดของสมการพหุนาม ดังนั้น $N=2$ และจะได้

$$M=1$$

จะสามารถหาค่า K ได้จาก $MK=N$ โดยที่ $M<N$ จะได้

$$K=2$$

โดยรูปแบบของสมการพหุนามดีกรี 2 โดยวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกันคือ

$$\frac{\left[v_1(x)\right]^2-p^2\left[w_1(x)\right]^2}{1-p^2}=0 \qquad (188)$$

$$v_1(x)=x+b_0$$

$$w_1(x)=x+c_0 \qquad (189)$$

จากสมการ (188) นำมากระจายและจัดรูปจะได้ว่า

$$\frac{x^2+2xb_0+b_0^2-p^2\left(x^2+2xc_0+c_0^2\right)}{1-p^2}=0$$

$$\frac{\left(1-p^2\right)x^2}{1-p^2}+\frac{2\left(b_0-p^2c_0\right)x}{1-p^2}+\frac{\left(b_0^2-p^2c_0^2\right)}{1-p^2}=0$$

$$x^2+\frac{2\left(b_0-c_0p^2\right)x}{1-p^2}+\frac{b_0^2-c_0^2p^2}{1-p^2}=0 \tag{190}$$

$$\frac{2\left(b_0-c_0p^2\right)}{1-p^2}=a_1$$

$$\frac{b_0^2-c_0^2p^2}{1-p^2}=a_0$$

เลือก $b_0=0$ จะได้คงคงที่ a_0 และ a_1 คือ

$$\frac{-2c_0p^2}{1-p^2}=a_1 \tag{191}$$

$$\frac{-c_0^2p^2}{1-p^2}=a_0 \tag{192}$$

โดยที่ $a_1\neq 0$

นำสมการ (192) มาหารด้วยสมการ (191) จะได้ค่าคงที่ c_0 คือ

$$\left(\frac{-c_0^2p^2}{1-p^2}\right)\left(\frac{1-p^2}{-2c_0p^2}\right)=\frac{a_0}{a_1}$$

$$\frac{c_0}{2}=\frac{a_0}{a_1}$$

$$c_0=\frac{2a_0}{a_1}$$

แทน c_0 ในสมการ (191) จะได้

$$-2\left(\frac{2a_0}{a_1}\right)p^2=a_1-a_1p^2$$

$$p^2=\frac{a_1^2}{a_1^2-4a_0}$$

$$p=\pm\frac{a_1}{\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ในกรณี $a_1\neq 0$ หรือ $a_0\neq 0$ โดยที่ $a_1^2-4a_0\neq 0$ เมื่อ $a_1\neq\pm 2\sqrt{a_0}$

แทนค่าคงที่ b_0 และ p ลงในสมการ (188) จะได้

$$\frac{x+p\left(x+c_0\right)}{1+p}\cdot\frac{x-p\left(x+c_0\right)}{1-p}=0$$

$$x=\pm\frac{pc_0}{1+p}$$

ในกรณี $x=\dfrac{-pc_0}{1+p}$

เนื่องจาก $p=\dfrac{a_1}{\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}$ ดังนั้น

$$x=\frac{-\left(\dfrac{a_1}{\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\dfrac{2a_0}{a_1}\right)}{1+\left(\dfrac{a_1}{\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

$$=\frac{-2a_0}{\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}-a_1}{\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}-a_1}\right]$$

$$=\frac{-2a_0\left[\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}-a_1\right]}{a_1^2-4a_0-a_1^2}$$

$$=\frac{-a_1+\left(a_1^2-4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \qquad (193)$$

ในกรณี $x = \dfrac{pc_0}{1-p}$

เนื่องจาก $p = \dfrac{a_1}{\left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}$

เนื่องจาก $x = \dfrac{pc_0}{1-p}$

$$x = \frac{\left(\dfrac{a_1}{\left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\dfrac{2a_0}{a_1}\right)}{1-\left(\dfrac{a_1}{\left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

$$= \frac{2a_0}{\left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}} - a_1} \cdot \frac{\left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}} + a_1}{\left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}} + a_1}$$

$$= \frac{-2a_0\left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}} + a_1}{\left(a_1^2 - 4a_0\right) - a_1^2}$$

$$= \frac{-a_1 - \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \qquad (194)$$

จะได้ค่ารากสมการพหุนามดีกรี 2 คือ $x_1 = \dfrac{-a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$

หรือ $x_2 = \dfrac{-a_1 - \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$

ทฤษฎีบท 4.2

ให้รูปแบบทั่วไปของสมการพหุนามดีกรี 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง คือ $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ โดยที่ $a_2 \neq 0$ ถ้า $\frac{a_1}{a_2} \neq \pm 2\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ แล้วจะได้ค่ารากของสมการคือ

$$x=\frac{-a_1 \pm \left(a_1^2-4a_0a_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2a_2}$$

พิสูจน์

จากทฤษฎีบท 4.1 เราจะได้ว่า ค่ารากของสมการในอีกรูปแบบหนึ่งเนื่องจาก a_2 เป็นค่าคงที่ที่เป็นอิสระ

นำค่า a_2 ไปหารในสมการ (193) และ (194) จะได้

$$x_1=\frac{-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2-4\left(\frac{a_0}{a_2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{และ} \quad x_2=\frac{-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2-4\left(\frac{a_0}{a_2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$=\frac{-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\frac{1}{a_2}\left(a_1^2-4a_0a_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \qquad =\frac{-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)-\frac{1}{a_2}\left(a_1^2-4a_0a_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$=\frac{-a_1+\left(a_1^2-4a_0a_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2a_2} \qquad =\frac{-a_1-\left(a_1^2-4a_0a_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2a_2}$$

4.2) ค่ารากของสมการพหุนามดีกรีน้อยกว่า 5 โดยใช้การหาภาวะรากซ้ำ

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ $f(x)=x^2+a_1x+a_0$ เมื่อ a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a_0=\left(\frac{a_1}{2}\right)^2$ แล้ว $f(x)=0$ มีราก คือ $x=-\frac{a_1}{2}$ และเป็นรากในภาวะซ้ำที่สอง

พิสูจน์ จากวิธีการหาภาวะรากซ้ำ (Discovery of Multiple Roots)

จะหา D คือ ตัวหารร่วมมาก (Greatest Common Divisor) ของ $f(x)$ และ $f'(x)=2x+a_1$ ดังนี้

$$
\begin{array}{rccc|cc}
 & 1 & a_1 & a_0 & 2 & a_1 \\
\hline
(\times 2) & 2 & 2a_2 & 2a_0 & 1 & \frac{a_1}{2} \\
\cline{5-6}
 & 2 & a_1 & & & \\
\cline{2-4}
 & & a_1 & 2a_0 & & \\
 & & a_1 & \frac{a_1^2}{2} & & \\
\cline{3-4}
 & & & 2a_0-\frac{a_1^2}{2} & & \\
\cline{4-4}
\end{array}
$$

ให้ $a_0=\frac{a_1^2}{4}$ แล้วจะได้ $2a_0-\frac{a_1^2}{2}=0$

ดังนั้น $D=2x+a_1$

ได้ว่า $f_1=\frac{f}{D}=\frac{1}{2}x+\frac{a_1}{4}$ และ $D'=2$

เนื่องจาก $\gcd(D,D')=2$ ดังนั้น $D_1=2$

นั่นคือ $f_2=\frac{D}{D_1}=x+\frac{a_1}{2}$

ได้ว่า $X_1=\frac{f_1}{f_2}=\frac{1}{2}\neq 0$ แสดงว่าไม่มีรากที่เป็นรากเชิงเดียว

$X_2=x+\frac{a_1}{2}=0$ แล้ว $x=-\frac{a_1}{2}$ เป็นรากที่มีภาวะรากซ้ำสองของ $f(x)=0$

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาค่ารากของสมการ $f(x)=x^2-x+\frac{1}{4}=0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a_1=-1$, $a_0=\frac{1}{4}$ และ $\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{(-1)}{2}\right)^2$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 4.3 จะได้ว่า $f(x)=0$ มีราก คือ $x=-\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$ มีภาวะรากซ้ำที่สอง

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ เมื่อ a_2 , a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $2a_1-\frac{2a_2^2}{3}=3a_0-\frac{a_1a_2}{3}=0$ แล้ว $f(x)=0$ มีราก คือ $x=-\frac{a_2}{3}$ เป็นรากที่มีภาวะรากซ้ำที่สาม

พิสูจน์ จากวิธีการหาภาวะรากซ้ำ (Discovery of Multiple Roots)

หา D คือ ตัวหารร่วมมาก (Greatest Common Divisor) ของ $f(x)$

และ $f'(x)=3x^2+2a_2x+a_1$ ดังนี้

$$
\begin{array}{rcccc|ccc}
 & 1 & a_2 & a_1 & a_0 & 3 & 2a_1 & a_1 \\
\hline
(\times 3) & 3 & 3a_2 & 3a_1 & 3a_0 & & 1 & \frac{a_2}{3} \\
\cline{6-8}
 & 3 & 2a_2 & a_1 & & & & \\
\cline{2-5}
 & & a_2 & 2a_1 & 3a_0 & & & \\
 & & a_2 & \frac{2a_2^2}{3} & \frac{a_1a_2}{3} & & & \\
\cline{3-5}
 & & & A & B & & & \\
\cline{4-5}
\end{array}
$$

ให้ $A=2a_1-\frac{2a_2^2}{3}$ และ $B=3a_0-\frac{a_1a_2}{3}$

สมมุติ $2a_1-\frac{2a_2^2}{3}=3a_0-\frac{a_1a_2}{3}=0$

ดังนั้น $A=B=0$

นั่นคือ $a_1=\frac{a_2^2}{3}$ และ $a_0=\frac{a_2^3}{27}$

จะได้ $D=3x^2+2a_2x+a_1$

และ $f_1 = \dfrac{f}{D} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{a_2}{9}$

หา D_1 ของ D และ $D' = 6x + 2a_2$ จะได้

$$
\begin{array}{r|lll|ll}
 & 3 & 2a_2 & a_1 & 6 & 2a_2 \\
\hline
 & 6 & 4a_2 & 2a_1 & 1 & \dfrac{a_2}{3} \\
\cline{5-6}
(\times 2) & 6 & 2a_2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 2a_2 & 2a_1 & & \\
 & & 2a_2 & \dfrac{2}{3}a_2^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & & 2a_1 - \dfrac{2}{3}a_2^2 & & \\
\cline{4-4}
\end{array}
$$

สมมติ $a_1 = \dfrac{a_2^2}{3}$ นั่นคือ $2a_1 - \dfrac{2}{3}a_2^2 = 0$

ดังนั้น $D_1 = 6x + 2a_2$

ได้ว่า $f_2 = \dfrac{D}{D_1} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{a_2}{6}$ และ $D_1' = 6$

เนื่องจาก $\gcd\left(D_1, D_1'\right) = 6$ ดังนั้น $D_2 = 6$

นั่นคือ $f_3 = \dfrac{D_1}{D_2} = x + \dfrac{a_2}{3}$

ให้ $X_3 = f_3 = x + \dfrac{a_2}{3}$ เนื่องจากกระบวนการหารากซ้ำ $X_3 = 0$

แล้ว $x = -\dfrac{a_2}{3}$ เป็นรากซ้ำสามของ $f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาค่ารากของสมการ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a_2 = -3$, $a_1 = 3$, $a_0 = -1$

และ $2a_1 - \dfrac{2a_2^2}{3} = 2(3) - \dfrac{2(-3)^2}{3} = 0$, $3a_0 - \dfrac{a_1 a_2}{3} = 3(-1) - \dfrac{(-3)(3)}{3} = 0$

จากทฤษฎีบท 4.4 ได้ว่า $f(x) = 0$ มีราก คือ $x = -\dfrac{a_2}{3} = -\dfrac{(-3)}{3} = 1$ เป็นภาวะรากซ้ำสาม

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ เมื่อ a_2 , a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $A=2a_1-\dfrac{2a_2^2}{3}$, $B=3a_0-\dfrac{a_1a_2}{3}$, $A\neq 0$ ถ้า $a_1A^2-2a_2AB+3B^2=0$ แล้ว $f(x)=0$ มีรากเชิงเดี่ยว คือ $x=-\dfrac{a_2A-2B}{A}$ และ รากซ้ำสอง คือ $x=-\dfrac{B}{A}$

พิสูจน์ จากวิธีการหารากซ้ำ (Discovery of Multiple Roots)

จะหา D คือ ตัวหารร่วมมาก (Greatest Common Divisor) ของ $f(x)$ และ $f'(x)=3x^2+2a_2x+a_1$ ดังนี้

$$
\begin{array}{r|cccc|ccc}
 & 1 & a_2 & a_1 & a_0 & 3 & 2a_0 & a_1 \\
\hline
(\times 3) & 3 & 3a_2 & 3a_1 & 3a_0 & 1 & \dfrac{a_2}{3} & \\
 & 3 & 2a_2 & a_1 & & & & \\
\hline
 & & a_2 & 2a_1 & 3a_0 & & & \\
 & & a_2 & \dfrac{2a_2^2}{3} & \dfrac{a_1a_2}{3} & & & \\
\hline
 & & & A & B & & &
\end{array}
$$

ให้ $A=2a_1-\dfrac{2a_2^2}{3}\neq 0$ และ $B=3a_0-\dfrac{a_1a_2}{3}$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
3 & 2a_2 & a_1 & A & B \\
\hline
3 & \dfrac{3B}{A} & & \dfrac{3}{A} & \dfrac{\left(2a_2-\dfrac{3B}{A}\right)B}{A} \\
\hline
 & \left(2a_2-\dfrac{3B}{A}\right) & a_1 & & \\
 & \left(2a_2-\dfrac{3B}{A}\right) & \dfrac{\left(2a_2-\dfrac{3B}{A}\right)B}{A} & & \\
\hline
 & & \left(a_1-\dfrac{2a_2B}{A}+\dfrac{3B^2}{A^2}\right) & &
\end{array}
$$

สมมุติ $a_1A^2-2a_2AB+3B^2=0$ ดังนั้น $a_1-\dfrac{2a_2B}{A}+\dfrac{3B^2}{A^2}=\dfrac{a_1A^2-2ABa_2+3B^2}{A^2}=0$

นั่นคือ $D=Ax+B$ ได้ว่า

$$
\begin{array}{rcccc|ccc}
 & 1 & a_2 & a_1 & a_0 & A & B & \\
\hline
(\times A) & A & a_2A & a_1A & a_0A & 1 & \left(\dfrac{a_2A-B}{A}\right) & \dfrac{C}{A} \\
\cline{6-8}
 & A & B & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & a_2A-B & a_1A & & & & \\
 & & a_2A-B & \dfrac{(a_2A-B)B}{A} & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & C & a_0A & & & \\
 & & & C & a_0A & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & a_0A-\dfrac{BC}{A} & & & \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

เนื่องจาก $C=\dfrac{a_1A^2-(a_2A-B)B}{A}=0$

แล้ว $Ax+B$ เป็นตัวหารร่วมมากของ f และ f' ดังนั้น $a_0A-\dfrac{BC}{A}=0$

นั่นคือ $f_1=\dfrac{f}{D}=\dfrac{x^2}{A}+\left(\dfrac{a_2A-B}{A^2}\right)x+\dfrac{C}{A^2}$ และ $D'=A$

เนื่องจาก $\gcd(D,D')=A$ ดังนั้น $D_1=A$

ดังนั้น $f_2=\dfrac{D}{D_1}=x+\dfrac{B}{A}$

$$
\begin{array}{rccc|cc}
 & 1 & \left(\dfrac{a_2A-B}{A}\right) & \dfrac{C}{A} & A & B \\
\hline
(\times A) & A & (a_2A-B) & C & 1 & \left(\dfrac{a_2A-B}{A}\right) \\
\cline{5-6}
 & A & B & & & \\
\cline{2-4}
 & & a_2A-2B & C & & \\
 & & a_2A-2B & \dfrac{a_2AB-2B^2}{A} & & \\
\cline{3-4}
 & & & C-\dfrac{a_2AB-2B^2}{A} & & \\
\cline{4-4}
\end{array}
$$

เนื่องจาก $f_2 | f_1$ ดังนั้น $C-\dfrac{a_2AB-2B^2}{A}=0$

ได้ว่า $X_1 = \frac{f_1}{f_2} = \frac{x}{A^2} + \frac{a_2 A - 2B}{A^3}$

$$X_2 = f_2 = \frac{(Ax + B)}{A}$$

ดังนั้นจากกระบวนการหารากซ้ำ $X_1 = 0$ มี $x = -\frac{a_2 A - 2B}{A}$ เป็นรากเชิงเดี่ยวของ $f(x) = 0$

และ $X_2 = 0$ มี $x = -\frac{B}{A}$ เป็นรากซ้ำสองของ $f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหาค่ารากของสมการ $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a_2 = -1, a_1 = -1, a_0 = 1$ และ

$$A = 2a_1 - \frac{2a_2^2}{3} = 2(-1) - \frac{2(-1)^2}{3} = -\frac{8}{3} \neq 0$$

$$B = 3a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} = 3(1) - \frac{(-1)(-1)}{3} = \frac{8}{3}$$

$$a_1 A^2 - 2a_2 AB + 3B^2 = (-1)\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 2(-1)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) + 3\left(\frac{8}{3}\right)^2 = 0$$

จากทฤษฎีบท 4.5 ได้ว่า $f(x) = 0$ มีรากเชิงเดี่ยว คือ $x = -\frac{a_2 A - 2B}{A} = -1$

และ มีรากซ้ำสอง คือ $x = -\frac{B}{A} = 1$

ทฤษฎีบท 4.6 ให้ $f(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ เมื่อ a_3, a_2, a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $2a_2 - \frac{3}{4}a_3^2 = 3a_1 - \frac{1}{2}a_2 a_3 = 4a_0 - \frac{1}{4}a_1 a_3 = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ มีราก $x = -\frac{a_3}{4}$ เป็นภาวะรากซ้ำสี่

พิสูจน์ จากวิธีการหารากซ้ำ

หา D ซึ่งเป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f'(x) = 4x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$ ดังนี้

$$
\begin{array}{r|ccccc|cccc}
 & 1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\
\hline
(\times 4) & 4 & 4a_3 & 4a_2 & 4a_1 & 4a_0 & 1 & \frac{a_3}{4} & & \\
\cline{7-10}
 & 4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & & & & & \\
\cline{2-6}
 & & a_3 & 2a_2 & 3a_1 & 4a_0 & & & & \\
 & & a_3 & \frac{3a_3^2}{4} & \frac{a_2a_3}{2} & \frac{a_1a_3}{4} & & & & \\
\cline{2-6}
 & & & A & B & C & & & & \\
\cline{4-6}
\end{array}
$$

สมมุติให้ $A = 2a_2 - \frac{3}{4}a_3^2 = 0$

$$B = 3a_1 - \frac{1}{2}a_2a_3 = 0$$

$$C = 4a_0 - \frac{1}{4}a_1a_3 = 0$$

เนื่องจาก $A = B = C = 0$ นั่นคือ $a_2 = \frac{3}{8}a_3^2$, $a_1 = \frac{1}{16}a_3^3$, $a_0 = \frac{1}{256}a_3^4$

ดังนั้น $D = 4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ และ $f_1 = \frac{f}{D} = \frac{x}{4} + \frac{a_3}{16}$

หา D_1 เป็นตัวหารร่วมมากของ D และ $D' = 12x^2 + 6a_3x + 2a_2$ ดังนี้

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 6 & 3a_3 & a_2 \\
\hline
4 & 2a_3 & \frac{2a_2}{3} & & \frac{2}{3} & \frac{a_3}{6} & \\
\cline{1-4}
 & a_3 & \frac{4a_2}{3} & a_1 & & & \\
 & a_3 & \frac{a_3^2}{2} & \frac{a_2a_3}{6} & & & \\
\cline{1-4}
 & & E & F & & & \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

ให้ $E = \frac{4}{3}a_2 - \frac{a_3^2}{2}$

$$F = a_1 - \frac{a_2a_3}{6}$$

เนื่องจาก $a_1 = \frac{1}{16}a_3^3$ และ $a_2 = \frac{3}{8}a_3^2$ นั่นคือ $E = F = 0$

ดังนั้น $D_1 = 6x^2 + 3a_3x + a_2$ และ $f_2 = \frac{D}{D_1} = \frac{4}{3}x + \frac{a_3}{3}$

หา D_2 เป็นตัวหารร่วมมากของ D_1 และ $D_1' = 12x + 3a_3$ ดังนี้

$$
\begin{array}{lll|ll}
6 & 3a_3 & a_2 & 4 & a_3 \\
\hline
6 & \frac{3a_3}{2} & & \frac{3}{2} & \frac{3a_3}{8} \\
\cline{1-3}
 & \frac{3a_3}{2} & a_2 & & \\
 & \frac{3a_3}{2} & \frac{3a_3^2}{8} & & \\
\cline{1-3}
 & & \left(a_2 - \frac{3}{8}a_3^2\right) & & \\
\cline{3-3}
\end{array}
$$

เนื่องจาก $a_2 = \frac{3}{8}a_3^2$

นั่นคือ $a_2 - \frac{3}{8}a_3^2 = 0$

ดังนั้น $D_2 = D_1'$ และ $f_3 = \frac{D_1}{D_2} = \frac{9}{2}x + \frac{9}{8}a_3$ และ $D_2' = 12$

เนื่องจาก $\gcd\left(D_2, D_2'\right) = 12$ ดังนั้น $D_3 = 12$

นั่นคือ $f_4 = \frac{D_2}{D_3} = x + \frac{a_3}{4}$ โดยวิธีการหารากซ้ำ $f_4 = X_4$

โดยกระบวนการหารากซ้ำเมื่อ $X_4 = 0$ แล้ว $x = -\frac{a_3}{4}$ เป็นรากซ้ำ 4 ของ $f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาค่ารากของสมการ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a_3 = -4$, $a_2 = 6, a_1 = -4, a_0 = 1$

และ $2a_2 - \frac{3}{4}a_3^2 = 2(6) - \frac{3}{4}(-4)^2 = 0$

$$3a_1 - \frac{1}{2}a_2a_3 = 3(-4) - \frac{1}{2}(6)(-4) = 0$$

$$4a_0 - \frac{1}{4}a_1a_3 = 4(1) - \frac{1}{4}(-4)(-4) = 0$$

จากทฤษฎี 4.6 บท ได้ว่า $f(x) = 0$ มีรากซ้ำสี่และรากทั้งสี่ คือ $x = -\frac{a_3}{4} = 1$

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ เมื่อ a_3 , a_2 , a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ

กำหนดให้ $A = 2a_2 - \frac{3}{4}a_3^2 \neq 0$, $B = 3a_1 - \frac{1}{2}a_2a_3$, $C = 4a_0 - \frac{1}{4}a_1a_3$

ถ้า $2a_2 - \frac{4C}{A} - \frac{3a_3B}{A} + \frac{4B^2}{A^2} = a_1 - \frac{3a_3C}{A} + \frac{4BC}{A^2} = C - \frac{B^2}{4A} = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ มีราก คือ $x = -\frac{B}{2A}$ มีภาวะรากซ้ำสามและรากเชิงเดี่ยว คือ $x = \frac{3B - 2a_3A}{2A}$

พิสูจน์ จากวิธีการหารากซ้ำ (Discovery of Multiple roots)

หาค่า D ซึ่งเป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f'(x) = 4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ ดังนี้

$$\begin{array}{cccccccc|ccc}
 & 1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\
\hline
(\times 4) & 4 & 4a_3 & 4a_2 & 4a_1 & 4a_0 & & 1 & \frac{a_3}{4} & & \\
\cline{9-11}
 & 4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & a_3 & 2a_2 & 3a_1 & 4a_0 & & & & & \\
 & & a_3 & \frac{3a_3^2}{4} & \frac{a_2a_3}{2} & \frac{a_1a_3}{4} & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & A & B & C & & & & & \\
\cline{4-7}
\end{array}$$

ให้ $A = 2a_2 - \frac{3}{4}a_3^2 \neq 0$

$$B = 3a_1 - \frac{1}{2}a_2a_3$$

$$C = 4a_0 - \frac{1}{4}a_1a_3$$

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & A & B & C \\
\hline
4 & \frac{4B}{A} & \frac{4C}{A} & & \frac{4}{A} & \frac{\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)}{A} & \\
\cline{1-4}
 & \left(3a_3-\frac{4B}{A}\right) & \left(2a_2-\frac{4C}{A}\right) & a_1 & & & \\
 & \left(3a_3-\frac{4B}{A}\right) & \left(\frac{B}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)\right) & \left(\frac{C}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)\right) & & & \\
\cline{1-4}
 & & E & F & & & \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

ให้ $E=\left(2a_2-\frac{4C}{A}\right)-\left(\frac{B}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)\right)$ และ $F=a_1-\frac{C}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)$

เนื่องจาก $E=F=0$ แล้ว $D=Ax^2+Bx+C$

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccc}
\cline{2-9}
C & 1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & A & B & C \\
(\times A) & A & a_3A & a_2A & a_1A & a_0A & 1 & \frac{a_3A-B}{A} & \frac{G}{A} \\
\cline{7-9}
 & A & B & C & a_1A & & & & \\
\cline{2-6}
 & & (a_3A-B) & (a_2A-C) & a_1A & & & & \\
 & & (a_3A-B) & \left[\frac{B}{A}(a_3A-B)\right] & \left[\frac{C}{A}(a_3A-B)\right] & & & & \\
\cline{2-6}
 & & & G & H & a_0A & & & \\
 & & & G & \frac{GB}{A} & \frac{GC}{A} & & & \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & 0 & 0 & & & \\
\cline{4-6}
\end{array}
$$

ให้ $G=(a_2A-C)-\frac{B}{A}(a_3A-B), H=a_1A-\frac{C}{A}(a_3A-B)$

$$f_1=\frac{f}{D}=\frac{1}{A}\left[x^2+\frac{(a_3A-B)}{A}x+\left[(a_2A-C)-\frac{B}{A}(a_3A-B)\right]\right]$$

หา D_1 ซึ่งเป็นตัวหารร่วมมากของ D และ $D'=2Ax+B$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
A & B & C & 2A & B \\
\hline
A & \dfrac{B}{2} & & \dfrac{1}{B} & \dfrac{B}{4A} \\
\hline
 & \dfrac{B}{2} & C & & \\
 & \dfrac{B}{2} & \dfrac{B^2}{4A} & & \\
\hline
 & & C-\dfrac{B^2}{4A} & & \\
\hline
\end{array}
$$

เนื่องจาก $C-\dfrac{B^2}{4A}=0$

ดังนั้น $D_1=2Ax+B$

นั่นคือ $f_2=\dfrac{D}{D_1}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{B}{4A}$

เนื่องจาก ห.ร.ม ของ D_1 และ $D_1'=2A$ คือ 2A

นั่นคือ $f_3=\dfrac{D_1}{D_2}\dfrac{D_1}{2A}=x+\dfrac{B}{2A}$

ดังนั้น จากกระบวนการหารากซ้ำ

$f_3=X_3$ เมื่อ $X_3=0$ แล้ว $x=-\dfrac{B}{2A}$ เป็นรากซ้ำสามของ $f(x)=0$

$X_1=\dfrac{f_1}{f_2}$ เมื่อ $X_1=0$ แล้ว $x=\dfrac{3B-2a_3A}{2A}$ เป็นรากเชิงเดี่ยวของ $f(x)=0$

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่ารากของสมการ $f(x)=x^4-2x^3+2x-1=0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a_3=-2$, $a_2=0$, $a_1=2$, $a_0=-1$

และ $A=2a_2-\dfrac{3}{4}a_3^2=2(0)-\dfrac{3}{4}(-2)^2=-3\neq 0$

$B=3a_1-\dfrac{1}{2}a_2a_3=3(2)-\dfrac{1}{2}(0)(-2)=6$

$C=4(-1)-\dfrac{1}{4}(2)(-2)=-3=4a_0-\dfrac{1}{4}a_1a_3$

$$2a_2-\frac{4C}{A}-\frac{3a_3B}{A}+\frac{4B^2}{A^2}=2(0)-\frac{4(-3)}{(-3)}-3\frac{(-2)(6)}{-3}+\frac{4(6)^2}{3^2}=0$$

$$a_1-\frac{3a_3C}{A}+\frac{4BC}{A^2}=(2)-\frac{3(-2)(-3)}{(-3)}+\frac{4(6)(-3)}{(-3)^2}=0$$

$$C-\frac{B^2}{4A}=-3-\frac{(6)^2}{4(-3)}=0$$

จากทฤษฎีบท 4.7 ได้ว่า $f(x)=0$ มีรากซ้ำสาม คือ $x=-\frac{B}{2A}=1$

มีรากเชิงเดี่ยว คือ $x=\frac{3B-2a_3A}{2A}=-1$

ทฤษฎีบทที่ 4.8 ให้ $f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ เมื่อ a_3,a_2,a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ กำหนดให้ $A=2a_2-\frac{3}{4}a_3^2\neq 0, B=3a_1-\frac{1}{2}a_2a_3, C=4a_0-\frac{1}{4}a_1a_3$

$$E=\left(2a_2-\frac{4C}{A}\right)-\left(\frac{B}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)\right)\neq 0 \text{ และ } F=a_1-\frac{C}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)\neq 0$$

ถ้า $C-\frac{BF}{E}+\frac{AF^2}{E^2}=0$ แล้ว $f(x)=0$ มีรากซ้ำสองคือ $x=-\frac{F}{E}$ และรากที่เหลืออีกสองรากหาได้จาก $x^2+\frac{(a_3E-2F)}{E}x+\left[a_2E-(a_3E-F)\frac{F}{E}-\frac{a_2EF-2F^2}{E}\right]\frac{1}{E}$

พิสูจน์ จากวิธีการหารากซ้ำ (Discovery of Multiple roots) จะหาค่า D ซึ่งเป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f'(x)=4x^2+3a_3x^2+2a_2x+a_1$

	1	a_3	a_2	a_1	a_0	4	$3a_3$	$2a_2$	a_1
$\times 4$	4	$4a_3$	$4a_2$	$4a_1$	$4a_0$	1	$\frac{a_3}{4}$		
	4	$3a_2$	$2a_2$	a_1					
		a_3	$2a_2$	$3a_1$	$4a_0$				
		a_3	$\frac{3a_3^2}{4}$	$\frac{a_2a_3}{2}$	$\frac{a_1a_3}{4}$				
			A	B	C				

ให้ $A = 2a_2 - \frac{3}{4}a_3^2 \neq 0, B = 3a_1 - \frac{1}{2}a_2 a_3, \mathrm{C} = 4\,\mathrm{a}_0 - \frac{1}{4}a_1 a_3$

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & A & B & C \\
\hline
4 & \frac{4B}{A} & \frac{4C}{A} & & \frac{4}{A} & \frac{\left(3a_3 - \frac{4B}{A}\right)}{A} & \\
\hline
 & \left(3a_3 - \frac{4B}{A}\right) & \left(2a_2 - \frac{4C}{A}\right) & a_1 & & & \\
 & \left(3a_3 - \frac{4B}{A}\right) & \frac{B}{A}\left(2a_2 - \frac{4C}{A}\right) & \frac{C}{A}\left(3a_3 - \frac{4B}{A}\right) & & & \\
\hline
 & & E & F & & & \\
\hline
\end{array}
$$

ให้ $E = \left(2a_2 - \frac{4C}{A}\right) - \left(\frac{B}{A}\left(3a_3 - \frac{4B}{A}\right)\right) \neq 0$ และ $F = a_1 - \frac{C}{A}\left(3a_3 - \frac{4B}{A}\right) \neq 0$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
A & B & C & E & F \\
\hline
A & \frac{AF}{E} & & \frac{A}{E} & \frac{B}{E} - \frac{AF}{E^2} \\
\hline
 & B - \frac{AF}{E} & C & & \\
 & B - \frac{AF}{E} & F\left(\frac{B}{E} - \frac{AF}{E^2}\right) & & \\
\hline
 & & C - \frac{BF}{E} + \frac{AF^2}{E^2} & & \\
\hline
\end{array}
$$

สมมุติ $C - \frac{BF}{E} + \frac{AF^2}{E^2} = 0$ ดังนั้น $D = Ex + F$

$$\begin{array}{c|ccccc|cccc}
 & 1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & E & F & & \\ \hline
(\times E) & E & a_3E & a_2E & a_1E & a_0E & 1 & \frac{(a_3E-F)}{E} & \frac{G}{E} & \left(a_1-\frac{GF}{E^2}\right) \\
 & E & F & & & & & & & \\ \hline
 & & a_3E-F & a_2E & & & & & & \\
 & & a_3F-F & (a_3E-F)\frac{F}{E} & & & & & & \\ \hline
 & & & G & a_1E & & & & & \\
 & & & G & \frac{GC}{B} & & & & & \\ \hline
 & & & & a_1E-\frac{GF}{E} & a_0E & & & & \\
 & & & & a_1E-\frac{GF}{E} & a_1F-\frac{GF^2}{E^2} & & & & \\ \hline
 & & & & & a_0E-a_1F-\frac{GF^2}{E^2} & & & &
\end{array}$$

ให้ $G = a_2E - (a_3E - F)\frac{F}{E}$

ดังนั้น $f_1 = \frac{f}{D} = \frac{1}{E}\left[x^3 + \frac{(a_3E-F)}{E}x^2 + \frac{G}{E}x + \left(a_1 - \frac{GF}{E^2}\right)\right]$

เนื่องจาก $D' = E$ ดังนั้น $\gcd(D, D') = E$ นั่นคือ $D_1 = E$

นั่นคือ $f_2 = \frac{D}{D_1} = x - \frac{F}{E}$

$$\begin{array}{c|cccc|cc}
 & 1 & \left(\frac{a_3E-F}{E}\right) & \frac{G}{E} & a_1-\frac{GF}{E^2} & E & F \\ \hline
\times E & E & a_3E-F & G & a_1E-\frac{GF}{E} & \frac{(a_3E-2F)}{E} & \frac{H}{E} \\
 & E & F & & & & \\ \hline
 & & (a_3E-F)-F & G & & & \\
 & & (a_3E-F)-F & \frac{((a_3E-F)-F)F}{E} & & & \\ \hline
 & & & H & a_1E-\frac{GF}{E} & & \\
 & & & H & \frac{HF}{E} & & \\ \hline
 & & & & a_1E-\frac{GF}{E}-\frac{HF}{E} & &
\end{array}$$

ให้ $H = G - \dfrac{a_3EF - 2F^2}{E}$

ดังนั้น $X_1 = \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{1}{E}\left[x^2 + \dfrac{(a_3E - 2F)}{E}x + \dfrac{H}{E}\right]$

จากกระบวนการหารากซ้ำ $X_1 = f_2 = 0$ แล้ว $x = -\dfrac{F}{E}$ เป็นรากซ้ำสองของ $f(x) = 0$

และ $X_1 = 0$ แล้ว $x^2 + \dfrac{(a_3E - 2F)}{E}x + \dfrac{H}{E} = 0$ ใช้หาค่ารากอีกสองรากที่เหลือของ $f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงหาราก $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

วิธีทำ $a_0 = -2, a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = -3$

$$A - 2a_2 - \frac{3}{4}a_3^2 = -\frac{19}{4}$$

$$B = 3a_1 - \frac{1}{2}a_2a_3 = \frac{21}{2}$$

$$\mathrm{C} = 4\mathrm{a}_0 - \frac{1}{4}a_1a_3 = \frac{-23}{4}$$

$E = \left(2a_2 - \dfrac{4C}{A}\right) - \left(\dfrac{B}{A}\left(3a_3 - \dfrac{4B}{A}\right)\right) = -\dfrac{1152}{361}$ และ $F = a_1 - \dfrac{C}{A}\left(3a_3 - \dfrac{4B}{A}\right) = \dfrac{1152}{361}$

เนื่องจาก $C - \dfrac{BF}{E} + \dfrac{AF^2}{E^2} = 0$ ดังนั้น $f(x) = 0$

มีรากซ้ำสองคือ $x = -\dfrac{F}{E} = 1$ และรากที่เหลือหาได้จาก

$$x^2 + \frac{(a_3E - 2F)}{E}x + \left[a_2E - (a_3E - F)\frac{F}{E} - \frac{a_3EF - 2F^2}{E}\right]\frac{1}{E} = x^2 - x - 2 = 0$$

นั้นก็คือ $x = 2$ หรือ -1

4.3) ค่ารากของสมการพหุนามดีกรี 5

ทฤษฎีบท 4.9 ให้ $f(x)=x^5+a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1$ โดยที่ a_5,a_4,a_3 และ a_1 เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนจริง เมื่อ

$$a_2=\left(5a_5^4/64\right)-\left(3a_4a_5^2/8\right)+\left(a_4^2/4\right)+\left(a_3a_5/2\right)-\left[\frac{\left(a_3a_4/4\right)+\left(a_4a_5^3/16\right)-\left(a_4^2a_5/8\right)-\left(a_3a_5^2/16\right)-\frac{a_5^5}{128}-\frac{a_1}{2}}{\left(a_3/2\right)+\left(a_5^3/16\right)-\left(a_4a_5/4\right)}\right]^2$$

โดยที่ $\left(a_3/2\right)+\left(a_5^3/16\right)-\left(a_4a_5/4\right)\neq 0$ และ $b_0=\pm\frac{a_7}{a_6}$ จะสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

1) ถ้า $b_0=a_7/a_6$ เมื่อ $b_0=\left(a_3/2\right)+\left(a_5^3/16\right)-\left(a_4a_5/4\right)$

$$a_6=\sqrt{\left(5a_5^4/64\right)-\left(3a_4a_5^2/8\right)+\left(a_4^2/4\right)+\left(a_3a_5/2\right)-a_2}$$

$$a_7=\left(a_3a_4/4\right)+\left(a_4a_5^3/16\right)-\left(a_4^2a_5/8\right)-\left(a_3a_5^2/16\right)-\left(a_5^5/128\right)-\left(a_1/2\right)$$

แล้ว รากของสมการ $f(x)=0$ คือ

$$x_1=\frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-4\left(b_1-a_6\right)}}{2},\ x_2=\frac{-b_2-\sqrt{b_2^2-4\left(b_1-a_6\right)}}{2}$$

$$x_3=\frac{pC_0-B_0}{1-p},x_4=\frac{-\left(2B_0-2p^2C_0+pf_1\right)}{2+2p+2p^2}+\frac{\left[\left(2B_0+2p^2C_0+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2+p^2C_0^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

$$x_5=\frac{-\left(2B_0+2p^2C_0+pf_1\right)}{2+2p+2p^2}\ \frac{\left[\left(2B_0+2p^2C_0+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2+p^2C_0^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

เมื่อ $b_1=\left(a_4/2\right)-\left(a_5^2/8\right)\ b_2=a_5/2,f_1=\frac{A_1A_2-9A_0}{A_2^2-3A_1}$

$$f_2=\frac{A_1^2-3A_0A_2}{A_2^2-3A_1}\quad B_0=\frac{f_1+\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$C_0=\frac{f_1-\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\quad p=\left[\frac{2A_2-3f_1-3\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2A_2-3f_1+3\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$A_2=b_2,A_1=\left(b_1+a_6\right),A_0=2b_0$$

$$b_0 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_5^3}{16} - \frac{a_4 a_5}{4}$$

2) ถ้า $b_0 = -\frac{a_7}{a_6}$ เมื่อ $a_6 = \sqrt{\frac{5a_5^4}{64} - \frac{3a_4 a_5^2}{8} + \frac{a_4^2}{4} + \frac{a_3 a_5}{2} - a_2}$

$$a_7 = \frac{a_3 a_4}{4} + \frac{a_4 a_5^3}{16} - \frac{a_4^2 a_5}{8} - \frac{a_3 a_5^2}{16} - \frac{a_5^5}{128} - \frac{a_1}{2}$$

แล้ว รากของสมการ $f(x) = 0$ คือ

$$x_1 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4(b_1 + a_6)}}{2} \quad x_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4(b_1 + a_6)}}{2} \quad x_3 = \frac{pC_0 - B_0}{1-p}$$

$$x_4 = \frac{-\left(2B_0 - 2p^2 C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} + \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2 C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2 C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

$$x_5 = \frac{-\left(2B_0 - 2p^2 C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} - \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2 C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2 C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

เมื่อ $b_1 = \frac{a_4}{2} - \frac{a_5^2}{8}$, $b_2 = \frac{a_5}{2}$ และ $f_1 = \frac{A_1 A_2 - 9A_0}{A_2^2 - 3A_1}$

$$f_2 = \frac{A_1^2 - 3A_0 A_2}{A_2^2 - 3A_1} \;, B_0 = \frac{f_1 + \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$C_0 = \frac{f_1 - \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \;, p = \left[\frac{2A_2 - 3f_1 - 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2A_2 - 3f_1 + 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$A_2 = b_2$, $A_1 = (b_1 - a_6)$ และ $A_0 = 2b_0$

พิสูจน์ พิจารณาพิสูจน์ของการหารากของสมการพหุนามดีกรี 6 จากหัวข้อย่อย 3.3 หน้า 80

สมมติ $a_0 = 0$ ได้ว่า $b_0^2 = \dfrac{a_7^2}{a_6^2}$ และแทนค่าในสมการ (176) จะได้

$$a_2 = \left(5a_5^4/64\right) - \left(3a_4a_5^2/8\right) + \left(a_4^2/4\right) + \left(a_3a_5/2\right) - \left[\frac{\left(a_3a_4/4\right) + \left(a_4a_5^3/16\right) - \left(a_4^2a_5/8\right) - \left(a_3a_5^2/16\right) - \frac{a_5^5}{128} - \frac{a_1}{2}}{\left(a_3/2\right) + \left(a_5^3/16\right) - \left(a_4a_5/4\right)}\right]^2$$

โดยที่ $\left(a_3/2\right) + \left(a_5^3/16\right) - \left(a_4a_5/4\right) \neq 0$

หรือจาก $x^5 + a_5x^4 + a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1 = 0$ สามารถเขียนได้เป็น

$$x\left(x^5 + a_5x^4 + a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1\right) = 0$$

ซึ่งจะมีรากเป็น 0 ที่มีภาวะรากเชิงเดียว รากที่เหลือคือ

$$x^5 + a_5x^4 + a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1 = 0 \quad \text{และ} \quad b_0 = \pm\frac{a_7}{a_6}$$

กรณีที่ 1 ถ้า $b_0 = \dfrac{a_7}{a_6}$

แล้ว รากของสมการ $x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = 0$

หาได้จาก 2 สมการ ดังนี้ $x^3 + b_2x^2 + \left(b_1 - a_6\right)x = 0$

$$x^3 + b_2x^2 + \left(b_1 + a_6\right)x + 2b_0 = 0$$

หรือ รากของสมการ $x^5 + a_5x^4 + a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1 = 0$

หาได้จาก 2 สมการ ดังนี้ $x^2 + b_2x + \left(b_1 - a_6\right) = 0$ (195)

$$x^3 + b_2x^2 + \left(b_1 + a_6\right)x + 2b_0 = 0 \qquad (196)$$

จากการพิสูจน์การหารากของสมการพหุนามดีกรี 2 และ 3 ด้วยวิธีทำให้เป็นหน่วยเดียวกันจะสามารถหารากของสมการ (195) และ (196) จะได้

$$x_1 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4\left(b_1 - a_6\right)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4\left(b_1 - a_6\right)}}{2}$$

$$x_3 = \frac{pC_0 - B_0}{1-p}$$

$$x_4 = \frac{-\left(2B_0 - 2p^2C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} + \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

$$x_5 = \frac{-\left(2B_0 + 2p^2C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} - \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

เมื่อ $f_1 = \frac{A_1A_2 - 9A_0}{A_2^2 - 3A_1}$, $f_2 = \frac{A_1^2 - 3A_0A_2}{A_2^2 - 3A_1}$, $B_0 = \frac{f_1 + \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$

$$C_0 = \frac{f_1 - \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad , p = \left[\frac{2A_2 - 3f_1 - 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2A_2 - 3f_1 + 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$A_2 = b_2, A_1 = \left(b_1 + a_6\right), A_0 = 2b_0$$

กรณีที่ 2 ถ้า $b_0 = -\frac{a_7}{a_6}$ แล้ว

จากรากของสมการ $x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = 0$

จะได้สมการ 2 สมการดังนี้

$$x^3 + b_2x^2 + \left(b_1 - a_6\right)x + 2b_0 = 0 \tag{197}$$

$$x^2 + b_2x + \left(b_1 + a_6\right) = 0 \tag{198}$$

จากการพิสูจน์การหารากของสมการพหุนามดีกรี 2 และ 3 ด้วยวิธีทำให้เป็นหน่วยเดียวกันจะสามารถหารากของสมการ (197) และ (198) จะได้

$$x_1 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4\left(b_1 + a_6\right)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4\left(b_1 + a_6\right)}}{2}$$

$$x_3 = \frac{pC_0 - B_0}{1-p}$$

$$x_4 = \frac{-\left(2B_0 - 2p^2C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} + \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

$$x_5 = \frac{-\left(2B_0 - 2p^2C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} - \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

เมื่อ $b_1 = \frac{a_4}{2} - \frac{a_5^2}{8}$,$b_2 = \frac{a_5}{2}$,$f_1 = \frac{A_1A_2 - 9A_0}{A_2^2 - 3A_1}$, $f_2 = \frac{A_1^2 - 3A_0A_2}{A_2^2 - 3A_1}$,$B_0 = \frac{f_1 + \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$

$C_0 = \frac{f_1 - \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$,$p = \left[\frac{2A_2 - 3f_1 - 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2A_2 - 3f_1 + 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$A_2 = b_2$, $A_1 = \left(b_1 - a_6\right)$ และ $A_0 = 2b_0$

ตัวอย่าง 4.7 จงหารากของสมการ $f\left(x\right) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + -\frac{419}{400}x + 1 = 0$

วิธีทำ จากทฤษฎีบทจะได้ว่า $a_6 = 1.225, a_7 = -\frac{49}{128}, b_0 = \frac{5}{16}, a_2 = -\frac{419}{400}$

$$b_2 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{1}{2}, A_1 = 1.6, A_0 = 0.625$$

$$f_1 = \frac{193}{182}, f_2 = -\frac{649}{896}, \mathrm{B}_0 = 1.53295, C_0 = -0.47251$$

$$p = -1.288171$$

เนื่องจาก $b_0 = \frac{a_7}{a_6}$ ดังนั้น รากทั้งหมดของ $f\left(x\right) = 0$ คือ

$x_1 = 0.4005951$, $x_2 = -0.0497025$, $x_3 = -0.0497025$

$x_4 = 0.70525$ และ $x_5 = -1.20525$

4.4) ค่ารากของสมการพหุนามดีกรี 6

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ $f(x)=x^6+a_6x^5+a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1=0$ เมื่อ $a_6,a_5,a_4,a_3,a_2\in\mathbb{R}$

แล้วมีรากคือ

$$x_1=\frac{-\left(\frac{a_6}{2}\right)+\left(\frac{a_6^2}{4}-4\left(F_2-g\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$x_2=\frac{-\left(\frac{a_6}{2}\right)-\left(\frac{a_6^2}{4}-4\left(F_2-g\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$x_3=\frac{-b_1+\left[b_1^2-4\left(b_0-c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_4=\frac{-b_1-\left[b_1^2-4\left(b_0-c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_5=\frac{-b_1+\left[b_1^2-4\left(b_0+c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_6=\frac{-b_1-\left[b_1^2-4\left(b_0+c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

เมื่อ $A_3=\frac{a_6}{2}, A_2=F_2+g, A_1=2F_1, A_0=F_8$

$b_0=\frac{A_1}{A_3}$ b_1 คือ ค่ารากของสมการพหุนามดีกรี 3 ของ

$$b_1^3-\frac{4A_2}{A_3}b_1^2+\frac{4\left(A_1A_2+A_2^2-4A_0\right)}{A_3^2}b_1+\frac{8\left(A_0A_3^2+A_1^2-A_1A_2A_3\right)}{A_3^3}=0$$

$$p^2=\frac{A_3-2b_1}{A_3}\ ,c_0=\frac{2\left(2A_0A_3b_1-A_1^2\right)}{A_3\left(2A_2b_1-2A_1-A_3b_1^3\right)}$$

$$a_1=F_1^2+F_0F_2-\left(a_6F_5/8\right)-F_0g+\left[\left(16F_2-a_6^2\right)/16\right]g^2-g^3-\left(F_5^2/16g^2\right)$$

และ

$$F_0 = a_3 - F_2^2 - a_6F_1$$
$$F_1 = (a_4 - a_6F_2)/2$$
$$F_2 = (a_5/2) - (a_6^2/8)$$
$$F_3 = a_2 - 2F_1F_2$$
$$F_4 = a_1 - F_1^2$$
$$F_5 = a_6F_0 - 2F_3$$
$$F_6 = F_4 - F_0F_2$$
$$F_7 = -F_0F_1$$

$g \in \mathbb{R}$ คือ ค่ารากของสมการ $a_6g^4 - 4F_1g^3 + (F_5 + a_6F_0)g^2 + 4F_7g + F_0F_5 = 0$

เมื่อ $$F_8 = F_0 + g^2$$

พิสูจน์ พิจารณารากของสมการพหุนามดีกรี 7 หัวข้อย่อย 3.1.4 จะมีรากคือ

$f(x) = x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ เมื่อ a_6, a_5, a_4, a_3, a_2 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้

$$a_1 = F_1^2 + F_0F_2 - (a_6F_5/8) - F_0g + \left[(16F_2 - a_6^2)/16\right]g^2 - g^3 - (F_5^2/16g^2)$$

ซึ่ง

$$F_2 = (a_5/2) - (a_6^2/8)$$
$$F_1 = (a_4 - a_6F_2)/2$$
$$F_4 = a_1 - F_1^2$$
$$F_0 = a_3 - F_2^2 - a_6F_1$$
$$F_3 = a_2 - 2F_1F_2$$
$$F_5 = a_6F_0 - 2F_3$$
$$F_6 = F_4 - F_0F_2$$
$$F_7 = a_0 - F_0F_1$$

และ $g \in \mathbb{R}$ เป็นค่ารากของสมการ $a_6g^4 - 4F_1g^3 + (F_5 + a_6F_0)g^2 + 4F_7g + F_0F_5 = 0$

และจะได้ว่า

$$f(x)=\left[x^3+(a_6/2)x^2+(F_2-g)x+(F_1-F_9)\right]\left[x^4+(a_6/2)x^3+(F_2+g)x^2+(F_1+F_9)x+F_8\right]=0$$

เมื่อ $$F_8=F_0+g^2$$

$$F_9=\left(F_1g^2-F_7\right)/F_8$$

ให้ $a_0=0$

ดังนั้น $f(x)=x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x=0$

และได้ว่า $a_1=F_1^2+F_0F_2-(a_6F_5/8)-F_0g+\left[\left(16F_2-a_6^2\right)/16\right]g^2-g^3-\left(F_5^2/16g^2\right)$

เมื่อ

$$F_2=(a_5/2)-\left(a_6^2/8\right)$$
$$F_1=\left(a_4-a_6F_2\right)/2$$
$$F_4=a_1-F_1^2$$
$$F_0=a_3-F_2^2-a_6F_1$$
$$F_3=a_2-2F_1F_2$$
$$F_5=a_6F_0-2F_3$$
$$F_6=F_4-F_0F_2$$
$$F_7=-F_0F_1$$

และ $g\in\mathbb{R}$ หาได้จาก $a_6g^4-4F_1g^3+\left(F_5+a_6F_0\right)g^2+4F_7g+F_0F_5=0$

แล้ว

$$f(x)=\left[x^3+(a_6/2)x^2+(F_2-g)x+(F_1-F_9)\right]\left[x^4+(a_6/2)x^3+(F_2+g)x^2+(F_1+F_9)x+F_8\right]=0$$

เมื่อ $$F_8=F_0+g^2$$

และ $$F_9=\frac{F_1g^2-F_7}{F_8}$$

$$=\frac{F_1g^2+F_0F_1}{F_8}$$ เมื่อ $F_7=-F_0F_1$

$$= \frac{F_1 g^2 + F_0 F_1}{F_0 + g^2} \qquad \text{เมื่อ} \quad F_8 = F_0 + g^2$$

$$= \frac{F_1\left(F_0 + g^2\right)}{F_0 + g^2}$$

$$= F_1$$

จะได้

$$f\left(x\right) = \left[x^3 + \left(a_6/2\right)x^2 + \left(F_2 - g\right)x\right]\left[x^4 + \left(a_6/2\right)x^3 + \left(F_2 + g\right)x^2 + 2F_1 x + F_8\right] = 0$$

นั่นคือ $f\left(x\right) = x^6 + a_6 x^5 + a_5 x^4 + a_4 x^3 + a_3 x^2 + a_2 x + a_1 = 0$

เมื่อ $a_6, a_5, a_4, a_3, a_2 \in \mathbb{R}$ และ

$$a_1 = F_1^2 + F_0 F_2 - \left(a_6 F_5/8\right) - F_0 g + \left[\left(16F_2 - a_6^2\right)/16\right]g^2 - g^3 - \left(F_5^2/16g^2\right)$$

และ

$$\begin{aligned}
F_0 &= a_3 - F_2^2 - a_6 F_1 \\
F_1 &= \left(a_4 - a_6 F_2\right)/2 \\
F_2 &= \left(a_5/2\right) - \left(a_6^2/8\right) \\
F_3 &= a_2 - 2F_1 F_2 \\
F_4 &= a_1 - F_1^2 \\
F_5 &= a_6 F_0 - 2F_3 \\
F_6 &= F_4 - F_0 F_2 \\
F_7 &= -F_0 F_1
\end{aligned}$$

$g \in \mathbb{R}$ คือ ค่ารากของสมการ $a_6 g^4 - 4F_1 g^3 + \left(F_5 + a_6 F_0\right)g^2 + 4F_7 g + F_0 F_5 = 0$

เมื่อ $\qquad F_8 = F_0 + g^2$

แล้ว

$$f\left(x\right) = x\left[x^2 + \left(a_6/2\right)x + \left(F_2 - g\right)\right]\left[x^4 + \left(a_6/2\right)x^3 + \left(F_2 + g\right)x^2 + 2F_1 x + F_8\right] = 0 \quad (199)$$

นำสมการ (199) มาหาค่ารากโดยใช้รูปแบบทั่วไปของค่ารากสมการพหุนามดีกรี 2 และ 4 โดยวิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน จะได้ว่ารากทั้ง 6 ราก คือ

$$x_1 = \frac{-\left(\frac{a_6}{2}\right)+\left(\frac{a_6^2}{4}-4\left(F_2-g\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-\left(\frac{a_6}{2}\right)-\left(\frac{a_6^2}{4}-4\left(F_2-g\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-b_1+\left[b_1^2-4\left(b_0-c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_4 = \frac{-b_1-\left[b_1^2-4\left(b_0-c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_5 = \frac{-b_1+\left[b_1^2-4\left(b_0+c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

$$x_6 = \frac{-b_1-\left[b_1^2-4\left(b_0+c_0p\right)\left(1-p\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-p\right)}$$

เมื่อ $A_3 = \frac{a_6}{2}, A_2 = F_2 + g, A_1 = 2F_1, A_0 = F_8$

$b_0 = \frac{A_1}{A_3}$ b_1 คือ ค่ารากของสมการพหุนาม

$$b_1^3 - \frac{4A_2}{A_3}b_1^2 + \frac{4\left(A_1A_2 + A_2^2 - 4A_0\right)}{A_3^2}b_1 + \frac{8\left(A_0A_3^2 + A_1^2 - A_1A_2A_3\right)}{A_3^3} = 0$$

$$p^2 = \frac{A_3 - 2b_1}{A_3} \quad ,c_0 = \frac{2\left(2A_0A_3b_1 - A_1^2\right)}{A_3\left(2A_2b_1 - 2A_1 - A_3b_1^3\right)}$$

$$a_1 = F_1^2 + F_0F_2 - \left(a_6F_5/8\right) - F_0g + \left[\left(16F_2 - a_6^2\right)/16\right]g^2 - g^3 - \left(F_5^2/16g^2\right)$$

และ

$$
\begin{aligned}
F_0 &= a_3 - F_2^2 - a_6F_1 \\
F_1 &= \left(a_4 - a_6F_2\right)/2 \\
F_2 &= \left(a_5/2\right) - \left(a_6^2/8\right) \\
F_3 &= a_2 - 2F_1F_2 \\
F_4 &= a_1 - F_1^2 \\
F_5 &= a_6F_0 - 2F_3 \\
F_6 &= F_4 - F_0F_2 \\
F_7 &= -F_0F_1
\end{aligned}
$$

$g \in \mathbb{R}$ คือ ค่ารากของสมการ $a_6g^4 - 4F_1g^3 + \left(F_5 + a_6F_0\right)g^2 + 4F_7g + F_0F_5 = 0$

เมื่อ $$F_8 = F_0 + g^2$$

ตัวอย่างที่ 4.8 $f\left(x\right) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5.374938784 = 0$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 4.10 จะได้

$$
\begin{aligned}
F_2 &= \left(0.5\right) - \left(1/8\right) = 0.375 \\
F_1 &= \left(1 - \left(0.375\right)\right)/2 = 0.3125 \\
F_4 &= 1 - \left(0.3125\right)^2 = \frac{231}{256} \\
F_0 &= 1 - \left(0.375\right)^2 - \left(0.3125\right) = 0.546875 \\
F_3 &= 1 - 2\left(0.3125\right)\left(0.375\right) = 0.765625 \\
F_5 &= \left(0.546875\right) - 2\left(0.765625\right) = -0.984375 \\
F_6 &= \left(231/256\right) - \left(0.546875\right)\left(0.375\right) = 357/512 \\
F_7 &= -\left(0.546875\right)\left(0.3125\right) = -175/1024
\end{aligned}
$$

หา g โดย

$$g^4 - 4\left(0.3125\right)g^3 + \left[\left(-0.984375\right) + \left(0.546875\right)\right]g^2 + 4\left(-\frac{175}{1024}\right)g + \left(-\frac{2205}{4096}\right) = 0$$

หรือ $g^4 - 1.25g^3 - 0.4375g^2 - \dfrac{175}{256}g - \dfrac{2205}{4096} = 0$

ได้ว่า $g = 1.7976, 0.547604, \pm\sqrt{0.546875}i$

เลือก $g = 1.7976$ ดังนั้น

$$a_1 = F_1^2 + F_0F_2 - (a_1F_5/8) - F_0g + \left[\left(16F_2 - a_6^2\right)/16\right]g^2 - g^3 - \left(F_5^2/16g^2\right) = -5.374938784$$

และ $F_8 = 0.546875 + (1.7976)^2 = 3.77824076$

แล้ว $f(x) = \left[x^2 + 0.5x - 1.4226\right]\left[x^4 + 0.5x^3 + 2.1726x^2 + 0.625x + 3.77824076\right] = 0$

ดังนั้นสามารถหาค่ารากของ $f(x) = 0$ ได้จากการหาค่ารากพหุนามดีกรี 2 และ 4 และค่าราก

$f(x) = 0$ คือ $0.968647, -1.46865, -0.793245 \pm 1.20396i, 0.543245 \pm 1.23387i$

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ทฤษฎีบท 4.1 ให้สมการรูปแบบทั่วไปของสมการพหุนามดีกรีสองที่มีสัมประสิทธิเป็นจำนวนจริง คือ $x^2 + a_1x + a_0 = 0$ แล้วรากของสมการพหุนามดีกรี 2 คือ

$$x_1 = \frac{-a_1 + \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{-a_1 - \left(a_1^2 - 4a_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

ทฤษฎีบท 4.2

ให้รูปแบบทั่วไปของสมการพหุนามดีกรี 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง คือ $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ โดยที่ $a_2 \neq 0$ ถ้า $\frac{a_1}{a_2} \neq \pm 2\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ แล้วจะได้ค่ารากของสมการคือ

$$x = \frac{-a_1 \pm \left(a_1^2 - 4a_0a_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2a_2}$$

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ เมื่อ a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a_0 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$ แล้ว $f(x) = 0$ มีราก คือ $x = -\frac{a_1}{2}$ และเป็นรากในภาวะซ้ำที่สอง

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ เมื่อ a_2 , a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ

ถ้า $2a_1 - \frac{2a_2^2}{3} = 3a_0 - \frac{a_1a_2}{3} = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ มีราก คือ $x = -\frac{a_2}{3}$

เป็นรากที่มีภาวะรากซ้ำที่สาม

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ เมื่อ a_2 , a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $A = 2a_1 - \frac{2a_2^2}{3}$, $B = 3a_0 - \frac{a_1a_2}{3}$, $A \neq 0$ ถ้า $a_1A^2 - 2a_2AB + 3B^2 = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ มีรากเชิงเดี่ยว คือ $x = -\frac{a_2A - 2B}{A}$ และ รากซ้ำสอง คือ $x = -\frac{B}{A}$

ทฤษฎีบท 4.6 ให้ $f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ เมื่อ a_3 , a_2 , a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $2a_2-\frac{3}{4}a_3^2=3a_1-\frac{1}{2}a_2a_3=4a_0-\frac{1}{4}a_1a_3=0$ แล้ว $f(x)=0$ มีราก $x=-\frac{a_3}{4}$ เป็นภาวะรากซ้ำสี่

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ $f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ เมื่อ a_3 , a_2 , a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ

กำหนดให้ $A=2a_2-\frac{3}{4}a_3^2\neq 0$, $B=3a_1-\frac{1}{2}a_2a_3$, $C=4a_0-\frac{1}{4}a_1a_3$

ถ้า $2a_2-\frac{4C}{A}-\frac{3a_3B}{A}+\frac{4B^2}{A^2}=a_1-\frac{3a_3C}{A}+\frac{4BC}{A^2}=C-\frac{B^2}{4A}=0$ แล้ว $f(x)=0$ มีราก คือ $x=-\frac{B}{2A}$ มีภาวะรากซ้ำสามและรากเชิงเดี่ยว คือ $x=\frac{3B-2a_3A}{2A}$

ทฤษฎีบทที่ 4.8 ให้ $f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ เมื่อ a_3,a_2,a_1 และ a_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ กำหนดให้ $A=2a_2-\frac{3}{4}a_3^2\neq 0, B=3a_1-\frac{1}{2}a_2a_3, \mathrm{C}=4\,\mathrm{a}_0-\frac{1}{4}a_1a_3$

$$E=\left(2a_2-\frac{4C}{A}\right)-\left(\frac{B}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)\right)\neq 0 \text{ และ } F=a_1-\frac{C}{A}\left(3a_3-\frac{4B}{A}\right)\neq 0$$

ถ้า $C-\frac{BF}{E}+\frac{AF^2}{E^2}=0$ แล้ว $f(x)=0$ มีรากซ้ำสองคือ $x=-\frac{F}{E}$ และรากที่เหลืออีกสองราก หาได้จาก $x^2+\frac{(a_3E-2F)}{E}x+\left[a_2E-(a_3E-F)\frac{F}{E}-\frac{a_2EF-2F^2}{E}\right]\frac{1}{E}$

ทฤษฎีบท 4.9 ให้ $f(x)=x^5+a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1$ โดยที่ a_5,a_4,a_3 และ a_1 เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนจริง เมื่อ

$$a_2=\left(5a_5^4/64\right)-\left(3a_4a_5^2/8\right)+\left(a_4^2/4\right)+\left(a_3a_5/2\right)-\left[\frac{\left(a_3a_4/4\right)+\left(a_4a_5^3/16\right)-\left(a_4^2a_5/8\right)-\left(a_3a_5^2/16\right)-\frac{a_5^5}{128}-\frac{a_1}{2}}{\left(a_3/2\right)+\left(a_5^3/16\right)-\left(a_4a_5/4\right)}\right]^2$$

โดยที่ $\left(a_3/2\right)+\left(a_5^3/16\right)-\left(a_4a_5/4\right)\neq 0$ และ $b_0=\pm\frac{a_7}{a_6}$ จะสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

1) ถ้า $b_0=a_7/a_6$ เมื่อ $b_0=\left(a_3/2\right)+\left(a_5^3/16\right)-\left(a_4a_5/4\right)$

$$a_6=\sqrt{\left(5a_5^4/64\right)-\left(3a_4a_5^2/8\right)+\left(a_4^2/4\right)+\left(a_3a_5/2\right)-a_2}$$

$$a_7=\left(a_3a_4/4\right)+\left(a_4a_5^3/16\right)-\left(a_4^2a_5/8\right)-\left(a_3a_5^2/16\right)-\left(a_5^5/128\right)-\left(a_1/2\right)$$

แล้ว รากของสมการ $f(x)=0$ คือ

$$x_1=\frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-4\left(b_1-a_6\right)}}{2}, x_2=\frac{-b_2-\sqrt{b_2^2-4\left(b_1-a_6\right)}}{2}$$

$$x_3=\frac{pC_0-B_0}{1-p}, x_4=\frac{-\left(2B_0-2p^2C_0+pf_1\right)}{2+2p+2p^2}+\frac{\left[\left(2B_0+2p^2C_0+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2+p^2C_0^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

$$x_5=\frac{-\left(2B_0+2p^2C_0+pf_1\right)}{2+2p+2p^2}-\frac{\left[\left(2B_0+2p^2C_0+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2+p^2C_0^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

เมื่อ $b_1=\left(a_4/2\right)-\left(a_5^2/8\right), b_2=a_5/2, f_1=\frac{A_1A_2-9A_0}{A_2^2-3A_1}$

$$f_2=\frac{A_1^2-3A_0A_2}{A_2^2-3A_1} \quad B_0=\frac{f_1+\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$C_0=\frac{f_1-\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad p=\left[\frac{2A_2-3f_1-3\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2A_2-3f_1+3\left(f_1^2-4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$A_2=b_2, A_1=\left(b_1+a_6\right), A_0=2b_0$$

$$b_0 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_5^3}{16} - \frac{a_4 a_5}{4}$$

2) ถ้า $b_0 = -\frac{a_7}{a_6}$ เมื่อ $a_6 = \sqrt{\frac{5a_5^4}{64} - \frac{3a_4 a_5^2}{8} + \frac{a_4^2}{4} + \frac{a_3 a_5}{2} - a_2}$

$$a_7 = \frac{a_3 a_4}{4} + \frac{a_4 a_5^3}{16} - \frac{a_4^2 a_5}{8} - \frac{a_3 a_5^2}{16} - \frac{a_5^5}{128} - \frac{a_1}{2}$$

แล้ว รากของสมการ $f(x) = 0$ คือ

$$x_1 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4(b_1 + a_6)}}{2} \quad x_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4(b_1 + a_6)}}{2} \quad x_3 = \frac{pC_0 - B_0}{1-p}$$

$$x_4 = \frac{-\left(2B_0 - 2p^2C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} + \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

$$x_5 = \frac{-\left(2B_0 - 2p^2C_0 + pf_1\right)}{2+2p+2p^2} - \frac{\left[\left(2B_0 + 2p^2C_0 + pf_1\right)^2 - 4\left(1+p+p^2\right)\left(B_0^2 + p^2C_0^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2}$$

เมื่อ $b_1 = \frac{a_4}{2} - \frac{a_5^2}{8}$, $b_2 = \frac{a_5}{2}$ และ $f_1 = \frac{A_1 A_2 - 9A_0}{A_2^2 - 3A_1}$

$$f_2 = \frac{A_1^2 - 3A_0 A_2}{A_2^2 - 3A_1}, \quad B_0 = \frac{f_1 + \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$C_0 = \frac{f_1 - \left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad p = \left[\frac{2A_2 - 3f_1 - 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2A_2 - 3f_1 + 3\left(f_1^2 - 4f_2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$A_2 = b_2$, $A_1 = (b_1 - a_6)$ และ $A_0 = 2b_0$

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ $f(x)=x^6+a_6x^5+a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1=0$ เมื่อ $a_6,a_5,a_4,a_3,a_2 \in \mathbb{R}$

แล้วมีรากคือ

$$x_1=\frac{-\left(\frac{a_6}{2}\right)+\left(\frac{a_6^2}{4}-4(F_2-g)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$x_2=\frac{-\left(\frac{a_6}{2}\right)-\left(\frac{a_6^2}{4}-4(F_2-g)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$x_3=\frac{-b_1+\left[b_1^2-4(b_0-c_0p)(1-p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

$$x_4=\frac{-b_1-\left[b_1^2-4(b_0-c_0p)(1-p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

$$x_5=\frac{-b_1+\left[b_1^2-4(b_0+c_0p)(1-p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

$$x_6=\frac{-b_1-\left[b_1^2-4(b_0+c_0p)(1-p)\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1-p)}$$

เมื่อ $A_3=\frac{a_6}{2}, A_2=F_2+g, A_1=2F_1, A_0=F_8$

$b_0=\frac{A_1}{A_3}$ $\quad$ b_1 คือ ค่ารากของสมการพหุนาม

$$b_1^3-\frac{4A_2}{A_3}b_1^2+\frac{4\left(A_1A_2+A_2^2-4A_0\right)}{A_3^2}b_1+\frac{8\left(A_0A_3^2+A_1^2-A_1A_2A_3\right)}{A_3^3}=0$$

$p^2=\frac{A_3-2b_1}{A_3}$ $\qquad$ $c_0=\frac{2\left(2A_0A_3b_1-A_1^2\right)}{A_3\left(2A_2b_1-2A_1-A_3b_1^3\right)}$

$$a_1=F_1^2+F_0F_2-(a_6F_5/8)-F_0g+\left[\left(16F_2-a_6^2\right)/16\right]g^2-g^3-\left(F_5^2/16g^2\right)$$

และ

$$F_0 = a_3 - F_2^2 - a_6 F_1$$
$$F_1 = \left(a_4 - a_6 F_2\right)/2$$
$$F_2 = \left(a_5/2\right) - \left(a_6^2/8\right)$$
$$F_3 = a_2 - 2F_1F_2$$
$$F_4 = a_1 - F_1^2$$
$$F_5 = a_6 F_0 - 2F_3$$
$$F_6 = F_4 - F_0 F_2$$
$$F_7 = -F_0 F_1$$

$g \in \mathbb{R}$ คือ ค่ารากของสมการ $a_6 g^4 - 4F_1 g^3 + \left(F_5 + a_6 F_0\right) g^2 + 4F_7 g + F_0 F_5 = 0$

เมื่อ $$F_8 = F_0 + g^2$$

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อวิเคราะห์ว่าค่ารากของสมการพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่า8ในรูปแบบทั่วไปนั้นมีรูปแบบเป็นอย่างไร โดยนำวิธีการต่างๆที่มีอยู่มาศึกษาและเป็นเครื่องมือ เพื่อนำมาพัฒนาและต่อยอด ดังที่กล่าวมาในบทที่ 4 นั้นคือ สร้างรูปแบบทั่วไปของรากซ้ำของสมการพหุนามที่มีภาวะรากซ้ำโดยใช้วิธีการหารากซ้ำ ซึ่งเป็นวิธีที่ซับซ้อน ในด้านการดำเนินการของพหุนามจนไปถึงการหาตัวหารร่วมมากของพหุนาม เพื่อง่ายต่อการนำไปใช้ ทั้งนี้ จากการศึกษาวิธีการข้างต้น พบว่าการสร้างรูปแบบทั่วไปของค่ารากซ้ำของสมการพหุนามที่มีภาวะรากซ้ำนั้นทำได้ แต่ยุ่งยากต่อการนำไปใช้ในสมการพหุนามที่มีภาวะรากซ้ำดีกรีมากกว่า 4 มากกว่าวิธีการเดิม จึงศึกษาแค่ สมการพหุนามที่มีภาวะรากซ้ำดีกรีน้อยกว่า 5 และ จากงานวิจัยของ ดร. Raghavendra G. Kulkarni ได้ใช้วิธีการทำให้เป็นหน่วยเดียวกัน ในการหารากของสมการพหุนาม แต่ได้พิจารณาเพียงสมการพหุนามดีกรี 2 3 4 6 และ7 เท่านั้น และมีเงื่อนไขบางอย่าง ซึ่งอยู่ในบทที่ 3 เนื่องจากงานวิจัยของ ดร. Raghavendra G. Kulkarni ยังไม่ได้พิจารณาสมการพหุนามดีกรี 5

งานวิจัยครั้งนี้จึงสนใจที่จะศึกษาการหาค่ารากของสมการพหุนามดีกรี5 โดยศึกษาและวิเคราะห์เพิ่มเติม ด้วยวิธีการดังกล่าว โดยจำเป็นต้องเพิ่มเงื่อนไขบางอย่าง นอกจากนี้ ยังศึกษาและวิเคราะห์ สมการพหุนามดีกรี6ซึ่งมีเงื่อนไขที่แตกต่างจากงานวิจัยเดิม

อย่างไรก็ตาม งานวิจัยนี้มีข้อจำกัด สำหรับบางเงื่อนไขที่ยังไม่พิจารณาใน ณ เวลานี้ ซึ่งต้องอาศัยงานวิจัยอื่นๆมาช่วยในการหารากของสมการพหุนามที่ไม่ได้อยู่ในงานวิจัยนี้ต่อไป

บรรณานุกรม

[1] Kulkarni, R.G..(2006). **Unified method for solving general polynomial equations of degree less than five**. Alabama Journal of Mathematics, (30), 1-16.

[2] Kulkarni, R.G..(2008). **Solving sextic equations.** Atlantic Electronic Journal of Mathmatics, (3), 56-60.

[3] Kulkarni, R.G..(2008). **Solving septics in radicals**. Atlantic Electronic Journal of Mathematics, (16), 9-19.

[4] ผศ. สุพรรณ เพ็งชัย **ทฤษฎีสมการเบื้องต้น** สุวีริยาสาส์น 2554