

การวิเคราะห์สายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบน
ท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

ANALYSIS OF A CONICAL BEAM ANTENNA USING CIRCUMFERENTIAL
APERTURE ON RADIAL WAVEGUIDE

บุญฤทัย เครือแก้ว
BOONRUTAI KRUEKAEW

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาด้านหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2547

ISBN 974-15-1080-2

การวิเคราะห์สายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบน
ท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

ANALYSIS OF A CONICAL BEAM ANTENNA USING CIRCUMFERENTIAL
APERTURE ON RADIAL WAVEGUIDE

บุญฤทัย เครือแก้ว
BOONRUTAI KRUEKAEW

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. 2547
ISBN 974-15-1080-2

ANALYSIS OF A CONICAL BEAM ANTENNA USING CIRCUMFERENTIAL
APERTURE ON RADIAL WAVEGUIDE

BOONRUTAI KRUEKAEW

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATION ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2004

ISBN 974-15-1080-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์สายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี
นักศึกษา	นางสาวบุญฤทัย เครือแก้ว
รหัสนักศึกษา	45061064
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2547
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	ดร. ชูวงศ์ พงศ์เจริญพาณิชย์

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการนำเสนอสายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี สายอากาศชนิดนี้จะมีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นรูปกรวยและมีการโพลาริไซส์แนวตั้ง โครงสร้างของสายอากาศประกอบด้วยแผ่นระนาบตัวนำวงกลมสองแผ่นวางขนานกันในระนาบ-แนวนอน ในการวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นที่เกิดจากช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี จะใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในการพิจารณานิพจน์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยพิจารณาผลที่เกิดจากโพรบป้อนสัญญาณร่วมด้วย คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นที่นำมาพิจารณา ได้แก่ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยก ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด และคุณลักษณะการโพลาริไซส์ ท้ายที่สุดได้ออกแบบและสร้างสายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีขึ้นที่ความถี่ 2.45 GHz เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในย่านความถี่ของระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย และนำผลที่ได้จากการทดสอบที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้สอดคล้องกันสำหรับสายอากาศชนิดนี้เหมาะสำหรับใช้ในระบบการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย เช่น ใช้เป็นสายอากาศที่สถานีฐานบนเพดานเพื่อให้บริการครอบคลุมคอมพิวเตอร์ในห้อง เป็นต้น

Thesis Title	Analysis of a Conical Beam Antenna using Circumferential Aperture on Radial Waveguide
Student	Miss Boonrutai Kruekaew
Student ID.	45061064
Degree	Master of Engineering
Programme	Telecommunication Engineering
Year	2004
Thesis Advisor	Dr. Chuwong Phongcharoenpanich

ABSTRACT

This thesis presents a research study on a conical beam antenna using the circumferential aperture on the radial waveguide. This antenna provides the vertically polarized radiation. The structure of antenna is composed of two circular plates that is paralleled as a layer in horizontal plane. The Dyadic Green's function technique is used to calculate the radiation field of the circumferential aperture beside the radial waveguide. The effect of a probe is incorporated. The numerical results of the radiation characteristics such as radiation pattern, elevation beam peak, half power beamwidth, maximum directivity and polarization of the antenna are also demonstrated. The antenna was fabricated and tested at the wireless LAN frequency range (2.45 GHz) to clarify the antenna performances. Then, the measured and calculated results are compared. And the results are a fairly good correlations. The application of the antenna can be used for wireless LAN system, such as installing on the ceiling to communicate between the computers for wireless LAN communications.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี เนื่องจากความกรุณาและความช่วยเหลือของ ดร. ชูวงศ์ พงศ์เจริญพาณิชย์ อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้คอยให้คำปรึกษา ข้อชี้แนะในหลายสิ่งหลายอย่าง จนกระทั่งลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้ ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.โมไนย ไกรฤกษ์ที่ชี้แนะแนวทางและข้อบกพร่องของงานวิจัย และรองศาสตราจารย์ ดร.สมผล โกศลวิตร ในการให้คำแนะนำในการสร้างและทดสอบสายอากาศ

นอกจากนี้ขอขอบคุณสมาชิกของห้องปฏิบัติการการสื่อสารไร้สายที่ให้คำแนะนำและข้อติชมระหว่างการทำวิทยานิพนธ์ตลอดช่วงเวลาที่ผ่านไป ขอขอบคุณ คุณไพโรจน์ วุ่นชุม คุณธนรัตน์ สร้อยสุวรรณ คุณสุธาสินี ละมุลตรี และคุณดำรง บุญรอด สำหรับความช่วยเหลือและคำแนะนำในการทดสอบสายอากาศ ขอขอบคุณเพื่อนๆ ภูเก็ท และเพื่อน ENE 07 ทุกคน สำหรับมิตรภาพ กำลังใจ ความสนุกสนานและสิ่งดีๆ ที่มีให้เสมอมา และขอขอบคุณ คุณเอกรัฐ บุญงา สำหรับคำแนะนำในการจัดเรียงรูปเล่มวิทยานิพนธ์

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา เป็นอย่างยิ่งที่คอยให้กำลังใจ ให้การสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ และให้คำปรึกษาในทุกๆ ด้านตลอดมา

บุญฤทธิ์ เครือแก้ว

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VII
สารบัญรูป	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์และขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	3
1.3 สมมติฐานของงานวิจัย	3
1.4 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์	3
บทที่ 2 ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีและฟังก์ชันสเกลาร์.....	5
2.1 บทนำ.....	5
2.2 การวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นโดยอาศัยฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์	5
2.2.1 สมการเวกเตอร์ของคลื่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลาแบบฮาร์มอนิกส์	7
2.2.2 การหาคำตอบจากสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับระบบพิกัดทรงกระบอก ...	8
2.3 ท่อนำคลื่นเชิงรัศมี.....	12
2.3.1 โหมดคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวาง	14
2.3.2 โหมดคลื่นสนามแม่เหล็กตามขวาง	18
2.4 สรุป	20
บทที่ 3 การวิเคราะห์สายอากาศโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก.....	21
3.1 บทนำ.....	21
3.2 ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี	22
3.3 ความสัมพันธ์ตั้งฉากของฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์.....	26
3.4 ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมี	28

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.5 สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่องเปิดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี.....	39
3.6 สมการการแพร่กระจายคลื่นที่สนามระยะไกล	42
3.7 สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อน.....	48
3.8 สรุป	51
บทที่ 4 การวิเคราะห์ผลการคำนวณและผลการทดสอบสายอากาศ.....	54
4.1 บทนำ.....	54
4.2 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ.....	54
4.2.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ	54
4.2.2 ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยก.....	58
4.2.3 ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง.....	59
4.2.4 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด.....	60
4.3 คุณลักษณะการโพลาไรซ์	63
4.4 การออกแบบและทดสอบสายอากาศ	64
4.5 ผลการทดสอบสายอากาศ.....	65
4.5.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น.....	65
4.5.2 คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์	67
4.6 สรุป	68
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	69
5.1 สรุปเนื้อหาโดยรวม	69
5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางในการพัฒนา	70
เอกสารอ้างอิง	71

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
ภาคผนวก.....	74
ภาคผนวก ก ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีชนิดต่างๆ	75
ภาคผนวก ข คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ	79
ภาคผนวก ค ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก.....	97
ภาคผนวก ง การวิเคราะห์สายอากาศโดยใช้วิธีศักย์เวกเตอร์	108
ประวัติผู้เขียน.....	118

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
4.1 คุณสมบัติเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศเมื่อวัดที่มีของแผ่นวงกลมเท่ากับ 0.6λ	67

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 การประยุกต์ใช้งานสายอากาศในระบบการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย	2
2.1 ระบบพิกัดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน.....	14
3.1 โครงสร้างของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี	24
3.2 สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อน.....	49
3.3 สายอากาศแบบช่องเปิดวางเหนือระนาบตัวนำขนาดอนันต์	49
3.4 แหล่งกำเนิดแม่เหล็กพร้อมทั้งแหล่งกำเนิดเสมือน	49
3.5 กระแสแม่เหล็กในแนวระนาบวางเหนือตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์	50
4.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมยกที่รัศมีของแผ่นระนาบ ตัวนำ เท่ากับ 0.2λ 0.6λ 0.8λ และ 1.2λ ตามลำดับ.....	55
4.2 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมกวาดที่รัศมีของแผ่นระนาบ ตัวนำ เท่ากับ 0.2λ 0.6λ 0.8λ และ 1.2λ ตามลำดับ.....	56
4.3 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่ลู่เข้า (converge) เมื่อ n และ m เท่ากับ 6 ที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.6λ	57
4.4 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศวางบนตัวสะท้อนในระนาบมุมยกที่รัศมีของ แผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.2λ 0.6λ 0.8λ และ 1.6λ ตามลำดับ.....	57
4.5 ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบ วงกลม.....	58
4.6 มุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่น ระนาบตัวนำทั้งสอง.....	58
4.7 ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบวงกลม	59
4.8 ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นระนาบ ตัวนำทั้งสอง	60
4.9 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ วงกลม.....	61
4.10 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นระนาบตัวนำ ทั้งสอง.....	61
4.11 กราฟแผนภูมิโครงร่างของค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันของขนาด รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ และ ระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นตัวนำทั้งสอง.....	62

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.12 กราฟแผนภูมิโครงร่างของค่าสภาพเจาะจงที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบ ตัวนำและระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นตัวนำทั้งสอง	63
4.13 ค่าอัตราส่วนแกนของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเมื่อ $a = 0.6\lambda$	63
4.14 ค่ามุมเอียงของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเมื่อ $a = 0.6\lambda$	64
4.15 สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่มีความถี่ 2.45 GHz.....	65
4.16 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ที่ความถี่ 2.45 GHz.....	66
4.17 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ที่แมตซ์โดยใช้สตัดที่ความถี่ 2.45 GHz.....	67
4.18 คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเมื่อรัศมีของ แผ่นวงกลมเท่ากับ 0.6λ	68
ก.1 ระบบพิกัดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบลิ้ม	75
ก.2 ระบบพิกัดของท่อนำคลื่นเชิงปากแตรแบบเซกเตอร์	77
ข.1 ระบบพิกัดที่ใช้แสดงคุณสมบัติของการแพร่กระจายคลื่น	80
ข.2 ส่วนต่างของแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น.....	81
ข.3 การโพลาไรซ์แบบต่างๆ (ก) การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น (ข) การโพลาไรซ์แบบวงกลม (ค) การโพลาไรซ์แบบวงรี	84
ข.4 การพิจารณาโพลาไรเซชันของคลื่น	85
ข.5 การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นในทิศทาง θ	86
ข.6 การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นในทิศทาง ϕ	87
ข.7 การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นในทิศทาง γ	88
ข.8 การโพลาไรซ์แบบวงกลมที่เวกเตอร์สนามไฟฟ้าหมุนไปทางขวามือ.....	90
ข.9 การโพลาไรซ์แบบวงกลมที่เวกเตอร์สนามไฟฟ้าหมุนไปทางซ้ายมือ.....	91
ข.10 การโพลาไรซ์แบบวงรีที่เวกเตอร์สนามไฟฟ้าหมุนทางขวามือและซ้ายมือ.....	94
ข.11 การโพลาไรซ์แบบวงรีที่ไม่ได้อยู่ที่แกนหลักซึ่งมีมุมเอียงออกจากแกนอ้างอิง θ	96
ค.1 สนามไฟฟ้าอันเนื่องมาจากแหล่งกำเนิดไดโพลไฟฟ้าจิวสามตำแหน่งที่วางอยู่ที่ \bar{R}' ใน ทิศทาง x, y และ z	107
ง.1 ฝั่งงานการหาคำตอบของสนามที่แพร่กระจายจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าและแม่เหล็ก	108

สารบัญญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
ง.2	พื้นที่องค์ประกอบ 109
ง.3	แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมยก 114
ง.4	แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมกวาด 115
ง.5	ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นวงกลม 115
ง.6	ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันความถี่เมื่อ $a = 0.6\lambda$ 116
ง.7	ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันของรัศมีของแผ่นวงกลม 116
ง.8	ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันความถี่เมื่อ $a = 0.6\lambda$ 116
ง.9	ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นวงกลม 117
ง.10	ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดที่เป็นฟังก์ชันความถี่เมื่อ $a = 0.6\lambda$ 117

บทที่ 1

บทนำ

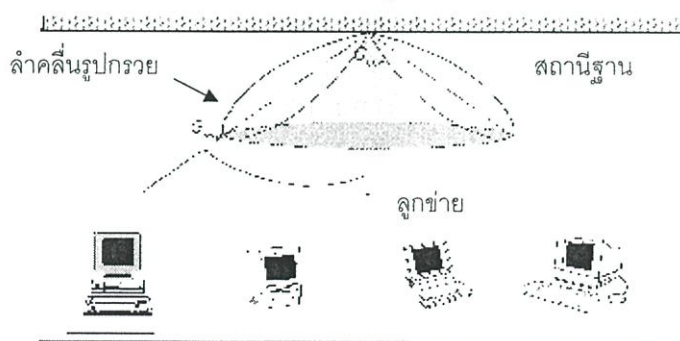
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันเทคโนโลยีการสื่อสารไร้สายและการสื่อสารเคลื่อนที่เข้ามามีบทบาทในชีวิตประจำวันเป็นอย่างมาก จึงได้มีการศึกษาค้นคว้าและพัฒนาอุปกรณ์ชนิดหนึ่งที่ทำหน้าที่รับและส่งสัญญาณซึ่งมีความสำคัญอย่างยิ่งในระบบการสื่อสารไร้สายนั่นก็คือสายอากาศ ในการสร้างสายอากาศนั้นสิ่งสำคัญที่ต้องคำนึงถึงคือ โครงสร้างของสายอากาศต้องไม่ซับซ้อนสามารถสร้างได้ง่าย และใช้ต้นทุนในการผลิตต่ำ เพื่อที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในระบบดังกล่าว สำหรับสายอากาศที่ให้ลาคลื่นรูปกรวยนั้น เป็นสายอากาศอีกชนิดหนึ่งที่เหมาะสมกับการนำมาใช้ในระบบการสื่อสารดังกล่าว เนื่องจากการใช้สายอากาศชนิดนี้ไม่จำเป็นต้องใช้ระบบติดตามเป้าหมาย(Tracking System) ซึ่งทำให้ลดความสิ้นเปลืองลงไปได้มาก ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้นนี้ ทำให้สายอากาศลาคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีจึงเป็นสายอากาศอีกชนิดหนึ่งที่น่าสนใจ และเหมาะสำหรับนำไปใช้ในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สายเพื่อครอบคลุมพื้นที่ให้บริการในหน่วยงานต่างๆ เนื่องจากสายอากาศชนิดนี้จะให้คุณสมบัติตรงตามที่กล่าวมา นั่นคือให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเป็นลาคลื่นรูปกรวย (Conical Beam Antenna) และโครงสร้างของสายอากาศสามารถออกแบบและสร้างได้ง่าย ใช้ต้นทุนต่ำ

ในช่วงเวลาที่ผ่านมาได้มีการศึกษาค้นคว้า และวิจัยเกี่ยวกับสายอากาศที่ให้ลาคลื่นรูปกรวยเป็นจำนวนมาก ตัวอย่างสายอากาศที่ให้ลาคลื่นรูปกรวย ได้แก่ สายอากาศไมโครสตริป (Microstrip Antenna)[1]-[2] สายอากาศชนิดแพตช์ (Patch Antenna)[3]-[6] สายอากาศชนิดเกลียว(Helical Antenna) [7] สายอากาศโมโนโพล(Monopole Antenna) [7]-[8] สายอากาศบ่วง (Loop Antenna)[9] และ สายอากาศแบบท่อนำคลื่นเชิงรัศมี[10] ซึ่งคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่เป็นรูปกรวยที่สมบูรณ์นั้น จะมีลักษณะดังนี้ คือจะมีค่าสนามเป็นศูนย์ในแนวตั้งฉากกับระนาบของสายอากาศ ค่าสูงสุดของสนามจะชี้ไปยังเป้าหมายหรือลูกข่ายและแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมกวาดจะมีความแรงของสนามเท่ากันทุกทิศทาง ในการนำสายอากาศชนิดนี้มาใช้ในระบบการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สายดังแสดงในรูปที่ 1.1 สายอากาศจะต้องมีค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดไม่น้อยกว่า 4 dBi ทางด้านการโพลาริซันนั้นพบว่าได้มีการศึกษาค้นคว้างานวิจัยที่เน้นถึงการออกแบบสายอากาศที่มีการโพลาริซันเชิงเส้น [2],[4] และโพลาริซันแบบวงกลม [7] เพื่อนำไปประยุกต์ใช้งานตามความต้องการของระบบต่อไป

นอกจากนี้ยังได้รวบรวมการศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีไว้ดังนี้ ในปี 1967 R. B.Solosko และ S. R. Laxpati [11] ได้นำเสนอสายอากาศแบบรายคาบล็อก (Log-Periodic Antenna) จากแถวลำดับของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีกระตุ้นด้วยสายส่งคู่ เพื่อนำไปใช้ขยายแถบความถี่ใช้งานให้กว้างขึ้น สายอากาศให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบรอบทิศทางและการโพลาไรซ์แนวตั้ง ในปี 1973 D. W. Holst [12] ได้วิเคราะห์แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีปลายเปิดบนโหมดการแพร่กระจายคลื่นแม่เหล็กตามขวาง(TM mode) อีก 5 ปีต่อมาในปี 1978 B.Azarbar และ L.Shafai [13]-[14] ได้ศึกษาคุณลักษณะของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่ถูกเชื่อมด้วยช่องเปิดวงแหวน (annular slots) โดยใช้วิธี boundary value treatment และใช้ฟังก์ชันกรีนหาสนามการแพร่กระจายคลื่นภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบร่องไม่ต่อเนื่อง 2 ท่อเชื่อมต่อกัน โดยพิจารณาที่โหมด TM_{00} เพื่อนำไปใช้เป็นตัวกรองหรือตัวเชื่อมสำหรับระบบส่วนป้อน (feed) ในปี 1990 J. Hirokawa และคณะ[15] ได้วิเคราะห์การเชื่อมต่อร่องบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้ทฤษฎีสนามสมมูลและใช้วิธีการเชิงเลขของ Galerkin เพื่อใช้เป็นสายอากาศระนาบสำหรับการส่งสัญญาณผ่านดาวเทียม ในปี1992 H. Nakano และคณะ[16] ทำการศึกษาสายอากาศชนิดเกลียววางบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี เพื่อนำไปใช้เป็นสายอากาศในการแพร่ภาพผ่านดาวเทียมที่ความถี่ 11.7-12.0 GHz ในปี 1999 V. H. Hanser และคณะ [17] ได้วิเคราะห์สนามที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องเชิงเวลา (Finite Difference Time Domain : FDTD) ในย่านความถี่วิทยุเพื่อนำไปใช้ในวัตถุประสงค์ทางชีววิทยา และในปี 2003 Voronin E. N. และคณะ [18] ได้ศึกษาสายอากาศแถวลำดับเฟสช่องเปิดวงกลมโดยใช้ท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ซึ่งมีข้อดีในด้านโครงสร้างที่กะทัดรัด เพื่อนำไปใช้สำหรับเรดาร์ air-borne ที่ความถี่ประมาณ 10 GHz

จากการศึกษาและค้นคว้าที่ผ่านมาพบว่ายังไม่มีการวิเคราะห์สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้นำเสนอการวิเคราะห์สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีคัลคูลัสเวกเตอร์ [19] เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย



รูปที่ 1.1 การประยุกต์ใช้งานสายอากาศในระบบการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย

1.2 วัตถุประสงค์และขอบเขตของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอสายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่มีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเป็นรูปกรวยและมีการโพลาริซ์แนวตั้ง ซึ่งเป็นสายอากาศอีกชนิดหนึ่งที่เหมาะสมสำหรับนำไปใช้ในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สายเป็นสถานีฐานเพื่อครอบคลุมพื้นที่ให้บริการในหน่วยงานต่างๆ โครงสร้างของสายอากาศจะประกอบด้วยแผ่นระนาบตัวนำวงกลม 2 แผ่นวางขนานกัน และป้อนสัญญาณที่จุดศูนย์กลางของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมด้วยโพรบ ซึ่งโครงสร้างสายอากาศนี้จะมีลักษณะที่ไม่ซับซ้อน ส่วนแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะคิดจากสนามที่เกิดขึ้นระหว่างแผ่นตัวนำวงกลมทั้งสอง และวิเคราะห์คุณลักษณะของแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเมื่อเปลี่ยนขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม นอกจากนี้ได้คำนวณค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยก ความกว้างของลำคลื่นครึ่งกำลัง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง และคุณลักษณะการโพลาริซ์ของสายอากาศด้วย ส่วนทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์สายอากาศนั้นจะใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเพื่อนำไปเปรียบเทียบกับวิธีคัลคูลัสเวกเตอร์แม่เหล็กไฟฟ้า[19] จากนั้นได้ออกแบบและสร้างสายอากาศต้นแบบที่ความถี่ 2.45 GHz ซึ่งเป็นย่านความถี่การสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย เพื่อทดสอบและเปรียบเทียบผลจากการทดสอบและผลที่ได้จากการคำนวณ

1.3 สมมติฐานของงานวิจัย

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเพื่อไปประยุกต์ใช้ในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย ซึ่งสายอากาศที่ใช้กับระบบดังกล่าวจะต้องมีคุณสมบัติคือให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นรูปกรวย มีโพลาริซ์เชิงเส้นหรือแบบวงกลม และค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดไม่น้อยกว่า 4 dBi รวมทั้งสายอากาศที่ออกแบบควรจะต้องมีความถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้นำเสนอวิธีวิเคราะห์สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี โดยมีข้อสมมติฐานว่าเมื่อใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในการวิเคราะห์สายอากาศ ผลการคำนวณที่ได้จะมีความถูกต้องแม่นยำ ให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นรูปกรวย และการโพลาริซ์แนวตั้ง สามารถนำไปใช้ในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สายได้

1.4 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นกรนำเสนอการวิเคราะห์สายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาทั้งหมด 5 บท ในแต่ละบทมีรายละเอียดโดยสรุปดังนี้

บทที่ 1 จะกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัยจากอดีตจนถึงปัจจุบัน นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงวัตถุประสงค์และขอบเขตของงานวิจัย รวมทั้งสมมติฐานของงานวิจัยด้วย และท้ายที่สุดได้กล่าวถึงเนื้อหาโดยสรุปของวิทยานิพนธ์ในแต่ละบท

บทที่ 2 จะอธิบายถึงความหมายและการพิจารณาท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนานบนพื้นฐานโหมดการแพร่กระจายคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวางและโหมดคลื่นสนามแม่เหล็กตามขวางที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น โดยเริ่มจากสมการแมกซ์เวลล์ และใช้สมการอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซลเพื่อใช้หาผลเฉลยของสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกสำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

บทที่ 3 จะแสดงโครงสร้างของสายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่ป้อนสัญญาณด้วยโพรบ การวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นโดยอาศัยทฤษฎีฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอติก ฟังก์ชันกรีนไดแอติกในช่องว่างอิสระของโครงสร้างท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ซึ่งจะใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบแม่เหล็กและแบบไฟฟ้า เพื่อนำไปใช้หาสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อนโดยอาศัยหลักการของทฤษฎีเงาด้วย

บทที่ 4 แสดงผลการวิเคราะห์คุณลักษณะต่างๆ ของสายอากาศลำคลื่นรูปกรวยบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี โดยใช้วิธีการและเทคนิคต่างๆ ที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 3 และ 4 ซึ่งได้จากการวิเคราะห์โดยใช้วิธีคัลกัลเวกเตอร์และฟังก์ชันกรีนไดแอติกตามลำดับ นำมาเปรียบเทียบผลเพื่อความถูกต้องแม่นยำก่อนที่จะพิจารณาเลือกค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม จากนั้นเป็นขั้นตอนการสร้างและทดสอบสายอากาศเพื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎี

บทที่ 5 เป็นการสรุปผลการวิจัยทั้งหมด และแสดงข้อเสนอแนะแนวทางสำหรับการพัฒนาสายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีให้ดียิ่งขึ้นต่อไป

สุดท้ายเป็นภาคผนวกที่รวบรวมหลักการต่างๆ ที่เกี่ยวข้องในวิทยานิพนธ์นี้ กล่าวคือ ภาคผนวก ก จะกล่าวถึงท่อนำคลื่นเชิงรัศมีชนิดต่างๆ ภาคผนวก ข จะกล่าวถึงคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นพื้นฐานของสายอากาศ ภาคผนวก ค จะกล่าวถึงพีชคณิตของฟังก์ชันกรีนไดแอติก และการเขียนสมการแมกซ์เวลล์ในรูปของไดแอติก และภาคผนวก ง จะกล่าวถึงการวิเคราะห์สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้วิธีคัลกัลเวกเตอร์ ทั้งนี้เพื่อความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาของวิทยานิพนธ์นี้ยิ่งขึ้น

บทที่ 2

ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีและฟังก์ชันสเกลาร์

2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงท่อนำคลื่นเชิงรัศมีซึ่งเป็นโครงสร้างที่ใช้ นำคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่สูง เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้ความเข้าใจในการศึกษาเรื่องสายอากาศที่จะกล่าวถึงในบทต่อไป ในส่วนของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีได้กล่าวถึงความหมายและท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน คุณลักษณะเฉพาะของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายในท่อนำคลื่น รวมทั้งสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าโดยพิจารณาบนพื้นฐานของโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางและโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น โดยเริ่มจากสมการแมกซ์เวลล์ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มสนามไฟฟ้ากับความเข้มสนามแม่เหล็ก และใช้สมการอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซลเพื่อใช้หาผลเฉลยของสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกสำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีต่อไป

2.2 การวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นโดยอาศัยฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์

จากสมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation) [20] ในรูปของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \bar{E} = -\bar{M}_i - \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_i + \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

โดยที่

\bar{E} = ความเข้มสนามไฟฟ้า (volts/meter)

\bar{H} = ความเข้มสนามแม่เหล็ก (amperes/meter)

\bar{J}_i = ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (amperes/square meter)

\bar{M}_i = ความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก (volts/ square meter)

μ = ค่าความซึมซาบแม่เหล็ก (henries/meter)

ϵ = ค่าสภาพยอมไฟฟ้า (farads/meter)

σ = ค่าความนำไฟฟ้า (siemens/meter)

จากสมการที่ (2.1) และ (2.2) ของแมกซ์เวลล์ จะเห็นได้ว่าทั้งสองสมการมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ สนามของ \vec{E} และ \vec{H} ซึ่งอยู่ในแต่ละสมการ และเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนั้นเพื่อให้ การแก้ปัญหาคงปัญหาจึงพิจารณาสมการทั้งสองให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นจาก สมการที่(2.1) และ(2.2) เวิร์ทั้งสองข้างของสมการและกำหนดให้เป็นตัวกลางเอกพันธ์ (Homogeneous Medium) สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \vec{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J}_i + \sigma \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \quad (2.4)$$

นำสมการที่ (2.1) และ (2.2) แทนลงในสมการที่ (2.3) และ (2.4) ตามลำดับโดยใช้คุณสมบัติของ ลaplacian ของเวกเตอร์ (Laplacian of vector)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.5)$$

ดังนั้นสมการที่ (2.3) จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\nabla \times \vec{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{J}_i + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}) \\ \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\nabla \times \vec{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}_i - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \end{aligned} \quad (2.6)$$

จากสมการแมกซ์เวลล์สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า(Electric Flux Density) ดังสมการ

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = q_{ev} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = q_{ev} / \epsilon \quad (2.7)$$

แทนสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.6) แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \vec{M}_i + \frac{1}{\epsilon} \nabla q_{ev} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}_i + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (2.8)$$

สำหรับสมการที่ (2.4) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} &= -\nabla \times \bar{J}_i + \sigma(-\bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(-\bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}) \\ \nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} &= -\nabla \times \bar{J}_i - \sigma \bar{M}_i - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{H} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_i - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{H}\end{aligned}\quad (2.9)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็กและความเข้มสนามแม่เหล็ก

$$\nabla \cdot \bar{B} = \mu \nabla \cdot \bar{H} = q_{mv} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{H} = q_{mv} / \mu \quad (2.10)$$

แทนสมการที่ (2.10) ลงในสมการที่ (2.9) จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\nabla^2 \bar{H} = -\nabla \times \bar{J}_i + \sigma \bar{M}_i + \frac{1}{\mu} \nabla q_{mv} + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{H} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_i + \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{H} \quad (2.11)$$

จากสมการที่ (2.8) และ (2.11) แสดงถึงสมการคลื่นเวกเตอร์สำหรับ \bar{E} และ \bar{H} เมื่อพิจารณากรณีที่ไม่มีแหล่งจ่าย $\bar{J}_i = q_{ev} = 0$ และ $\bar{M}_i = q_{mv} = 0$ และไม่เกิดการสูญเสียอันเนื่องมาจากตัวกลาง (Lossless Media) $\sigma = 0$ ดังนั้นสามารถลดรูปสมการได้เป็น

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E} \quad (2.12)$$

และ

$$\nabla^2 \bar{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{H} \quad (2.13)$$

โดยทั่วไปแล้วสมการที่ (2.12) และ (2.13) จะเป็นสมการเวกเตอร์ของคลื่นของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในรูปแบบที่ง่ายที่สุด

2.2.1 สมการเวกเตอร์ของคลื่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลาแบบฮาร์มอนิกส (Vector Wave Equations of Time-Harmonic Electromagnetic Field)

เมื่อพิจารณาสนามที่แปรผันกับเวลาแบบฮาร์มอนิกสหมายถึงเวลามีการผันแปรในรูปแบบของ $e^{j\omega t}$ ดังนั้นจะได้สมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเช่นเดียวกับกรณีของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลาโดยกำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \quad (2.14\text{ก})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Leftrightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2 \quad (2.14\text{ข})$$

ดังนั้น สามารถเขียนสมการที่ (2.8), (2.11), (2.12) และ (2.13) ได้เป็น

$$\nabla^2 \bar{E} = \nabla \times \bar{M}_i + j\omega\mu J_i + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q_{ev} + j\omega\mu\sigma \bar{E} - \omega^2 \mu\varepsilon \bar{E} \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = -\nabla \times \bar{J}_i + \sigma \bar{M}_i + j\omega\varepsilon \bar{M}_i + \frac{1}{\mu} \nabla q_{mv} + j\omega\mu\sigma \bar{H} - \omega^2 \mu\varepsilon \bar{H} \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \bar{E} = -\omega^2 \mu\varepsilon \bar{E} = -k^2 \bar{E} \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = -\omega^2 \mu\varepsilon \bar{H} = -k^2 \bar{H} \quad (2.18)$$

เมื่อ $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$ และ k คือค่าคงที่ทางเฟส (Phase Constant)

2.2.2 การหาคำตอบจากสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับระบบพิกัดทรงกระบอก

เมื่อพิจารณาสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับสภาวะที่เป็นอิสระจากแหล่งจ่าย (Source-Free) และตัวกลางที่ไม่เกิดการสูญเสีย (Lossless Media) ของสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\bar{E}(\rho, \phi, z) = \hat{a}_\rho E_\rho(\rho, \phi, z) + \hat{a}_\phi E_\phi(\rho, \phi, z) + \hat{a}_z E_z(\rho, \phi, z) \quad (2.19)$$

เมื่อ (ρ, ϕ, z) คือค่าตัวแปรในระบบพิกัดทรงกระบอก

เมื่อแทนสมการที่ (2.19) ลงในสมการที่ (2.13) จะได้ว่า

$$\nabla^2 (\hat{a}_\rho E_\rho + \hat{a}_\phi E_\phi + \hat{a}_z E_z) = -k^2 (\hat{a}_\rho E_\rho + \hat{a}_\phi E_\phi + \hat{a}_z E_z) \quad (2.20)$$

จากสมการที่ (2.20) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\nabla^2 \bar{E} = -k^2 \bar{E} \quad (2.21)$$

จากคุณสมบัติลาปลาเซียของเวกเตอร์ (Laplacian of Vector) สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{E} &= \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla \times \nabla \times \bar{E} \\ \therefore \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla \times \nabla \times \bar{E} &= -k^2 \bar{E}\end{aligned}\quad (2.22)$$

เมื่อแทนสนามไฟฟ้าที่อยู่ในสมการที่ (2.19) ลงในสมการที่ (2.22) จะได้คำตอบที่อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\nabla^2 \bar{E}_\rho + \left(-\frac{\bar{E}_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \bar{E}_\phi}{\partial \phi} \right) = -k^2 \bar{E}_\rho \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 \bar{E}_\phi + \left(-\frac{\bar{E}_\phi}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \bar{E}_\rho}{\partial \phi} \right) = -k^2 \bar{E}_\phi \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 \bar{E}_z = -k^2 \bar{E}_z \quad (2.25)$$

เมื่อ $\nabla^2 \psi(\rho, \phi, z)$ คือ ลาปลาเซียของสเกลาร์ (Laplacian of Scalar) ซึ่งมีค่าในระบบพิกัดทรงกระบอกดังนี้

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (2.26)$$

จากสมการที่ (2.23) และ (2.24) จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้ามากกว่าหนึ่งองค์ประกอบ ทำให้หาคำตอบได้ยาก ดังนั้นจะใช้สมการที่ (2.25) ซึ่งมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าเพียงองค์ประกอบเดียวในการหาคำตอบจากสมการคลื่น จากสมการที่ (2.25) สามารถเขียนได้ใหม่แสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -k^2 F \quad (2.27)$$

เมื่อ $F(\rho, \phi, z)$ คือ ฟังก์ชันสเกลาร์ (Scalar Function) ที่แสดงถึงศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า (Electric Vector Potential) และกำหนดให้ศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้ามีผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$F(\rho, \phi, z) = f(\rho)g(\phi)h(z) \quad (2.28)$$

แทนค่าสมการที่ (2.28) ลงในสมการที่ (2.27) จะได้ว่า

$$gh \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + gh \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + fh \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k^2 fgh \quad (2.29)$$

หารทั้งสองข้างของสมการด้วย fgh และเปลี่ยน $\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}$ จากสมการที่ (2.29) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 g}{d\phi^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k^2 \quad (2.30)$$

จะพบว่าในแต่ละพจน์ของสมการที่ (2.30) จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้น ผลรวมของทุกพจน์จะมีค่าเท่ากับ $-k^2$ ก็ต่อเมื่อค่าของแต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ (Constant) จะได้ว่า

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 h \quad (2.31)$$

เมื่อ k_z คือ ค่าคงที่

นำสมการที่ (2.31) แทนลงในสมการที่ (2.30) แล้วคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย ρ^2 จะได้ว่า

$$\frac{\rho^2}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{\rho}{f} \frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi^2} + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (2.32)$$

เนื่องจากพจน์ที่สามของสมการที่ (2.32) เป็นฟังก์ชันของ ϕ เพียงอย่างเดียว ดังนั้นสมการที่จะกำหนดให้เท่ากับค่าคงที่ใดๆ ได้ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2 \Rightarrow \frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2 g \quad (2.33)$$

และกำหนดให้

$$k^2 - k_z^2 = k_\rho^2 \Rightarrow k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2.34)$$

นำสมการที่ (2.33) แทนลงในสมการที่ (2.32) จะได้ว่า

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + \left[(k_\rho \rho)^2 - m^2 \right] f = 0 \quad (2.35)$$

จากสมการที่ (2.34) จะถูกเรียกว่าเป็น สมการการจำกัด (Constraint Equation) สำหรับคำตอบที่ได้จากสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอก และสมการที่ (2.35) จะถูกเรียกว่าเป็น สมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซล (Bessel Differential Equation)

คำตอบที่ได้จากสมการที่ (2.27) โดยการสมมติคำตอบดังสมการที่ (2.28) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + \left[(k_\rho \rho)^2 - m^2 \right] f = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2 g \quad (2.37)$$

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 h \quad (2.38)$$

โดยที่

$$k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2.39)$$

และคำตอบที่ได้จากสมการที่ (2.36), (2.37) และ (2.38) สามารถแสดงตามลำดับ ได้ดังนี้

$$f_1(\rho) = A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho) \quad (2.40ก)$$

หรือ

$$f_2(\rho) = C_1 H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \quad (2.40\text{ข})$$

และ

$$g_1(\phi) = A_2 e^{-jm\phi} + B_2 e^{+jm\phi} \quad (2.41\text{ก})$$

หรือ

$$g_2(\phi) = C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \quad (2.41\text{ข})$$

และ

$$h_1(z) = A_3 e^{-jk_z z} + B_3 e^{+jk_z z} \quad (2.42\text{ก})$$

หรือ

$$h_2(z) = C_2 \cos(k_z z) + D_2 \sin(k_z z) \quad (2.42\text{ข})$$

โดยที่

$J_m(k_\rho \rho)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับที่ m

$Y_m(k_\rho \rho)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 อันดับที่ m

$H_m^{(1)}(k_\rho \rho)$ คือฟังก์ชันแองเกลชันชนิดที่ 1 อันดับที่ m

$H_m^{(2)}(k_\rho \rho)$ คือฟังก์ชันแองเกลชันชนิดที่ 2 อันดับที่ m

ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองจะแสดงคลื่นนิ่ง และฟังก์ชันแองเกลชันชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองจะแสดงคลื่นจรเช่นเดียวกับในกรณีของคลื่นในระบบพิกัดมุมฉากที่ฟังก์ชันเอกโพเนนเชียลแสดงคลื่นจรและฟังก์ชันตรีโกณมิติแสดงคลื่นนิ่ง เมื่อได้คำตอบของสมการอนุพันธ์ที่แสดงในพจน์ของตัวแปรแต่ละทิศทางแล้วก็จะสามารถหาคำตอบของฟังก์ชัน $\psi(\rho, \phi, z)$ โดยคูณคำตอบทั้งสามที่หาได้ดังสมการที่ (2.28) โดยเลือกคำตอบของแต่ละทิศทางเป็นคลื่นจรหรือเป็นคลื่นนิ่งให้สอดคล้องกับโครงสร้างของปัญหา

2.3 ท่อนำคลื่นเชิงรัศมี (Radial Waveguide)

ในท่อนำคลื่นแบบวงกลม (Circular Waveguide) คลื่นที่เดินทางในทิศทาง $\pm z$ ซึ่งจะแทนการเปลี่ยนแปลงของคลื่นในทิศทางนี้ด้วย $e^{\mp jk_z z}$ และจะมีระนาบซึ่งมีพื้นผิวเฟสมีค่าคงที่ (Equiphasic Surface) เป็นระนาบขนาน (Parallel Planes) ซึ่งตั้งฉากในแนวทิศ z และถ้าคลื่นเดินทางในทิศ $\pm \phi$ จะแทนการเปลี่ยนแปลงของคลื่นในทิศทางนี้ด้วย $e^{\mp jm\phi}$ โดยปกติพื้นที่เฟสเท่า

จะเป็นระนาบตัดขวาง (ระนาบ ϕ เป็นพื้นผิวคงที่) ดังนั้นคลื่นจะเดินทางในทิศทางเส้นรอบวง เรียกว่า “คลื่นหมุน” (Circulating Wave) ซึ่งมีฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$\psi = B_m(k_\rho, \rho)h(k_z z)e^{\pm jm\phi} \quad (2.43)$$

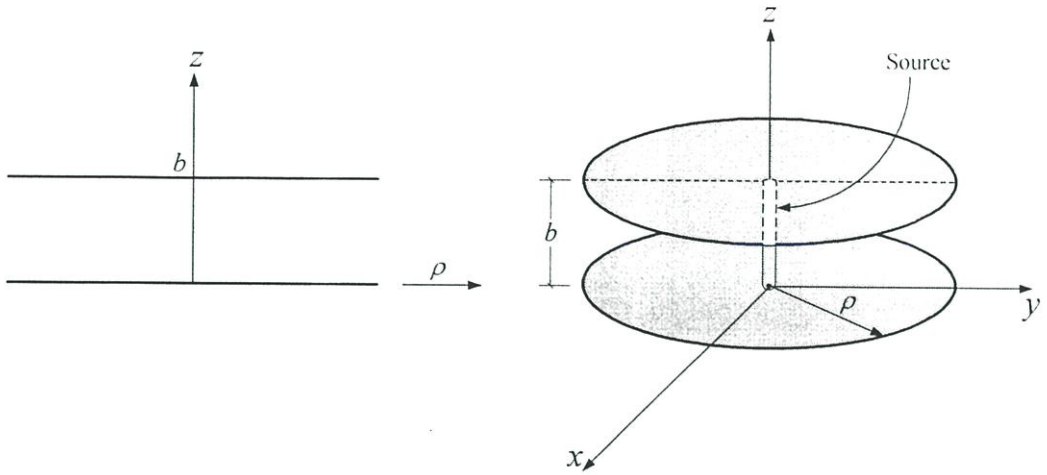
โดยที่ $B_m(k_\rho, \rho)$ และ $h(k_z z)$ เป็นจำนวนจริง สำหรับคลื่นซึ่งเดินทางไปในทิศ $\pm\rho$ (ทิศรัศมีของแผ่นวงกลม) การเปลี่ยนแปลงในทิศนี้จะแทนด้วย $H_m^{(1)}(k_\rho, \rho)$ และ $H_m^{(2)}(k_\rho, \rho)$ ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นคือ

$$\psi = g(k_z z)h(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho, \rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho, \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

โดยที่ $g(k_z z)$ และ $h(m\phi)$ เป็นจำนวนจริง คลื่นเหล่านี้จะมีพื้นที่ผิวเฟสเท่าทรงกระบอก (Cylindrical Equiphase Surface) (ρ เป็นค่าคงที่) ซึ่งหมายถึงคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกที่พิจารณาพื้นผิวเฟสเท่าด้วย จะเรียกว่าคลื่นที่เดินทางในทิศรัศมีว่า “คลื่นรัศมี” (Radial Wave) ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างของท่อนำคลื่นอย่างง่ายซึ่งเหมาะสำหรับการเดินทางของคลื่นรัศมี นั่นคือ ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน (Parallel-Plate Radial Waveguide)

คลื่นที่เกิดขึ้นระหว่างแผ่นตัวนำวงกลมอาจจะเป็นได้ทั้งคลื่นระนาบและคลื่นรัศมี โดยขึ้นอยู่กับการกระตุ้น เมื่อคลื่นที่เกิดขึ้นเป็นคลื่นรัศมีจะเรียกแผ่นระนาบซึ่งคลื่นเดินทางนี้ว่า “ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน” (Parallel-Plate Radial Waveguide) ประกอบด้วยแผ่นวงกลมวงขนานกัน 2 แผ่น ถูกกระตุ้นด้วยแหล่งกำเนิดเชิงเส้น (Line Source) ที่ตำแหน่งกึ่งกลางระหว่างแผ่นทั้งสอง และมีระยะห่างระหว่างแผ่นทั้งสองเท่ากับ b ดังแสดงในรูปที่ 2.1 คลื่นรัศมีซึ่งถูกกระตุ้นจะเดินทางในทิศรัศมี ทำให้ระหว่างแผ่นขนานทั้งสองจะเกิดโหมดขึ้นทั้ง 2 โหมด คือ โหมด TE และ TM สำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีจะให้ $H_m^{(1)}(k_\rho, \rho)$ และ $H_m^{(2)}(k_\rho, \rho)$ แทนทิศทางที่คลื่นเดินทางในทิศ $-\rho$ และ $+\rho$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันสเกลาร์สำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเป็น

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi, z) = & \left[C_1 H_m^{(1)}(k_\rho, \rho) + D_1 H_m^{(2)}(k_\rho, \rho) \right] \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] \\ & \times \left[C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z) \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$



รูปที่ 2.1 ระบบพิกัดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน

2.3.1 โหมดคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวาง (Transverse Electric (TE) mode)

โหมด TE ของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีในรูปที่ 2.1 จะมีฟังก์ชันคลื่น ψ [20],[21] ดังนี้

$$\psi(\rho, \phi, z) = [C_1 H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)}(k_\rho \rho)] [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] \times [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)] \quad (2.46)$$

โดยที่

$$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2 \quad (2.47)$$

ฟังก์ชันคลื่นในโหมด TE จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต $E_\rho = E_\phi = 0$ ที่ $z = 0$ และ $z = b$ กล่าวคือ

$$E_\rho(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = 0) = E_\rho(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = b) = 0 \quad (2.48)$$

และ

$$E_\phi(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = 0) = E_\phi(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = b) = 0 \quad (2.49)$$

เงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 กรณีจะไม่เป็นอิสระต่อกัน โดยทั้งคู่จะนำไปสู่ผลลัพธ์เดียวกัน จากสมการที่ (2.46) และ (2.49) จะได้ส่วนประกอบ E_ϕ ดังนี้

$$\begin{aligned} E_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \\ &= \frac{k_\rho}{\varepsilon} \left[C_1 H_m^{(1)'}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)'}(k_\rho \rho) \right] \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] \\ &\quad \times \left[C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z) \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

จากสมการเงื่อนไขขอบเขตที่ (2.49)

$$\begin{aligned} E_\phi(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = 0) \\ &= \frac{k_\rho}{\varepsilon} \left[C_1 H_m^{(1)'}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)'}(k_\rho \rho) \right] \\ &\quad \times \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] \left[C_3 (1) + D_3 (0) \right] = 0 \\ &\Rightarrow C_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} E_\phi(0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = b) \\ &= \frac{k_\rho}{\varepsilon} \left[C_1 H_m^{(1)'}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)'}(k_\rho \rho) \right] \\ &\quad \times \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] D_3 \sin(k_z b) = 0 \\ &\Rightarrow \sin(k_z b) = 0 \Rightarrow k_z b \sin^{-1}(0) = n\pi \end{aligned} \quad (2.52)$$

สามารถลดรูปสมการที่ (2.46) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \phi, z) &= \left[C_1 H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \right] \\ &\quad \times \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] D_3 \sin(k_z z) \end{aligned} \quad (2.53)$$

โดย

$$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2 \Rightarrow k_\rho = \pm \sqrt{k^2 - k_z^2} = \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad (2.54)$$

$$k_z = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.55)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

เนื่องจากคัทออฟจะเกิดขึ้นเมื่อ $k_\rho = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.54) จะได้

$$k_\rho = \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \Bigg|_{\substack{f=f_c \\ k=k_c}} = 0 \Rightarrow k_c = \frac{n\pi}{b} \quad (2.57)$$

หรือ

$$(f_c)_n^{TE} = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.58)$$

สามารถเขียนสมการที่ (2.54) ที่ค่าความถี่ต่างๆ เป็นดังนี้

$$k_\rho = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, & f > f_c \\ 0, & f = f_c \\ -j\sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} = -jk\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}, & f < f_c \end{cases} \quad (2.59)$$

ในกรณีที่มีความถี่ต่ำกว่าคัทออฟจะไม่มีโหมดเกิดขึ้น เนื่องจากท่อนำคลื่นจะมีพฤติกรรมเป็นองค์ประกอบตัวเหนี่ยวนำ (Inductive Storage Element)

กำหนดให้คลื่นที่เดินทางเข้าสู่ภายใน (ไปยังแกน z) และออกสู่ภายนอกในแนวรัศมี ρ แทนด้วย $H_m^{(1)}(k_\rho, \rho)$ และ $H_m^{(2)}(k_\rho, \rho)$ ตามลำดับ และ $\cos(m\phi)$ มีการเปลี่ยนแปลงพร้อมกัน ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (2.53) ได้เป็น

$$\psi^{TE}(\rho, \phi, z) = A_{mm} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos(m\phi) \begin{cases} H_m^{(1)}(k_\rho, \rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho, \rho) \end{cases} \quad (2.60)$$

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในพิกัดทรงกระบอกสำหรับโหมด TE หาได้จาก

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{1}{\epsilon\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} & H_r &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z} \\
E_\phi &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} & H_\phi &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi\partial z} \\
E_z &= 0 & H_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \varphi
\end{aligned} \tag{2.61}$$

ดังนั้นจะได้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าโหมด TE ดังนี้

$$E_r = A_{mn} \frac{m}{\epsilon\rho} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \sin(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho\rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

$$E_\phi = A_{mn} \frac{k_\rho}{\epsilon} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)\prime}(k_\rho\rho) \\ H_m^{(2)\prime}(k_\rho\rho) \end{Bmatrix} \tag{2.63}$$

$$E_z = 0 \tag{2.64}$$

$$H_r = -jA_{mn}k_\rho \frac{n\pi/b}{\omega\mu\epsilon} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho\rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \end{Bmatrix} \tag{2.65}$$

$$H_\phi = jA_{mn} \frac{mn\pi/b}{\omega\mu\epsilon\rho} \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \sin(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho\rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \end{Bmatrix} \tag{2.66}$$

$$H_z = -jA_{mn} \frac{k_\rho^2}{\omega\mu\epsilon} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho\rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \end{Bmatrix} \tag{2.67}$$

และ

$$f' = \frac{\partial f}{\partial(k_\rho\rho)}$$

2.3.2 โหมดคลื่นสนามแม่เหล็กตามขวาง (Transverse Magnetic (TM) mode)

โหมด TM ของโครงสร้างท่อนำคลื่นเชิงรัศมีในรูปที่ 2.1 ซึ่งถูกกระตุ้นด้วยแหล่งกำเนิดที่จุดกึ่งกลาง มีขั้นตอนการหาและเงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกับโหมด TE ซึ่งมีฟังก์ชันคลื่น φ ดังนี้

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \phi, z) = & \left[C_1 H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + D_2 H_m^{(1)}(k_\rho \rho) \right] \\ & \times \left[C_2' \cos(m\phi) + D_2' \sin(m\phi) \right] C_3' \cos(k_z z) \end{aligned} \quad (2.68)$$

โดยที่

$$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2 \Rightarrow k_\rho = \pm \sqrt{k^2 - k_z^2} = \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.69)$$

$$k_z = \frac{n\pi}{b} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

คัทออฟจะเกิดขึ้นเมื่อ $k_\rho = 0$ จากสมการที่ (2.69) จะได้

$$(f_c)_n^{TM} = \frac{n}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.72)$$

สามารถเขียนสมการที่ (2.69) ที่ค่าความถี่ต่างๆ ดังนี้

$$k_\rho = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, & f > f_c \\ 0, & f = f_c \\ -j \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} = -jk \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}, & f < f_c \end{cases} \quad (2.73)$$

จะพบว่าจะไม่เกิดโหมดขึ้นเมื่อความถี่ต่ำกว่าจุดคัทออฟ เนื่องจากท่อนำคลื่นประพฤติตัวเป็นองค์ประกอบคาปาซิทีฟ (Capacitive Storage Element)

กำหนดให้คลื่นที่เดินทางเข้าสู่ภายใน(ไปยังแกน z)และออกสู่ภายนอกในแนวรัศมี ρ แทนด้วย $H_m^{(1)}(k_\rho, \rho)$ และ $H_m^{(2)}(k_\rho, \rho)$ ตามลำดับ และ $\cos(m\phi)$ มีการเปลี่ยนแปลงพร้อมกัน ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (2.68) ได้เป็น

$$\psi_{mm}^{TM}(\rho, \phi, z) = B_{mm} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho, \rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho, \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

สำหรับโหมด TM สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกระบอกจะขึ้นอยู่กับค่า ϕ สามารถหาได้จากสมการที่ (2.75)

$$\begin{aligned} E_\rho &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial z} & H_\rho &= \frac{1}{\mu\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \\ E_\phi &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi \partial z} & H_\phi &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \\ E_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi & H_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

ดังนั้นจะได้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าโหมด TM ดังนี้

$$E_\rho = jB_{mm} k_\rho \frac{n\pi/b}{\omega\mu\epsilon} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)\prime}(k_\rho, \rho) \\ H_m^{(2)\prime}(k_\rho, \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

$$E_\phi = -jB_{mm} \frac{mn\pi/b}{\omega\mu\epsilon\rho} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \sin(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho, \rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho, \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

$$E_z = -jB_{mm} \frac{k_\rho^2}{\omega\mu\epsilon} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho, \rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho, \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

$$H_\rho = -B_{mm} \frac{m}{\mu\rho} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \sin(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho, \rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho, \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

$$H_\phi = -\frac{B_{nm}}{\mu} k_\rho \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)'}(k_\rho \rho) \\ H_m^{(2)'}(k_\rho \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

$$H_z = 0 \quad (2.80)$$

เพื่อที่จะได้โหมด TM และ TE ที่สมบูรณ์ จะต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของ $\sin(m\phi)$ ด้วย อย่างไรก็ตามโหมด $n > 0$ จะไม่เกิดขึ้นเมื่อ $b < \frac{\lambda}{2}$ ดังนั้นในกรณีที่ b มีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับความยาวคลื่น จะเกิดเฉพาะโหมดการแพร่กระจายคลื่น TM_{m0} เท่านั้น ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (2.74) ใหม่ได้เป็น

$$\psi_{m0}^{TM}(\rho, \phi, z) = \cos(m\phi) \begin{Bmatrix} H_m^{(1)}(k_\rho \rho) \\ H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

ในกรณีที่รัศมีของแผ่นวงกลมมีขนาดเล็กจะเกิด TM_{00} เป็นแบบแผนคลื่นเป็นใหญ่ (Dominant Mode) ส่งผลให้ไม่มีสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในแนวแกน ρ จึงมีลักษณะเป็น TEM ในทิศ ρ และจะเรียกโหมดที่เกิดขึ้นนี้ว่า โหมดสายส่ง (Transmission-Line Mode) ของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน เนื่องจากมีลักษณะเหมือนกับโหมดระนาบสายส่ง ดังนั้นสายส่งเชิงรัศมีนั้นสามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้สมการสายส่งในรูปของ L และ C ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ρ

2.4 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงท่อนำคลื่นเชิงรัศมีซึ่งเป็นท่อนำคลื่นที่เหมาะสมสำหรับคลื่นรัศมีในการเดินทาง สามารถแบ่งเป็นชนิดต่างๆ ตามรูปทรงทางกายภาพ ตัวอย่างเช่น ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน สำหรับคุณลักษณะเฉพาะของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายในท่อนำคลื่นรวมทั้งสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าจะพิจารณานบนพื้นฐานของโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางและโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่น โดยเริ่มจากสมการแมกซ์เวลล์ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มสนามไฟฟ้ากับความเข้มสนามแม่เหล็ก เพื่อนำไปใช้หาผลเฉลยของสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกสำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

บทที่ 3

การวิเคราะห์สายอากาศโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก

3.1 บทนำ

จากบทที่ผ่านมาได้กล่าวถึงโครงสร้างของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นระหว่างแผ่นระนาบตัวนำวงกลมในโหมดการแพร่กระจายคลื่นต่างๆ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนานมาประยุกต์ใช้ทำสายอากาศ เนื่องจากเป็นโครงสร้างที่ง่ายในการวิเคราะห์เมื่อเทียบกับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบอื่นๆ และโครงสร้างของท่อนำคลื่นชนิดนี้มีความสมมาตร สายอากาศชนิดนี้มีลักษณะเป็นท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ประกอบด้วยแผ่นระนาบตัวนำวงกลมสองแผ่นวางขนานกันโดยรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำมีค่าคงที่เท่ากับ a มีระยะห่างระหว่างแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเท่ากับ b ซึ่งจะมีขนาดเล็กมากเมื่อเปรียบเทียบกับความยาวคลื่น (Wavelength) โดยสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีนี้สามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยอาศัยทฤษฎีฟังก์ชันกรีนไดโอดิก การหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่องเปิดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีจะประยุกต์ใช้วิธี Ohm-Rayleigh ในการหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบแม่เหล็กชนิดที่สองของท่อนำคลื่นซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายและไม่ซับซ้อน เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าโดยตรงและวิธีไดโอดิกในรูปฟังก์ชันช่วย จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบแม่เหล็กและแบบไฟฟ้าเพื่อนำไปใช้หาสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศต่อไป ในส่วนของกระแสที่ไหลผ่านลวดตัวนำจะสมมติให้มีค่าคงที่เนื่องจากระยะห่างระหว่างแผ่นขนานทั้งสองแผ่นมีขนาดเล็กมากเมื่อเปรียบเทียบกับความยาวคลื่น นอกจากนี้ในบทนี้จะกล่าวถึงสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อนโดยอาศัยหลักการของทฤษฎีเงา กล่าวคือ จะเสมือนว่ามีแหล่งกำเนิดเกิดขึ้นสองแหล่งกำเนิด คือ สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางด้านบน (ด้านหน้า) ของตัวสะท้อน และอีกแหล่งกำเนิดหนึ่งจากด้านล่าง (ด้านหลัง) ของตัวสะท้อน ซึ่งจะมีผลทำให้คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศเปลี่ยนแปลงตามระยะห่างระหว่างสายอากาศและตัวสะท้อน

3.2 ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

ในการหาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบต่างๆ ขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณาว่าเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตแบบใด จะใช้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ (Vector wave function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันเจาะจง (Eigenfunction) หรือฟังก์ชันคุณลักษณะ (Characteristic function) ที่เป็นผลเฉลยของสมการคลื่นเวกเตอร์เอกพันธ์ (Homogeneous vector wave equation) ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์มีอยู่สามแบบ คือ \bar{L} , \bar{M} และ \bar{N} ซึ่งแต่ละฟังก์ชันเป็นคำตอบของสมการเฮมโฮลตซ์เวกเตอร์เอกพันธ์ และนอกจากนี้ยังทราบอีกว่า \bar{M} และ \bar{N} เป็นฟังก์ชันโซลินอยด์ (Solenoidal function) ในขณะที่ \bar{L} ไม่เป็น ดังนั้นจึงต้องหา \bar{M} และ \bar{N} เพื่อนำไปใช้หาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็ก ต่อจากนั้นจะหาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกตัวอื่นๆ จากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กและแบบไฟฟ้า

$$\nabla \times \nabla \times \bar{F} - \kappa^2 \bar{F} = 0 \quad (3.1)$$

สมการที่ (3.1) เป็นสมการคลื่นเวกเตอร์เอกพันธ์ โดยที่ κ เป็นค่าใดๆ เราจะได้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในระบบคาร์ทีเซียน ดังต่อไปนี้

$$\bar{F} = \nabla \times (\psi_1 \bar{c}) \quad (3.2)$$

โดยที่ ψ_1 คือ ฟังก์ชันเจาะจงซึ่งสอดคล้องกับสมการคลื่นสเกลาร์

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0 \quad (3.3)$$

และ \bar{c} เป็นค่าคงที่เวกเตอร์ (Constant vector) ได้แก่ \hat{x} , \hat{y} หรือ \hat{z} และเรียก \bar{c} ว่าเวกเตอร์นำร่อง (Piloting vector) และ ψ เป็นฟังก์ชันกำเนิด (Generating function) ถ้า ψ_1 เป็นผลเฉลยสำหรับสมการที่ (3.3) ดังนั้นจะได้สมการที่ (3.2) เป็นผลเฉลยของสมการที่ (3.1) ด้วยเช่นกัน กำหนดให้ \bar{M} เป็นฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ นั่นคือ

$$\bar{M}_1 = \nabla \times (\psi_1 \bar{c}) \quad (3.4)$$

ส่วนฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์อีกชุดหนึ่งแทนด้วย \bar{N} จะได้ว่า

$$\bar{N}_2 = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times (\psi_2 \bar{c}) \quad (3.5)$$

เมื่อ ψ_2 เป็นฟังก์ชันเจาะจงที่สอดคล้องกับสมการที่ (3.4) และ \bar{N}_2 เป็นผลเฉลยของสมการที่ (3.1) ในกรณีที่ \bar{M} และ \bar{N} ใช้ฟังก์ชันกำเนิด ψ เหมือนกัน จะได้ความสัมพันธ์ที่สมมาตรกันระหว่างฟังก์ชันสองชนิดนี้ดังนี้

$$\bar{N} = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \bar{M} \quad (3.6)$$

$$\bar{M} = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \bar{N} \quad (3.7)$$

สำหรับการหาฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์สำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีในรูปที่ 3.1 จะใช้สมการอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันกำเนิด $\psi(\rho, \phi, z)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอกซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซล (Bessel differential equation) นั่นคือ

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (3.8\alpha)$$

หรือ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (3.8\beta)$$

ในการหาคำตอบของสมการที่ (3.8) จะใช้วิธีแยกตัวแปร (Method of separation of variables) ในหัวข้อ 2.2.2

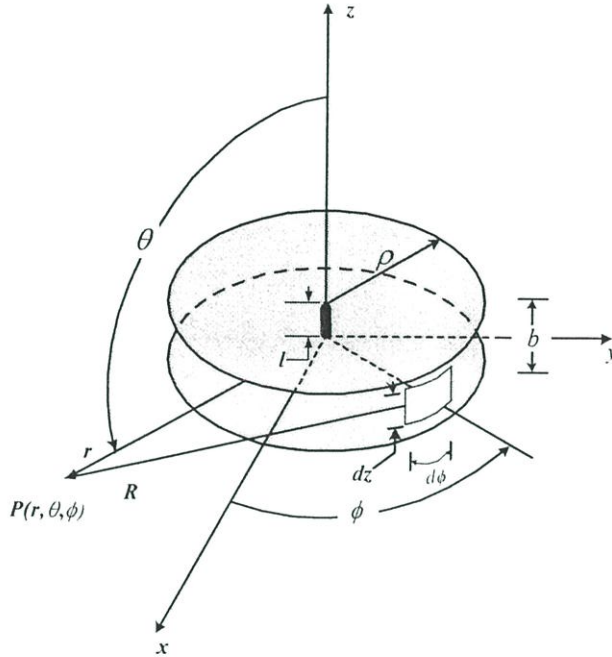
สำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีจะใช้ $H_m^{(1)}(k_\rho \rho)$ และ $H_m^{(2)}(k_\rho \rho)$ แทนทิศทางการเคลื่อนที่ในทิศทางในทิศ $-\rho$ และ $+\rho$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันกำเนิดสำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเป็น

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi, z) = & [C_1 H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)}(k_\rho \rho)] [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] \\ & \times [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

จากที่กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 2.3.1 ในกรณีโหมด TE เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาทำให้ได้ฟังก์ชันกำเนิดคือ

$$\psi_{e_{mn}}^{TE}(k_\rho) = A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (m\phi) \right\} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \hat{a}_\rho \quad (3.10)$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ และ $m = 0, 1, 2, \dots$



รูปที่ 3.1 โครงสร้างของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

ส่วนกรณีโหมด TM ฟังก์ชันคลื่นจะเป็น

$$\psi_{e_{mn}}^{TM}(k_\rho) = B_{mn} \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} (m\phi) \right\} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \hat{a}_\rho \quad (3.11)$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$ และ $m = 0, 1, 2, \dots$

A_{mn} และ B_{mn} เป็นค่าคงที่ ส่วน e และ o แสดงถึงเลขคู่และเลขคี่ตามลำดับ ถ้าคลื่นในท่อนำคลื่นถูกนอร์มัลไลซ์ ให้ $A_{mn} = B_{mn} = 1$ ในขณะที่ $\bar{M}_{e_{mn}}^{TE}$ และ $\bar{N}_{o_{mn}}^{TM}$ จะถูกกำหนดให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตดิริคเลย์ นั่นคือ

$$\hat{a}_n \times \bar{M}_{e_{mn}}^{TE}(k_\rho) = 0 \quad (3.12n)$$

และ

$$\hat{a}_n \times \bar{N}_{e_{mn}}^{TM}(k_\rho) = 0 \quad (3.12\text{a})$$

ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} \bar{M}_{e_{mn}}^{TE}(k_\rho) &= \nabla \times \left[\psi_{e_{mn}}^{TE}(k_\rho) \right] \\ &= \nabla \times \left[\sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \hat{a}_\rho \right] \\ &= \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \hat{a}_\phi \pm \frac{m}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \hat{a}_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

และ

$$\begin{aligned} \bar{N}_{e_{mn}}^{TM}(k_\rho) &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \left[\psi_{e_{mn}}^{TM}(k_\rho) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times \left[\bar{M}_{e_{mn}}^{TM}(k_\rho) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} \begin{Bmatrix} \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \hat{a}_\rho \\ \pm m \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \right] \hat{a}_\phi \\ - \frac{1}{\rho} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(k_\rho \rho) \right] \hat{a}_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

เมื่อ $\bar{M}_{e_{mn}}^{TE}(k_\rho)$ และ $\bar{N}_{e_{mn}}^{TM}(k_\rho)$ แสดงสนามไฟฟ้าของคลื่น TE_{mn} และ TM_{mn} ตามลำดับ และ

$$\kappa^2 = k_\rho^2 + k_z^2 = k_\rho^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$k_\rho^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$k = \omega (\mu_0 \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$$

จากความสัมพันธ์ที่สมมาตร ในสมการที่ (3.6) และ (3.7) ฟังก์ชันเวกเตอร์ที่เหมาะสมจะแสดงสนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ได้แก่

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{o\ mn}^{TM}(k_\rho) &= \nabla \times \left[\psi_{o\ mn}^{TM}(k_\rho) \right] \\
 &= \nabla \times \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \hat{a}_\rho \right] \\
 &= -\frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \hat{a}_\phi \pm \frac{m}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \hat{a}_z
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

และ

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{o\ mn}^{TE}(k_\rho) &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \left[\psi_{o\ mn}^{TE}(k_\rho) \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times \left[\bar{M}_{o\ mn}^{TE}(k_\rho) \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\left[\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \hat{a}_\rho \right. \\ &\left. \mp m \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \right] \hat{a}_\phi \right. \\ &\left. + \frac{1}{\rho} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho H_m^{(2)}(k_\rho\rho) \right] \hat{a}_z \right\}
 \end{aligned} \right. \tag{3.16}$$

$\bar{M}_{o\ mn}^{TM}(k_\rho)$ และ $\bar{N}_{o\ mn}^{TE}(k_\rho)$ จะเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์ นั่นคือ

$$\hat{a}_n \times \nabla \times \bar{M}_{o\ mn}^{TM}(k_\rho) = 0 \tag{3.17ก}$$

และ

$$\hat{a}_n \times \nabla \times \bar{N}_{o\ mn}^{TE}(k_\rho) = 0 \tag{3.17ข}$$

3.3 ความสัมพันธ์ตั้งฉาก (Orthogonal relation) ของฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ซึ่งมีคุณสมบัติตั้งฉากสำหรับกรณีที่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \iiint \bar{M}_{omn}^{TE}(k_\rho) \cdot \bar{N}_{om'n'}^{TE}(-k_\rho') dV &= 0 \\ \iiint \bar{M}_{omn}^{TM}(k_\rho) \cdot \bar{N}_{om'n'}^{TM}(-k_\rho') dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

และ

$$\left. \begin{aligned} \iiint \bar{M}_{emn}^{TE}(k_\rho) \cdot \bar{M}_{om'n'}^{TE}(-k_\rho') dV &= 0 \\ \iiint \bar{M}_{emn}^{TM}(k_\rho) \cdot \bar{M}_{om'n'}^{TM}(-k_\rho') dV &= 0 \\ \iiint \bar{N}_{emn}^{TE}(k_\rho) \cdot \bar{N}_{om'n'}^{TE}(-k_\rho') dV &= 0 \\ \iiint \bar{N}_{emn}^{TM}(k_\rho) \cdot \bar{N}_{om'n'}^{TM}(-k_\rho') dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

โดยที่ $m n k_\rho$ และ $m' n' k_\rho'$ เป็นค่าเจาะจง (Eigenvalues) ซึ่งมีโดเมนของการอินทิเกรตเหมือนกัน จาก $\rho = 0$ ถึง ∞ $\phi = 0$ ถึง 2π และ $z = 0$ ถึง b ทำให้ได้ความสัมพันธ์ตั้งฉากที่ถูกลบอร์มัลไลซ์แล้ว ดังนี้

$$\iiint_v \bar{M}_{omn}^{TE}(k_\rho) \cdot \bar{M}_{om'n'}^{TE}(-k_\rho') dv = \begin{cases} 0, & m \neq m' \text{ or } n \neq n' \\ \frac{\pi b}{2} (1 + \delta_0) k_\rho \delta(k_\rho - k_\rho'), & m = m' \text{ and } n = n' \end{cases} \quad (3.20)$$

และ

$$\iiint_v \bar{N}_{omn}^{TM}(k_\rho) \cdot \bar{N}_{om'n'}^{TM}(-k_\rho') dv = \begin{cases} 0, & m \neq m' \text{ or } n \neq n' \\ \frac{\pi b}{2} (1 + \delta_0) k_\rho \delta(k_\rho - k_\rho'), & m = m' \text{ and } n = n' \end{cases} \quad (3.21)$$

เมื่อ $\delta(k_\rho - k_\rho')$ เป็นฟังก์ชันเดลตา (Delta function) และ δ_0 คือฟังก์ชันเดลตาไครเนคเคอร์ (Kronecker delta function) ที่มีค่า

$$\delta_0 = \begin{cases} 1 & m \text{ or } n = 0 \\ 0 & m \text{ and } n = 0 \end{cases}$$

3.4 ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

ก่อนอื่นจะหา $\bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}')$ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันไดแอดิกโซลินอยด์ (Solenoidal Dyadic function) นั่นคือ

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (3.22)$$

จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กและแบบไฟฟ้าเพื่อนำไปหาฟังก์ชันที่เหลือ นั่นคือ $\bar{\bar{G}}_{c_1}(\bar{R}, \bar{R}')$ $\bar{\bar{G}}_{c_2}(\bar{R}, \bar{R}')$ และ $\bar{\bar{G}}_{m_1}(\bar{R}, \bar{R}')$

การหาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้วิธีการของOhm-Rayleigh[24] ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กชนิดที่สองของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี จะเป็นไปตามสมการ

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') - k^2 \bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] \quad (3.23)$$

สมการนี้จะเป็นจริงในช่วง $0 \leq \rho < \infty$ $0 \leq \phi < 2\pi$ $0 \leq z < b$ และฟังก์ชันกรีนไดแอดิกนี้ยังเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์

$$\hat{a}_n \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (3.24)$$

ด้วย ซึ่งเกิดที่ $z = 0$ และ $z = b$ เมื่อ $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ และจากวิธีการของ Ohm-Rayleigh จะได้การกระจายฟังก์ชันเจาะจงของฟังก์ชันแหล่งกำเนิด $\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')]$ จะเป็น

$$\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] = \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \sum_{m,n} \left[\bar{N}_{o\ mn}^{TE}(k_\rho) \bar{A}_{o\ mn}(k_\rho) + \bar{M}_{o\ mn}^{TM}(k_\rho) \bar{B}_{o\ mn}(k_\rho) \right] \quad (3.25)$$

โดยที่

$$\bar{N}_{o\ mn}^{TE}(k_\rho) \bar{A}_{o\ mn}(k_\rho) = \bar{N}_{c\ mn}^{TE}(k_\rho) \bar{A}_{c\ mn}(k_\rho) + \bar{N}_{o\ mn}^{TE}(k_\rho) \bar{A}_{o\ mn}(k_\rho) \quad (3.26ก)$$

และ

$$\bar{M}_{o\ mn}^{TM}(k_\rho) \bar{B}_{o\ mn}(k_\rho) = \bar{M}_{c\ mn}^{TM}(k_\rho) \bar{B}_{c\ mn}(k_\rho) + \bar{M}_{o\ mn}^{TM}(k_\rho) \bar{B}_{o\ mn}(k_\rho) \quad (3.26ข)$$

เมื่อ $\bar{A}_{e_{omm}}(k_\rho)$ และ $\bar{B}_{e_{omm}}(k_\rho)$ เป็นสัมประสิทธิ์เวกเตอร์ (Vector coefficient) ที่สามารถหาค่าได้ โดยทำการคูณแบบสเกลาร์แอนทีเรีย (Anterior scalar) ของพจน์แหล่งกำเนิดในสมการที่ (3.25) ด้วย $\bar{N}_{e_{m'n'}}^{TE}(-k_\rho')$ และ $\bar{M}_{e_{m'n'}}^{TM}(-k_\rho')$ จากนั้นอินทิเกรตสมการดังกล่าวตลอดโดเมนของปัญหา และใช้ทฤษฎีเกาส์ไดแอดิก (Dyadic Gauss Theorem) ร่วมกับความสัมพันธ์ตั้งฉากระหว่างฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในหัวข้อ 3.3 ดังนี้

$$\iiint_v \bar{N}_{e_{m'n'}}^{TE}(-k_\rho') \cdot \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] dv = \iiint_v dv \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \bar{N}_{e_{m'n'}}^{TE}(-k_\rho') \cdot \bar{N}_{e_{omm}}^{TE}(k_\rho) \bar{A}_{e_{omm}}(k_\rho) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla' \times \bar{N}_{e_{m'n'}}^{TE}(-k_\rho') &= \iiint_v dv \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \bar{N}_{e_{m'n'}}^{TE}(-k_\rho') \cdot \bar{N}_{e_{omm}}^{TE}(k_\rho) \bar{A}_{e_{omm}}(k_\rho) \\ &= \int_{-\infty}^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \frac{\pi b}{2} (1 + \delta_0) k_\rho \delta(k_\rho - k_\rho') \bar{A}_{e_{omm}}(k_\rho) \\ &= \sum_{m,n} \frac{\pi b}{2} (1 + \delta_0) k_\rho' \bar{A}'_{e_{omm}}(k_\rho') \end{aligned} \quad (3.28)$$

และ

$$\iiint_v \bar{M}_{e_{m'n'}}^{TM}(-k_\rho') \cdot \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] dv = \iiint_v dv \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \bar{M}_{e_{m'n'}}^{TM}(-k_\rho') \cdot \bar{M}_{e_{omm}}^{TM}(k_\rho) \bar{B}_{e_{omm}}(k_\rho) \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \nabla' \times \bar{M}_{e_{m'n'}}^{TM}(-k_\rho') &= \iiint_v dv \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \bar{M}_{e_{m'n'}}^{TM}(-k_\rho') \cdot \bar{M}_{e_{omm}}^{TM}(k_\rho) \bar{B}_{e_{omm}}(k_\rho) \\ &= \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \frac{\pi b}{2} (1 + \delta_0) k_\rho \delta(k_\rho - k_\rho') \bar{B}_{e_{omm}}(k_\rho) \\ &= \sum_{m,n} \frac{\pi b}{2} (1 + \delta_0) k_\rho' \bar{B}'_{e_{omm}}(k_\rho') \end{aligned} \quad (3.30)$$

จะได้

$$\begin{aligned}\bar{A}'_{e_{omn}}(k_\rho') &= \frac{(2-\delta_0)}{\pi b k_\rho'} \nabla' \times \bar{N}'_{e_{m'n'}}{}^{TE}(-k_\rho') \\ &= \frac{\kappa(2-\delta_0)}{\pi b k_\rho'} \bar{M}'_{e_{m'n'}}{}^{TE}(-k_\rho')\end{aligned}\quad (3.31)$$

และ

$$\begin{aligned}\bar{B}'_{e_{omn}}(k_\rho') &= \frac{(2-\delta_0)}{\pi b k_\rho'} \nabla' \times \bar{M}'_{e_{m'n'}}{}^{TM}(-k_\rho') \\ &= \frac{\kappa(2-\delta_0)}{\pi b k_\rho'} \bar{N}'_{e_{m'n'}}{}^{TM}(-k_\rho')\end{aligned}\quad (3.32)$$

ลบเครื่องหมายไพรม์ (') ที่ค่าเจาะจง แต่ไม่ต้องลบที่ฟังก์ชัน \bar{M}' และ \bar{N}' ดังนั้นจะเขียนสมการที่ (3.31) และ (3.32) ได้เป็น

$$\bar{A}'_{e_{omn}}(h) = \frac{\kappa(2-\delta_0)}{\pi b h} \bar{M}'_{e_{omn}}{}^{TE}(-h) \quad (3.33)$$

และ

$$\bar{B}'_{e_{omn}}(h) = \frac{\kappa(2-\delta_0)}{\pi b h} \bar{N}'_{e_{omn}}{}^{TM}(-h) \quad (3.34)$$

โดยที่เครื่องหมายไพรม์ (') ที่ฟังก์ชัน \bar{M}' และ \bar{N}' จะนิยาม (ρ', ϕ', z') ของเวกเตอร์ตำแหน่ง \bar{R}' เมื่อแทนสมการที่ (3.33) และ (3.34) ในสมการที่ (3.25) ดังนั้นจะได้การแผ่กระจายฟังก์ชันเจาะจงที่ต่อเนื่องของ $\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')]$ ดังนี้

$$\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] = \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \frac{\kappa(2-\delta_0)}{\pi b k_\rho} \left[\bar{N}'_{e_{omn}}{}^{TE}(k_\rho) \bar{M}'_{e_{omn}}{}^{TE}(-k_\rho) + \bar{M}'_{e_{omn}}{}^{TM}(k_\rho) \bar{N}'_{e_{omn}}{}^{TM}(-k_\rho) \right] \quad (3.35)$$

เพื่อที่จะหา $\bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}')$ จะใช้การกระจายของฟังก์ชันแหล่งกำเนิดเช่นเดียวกับสมการที่ (3.35) แต่จะมีสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า $a(k_\rho)$ และ $b(k_\rho)$ เพิ่มเข้ามาจะได้

$$\bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \frac{(2-\delta_0)}{\pi b k_\rho} \left[a(k_\rho) \bar{N}'_{e_{omn}}{}^{TE}(k_\rho) \bar{M}'_{e_{omn}}{}^{TE}(-k_\rho) + b(k_\rho) \bar{M}'_{e_{omn}}{}^{TM}(k_\rho) \bar{N}'_{e_{omn}}{}^{TM}(-k_\rho) \right] \quad (3.36)$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.35) และ (3.36) ในสมการที่ (3.23) และใช้ความสัมพันธ์

$$\nabla \times \nabla \begin{bmatrix} \bar{N}_{e_{mn}} \\ \bar{M}_{e_{mn}} \end{bmatrix} = \kappa^2 \begin{bmatrix} \bar{N}_{e_{mn}} \\ \bar{M}_{e_{mn}} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

จะหาสัมประสิทธิ์ $a(k_\rho)$ และ $b(k_\rho)$ ได้เป็น

$$a(k_\rho) = \frac{1}{\kappa^2 - k^2} \quad (3.38)$$

$$b(k_\rho) = \frac{1}{\kappa^2 - k^2} \quad (3.39)$$

ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันเจาะจงของ $\bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}')$ เป็น

$$\bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = \int_0^\infty dk_\rho \sum_{m,n} \frac{\kappa}{\kappa^2 - k^2} \frac{(2 - \delta_0)}{\pi b k_\rho} \left[\bar{N}_{e_{mn}}^{TE}(k_\rho) \bar{M}_{e_{mn}}^{TE'}(-k_\rho) + \bar{M}_{e_{mn}}^{TM}(k_\rho) \bar{N}_{e_{mn}}^{TM'}(-k_\rho) \right] \quad (3.40)$$

การอินทิเกรตฟูรีเยร์ (Fourier integration) ในสมการที่ (3.40) ใช้วิธีการอินทิเกรตแบบคอนทัวร์ (Contour integration) โดยที่โพลของตัวอินทิเกรตคือ

$$k_\rho = \pm \left[k^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \pm k_g \quad (3.41)$$

ซึ่ง k_g คือเลขคลื่น (Wave number) ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กชนิดที่สอง สำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ดังสมการ

$$\begin{aligned} \bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') &= j2\pi \sum_{m,n} \frac{\left[k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \frac{(2 - \delta_0)}{\pi b} \left[\begin{array}{l} \bar{N}_{e_{mn}}^{TE}(\pm k_g) \bar{M}_{e_{mn}}^{TE'}(\mp k_g) \\ + \bar{M}_{e_{mn}}^{TM}(\pm k_g) \bar{N}_{e_{mn}}^{TM'}(\mp k_g) \end{array} \right] \\ &= j2 \frac{(2 - \delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\left[k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \left[\begin{array}{l} \bar{N}_{e_{mn}}^{TE}(\pm k_g) \bar{M}_{e_{mn}}^{TE'}(\mp k_g) \\ + \bar{M}_{e_{mn}}^{TM}(\pm k_g) \bar{N}_{e_{mn}}^{TM'}(\mp k_g) \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} \rho > \rho' \\ \rho < \rho' \end{array} \end{aligned} \quad (3.42)$$

ส่วนบนของสมการที่ (3.42) สำหรับ $\rho > \rho'$ และส่วนล่างสำหรับ $\rho < \rho'$ ทำให้สมการที่ (3.42) จะไม่มีความต่อเนื่องที่ $\rho = \rho'$ สามารถหาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กจากความสัมพันธ์

$$\hat{a}_n \times (\bar{G}_m^+ - \bar{G}_m^-) = \bar{I}_s \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (3.43)$$

เมื่อ \bar{I}_s คือตัวประกอบไอเดมสองมิติซึ่งนิยามโดย

$$\bar{I}_s = \bar{I} - \hat{a}_n \hat{a}_n \quad ; \quad \hat{a}_n = \hat{a}_\rho,$$

จะได้ว่า

$$\hat{a}_\rho \times (\bar{G}_{m_2}^+ - \bar{G}_{m_2}^-) = \frac{1}{\rho} (\bar{I} - \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho) \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (3.44)$$

โดยที่ $\bar{G}_{m_2}^+$ สำหรับ $\rho > \rho'$ และ $\bar{G}_{m_2}^-$ สำหรับ $\rho < \rho'$ จะหา $\bar{G}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}')$ ได้จากความสัมพันธ์ของสมการแมกซ์เวลล์ในรูปแบบของไดแอดิก

$$\nabla \times \bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{G}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (3.45)$$

เนื่องจาก $\bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}')$ ไม่ต่อเนื่องที่ $\rho = \rho'$ จะเขียนได้เป็น

$$\bar{G}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{G}_{m_2}^+(\bar{R}, \bar{R}')U(\rho - \rho') + \bar{G}_{m_2}^-(\bar{R}, \bar{R}')U(\rho' - \rho) \quad (3.46)$$

ซึ่งจะนิยามฟังก์ชันยูนิตสเตปเฮวิไซด์ (Heaviside unit step function) ดังนี้

$$U(\rho - \rho') = \begin{cases} 1 & ; \rho > \rho' \\ 0 & ; \rho < \rho' \end{cases} \quad (3.47ก)$$

$$U(\rho' - \rho) = \begin{cases} 1 & ; \rho < \rho' \\ 0 & ; \rho > \rho' \end{cases} \quad (3.47ข)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') &= \left[\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^+(\bar{R}, \bar{R}') \right] U(\rho - \rho') + \nabla U(\rho - \rho') \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^+(\bar{R}, \bar{R}') \\ &+ \left[\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^-(\bar{R}, \bar{R}') \right] U(\rho' - \rho) + \nabla U(\rho' - \rho) \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^-(\bar{R}, \bar{R}') \end{aligned} \quad (3.48)$$

โดยอาศัย $\nabla \times (\bar{\bar{B}}a) = [(\nabla \times \bar{\bar{B}})a] + [(\nabla a) \times \bar{\bar{B}}]$ และจาก

$$\nabla U(\rho - \rho') = \hat{a}_\rho \delta(\rho - \rho') \quad (3.49ก)$$

$$\nabla U(\rho' - \rho) = -\hat{a}_\rho \delta(\rho' - \rho) \quad (3.49ข)$$

ดังนั้น

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2} = \left[\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^+ \right] U(\rho - \rho') + \left[\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^- \right] U(\rho' - \rho) + \hat{a}_\rho \delta(\rho - \rho') \times \left[\bar{\bar{G}}_{m_2}^+ - \bar{\bar{G}}_{m_2}^- \right] \quad (3.50)$$

สามารถเขียนสมการที่ (3.49) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2} &= \left[\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^+ \right] U(\rho - \rho') + \left[\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^- \right] U(\rho' - \rho) \\ &+ \frac{1}{\rho} (\bar{I} - \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho) \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \end{aligned} \quad (3.51)$$

เนื่องจาก $\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') = \delta(\bar{R} - \bar{R}')$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก และใช้
ความสัมพันธ์

$$\nabla \times \bar{N}_{e_{mn}}^-(\pm k_g) = k \bar{M}_{e_{mn}}^-(\pm k_g) \quad (3.52)$$

$$\nabla \times \bar{M}_{e_{mn}}^-(\pm k_g) = k \bar{N}_{e_{mn}}^-(\pm k_g) \quad (3.53)$$

ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบไฟฟ้าชนิดที่หนึ่งสำหรับท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

ดังนี้

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}') &= \frac{1}{k^2} \left[\nabla \times \bar{G}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') - \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') \right] \\
&= -\frac{1}{k^2} \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \delta(\bar{R} - \bar{R}') + \frac{1}{k^2} \cdot k \bar{G}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') \\
&= -\frac{1}{k^2} \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \delta(\bar{R} - \bar{R}') \\
&\quad + j2 \frac{(2 - \delta_0)}{bk} \sum_{m,n} \frac{\left[k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \begin{bmatrix} \bar{M}_{o^{mn}}^{TE}(\pm k_g) \bar{M}_{o^{mn}}^{TE'}(\mp k_g) \\ + \bar{N}_{o^{mn}}^{TM}(\pm k_g) \bar{N}_{o^{mn}}^{TM'}(\mp k_g) \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \rho > \\ < \end{matrix} \rho'
\end{aligned} \tag{3.54}$$

จากนิยามของไดแอดติกในภาคผนวก ค ฟังก์ชันไดแอดติกจะมีองค์ประกอบสเกลาร์ทั้งหมด 9 องค์ประกอบ คือ $\hat{a}_\rho \hat{a}_\rho$, $\hat{a}_\rho \hat{a}_\phi$, $\hat{a}_\rho \hat{a}_z$, $\hat{a}_\phi \hat{a}_\rho$, $\hat{a}_\phi \hat{a}_\phi$, $\hat{a}_\phi \hat{a}_z$, $\hat{a}_z \hat{a}_\rho$, $\hat{a}_z \hat{a}_\phi$ และ $\hat{a}_z \hat{a}_z$ ความหมายของไดแอดติกขององค์ประกอบต่างๆ เช่น $\hat{a}_\rho \hat{a}_\rho$ จะแสดงฟังก์ชันกรีนไดแอดติกที่ตำแหน่ง (ρ, ϕ, z) ในทิศทาง ρ เกิดจากแหล่งกำเนิดที่ตำแหน่ง (ρ', ϕ', z') ในทิศทางแกน ρ ดังนั้นจะแสดงฟังก์ชัน \bar{M} และ \bar{N} ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{o^{mn}}^{TE}(\pm k_g) &= \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \hat{a}_\phi \\
&\quad \pm \frac{m}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \hat{a}_z
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{o^{mn}}^{TE'}(\mp k_g) &= \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi') \\ \sin(m\phi') \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \hat{a}_\phi \\
&\quad \pm \frac{m}{\rho'} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\phi') \\ \cos(m\phi') \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \hat{a}_z
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\bar{N}_{o^{mn}}^{TE}(\pm k_g) = \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \hat{a}_\rho \\ &\mp m \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \hat{a}_\phi \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \hat{a}_z \end{aligned} \right\} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{e_{mm}}^{TM}(\pm k_g) &= -\frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\phi) \right\} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \hat{a}_\phi \\ &\pm \frac{m}{\rho} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (m\phi) \right\} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \hat{a}_z \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\bar{N}_{e_{mm}}^{TM}(\pm k_g) = \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\left[\left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\phi) \right\} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \hat{a}_\rho \right. \\ &\mp m \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (m\phi) \right\} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \hat{a}_\phi \\ &\left. - \frac{1}{\rho} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\phi) \right\} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho)] \hat{a}_z \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

$$\bar{N}_{e_{mm}}^{TM'}(\mp k_g) = \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\left[\left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho'^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\phi') \right\} H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \hat{a}_\rho \right. \\ &\mp m \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (m\phi') \right\} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\frac{1}{\rho'} H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \hat{a}_\phi \\ &\left. - \frac{1}{\rho'} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\phi') \right\} \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho')] \hat{a}_z \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

ดังนั้นสามารถแตกองค์ประกอบของฟังก์ชันไดแอดิก $\bar{G}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}')$ ได้เป็น

$$\bar{G}_{m2}^{\rho\phi} = j2(2 - \delta_0) \sum_{m,n} \frac{1}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \left\{ \begin{aligned} &n\pi \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \\ &\times \cos[m(\phi - \phi')] H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \end{aligned} \right\} \hat{a}_\rho \hat{a}_\phi \quad (3.61)$$

$$\bar{G}_{m2}^{\rho z} = -j \frac{2(2 - \delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{1}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \left\{ \begin{aligned} &\frac{m}{\rho'} \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \\ &\times \sin[m(\phi - \phi')] H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \end{aligned} \right\} \hat{a}_\rho \hat{a}_z \quad (3.62)$$

$$\bar{G}_{m2}^{\phi\rho} = -j2(2-\delta_0) \sum_{m,n} \frac{1}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \left\{ n\pi \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho'^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}z'\right) \right. \\ \left. \times \cos[m(\phi-\phi')] H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_\rho, \quad (3.63)$$

$$\bar{G}_{m2}^{\phi\phi} = -j2(2-\delta_0) \sum_{m,n} \frac{mn\pi \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}z'\right) \sin[m(\phi-\phi')]}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \\ \times \left\{ \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right. \\ \left. + H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \frac{\partial}{\partial\rho'} \left[\frac{1}{\rho'} H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right] \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \quad (3.64)$$

$$\bar{G}_{m2}^{\phi z} = j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}z'\right) \cos[m(\phi-\phi')]}{\rho' \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \\ \times \left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right. \\ \left. + \frac{n^2\pi^2}{b^2} H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \frac{\partial}{\partial\rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right] \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_z \quad (3.65)$$

$$\bar{G}_{m2}^{z\rho} = -j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{1}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \left\{ \frac{m}{\rho} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho'^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}z'\right) \right. \\ \left. \times \sin[m(\phi-\phi')] H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right\} \hat{a}_z \hat{a}_\rho, \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{m2}^{z\phi} = & j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}z'\right)\cos[m(\phi-\phi')]}{\rho\left\{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2\right\}} \\ & \times \left\{ \frac{n^2\pi^2}{b^2} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right. \\ & \left. + m^2 H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \frac{\partial}{\partial\rho'} \left[\frac{1}{\rho'} H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right] \right\} \hat{a}_z \hat{a}_\phi \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{m2}^{zz} = & -j2(2-\delta_0) \sum_{m,n} \frac{mn\pi \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}z'\right)\sin[m(\phi-\phi')]}{\rho\rho'\left\{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2\right\}} \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right. \\ & \left. + H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \frac{\partial}{\partial\rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right] \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \end{aligned} \quad (3.68)$$

และสามารถแตกองค์ประกอบของฟังก์ชันไดแอดิก $\bar{\bar{G}}_{c1}(\bar{R}, \bar{R}')$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{c1}^{\rho\rho} = & -\frac{1}{k^2} \frac{1}{\rho} \delta(\rho-\rho') \delta(\phi-\phi') \delta(z-z') \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \\ & + j2 \left(\frac{2-\delta_0}{b} \right) \sum_{m,n} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho'^2} \right)}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}z'\right) \\ & \times \cos[m(\phi-\phi')] H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \hat{a}_\rho \hat{a}_\rho \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{c1}^{z\phi} = & j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{1}{\kappa^2} \frac{m \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right)}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}z'\right)\sin[m(\phi-\phi')] \right. \\ & \left. \times H_m^{(2)}(\pm k_g\rho) \frac{\partial}{\partial\rho'} \left[\frac{1}{\rho'} H_m^{(2)}(\mp k_g\rho') \right] \right\} \hat{a}_z \hat{a}_\phi \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\bar{\bar{G}}_{e1}^{\rho z} = -j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\frac{n\pi}{b\rho'} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho'^2} \right)}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \cos[m(\phi - \phi')] \\ \times H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \end{array} \right\} \hat{a}_\rho \hat{a}_z \quad (3.71)$$

$$\bar{\bar{G}}_{e1}^{\phi\rho} = -j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{1}{\kappa^2} \frac{m \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho'^2} \right)}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \sin[m(\phi - \phi')] \\ \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \end{array} \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_\rho \quad (3.72)$$

$$\bar{\bar{G}}_{e1}^{\phi\phi} = j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\frac{m^2 n^2 \pi^2}{b^2} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \cos[m(\phi - \phi')]}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \times \left\{ \begin{array}{l} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \\ + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\frac{1}{\rho'} H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \end{array} \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \quad (3.73)$$

$$\bar{\bar{G}}_{e1}^{\phi z} = -j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\frac{m^2 n^2 \pi^2}{b^2 \rho'^2} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \sin[m(\phi - \phi')]}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \times \left\{ \begin{array}{l} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \\ - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \end{array} \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_z \quad (3.74)$$

$$\bar{\bar{G}}_{e1}^{z\rho} = -j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\frac{mn\pi}{b\rho'} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho'^2} \right)}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \cos[m(\phi - \phi')] \\ \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \end{array} \right\} \hat{a}_z \hat{a}_\rho \quad (3.75)$$

$$\bar{G}_{e1}^{z\phi} = j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\frac{m^2 n^2 \pi^2}{\rho^2 b^2} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \sin[m(\phi - \phi')]}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \times \left\{ \begin{array}{l} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \\ -\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho)] \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\frac{1}{\rho'} H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \end{array} \right\} \hat{a}_z \hat{a}_\phi \quad (3.76)$$

$$\bar{G}_{e1}^{zz} = -j \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z'\right) \cos[m(\phi - \phi')]}{\rho \rho' \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \times \left\{ \begin{array}{l} m^2 H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \\ + \frac{1}{\kappa^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho)] \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho')] \end{array} \right\} \hat{a}_\phi \hat{a}_\phi \quad (3.77)$$

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าและแบบแม่เหล็กเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญที่ใช้หาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมีซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

3.5 สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่องเปิดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบแม่เหล็กและแบบไฟฟ้า ซึ่งแหล่งกำเนิดจะแสดงด้วยความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า $\bar{J}(\bar{R}')$ กระแสจะมีเฉพาะทิศทาง z เท่านั้น จากฟังก์ชันกรีนไดโอดิกที่ได้จะหาสนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมีได้จาก

$$\bar{E}(\bar{R}) = -j\omega\mu_0 \iiint_V (\hat{a}_\rho \hat{a}_z G_{e1}^{\rho z} + \hat{a}_\phi \hat{a}_z G_{e1}^{\phi z} + \hat{a}_z \hat{a}_z G_{e1}^{zz}) \cdot \bar{J} \hat{a}_z dv' \quad (3.78)$$

เมื่อเส้นผ่านศูนย์กลางของโพรบและระยะห่างระหว่างแผ่นวงกลมทั้งสองมีขนาดเล็กมากเมื่อเปรียบเทียบกับความยาวคลื่น และกระแสที่กระจายบนโพรบมีค่าสม่ำเสมอจะได้

$$\bar{J}(\bar{R}') = I_0 \hat{a}_z \quad (3.79)$$

เมื่อ I_0 เป็นค่ากระแสสูงสุด ในการพิจารณาดำแหน่งโพรบจะกำหนดตำแหน่งโพรบใหม่เป็น $\rho' = \rho' + t$ และ $\phi' = \phi' + s$ และให้ ρ' และ ϕ' อยู่จุดกำเนิด $(0,0,z')$ อินทิเกรตฟังก์ชันกรีนไดแอดิกกับกระแสที่กล่าวมาข้างต้น จะได้สนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเป็น

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= -j\omega\mu_0 \int_{z'=0}^l G_{e1}^{\rho z} J_z dz' \\
 &= -2\omega\mu_0 I_0 \frac{(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\frac{1}{t} \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right)}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \cos[m(\phi-s)] \right. \\
 &\quad \left. \times H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right\}_{\rho'=t} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
 E_\phi &= -j\omega\mu_0 \int_{z'=0}^l G_{e1}^{\phi z} J_z dz' \\
 &= -2\omega\mu_0 I_0 \frac{(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\frac{m^2 n\pi}{bt^2} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \sin[m(\phi-s)]}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g t)}{-\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right\}_{\rho'=t}} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
 E_z &= -j\omega\mu_0 \int_{z'=0}^l G_{e1}^{zz} J_z dz' \\
 &= -\omega\mu_0 I_0 \frac{2(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\frac{b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \cos[m(\phi-s)]}{\rho t \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2 \right\}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{m^2 H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g t)}{+\frac{1}{\kappa^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=t}} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

และ

$$\bar{E} = E_\rho \hat{a}_\rho + E_\phi \hat{a}_\phi + E_z \hat{a}_z \tag{3.83}$$

สำหรับสนามแม่เหล็กจะหาได้จากความสัมพัทธ์ดังนี้

$$\bar{H}(\bar{R}) = j\omega\varepsilon_0 \iiint_{V'} (\hat{a}_\rho \hat{a}_z G_{m2}^{\rho z} + \hat{a}_\phi \hat{a}_z G_{m2}^{\phi z} + \hat{a}_z \hat{a}_z G_{m2}^{zz}) \cdot J_z \hat{a}_z dv' \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} H_\rho &= j\omega\varepsilon_0 \int_{z'=0}^l G_{m2}^{\rho z} J_z dz' \\ &= 2\omega\varepsilon_0 I_0 (2 - \delta_0) \sum_{m,n} \frac{\frac{m}{n\pi t} \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2}{\rho^2} \right)}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \sin[m(\phi - s)] \right\} \\ &\quad \times \left\{ H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) H_m^{(2)}(\mp k_g t) \right\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} H_\phi &= j\omega\varepsilon_0 \int_{z'=0}^l G_{m2}^{\phi z} J_z dz' \\ &= 2\omega\varepsilon_0 I_0 (2 - \delta_0) \sum_{m,n} \frac{\frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \cos[m(\phi - s)]}{t \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2 \right\}} \\ &\quad \times \left\{ m^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=t} \right\} \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} H_z &= j\omega\varepsilon_0 \int_{z'=0}^l G_{m2}^{zz} J_z dz' \\ &= -2\omega\varepsilon_0 I_0 (2 - \delta_0) \sum_{m,n} \frac{m \cos\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \sin[m(\phi - s)]}{\rho t \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2 \right\}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] H_m^{(2)}(\mp k_g t) \right. \\ &\quad \left. + H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=t} \right\} \end{aligned} \quad (3.87)$$

และ

$$\bar{H} = H_\rho \hat{a}_\rho + H_\phi \hat{a}_\phi + H_z \hat{a}_z \quad (3.88)$$

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่องเปิดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่กล่าวมาข้างต้นจะถูกใช้เป็นแหล่งกำเนิดในการหาการแพร่กระจายคลื่นที่สนามระยะไกล

3.6 สมการการแพร่กระจายคลื่นที่สนามระยะไกล

ในการหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอตดิกนั้น จะได้สนามที่ช่องเปิดของท่อนำคลื่นรัศมีออกมา จากนั้นจะหาสนามการแพร่กระจายคลื่นระยะไกลโดยใช้หลักการสนามสมมูลดังนี้

- พิจารณาหาสนามจากกระแสแม่เหล็ก

$$\bar{M}(\bar{R}'') = -\hat{a}_n \times \bar{E}(\bar{R}'') = -\hat{a}_\rho \times \bar{E}(\bar{R}'') \Big|_{\rho=a} \quad (3.89)$$

จะได้

$$\bar{M}(\bar{R}'') = -E_\phi(\rho=a, \phi=\phi'', z=z'')\hat{a}_z + E_z(\rho=a, \phi=\phi'', z=z'')\hat{a}_\phi \quad (3.90)$$

เมื่อ E_ϕ และ E_z แสดงในสมการที่ (3.81) และ (3.83) ตามลำดับ จะได้กระแสแม่เหล็กดังนี้

$$M_\phi = -\omega\mu_0 I_0 2(2-\delta_0) \sum_{m,n} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \cos[m(\phi'' - s)]}{n\pi a t \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \times \left\{ \begin{aligned} & m^2 H_m^{(2)}(\pm k_g a) H_m^{(2)}(\mp k_g t) \\ & + \frac{1}{\kappa^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho)] \right]_{\rho=a} \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho')] \right]_{\rho'=t} \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

$$M_z = 2\omega\mu_0 I_0 \frac{(2-\delta_0)}{b} \sum_{m,n} \frac{\frac{m^2 n \pi}{bt^2} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \sin[m(\phi'' - s)]}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \times \left\{ \begin{array}{l} H_m^{(2)}(\pm k_g a) H_m^{(2)}(\mp k_g t) \\ -\frac{1}{\kappa^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right\}_{\rho=a} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right\}_{\rho'=t} \end{array} \right\} \quad (3.92)$$

- พิจารณาหาสนามจากกระแสไฟฟ้า

$$\bar{J}(\bar{R}'') = \hat{a}_n \times \bar{H}(\bar{R}'') = \hat{a}_\rho \times \bar{H}(\bar{R}'') \Big|_{\rho=a} \quad (3.93)$$

จะได้

$$\bar{J}(\bar{R}'') = H_\phi(\rho=a, \phi=\phi'', z=z'') \hat{a}_z - H_z(\rho=a, \phi=\phi'', z=z'') \hat{a}_\phi \quad (3.94)$$

เมื่อ H_ϕ และ H_z แสดงในสมการที่ (3.86) และ (3.87) ตามลำดับ จะได้กระแสไฟฟ้างดังนี้

$$J_\phi = 2\omega\varepsilon_0 I_0 (2-\delta_0) \sum_{m,n} \frac{m \cos\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \sin[m(\phi'' - s)]}{at \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \times \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right]_{\rho=a} H_m^{(2)}(\mp k_g t) \\ + H_m^{(2)}(\pm k_g a) \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=t} \end{array} \right\} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
J_z = 2\omega\varepsilon_0 I_0 (2 - \delta_0) \sum_{m,n} & \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \cos[m(\phi'' - s)]}{n\pi t \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & m^2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right]_{\rho=a} H_m^{(2)}(\mp k_g t) \\ & + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} H_m^{(2)}(\pm k_g a) \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=l} \end{aligned} \right\} \quad (3.96)
\end{aligned}$$

จากนั้นพิจารณาสนามที่แพร่กระจายคลื่นระยะไกลทางช่องเปิด โดยใช้สมการกระแสแม่เหล็กและกระแสไฟฟ้าในสมการที่ (3.91), (3.92) และสมการที่ (3.95), (3.96) ตามลำดับ จะสามารถหาสนามระยะไกลได้ดังต่อไปนี้ เมื่อ $0 \leq z'' \leq b$ และ $0 \leq \phi'' \leq 2\pi$ และเครื่องหมาย (") จะนิยาม (ρ'', ϕ'', z'') ของเวกเตอร์ตำแหน่ง \bar{R}'' จะได้เวกเตอร์การแพร่กระจายคลื่นที่สนามระยะไกลเป็น

$$N_\theta = \int_{z''=0}^b \int_{\phi''=0}^{2\pi} [J_\phi \sin(\theta) \sin(\phi - \phi'') + J_z \cos(\theta)] e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} ad\phi'' dz'' \quad (3.97)$$

$$N_\theta = N_{\theta 1} + N_{\theta 2} \quad (3.98)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
N_{\theta 1} &= \int_{z''=0}^b \int_{\phi''=0}^{2\pi} J_\phi \sin(\theta) \sin(\phi - \phi'') e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} ad\phi'' dz'' \\
&= 2\omega\varepsilon_0 I_0 (2 - \delta_0) \sin(\theta) \\
&\times \sum_{m,n} \frac{m \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right]}{t \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right]_{\rho=a} H_m^{(2)}(\mp k_g t) \\ & + H_m^{(2)}(\pm k_g a) \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=l} \end{aligned} \right\} \\
&\times \int_{z''=0}^b \int_{\phi''=0}^{2\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \sin[m(\phi'' - s)] \sin(\phi - \phi'') e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} d\phi'' dz'' \quad (3.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\theta 2} &= \int_{z''=0}^h \int_{\phi''=0}^{2\pi} J_z \cos(\theta) e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} a d\phi'' dz'' \\
&= 2\omega \varepsilon_0 I_0 a (2 - \delta_0) \cos(\theta) \\
&\quad \times \sum_{m,n} \frac{1}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right] \left\{ m^2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right]_{\rho=a} H_m^{(2)}(\mp k_g l) \right. \\
&\quad \left. + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} H_m^{(2)}(\pm k_g a) \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=l} \right\} \\
&\quad \times \int_{z''=0}^h \int_{\phi''=0}^{2\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \cos[m(\phi'' - s)] e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} d\phi'' dz''
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
N_\phi &= \int_{z''=0}^h \int_{\phi''=0}^{2\pi} J_\phi \sin(\theta) \sin(\phi + \phi'') e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} a d\phi'' dz'' \\
&= 2\omega \varepsilon_0 I_0 (2 - \delta_0) \sin(\theta) \\
&\quad \times \sum_{m,n} \frac{m \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right]}{t \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right]_{\rho=a} H_m^{(2)}(\mp k_g l) \right. \\
&\quad \left. + H_m^{(2)}(\pm k_g a) \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=l} \right\} \\
&\quad \times \int_{z''=0}^h \int_{\phi''=0}^{2\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \sin[m(\phi'' - s)] \sin(\phi + \phi'') e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} d\phi'' dz''
\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$L_\theta = \int_{z''=0}^h \int_{\phi''=0}^{2\pi} \left[M_\phi \sin(\theta) \sin(\phi - \phi'') - M_z \cos(\theta) \right] e^{jka \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} a d\phi'' dz'' \tag{3.102}$$

$$L_\theta = L_{\theta 1} + L_{\theta 2} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
L_{\theta 1} &= \int_{z''=0}^b \int_{\phi''=0}^{2\pi} M_{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi - \phi'') e^{jk_a \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} a d\phi'' dz'' \\
&= -2\omega\mu_0 I_0 (2 - \delta_0) \sin(\theta) \\
&\quad \times \sum_{m,n} \left\{ \frac{\left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right]}{n\pi t} \left[m^2 H_m^{(2)}(\pm k_g a) H_m^{(2)}(\mp k_g t) + \frac{1}{\kappa^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right]_{\rho=a}} \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right]_{\rho'=t} \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{\left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \int_{z''=0}^b \int_{\phi''=0}^{2\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \cos[m(\phi'' - s)] \sin(\phi - \phi'') \\
&\quad \times e^{jk_a \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} d\phi'' dz''
\end{aligned} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}
L_{\theta 2} &= - \int_{z''=0}^b \int_{\phi''=0}^{2\pi} M_z \cos(\theta) e^{jk_a \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} a d\phi'' dz'' \\
&= -2\omega\mu_0 I_0 a \cos(\theta) \frac{(2 - \delta_0)}{b} \\
&\quad \times \sum_{m,n} \left\{ \frac{\frac{m^2 n \pi}{b t^2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right]}{3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2} \left[H_m^{(2)}(\pm k_g a) H_m^{(2)}(\mp k_g t) - \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} H_m^{(2)}(\pm k_g \rho) \right] \right\}_{\rho=a}} \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho') \right] \right\}_{\rho'=t} \right\} \\
&\quad \times \int_{z''=0}^b \int_{\phi''=0}^{2\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \sin[m(\phi'' - s)] e^{jk_a \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} a d\phi'' dz''
\end{aligned} \tag{3.105}$$

≈

$$\begin{aligned}
L_\phi &= \int_{z''=0}^h \int_{\phi''=0}^{2\pi} M_\phi \sin(\theta) \sin(\phi + \phi'') e^{jk_a \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} ad\phi'' dz'' \\
&= -2\omega\mu_0 I_0 \sin(\theta) (2 - \delta_0) \sum_{m,n} \frac{\left[\cos\left(\frac{n\pi}{b} l\right) - 1 \right]}{n\pi l \left\{ 3k_g^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \right\}} \\
&\quad \times \left\{ m^2 H_m^{(2)}(\pm k_g a) H_m^{(2)}(\mp k_g t) \right. \\
&\quad \times \left. \left[\frac{1}{\kappa^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho H_m^{(2)}(\pm k_g \rho)] \right] \right]_{\rho=a} \left[\frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' H_m^{(2)}(\mp k_g \rho')] \right] \right]_{\rho'=t} \right\} \\
&\quad \times \int_{z''=0}^h \int_{\phi''=0}^{2\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z''\right) \cos[m(\phi'' - s)] \sin(\phi + \phi'') e^{jk_a \sin \theta \cos(\phi - \phi'')} d\phi'' dz'' \quad (3.106)
\end{aligned}$$

จะได้สมการการแพร่กระจายสนามไฟฟ้าระยะไกลเป็นดังสมการ

$$E_r(r, \theta, \phi) = 0 \quad (3.107ก)$$

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (L_\phi + \eta N_\theta) \quad (3.107ข)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (L_\theta - \eta N_\phi) \quad (3.107ค)$$

ดังนั้นจะได้สมการการแพร่กระจายสนามไฟฟ้าระยะไกลโดยแทนค่าสมการที่ (3.97) ถึง (3.104) ลงในสมการที่ (3.107) และ

$$\vec{E}^T(r, \theta, \phi) = E_\theta(r, \theta, \phi) \hat{a}_\theta + E_\phi(r, \theta, \phi) \hat{a}_\phi \quad (3.108)$$

และในลักษณะเดียวกันสามารถหาการแพร่กระจายสนามระยะไกลของสนามแม่เหล็กได้ดังนี้

$$H_r(r, \theta, \phi) = 0 \quad (3.109ก)$$

$$H_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (N_\phi + \frac{L_\theta}{\eta}) \quad (3.109ข)$$

$$H_\phi(r, \theta, \phi) = -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left(N_\theta - \frac{L_\phi}{\eta} \right) \quad (3.109ค)$$

ดังนั้นจะได้สมการที่แพร่กระจายสนามแม่เหล็กกระยะไกลเป็น

$$\vec{H}^T(r, \theta, \phi) = H_\theta(r, \theta, \phi)\hat{a}_\theta + H_\phi(r, \theta, \phi)\hat{a}_\phi \quad (3.110)$$

ในการวิเคราะห์สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอติกเพื่อคำนวณหาสนามการแพร่กระจายคลื่นจากตัวสายอากาศที่ได้กล่าวไปแล้วนั้น สามารถนำใช้คำนวณหาคุณลักษณะต่างๆ ของสายอากาศได้ซึ่งจะกล่าวไว้ในบทที่ 4

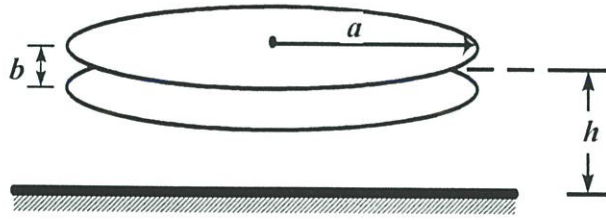
3.7 สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อน

ในการวิเคราะห์คุณสมบัติของสายอากาศที่อยู่ใกล้ระนาบตัวนำขนาดอนันต์ในรูปที่ 3.2 จะใช้ทฤษฎีเงา (Image Theory) [28] ซึ่งสามารถทำได้โดยกำหนดให้มีแหล่งกำเนิดสนามเสมือน (เงา) ซึ่งแสดงส่วนของสนามที่สะท้อนระนาบตัวนำเพิ่มขึ้นมา การเพิ่มแหล่งกำเนิดเสมือนนี้ทำให้เกิดการรวมแหล่งกำเนิดเสมือนเมื่อนำระนาบตัวนำขนาดอนันต์ออกไปแล้ว แต่ยังคงให้สนามในบริเวณด้านบนของระนาบตัวนำเหมือนกับสนามที่เกิดจากปัญหาเดิมที่มีแหล่งกำเนิดสนามวางอยู่เหนือระนาบตัวนำ

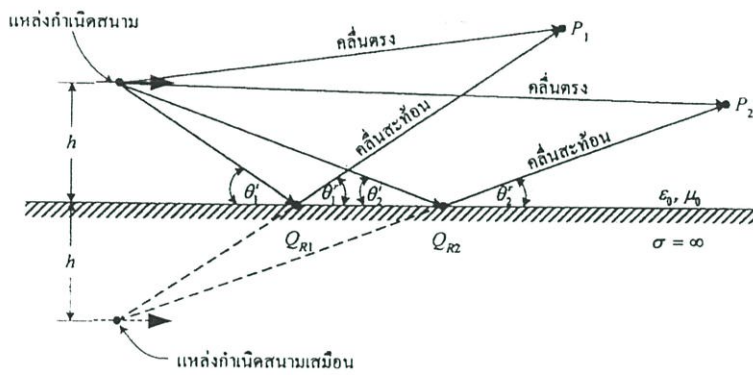
โครงสร้างของสายอากาศนี้มีลักษณะเป็นท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ประกอบด้วยแผ่นระนาบตัวนำสองแผ่นวางขนานกันโดยรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำมีค่าคงที่เท่ากับ a มีระยะห่างระหว่างแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเท่ากับ b และมีระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนกับสายอากาศเท่ากับ h ดังแสดงในรูปที่ 3.2

กำหนดให้สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีมีลักษณะเป็นแหล่งกำเนิดแม่เหล็กเนื่องจากสายอากาศมีลักษณะเป็นช่องเปิดวางตามแนวอนันต์ที่ความสูง h จากระนาบตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ดังแสดงในรูป 3.3 สายอากาศนี้จะแพร่กระจายคลื่นไปในทิศทางต่างๆ ที่จุดสังเกต P_1 จะมีคลื่นตรงจากสายอากาศรวมกับคลื่นสะท้อนที่สายอากาศส่งออกไปสะท้อนระนาบตัวนำที่จุด Q_{R1} แล้วสะท้อนไปยังจุด P_1 โดยที่มีมุม $\theta_1' = \theta_1$ และเมื่อต่อเส้นทางของคลื่นสะท้อนลงไปที่ใต้ระนาบตัวนำจนไปถึงตำแหน่ง h ใต้ตัวนำนั้น ซึ่งเป็นตำแหน่งของแหล่งกำเนิดสนามเสมือน ถ้าเลื่อนจุดสังเกตไปที่ตำแหน่งอื่นๆ เช่นที่ P_2 จุดของการสะท้อนจะเลื่อนไปอยู่ที่จุด Q_{R2} ซึ่งยังคงพบว่าแหล่งกำเนิดสนามยังคงอยู่ที่เดิม และในรูปที่ 3.4 แสดงเงื่อนไขที่เหมาะสมของทอ

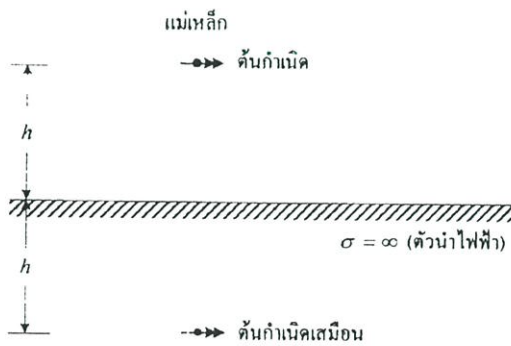
นำคลื่นเชิงรัศมีของแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็กจริงและแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็กเสมือน โดยที่ทิศทางของลูกศรแสดงขั้วของคลื่นนั้น



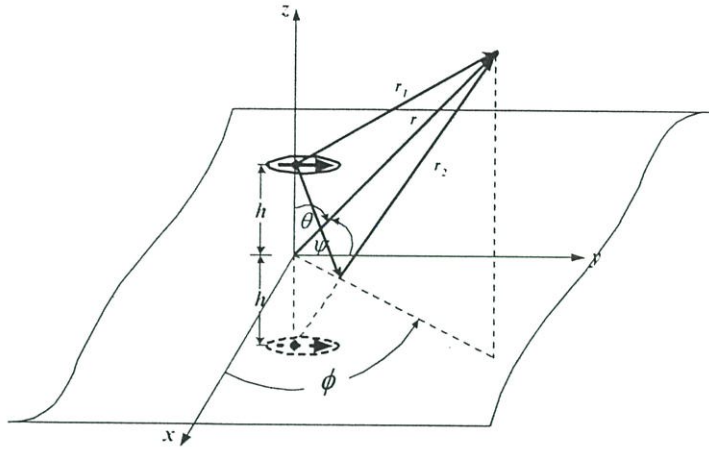
รูปที่ 3.2 สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีมีวางบนตัวสะท้อน



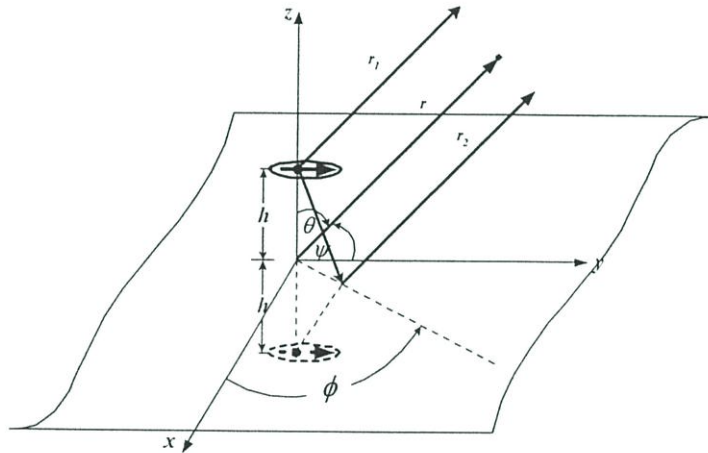
รูปที่ 3.3 สายอากาศแบบช่องเปิดวางเหนือระนาบตัวนำขนาดอนันต์



รูปที่ 3.4 แหล่งกำเนิดแม่เหล็กพร้อมทั้งแหล่งกำเนิดเสมือน



(ก) กระแสแม่เหล็กในแนวระนาบวงเหนือระนาบกราวด์



(ข) จุดสังเกตอยู่ที่สนามระยะไกล

รูปที่ 3.5 กระแสแม่เหล็กในแนวระนาบวงเหนือตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์

จากรูปที่ 3.5 สนามไฟฟ้าที่ได้จากการแทนค่า N_θ และ L_θ ในสมการที่ (3.98) และ (3.106) ตามลำดับลงในสมการที่ (3.107ข) สามารถเขียนได้เป็น

$$E_\theta^d(r, \theta, \phi) = -\frac{jke^{-jk_1 r_1}}{4\pi r_1} (L_\theta + \eta N_\theta) \quad (3.111)$$

และสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการสะท้อนสามารถเขียนได้เป็น

$$E_\theta^r(r, \theta, \phi) = -\frac{jR_h k e^{-jkr_2}}{4\pi r_2} (L_\phi + \eta N_\theta) \quad (3.112)$$

เมื่อ R_h เป็นสัมประสิทธิ์การสะท้อน (มีค่าเท่ากับ 1 เนื่องจากแหล่งกำเนิดเสมือนมีทิศทางเดียวกับแหล่งกำเนิดจริง) จะได้

$$E_\theta^r(r, \theta, \phi) = -\frac{jke^{-jkr_2}}{4\pi r_2} (L_\phi + \eta N_\theta) \quad (3.113)$$

พิจารณาสนามระยะไกล

$$\left. \begin{aligned} r_1 &\approx r - h \cos \theta \\ r_2 &\approx r + h \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{สำหรับการเปลี่ยนแปลงเฟส} \quad (3.114ก)$$

$$r_1 \approx r_2 \approx r \quad \text{สำหรับการเปลี่ยนแปลงขนาด} \quad (3.114ข)$$

จะได้สมการสนามไฟฟ้ารวม ดังนี้

$$E_\theta = E_\theta^d + E_\theta^r \quad (3.115)$$

สมการที่ (3.115) เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำและระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและระนาบแผ่นตัวนำทั้งสอง ซึ่งเป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดระหว่างตัวสะท้อนและระนาบแผ่นตัวนำทั้งสอง สำหรับคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นที่ได้จากการคำนวณนี้จะกล่าวถึงในบทที่ 4

3.8 สรุป

ในบทนี้ได้อธิบายถึงการวิเคราะห์สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก เริ่มต้นด้วยการหาฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการคลื่นเวกเตอร์เอกพันธ์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยของสมการคลื่นสเกลาร์ และหาฟังก์ชันชนิดกรีนไดโอดิกแม่เหล็กชนิดที่สองเนื่องจากเป็นฟังก์ชันไดโอดิกไซลินอยด์ จากนั้นจะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกรีนไดโอดิกเพื่อหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าชนิดที่หนึ่งซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดเพื่อนำไปใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของสายอากาศ นอกจากนี้ได้กล่าวถึงสายอากาศ

แบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อนโดยอาศัยหลักการของทฤษฎีเงา สำหรับผลการคำนวณคุณลักษณะของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี และสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อนจะกล่าวไว้ในบทที่ 4

บทที่ 4

การวิเคราะห์ผลการคำนวณและผลการทดสอบสายอากาศ

4.1 บทนำ

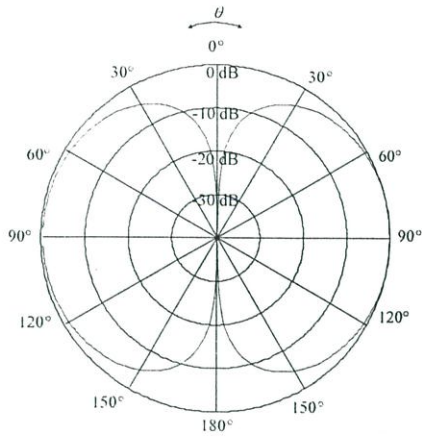
ในบทนี้จะแสดงการวิเคราะห์ผลการคำนวณคุณลักษณะของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีและสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อนที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก คุณลักษณะของสายอากาศที่พิจารณา ได้แก่ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยก ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง และคุณลักษณะการโพลาไรซ์ของสายอากาศ จากนั้นจะกล่าวถึงการสร้างและทดสอบสายอากาศ เพื่อนำผลจากการทดสอบที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก

4.2 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

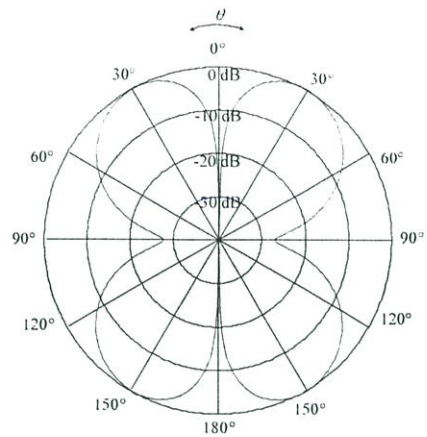
ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่นำมาพิจารณา ได้แก่ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกและระนาบมุมกวาด ค่ามุมที่มีสนามสูงสุดในระนาบมุมยก ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง และค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศ ตัวแปรที่สำคัญในการพิจารณา คือ ขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม

4.2.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ (Radiation Pattern)

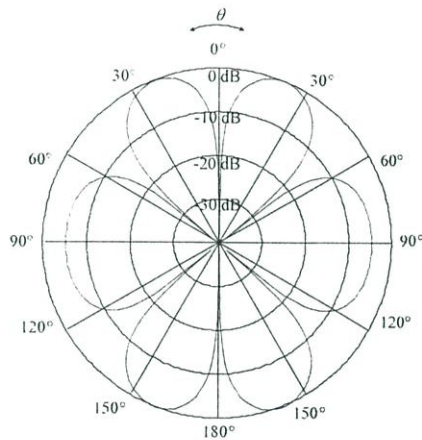
เมื่อเปลี่ยนขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกและระนาบมุมกวาดของสายอากาศแบบช่องเปิด แสดงในรูปที่ 4.1 และ รูปที่ 4.2 ตามลำดับ จะสังเกตได้ว่าค่ามุมเมื่อสนามสูงสุดในระนาบมุมยกจะขึ้นอยู่กับขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม จากรูปที่ 4.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมยกจะมีลักษณะเป็นรูปกรวย กล่าวคือในรูป 4.1 (ก) แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกที่ขนาดรัศมีของแผ่นระนาบเท่ากับ 0.2λ ค่ามุมเมื่อสนามสูงสุดจะอยู่ที่ 90 องศา ส่วนแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกที่ขนาดรัศมีของแผ่นระนาบเท่ากับ 0.6λ ในรูปที่ 4.1(ข) ค่ามุมเมื่อสนามสูงสุดจะอยู่ที่ 30 องศา และในรูป 4.1 (ค) และ (ง) แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกที่ขนาดรัศมีของแผ่นระนาบเท่ากับ 0.8λ และ 1.2λ ค่ามุมเมื่อสนามสูงสุดจะอยู่ที่ 21 และ 14 องศา ตามลำดับ



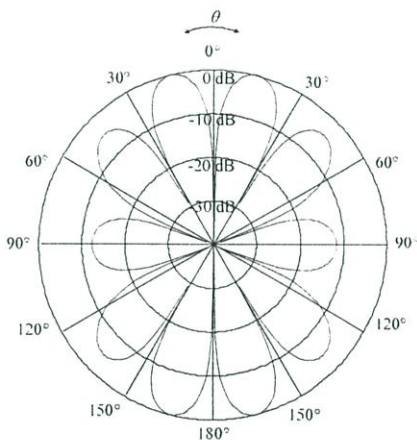
(ก) $a = 0.2\lambda$



(ข) $a = 0.6\lambda$

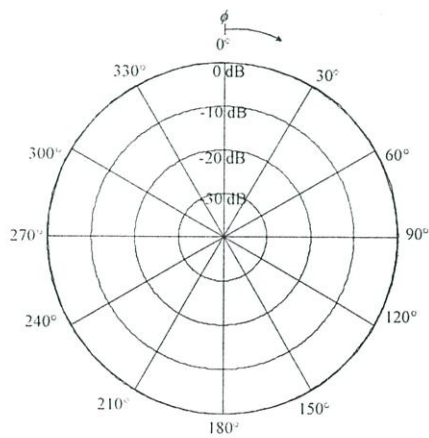


(ค) $a = 0.8\lambda$

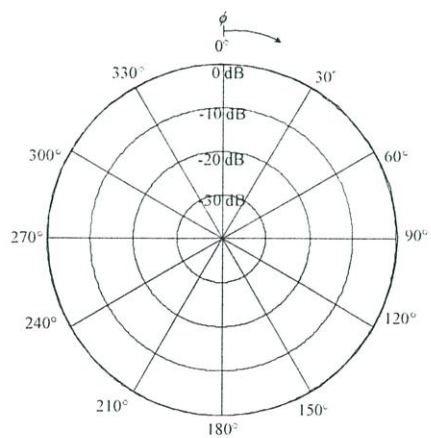


(ง) $a = 1.2\lambda$

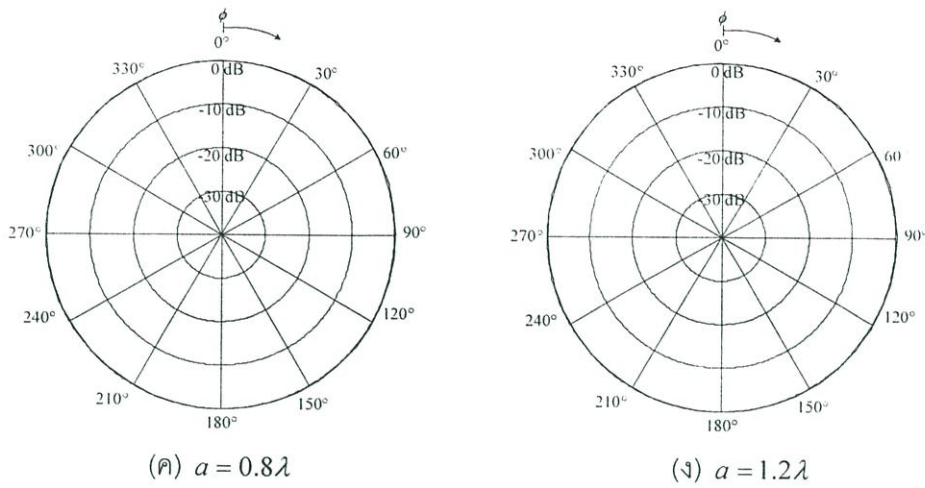
รูปที่ 4.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมยกที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.2λ 0.6λ 0.8λ และ 1.2λ ตามลำดับ



(ก) $a = 0.2\lambda$



(ข) $a = 0.6\lambda$

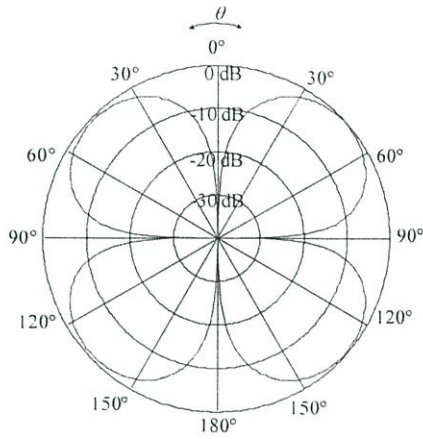


รูปที่ 4.2 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมกวาดที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.2λ 0.6λ 0.8λ และ 1.2λ ตามลำดับ

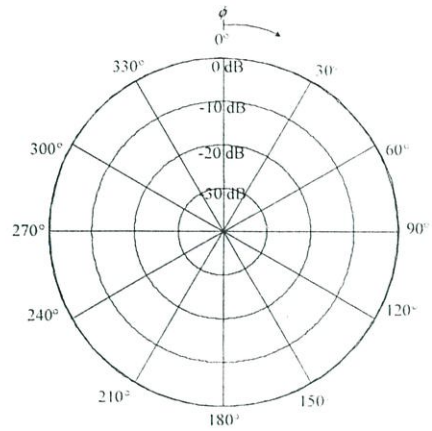
และจากรูปที่ 4.2 เมื่อขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมมีขนาดใหญ่ขึ้น แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมกวาดจะมีความแรงของสนามเท่ากันทุกทิศทาง

เนื่องจากวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกจะแสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่อยู่ในรูปผลรวมอนุกรม ดังนั้นเมื่อพิจารณาขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำเท่ากับ 0.6λ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะลู่เข้า (Converge) เมื่อ n และ m เท่ากับ 6 ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.3 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกที่ได้ จะมีลักษณะเป็นลำคลื่นรูปกรวย ค่ามุมเมื่อสนามสูงสุดจะชี้ที่ 50 องศา ส่วนแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมกวาดจะเป็นแบบรอบทิศทาง

รูปที่ 4.4 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีวางบนตัวสะท้อนที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.2λ 0.6λ 0.8λ และ 1.6λ ตามลำดับ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่ได้จะมีลักษณะคล้ายกับแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบช่องเปิดที่ไม่ได้วางบนแผ่นสะท้อน

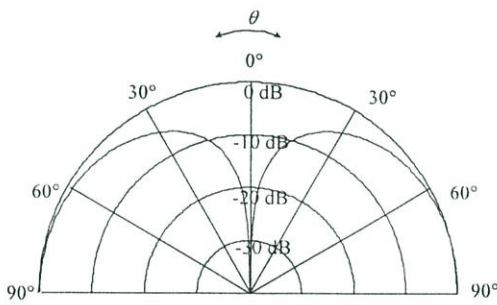


(ก) ระบายมุมยก

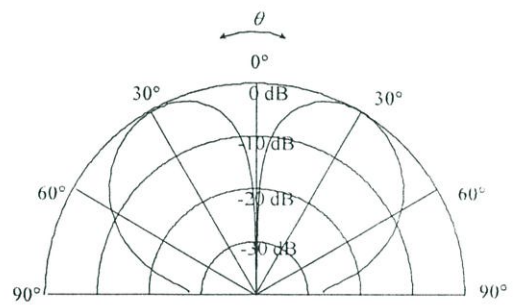


(ข) ระบายมุมกวาด

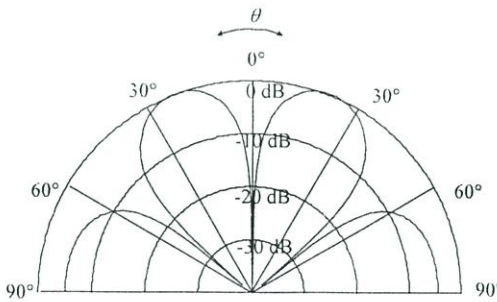
รูปที่ 4.3 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่ลู่เข้า (converge) เมื่อ n และ m เท่ากับ 6 ที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.6λ



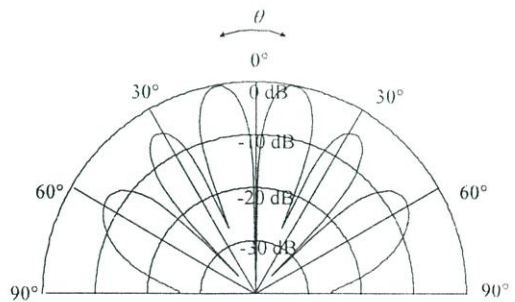
(ก) $a = 0.2\lambda$



(ข) $a = 0.6\lambda$



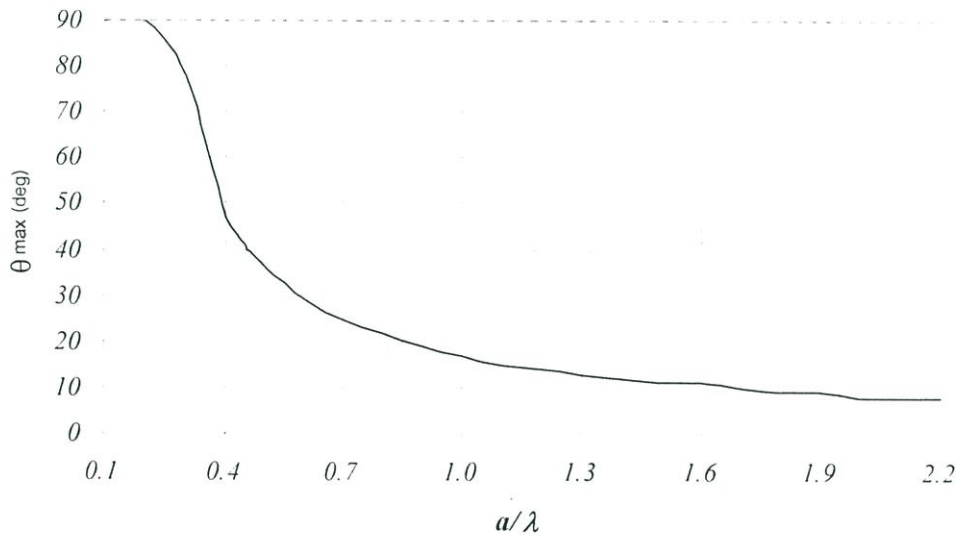
(ค) $a = 0.8\lambda$



(ง) $a = 1.6\lambda$

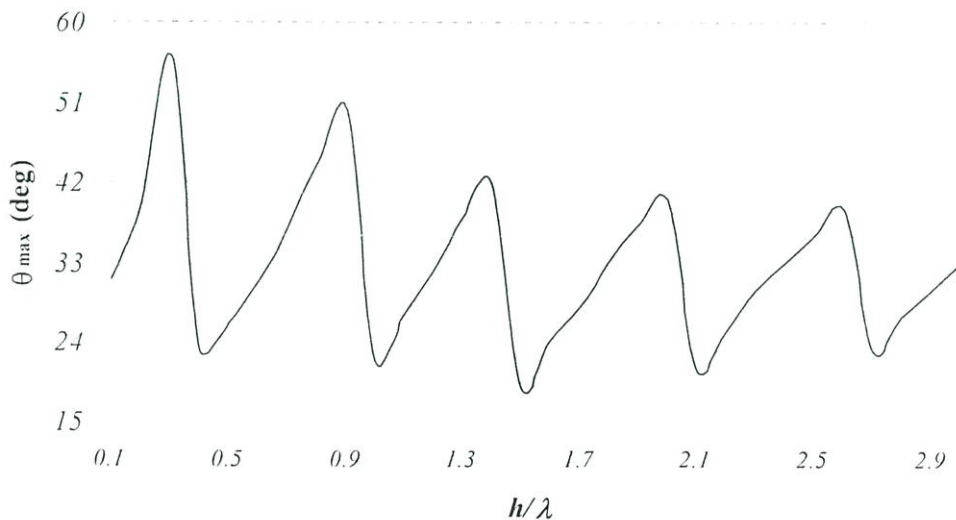
รูปที่ 4.4 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศวางบนตัวสะท้อนในระนาบมุมยกที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.2λ 0.6λ 0.8λ และ 1.6λ ตามลำดับ

4.2.2 ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระยะนามุมยก(Elevation Beam Peak)



รูปที่ 4.5 ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระยะนามุมยกที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบวงกลม

ในการวิเคราะห์สายอากาศที่มีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นรูปกรวยนั้น พารามิเตอร์ที่สำคัญอย่างหนึ่งคือค่ามุมที่สนามสูงสุดในระยะนามุมยก รูปที่ 4.5 แสดงค่ามุมที่สนามสูงสุดในระยะนามุมยก เมื่อขนาดรัศมีของแผ่นระนาบวงกลมมีค่าตั้งแต่ $0.1\lambda - 2.2\lambda$ จากรูปจะเห็นว่าค่ามุมที่สนามสูงสุดในระยะนามุมยกจะชี้ที่ 90 องศา เมื่อรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมน้อยกว่า 0.25λ และจะลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อรัศมีของแผ่นวงกลมมากกว่า 0.25λ



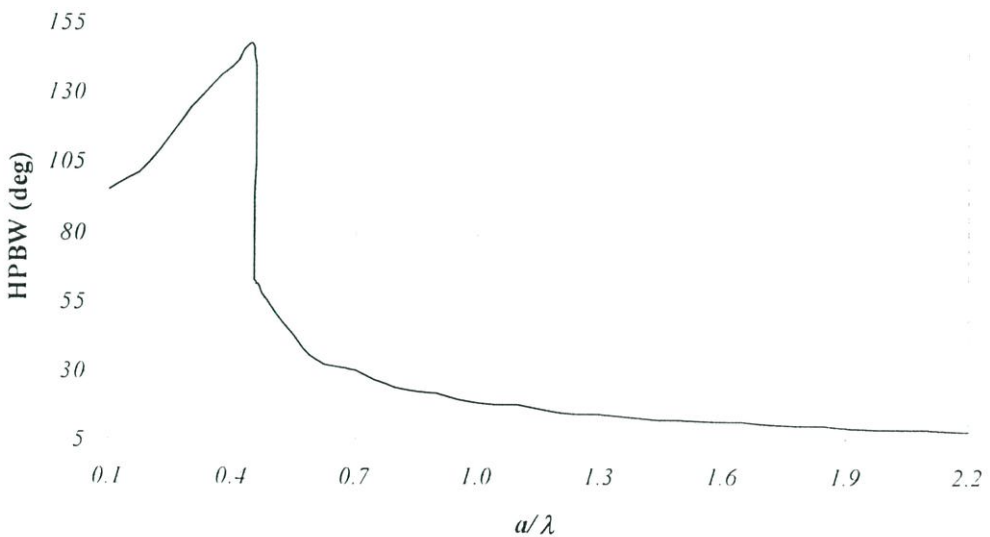
รูปที่ 4.6 ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระยะนามุมยกที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเมื่อ $a = 0.6\lambda$

รูปที่ 4.6 แสดงค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเมื่อ $a = 0.6\lambda$ ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเมื่อระยะห่างระหว่างแผ่นตัวสะท้อนและแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองมีค่ามากขึ้น ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกมีแนวโน้มที่จะลดลง

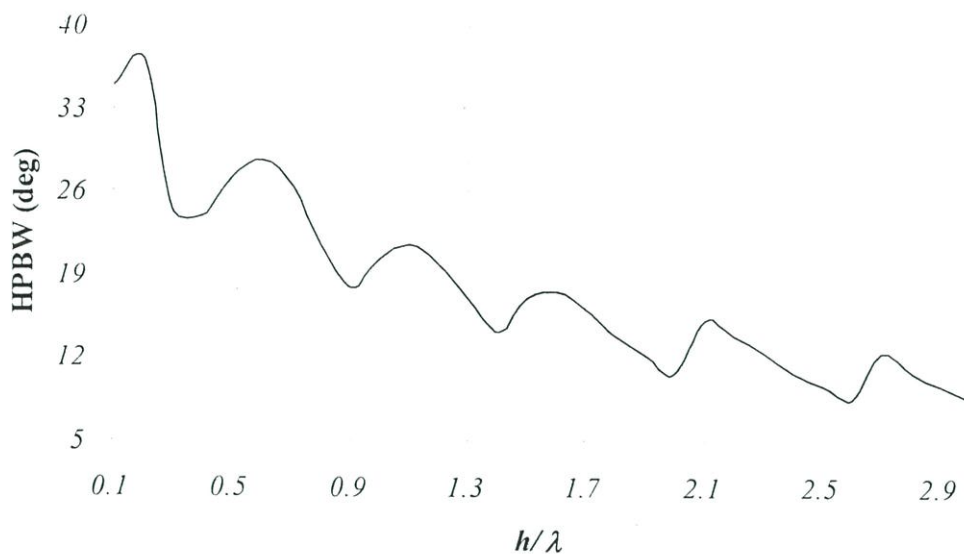
4.2.3 ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง(Half-Power Beamwidth)

ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญซึ่งเป็นมุมที่วัดระหว่างจุดที่ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นในลำหลักมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุด หรือถ้าเทียบเป็นอัตราส่วนเดซิเบล คือกำลังงานที่ลดลงมา 3 dB จากค่ากำลังงานสูงสุด ในรูปที่ 4.7 แสดงค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ ซึ่งจะสังเกตได้ว่าค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังจะเพิ่มขึ้นจนกระทั่งรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมเท่ากับ 0.4λ จากนั้นมีแนวโน้มที่ลดลงเมื่อขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมมีค่ามากกว่า 0.4λ สังเกตได้จากรูปที่ 4.1 เมื่อ a มีค่ามากขึ้นจำนวนของพูจะมีมากขึ้นทำให้ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังแคบลง

นอกจากนี้ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังจะมีผลต่อค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดด้วย นั่นคือเมื่อค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังแคบลงจะทำให้ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดสูงขึ้น



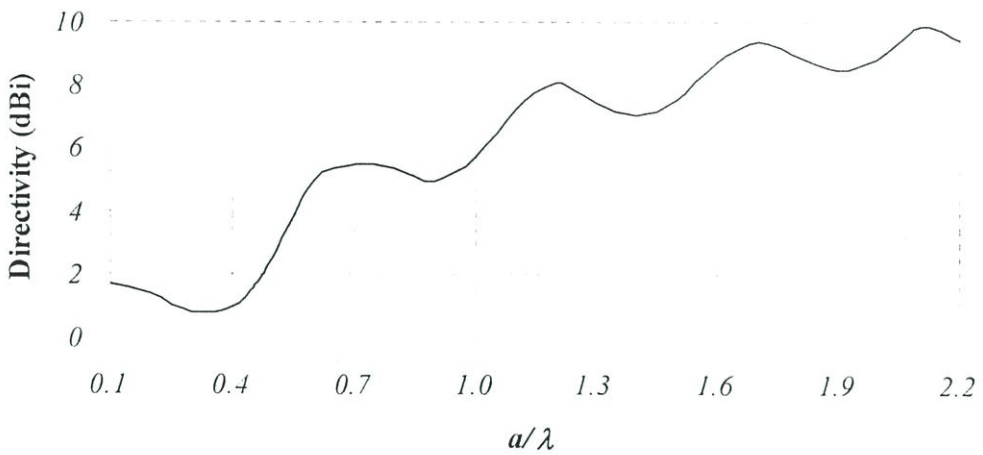
รูปที่ 4.7 ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบวงกลม



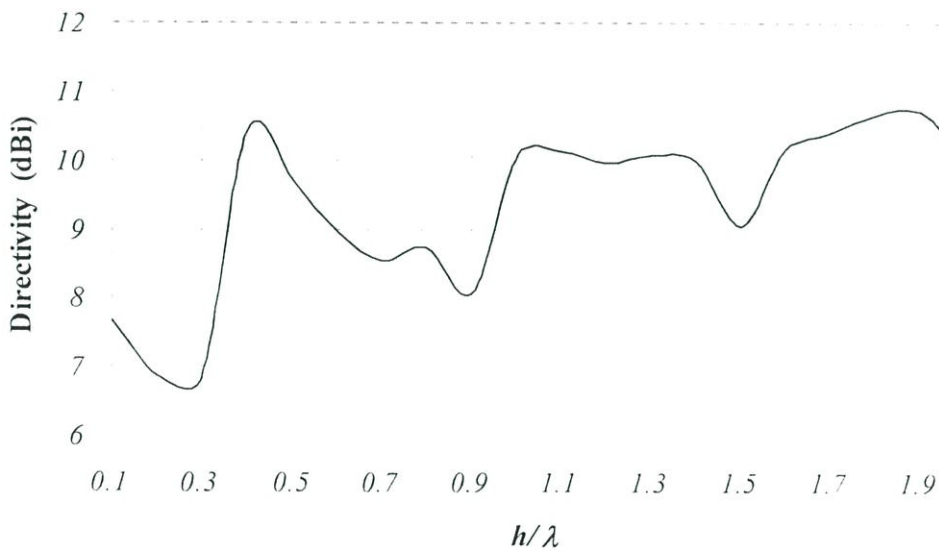
รูปที่ 4.8 ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเมื่อ $a = 0.6\lambda$

4.2.4 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด (Directivity)

ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดของสายอากาศ เป็นพารามิเตอร์หนึ่งที่สามารถของสายอากาศในการชี้ทิศทางไปยังเป้าหมายที่ต้องการ รูปที่ 4.9 แสดงค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม ซึ่งสังเกตได้ว่าเมื่อขนาดของรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมมากขึ้นค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดจะขึ้นอยู่กับรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม ในระบบการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย สายอากาศจะต้องมีค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดไม่น้อยกว่า 4 dBi [8] ดังนั้นเราจะต้องออกแบบสายอากาศให้มีขนาดของรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมมากกว่า 0.55λ ในขณะที่ระบบการสื่อสารดาวเทียมเคลื่อนที่สายอากาศจะต้องมีค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดประมาณ 7 dBi [8] ขนาดของแผ่นระนาบตัวนำจะต้องมีขนาดมากกว่า 1.05λ



รูปที่ 4.9 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม

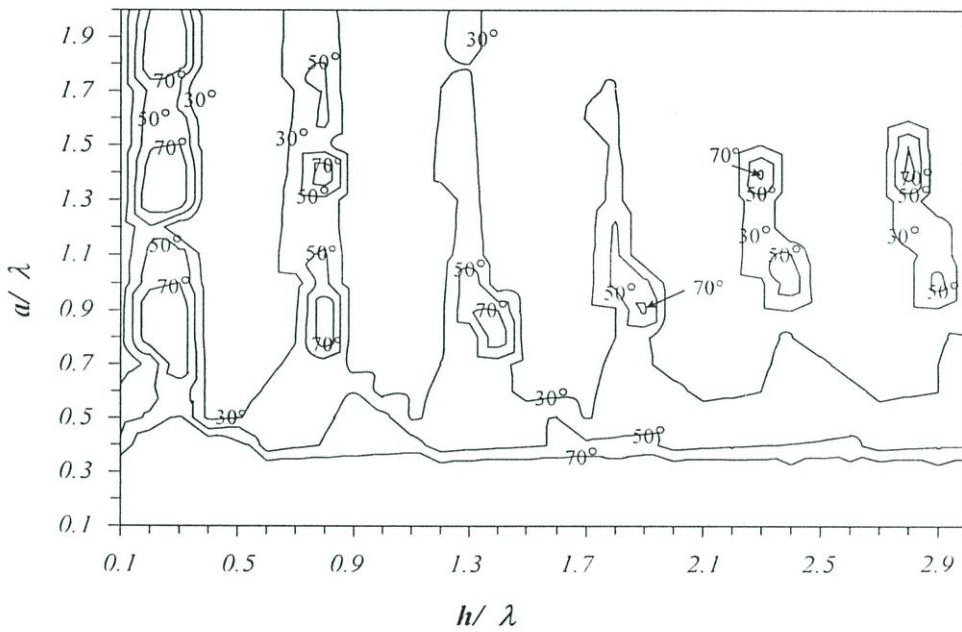


รูปที่ 4.10 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเมื่อ $a = 0.6\lambda$

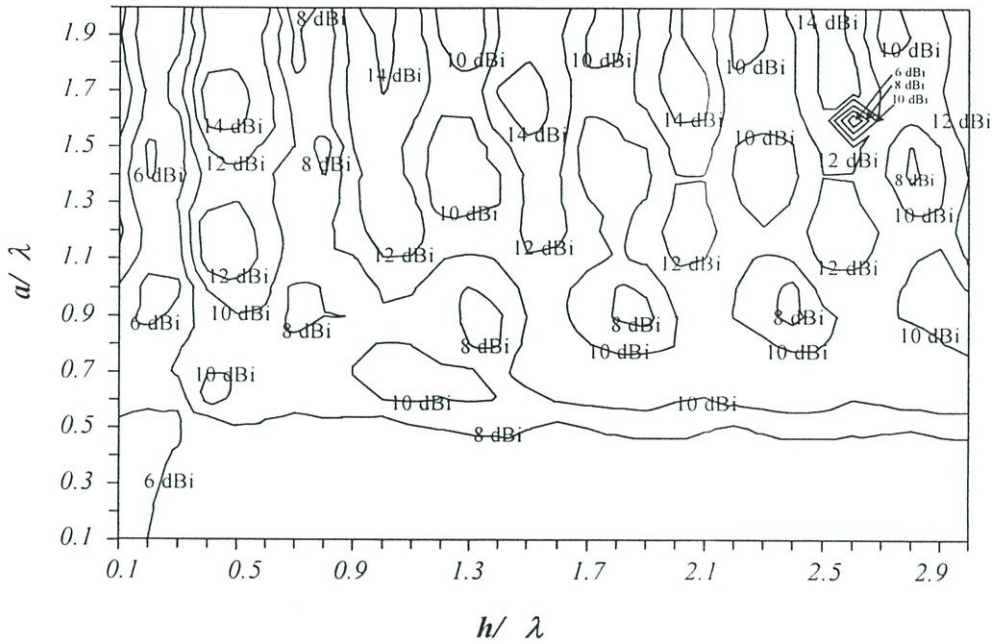
จากรูปที่ 4.10 แสดงค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่เป็นฟังก์ชันของระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเมื่อ $a = 0.6\lambda$ ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเมื่อระยะห่างระหว่างแผ่นระนาบกรวดดีและแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเพิ่มขึ้นค่าสภาพเจาะจงทิศทางจะเพิ่มขึ้นเล็กน้อย

ในรูปที่ 4.11 และ 4.12 แสดงกราฟแผนภูมิโครงร่างของค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยก และค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ และระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นตัวนำทั้งสอง โดยกราฟนี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการออกแบบสายอากาศในทางปฏิบัติ ซึ่งจากกราฟเมื่อกำหนดค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่

ต้องการ จะสามารถเลือกค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศได้ และสามารถนำไปใช้ในการออกแบบเพื่อหาขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ และระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นตัวนำ ทั้งสองที่เหมาะสมที่จะนำไปใช้สร้างสายอากาศจริงต่อไป ตัวอย่างเช่นถ้าต้องการค่ามุมที่สนามสูงสุดในระดับมุมยกเท่ากับ 30 องศา และต้องการค่าสภาพเจาะจงทิศทางมากกว่า 8 dBi จะต้องใช้ขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำเท่ากับ 0.55λ และระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นตัวนำทั้งสองประมาณ 1.5λ - 1.7λ และ 2.1λ - 2.6λ เป็นต้น



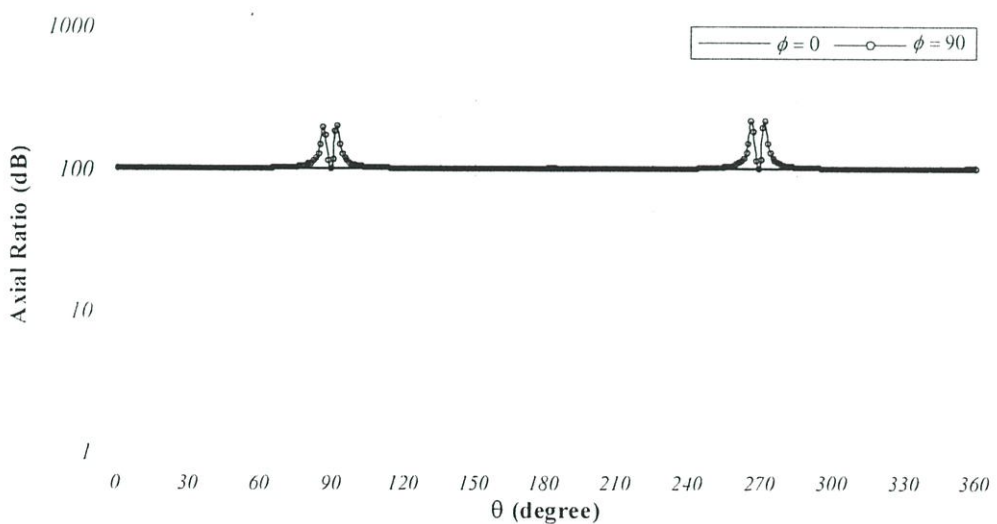
รูปที่ 4.11 กราฟแผนภูมิโครงร่างของค่ามุมที่สนามสูงสุดในระดับมุมยกที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำและระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นตัวนำทั้งสอง



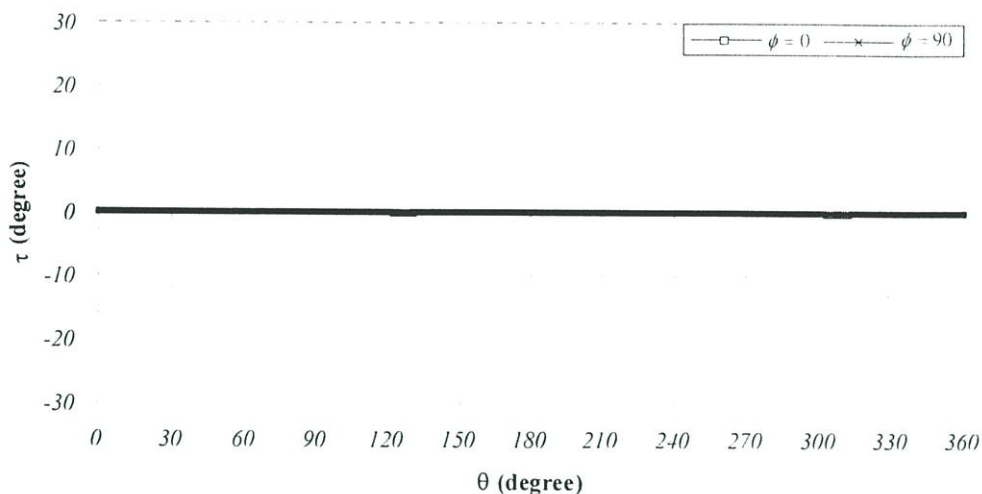
รูปที่ 4.12 กราฟแผนภูมิโครงร่างของค่าสภาพเจาะจงที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ และ ระยะห่างระหว่างตัวสะท้อนและแผ่นตัวนำทั้งสอง

4.3 คุณสมบัติการโพลาไรซ์

คุณสมบัติการโพลาไรซ์ของสายอากาศ จะแสดงด้วยค่าอัตราส่วนแกน (Axial Ratio) และค่ามุมเอียง (Tilt Angle) ของสายอากาศเมื่อ $a = 0.6\lambda$ โดยใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแสดงดังรูปที่ 4.13 และ 4.14 ตามลำดับ



รูปที่ 4.13 ค่าอัตราส่วนแกนของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเมื่อ $a = 0.6\lambda$



รูปที่ 4.14 ค่ามุมเอียงของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเมื่อ $a = 0.6\lambda$

เมื่อพิจารณาค่าอัตราส่วนแกนในรูปที่ 4.13 ค่าที่ได้มีค่าสูงมาก แสดงให้เห็นว่าสายอากาศมีโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น และเมื่อพิจารณาค่ามุมเอียงเมื่อเปรียบเทียบกับแกนขององค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวตั้งซึ่งเป็นแกนอ้างอิงในรูปที่ 4.14 จะพบว่าค่ามุมเอียงมีค่าประมาณ 0° แสดงว่าการโพลาไรซ์ของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเป็นแบบเชิงเส้นในแนวตั้ง

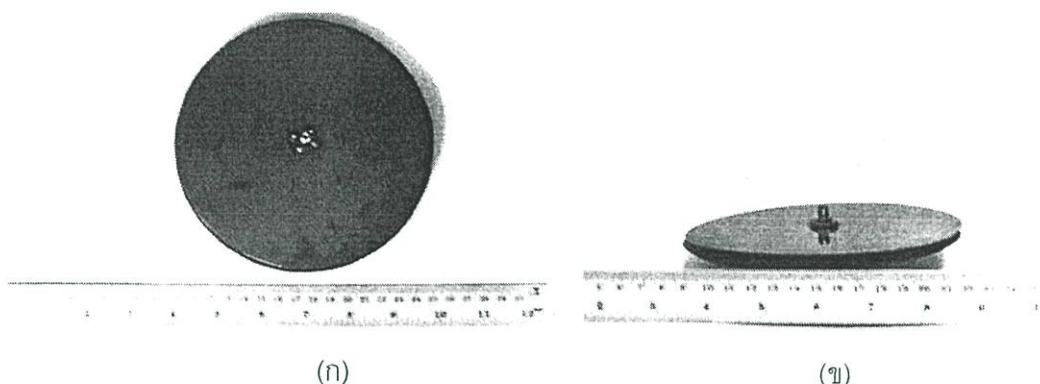
4.4 การออกแบบและทดสอบสายอากาศ

ในการทดสอบสายอากาศได้ออกแบบและสร้างสายอากาศต้นแบบที่ความถี่ 2.45 GHz ซึ่งเป็นความถี่ใช้งานของระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย (Wireless LAN Communications) และมีช่วงความกว้างแถบความถี่ 83 MHz (2.4 – 2.483 GHz)

จากการวิเคราะห์สายอากาศโดยใช้วิธีคัลกัลเวเตอร์และฟังก์ชันกรีนไดแอดิก เมื่อเปลี่ยนแปลงขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม จะมีผลต่อคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ดังนั้นขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลมจึงเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญในการออกแบบสายอากาศ สายอากาศต้นแบบสร้างโดยใช้แผ่นทองแดงซึ่งมีความหนา 0.05 mm และออกแบบให้แผ่นระนาบวงกลมมีขนาดรัศมี (a) 0.6λ หรือประมาณ 7.5 cm และระหว่างแผ่นตัวนำทั้งสอง (b) มีระยะห่าง 0.04λ หรือประมาณ 0.5 cm และใช้โพรบกระตุ้นที่จุดศูนย์กลาง ดังรูปที่ 4.13 สาเหตุที่เลือกออกแบบที่เงื่อนไขข้างต้น เนื่องจากผลการวิเคราะห์ทางทฤษฎีสายอากาศจะให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเป็นลำคลื่นรูปกรวยและค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกชี้ที่ 30° ซึ่ง

เป็นคุณสมบัติที่เหมาะสมสำหรับสายอากาศที่จะนำไปประยุกต์ใช้ในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย

สำหรับเครื่องมือที่ใช้ในการทดสอบคือเครื่องวิเคราะห์โครงข่าย (Network Analyzer) รุ่น 8720C สายอากาศรับจะเป็นสายอากาศที่ต้องการทดสอบ และสายอากาศส่งจะเป็นสายอากาศที่ออกแบบที่ความถี่เดียวกันกับสายอากาศรับและมีการโพลาไรซ์ที่เหมือนกัน



รูปที่ 4.15 สายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่มีความถี่ 2.45 GHz

4.5 ผลการทดสอบสายอากาศ

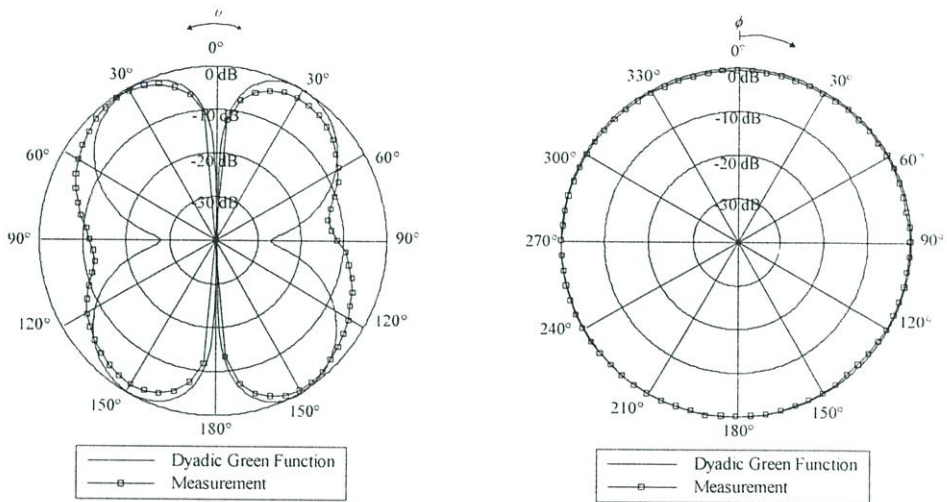
ในหัวข้อนี้จะเป็นการเปรียบเทียบผลจากการคำนวณและผลการทดสอบสายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้นในหัวข้อ 4.4 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นที่นำมาพิจารณาคือแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นและคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์

4.5.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น

การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศจะทดสอบที่ความถี่ 2.45 GHz ซึ่งเป็นความถี่ใช้งานในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะแสดงในระนาบมุมยกและระนาบมุมกวาด

รูปที่ 4.16 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่ป้อนสัญญาณด้วยโพรบที่ความถี่ 2.45 GHz และมีขนาดรัศมีของแผ่นระนาบเท่ากับ 0.6λ โดยเปรียบเทียบผลการทดสอบกับผลการคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก พิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นระนาบมุมยกในรูปที่ 4.16 (ก) จะพบว่าผลการคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกได้ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกและความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังประมาณ 29° และ 33.84° ตามลำดับ ในขณะที่ผลการทดสอบได้ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกชี้ที่ 30° และมีความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังประมาณ 35.88° ซึ่งกว้างกว่าผลการคำนวณเล็กน้อย และแบบรูป

การแพร่กระจายคลื่นที่ได้เป็นลําคลื่นรูปกรวย จากนั้นพิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมกวาด ในรูปที่ 4.16 (ข) แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่ได้จะเป็นแบบรอบทิศทาง

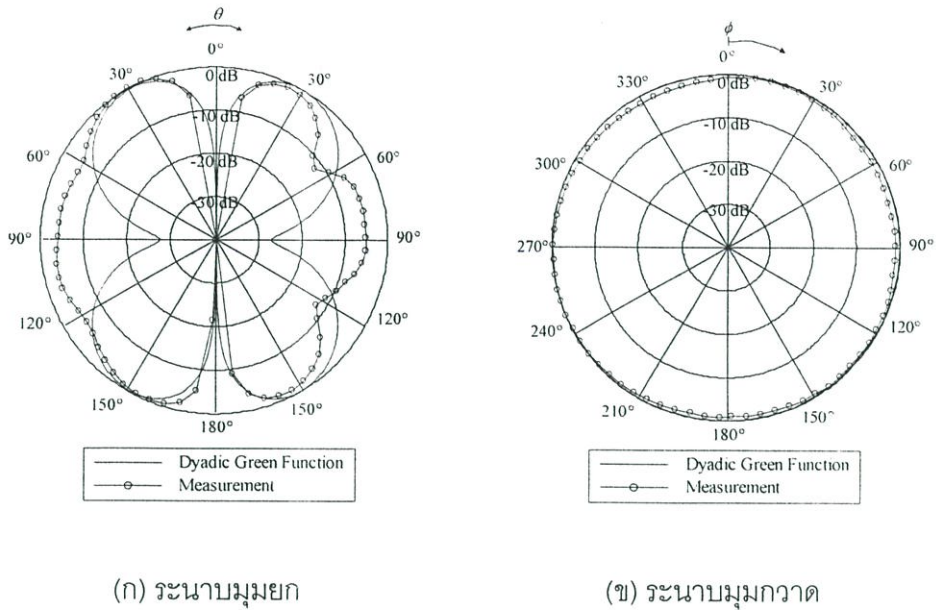


(ก) ระนาบมุมยก

(ข) ระนาบมุมกวาด

รูปที่ 4.16 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่มีความถี่ 2.45 GHz

เมื่อพิจารณาคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศต้นแบบในรูปที่ 4.15 ค่าอัตราส่วนคลื่นนิ่งเป็น 8.346 : 1 จึงจำเป็นต้องปรับอิมพีแดนซ์ของสายอากาศและสายนำสัญญาณให้เข้ากัน โดยใช้วิธีการแมตชิ่งโดยใช้สตับ (Stub) ซึ่งสตับคือส่วนของความยาวของสายที่ลัดวงจรและค่าความยาวนี้จะมีผลต่อรีแอกแตนซ์ด้านเข้าด้วย ถ้าความยาวของสตับน้อยกว่า $\lambda/4$ ทำให้รีแอกแตนซ์ด้านเข้าเป็นค่าความเหนี่ยวนำ (Inductive) และถ้าความยาวของสตับมากกว่า $\lambda/4$ ทำให้รีแอกแตนซ์ด้านเข้าเป็นค่าประจุไฟฟ้า (Capacitive) มีการต่อสตับที่จุดกึ่งกลางแผ่น จึงเกิดการแมตชิ่งขึ้น สตับจะมีผลกับแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแสดงดังรูปที่ 4.17 เมื่อพิจารณาในระนาบมุมยก ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกคือ 30° และมีความกว้างลําคลื่นครึ่งกำลังประมาณ 43.224° ซึ่งกว้างกว่าผลจากการคำนวณ และจะส่งผลให้อัตราขยายของสายอากาศลดลงด้วย สำหรับแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมกวาดจะเป็นแบบรอบทิศทางเช่นเดียวกับผลจากการคำนวณ



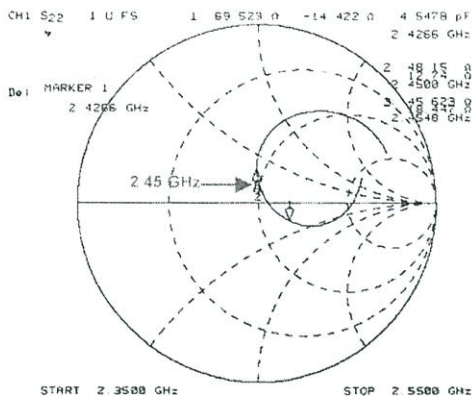
รูปที่ 4.17 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่แมตซ์โดยใช้สัดที่ความถี่ 2.45 GHz

4.5.2 คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์

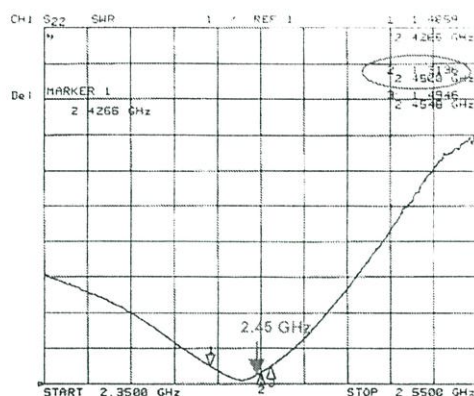
ในการทดสอบสายอากาศ ขั้นแรกจะต้องทดสอบคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศก่อน โดยทั่วไปอิมพีแดนซ์ของสายอากาศจะมีค่า 50 โอห์ม แต่ในทางปฏิบัติไม่สามารถออกแบบให้อิมพีแดนซ์เท่ากับ 50 โอห์มได้ แต่สามารถออกแบบให้อิมพีแดนซ์ใกล้เคียงได้โดยพิจารณาจากค่าอัตราส่วนคลื่นนิ่งของสายอากาศ (Voltage Standing Wave Ratio: VSWR) ไม่ควรเกิน 2:1 ซึ่งเป็นค่าที่ยอมรับได้ หรือพิจารณาในรูปของกำลังงานสะท้อนกลับคือประมาณ 11.11% ผลการทดสอบคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์แสดงดังรูปที่ 4.18 และสามารถสรุปคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศที่ความถี่ต่างๆ ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศเมื่อรัศมีของแผ่นวงกลมเท่ากับ 0.6λ

ความถี่ (GHz)	ค่าอิมพีแดนซ์ (โอห์ม)	ค่าอัตราส่วนคลื่นนิ่ง
2.4266	69.523 - j14.422	1.4859 : 1
2.4500	48.150 + j12.740	1.3136 : 1
2.4548	45.623 + j18.447	1.4946 : 1



(ก) ค่าอิมพีแดนซ์



(ข) ค่าอัตราส่วนคลื่นนิ่ง

รูปที่ 4.18 คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเมื่อรัศมีของแผ่นวงกลมเท่ากับ 0.6λ

4.6 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกที่กล่าวไว้ในบทที่3 พารามิเตอร์ที่มีผลต่อคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นและคุณลักษณะเชิงโพลารไรซ์คือขนาดรัศมีของแผ่นวงกลม จากนั้นจะเป็นการสร้างสายอากาศต้นแบบเพื่อทำการทดสอบและเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณ โดยเลือกออกแบบที่ความถี่ 2.45GHz แต่เนื่องจากสายอากาศแบบท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่ออกแบบมีพฤติกรรมเป็นค่าความจุไฟฟ้า จึงต้องใช้วิธีแมตซ์โดยใช้สตั๊ปเพื่อให้ค่าอิมพีแดนซ์ของสายอากาศใกล้เคียง 50 โอห์มมากที่สุด ซึ่งสายสตั๊ปจะมีผลต่อแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นทำให้ค่าความกว้างลำคลื่นครั้งกำลังกว้างขึ้น และจากการทดสอบพบว่าผลที่ได้มีแนวโน้มใกล้เคียงกับผลจากการคำนวณ แต่อย่างไรก็ตามผลที่ได้ยังมีความคลาดเคลื่อนเนื่องจากข้อจำกัดในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ จึงควรมีการนำไปพัฒนาต่อไป

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทนี้จะกล่าวถึงการสรุปเนื้อหาโดยรวม ข้อเสนอแนะต่างๆ และแนวทางในการพัฒนาสายอากาศชนิดนี้ต่อไป

5.1 สรุปเนื้อหาโดยรวม

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการนำเสนอการวิเคราะห์สายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ซึ่งมีลักษณะโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อน สามารถออกแบบและสร้างได้ง่าย สายอากาศดังกล่าวมีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเป็นลำคลื่นกรวยและมีโพลาริซแนวดิ่ง จากคุณสมบัติเหล่านี้ทำให้สายอากาศลำคลื่นรูปกรวยแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีเป็นสายอากาศที่เหมาะสมสำหรับการนำไปใช้ในระบบสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย เพื่อเป็นสายอากาศที่สถานีฐานบนพาดานเพื่อให้บริการครอบคลุมคอมพิวเตอร์ในท้องถิ่น เป็นต้น

ในการวิเคราะห์สายอากาศจะใช้ทฤษฎีฟังก์ชันกรีนไดแอติก เนื่องจากมีข้อดีกว่าวิธีคัลคูลูสเวกเตอร์ คือแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่ได้จะมีความแม่นยำมากขึ้นเนื่องจากรวมผลของโพรบเข้าไปด้วย ในขณะที่ฟังก์ชันคัลคูลูสเวกเตอร์เป็นวิธีการคำนวณเบื้องต้นเพื่อให้ทราบแนวโน้มของแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น ดังนั้นเพื่อให้ผลการคำนวณถูกต้องแม่นยำจึงเลือกใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก

สำหรับขั้นตอนการหาสนามการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศจะเริ่มต้นด้วยการหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่องเปิดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีโดยใช้วิธี Ohm-Rayleigh เพื่อหาฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบแม่เหล็กชนิดที่สองของท่อนำคลื่นซึ่งเป็นวิธีที่ง่าย เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการหาฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าและวิธีไดแอติกในรูปฟังก์ชันช่วยโดยตรง จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบแม่เหล็กและแบบไฟฟ้า เพื่อนำไปหาสนามการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศเพื่อใช้ในการวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นได้แก่ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น ค่ามุมสูงสุดในระนาบมุมยก ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง และคุณลักษณะการโพลาริซ

การวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นจะพิจารณาที่โหมดเป็นใหญ่ของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี นั่นคือโหมด TM_{00} หรือ TEM ซึ่งเป็นโหมดสายส่งของท่อนำคลื่นเชิงรัศมี ที่กล่าวเช่นนี้เนื่องจากที่โหมด TM_{00} ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีจะมีลักษณะเหมือนกับโหมดระนาบสายส่ง ส่วนพารามิเตอร์ที่มีผลต่อคุณลักษณะของสายอากาศคือขนาดรัศมีของแผ่นระนาบวงกลม

ในส่วนของการออกแบบเพื่อจะนำสายอากาศชนิดนี้ไปใช้ในระบบโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย ที่ความถี่ 2.45 GHz นั้น เงื่อนไขที่ได้นำมาพิจารณาในการออกแบบคือ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นต้องเป็นลำคลื่นรูปกรวย ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังซึ่งจะสัมพันธ์กับค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดที่ต้องไม่น้อยกว่า 4 dBi ดังนั้นในการออกแบบสายอากาศได้เลือกใช้แผ่นทองแดงที่มีขนาดรัศมี 0.6λ หรือประมาณ 7.5 cm และระยะห่างระหว่างแผ่นวงกลมทั้งสอง 0.04λ หรือประมาณ 0.5 cm

และสุดท้ายได้แสดงผลการทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นและคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศต้นแบบพบว่าผลการทดสอบที่ได้ใกล้เคียงกับผลการคำนวณ ในขณะที่คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ที่พิจารณาในรูปของค่าอัตราส่วนคลื่นนิ่งยังไม่อยู่ในค่าที่ยอมรับได้ จึงต้องมีการแมตซ์โดยใช้สลัปซึ่งส่งผลให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น มีค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังกว้างขึ้น ซึ่งสายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้นนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในระบบโครงข่ายสื่อสารไร้สายที่ความถี่ 2.45 GHz ได้

5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางในการพัฒนา

จากการวิเคราะห์สายอากาศโดยการคำนวณสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าจากการอินทิเกรตกระแสที่เป็นแหล่งกำเนิดของสนามกับฟังก์ชันกรีน ซึ่งสามารถนำฟังก์ชันนี้ไปแทนในสมการเชิงอินทิกรัลของปัญหาในรูปของความหนาแน่นกระแสไม่ทราบค่าจะแก้สมการนี้โดยใช้วิธีโมเมนต์ (Methods of Moments; MOM) ซึ่งเป็นวิธีการเชิงเลขที่หาค่าสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าคูณกับฟังก์ชันฐานที่เลือกให้เหมาะสมกับโครงสร้างของปัญหา เมื่อใช้ในการอธิบายคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีต่อไป สำหรับสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมีที่วางบนตัวสะท้อนนั้น เนื่องจากตัวสะท้อนมีขนาดจำกัดควรคิดผลของการเลี้ยวเบนด้วยเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

130

เอกสารอ้างอิง

- [1] J. Huang, "Circularly Polarized Conical Patterns from Circular Microstrip Antenna," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. AP-32, no. 9, pp. 257-265, Sep. 1984.
- [2] N. J. McEwan, R. A. Abd-Alhameed, E. M. Ibrahim, P. S. Excell and J. G. Gardiner, "A New Design of Horizontally Polarized and Dual-Polarized Uniplanar Conical Beam Antennas for HIPERLAN," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 2, pp. 229-237, Feb. 2003.
- [3] H. Nakano, K. Vichien, T. Sugiura and J. Yamauchi, "Singly-Fed Patch Antenna Radiating a Circularly Polarised Conical Beam," *Electronics Letters*, vol. 26, no. 10, pp. 638-640, May 1990.
- [4] E. M. Ibrahim, N. J. McEwan, R. A. Abd-Alhameed and P. S. Excell, "Conical Beam, Horizontally Polarised Antennas for HIPERLAN," *1997 High Frequency Postgraduate Student Colloquium*, pp. 118-123, Sep 1997.
- [5] Y. J. Guo, A. Paez, R. A. Sadeghzadeh and S. K. Barton, "A Circular Patch Antenna for Radio LAN's," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 1, pp. 177-178, Jan. 1997.
- [6] S. K. Padhi and M. E. Bialkowski, "An Aperture Coupled Circular Patch Antenna Operating at Higher-Order Mode for HIPERLAN Application," *ICPWC 1999*, pp.71-74, 1999
- [7] H. Kawakami, G. Sato and R. Wakabayashi, "Research on Circularly Polarized Conical-Beam Antennas," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 39, no. 3, pp. 27-39, June 1997.
- [8] C. Phongcharoenpanich, S. Suriya, T. Lertwiryaprapa, P. Ngamjanyaporn, and M. Krairiksh, "Analysis of Circular Array of Monopole on the Ground Plane Radiating Linearly Polarized Conical Beam for Wireless LAN Applications"
- [9] H. Nakano, K. Fujimori and J. Yamauchi, "A Low-Profile Conical Beam Loop Antenna with an Electromagnetically Coupled Feed System," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 48, no. 12, pp. 1864-1866, Dec. 2000.

- [10] J. Takada, K. Ito and M. Ando, "A Radial Line Slot Antenna Radiating Circularly Polarized Conical Beam," *IEEE*, pp 1040-1043, 1994.
- [11] R. B. Solosko and S. R. Laxpati, "A log-periodic antenna with vertically polarized omnidirectional radiation," *IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988] Antennas and Propagation*, Vol 16, no 6 , pp.752 – 753, Nov. 1968.
- [12] D. W. Holst, "Radiation patterns of radial waveguides with TM mode excitation," *IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988] Antennas and Propagation*, Vol 21, no 2, pp.238 – 241, Mar. 1973.
- [13] B. Azarbar and L. Shafai, "Filter Characteristics of Radial Waveguides Coupled by Annular Slots," *Microwave Symposium Digest, MTT-S International*, Vol 78, no 1 pp.195 - 197, Jun. 1978 .
- [14] B. Azarbar and L. Shafai, "Field Solution for Radial Waveguides with Annular Discontinuities," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol 27, no 11, pp.883 – 890, Nov. 1979.
- [15] J. Hirokawa, M. Ando and N. Goto, "Analysis of slot coupling in a radial line slot antenna for DBS reception," *IEE Proceedings-Microwaves, Antennas and Propagation*, Vol 137, no 5, pp.249 – 254, Oct. 1990.
- [16] H. Nakano, H. Takeda, Y. Kitamura, H. Mimaki and J. Yamauchi, "Low-profile helical array antenna fed from a radial waveguide," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol 40, no 3, pp.279 – 284, March 1992.
- [17] V. W. Hansen, A. K. Bitz, and J. R. Streckert, "RF exposure of biological systems in radial waveguides," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol 41, no 4, pp.487 – 493, Nov. 1999.
- [18] E. N. Voronin, F. I. Emel'chenkov, Yu. V. Kotov and A. S. Luk'yanov, "Phased array antenna on a radial waveguide," *International Conference on Antenna Theory and Techniques, 2003 IVth*, Vol 1, pp.296 – 299, 9 - 12 Sept. 2003.
- [19] B. Kruekaew and C. Phongcharoenpanich, "A simple Conical Beam Antenna using Circumferential Aperture beside the Radial Waveguide for Vertically Polarized Radiation," *Proc. of the 2003 International Conference on Information and Communication Technologies*, Thailand, pp. 261-267, Apr. 2003.
- [20] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, 1989.

- [21] R.F.Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, 1961.
- [22] E. A. Wolff, *Antenna Analysis*, John Wiley & Sons, 1967.
- [23] C. A. Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1997.
- [24] C. T. Tai, *Generalized Vector and Dyadic Analysis : Applied Mathematics in field Theory*, New York ,IEEE Press, 1992.
- [25] C. T. Tai, *Dyadic Green Function in Electromagnetic Theory*, 2nd ed., New York, IEEE Press, 1993.
- [26] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, Dover, 1951.
- [27] J. D. Kraus and R. J. Marhefka, *Antennas for all Applications*, 3rd ed., McGraw-Hill series in electrical engineering, 2002.
- [28] ไม่นอย ไกรฤกษ์, วิศวกรรมคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า, กรุงเทพฯ, พิมพ์สวย, 181-183, 2544.

ภาคผนวก

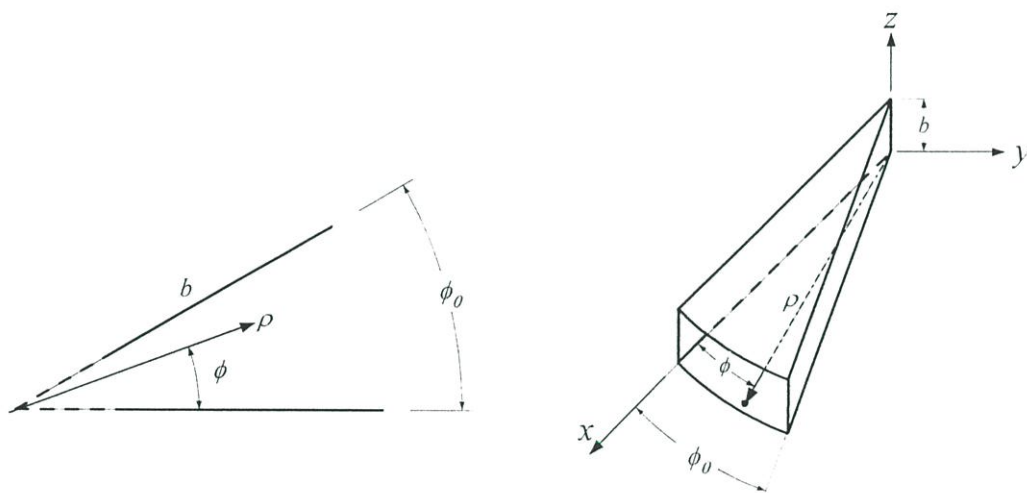
ภาคผนวก ก

ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีชนิดต่างๆ

นอกจากท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนานที่กล่าวถึงไว้ในวิทยานิพนธ์แล้ว ยังมีท่อนำคลื่นอย่างง่ายซึ่งเหมาะสำหรับการเดินทางของคลื่นรัศมีอีก ตัวอย่างเช่น

ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบลิ้ม (Wedge Radial Waveguide)

ระนาบตัวนำเอียงซึ่งรองรับการเดินทางของคลื่นรัศมี จะเรียกว่า “ท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบลิ้ม” (Wedge Radial Waveguide) ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ ก.1 โดยจะสมมติให้ไม่มีสนามในแนวแกน z เมื่อพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 2 มิติ โดยทั่วไปโหมด TE และ TM จะเกิดขึ้นที่ช่องว่างระหว่างแผ่นตัวนำวงกลม



รูปที่ ก.1 ระบบพิกัดของท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบลิ้ม (Wedge Radial Waveguide)

- โหมดคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวาง (Transverse Electric (TE) mode)

โหมด TE จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต $E_r = 0$ ที่ $\phi = 0$ และ $\phi = \phi_0$ กล่าวคือ

$$E_r(0 \leq \rho \leq \infty, \phi = 0, 0 \leq z \leq b) = E_r(0 \leq \rho \leq \infty, \phi = \phi_0, 0 \leq z \leq b) = 0 \quad (\text{ก.1})$$

ดังนั้นฟังก์ชันคลื่น TE ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว คือ

$$\varphi_{\rho}^{TE} = \cos\left(\frac{p\pi}{\phi_0}\phi\right) \begin{cases} H_{p\pi/\phi_0}^{(1)}(k\rho) \\ H_{p\pi/\phi_0}^{(2)}(k\rho) \end{cases} \quad (ก.2)$$

โดยที่ $p=0,1,2$, และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับโหมด TE หาได้โดย

$$\begin{aligned} E_{\rho} &= -\frac{1}{\epsilon\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} & H_{\rho} &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z} \\ E_{\phi} &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} & H_{\phi} &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi\partial z} \\ E_z &= 0 & H_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \varphi \end{aligned} \quad (ก.3)$$

- โหมดคลื่นสนามแม่เหล็กตามขวาง (Transverse Magnetic (TM) mode)

ฟังก์ชันคลื่น TM จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต $E_z = 0$ ที่ $\phi = 0$ และ $\phi = \phi_0$ กล่าวคือ

$$E_z(0 \leq \rho \leq \infty, \phi = 0, 0 \leq z \leq b) = E_z(0 \leq \rho \leq \infty, \phi = \phi_0, 0 \leq z \leq b) = 0 \quad (ก.4)$$

ดังนั้นฟังก์ชันคลื่น TM ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว คือ

$$\varphi_{\rho}^{TM} = \sin\left(\frac{p\pi}{\phi_0}\phi\right) \begin{cases} H_{p\pi/\phi_0}^{(1)}(k\rho) \\ H_{p\pi/\phi_0}^{(2)}(k\rho) \end{cases} \quad (ก.5)$$

โดยที่ $p=1,2,3$, และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับโหมด TM หาได้จาก

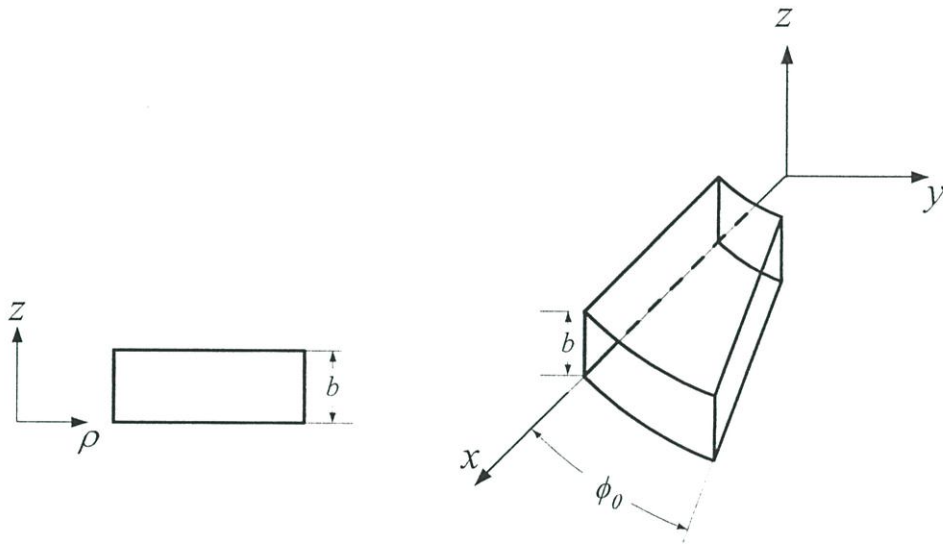
$$\begin{aligned} E_{\rho} &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial z} & H_{\rho} &= \frac{1}{\mu\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \\ E_{\phi} &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi\partial z} & H_{\phi} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \\ E_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \varphi & H_z &= 0 \end{aligned} \quad (ก.6)$$

การอธิบายโหมดที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะเช่นเดียวกับโหมด $TM_{m,0}$ ในท่อนำคลื่นเชิงรัศมีแบบแผ่นขนาน ยกเว้นในกรณีที่อันดับ (Order) ของฟังก์ชันแองเกิล (Hankel Function) ไม่เป็น

จำนวนเต็ม ท่อนำคลื่นชนิดนี้จะมีแบบแผนคลื่นเป็นใหญ่ คือ TE_0 ซึ่งเป็นโหมดสายส่ง โดยจะไม่มี E_ρ และ H_ϕ ส่วนการวิเคราะห์โหมดนี้จะใช้สมการสายส่งในรูปของ L และ C ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ρ สำหรับสายแบบไม่สม่ำเสมอ (Nonuniform Line)

ท่อนำคลื่นปากแตรแบบเซกเตอร์ (Sectoral Horn Waveguide)

ท่อนำคลื่นรูปปากแตรซึ่งรองรับการเดินทางของคลื่นรัศมี จะเรียกว่า “ท่อนำคลื่นปากแตรแบบเซกเตอร์” (Sectoral Horn Waveguide) ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ ก.2 โครงสร้างชนิดนี้จะมีทั้งโหมด TE และ TM เกิดขึ้นภายในปากแตรระหว่างแผ่นทั้งสอง



รูปที่ ก.2 ระบบพิกัดของท่อนำคลื่นเชิงปากแตรแบบเซกเตอร์ (Sectoral Horn Waveguide)

- โหมดคลื่นสนามไฟฟ้าตามขวาง (Transverse Electric (TE) mode)
ฟังก์ชันคลื่น TE คือ

$$\phi_{np}^{TE} = \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \cos\left(\frac{p\pi}{\phi_0}\phi\right) \begin{Bmatrix} H_{p\pi/\phi_0}^{(1)}(k_p\rho) \\ H_{p\pi/\phi_0}^{(2)}(k_p\rho) \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.7})$$

โดยที่ $n=1,2,3$, และ $p=0,1,2$, และสนามแม่เหล็กไฟฟ้าหาได้จากสมการที่ ก.3

- โหมดคลื่นสนามแม่เหล็กตามขวาง (Transverse Magnetic (TM) mode)
ฟังก์ชันคลื่น TM จะแสดงได้ดังนี้

$$\varphi_{np}^{TM} = \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \sin\left(\frac{p\pi}{\phi_0}\phi\right) \left\{ \begin{array}{l} H_{p\pi/\phi_0}^{(1)}(k\rho) \\ H_{p\pi/\phi_0}^{(2)}(k\rho) \end{array} \right\} \quad (\text{ก.8})$$

โดยที่ $n=0,1,2$, และ $p=1,2,3$, สามารถหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับ TM โดยใช้สมการที่ ก.6 โหมดที่เกิดขึ้นเหล่านี้จะมีคุณสมบัติเหมือนกับโหมดไฮบริด (Hybrid Mode) ของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม ซึ่งจะไม่มีโหมดสายส่งเนื่องจากมีขอบเขตตัวนำเพียงตัวเดียว ในกรณีที่ $b < \frac{\lambda}{2}$ จะมีเฉพาะโหมดการแพร่กระจายคลื่น TM_{0p} เท่านั้น และในกรณีที่ $\frac{\lambda}{2} < b < \lambda$ จะเกิดโหมดการแพร่กระจายคลื่น TM_{1p} และ TE_{1p} ร่วมกัน แต่ละโหมดการแพร่กระจายคลื่นจะมีรัศมีของการคัทออฟ ซึ่งเป็นรัศมีที่ภาคตัดขวางของท่อปากแตรแบบเซกเตอร์มีขนาดเท่ากับท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม โดยทั่วไปจะพิจารณาโหมด TM_{01} เป็นแบบแผนคลื่นเป็นใหญ่ (สำหรับกรณีที่ $b > \frac{\lambda}{2}$ นั้นจะมีโหมด TE_{10} เป็นแบบแผนคลื่นเป็นใหญ่ที่รัศมีขนาดเล็ก)

ภาคผนวก ข

คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

การที่จะกล่าวถึงทฤษฎีการวิเคราะห์สายอากาศ มีความจำเป็นจะต้องเข้าใจในส่วนของคุณลักษณะพื้นฐานของสายอากาศ ดังนั้นจึงได้อธิบายถึงนิยามของคุณลักษณะพื้นฐาน เช่น แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น (Radiation Pattern) ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่น (Radiation Intensity) ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (Half-Power Beamwidth) และค่าสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity) เป็นต้น รวมถึงทฤษฎีการโพลาริซชันของสายอากาศซึ่งจะกล่าวถึงนิยามของการโพลาริซชัน และการหาคุณลักษณะต่างๆ ของการโพลาริซชันของสายอากาศ

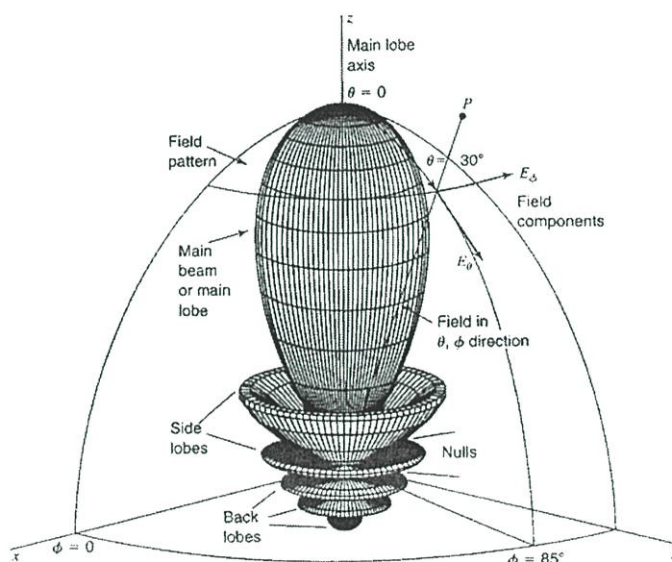
แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น (Radiation Pattern)

แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์หรือรูปภาพที่ใช้แสดงคุณสมบัติการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของพิกัดเชิงเรขาคณิต (Space Coordinate) ส่วนมากจะพิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่บริเวณสนามระยะไกล (Far Field) การอธิบายคุณสมบัติการแพร่กระจายคลื่นจะรวมถึง ความเข้มการแพร่กระจายคลื่น (Radiation Intensity) ความเข้มสนาม (Field Strength) ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity) เฟส (Phase) หรือโพลาริซชัน (Polarization)

ส่วนใหญ่คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นเหล่านี้จะอยู่ในรูปการกระจายพลังงานทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ รูปที่ ข.1 แสดงระบบพิกัดที่ใช้แสดงคุณสมบัติของการแพร่กระจายคลื่น สำหรับกราฟที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าในทิศทางต่างๆ ที่มีรัศมีคงที่ จะเรียกว่า แบบรูปสนาม (Field Pattern) หรือแบบรูปแรงดัน (Voltage Pattern) ของสายอากาศซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ ข.2(ก) และเส้นทางเพื่อแสดงกำลังงานที่สายอากาศรับได้ตามแนวรัศมีที่มีค่าคงที่ จะเรียกว่า แบบรูปกำลังงาน (Power Pattern) ของสายอากาศ ดังรูปที่ ข.2 (ข)

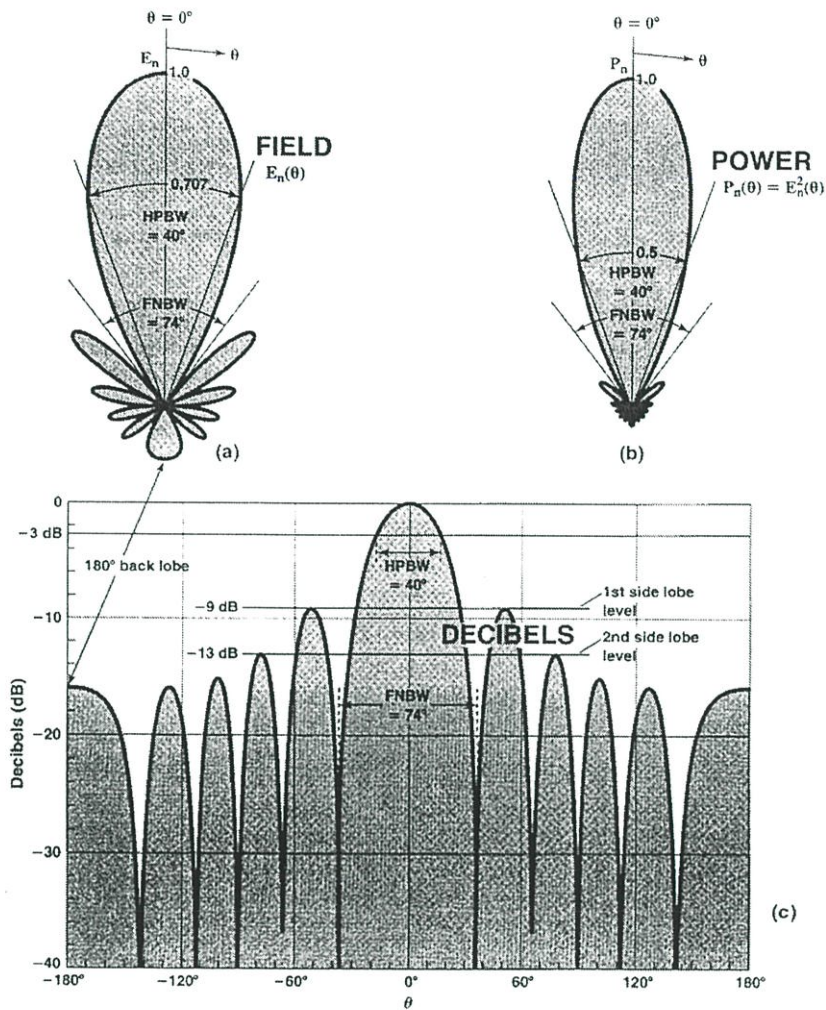
แต่ส่วนของแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเรียกว่า พูคลื่น (lobe) ซึ่งยังแบ่งย่อยออกเป็น พูคลื่นหลัก (Main Lobe) พูคลื่นเล็ก (Minor Lobe) พูข้าง (Side Lobe) และพูหลัง (Back Lobe) ดังรูปที่ ข.1 จากรูปแสดงให้เห็นว่า พูคลื่นคือส่วนของแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่มีความเข้มของกำลังคลื่นสูง (รอบๆ เป็นความเข้มต่ำ) ในรูปที่ ข.1 เป็นการเขียนรูปบนระบบพิกัดเชิงมุม 3 มิติที่มีพูคลื่นอยู่หลายขนาด และในรูปที่ ข.2 เป็นการเขียนในแกน 2 มิติ

- พุคส์หลัก (Main Lobe) หรืออาจเรียกว่าลำคลื่นหลัก หมายถึงพุคส์ที่มีการแพร่กระจายคลื่นในทิศทางที่มากที่สุด ในรูปที่ ข.1 และ ข.2 พุคส์หลักมีทิศ $\theta = 0$ สำหรับสายอากาศบางชนิดที่มีลำคลื่นลำคลื่นมากกว่าหนึ่งลำคลื่น จะมีพุคส์หลักมากกว่าหนึ่งพุคส์ได้
- พุคส์เล็ก (Minor Lobe) คือพุคส์อื่นๆ ที่ไม่ใช่พุคส์หลัก
- พุคส์ข้าง (Side Lobe) คือพุคส์ที่อยู่ในทิศทางอื่น นอกเหนือจากทิศทางของพุคส์หลัก โดยทั่วไปแล้วพุคส์ข้างจะอยู่ติดกับพุคส์หลัก และมีทิศรอบลำคลื่นหลัก
- พุคส์หลัง (Back Lobe) คือ พุคส์เล็กที่มีทิศตรงข้ามกับพุคส์หลัก (ต่างกัน 180°) ซึ่งจะพบว่าพุคส์เล็กจะเกิดในทิศที่ไม่ต้องการเสมอ จึงควรลดขนาดให้น้อยที่สุด สำหรับพุคส์ข้างถือว่าเป็นพุคส์เล็กที่มีขนาดใหญ่ที่สุด โดยทั่วไปถ้าระดับของพุคส์ข้างมีค่าประมาณ -20 dB หรือน้อยกว่านี้ จะไม่มีผลต่อการใช้งานมากนัก และจุดที่รับสัญญาณได้เท่ากับศูนย์ เรียกว่า นัล (null)



รูปที่ ข.1 ระบบพิกัดที่ใช้แสดงคุณสมบัติของการแพร่กระจายคลื่น

แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นสามารถแสดงถึงประสิทธิภาพของสายอากาศได้ดี โดยได้จากสถานที่ติดตั้งห่างจากวัตถุต่างๆ เช่น ตึก อาคาร หรือพื้นดิน ที่อาจทำให้เกิดคลื่นสะท้อนและมีผลต่อแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นได้



รูปที่ ข.2 ส่วนต่างของแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น (ก) แบบรูปสนาม (ข) แบบรูปกำลัง (ค) ระดับลำคลื่นและพูต่างๆ แบบ 2 มิติ

ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่น (Radiation Intensity)

ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่น คือ กำลังงานที่แพร่กระจายออกจากสายอากาศต่อหน่วยมุมตัน (ตลอดพื้นผิวทรงกลม) ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นจึงเป็นตัวแปรที่สำคัญอย่างหนึ่งในการแสดงคุณสมบัติของสายอากาศเกี่ยวกับสนามระยะไกล ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นสามารถหาได้จากผลคูณของความหนาแน่นของการแพร่กระจายคลื่น และผลจากการกำลังสองของระยะทาง จึงสามารถแสดงความสัมพันธ์ของความเข้มการแพร่กระจายคลื่นกับสนามไฟฟ้าของสายอากาศในระยะไกล ได้ดังนี้

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2 \cdot \eta} \cdot \left[|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2 \right] \quad (\text{ข.1})$$

เมื่อ E_θ , E_ϕ คือ องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในระยะสนามระยะไกล

เมื่อ η คือ อินทรินซิกอิมพีแดนซ์ (Intrinsic Impedance) ของตัวกลาง

ดังนั้นแบบรูปของกำลังงานจึงสามารถใช้แสดงถึงความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นได้เช่นกัน

ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity)

สายอากาศทุกแบบจะมีคุณลักษณะในการแพร่กระจายพลังงานไปได้มากในบางทิศทาง เมื่อเปรียบเทียบกับทิศทางรอบสายอากาศ คุณลักษณะเช่นนี้เรียกว่า ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง ซึ่งเป็นคุณลักษณะที่สำคัญมากสำหรับการส่งสัญญาณไปยังทิศทางที่ต้องการให้มีขนาดมากกว่าทิศทางที่ไม่ต้องการ ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศแสดงได้โดยใช้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น วัดในหน่วยของ dBi สามารถเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$D_0 = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} \quad (\text{ข.2})$$

เมื่อ U_{\max} คือ ความเข้มการแพร่กระจายคลื่นสูงสุด และ P_{rad} คือ กำลังงานที่แพร่กระจายคลื่นทั้งหมด ซึ่งแสดงความสัมพันธ์โดยใช้สมการที่ ข.3

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (\text{ข.3})$$

อัตราขยาย (Gain)

อัตราขยายคือความสัมพันธ์ที่สามารถหาได้จากค่าสภาพเจาะจงทิศทางโดยรวมประสิทธิภาพของสายอากาศเข้ามาด้วยประสิทธิภาพของสายอากาศจะประกอบไปด้วยประสิทธิภาพเกี่ยวกับการสะท้อนกลับ ประสิทธิภาพของตัวนำ และประสิทธิภาพของจนวน

$$\text{Gain} = \text{Directivity} \times \text{Efficiency of antenna} \quad (\text{ข.4})$$

การคิดอัตราขยายของสายอากาศจะเปรียบเทียบกับสายอากาศอ้างอิง โดยอัตราขยายของสายอากาศส่ง คือ อัตราส่วนระหว่างความเข้มสนามตามทิศที่มีการแพร่กระจายคลื่นมากที่สุด ยกกำลังสอง เทียบกับค่าความเข้มสนามที่จุดเดียวกันของสายอากาศอ้างอิง หรืออาจจะแสดงใน

รูปอัตราส่วนของค่าพลังงานที่ต้องใช้ส่งของสายอากาศทั้งสองเพื่อให้เกิดความเข้มสนามขนาดเท่ากัน ณ จุดเดียวกัน ในทิศทางที่มีการแพร่กระจายคลื่นมากที่สุด ในทำนองเดียวกันอัตราขยายของสายอากาศรับ คือ อัตราส่วนระหว่างค่าความเข้มสนามของสายอากาศทดสอบกับสายอากาศอ้างอิง ณ จุดที่ตั้งสายอากาศเดียวกัน

ระดับของพูข้างแรก (First Side Lobe Level : FSLL)

ระดับของพูคลื่นแรก คือ อัตราส่วนระหว่างระดับพูข้างแรกต่อระดับพูคลื่นหลัก

$$FSSL = \text{Side lobe Level(dB)} - \text{Main Lobe Level(dB)} \quad (ข.5)$$

ค่าความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรก (First Null Beamwidth)

ค่าความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรก คือ มุมที่วัดระหว่างจุดที่ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นในลำคลื่นหลักมีค่าลดลงเป็นศูนย์ ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ ข.2 โดยจะวัดในหน่วยขององศา (Degree)

$$FNBW = 2 \left| \theta_{\theta' = 0 \text{ dB}} - \theta_{\theta' = -\infty \text{ dB}} \right| \quad (ข.6)$$

ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (Half-power beamwidth)

ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังเป็นคุณลักษณะอย่างหนึ่งที่สำคัญของสายอากาศ ทั้งนี้เพราะค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังเป็นสิ่งที่ใช้บ่งชี้ถึงคุณสมบัติของสายอากาศ โดยกำหนดให้มีหน่วยเป็นมุม ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังเป็นจุดซึ่งค่าพลังงานในการแพร่กระจายคลื่นลดลงครึ่งหนึ่งจากค่าสูงสุด หรืออีกนัยหนึ่งเป็นจุดที่ค่าความเข้มสนามเหลือ $1/\sqrt{2}$ หรือ 0.707 เท่าของค่าแรงดันไฟฟ้าสูงสุด ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ ข.2 โดยค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังมีความต้องการให้ขนาดความกว้างน้อยๆ ทั้งนี้เพื่อให้สายอากาศแพร่กระจายคลื่นไปยังทิศทางที่ต้องการมากขึ้น และมีการสูญเสียกำลังงานในส่วนที่ไม่ต้องการน้อยลง

$$HPBW = 2 \left| \theta_{\theta' = 0 \text{ dB}} - \theta_{\theta' = -3 \text{ dB}} \right| \quad (ข.7)$$

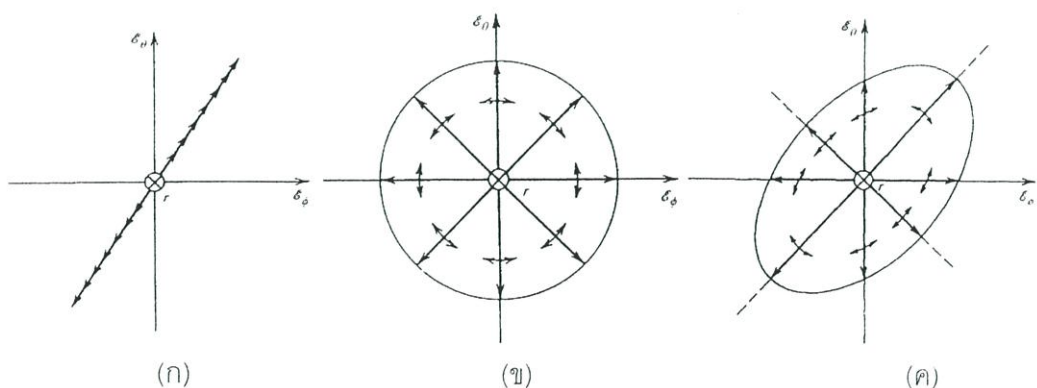
ทฤษฎีการโพลาไรซ์

▪ นิยามของการโพลาไรซ์

จาก IEEE Standard Definitions for Antennas ให้คำนิยามการโพลาไรซ์ของการแพร่กระจายคลื่นว่าเป็นคุณสมบัติของการแพร่กระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งสามารถจะอธิบายได้โดยการพิจารณาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเมื่อสังเกตที่ตำแหน่งใดๆ โดยทั่วไปจะพิจารณาขนาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ถ้าลักษณะการกวาดหรือการหมุนของเวกเตอร์สนามไฟฟ้ามีลักษณะเป็นอย่างไรแล้วก็จะกล่าวได้ว่าสนามไฟฟ้านั้นมีการโพลาไรซ์แบบนั้น ซึ่งการกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าอาจแบ่งออกได้เป็น 3 ลักษณะซึ่งได้แก่ การกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นวงกลมซึ่งจะเรียกลักษณะแบบนี้ว่าสนามไฟฟ้ามีการโพลาไรซ์แบบวงกลม (Circular Polarization) การกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นวงรีก็จะเรียกว่าสนามไฟฟ้ามีลักษณะการโพลาไรซ์แบบวงรี (Elliptical Polarization) และการกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นก็จะเรียกว่าสนามไฟฟ้ามีลักษณะการโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น (Linear Polarization)

▪ การพิจารณาการโพลาไรซ์

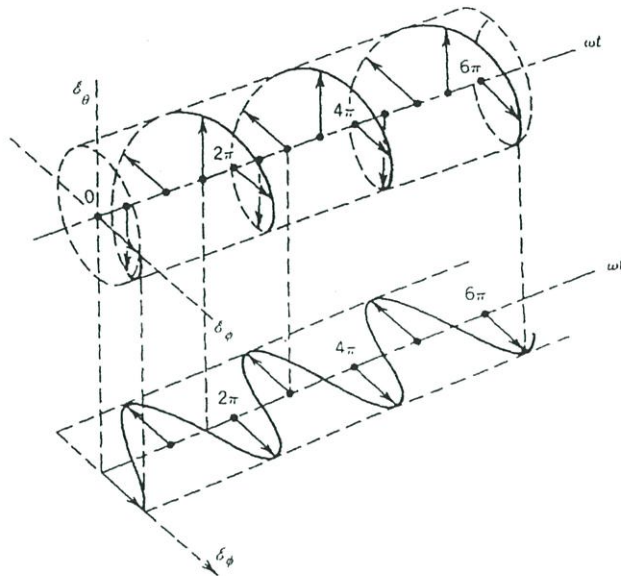
ในกรณีของการโพลาไรซ์แบบวงกลม และแบบวงรีนั้นการกวาดหรือหมุนไปของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะมีอยู่ด้วยกัน 2 ลักษณะคือ การกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าไปทางขวามือ เรียกว่าเป็นการหมุนตามเข็มนาฬิกา (Clockwise Polarization) และการกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าไปทางซ้ายมือ เรียกว่าเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา (Counter Clockwise Polarization) ซึ่งลักษณะของการโพลาไรซ์แบบต่างๆ แสดงได้ดังรูปที่ ข.3 ดังนี้



รูปที่ ข.3 การโพลาไรซ์แบบต่างๆ (ก) การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น (ข) การโพลาไรซ์แบบวงกลม (ค) การโพลาไรซ์แบบวงรี

(1) การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น (Linear Polarization)

เมื่อพิจารณาคลื่นหรือสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาโดยที่แกน θ, ϕ แทนแกนที่เป็นองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าชั่วขณะ ε_θ และ ε_ϕ ตามลำดับ คลื่นเดินทางออกมาตามทิศทาง r ซึ่งมีทิศทางบวกเป็นคลื่นที่เดินทางออกจากตัวเรา การพิจารณาจะเป็นดังรูปที่ ข.4 ดังนี้



รูปที่ ข.4 การพิจารณาโพลาไรเซชันของคลื่น

สนามไฟฟ้าชั่วขณะจะสามารถได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}(r, \theta, \phi; t) &= \text{Re} \left[\bar{E}(r, \theta, \phi) e^{j\omega t} \right] \\
 &= \text{Re} \left[\bar{E}(\theta, \phi) e^{-jkr} e^{j\omega t} \right] \\
 &= \text{Re} \left[\hat{a}_\theta \bar{E}(\theta, \phi) e^{-jkr} e^{j\omega t} + \hat{a}_\phi \bar{E}(\theta, \phi) e^{-jkr} e^{j\omega t} \right] \\
 &= \text{Re} \left[\hat{a}_\theta E_\theta^+ e^{j(\omega t - kr)} + \hat{a}_\phi E_\phi^+ e^{j(\omega t - kr)} \right] \\
 &= \hat{a}_\theta E_{\theta 0}^+ \cos(\omega t - kr + \beta_\theta) + \hat{a}_\phi E_{\phi 0}^+ \cos(\omega t - kr + \beta_\phi) \quad (ข.8) \\
 &= \hat{a}_\theta \varepsilon_\theta + \hat{a}_\phi \varepsilon_\phi \quad (ข.9)
 \end{aligned}$$

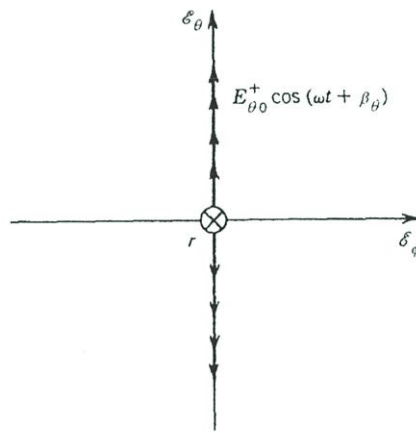
โดยที่ E_θ^+ และ E_ϕ^+ เป็นค่าเชิงซ้อนของสนามไฟฟ้า และ $E_{\theta 0}^+$ และ $E_{\phi 0}^+$ เป็นค่าจำนวนจริงของสนามไฟฟ้า ε_θ และ ε_ϕ คือองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าชั่วขณะในแนว θ และ ϕ ตามลำดับ

ในการพิจารณาจะดูที่การเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าชั่วขณะ (Instantaneous Electric Field) ($\vec{\varepsilon}$) ที่ระยะทาง r ใดๆ ในสมการที่ ข.8 เมื่อกำหนดให้ $r = 0$ ($kr = 0$) ซึ่งเราสนใจการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าตามเวลามากกว่าการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่ง (r) และในการพิจารณาการโพลาไรซ์นี้จะพิจารณาโดยการมองตามหลังคลื่นที่เคลื่อนที่ไป

เพื่อเป็นการง่ายในขั้นแรกจะกำหนดให้ $E_{\theta 0}^+ = 0$ ดังนั้นสมการที่ ข.8 จะได้ว่า

$$\vec{\varepsilon}(r, \theta, \phi; t) = \hat{a}_\theta E_{\theta 0}^+ \cos(\omega t + \beta_\theta) \quad (\text{ข.10})$$

ซึ่งเวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะเปลี่ยนแปลงอยู่ในแนวแกนองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าชั่วขณะ ε_θ เท่านั้นและจะเรียกว่าเป็นการโพลาไรซ์ในทิศทาง θ หรือในแนวตั้ง แสดงในรูปที่ ข.5

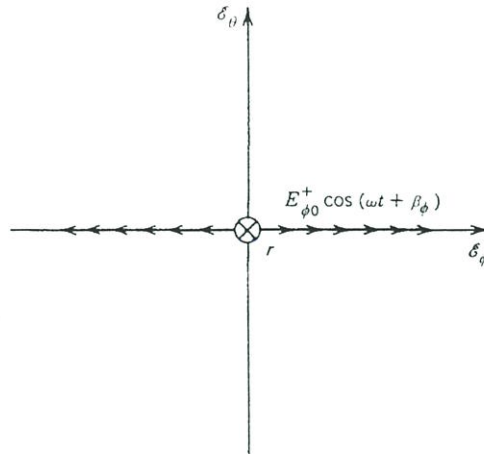


รูปที่ ข.5 การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นในทิศทาง θ

หรือในกรณีที่มีเฉพาะองค์ประกอบในแนว ε_ϕ เท่านั้นคือกำหนดให้ $\varepsilon_\theta = 0$ สนามไฟฟ้าชั่วขณะในสมการที่ ข.8 สามารถแสดงได้เป็น

$$\vec{\varepsilon}(r, \theta, \phi; t) = \hat{a}_\phi E_{\phi 0}^+ \cos(\omega t + \beta_\phi) \quad (\text{ข.11})$$

ซึ่งเวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะเปลี่ยนแปลงอยู่ในแนวแกนองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าชั่วขณะ ε_ϕ เท่านั้นและจะเรียกว่าเป็นการโพลาไรซ์ในทิศทาง ϕ หรือในแนวนอนแสดงได้ดังรูปที่ ข.6



รูปที่ ข.6 การโพลาริซ์แบบเชิงเส้นในทิศทาง ϕ

เมื่อมีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าชั่วขณะทั้งในแนว ε_θ และ ε_ϕ และเมื่อ $\beta_\theta = \beta_\phi = \beta$ จะได้ว่า

$$\bar{\varepsilon}(r, \theta, \phi; t) = \hat{a}_\theta E_{\theta 0}^+ \cos(\omega t + \beta) + \hat{a}_\phi E_{\phi 0}^+ \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{ข.12})$$

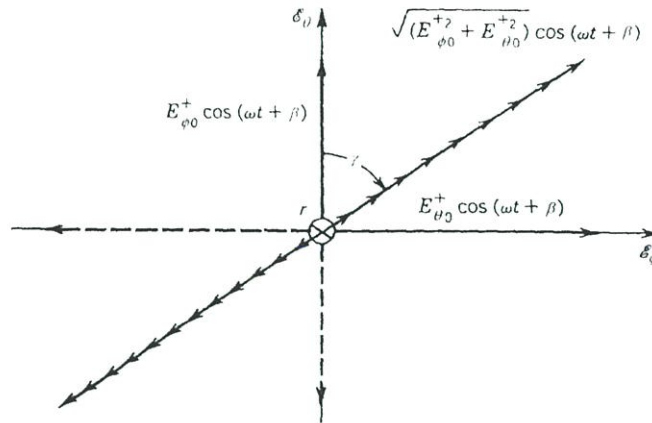
ขนาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าคือ

$$\bar{\varepsilon}(r, \theta, \phi; t) = \sqrt{(E_{\theta 0}^+)^2 + (E_{\phi 0}^+)^2} \cos(\omega t + \beta) \quad (\text{ข.13})$$

ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าจะมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงในทุก ๆ เวลาที่เปลี่ยนไปแต่มุมที่เบี่ยงเบนจากแกนอ้างอิงโดยในที่นี้ให้เป็นแกนที่เป็น θ การเบี่ยงเบนนี้จะทำมุม γ กับแกนอ้างอิง โดยที่มุม γ สามารถหาได้จาก

$$\gamma = \tan^{-1} \left[\frac{\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{E_{\phi 0}^+}{E_{\theta 0}^+} \right] \quad (\text{ข.14})$$

ขนาดของเฟสระหว่างองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนว θ, ϕ คือ $n\pi, n=0,1,2,\dots$ ซึ่งเรียกได้ว่าเป็นการโพลาริซ์แบบเชิงเส้นในทิศทาง γ แสดงได้ดังรูปที่ ข.7 ดังนี้



รูปที่ ข.7 การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นในทิศทาง y

(2) การโพลาไรซ์แบบวงกลม (Circular Polarization)

คลื่นที่มีการโพลาไรซ์แบบวงกลม จะเกิดโลกัศของเวกเตอร์สนามไฟฟ้ามีลักษณะเป็นวงกลมในสเปซซึ่งเมื่อเวลาผ่านไปขนาดความเข้มของสนามไฟฟ้ายังคงมีค่าคงที่แต่ลักษณะของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะมีลักษณะการกวาดที่เปลี่ยนไปตามเวลาซึ่งอธิบายได้โดยโลกัศที่เป็นวงกลม

(2.1) การโพลาไรซ์แบบวงกลมที่มีทิศทางการหมุนของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าทางขวามือ (Right-Hand Circular Polarization)

คลื่นหรือสนามไฟฟ้าจะมีการโพลาไรซ์แบบวงกลมที่เวกเตอร์ของสนามหมุนไปทางขวามือ ถ้าคลื่นเคลื่อนที่ไปตามทิศทางการเคลื่อนที่แล้วเวกเตอร์สนามไฟฟ้านั้นมีการหมุนตามเข็มนาฬิกา (Clockwise) โลกัศของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะมีลักษณะเป็นวงกลมด้วยจึงจะเรียกว่าสนามไฟฟ้านั้นมีการโพลาไรซ์แบบวงกลม

พิจารณาโลกัศของสนามไฟฟ้าชั่วขณะ (\vec{e}) ที่ระยะ $r = 0$ กำหนดให้

$$\beta_e = 0$$

$$\beta_\phi = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{ข.15})$$

$$E_{\theta 0}^+ = E_{\phi 0}^+ = E_R$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= E_R \cos(\omega t) \\ \varepsilon_\phi &= E_R \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_R \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (ข.16)$$

$$\bar{\varepsilon}(r, \theta, \phi, t) = \hat{a}_\theta E_R \cos(\omega t) + \hat{a}_\phi E_R \sin(\omega t) \quad (ข.17)$$

โลกัศของขนาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะสามารถกำหนดโดย

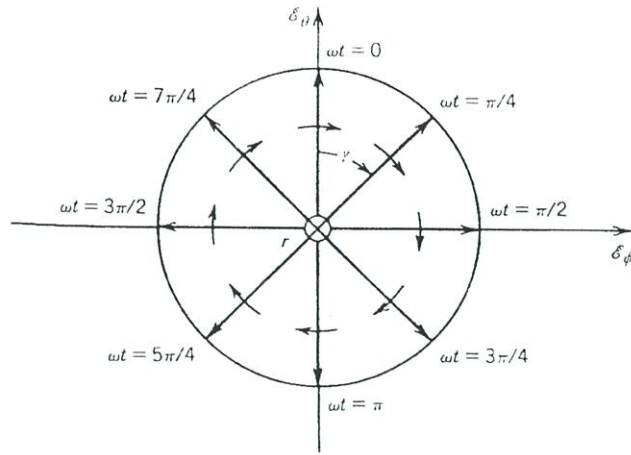
$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\phi^2} = \sqrt{E_R^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = E_R \quad (ข.18)$$

ซึ่งการไหลลาไรซ์จะมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงโดยที่แนวเส้นตรงนั้นจะเปลี่ยนมุมไปตามเวลา โดยมุมที่เบี่ยงเบนเทียบกับแกน θ การเบี่ยงเบนนี้จะทำมุม γ กับแกนอ้างอิง โดยที่มุม γ สามารถหาได้จาก

$$\gamma = \tan^{-1} \left[\frac{\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{E_R \sin(\omega t)}{E_R \cos(\omega t)} \right] = \tan^{-1} [\tan(\omega t)] = \omega t \quad (ข.19)$$

เมื่อพล็อตโลกัศของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าซึ่งกำหนดให้ระนาบ $r = 0$ จะเห็นได้ว่ามีลักษณะเป็นวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ E_R และมีการหมุนตามเข็มนาฬิกา ตามความถี่เชิงมุม (ω) ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ ข.8 สามารถจะเขียนเวกเตอร์สนามไฟฟ้าชั่วขณะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}(r, \theta, \phi; t) &= \text{Re} \left[\hat{a}_\theta E_R e^{j(\omega t - kr)} + \hat{a}_\phi E_R e^{j(\omega t - kr - \frac{\pi}{2})} \right] \\ &= E_R \text{Re} \left\{ [\hat{a}_\theta - j\hat{a}_\phi] e^{j(\omega t - kr)} \right\}\end{aligned}\quad (ข.20)$$



รูปที่ ข.8 การโพลาไรซ์แบบวงกลมที่เวกเตอร์สนามไฟฟ้าหมุนไปทางซ้ายมือ

(2.2) การโพลาไรซ์แบบวงกลมที่มีทิศทางการหมุนของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าทางซ้ายมือ (Left-Hand Circular Polarization)

คลื่นหรือสนามไฟฟ้ามีการโพลาไรซ์แบบวงกลมที่เวกเตอร์ของสนามหมุนไปทางซ้ายมือ ถ้าคลื่นเคลื่อนที่ไปตามทิศทางการเคลื่อนที่แล้วเวกเตอร์สนามไฟฟ้านั้นมีการหมุนทวนเข็มนาฬิกา (Counter Clockwise) โลกัศของเวกเตอร์สนามไฟฟ้ามีลักษณะเป็นวงกลมด้วยจึงจะเรียกว่าสนามไฟฟ้านั้นมีการโพลาไรซ์แบบวงกลม

พิจารณาโลกัศของสนามไฟฟ้าชั่วขณะ ($\bar{\varepsilon}$) ที่ระนาบ $r = 0$ กำหนดให้

$$\beta_\theta = 0$$

$$\beta_\phi = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ข.21})$$

$$E_{\theta 0}^+ = E_{\phi 0}^+ = E_l$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\varepsilon_\theta = E_l \cos(\omega t) \quad (\text{ข.22})$$

$$\varepsilon_\phi = E_l \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_l \sin(\omega t)$$

$$\bar{\varepsilon}(r, \theta, \phi, t) = \hat{a}_\theta E_l \cos(\omega t) - \hat{a}_\phi E_l \sin(\omega t) \quad (\text{ข.23})$$

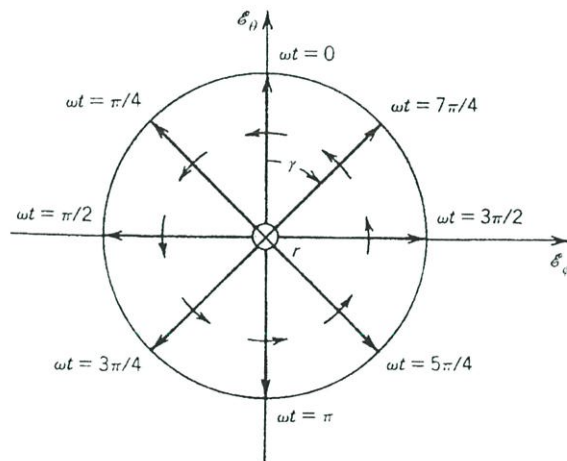
สามารถกำหนดโลกซ์ของขนาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าได้โดย

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\phi^2} = \sqrt{E_L^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = E_L \quad (\text{ข.24})$$

ซึ่งการโพลาริซจะมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงโดยที่แนวเส้นตรงนั้นจะเปลี่ยนมุมไปตามเวลาโดยมุมที่เบี่ยงเบนเทียบกับแกน θ การเบี่ยงเบนนี้จะทำมุม γ กับแกนอ้างอิง โดยที่มุม γ สามารถหาได้จาก

$$\gamma = \tan^{-1} \left[\frac{\varepsilon_\phi}{\varepsilon_\theta} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{-E_L \sin(\omega t)}{E_L \cos(\omega t)} \right] = \tan^{-1} [\tan(\omega t)] = -\omega t \quad (\text{ข.25})$$

เมื่อพล็อตโลกซ์ของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าซึ่งกำหนดให้ระนาบ $r = 0$ จะเห็นว่ามิลักษณะเป็นวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ E_L และมีการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ตามความถี่เชิงมุม (ω) ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ ข.9



รูปที่ ข.9 การโพลาริซแบบวงกลมที่เวกเตอร์สนามไฟฟ้าหมุนไปทางซ้ายมือ

สามารถเขียนเวกเตอร์สนามไฟฟ้าชั่วขณะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}(r, \theta, \phi, t) &= \text{Re} \left[\hat{a}_\theta E_R e^{j(\omega t - kr)} + \hat{a}_\phi E_R e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})} \right] \\ &= E_R \text{Re} \left\{ [\hat{a}_\theta + j\hat{a}_\phi] e^{j(\omega t - kr)} \right\}\end{aligned}\quad (\text{ข.26})$$

ขนาดของเฟสระหว่างองค์ประกอบของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าในแนว θ และ ϕ จะทำมุม 90 องศา
กันเสมอ

(3) การโพลาไรซ์แบบวงรี (Elliptical Polarization)

จะกล่าวว่าคุณลักษณะการโพลาไรซ์แบบวงรีถ้าเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไปนั้นมีการหมุนไปหรือมีโลกซ์เป็นวงรีซึ่งจะเป็นการโพลาไรซ์แบบวงรีที่หมุนไปทางขวามือถ้าเวกเตอร์สนามไฟฟ้ามีการหมุนเป็นวงรีตามเข็มนาฬิกา (Clockwise) และจะเป็นการโพลาไรซ์แบบวงรีที่หมุนไปทางซ้ายมือถ้าเวกเตอร์สนามไฟฟ้ามีการหมุนเป็นวงรีทวนเข็มนาฬิกา (Counter Clockwise)

พิจารณาโลกซ์ของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าชั่วขณะ ($\bar{\varepsilon}$) ที่ระนาบ $r = 0$ ที่ทุกๆ เวลาสำหรับการอธิบายนี้จะกำหนดให้

$$\begin{aligned}\beta_\theta &= \frac{\pi}{2} \\ \beta_\phi &= 0 \\ E_{\theta 0}^+ &= (E_R + E_L) \\ E_{\phi 0}^+ &= (E_R - E_L)\end{aligned}\quad (\text{ข.27})$$

ดังนั้นจะได้องค์ประกอบของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าชั่วขณะ

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= (E_R + E_L) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -(E_R + E_L) \sin(\omega t) \\ \varepsilon_\phi &= (E_R - E_L) \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (\text{ข.28})$$

เราจะสามารถเขียนโลกซ์ของแอมพลิจูดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \omega t &= (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 \varepsilon^2 &= \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\phi^2 \\
 &= (E_R + E_L)^2 \sin^2(\omega t) + (E_R - E_L)^2 \cos^2(\omega t) \\
 &= E_R^2 \sin^2(\omega t) + E_L^2 \sin^2(\omega t) + 2E_R E_L \sin^2(\omega t) \\
 &\quad + E_R^2 \cos^2(\omega t) + E_L^2 \cos^2(\omega t) - 2E_R E_L \cos^2(\omega t)
 \end{aligned} \tag{ข.29}$$

จะได้

$$\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\phi^2 = E_R^2 + E_L^2 + 2E_R E_L [\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t] \tag{ข.30}$$

อย่างไรก็ตาม

$$\sin(\omega t) = \frac{-\varepsilon_\theta}{(E_R + E_L)} \tag{ข.31}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{\varepsilon_\phi}{(E_R - E_L)} \tag{ข.32}$$

แทนค่าสมการที่ ข.31 และสมการที่ ข.32 ลงในสมการที่ ข.29 จะได้

$$\left\{ \frac{\varepsilon_\theta}{E_R + E_L} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_\phi}{E_R - E_L} \right\}^2 = 1 \tag{ข.33}$$

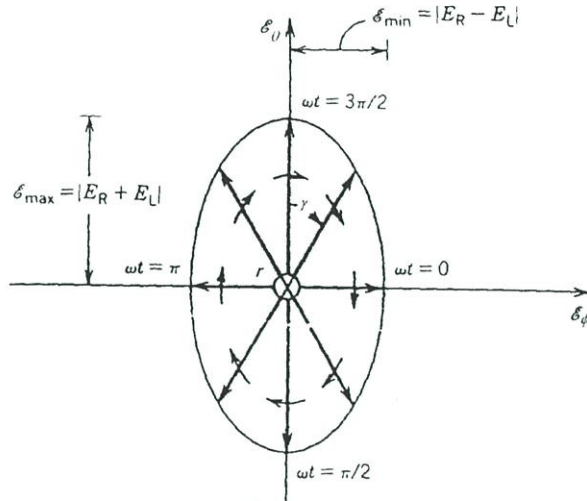
ซึ่งก็คือสมการวงรีที่มีแกนหลักอยู่ที่

$$|\varepsilon|_{\max} = |E_R + E_L| \quad \text{เมื่อ } \omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{ข.34}$$

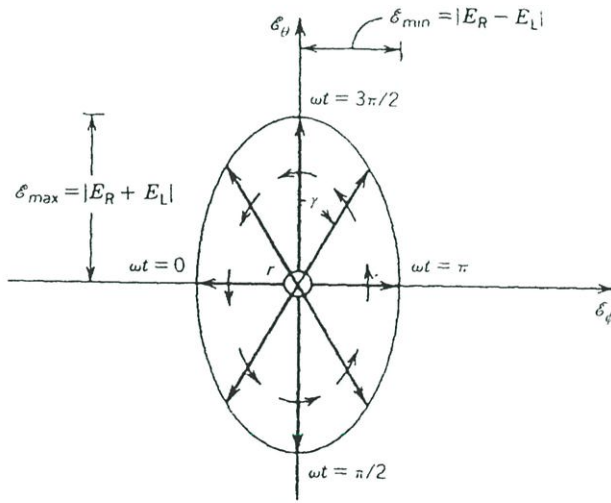
มีแกนรองอยู่ที่

$$|\varepsilon|_{\min} = |E_R - E_L| \quad \text{เมื่อ } \omega t = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{ข.35}$$

เมื่อเวลาเปลี่ยนไปเวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะหมุนไปและความยาวของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะเปลี่ยนไปซึ่งมีลักษณะเป็นวงรีแสดงได้ดังรูปที่ ข.10



(ก) กรณีที่หมุนทางขวามือ



(ข) กรณีที่หมุนทางซ้ายมือ

รูปที่ ข.10 (ก) การโพลาไรซ์แบบวงรีที่เวกเตอร์สนามไฟฟ้าหมุนทางขวามือ (Clockwise)

(ข) การโพลาไรซ์แบบวงรีที่เวกเตอร์สนามไฟฟ้าหมุนทางซ้ายมือ (Counter Clockwise)

▪ คุณลักษณะของการโพลาไรซ์

ค่าอัตราส่วนของแกน (Axial Ratio) คืออัตราส่วนของแกนหลักต่อแกนรองซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$AR = -\frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_{min}} = -\frac{(E_R + E_L)}{(E_R - E_L)} \tag{ข.36}$$

เมื่อ E_R, E_L เป็นจำนวนจริงบวก และเมื่อ AR เป็นค่าบวกแสดงว่าการโพลาไรซ์เป็นแบบหมุนซ้าย (Counter Clockwise) หรือถ้าหากว่า AR มีค่าเป็นลบแสดงว่าเป็นการโพลาไรซ์ของคลื่นแบบหมุนขวา (Clockwise)

ในกรณีที่วงรีของการโพลาไรซ์ไม่ได้อยู่ที่แกนหลักคือมีการเอียงออกมาจากแกนหลักซึ่งจะเกิดมุมๆ หนึ่งขึ้นเรียกว่ามุมเอียง (Tilt Angle) แสดงในรูปที่ ข.11 ในกรณีนี้จะสามารถหาค่าอัตราส่วนของแกนหลักต่อแกนรองได้จาก

$$AR = \pm \frac{\text{major axis}}{\text{minor axis}} = \pm \frac{OA}{OB} \quad , \quad 1 \leq |AR| \leq \infty \quad (\text{ข.37})$$

โดยที่ $AR = 1$ เป็นการโพลาไรซ์แบบวงกลม

$1 < AR < \infty$ จะเป็นการโพลาไรซ์แบบวงรี

$AR = \infty$ จะเป็นการโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น

เมื่อ

$$OA = \left[\frac{1}{2} \left\{ (E_{\theta 0}^+)^2 + (E_{\phi 0}^+)^2 + \left[(E_{\theta 0}^+)^4 + (E_{\phi 0}^+)^4 + 2(E_{\theta 0}^+)^2 (E_{\phi 0}^+)^2 \cos(2\Delta\beta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ข.38})$$

$$OB = \left[\frac{1}{2} \left\{ (E_{\theta 0}^+)^2 + (E_{\phi 0}^+)^2 - \left[(E_{\theta 0}^+)^4 + (E_{\phi 0}^+)^4 + 2(E_{\theta 0}^+)^2 (E_{\phi 0}^+)^2 \cos(2\Delta\beta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ข.39})$$

โดยที่

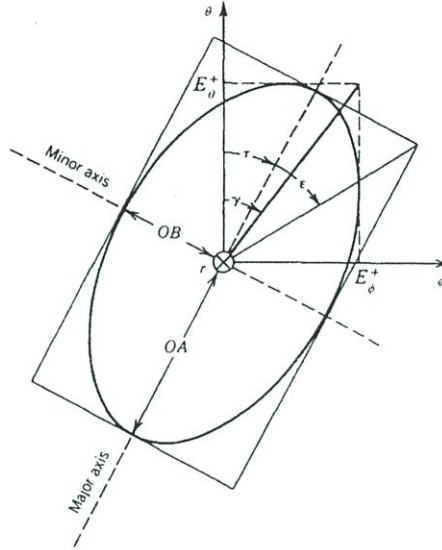
$$E_{\theta 0}^+ = E_R + E_L$$

$$E_{\phi 0}^+ = E_R - E_L$$

$$\Delta\beta = \beta_\theta - \beta_\phi$$

โดยที่ความต่างเฟส (Phase Difference) จะพิจารณาอยู่ที่ $-180^\circ < \Delta\beta < 180^\circ$

$\Delta\beta$ คือค่าความต่างเฟส เมื่อ $\Delta\beta$ มีค่าเป็นลบแสดงว่าเป็นการโพลาริซ์แบบหมุนซ้าย เมื่อมีค่าเป็นบวกแสดงว่าเป็นการโพลาริซ์แบบหมุนขวา และเมื่อ $\Delta\beta = 0$ องศา และ ± 180 องศา จะแสดงว่าเป็นการโพลาริซ์แบบเชิงเส้น



รูปที่ ข.11 การโพลาริซ์แบบวงรีที่ไม่ได้อยู่ที่แกนหลักซึ่งมีมุมเอียงออกจากแกนอ้างอิง θ

มุมเอียงของวงรีเมื่อเทียบกับแกนขององค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนว θ ซึ่งเราใช้เป็นแกนอ้างอิงดังนั้น มุมของการเอียง (Tilt Angle) จะกำหนดได้โดย

$$\tau = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2E_{\theta 0}^+ E_{\phi 0}^+}{(E_{\theta 0}^+)^2 - (E_{\phi 0}^+)^2} \cos(\beta_\theta - \beta_\phi) \right] \text{ เมื่อ } E_{\theta 0}^+ \geq E_{\phi 0}^+ \quad (\text{ข.40})$$

$$\tau = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2E_{\theta 0}^+ E_{\phi 0}^+}{(E_{\theta 0}^+)^2 - (E_{\phi 0}^+)^2} \cos(\beta_\theta - \beta_\phi) \right] \text{ เมื่อ } E_{\theta 0}^+ < E_{\phi 0}^+ \quad (\text{ข.41})$$

โดยที่ $-90^\circ \leq \tau \leq 90^\circ$

ภาคผนวก ค

ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก (Dyadic Green's Function)

ฟังก์ชันกรีนเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ฟังก์ชันขับเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ (Impulse function) หรือฟังก์ชันไดเรคเดลตา (Dirac delta function) เพื่อหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) การหาคำตอบจำนวนจริงของฟังก์ชันขับหาได้โดยใช้วิธีการซ้อนทับ (Superposition) ของฟังก์ชันกรีนและฟังก์ชันขับ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นที่เข้าใจรวมกันว่าฟังก์ชันกรีนเป็นฟังก์ชันตอบสนองอิมพัลส์ หรือฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ในทฤษฎีระบบหรือทฤษฎีวงจร

คำจำกัดความของฟังก์ชันกรีนไดแอดิก

ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกถือว่าเป็นฟังก์ชันตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ ที่มีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ กล่าวได้ว่าฟังก์ชันกรีนไดแอดิกคือสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดจากไดโพลจันนั้นเอง ในปัญหาที่แตกต่างกันจะมีเงื่อนไขขอบเขตที่ต่างกัน ทำให้ได้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกที่ต่างกันตามขอบเขตเงื่อนไขนั้นๆ ดังนั้นหากรู้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกของปัญหานั้นๆ ซึ่งมีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ สามารถที่จะหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอันเนื่องจากการกระจายกระแสรูปแบบใดๆ ได้ โดยการอินทิเกรตตลอดปริมาตรของแหล่งกำเนิดของผลคูณระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอดิกและการกระจายความหนาแน่นกระแสที่แหล่งกำเนิดนั้นๆ

เพื่อให้เกิดความรู้และความเข้าใจในหลักการ และความหมายของฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงพีชคณิตของฟังก์ชันไดแอดิก การเขียนสมการแมกซ์เวลล์ในรูปของไดแอดิก และฟังก์ชันกรีนไดแอดิกชนิดต่างๆ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้กำหนดให้สนามมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นฮาร์มอนิกซึ่งแสดงด้วยฟังก์ชัน $e^{j\omega t}$

พีชคณิตไดแอดิก

J. W. Gibbs [24] เป็นนักฟิสิกส์ชาวอเมริกันที่มีชื่อเสียงในด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์และเทอร์โมไดนามิกส์ เป็นบุคคลแรกที่ตั้งสัญลักษณ์สมัยใหม่ของการวิเคราะห์เวกเตอร์ ฟังก์ชันเวกเตอร์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งนิยามไว้ว่า

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \hat{x}_i \quad (\text{ค.1})$$

ตัวอักษร " i " ซึ่งเป็นดรรชนีบอกจำนวนครั้งในการบวกของฟังก์ชัน โดยปกติจะมีค่า ตั้งแต่ 1 ถึง 3 จากสมการที่ ค.1 J.W. Gibbs ได้นิยามฟังก์ชันไดแอดิก (Dyadic Function) หรือเรียกสั้นๆ ว่า ไดแอดิก (Dyadic) ซึ่งแสดงได้คือ

$$\bar{\bar{F}} = \sum_{j=1}^3 \bar{F}_j \hat{x}_j \quad (\text{ค.2})$$

เมื่อ

$$\bar{F}_j = \sum_i F_{ij} \hat{x}_i \quad i=1,2,3 \quad (\text{ค.3})$$

แสดงฟังก์ชันเวกเตอร์ที่ต่างหรือเป็นอิสระกันสามฟังก์ชัน ตำแหน่งของ \bar{F} , และ \hat{x}_i จะต้องเรียงลำดับตามนี้และไม่สามารถสลับตำแหน่งสองเวกเตอร์นี้ได้ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือกฎแห่งการสลับที่ไม่สามารถนำมาใช้กับสมการที่ ค.2 เมื่อแทนสมการที่ ค.3 ลงในสมการที่ ค.2 จะได้

$$\bar{\bar{F}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (\text{ค.4})$$

โดยอาศัยกฎแห่งการกระจายในการเปลี่ยนสมการที่ ค.2 ให้เป็นสมการที่ ค.4 กล่าวได้ว่าสมการที่ ค.3 ถึง ค.4 เป็นสมการที่แสดงนิยามของไดแอดิกในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน จะเห็นว่า $\bar{\bar{F}}$ มีทั้งหมด 9 องค์ประกอบสเกลาร์ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคู่ (double unit vectors) ซึ่งเป็นการนำเอาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสองตัวมาวางติดกัน นั่นคือ \hat{x}_i กับ \hat{x}_j ซึ่ง $i, j = (1,2,3)$ เราเรียกว่า ไดแอดส์ (Dyads) ซึ่งจะมีได้ทั้งหมด 9 องค์ประกอบเช่นกัน ตัวอย่างองค์ประกอบไดแอดิก เช่น $F_{23} \hat{x}_2 \hat{x}_3$ ซึ่งไดแอดส์ จะทำการสลับตำแหน่งไม่ได้ นั่นคือ

$$\hat{x}_i \hat{x}_j \neq \hat{x}_j \hat{x}_i \quad (\text{ค.5})$$

1. ทรานสโพส

ทรานสโพส ของไดแอดิก $\bar{\bar{F}}$ กำหนดเป็น $[\bar{\bar{F}}]^T$ นิยามโดย

$$[\bar{\bar{F}}]^T = \sum_i \hat{x}_i \bar{F}_i = \sum_i \sum_j F_{ij} \hat{x}_j \hat{x}_i = \sum_j \sum_i F_{ji} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (\text{ค.6})$$

พิจารณาโดยเปรียบเทียบสมการที่ ค.6 และ ค.4 จะเห็นว่าตำแหน่งของ \hat{x}_i และ \hat{x}_j ในพจน์ที่สามของสมการที่ ค.6 สลับตำแหน่งกันอยู่ หรือฟังก์ชัน F_{ij} ในสมการที่ ค.4 ถูกแทนที่ด้วย F_{ji} ในพจน์สุดท้ายของสมการที่ ค.6

2. ไดแอติกสมมาตรและอสมมาตร

ไดแอติกสมมาตร \bar{F}_x มีคุณลักษณะคือ

$$[\bar{F}_x]^T = \bar{F}_x \quad (\text{ค.7})$$

นั่นคือ ไดแอติกสมมาตรจะมีแค่ 6 องค์ประกอบสเกลาร์ที่แตกต่างกัน เพราะ $F_{ij} = F_{ji}$ ส่วนไดแอติกอสมมาตร \bar{F}_a กำหนดเป็น

$$[\bar{F}_a]^T = -\bar{F}_a \quad (\text{ค.8})$$

ดังนั้น

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad (\text{ค.9})$$

สมการที่ ค.9 บอกเป็นนัยว่า

$$F_{ii} = 0, \quad i=1,2,3 \quad (\text{ค.10})$$

ดังนั้น \bar{F}_a จะมีองค์ประกอบสเกลาร์ที่แตกต่างกันเพียง 3 องค์ประกอบเท่านั้น หากไม่พิจารณาเครื่องหมายลบในสมการที่ ค.9 กรณีพิเศษอย่างหนึ่งของไดแอติกสมมาตรเมื่อ $F_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$ และ $F_{ii} = 1$ สำหรับ $i=(1,2,3)$ คุณสมบัติสองอย่างนี้สามารถแสดงได้ ดังนี้

$$F_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{ค.11})$$

โดย δ_{ij} คือ ฟังก์ชันเดลตาโครเนคเคอร์ (Kronecker delta function) และเรียกไดแอติกนี้ว่าเป็นตัวประกอบไอดีม (Idem factor) หรือ ไดแอตไอดีม (Idem-Dyad) ซึ่งแทนด้วย \bar{I} สามารถแสดงได้เป็น

$$\bar{I} = \sum_i \hat{x}_i \hat{x}_i \quad (\text{ค.12})$$

3. ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์และไดแอติก

ผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์และไดแอติกมีอยู่สองแบบ คือ ผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหน้า (Anterior scalar product) และผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหลัง (Posterior scalar product) ผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหน้า ($\bar{b} \cdot \bar{F}$) นิยามโดย

$$\begin{aligned}\bar{b} \cdot \bar{F} &= \sum_i (\bar{b} \cdot \bar{F}_i) \hat{x}_i = \sum_i \sum_j (\bar{b} \cdot F_{ij} \hat{x}_i) \hat{x}_j \\ &= \sum_i \sum_j (b_j F_{ij}) \hat{x}_i\end{aligned}\quad (\text{ค.13})$$

ผลลัพธ์จากการคูณจะเป็นเวกเตอร์ ถ้าแทนผลคูณนี้ด้วยเวกเตอร์ \bar{c} จะได้

$$c_i = \sum_j b_j F_{ij} \quad ; j = 1, 2, 3 \quad (\text{ค.14})$$

ส่วนผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหลังของเวกเตอร์และไดแอติก ($\bar{F} \cdot \bar{b}$) แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{F} \cdot \bar{b} &= \sum_j \bar{F}_j (\hat{x}_j \cdot \bar{b}) = \sum_i \sum_j F_{ij} \hat{x}_i (\hat{x}_j \cdot \bar{b}) \\ &= \sum_i \sum_j (b_j F_{ij}) \hat{x}_i\end{aligned}\quad (\text{ค.15})$$

ผลที่ได้จะเป็นเวกเตอร์เช่นกัน ถ้าแทนผลคูณที่ได้ด้วยเวกเตอร์ \bar{d} จะได้

$$d_i = \sum_j b_j F_{ij} \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (\text{ค.16})$$

เปรียบเทียบสมการที่ ค.14 ถึง ค.15 จะพบว่าในกรณีทั่วไป $c_i \neq d_i$ ยกเว้นในกรณีของไดแอติกสมมาตร นั่นคือ

$$\bar{b} \cdot \bar{F}_s = \bar{F}_s \cdot \bar{b} \quad (\text{ค.17})$$

และ

$$\bar{b} \cdot \bar{I} = \bar{I} \cdot \bar{b} = \bar{b} \quad (\text{ค.18})$$

สมการที่ ค.18 เป็นคุณลักษณะสำคัญของตัวประกอบไอเดม สืบเนื่องจากการทรานสโพสของไดแอติกที่แสดงในสมการที่ ค.6 และพิจารณาสมการที่ ค.13 จะทำให้ได้ว่า

$$\bar{b} \cdot \bar{F} = [\bar{F}]' \cdot \bar{b} \quad (\text{ค.19})$$

หรือ

$$\bar{F} \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot [\bar{F}]' \quad (\text{ค.20})$$

ความสัมพันธ์นี้มีสำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์ไดแอดิก

4. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์และไดแอดิก

สามารถแบ่งผลคูณเชิงเวกเตอร์ระหว่างเวกเตอร์และไดแอดิกได้สองแบบอีกเช่นกัน นั่นคือ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ข้างหน้า (Anterior vector product) และผลคูณเชิงเวกเตอร์ข้างหลัง (Posterior vector product) แสดงได้ในสมการที่ ค.21 และ ค.22 ตามลำดับ

$$\bar{b} \times \bar{F} = \sum_j (\bar{b} \times F_j) \hat{x}_j = \sum_j \sum_i F_{ij} (\bar{b} \times \hat{x}_i) \hat{x}_j \quad (\text{ค.21})$$

และ

$$\bar{F} \times \bar{b} = \sum_j F_j (\hat{x}_j \times \bar{b}) = \sum_j \sum_i F_{ij} \hat{x}_i (\hat{x}_j \times \bar{b}) \quad (\text{ค.22})$$

จากสมการที่ ค.21 และ ค.22 จะเห็นว่าผลคูณทั้งคู่จะเป็นไดแอดิก โดยทั่วไปแล้วจะได้

$$\bar{b} \times \bar{F} \neq -\bar{F} \times \bar{b} \quad (\text{ค.23})$$

และ

$$\bar{b} \times \bar{F} \neq [\bar{F}]' \times \bar{b} \quad (\text{ค.24})$$

แต่จะเป็น

$$\bar{b} \times \bar{F} \neq -\{[\bar{F}]' \times \bar{b}\}' \quad (\text{ค.25})$$

ในกรณีพิเศษของตัวประกอบไอเดม จะได้

$$\bar{b} \times \bar{I} = -[\bar{I} \times \bar{b}]'$$

5. ผลคูณสามชั้น

ในพีชคณิตเวกเตอร์ จะมีเอกลักษณ์ที่ว่า

$$\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{d} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{c} \cdot (\bar{d} \times \bar{b}) \quad (\text{ค.26})$$

สามารถสร้างเอกลักษณ์ที่คล้ายกันนี้สำหรับไดแอดิกโดยอ้างอิงจากสมการที่ ค.26 เริ่มพิจารณาเอกลักษณ์สามชุดซึ่งเกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ที่แตกต่างกันสามเวกเตอร์ \bar{d}_j , เมื่อ $j = (1,2,3)$ นั่นคือ

$$\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}_j) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{d}_j = -\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{d}_j) \quad (\text{ค.27})$$

จากนั้นวางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \hat{x}_i , ติดกับตำแหน่งหลังสุดของแต่ละพจน์ในสมการที่ ค.27 และรวมองค์ประกอบทั้งหมดของไดแอดิกทั้งสามพจน์ จะได้เป็น

$$\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{d} = -\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{d}) \quad (\text{ค.28})$$

แต่ละพจน์ในสมการที่ ค.28 เป็นเวกเตอร์เพราะว่าเป็นผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์กับไดแอดิก ดังนั้นสรุปได้ว่าผลคูณสามชั้นของเวกเตอร์สามารถเปลี่ยนรูปเป็นหนึ่งไดแอดิก ($\bar{c} \times \bar{d}$, \bar{d} , หรือ $\bar{b} \times \bar{d}$) กับ หนึ่งเวกเตอร์ (\bar{b} , $\bar{b} \times \bar{c}$ หรือ $-\bar{c}$) ตามสมการที่ ค.28 นั่นเอง อย่างไรก็ตามสมการที่ ค.28 ก็ยังเป็นเวกเตอร์ เราสามารถทำให้ \bar{c} อยู่ในรูปไดแอดิกได้ โดยพิจารณาสองพจน์สุดท้ายในสมการที่ ค.28 และใช้คุณลักษณะในสมการที่ ค.19 และ ค.20 ตามลำดับ จะได้

$$[\bar{d}]^j \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = -[\bar{b} \times \bar{d}]^j \cdot \bar{c}, \quad ; j = 1,2,3 \quad (\text{ค.29})$$

เมื่อรวมองค์ประกอบทั้งหมดของไดแอดิก \bar{c} หลังจากนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \hat{x}_i ไปวางติดข้างหลัง \bar{c} , สุดท้ายจะได้เอกลักษณ์ไดแอดิก คือ

$$[\bar{d}]^j \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = -[\bar{b} \times \bar{d}]^j \cdot \bar{c} \quad (\text{ค.30})$$

ซึ่งแต่ละพจน์ในสมการที่ ค.30 ล้วนเป็นไดแอดิก

ไดแอดิกเจนซ์ เคิร์ลของฟังก์ชันไดแอดิก และเกรเดียนต์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

ไดแอดิกเจนซ์ของฟังก์ชันไดแอดิก \bar{F} ซึ่งแสดงโดยสมการที่ ค.2 ถึง ค.4 ในหัวข้อก่อนหน้า นี้ แทนด้วย $\nabla \cdot \bar{F}$ ถูกนิยามได้โดย

$$\nabla \cdot \bar{F} = \sum_i (\nabla \cdot \bar{F}_i) \hat{x}_i = \sum_i \sum_j \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \hat{x}_i \quad (\text{ค.31})$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ สำหรับเคิร์ลของฟังก์ชันไดแอดิก \bar{F} แสดงโดย $\nabla \times \bar{F}$ และนิยามได้เป็น

$$\nabla \times \bar{F} = \sum_j (\nabla \times \bar{F}_j) \hat{x}_j = \sum_j \sum_i (\nabla F_{ij} \times \hat{x}_i) \hat{x}_j, \quad (\text{ค.32})$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันไดแอดิกเช่นกัน ในการพิสูจน์สมการที่ ค.32 จะใช้สัญลักณ์เวกเตอร์

$$\nabla \times (F_j \hat{x}_j) = \nabla F_j \times \hat{x}_j, \quad (\text{ค.33})$$

ต่อมาพิจารณาเกรเดียนต์ของฟังก์ชันเวกเตอร์เป็น แสดงโดย $\nabla \bar{F}$ ซึ่งสามารถนิยาม ดังนี้

$$\nabla \bar{F} = \sum_j (\nabla F_j) \hat{x}_j = \sum_j \sum_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{x}_i \hat{x}_j, \quad (\text{ค.34})$$

ซึ่งผลที่ได้ยังคงเป็นไดแอดิก เมื่อฟังก์ชันไดแอดิก \bar{F} ประกอบด้วยตัวประกอบไอเดม \bar{I} และฟังก์ชันสเกลาร์ f ในรูปของ

$$\bar{F} = f \bar{I}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{F} &= \nabla \cdot (f \bar{I}) = \sum_i \nabla \cdot (f \hat{x}_i) \hat{x}_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{x}_i \\ &= \nabla f \end{aligned} \quad (\text{ค.35})$$

และ

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{F} &= \nabla \times (f \bar{I}) = \sum_i \nabla \times (f \hat{x}_i) \hat{x}_i \\ &= \sum_i (\nabla f \times \hat{x}_i) \hat{x}_i = \nabla f \times \bar{I} \end{aligned} \quad (\text{ค.36})$$

ซึ่งทั้งสองจะให้ฟังก์ชันไดแอดิก

สมการแมกซ์เวลล์ในรูปไดแอดิกและฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบไฟฟ้าและแบบแม่เหล็ก

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมการแมกซ์เวลล์และฟังก์ชันไดแอดิก เป็นการเขียนสมการแมกซ์เวลล์ในรูปแบบของไดแอดิก โดยพิจารณาจากสนามสามชุดที่เกิดขึ้นอย่างสอดคล้องกันด้วยความถี่และในเงื่อนไขแวดล้อมเดียวกันและใช้ฟังก์ชันเวลาคือ $e^{i\omega t}$ โดยสนามแต่ละชุดจะเกิดจากการกระจายของกระแสที่แตกต่างกัน นั่นคือ \bar{J}_j เมื่อ $j=(1,2,3)$ สมการแมกซ์เวลล์สำหรับสนามเหล่านี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \bar{E}_j = -j\omega\mu_0\bar{H}_j \quad (\text{ค.37ก})$$

$$\nabla \times \bar{H}_j = \bar{J}_j + j\omega\varepsilon_0\bar{E}_j \quad (\text{ค.37ข})$$

$$\nabla \cdot \bar{J}_j = -j\omega\rho_j \quad (\text{ค.37ค})$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0\bar{E}_j) = \rho_j \quad (\text{ค.37ง})$$

$$\nabla \cdot (\mu_0\bar{H}_j) = 0 \quad (\text{ค.37จ})$$

โดยสมมติให้ตัวกลางภายใต้เงื่อนไขที่พิจารณาเป็นอากาศ สำหรับตัวกลางเอกพันธ์อื่นๆ สามารถแทนค่าคงที่ μ_0 และ ε_0 ด้วย μ และ ε ตามลำดับ ก่อนอื่นจะเปลี่ยนพิกัด (x, y, z) เป็น (x_1, x_2, x_3) เพื่อความสะดวกและให้ง่ายต่อความเข้าใจ จากนั้นนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \hat{x}_i วางติดข้างหลัง (Juxtapose) ของสมการที่ ค.37ก ถึง ค.37จ และรวมสมการแมกซ์เวลล์ทั้งสามชุดเข้าด้วยกัน จะทำให้ได้สมการแมกซ์เวลล์ในรูปแบบของไดแอดิก ได้ดังนี้

$$\nabla \times \bar{\bar{E}} = -j\omega\mu_0\bar{\bar{H}} \quad (\text{ค.38ก})$$

$$\nabla \times \bar{\bar{H}} = \bar{\bar{J}} + j\omega\varepsilon_0\bar{\bar{E}} \quad (\text{ค.38ข})$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{J}} = -j\omega\bar{\rho} \quad (\text{ค.38ค})$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0\bar{\bar{E}}) = \bar{\rho} \quad (\text{ค.38ง})$$

$$\nabla \cdot (\mu_0\bar{\bar{H}}) = 0 \quad (\text{ค.38จ})$$

โดยที่

$$\bar{\bar{E}} = \sum_j \bar{E}_j \hat{x}_j = \sum_j \sum_i E_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (\text{ค.39ก})$$

$$\bar{\bar{H}} = \sum_j \bar{H}_j \hat{x}_j = \sum_j \sum_i H_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (\text{ค.39ข})$$

$$\bar{\bar{E}} = \sum_j \bar{J}_j \hat{x}_j = \sum_j \sum_i J_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (\text{ค.39ค})$$

$$\bar{\rho} = \sum_j \rho_j \hat{x}_j \quad (\text{ค.39ง})$$

ฟังก์ชันไดแอดิก $\bar{\bar{E}}$ ประกอบด้วยสามองค์ประกอบเวกเตอร์ นั่นคือ \bar{E}_j ซึ่ง $j=(1,2,3)$ และฟังก์ชันเวกเตอร์ความหนาแน่นประจุ ($\bar{\rho}$) ประกอบด้วยการกระจายประจุเชิงสเกลาร์ที่แตกต่างกันสามชุด พิจารณาการกระจายกระแสสามชุดที่สอดคล้องกับไดโพลไฟฟ้าจิวสามตัว ณ ตำแหน่ง $\bar{R} = \bar{R}'$ และวางในทิศทาง $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ หรือ $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ ดังนั้น

$$\bar{J}_j = c_j \delta(\bar{R} - \bar{R}') \hat{x}_j \quad ; j=(1,2,3) \quad (\text{ค.40})$$

ซึ่ง c_j คือโมเมนต์กระแสของไดโพล (Current moment of dipole) นั่นคือ

$$\iiint \bar{J}_j dv = c_j \hat{x}_j \quad (\text{ค.41})$$

จะนอร์มอลไลซ์โมเมนต์กระแสให้เป็น

$$-j\omega\mu_0 c_j = 1 \quad (\text{ค.42})$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} -j\omega\mu_0 \bar{J}_j &= -j\omega\mu_0 c_j \delta(\bar{R} - \bar{R}') \hat{x}_j \\ &= \delta(\bar{R} - \bar{R}') \hat{x}_j \end{aligned} \quad (\text{ค.43})$$

ภายใต้เงื่อนไขนี้ จะกำหนดตัวแปรใหม่ สำหรับฟังก์ชันไดแอดิกต่างๆ นั่นคือ

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}}_e \quad (\text{ค.44ก})$$

$$-j\omega\mu_0 \bar{\bar{H}} = \bar{\bar{G}}_m \quad (\text{ค.44ข})$$

$$-j\omega\mu_0 \bar{\bar{J}} = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (\text{ค.44ค})$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{1}{-j\omega} \nabla \cdot \bar{\bar{J}} = \frac{-1}{\omega^2 \mu_0} \nabla \cdot [\bar{\bar{I}} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] \\ &= \frac{-\epsilon_0}{k^2} \nabla \delta(\bar{R} - \bar{R}') \end{aligned} \quad (\text{ค.44ง})$$

$$\text{ซึ่ง} \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \text{ความเร็วของแสงในอากาศ}$$

เมื่อแทนตัวแปรเหล่านี้ลงในสมการที่ ค.38 จะได้ว่า

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_e = \bar{\bar{G}}_m \quad (\text{ค.45ก})$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_m = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_e \quad (\text{ค.45ข})$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_e = -\frac{1}{k^2} \nabla \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (\text{ค.45ค})$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_m = 0 \quad (\text{ค.45ง})$$

กำหนดให้ $\bar{\bar{G}}_e$ คือฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบไฟฟ้า (Electric dyadic Green function) และ $\bar{\bar{G}}_m$ คือฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็ก (Magnetic dyadic Green function) ซึ่งจะเขียนตามนิยามของ ไดแอดิก จะได้ดังนี้

$$\bar{\bar{G}}_e = \sum_j \bar{G}_{ej} \hat{x}_j \quad (\text{ค.46ก})$$

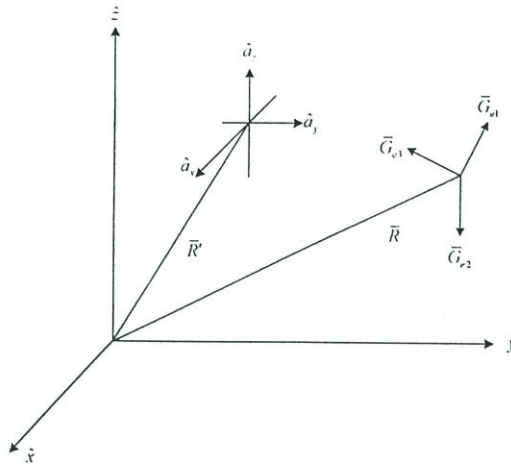
$$\bar{\bar{G}}_m = \sum_j \bar{G}_{mj} \hat{x}_j \quad (\text{ค.46ข})$$

ดังนั้น \bar{G}_{ej} และ \bar{G}_{mj} คือ เวกเตอร์ฟังก์ชันกรีนแบบไฟฟ้า (Vector Green function of electric type) และเวกเตอร์ฟังก์ชันกรีนชนิดแม่เหล็ก (Vector Green function of magnetic type) ตามลำดับ ในทางกายภาพ \bar{G}_{ej} จะแสดงถึงสนามไฟฟ้าที่เกิดจากไดโพลไฟฟ้าจิวซึ่งวางอยู่ในทิศ \hat{x}_j และอยู่ที่ตำแหน่ง $\bar{R} = \bar{R}'$ นั่นคือ

$$\bar{G}_{ej} = \bar{G}_{ej}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (\text{ค.47ก})$$

$$\bar{G}_{mj} = \bar{G}_{mj}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (\text{ค.47ข})$$

โดยที่ \bar{R} คือตำแหน่งเวกเตอร์ของจุดสนาม และ \bar{R}' คือตำแหน่งเวกเตอร์ของแหล่งกำเนิด หากทราบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดจากไดโพลไฟฟ้าจิวที่ตั้งฉากกัน นั่นคือทราบ \bar{G}_{ej} และ \bar{G}_{mj} จะหาสนามอื่นเนื่องจากการกระจายกระแสรูปแบบใดๆ ได้ และรูปที่ ค.1 แสดงความหมายทางกายภาพของเวกเตอร์ฟังก์ชันกรีนทั้งสาม \bar{G}_{ej}



รูปที่ ค.1 สนามไฟฟ้าอันเนื่องมาจากแหล่งกำเนิดไดโพลไฟฟ้าจิวสามตำแหน่งที่วางอยู่ที่ \bar{R}' ในทิศทาง x, y และ z

ชนิดของฟังก์ชันกรีนไดแอติก

ฟังก์ชันของกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าสามารถจำแนกตามเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับฟังก์ชันได้สองชนิด คือ ฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าชนิดที่หนึ่ง \bar{G}_{c1} ซึ่งจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดิริคท์ (Dirichlet boundary condition) ที่มีเงื่อนไขว่าส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอติกในแนวสัมผัสกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\hat{a}_n \times \bar{G}_{c1}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (\text{ค.48})$$

และฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าชนิดที่สอง \bar{G}_{c2} จะต้องสอดคล้องเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์ (Neumann boundary condition) ที่มีเงื่อนไขขอบเขตว่าส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอติกในแนวตั้งฉากกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\hat{a}_n \times \nabla \times \bar{G}_{c2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (\text{ค.49})$$

สำหรับฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบแม่เหล็กใช้เงื่อนไขขอบเขตดิริคท์และเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์แบ่งฟังก์ชันเป็นสองชนิดเช่นกันกับฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้า จะได้

$$\hat{a}_n \times \bar{G}_{m1}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (\text{ค.50})$$

และ

$$\hat{a}_n \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (\text{ค.51})$$

ตามลำดับ พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{\bar{G}}_e$ และ $\bar{\bar{G}}_m$ ในสมการที่ ค.45ก และ ค.45ข จะได้ว่า

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e_2}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{\bar{G}}_{m_1}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (\text{ค.52})$$

และ

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (\text{ค.53})$$

สมการที่ ค.52 และค.53 ถือว่าเป็นความสัมพันธ์ที่สำคัญที่ใช้หา $\bar{\bar{G}}_{m_1}$ เมื่อทราบ $\bar{\bar{G}}_{e_2}$ และ $\bar{\bar{G}}_{e_1}$ เมื่อทราบ $\bar{\bar{G}}_{m_2}$

สำหรับกรณีโครงสร้างที่กระจัดกระจายคลื่น (Scattering body) ซึ่งมีบางส่วนที่เป็นตัวนำ ซึ่งไม่มีแหล่งกำเนิดกระแสดูภายนอกที่อนุภาคคลื่น สามารถหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปมาตรฐานดังแสดงดังสมการข้างล่าง

$$\bar{E}(\bar{R}) = -j\omega\mu_0 \iiint_V \bar{\bar{G}}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot \bar{J}(\bar{R}') dV' \quad (\text{ค.54ก})$$

$$\bar{E}(\bar{R}) = - \iint_{S_n} [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e_2}(\bar{R}, \bar{R}')] \cdot [\hat{n}' \times \bar{E}(\bar{R}')] dS' \quad (\text{ค.54ข})$$

$$\bar{H}(\bar{R}) = \iiint_V [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}')] \cdot \bar{J}(\bar{R}') dV' \quad (\text{ค.54ค})$$

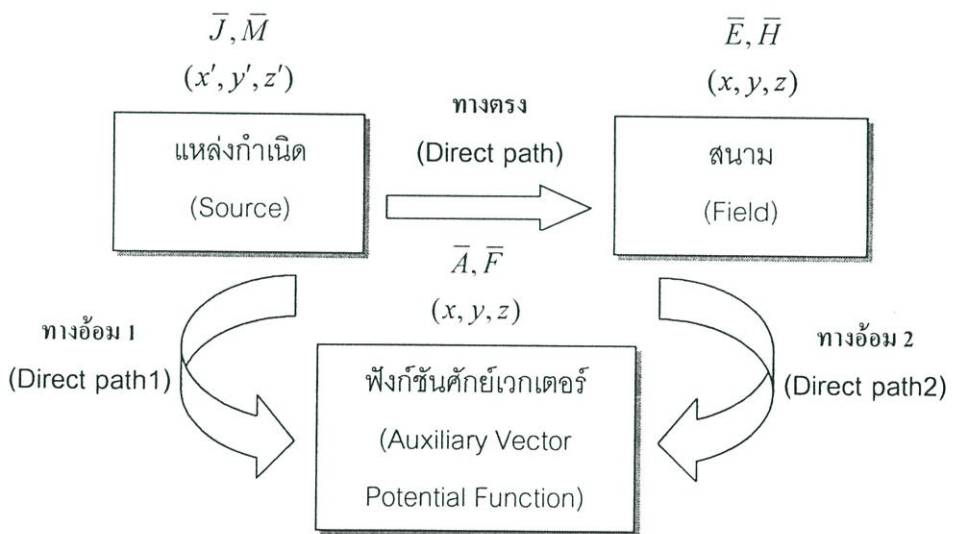
$$\bar{H}(\bar{R}) = j\omega\varepsilon_0 \iint_{S_1} \bar{\bar{G}}_{e_2}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot [\hat{n}' \times \bar{E}(\bar{R}')] dS' \quad (\text{ค.54ง})$$

โดยที่ \bar{R} คือเวกเตอร์ตำแหน่งสำหรับสนาม และ \bar{R}' คือเวกเตอร์ตำแหน่งสำหรับแหล่งกำเนิด

ภาคผนวก ง

การวิเคราะห์สายอากาศโดยใช้วิธีศักย์เวกเตอร์

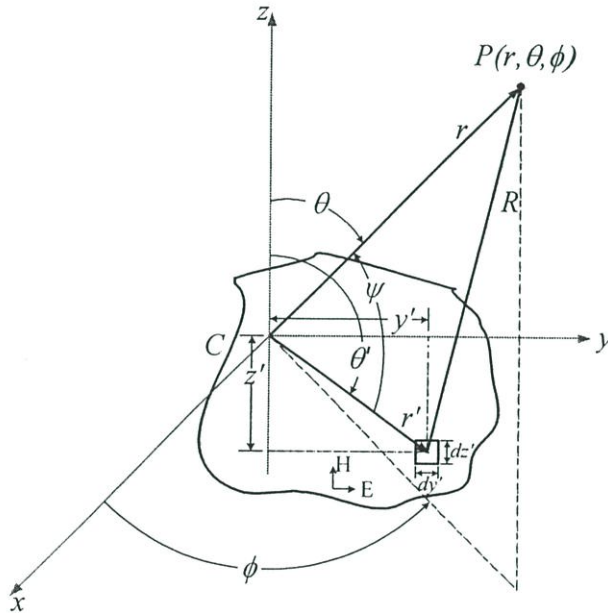
ในการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการแพร่กระจายคลื่น สามารถคำนวณหาคลื่นที่แพร่กระจายเมื่อกำหนดแหล่งกำเนิดคลื่นมาได้ ในการวิเคราะห์ฟังก์ชันช่วย (Auxiliary Function) ที่เรียกว่าศักย์เวกเตอร์ (Vector Potential) ช่วยในการแก้ปัญหา ศักย์เวกเตอร์ที่นิยมใช้กันได้แก่ ศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก (Magnetic Vector Potential, \bar{A}) และศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า (Electric Vector Potential, \bar{F}) นอกจากนี้ยังมีศักย์เฮิร์ตซ์ (Hertz Potential) Π_e และ Π_h สำหรับการคำนวณหาความเข้มสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก \bar{E} และ \bar{H} จะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ หาฟังก์ชันช่วยจากความหนาแน่นกระแสแหล่งกำเนิด (Source Current Density, \bar{J} หรือ \bar{M}) ก่อน จากนั้นจะคำนวณหาความเข้มสนามไฟฟ้า \bar{E} และสนามแม่เหล็ก \bar{H} จากฟังก์ชันช่วยเหล่านี้ แทนที่จะคำนวณหาความเข้มสนามไฟฟ้า \bar{E} และสนามแม่เหล็ก \bar{H} โดยตรงจากความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า \bar{J} และความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก \bar{M} ดังรูปที่ ง.1 ซึ่งแสดงผังงานการหาคำตอบของสนามที่แพร่กระจายจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าและแม่เหล็กโดยวิธีตรงและวิธีอ้อม



รูปที่ ง.1 ผังงานการหาคำตอบของสนามที่แพร่กระจายจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าและแม่เหล็ก

สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของสายอากาศแบบช่องเปิดบนท่อนำคลื่นเชิงรัศมี โดยวิธีคัลculusเวกเตอร์แม่เหล็กไฟฟ้า

สายอากาศชนิดนี้มีลักษณะเป็นท่อนำคลื่นเชิงรัศมีประกอบด้วยแผ่นระนาบวงกลมสองแผ่นวางขนานกันโดยรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำมีค่าคงที่เท่ากับ a มีระยะห่างระหว่างแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองเท่ากับ b ซึ่งจะมีขนาดเล็กมากเมื่อเปรียบเทียบกับความยาวคลื่น (Wavelength) ซึ่งจะเริ่มพิจารณาโดยการกำหนดระนาบ $x=0$ ซึ่งแสดงดังรูปที่ ง.2 พื้นที่องค์ประกอบ (elemental area) คือส่วนของช่องเปิดซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง C มีตำแหน่งของจุดกำเนิดในระบบพิกัดทรงกลมที่ $(r', \theta', \frac{\pi}{2})$ และมีจุดสังเกตอยู่ที่ตำแหน่ง $P(r, \theta, \phi)$



รูปที่ ง.2 พื้นที่องค์ประกอบ (elemental area)

เนื่องจากพื้นที่องค์ประกอบที่วิเคราะห์นั้นจะถูกกระตุ้นทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ดังนั้นจะเริ่มพิจารณาจากคัลculusเวกเตอร์แม่เหล็ก (\bar{A}) และคัลculusเวกเตอร์ไฟฟ้า (\bar{F}) ดังนี้

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_s \frac{\bar{J}e^{-jkR}}{r} ds \quad (ง.1)$$

และ

$$\bar{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_s \frac{\bar{M}e^{-jkR}}{r} ds \quad (ง.2)$$

จากหลักการสนามสมมูล กระแสที่ผิวมีค่าดังนี้

$$\bar{J} = \hat{a}_n \times \bar{H}_a \quad (ง.3)$$

$$\bar{M} = -\hat{a}_n \times \bar{E}_a \quad (ง.4)$$

โดยที่

\bar{E}_a คือสนามไฟฟ้าบนช่องเปิด

\bar{H}_a คือสนามแม่เหล็กบนช่องเปิด

\bar{A} คือศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก

\bar{F} คือศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า

\bar{J} คือความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ผิว

\bar{M} คือความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กที่ผิว

μ คือค่าความซึมซาบ (permeability)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

ϵ คือสภาพยอม (permittivity)

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

\hat{a}_n คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับพื้นผิว

R คือ ระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดสังเกต

เมื่อพิจารณาเฉพาะสนามไฟฟ้าระยะไกล

$$R = r - r' \cos \psi \quad (ง.5)$$

ดังนั้นจากสมการที่ ง.1 และสมการที่ ง.2 จะได้

$$\bar{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \int_s \bar{J} e^{jkr' \cos \psi} ds \quad (ง.6ก)$$

$$\bar{F} = \frac{\epsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \int_s \bar{M} e^{jkr' \cos \psi} ds \quad (ง.6ข)$$

เวกเตอร์การแพร่กระจายคลื่นที่สนามระยะไกล

$$\bar{N} = \int_s \bar{J} e^{jkr' \cos \psi} ds \quad (ง.7)$$

$$\bar{L} = \int_s \bar{M} e^{jkr' \cos \psi'} ds \quad (ง.8)$$

ดังนั้น

$$\bar{A} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \bar{N} \quad (ง.9ก)$$

$$\bar{F} = \frac{\epsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \bar{L} \quad (ง.9ข)$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นระนาบตัวนำทั้งสองซึ่งพิจารณาในโหมด TM_{00} ซึ่งเป็นโหมดเป็นใหญ่ สามารถพิจารณาได้เป็น

$$\bar{E}_a = \hat{a}_\theta \frac{V_0}{b}, \quad b \ll \lambda \quad (ง.10)$$

โดยที่

V_0 คือความต่างศักย์ที่เกิดระหว่างแผ่นตัวนำทั้งสอง จากหลักการสนามสมมูล สมการที่ ง.4 จะได้กระแสที่ผิวมีค่าดังนี้

$$\bar{M} = -\hat{a}_\rho \times (-\hat{a}_\theta) \frac{V_0}{b} = \hat{a}_\phi \frac{V_0}{b} \quad (ง.11)$$

ที่ระนาบ $y=0$ จะได้

$$\bar{L} = \int_s \bar{M} \cos \phi' e^{-jkr \cos \psi'} ds \quad (ง.12)$$

โดยที่

$$\cos \psi = \sin \theta \cos \phi' \quad (ง.13)$$

และ

$$\int ds = b \int a d\phi' = ab \int_0^{2\pi} d\phi' \quad (ง.14)$$

แทนค่าสมการที่ ง.11 ง.13 และ ง.14 ในสมการที่ ง.12 จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$L_\phi = V_0 a \int_0^{2\pi} \cos \phi' e^{jka \sin \theta \cos \phi'} d\phi' \quad (ง.15)$$

และศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า (\bar{F}) จะเขียนได้เป็น

$$F_{\phi_1} = \frac{\varepsilon V_0 a e^{-jkr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \cos \phi' e^{jk\phi} d\phi' \quad (\text{ง.16})$$

โดยที่

$$\phi = a \sin \theta \cos \phi' \quad (\text{ง.17})$$

ดังนั้น พื้นที่องค์ประกอบที่อยู่ตรงข้ามกันจะมีศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้าเป็น

$$F_{\phi_2} = -\frac{\varepsilon V_0 a e^{-jkr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \cos \phi' e^{jk\phi} d\phi' \quad (\text{ง.18})$$

รวมสมการที่ ง.16 และ ง.18 จะแสดงได้ดังนี้

$$F_\phi = F_{\phi_1} + F_{\phi_2} = \frac{\varepsilon V_0 a e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \phi' (e^{jk\phi} - e^{-jk\phi}) d\phi' \quad (\text{ง.19})$$

สมการที่ ง.19 มีรูปแบบสมการเช่นเดียวกับสมการของสายอากาศแบบบ่วงสามารถลดรูปสมการได้เป็น

$$F_\phi = \frac{\varepsilon V_0 a e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(ku \cos \phi' + \phi')} d\phi' \quad (\text{ง.20})$$

จะได้

$$F_\phi = \frac{j\varepsilon V_0 a e^{-jkr} J_1(ka \sin \theta)}{2r} \quad (\text{ง.21})$$

และ

$$L_\phi = \frac{j2\pi V_0 a J_1(ka \sin \theta)}{2r} \quad (\text{ง.22})$$

จากสมการสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

$$E_\theta \approx -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} L_\phi \quad (\text{ง.23})$$

$$H_\phi \approx -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left(\frac{L_\phi}{\eta} \right) \quad (\text{ง.24})$$

โดยที่

η คือค่าอินทรีนซิกอิมพีแดนซ์ของอากาศซึ่งมีค่าประมาณ $120\pi \Omega$

สมการสนามไฟฟ้าและสมการสนามแม่เหล็ก แสดงดังนี้

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{kV_0 a e^{-jkr} J_1(ka \sin \theta)}{2r} \quad (\text{ง.25})$$

และ

$$H_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{kV_0 a e^{-jkr} J_1(ka \sin \theta)}{2r\eta} \quad (\text{ง.26})$$

สมการสนามไฟฟ้าและสมการสนามแม่เหล็กในสมการที่ ง.25 และ ง.26 นี้ เป็นสนาม ไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ ซึ่งเกิดระหว่างแผ่นระนาบตัวนำทั้งสอง

พิจารณาคูณลักษณะของสายอากาศ ดังต่อไปนี้
ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยก หาได้จาก

$$\theta_{\max} (\text{deg}) = \theta_{\max} \Big|_{\theta}^{\max} E_\theta(\theta, \phi) \quad (\text{ง.27})$$

ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังสามารถเขียนได้เป็น

$$HPBW = 2 \left| \theta_{U=0\text{dB}} - \theta_{U=-3\text{dB}} \right| \quad (\text{ง.28})$$

กำลังงานเฉลี่ยที่แพร่กระจายคลื่นจากสายอากาศสามารถแสดงได้ดังนี้

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |E_\theta|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{ง.29})$$

และค่าสภาพเจาะจงทิศทางสามารถแสดงได้ตามลำดับดังนี้

$$D = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} \quad (\text{ง.30})$$

หรือ

$$D_0 (\text{dBi}) = 10 \log D \quad (\text{ง.31})$$

โดยที่

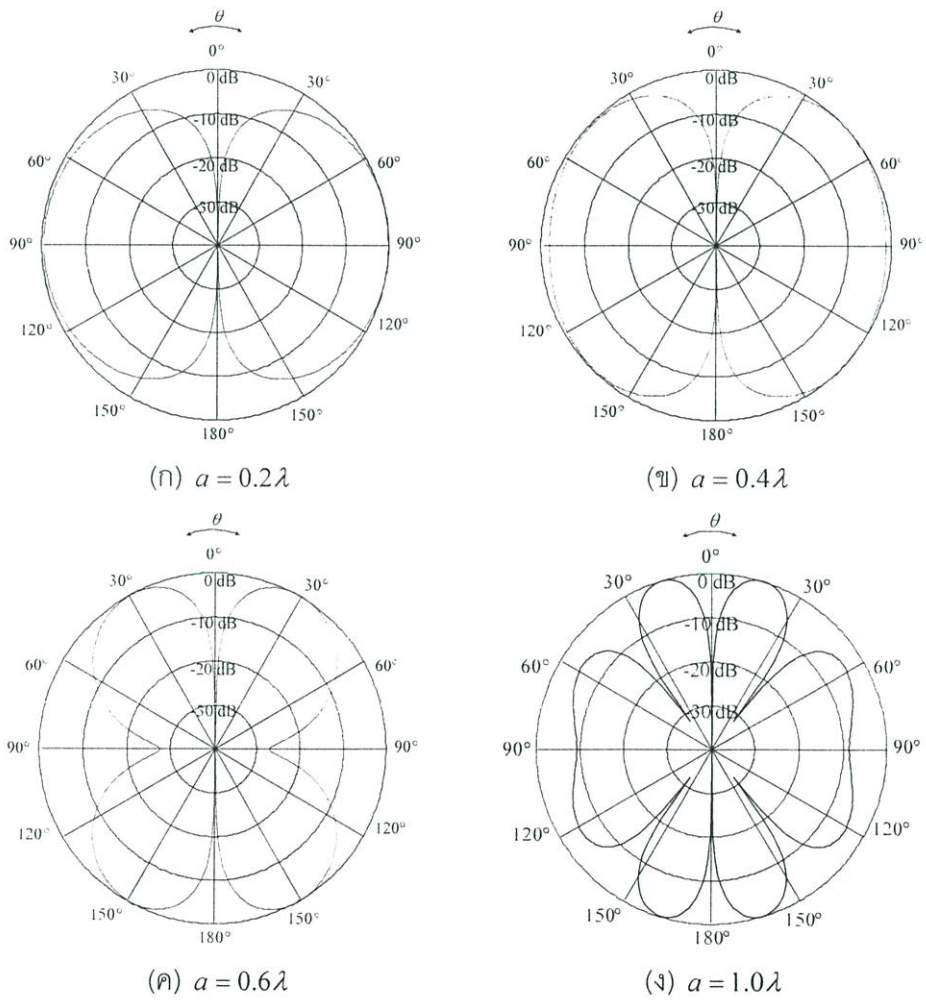
U_{\max} คือ ค่าสูงสุดของความเข้มการแพร่กระจายคลื่น ซึ่งหาได้จาก

$$U_{\max} = \frac{|E_\theta(\theta, \phi)|_{\max}^2}{2\eta} \quad (\text{ง.32})$$

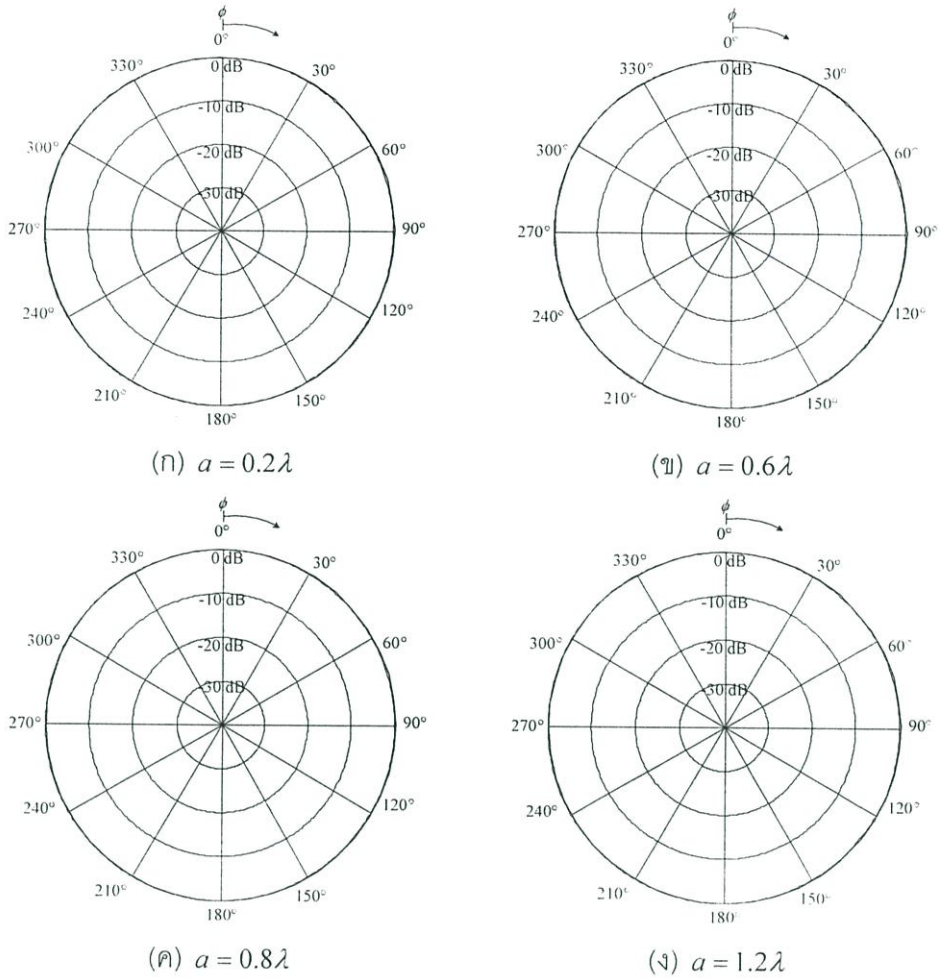
ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีคิกย์เวกเตอร์

คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศโดยวิธีคิกย์เวกเตอร์

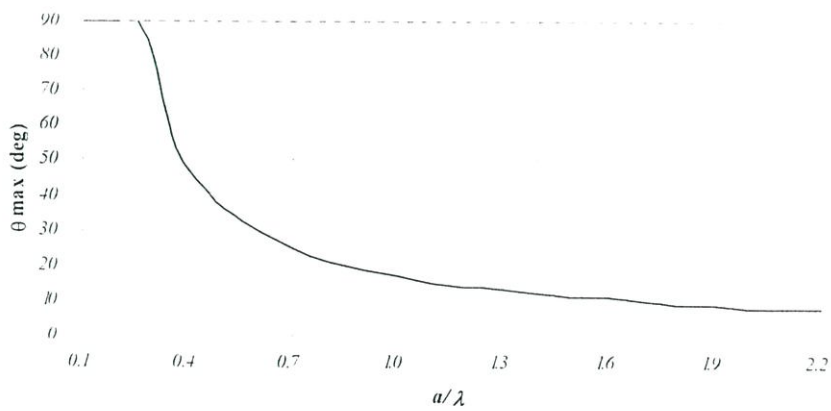
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ในทางทฤษฎี ได้แก่ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบมุมยกและระนาบมุมกวาด ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง ค่ามุมที่มีสนามสูงสุดในระนาบมุมยก และค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศ ซึ่งเมื่อพิจารณาจากสมการที่ ง.25 ถึงสมการที่ ง.32 จะพบว่าตัวแปรที่สำคัญในการพิจารณา คือ ขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นจะแสดงในรูปที่ ง.3



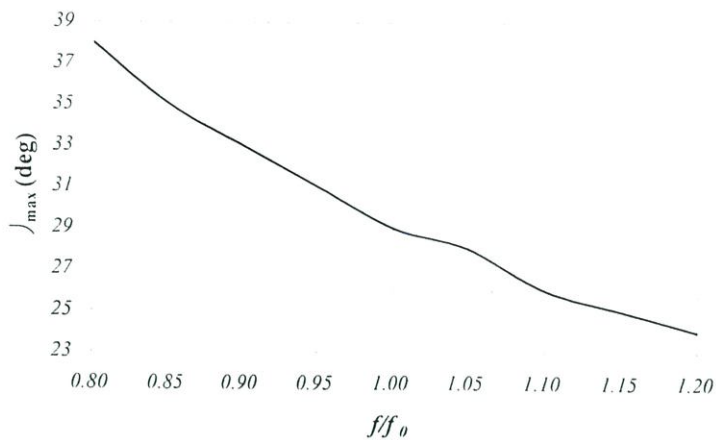
รูปที่ ง.3 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมยกที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.2λ 0.4λ 0.6λ และ 1.0λ ตามลำดับ



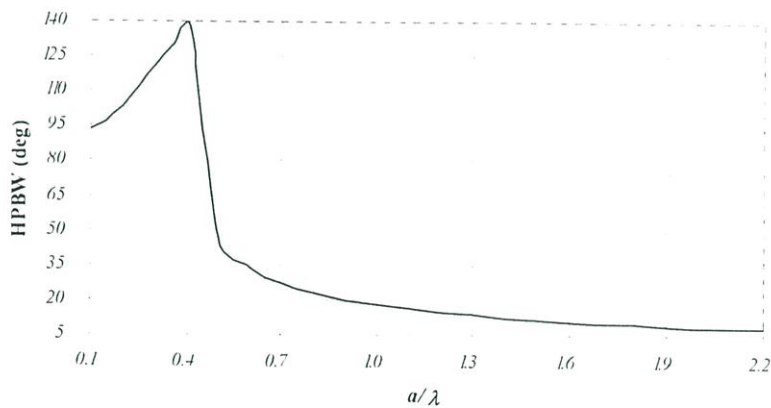
รูปที่ ง.4 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบมุมกวาดที่รัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ (a) เท่ากับ 0.2λ 0.4λ 0.6λ และ 1.0λ ตามลำดับ



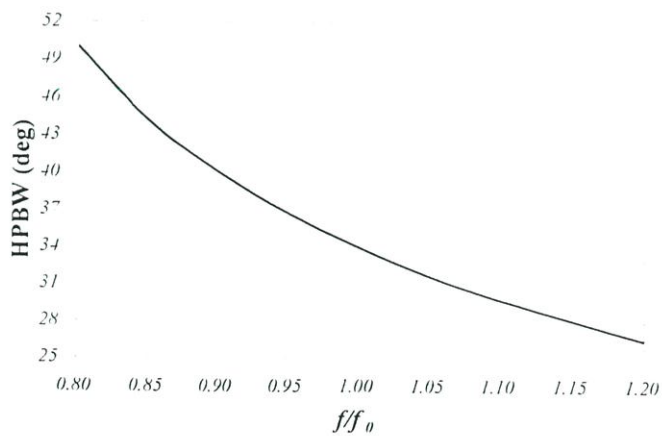
รูปที่ ง.5 ค่ามุมที่สนามสูงสุด ในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำวงกลม



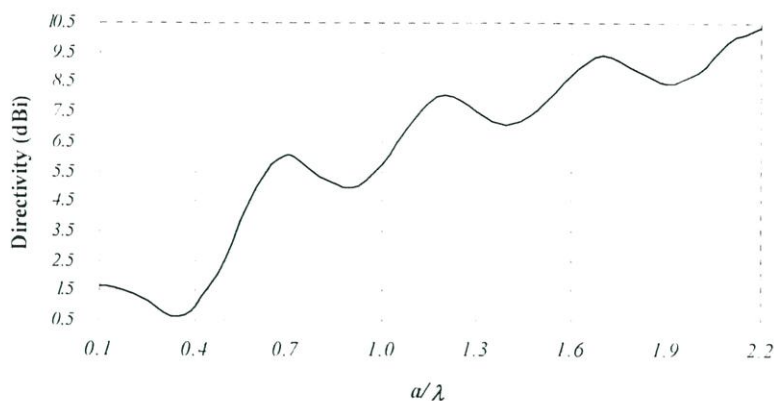
รูปที่ ๕.6 ค่ามุมที่สนามสูงสุดในระนาบมุมยกที่เป็นฟังก์ชันความถี่เมื่อ $a = 0.6\lambda$



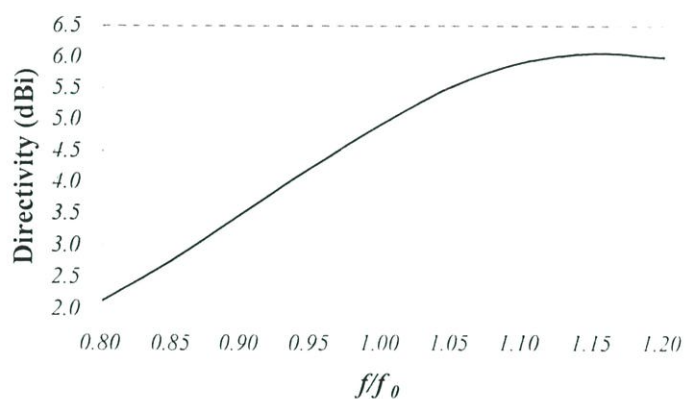
รูปที่ ๕.7 ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบตัวนำ



รูปที่ ๕.8 ค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังที่เป็นฟังก์ชันความถี่เมื่อ $a = 0.6\lambda$



รูปที่ 9.9 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดที่เป็นฟังก์ชันของขนาดรัศมีของแผ่นระนาบวงกลม



รูปที่ 9.10 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดที่เป็นฟังก์ชันความถี่เมื่อ $a = 0.6\lambda$

จากรายละเอียดที่กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นว่าวิธีคีย์เวกเตอร์มีข้อดี คือเป็นวิธีการที่ง่ายและนิยมใช้กันแพร่หลายเนื่องจากสามารถหารูปแบบสมการออกมาได้ นอกจากนี้วิธีคีย์เวกเตอร์นี้สามารถหาคุณลักษณะทางโพลาริซซ์ออกมาได้ด้วย แต่มีข้อเสียคือไม่สามารถหาคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ได้เนื่องจากไม่มีการสมมติกระแสเดินทางในลวดตัวนำ

ประวัติผู้เขียน

นางสาวบุญฤทัย เครือแก้ว เกิดเมื่อวันที่ 20 ธันวาคม พ.ศ.2523 ที่จังหวัดภูเก็ต สำเร็จ การศึกษาระดับปริญญาตรี วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยมอันดับ 2) สาขาวิศวกรรม อิเล็กทรอนิกส์และโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี เมื่อปี 2545

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์

- B. Kruekaew and C. Phongcharoenpanich, "A simple Conical Beam Antenna using Circumferential Aperture beside the Radial Waveguide for Vertically Polarized Radiation," *Proc. of the 2003 International Conference on Information and Communication Tecnologies*, Thailand, pp. 261-267, Apr. 2003.
- B. Kruekaew and C. Phongcharoenpanich, "Analysis of a Circumferential Aperture beside the Radial Waveguide near the Reflector," *Proc. of the 9th IEEE Asia Pasific Conference on Communications APCC2003*, Malaysia, pp. 959-963, Sep. 2003.
- Boonrutai Kruekaew and Chuwong Phongcharoenpanich, "Transverse Mode Analysis of Radiation from Zonal Aperture beside the Radial Waveguide," *Proc. of the first Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunication, and Information Technology (ECTI) Annual Conference*, Thailand, pp 279-282, 13-14 May 2004.