

การไหลในชั้นเพอริซิลเลอรีโดยวิธีการผลต่างอันตะและนิวตันราฟสัน
แบบ N มิติ
FLOW OVER PERICILLARY LAYER USING FINITE DIFFERENCE AND
 N -DIMENSIONAL NEWTON-RAPHSON METHODS

ณัฐพล อังวัชรปรากการ
NATTAPOL OANGWATCHARAPARKAN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2563

KMITL-2020-SC-M-001-045

การไหลในชั้นเพอริซिलิเยรีโดยวิธีการผลต่างอันดับและนิวตันราฟสัน
แบบ N มิติ
FLOW OVER PERICILLARY LAYER USING FINITE DIFFERENCE AND
 N -DIMENSIONAL NEWTON-RAPHSON METHODS

ณัฐพล อังวัชรปรากการ
NATTAPOL OANGWATCHARAPARKAN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2563

KMITL-2020-SC-M-001-045

FLOW OVER PERICILLARY LAYER USING FINITE DIFFERENCE AND
 N -DIMENSIONAL NEWTON-RAPHSON METHODS

NATTAPOL OANGWATCHARAPARKAN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE
DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2020

KMITL-2020-SC-M-001-045

COPYRIGHT 2020

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การไหลในชั้นเพอริซิเลียรีโดยวิธีการผลต่างอันดับ และนิวตันราฟสันแบบ N มิติ
ชื่อนักศึกษา	นายณัฐพล อังวัชรปรากการ
รหัสประจำตัว	61605024
ปริญญา	วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
พ.ศ.	2563
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.กนกณัฐรุช วัฒนแจ่มศรี

บทคัดย่อ

ทุกวันนี้อากาศมีการปนเปื้อนด้วยมลพิษมากมาย ซึ่งเมื่อเราหายใจรับอากาศที่ปนเปื้อนด้วยมลพิษเข้าไปยังร่างกาย ระบบทางเดินหายใจทำหน้าที่คัดกรองมลพิษทำการสร้างเมือกเพื่อมาดักจับอนุภาคขนาดเล็กที่มากับอากาศและกำจัดออกจากร่างกายโดยการพัดของเส้นขนขนาดเล็กหรือที่เรียกว่าซิเลีย ที่เรียงตัวอยู่บนชั้นเนื้อเยื่อผิว ชั้นที่บรรจุเส้นขนทำหน้าที่ในการขับเมือกออกจากร่างกาย เรียกว่า ชั้นพีซีแอล และเส้นขนที่อยู่ในชั้นพีซีแอลนี้จะไม่สามารถทำงานได้สมบูรณ์ถ้าไม่มีของไหลที่หล่อเลี้ยงเส้นขนที่อยู่ในชั้น พีซีแอล ซึ่งของไหลในชั้นพีซีแอลนี้เรียกว่าของไหลพีซีแอล เนื่องจากของไหลพีซีแอลมีผลต่อการเคลื่อนที่ของเส้นขน และเส้นขนมีผลต่อการขับเมือกออกจากร่างกาย ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลพีซีแอลเพื่อที่จะทราบค่าขอบบนของชั้นพีซีแอลและสามารถนำค่าขอบนั้นเป็นขอบล่างในการคำนวณหาความเร็วของเมือกในชั้นเมือกเพื่อช่วยในการรักษาผู้ป่วยที่มีปัญหาเกี่ยวกับทางเดินหายใจ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้หาความเร็วของของไหลที่อยู่ในชั้นของพีซีแอลโดยใช้สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นโดยของไหลพีซีแอลจะเคลื่อนที่จากการพัดโบกของเส้นขนโดยที่ไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรความดันเพียงอย่างเดียว วิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method) และวิธีการนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) ถูกนำมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวและได้จัดรูปแบบของสมการให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นเพื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ผลการศึกษาได้แสดงผลเฉลยที่เส้นขนทำมุม 70° , 80° และ 90° กับพื้นราบ ซึ่งผลเฉลยนั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นได้ เช่น การไหลของของไหลผ่านท่อน้ำหรือตัวกลางที่มีรูพรุนในลักษณะเดียวกัน

คำสำคัญ : ชั้นเพอริซิเลียรี วิธีนิวตันราฟสัน วิธีผลต่างอันดับ สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น.

Thesis Title	Flow over Periciliary Layer Using Finite Difference and N -Dimensional Newton-Raphson Methods
Student Name	Mr. Nattapol Oangwatcharaparkan
Student ID	61605024
Degree	Master of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Year	2020
Thesis Advisor	Asst.Prof.Dr.Kanognudge Wuttanachamsri

Abstract

Nowadays, air is contaminated with pollution. When we take this polluted air into the lungs, organs involved in breathing system produce mucus to catch the particles and remove them from the human body by the movement of tiny hair lining on the epithelium cell in the respiratory system. The layer containing the tiny hair or cilia is called Periciliary Layer (PCL) and the fluid in this layer is named PCL fluid. In this research, we find the velocity of the fluid in the PCL by using the nonlinear Brinkman equation, where the fluid flows by the movement of cilia, not just the pressure gradient. The second-order finite difference method and the Newton-Raphson approach are employed to calculate the numerical solutions. The results are compared with the exact solution for the linear equation, without the nonlinear term, with a good agreement. We present the solutions of the nonlinear Brinkman equation when the cilia make angles 70° , 80° and 90° with the horizontal plane. Applications are fluid flow through rice field and other similarly porous media.

Keywords : Periciliary Layer, Newton Raphson Method, Finite Difference Method, Non-linear Brinkman Equation.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิทยานิพนธ์ในหัวข้อ ผลเฉลยของการไหลในชั้นเพอร์ซิเลียรีโดยวิธีการผลต่างอันดับและนิวตันราฟสันแบบ N มิติ ที่สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีนี้ ผู้วิจัยกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กนกณัฐรุช วัฒนแจ่มศรี อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่คอยให้คำชี้แนะในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้พร้อมทั้งสละเวลาอันมีค่าช่วยตรวจงานและให้คำแนะนำการแก้ปัญหาต่างๆ และให้กำลังใจตลอดการดำเนินงานวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกประธานกรรมการสอบ รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล และอาจารย์บัณฑิตประจำกรรมการสอบ ดร.จิรภัทร์ หยกรัตนศักดิ์ ผู้พิจารณาหัวข้อและสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งให้ความกรุณาชี้แนะแนวทางในการทำงานวิจัยต่างๆ ตลอดจนวิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่คอยช่วยเหลือ และอำนวยความสะดวกในเรื่องเอกสารต่างๆ และเพื่อนๆ ทุกคนที่ให้การช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ กราบขอบพระคุณบิดา และมารดาของข้าพเจ้าผู้เป็นกำลังใจอันสำคัญที่ให้การสนับสนุนและมอบกำลังใจอันอบอุ่นให้เสมอมาตลอดการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังที่ให้สนับสนุนเรื่องทุนการศึกษาตลอด 2 ปีที่ข้าพเจ้าได้ศึกษาจนจบการศึกษา

ณัฐพล อังวัชรปการ

สัญลักษณ์

ρ	ความหนาแน่นของของไหล ($g/\mu m^3$)
e^l	ความพรุน (1)
v^l	ความเร็วของของไหลฟิซีแอล ($\mu m/s$)
p	ความดัน ($g/\mu m/s^2$)
k^{-1}	ค่าผกผันของการซึม ($1/\mu m^2$)
μ	ความหนืด ($g/\mu m/s$)
g	แรงโน้มถ่วง ($\mu m/s^2$)
v^s	ความเร็วของของแข็ง ($\mu m/s$)
e^l	คืออนุพันธ์ของความพรุนเทียบกับเวลา (1/s)

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ii
กิตติกรรมประกาศ.....	iii
สัญลักษณ์.....	iv
สารบัญ	v
สารบัญตาราง	vii
สารบัญรูปภาพ	viii
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	2
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	2
1.4 ประโยชน์ของงานวิจัย	2
1.5 ระเบียบงานวิจัย.....	2
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	4
2.1 อนุกรมเทเลอร์ (Taylor series).....	4
2.1.1 อนุกรมเทเลอร์ 1 มิติ.....	4
2.1.2 อนุกรมเทเลอร์ N มิติ.....	4
2.2 วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method).....	5
2.2.1 วิธีผลต่างจากข้างหน้าอันดับ 1 (1^{st} Order Derivative Forward Difference Method).....	6
2.2.2 วิธีผลต่างย้อนหลังอันดับ 1 (1^{st} Order Derivative Backward Difference Method).....	6
2.2.3 วิธีผลต่างศูนย์กลางอันดับ 1 (1^{st} Order Derivative Central Difference Method).....	7
2.2.4 วิธีผลต่างศูนย์กลางอันดับ 2 (2^{nd} Order Derivative Central Difference Method).....	7
2.3 วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method).....	7
2.3.1 นิวตันราฟสัน 1 มิติ.....	8
2.3.2 นิวตันราฟสัน N มิติ.....	9
2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....	13
3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์	13
3.2 วิธีผลต่างศูนย์กลางกับสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น.....	14
3.3 นิวตันราฟสัน.....	15

บทที่ 4 ผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	17
4.1 ผลเฉลยจริง	17
4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง.....	19
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น	20
บทที่ 5 สรุปผล	26
เอกสารอ้างอิง.....	26
ภาคผนวก.....	29
ประวัติผู้เขียน.....	45

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1.1 ตารางแสดงขั้นตอนของงานวิจัย.....	3
2.1 ตารางแสดงค่า x_1, x_2 และ x_3	11
3.1 ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 8 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ของฟังก์ชัน $v^s = c_8\xi^8 + c_7\xi^7 + c_6\xi^6 + c_5\xi^5 + c_4\xi^4 + c_3\xi^3 + c_2\xi^2 + c_1\xi$	14
4.1 ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขเมื่อ $h = 0.25, 0.2, 0.125, 0.1$ และ 0.0125	20
4.2 ค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1} ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°	20
4.3 ค่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าพหุนามดีกรี 1 ถึงพหุนามดีกรี 12 กับผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	23
4.4 ค่าสัมประสิทธิ์พหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° $v = c_{12}\xi^{12} + c_{11}\xi^{11} + c_{10}\xi^{10} + c_9\xi^9 + c_8\xi^8 + c_7\xi^7 + c_6\xi^6 + c_5\xi^5 + c_4\xi^4 + c_3\xi^3 + c_2\xi^2$	23

สารบัญรูปภาพ

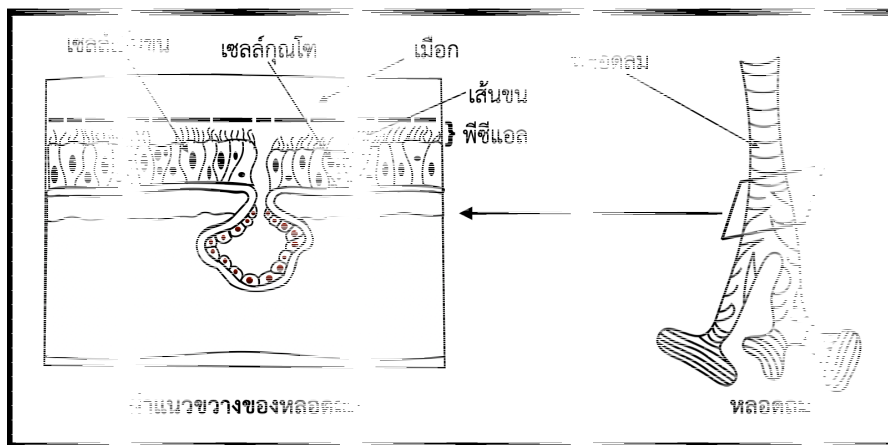
รูปที่	หน้า
1.1 หลอดกลมและชั้นพีซีแอล.....	1
1.2 (a) แสดงเส้นขนทำมุม 90° กับพื้นราบ (b) แสดงเส้นขนทำมุม θ กับพื้นราบ โดยที่ $\theta < 90^\circ$	2
2.1 การแบ่งโดเมน $[0, L]$	6
3.1 การแบ่งโดเมน $[0, a]$	15
4.1 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.25, 0.2, 0.125, 0.1, 0.025$	19
4.2 ความเร็วของเส้นขนของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°	21
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 70^\circ$ และ $h = 0.0094$	21
4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 80^\circ$ และ $h = 0.0098$	22
4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 90^\circ$ และ $h = 0.01$	22
4.6 ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 70^\circ$	24
4.7 ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 80^\circ$	24
4.8 ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 90^\circ$	25
4.9 ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°	25

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปัจจุบัน มลภาวะอากาศเป็นพิษเป็นอันตรายกับมนุษย์อย่างมาก ถ้าหากรับอากาศที่เป็นมลพิษนี้เข้าไปมาก ๆ ร่างกายของมนุษย์ก็จะเกิดการสะสมและทำให้เป็นโรคที่เกี่ยวกับระบบทางเดินหายใจ ซึ่งมนุษย์นั้นก็จะมีภูมิคุ้มกันที่มาจากกำเนิด โดยเมื่อมนุษย์รับอากาศเข้ามาในร่างกาย อวัยวะในระบบทางเดินหายใจก็จะทำการตรวจจับฝุ่นละอองขนาดเล็ก และทำการสร้างเมือกมาจับฝุ่นละอองเหล่านั้นและพัดเมือกนั้นออกจากร่างกายโดยการพัดโบกของเส้นขน ดังแสดงในรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1: หลอดลมและชั้นฟิซีแอล

รูปที่ 1.1 แสดงส่วนหนึ่งของระบบทางเดินหายใจของมนุษย์ ซึ่งรูปทางขวามือจะเป็นรูปของหลอดลมซึ่งทำหน้าที่ลำเลียงอากาศเข้ามายังปอด และรูปทางซ้ายมือจะเป็นรูปของการตัดแนวขวางของหลอดลม ซึ่งประกอบไปด้วย ชั้นฟิซีแอล เส้นขน เมือก เซลล์กุ่มโท และเซลล์เส้นขน เมื่ออากาศผ่านเข้ามาสู่หลอดลม ร่างกายก็จะตรวจจับฝุ่นละอองขนาดเล็ก โดยที่เซลล์กุ่มโทจะคอยสร้างเมือกขึ้นมาเพื่อดักจับฝุ่นละอองขนาดเล็กที่เข้ามายังร่างกายหลังจากนั้นเมือกจะเรียงตัวอยู่บริเวณปลายเส้นขนหรือเรียกว่าชั้นเมือก และเส้นขนที่อยู่ในชั้นฟิซีแอลก็จะทำการพัดพานำฝุ่นละอองที่ถูกเมือกจับนั้นออกจากร่างกาย ซึ่งในชั้นนี้ไม่ได้มีเพียงเส้นขนแต่มีของไหลที่ช่วยหล่อเลี้ยงให้เส้นขนทำงานด้วยเรียกว่าของไหลฟิซีแอล เนื่องจากว่าในชั้นฟิซีแอลประกอบด้วยของแข็งคือเส้นขนและของไหลคือของไหลฟิซีแอล ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะมองชั้นฟิซีแอลว่าเป็นชั้นที่มีรูพรุนหรือพอร์สมีเดีย (porous medium) โดยของไหลฟิซีแอลจะส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของเส้นขนและการขับเมือกออกจากร่างกาย ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหลฟิซีแอลที่เกิดจากการพัดของเส้นขนเมื่อเส้นขนทำมุมตั้งฉากกับพื้นราบและเส้นขนทำมุม θ โดยที่ θ ทำมุมน้อยกว่า 90° กับพื้นราบ ในชั้นฟิซีแอลเมื่อเส้นขนทำมุมน้อยกว่า 90° กับพื้นราบจะเกิดช่องว่างขึ้นระหว่างปลายเส้นขนและชั้นเมือกที่มีของไหลเพียงอย่างเดียวจะเรียกส่วนนั้นว่าชั้นพรีฟลูอิด ดังแสดงรูปที่ 1.2

- 2) ศึกษาสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น
- 3) ศึกษาวิธีการผลต่างอันดับและนิวตันราฟสัน
- 4) แก้ปัญหาเชิงตัวเลขของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- 5) ตรวจสอบผลลัพธ์และแก้ไข
- 6) สรุปและเขียนหนังสือวิทยานิพนธ์

ตารางที่ 1.1: ตารางแสดงขั้นตอนของงานวิจัย

กิจกรรม	ระยะเวลาในการวิจัย							
	2561		2562				2563	
	ส.ค.-ก.ย.	ต.ค.-ธ.ค.	ม.ค.-มี.ค.	เม.ย.-มิ.ย.	ก.ค.-ก.ย.	ต.ค.-ธ.ค.	ม.ค.-มี.ค.	เม.ย.-มิ.ย.
1)	←————→							
2)		←————→						
3)				←————→				
4)					←————→			
5)						←————→		
6)							←————→	

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ได้นำเสนอความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ในงานวิจัยนี้ได้ประยุกต์วิธีผลต่างอันตะกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งวิธีผลต่างอันตะเป็นการประยุกต์ของอนุกรมเทเลอร์ และจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้นำมาประยุกต์ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นสมการไม่เชิงเส้นผู้วิจัยจึงนำวิธีนิวตันราฟสันมาหาผลเฉลย โดยจะกล่าวถึงอนุกรมเทเลอร์ในหัวข้อที่ 2.1 วิธีผลต่างอันตะในหัวข้อที่ 2.2 วิธีนิวตันราฟสันในหัวข้อที่ 2.3 และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในหัวข้อที่ 2.4

2.1 อนุกรมเทเลอร์ (Taylor series)

ในงานวิจัยนี้ได้ประยุกต์วิธีผลต่างอันตะซึ่งมีพื้นฐานมาจากอนุกรมเทเลอร์ หัวข้อนี้จะกล่าวถึงอนุกรมเทเลอร์ 1 มิติ และ N มิติ

2.1.1 อนุกรมเทเลอร์ 1 มิติ

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ ถึงอันดับที่ n จะกล่าวว่า $f(x)$ เป็นพหุนามเทเลอร์ดีกรี n ของ f กระจายรอบจุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x - a)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n \quad (2.1)$$

เมื่อ $|x - a|$ น้อยกว่ารัศมีของการลู่อเข้า

2.1.2 อนุกรมเทเลอร์ N มิติ

อนุกรมเทเลอร์ N มิติ สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^{n_1} \dots (x_N - a_N)^{n_N}}{n_1! \dots n_N!} \left(\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_N} f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_N^{n_N}} \right) (a_1, \dots, a_N) \\ &= f(a_1, \dots, a_N) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f(a_1, \dots, a_N)}{\partial x_j} (x_j - a_j) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_N)}{\partial x_j \partial x_k} (x_j - a_j)(x_k - a_k) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial^3 f(a_1, \dots, a_N)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} (x_j - a_j)(x_k - a_k)(x_i - a_i) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

ตัวอย่าง อนุกรมเทเลอร์ n มิติ ให้ $f(x, y) = x^2 + 3xy^2$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x และ y สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทเลอร์อันดับสองที่จุด $(1, 2)$ ได้

$$f(x, y) = f(1, 2) + (x - 1)f_x(1, 2) + (y - 2)f_y(1, 2) + \frac{1}{2!} \left((x - 1)^2 f_{xx}(1, 2) + 2(x - 1)(y - 2)f_{xy}(1, 2) + (y - 2)^2 f_{yy}(1, 2) \right) \quad (2.3)$$

จาก $f(x, y) = x^2 + 3xy^2$ จะได้

$$f_x(x, y) = 2x + 3y^2 \quad (2.4)$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad (2.5)$$

$$f_y(x, y) = 6xy \quad (2.6)$$

$$f_{yy}(x, y) = 6x \quad (2.7)$$

$$f_{xy}(x, y) = 6y \quad (2.8)$$

ทำการแทนค่าจุด $x = 1$ และ $y = 2$ จะได้ว่า

$$f(1, 2) = (1)^2 + 3(2)^2 = 1 + 12 = 13 \quad (2.9)$$

$$f_x(1, 2) = 2 + 12 = 14 \quad (2.10)$$

$$f_{xx}(1, 2) = 2 \quad (2.11)$$

$$f_y(1, 2) = 6(1)(2) = 12 \quad (2.12)$$

$$f_{yy}(1, 2) = 6(1) = 6 \quad (2.13)$$

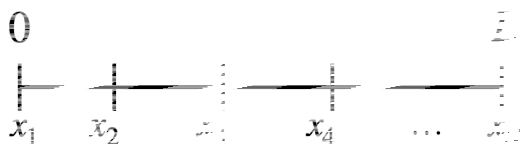
$$f_{xy}(1, 2) = 6(2) = 12 \quad (2.14)$$

แทนค่าสมการที่ (2.9)–(2.15) ลงในสมการที่ (2.3) จะได้

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 13 + (x - 1)14 + (y - 2)12 + \frac{1}{2!} \left((x - 1)^2 2 + 2(x - 1)(y - 2)12 + (y - 2)^2 6 \right) \\ &= 13 + 14(x - 1) + 12(y - 2) + \left((x - 1)^2 + 12(x - 1)(y - 2) + 3(y - 2)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2 วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method)

วิธีผลต่างอันตะเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำวิธีผลต่างอันตะมาประยุกต์ใช้กับสมการเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แม่นยำและถูกต้อง ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีผลต่างข้างหน้า (Forward Difference Method) วิธีผลต่างย้อนหลัง (Backward Difference Method) และวิธีผลต่างศูนย์กลาง (Central Difference Method)



รูปที่ 2.1: การแบ่งโดเมน $[0, L]$

จากรูปที่ 2.1 เป็นการแบ่งโดเมนในช่วง $[0, L]$ โดยระยะห่างของ x_i และ x_{i+1} มีค่าเท่ากัน คือ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, N$

2.2.1 วิธีผลต่างจากข้างหน้าอันดับ 1 (1st Order Derivative Forward Difference Method)

จากอนุกรมเทเลอร์ในสมการที่ (2.1) ทำการแทนค่า $x = x_{i+1}$ และ $a = x_i$ ทำให้ได้

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots \quad (2.16)$$

จากสมการที่ (2.16) ให้ $h = x_{i+1} - x_i$ จะได้ว่า

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots \quad (2.17)$$

จากสมการ (2.17) เขียนใหม่ได้เป็น

$$f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_i) - \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \dots \quad (2.18)$$

จากสมการที่ (2.18) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (2.19)$$

สมการที่ (2.19) เรียกว่าผลต่างจากข้างหน้าของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $f(x)$ โดยที่ $O(h)$ คือค่าความคลาดเคลื่อนอันดับหนึ่ง

2.2.2 วิธีผลต่างย้อนหลังอันดับ 1 (1st Order Derivative Backward Difference Method)

จากอนุกรมเทเลอร์ในสมการที่ (2.1) ทำการแทนค่า $x = x_{i-1}$ และ $a = x_i$ ทำให้ได้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 + \dots \quad (2.20)$$

จากสมการที่ (2.20) ให้ $h = x_i - x_{i-1}$ จะได้ว่า

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots \quad (2.21)$$

จากสมการ (2.21) เขียนใหม่ได้เป็น

$$f'(x_i)h = -f(x_{i-1}) + f(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots \quad (2.22)$$

จากสมการที่ (2.22) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h) \quad (2.23)$$

สมการที่ (2.23) เรียกว่าผลต่างย้อนหลังของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $f(x)$ โดยที่ $O(h)$ คือค่าความคลาดเคลื่อนอันดับหนึ่ง

2.2.3 วิธีผลต่างศูนย์กลางอันดับ 1 (1st Order Derivative Central Difference Method)

นำสมการที่ (2.17) ลบสมการที่ (2.21) จะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + \frac{2f'''(x_i)h^3}{3!} + \dots \quad (2.24)$$

นำสมการที่ (2.24) มาเขียนใหม่ได้เป็น

$$2f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) - \frac{2f'''(x_i)h^3}{3!} + \dots \quad (2.25)$$

จากสมการที่ (2.25) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (2.26)$$

สมการที่ (2.26) เรียกว่าผลต่างศูนย์กลางของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $f(x)$ โดยที่ $O(h^2)$ คือค่าความคลาดเคลื่อนอันดับสอง

2.2.4 วิธีผลต่างศูนย์กลางอันดับ 2 (2nd Order Derivative Central Difference Method)

นำสมการที่ (2.17) บวกสมการที่ (2.21) จะได้

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \frac{2f^{(4)}(x_i)h^4}{4!} + \dots \quad (2.27)$$

นำสมการที่ (2.27) มาเขียนใหม่ได้เป็น

$$f''(x_i)h^2 = f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i) - \frac{2f^{(4)}(x_i)h^4}{4!} + \dots \quad (2.28)$$

จากสมการที่ (2.28) จะได้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (2.29)$$

สมการที่ (2.29) เรียกว่าผลต่างศูนย์กลางของอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x)$ โดยที่ $O(h^2)$ คือค่าความคลาดเคลื่อนอันดับสอง

2.3 วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

เป็นวิธีหนึ่งในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้วิธีนิวตันราฟสันในการแก้ปัญหาที่สมการพจน์ที่ไม่เชิงเส้น โดยหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีนิวตันราฟสันแบบ 1 มิติ และ N มิติ

2.3.1 นิวตันกราฟสัน 1 มิติ

วิธีนิวตันกราฟสันเป็นวิธีที่ใช้ในการหาค่ารากของสมการไม่เชิงเส้น $y(x) = 0$ โดยเริ่มจากสูตรสมการเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ณ จุด $(x, f(x_0))$ คือ

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.30)$$

หรือจากอนุกรมเทเลอร์

$$f(x) = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad f(x) = 0 \quad (2.31)$$

เนื่องจากสมการที่พิจารณาคือ $y(x) = 0$ ดังนั้นสมการที่ (2.30) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.32)$$

โดยที่ $f'(x_0) \neq 0$ จากสมการที่ (2.32) สุ่มค่า x_0 เพื่อหาค่า x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.33)$$

ทำการหาค่า x_1 เพื่อหาค่า x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.34)$$

ดังนั้นจะได้สมการ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.35)$$

โดยที่ $f'(x_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots$

จะหยุดการทำซ้ำเมื่อ $|x_{i+1} - x_i| < \text{tol}$ เมื่อ tol คือจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยมากๆ เช่น 10^{-5}

ตัวอย่าง จงใช้วิธี นิวตันกราฟสัน หาค่าตอบของสมการต่อไปนี้

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad (2.36)$$

ดังนั้น

$$f(x) = x^3 - x - 1 \quad (2.37)$$

และ

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad (2.38)$$

กำหนดให้ $\text{tol} = 10^{-4}$ จากสมการที่ (2.33) จะได้

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.39)$$

โดยที่ $f'(x_0) \neq 0$ และกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 1$ จะได้

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \quad (2.40)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \quad (2.41)$$

$$= 1.5 \quad (2.42)$$

เนื่องจาก $|x_0 - x_1| = 0.5 > \text{tol}$ ทำซ้ำรอบที่สองเพื่อหาค่า x_2 จะได้

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.43)$$

จะได้ค่า $x_2 = 1.3478$ ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่า $|x_i - x_{i+1}| < \text{tol}$

$$x_3 = 1.3252$$

$$x_4 = 1.3247$$

$$x_5 = 1.3247$$

จะเห็นได้ค่าของ $|x_4 - x_5| < 10^{-4}$ ดังนั้นคำตอบจึงเป็น 1.3247 โดยมีการทำซ้ำ 5 รอบ

2.3.2 นิวตันกราฟสัน N มิติ

พิจารณาระบบสมการ N สมการ N ตัวแปร และสมการที่อยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \\ &\vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

จากสมการที่ (2.44) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

โดยที่ $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

จากอนุกรมเทเลอร์สมการที่ (2.2) จะได้

$$f_i(x) = f_i(k) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i(k)}{\partial x_j} h_j + O(h^2) \approx f_i(k) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i(k)}{\partial x_j} h_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.46)$$

โดยที่ $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$, $h_j = (x_j - k_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_N(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(k)}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N(k)}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

จากสมการที่ (2.47) จะได้เมทริกซ์จาโคเบียนของ $f(x)$ คือ

$$JF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(k)}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N(k)}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

จากสมการที่ (2.45) และสมการที่ (2.47) จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(k)}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(k)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N(k)}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_N(k) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีการนิวตันกราฟเส้น หาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3 + 1 = 0 \\ f_2(x) &= x_1x_2^2 - x_1 - 3x_2 + x_2x_3 + 2 = 0 \\ f_3(x) &= x_1x_3^2 - 3x_3 + x_2x_3^2 + x_1x_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

จากสมการที่ (2.50) จะได้เมทริกซ์จาโคเบียนของฟังก์ชัน f_i , $i = 1, 2, 3$ คือ

$$JF(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & 2x_2 & -1 \\ x_2^2 - 1 & 2x_1x_2 - 3 + x_3 & x_2 \\ x_3^2 + x_2 & x_3^2 + x_1 & 2x_1x_3 - 3 + 2x_2x_3 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

จากสมการที่ (2.49) จะได้

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & 2x_2 & -1 \\ x_2^2 - 1 & 2x_1x_2 - 3 + x_3 & x_2 \\ x_3^2 + x_2 & x_3^2 + x_1 & 2x_1x_3 - 3 + 2x_2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \\ h_3^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x^{(0)}) \\ f_2(x^{(0)}) \\ f_3(x^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

โดยที่ $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ คือค่าเริ่มต้นของตัวแปร (x_1, x_2, x_3) และ $h_i^{(0)} = x_i^{(1)} - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, 3$ หรือ $x_i^{(1)} = x_i^{(0)} + h_i^{(0)}$ เมื่อ $x_i^{(1)}$ คือผลเฉลยที่ได้ในรอบที่ 1

กำหนดค่าเริ่มต้นให้ $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 2$ และ $x_3^{(0)} = 3$ แทนค่าลงในสมการที่ (2.52) จะได้

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & 2x_2 & -1 \\ x_2^2 - 1 & 2x_1x_2 - 3 + x_3 & x_2 \\ x_3^2 + x_2 & x_3^2 + x_1 & 2x_1x_3 - 3 + 2x_2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \\ h_3^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

จากสมการที่ (2.53) จะได้

$$\begin{bmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \\ h_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8974 \\ -0.3590 \\ -0.4359 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

เนื่องจาก $h_i^{(0)} > \text{tol}$ สำหรับบางค่า i จะนำค่า $h_i^{(0)}, i = 1, 2, 3$ ที่ได้มาบวกกับค่าเริ่มต้นรอบแรกเพื่อมาเป็นค่าเริ่มต้นในรอบถัดไป ดังนั้นจะได้ค่าเริ่มต้นในรอบถัดไปคือ $x_1^{(1)} = 0.1026, x_2^{(1)} = 1.6410$ และ $x_3^{(1)} = 2.5641$ ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าค่า $h_i^{(j)}, i = 1, 2, 3$ เมื่อ j คือจำนวนการทำซ้ำที่ได้มีค่าน้อยกว่า tol ซึ่งสามารถเขียนสรุปผลได้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1: ตารางแสดงค่า x_1, x_2 และ x_3

รอบที่	x_1	x_2	x_3
0	1.0000	2.0000	3.0000
1	0.1026	1.6410	2.5641
2	1.5206	1.4111	0.1986
3	1.9412	0.7713	0.8947
4	1.0674	1.1912	0.4835
5	1.2683	0.9518	0.8803
6	0.9590	1.0338	0.9681
7	1.0017	1.0001	0.9972
8	1.0000	1.0000	1.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000

สังเกตว่า $|x_i^{(9)} - x_i^{(8)}| < 10^{-5}$ ซึ่งมีการทำซ้ำ 9 รอบ

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการหาความเร็วของของไหลพิซีแอลที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้พัฒนามาจากแบบจำลองของ K. Chamsri. [5] ซึ่งเป็นการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของของไหลในชั้นพิซีแอลโดยใช้ทฤษฎีผสมแบบไฮบริด (Hybrid Mixture Theory) กับสมการที่ได้จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม [3] ซึ่งรูปแบบของสมการเป็นสมการบริงก์แมนในระดับมหภาค (macroscopic scale) ซึ่งเป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลอันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขนหลายเส้น ต่อมา K. Chamsri. [6] ได้ประยุกต์วิธีขึ้นประกอบอันตะแบบผสม (mixed finite element method) กับสมการบริงก์แมนแบบ n มิติ K. Chamsri. [7] ได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยของสมการบริงก์แมน (Brinkman equation) มีเพียงผลเฉลยเดียว T. Kasamwan และ K. Wuttanachamsri [12] ได้หาความเร็วของของไหลในชั้นเพอริซีเลียรีด้วยสมการบริงก์แมนที่ขึ้นอยู่กับเวลาและหาผลเฉลยโดยใช้วิธีขึ้นประกอบอันตะ จากงานวิจัยของ K. Wuttanachamsri [15] ได้ใช้สมการบริงก์แมนในการหาความเร็วของของไหลพิซีแอลแต่ผู้วิจัยสังเกตว่าผลเฉลยที่ได้ไม่เชิงเส้นและความเร็วของเส้นขนที่พัดโบกไปมาในลักษณะคลื่นเมตาโครนอล (metachronal wave) มีผลต่อความเร็วของของไหลพิซี

แอลอย่างมาก ดังนั้นงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการไหลของของไหลพีซีแอลด้วยสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น สำหรับสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นนั้นได้มีนักวิจัยศึกษาตั้งตัวอย่างต่อไปนี้ G.N. Gatica และคณะ [10] ได้นำเสนอแบบจำลองบริงก์แมนไม่เชิงเส้น (nonlinear Brinkman model) กับเงื่อนไขค่าขอบแบบผสม (mixed boundary conditions) โดยใช้วิธีการขึ้นประกอบอันตะแบบผสม (mixed finite element method) B.K. Jha และ M.L. Kaurangini [11] ได้วิเคราะห์การประมาณค่าของของไหลบนโดเมนที่เป็นรูพรุนโดยใช้แบบจำลองดาร์ซีแบบขยายบริงก์แมนฟอร์ดไฮเมอร์ไม่เชิงเส้น (nonlinear Brinkman-Forchheimer extended Darcy model) G. Çelikten และ E. N. AKSAN [4] ได้ใช้วิธีผลต่างอันตะในการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ (Burgers' Equation) วิธีหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นผู้วิจัยใช้วิธีการนิวตันราฟสันซึ่งได้มีการประยุกต์ในงานวิจัยหลายท่านเช่น S. Abbasbandy และ B. Asady [1] ได้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการไม่เชิงเส้นแบบคลุมเครือ (fuzzy nonlinear) S. Abbasbandy และ R. Ezzati [2] ได้หาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นแบบคลุมเครือ (fuzzy nonlinear system) โดยใช้วิธีการของนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) C. Chun [9] ได้หาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นโดยใช้วิธีการทำซ้ำของนิวตันราฟสัน งานวิจัยนี้ผู้วิจัยจึงได้ใช้วิธีนิวตันราฟสันในส่วนที่ไม่เชิงเส้นควบคู่กับวิธีผลต่างอันตะซึ่งทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นมีความถูกต้องแม่นยำในการศึกษาความเร็วของของไหลที่อยู่ในชั้นพีซีแอล

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ซึ่งในหัวข้อที่ 3.1 ได้อธิบายที่มาของแบบจำลอง หัวข้อที่ 3.2 ได้ประยุกต์วิธีการของวิธีผลต่างศูนย์กลางกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และหัวข้อที่ 3.3 ได้ประยุกต์ใช้วิธีนิวตันราฟสันกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในพจน์ที่ไม่เชิงเส้นของสมการ

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายปัญหาการไหลของของไหลในชั้นพีซีแอลคือ สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นในระดับมหภาคที่การเคลื่อนที่ของเส้นขนหลายเส้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ของของไหลพีซีแอล [5]

$$\rho(v^l \cdot \nabla v^l) + \mu k^{-1}(\epsilon^l v^l - \epsilon^l v^s) + \nabla p - \mu(\Delta v^l + \nabla(\nabla \cdot v^l)) = \rho g \quad (3.1)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของของไหลพีซีแอล ϵ^l คือความพรุน v^l คือความเร็วของของไหลพีซีแอล p คือความดัน k^{-1} คือค่าผกผันของการซึมผ่าน μ คือความหนืด g คือแรงโน้มถ่วง และ v^s คือความเร็วของของแข็ง (เส้นขน) และสมการที่ได้จากกฎอนุรักษ์มวล [14] คือ

$$\nabla \cdot \epsilon^l v^l = f, \quad (3.2)$$

เมื่อ $f = \frac{\epsilon^l}{(1 - \epsilon^l)} + \nabla \cdot \epsilon^l v^s$ และ ϵ^l คืออนุพันธ์ของความพรุนเทียบกับเวลา และค่าของ $\epsilon^l = \frac{-|v|}{\xi} \frac{\partial \epsilon^l}{\partial \theta}$ [15] เมื่อ ξ คือความยาวของเส้นขนและ $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเส้นขนกับพื้นราบ เนื่องจากว่าในงานวิจัยนี้ให้ค่า ϵ^l เป็นค่าคงที่ จากสมการที่ (3.1) นำ ϵ^l คูณทั้งสมการจะได้

$$\epsilon^l \rho(v^l \cdot \nabla v^l) + \epsilon^l \mu k^{-1}(\epsilon^l v^l - \epsilon^l v^s) + \epsilon^l \nabla p - \epsilon^l \mu(\Delta v^l + \nabla(\nabla \cdot v^l)) = \epsilon^l \rho g, \quad (3.3)$$

กำหนดให้ $v = \epsilon^l v^l$ และแทนค่าสมการที่ (3.2) ในสมการที่ (3.1) จะได้

$$\frac{\rho}{\epsilon^l}(v \cdot \nabla v) + \epsilon^l \mu k^{-1} v - \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} v^s + \epsilon^l \nabla p - \mu \Delta v - \mu \nabla(\nabla \cdot v) = \rho \epsilon^l g. \quad (3.4)$$

เนื่องจาก $\nabla \cdot v = f$ หรือสำหรับโดเมน 1 มิติ $\frac{dv}{dy} = f$ ดังนั้น $\nabla(\nabla \cdot v) = \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{df}{dy}$ และเนื่องจากความเร็วของของไหลจะเปลี่ยนตามความเร็วของเส้นขน ซึ่งความเร็วของเส้นขนจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนเส้นขนหรือแกน y นั่นคือความเร็วที่จุดปลายของเส้นขนมีความเร็วมากที่สุดและลดลงมาเป็นลำดับจนถึงโคนของเส้นขน และของไหลเคลื่อนที่ในแกน x ดังนั้นความเร็วของของไหลพีซีแอลจะเปลี่ยนไปเมื่อ y เปลี่ยนไปแต่จะมีค่าเท่ากันที่จุด y เดียวกันสำหรับทุกค่าบนแกน x ดังนั้น v^l ขึ้นอยู่กับ y นั่นคือ $v^l = v^l(y)$ แต่เนื่องจากของไหลไหลในแนวพื้นราบหรือแกน x ดังนั้นความดันจึงขึ้นอยู่กับแกน x ซึ่งในงานวิจัยนี้สมมติการเปลี่ยนแปลงของความดัน $\frac{dp}{dx}$ เป็นค่าคงที่ และสามารถเขียนสมการ (3.4) ใน 1 มิติได้เป็น

$$\frac{\rho}{\epsilon^l} v \frac{dv}{dy} + \epsilon^l \mu k^{-1} v - \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} v^s + \epsilon^l \frac{dp}{dx} - \mu \frac{d^2 v}{dy^2} - \mu \frac{df}{dy} = \rho \epsilon^l g, \quad 0 < y < a \quad (3.5)$$

ทำการจัดรูปสมการให้ตัวแปรที่ทราบค่าที่อยู่ทางขวามือของสมการจะได้

$$\frac{\rho}{\epsilon^l} v \frac{dv}{dy} + \epsilon^l \mu k^{-1} v - \mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \mu (\epsilon^l)^2 k^{-1} v^s - \epsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho \epsilon^l g, \quad 0 < y < a \quad (3.6)$$

สมการที่ (3.6) จะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ v ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ y เท่านั้น และ a แทนความยาวของเส้นขน ค่าของความเร็วของของแข็ง v^s นั้นแทนด้วยสมการพหุนามดีกรี 8 [15] ที่ขึ้นอยู่กับความยาวของเส้นขน $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ โดย K. Wuttanachamsri และ L. Schreyer [15] ที่ได้ทำการประมาณค่า v^s จากผลการทดลองของ Sear และคณะ [13] ความเร็วของของแข็งที่เป็นของพหุนามดีกรี 8 ที่ขึ้นอยู่กับความยาวของเส้นขน ξ [15] คือ

$$v^s = c_8 \xi^8 + c_7 \xi^7 + c_6 \xi^6 + c_5 \xi^5 + c_4 \xi^4 + c_3 \xi^3 + c_2 \xi^2 + c_1 \xi + c_0 \quad (3.7)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ แสดงในตารางที่ 3.1 ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ขอบล่างของความเร็วของของไหลพีซีแอลคือ $v(0) = 0$ และค่าขอบบนของความเร็วของของไหลพีซีแอล $v(a)$ มีค่าเป็น 135, 185 และ 215 เมื่อเส้นขนทำมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบตามลำดับ จากสมการที่ (3.6) เมื่อแทนค่าความเร็วของของแข็งสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\epsilon^l} v \frac{dv}{dy} + \epsilon^l \mu k^{-1} v - \mu \frac{d^2 v}{dy^2} &= \mu (\epsilon^l)^2 k^{-1} c_8 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^8 + \mu (\epsilon^l)^2 k^{-1} c_7 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^7 + \dots \\ &+ \mu (\epsilon^l)^2 k^{-1} c_2 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^2 + \mu (\epsilon^l)^2 k^{-1} c_1 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right) + \mu (\epsilon^l)^2 k^{-1} c_0 - \epsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho \epsilon^l g, \quad 0 < y < a \end{aligned} \quad (3.8)$$

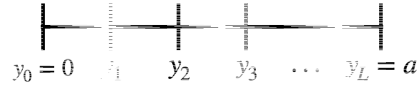
ตารางที่ 3.1: ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 8 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ของฟังก์ชัน

$$v^s = c_8 \xi^8 + c_7 \xi^7 + c_6 \xi^6 + c_5 \xi^5 + c_4 \xi^4 + c_3 \xi^3 + c_2 \xi^2 + c_1 \xi$$

ค่าสัมประสิทธิ์	ค่ามุม θ		
	70°	80°	90°
$10^5 \times$			
c_8	-0.4987	-0.3648	-0.5386
c_7	2.1268	1.5687	2.2148
c_6	-3.7102	-2.7659	-3.7309
c_5	3.4021	2.5751	3.3198
c_4	-1.7529	-1.3584	-1.6788
c_3	0.5012	0.4022	0.4803
c_2	-0.0717	-0.0593	-0.0694
c_1	0.0049	0.0044	0.0050

3.2 วิธีผลต่างศูนย์กลางกับสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น

จากสมการที่ (3.8) สำหรับพจน์ที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของสมการที่มีอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ จะสามารถประยุกต์ใช้วิธีการผลต่างอันตะกลางกับพจน์ดังกล่าว โดยทำการแบ่งโดเมน $[0, a]$ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1: การแบ่งโดเมน $[0, a]$

โดยที่ระยะห่างระหว่าง y_i และ y_{i+1} มีค่าเท่ากันคือ $h = y_{i+1} - y_i$ กำหนดให้ $v_i = v(y_i)$ ดังนั้น

$$\epsilon^l \mu k^{-1} v = \epsilon^l \mu k^{-1} v_i \quad (3.9)$$

$$\frac{\rho}{\epsilon^l} v \frac{dv}{dy} = \frac{\rho}{\epsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1})}{2h} \quad (3.10)$$

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} \quad (3.11)$$

โดยที่ $i = 1, 2, 3, \dots, L - 1$ แทนค่าสมการที่ (3.9) สมการที่ (3.10) และสมการที่ (3.11) ในสมการที่ (3.8) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\epsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1}))}{2h} + \epsilon^l \mu k^{-1} v_i - \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} &= \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_8 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^8 + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_7 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^7 \\ + \dots + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_2 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^2 + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_1 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right) + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_0 - \epsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho \epsilon^l g, \quad 0 < y < a \end{aligned} \quad (3.12)$$

โดยที่พจน์ทางขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า สังเกตว่าพจน์ที่ 1 ของสมการที่ (3.12) เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ในการหาผลเฉลยของพจน์ดังกล่าวผู้วิจัยจะใช้วิธีการนิวตันราฟสันแบบ n มิติ ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.3 นิวตันราฟสัน

เนื่องจากสมการที่ (3.12) เป็นสมการไม่เชิงเส้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการนิวตันราฟสัน n มิติในการหาผลเฉลย สังเกตว่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสมการที่ (3.12) คือ v_i โดยที่ $i = 1, 2, 3, \dots, L - 1$ จึงกำหนดให้

$$\begin{aligned} f_i(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1}) &= \frac{\rho}{\epsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1}))}{2h} + \epsilon^l \mu k^{-1} v_i - \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} \\ &\quad - (\mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_8 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^8 + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_7 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^7 + \dots + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_2 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right)^2 \\ &\quad + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_1 \left(\frac{y}{\sin \theta}\right) + \mu(\epsilon^l)^2 k^{-1} c_0 - \epsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho \epsilon^l g) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ดังนั้น

$$f_i(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1}) = 0 \quad (3.14)$$

จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์คือ

$$JF(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

จากสมการที่ (2.49) จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1^{(k)} \\ \Delta v_2^{(k)} \\ \Delta v_3^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta v_{L-1}^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(V^{(k)}) \\ f_2(V^{(k)}) \\ f_3(V^{(k)}) \\ \vdots \\ f_{L-1}(V^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

หรือสามารถเขียนในรูปสมการ

$$A(V^{(k)})X^{(k)} = B(V^{(k)}) \quad (3.17)$$

เมื่อ

$$A(V^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_1(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_2(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_3(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_3} & \dots & \frac{\partial f_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \end{bmatrix}$$

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta v_1^{(k)} \\ \Delta v_2^{(k)} \\ \Delta v_3^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta v_{L-1}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B(V^{(k)}) = - \begin{bmatrix} f_1(V^{(k)}) \\ f_2(V^{(k)}) \\ f_3(V^{(k)}) \\ \vdots \\ f_{L-1}(V^{(k)}) \end{bmatrix}$$

โดยที่ $V^{(k)} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1})^{(k)}$ เมื่อ $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1})^{(k)}$ คือ $(v_1, v_2, \dots, v_{L-1})$ ที่ได้จากการทำซ้ำ k รอบโดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots$ และ $\Delta v_i^{(k)} = (v_i)^{(k+1)} - (v_i)^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, L-1$ จากวิธีนี้เริ่มต้นกราฟสันจะทำการสุ่มค่าเริ่มต้น $V^{(0)}$ และทำการทำซ้ำจนกว่าผลเฉลยจะลู่เข้าหรือค่าคลาดเคลื่อน $\|\Delta v_i^{(k)}\| \leq \text{tol}$ สำหรับทุกค่า i เมื่อ tol มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยมาก ๆ เช่น 10^{-5} จึงได้ $V^{(k+1)} = V^{(k)} + X^{(k)}$ เป็นผลเฉลยที่ได้ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ

บทที่ 4

ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในบทนี้จะเสนอวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีผลต่างอันดับสองควบคู่กับวิธีนิวตันกราฟในพจน์ที่ไม่เชิงเส้นและเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้นั้น ผู้วิจัยจะหาผลเฉลยจริงโดยใช้วิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเพื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลข การหาผลเฉลยจริงในหัวข้อที่ 4.1 ซึ่งจะเป็นการหาผลเฉลยจริงของสมการเบริงค์แมนโดยใช้วิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง ผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริงได้เปรียบเทียบความถูกต้องในหัวข้อ 4.2 และผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบริงค์แมนไม่เชิงเส้นในหัวข้อที่ 4.3

4.1 ผลเฉลยจริง

เนื่องจากสมการที่ผู้วิจัยนำมาใช้คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้ ผู้วิจัยจะทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยจริงที่ตัดพจน์ที่ไม่เชิงเส้นออกก่อนและทำการเทียบผลที่ได้กับผลเฉลยจริง เนื่องจากสมการของผลเฉลยจริงเป็นสมการเชิงเส้น ผู้วิจัยจึงได้จัดรูปของสมการ (3.12) ให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\frac{dp}{dx} = -\mu k^{-1}v + \frac{\mu}{\epsilon^l} \frac{d^2v}{dy^2}. \quad (4.1)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบคือ

$$v(0) = 0 \quad \text{และ} \quad v(1) = 1,$$

จากสมการที่ (4.1) หาผลเฉลยทั่วไปด้วยวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง จะได้สมการช่วยคือ

$$\begin{aligned} -\mu k^{-1} + \frac{\mu}{\epsilon^l} x^2 &= 0 \\ \frac{\mu}{\epsilon^l} x^2 &= \mu k^{-1} \\ x^2 &= \epsilon^l k^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

จากสมการที่ (4.2) จะได้ว่า

$$x = \pm \sqrt{\epsilon^l k^{-1}}. \quad (4.3)$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$v_c = c_1 e^{y\sqrt{\epsilon^l k^{-1}}} + c_2 e^{-y\sqrt{\epsilon^l k^{-1}}}. \quad (4.4)$$

ต่อไปจะทำการหาผลเฉลยเฉพาะโดยกำหนดให้

$$v = C \quad (4.5)$$

ดังนั้น

$$\frac{dv}{dy} = 0 \quad (4.6)$$

และ

$$\frac{d^2v}{dy^2} = 0 \quad (4.7)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ และแทนค่าสมการที่ (4.5) – (4.7) ในสมการที่ (4.1) จะได้

$$\frac{dp}{dx} = -\mu k^{-1} C \quad (4.8)$$

$$C = -\frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx}. \quad (4.9)$$

จะได้ว่า

$$v_p = -\frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx}. \quad (4.10)$$

เนื่องจากว่า

$$v(y) = v_c + v_p \quad (4.11)$$

ดังนั้นแทนค่าสมการที่ (4.4) และสมการที่ (4.10) ในสมการที่ (4.11) จะได้

$$v(y) = c_1 e^{y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} + c_2 e^{-y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx}. \quad (4.12)$$

หาค่า c_1 และ c_2 โดยแทนเงื่อนไขค่าขอบลงในสมการที่ (4.12) จะได้

$$v(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (4.13)$$

และ

$$v(a) = c_1 e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} + c_2 e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} = 1 \quad (4.14)$$

จากสมการที่ (4.13) และสมการที่ (4.14) จะได้

$$c_1 = \frac{-1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} + \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} \left(\frac{e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - 1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} \right) + \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} \quad (4.15)$$

และ

$$c_2 = \frac{1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} - \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} \left(\frac{e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - 1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} \right). \quad (4.16)$$

แทนค่าสมการที่ (4.15) และสมการที่ (4.16) ในสมการที่ (4.12) จะได้

$$\begin{aligned} v(y) = & \left[\frac{1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} + \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} \left(\frac{e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - 1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} \right) + \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} \right] e^{y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} \\ & + \left[\frac{1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} - \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} \left(\frac{e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - 1}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} \right) \right] e^{-y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

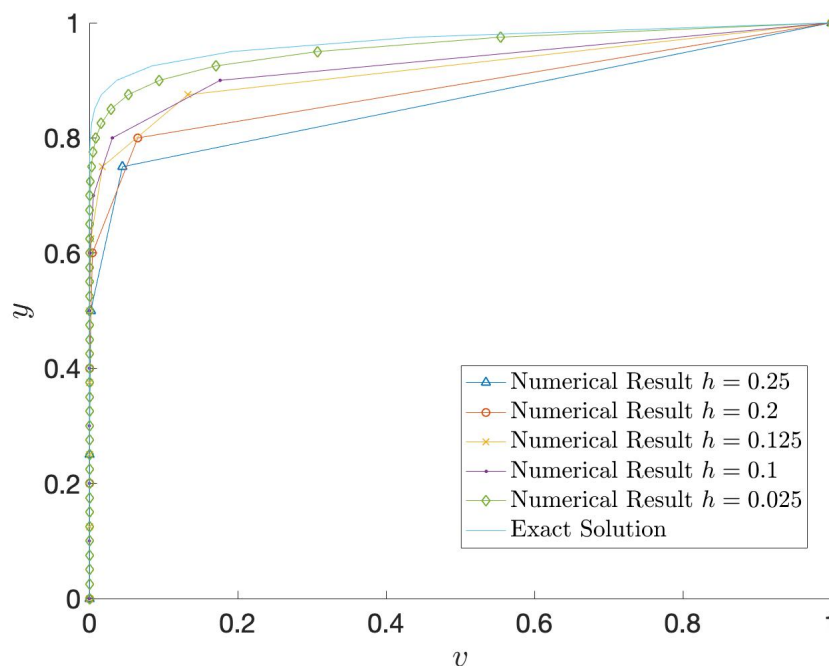
จัดรูปสมการที่ (4.17) จะได้

$$v(y) = \left(\frac{e^{-y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} \right) + \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} \left(\frac{e^{(y+a)\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{(a-y)\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} + e^{-y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}}{e^{-a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - e^{a\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}}} \right) + \frac{1}{\mu k^{-1}} \frac{dp}{dx} (e^{y\sqrt{\varepsilon^l k^{-1}}} - 1). \quad (4.18)$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยจริงของสมการบริงก์แมน (4.1)

4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง

ในการตรวจสอบผลเฉลยเชิงตัวเลขผู้วิจัยเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการที่ (4.1) กับผลเฉลยจริงสมการที่ (4.18) ซึ่งเราจะพิจารณาในกรณีของเส้นขนทำมุม $\theta = 90^\circ$ โดยกำหนดให้ k^{-1} ที่มุม $\theta = 90^\circ$ มีค่าเป็น $1/0.0024$, $\frac{dp}{dx} = 0$, $\mu = 3 \times 10^{-6}$ และ $h = 0.5, 0.2$ และ 0.1 ผลเฉลยที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.1 ซึ่งในปัญหาจริงเส้นขนจะขนานกับแกน y ดังนั้นผู้วิจัยจึงให้ตัวแปรต้น y เป็นแกนในแนวดิ่งเพื่อสะดวกในการตรวจสอบความเร็วของของไหลฟิซีแอล นั่นคือที่ $y = 0$ คือบริเวณโคนของเส้นขน และ $y = 1$ คือบริเวณปลายเส้นขน สังเกตว่าความเร็วของของไหลฟิซีแอลมีความเร็วมากที่สุดที่ปลายของเส้นขนและมีความเร็วลดลงมาเป็นลำดับจนถึงโคนของเส้นขนซึ่งสอดคล้องกับปัญหาที่พิจารณา รูปที่ 4.1 แสดงว่าเมื่อ h มีค่าน้อยลงผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้คู่เข้าหาผลเฉลยจริง โดยแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขเมื่อ $h = 0.25, 0.2, 0.125, 0.1$ และ 0.0125 ในตารางที่ 4.1



รูปที่ 4.1: ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.25, 0.2, 0.125, 0.1, 0.025$

ตารางที่ 4.1: ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขเมื่อ

$$h = 0.25, 0.2, 0.125, 0.1 \text{ และ } 0.0125$$

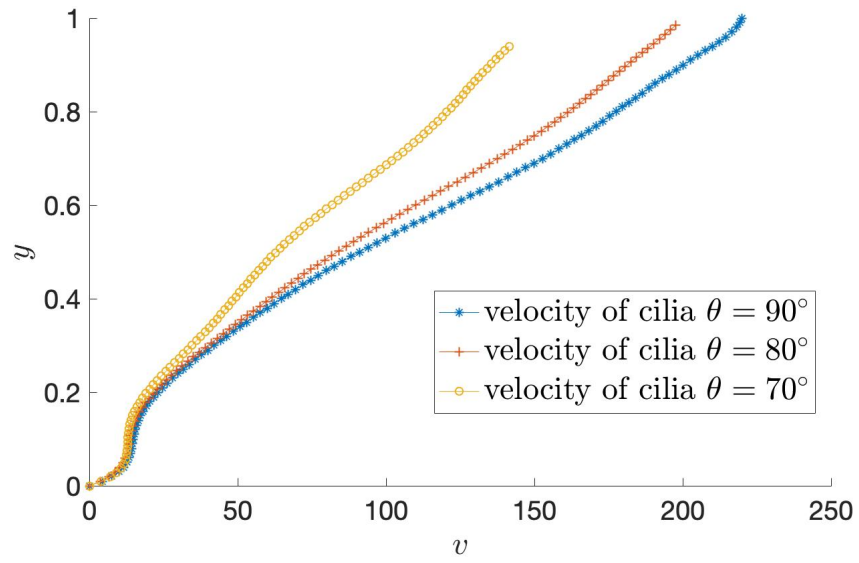
h	ค่าความคลาดเคลื่อน
0.25	0.0444
0.2	0.0347
0.125	0.0274
0.1	0.0180
0.0125	0.0024

4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการบริงค์แมนไม่เชิงเส้น

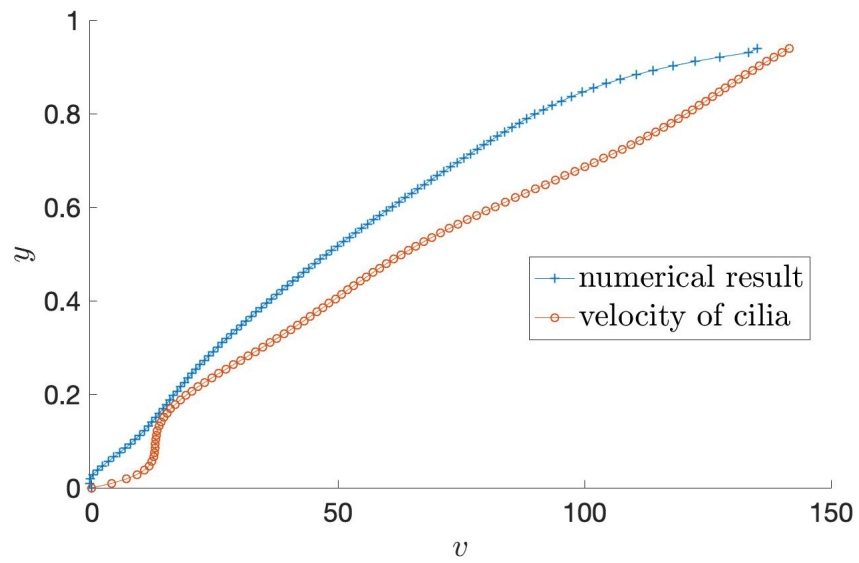
เนื่องจากในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยทำการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลเมื่อเส้นขนทำมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบ ค่าสัมประสิทธิ์ของความเร็วยังของเส้นขน v^s ของมุมต่าง ๆ แสดงไว้ในตารางที่ 3.1 โดยที่ $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ คือความยาวของเส้นขน กราฟของความเร็วยังของเส้นขน v^s ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ได้แสดงในรูปที่ 4.2 และกำหนดให้ $g = 9.8 \times 10^{-6}, \mu = 3 \times 10^{-6}, \frac{dp}{dx} = -1 \times 10^{-9}, \rho = 9.922 \times 10^{-13}, e^l = 0.5223\theta^5 - 3.0283\theta^4 + 7.0630\theta^3 - 8.4987\theta^2 + 5.5056\theta - 0.8627$ และค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1} แสดงในตารางที่ 4.2 ซึ่งค่าของ e^l และ k^{-1} ได้อ้างอิงมาจากการงานวิจัยที่ [15] และ [8] ตามลำดับ ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขคู่กับความเร็วยังของเส้นขนที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ในรูปที่ 4.3, 4.4 และ 4.5 ตามลำดับ โดยค่า h ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° มีค่าเป็น 0.0094, 0.0098 และ 0.01 ตามลำดับ จะเห็นว่าความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าน้อยกว่าความเร็วของเส้นขนในแต่ละมุมมองศา ซึ่งเป็นไปตามหลักการที่ความเร็วของของแข็งมากกว่าความเร็วของของไหล ผลเฉลยทั้ง 3 นั้นได้มีการทำซ้ำโดยวิธีนิวตันกราฟสัน 3 รอบโดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° เท่ากับ 0 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้หาค่าความคลาดเคลื่อนของพหุนามดีกรี 1 ถึงดีกรี 12 ด้วย l_2 -norm แสดงในตารางที่ 4.3 โดยผู้วิจัยจะเลือกค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ โดยกำหนดให้มีค่าน้อยกว่า 1 จากตารางพหุนามดีกรี 10 ถึงดีกรี 12 เป็นพหุนามที่มีค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้เลือกพหุนามดีกรี 12 เพราะมีค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยที่สุดและได้ประมาณค่าพหุนามดีกรี 12 เทียบกับของผลเฉลยที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° โดยแสดงในรูปที่ 4.6, 4.7 และ 4.8 ตามลำดับ จากรูปที่ 4.9 จะเห็นว่าความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุม θ เพิ่มขึ้นซึ่งสอดคล้องกับความเร็วของเส้นขน

ตารางที่ 4.2: ค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1} ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

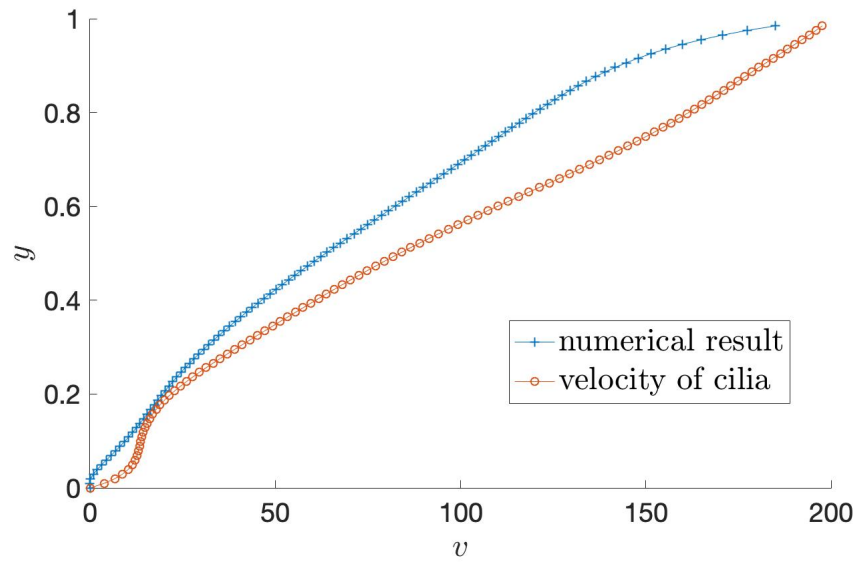
ค่ามุม θ	ค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1}
70°	1/0.0022
80°	1/0.0023
90°	1/0.0024



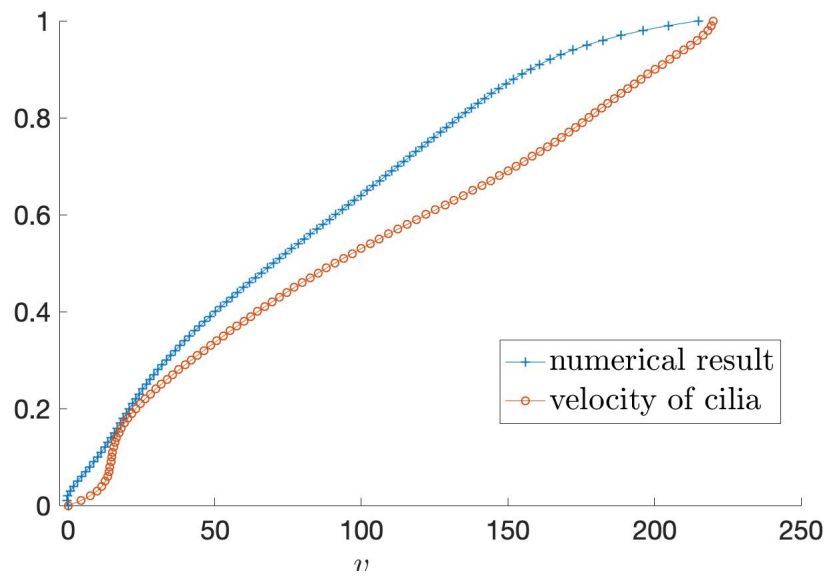
รูปที่ 4.2: ความเร็วของเส้นขนของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°



รูปที่ 4.3: ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 70^\circ$ และ $h = 0.0094$



รูปที่ 4.4: ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 80^\circ$ และ $h = 0.0098$



รูปที่ 4.5: ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 90^\circ$ และ $h = 0.01$

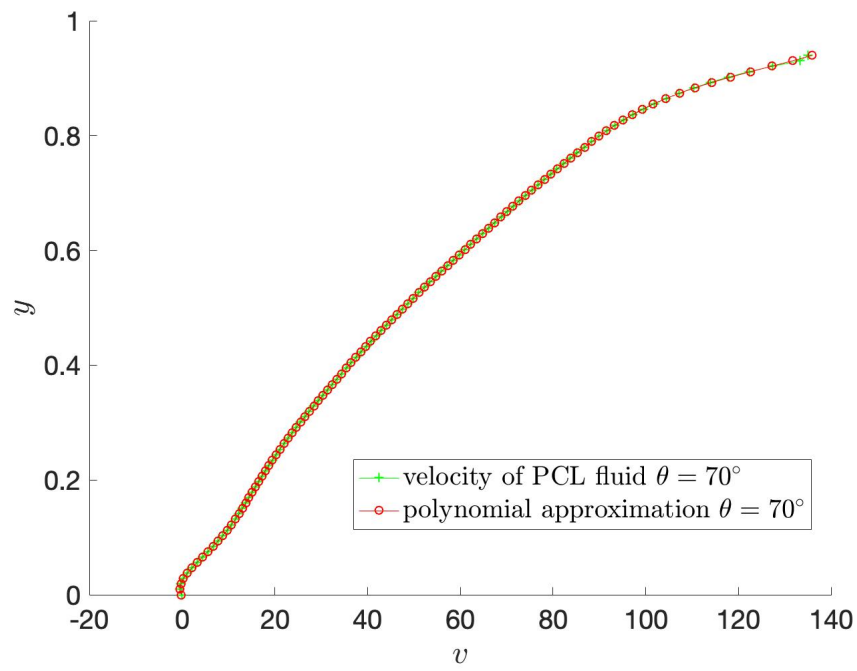
ตารางที่ 4.3: ค่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าพหุนามดีกรี 1 ถึงพหุนามดีกรี 12 กับผลเฉลยเชิงตัวเลข

พหุนามดีกรี	ค่าความคลาดเคลื่อน l_2 -norm		
	$\theta = 70^\circ$	$\theta = 80^\circ$	$\theta = 90^\circ$
1	65.6528	92.6623	92.6623
2	29.9663	35.9821	35.9821
3	19.8034	34.2495	34.2495
4	15.1625	27.6902	27.6902
5	7.6967	12.9667	12.9667
6	4.4888	7.2554	7.2554
7	4.4080	6.1117	6.1117
8	3.9001	2.5658	2.5658
9	2.7706	2.5512	2.5512
10	2.7695	0.7046	0.7046
11	2.3783	0.6598	0.6598
12	2.1554	0.4418	0.4418

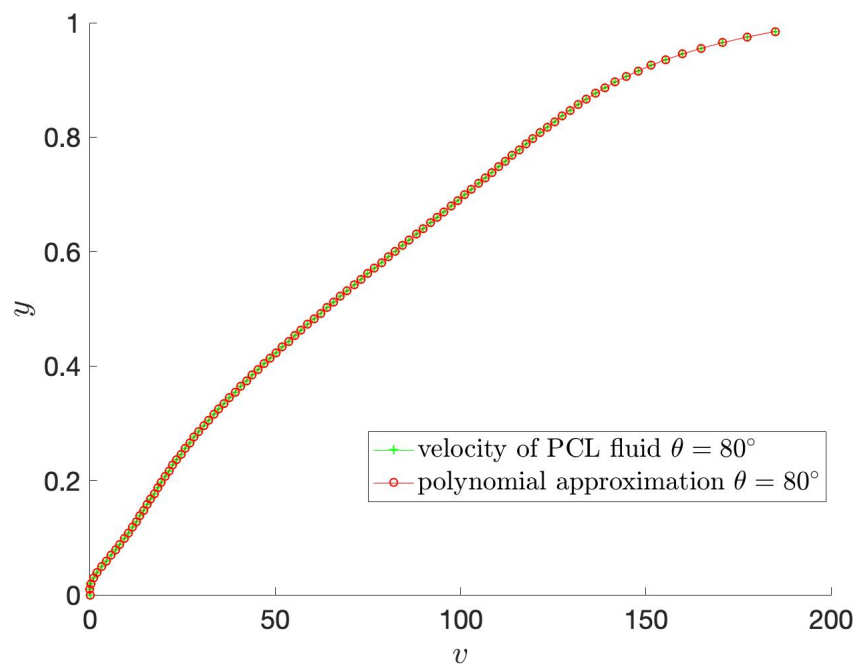
ตารางที่ 4.4: ค่าสัมประสิทธิ์พหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

$$v = c_{12}\xi^{12} + c_{11}\xi^{11} + c_{10}\xi^{10} + c_9\xi^9 + c_8\xi^8 + c_7\xi^7 + c_6\xi^6 + c_5\xi^5 + c_4\xi^4 + c_3\xi^3 + c_2\xi^2$$

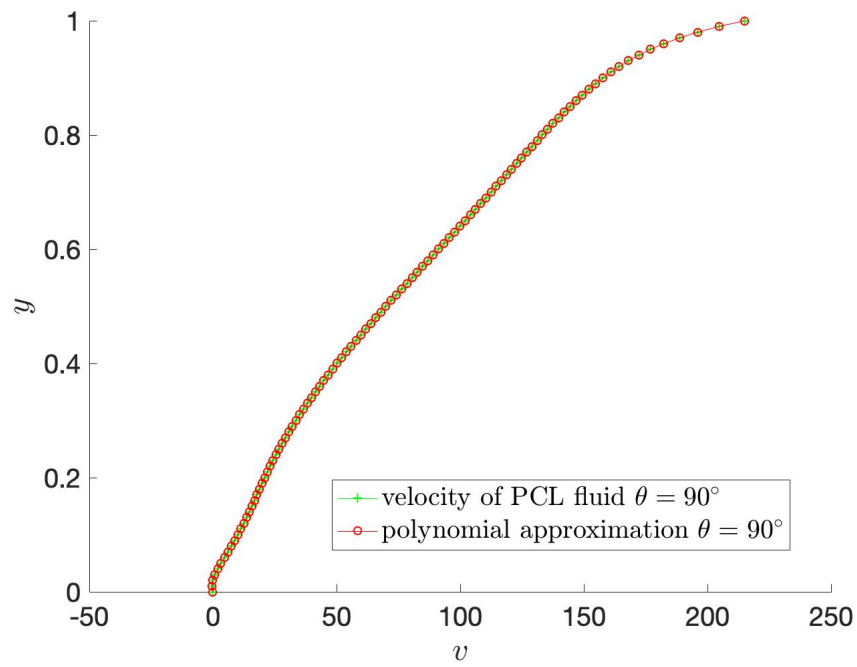
ค่าสัมประสิทธิ์	ค่ามุม θ		
	70°	80°	90°
$10^8 \times$			
c_{12}	0.0604	0.0584	0.0323
c_{11}	-0.3549	-0.3403	-0.1935
c_{10}	0.9299	0.8826	0.5254
c_9	-1.4361	-1.3455	-0.8539
c_8	1.4543	1.3424	0.9229
c_7	-1.0156	-0.9228	-0.6950
c_6	0.4996	0.4470	0.3703
c_5	-0.1730	-0.1526	-0.1386
c_4	0.0410	0.0358	0.0352
c_3	-0.0062	-0.0054	-0.0056
c_2	0.0005	0.0005	0.0005



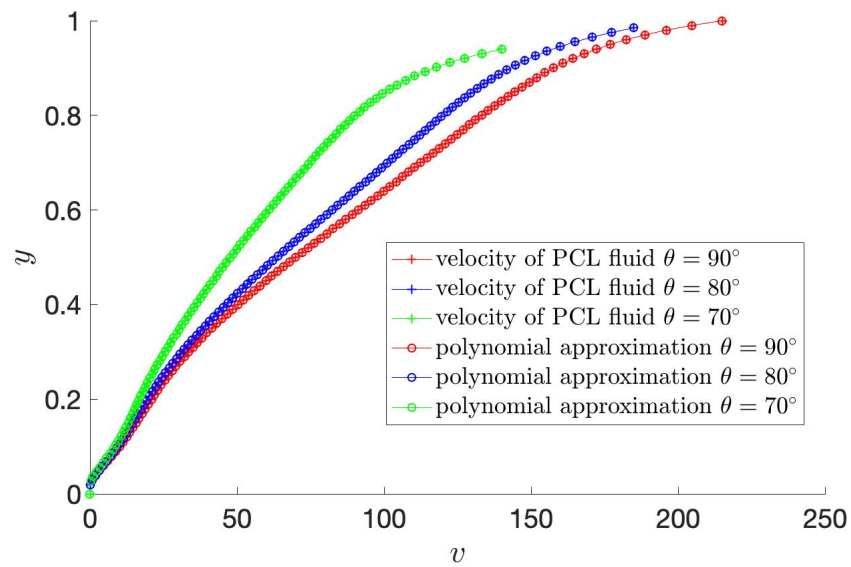
รูปที่ 4.6: ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 70^\circ$



รูปที่ 4.7: ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 80^\circ$



รูปที่ 4.8: ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 90^\circ$



รูปที่ 4.9: ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

บทที่ 5

สรุปผล

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นเพื่อหาความเร็วของของไหลที่อยู่ในชั้นเพอริซิวเลียรี สำหรับพจน์ที่มีอนุพันธ์นั้นผู้วิจัยได้ใช้วิธีผลต่างอันดับ 2 เพื่อหาความถูกต้องแม่นยำอันดับ 2 และใช้วิธีนิวตันราฟสันกับพจน์ที่ไม่เชิงเส้นในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในการตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้ ผู้วิจัยได้ตัดพจน์ที่ไม่เชิงเส้นออกจากสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น และทำการเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง ทำให้ได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขคู่เข้าหาผลเฉลยจริงเมื่อ h มีค่าน้อยลงดังแสดงในตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.1 และสำหรับผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเส้นบริงก์แมนไม่เชิงเส้น ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบกับความเร็วของเส้นขน จะเห็นว่าความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าน้อยกว่าความเร็วของเส้นขน ที่แต่ละมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงในรูปที่ 4.3, 4.4 และ 4.5 และความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าลดลงเมื่อมุม θ มีค่าลดลงซึ่งสอดคล้องกับความเร็วของเส้นขนที่กำหนดให้ ดังแสดงในรูปที่ 4.2 และ 4.9 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ประมาณค่าความเร็วของของไหลพีซีแอลด้วยพหุนามดีกรี 12 ดังแสดงในตารางที่ 4.4 และได้เปรียบเทียบกับค่าประมาณของผลเฉลยกับผลเฉลยของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° แสดงในรูปที่ 4.6, 4.7 และ 4.8 ตามลำดับ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถนำผลเฉลยเชิงตัวเลขนี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่คล้าย ๆ กันได้เช่นปัญหาเรื่องการไหลของของไหลผ่านท่อนำ หรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับของไหลที่ตัวกลางเป็นรูปวงในลักษณะเดียวกันได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. Abbasbandy and B. Asady. Newton's method for solving fuzzy nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 159(2):349–356, 2004.
- [2] S. Abbasbandy and R. Ezzati. Newton's method for solving a system of fuzzy nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 175(2):1189–1199, 2006.
- [3] L.S. Benethum and J.H. Cushman. Multiphase, Hybrid Mixture Theory for Swelling Systems-I: Balance Laws,. *International Journal of Engineering Science*, 34(2):125–145, 1996.
- [4] G. Çelikten and E. N. AKSAN. Explicit exponential finite difference methods for the numerical solution of modified burgers' equation. *Eastern Anatolian Journal of Science*, 3(1):45–50, 2017.
- [5] K. Chamsri. Modeling the Flow of PCL Fluid due to the Movement of Lung Cilia. *Ph.D. thesis, University of Colorado Denver*, 2012.
- [6] K. Chamsri. N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 8(11) Special:30–36, 2014.
- [7] K. Chamsri. Formulation of a Well-Posed Stokes-Brinkman Problem with a Permeability Tensor. *Journal of Mathematics*, 1:1–7, 2015.
- [8] K. Chamsri and L.S. Benethum. Permeability of Fluid Flow Through a Preiodic Array of Cylinders. *Applied Mathematical Modelling*, 39(1):244–254, 2015.
- [9] C. Chun. Iterative methods improving newton's method by the decomposition method. *Computers & Mathematics with Applications*, 50(10-12):1559–1568, 2005.
- [10] G.N. Gatica, L.F. Gatica, and F.A. Sequeira. Analysis of an Augmented Pseudostress-Based Mixed Formulation for a Nonlinear Brinkman Model of Porous Media Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289:104–130, 2015.
- [11] B.K. Jha and M.L. Kaurangini. Approximate Analytical Solutions for the Nonlinear Brinkman-Forchheimer- Extended Darcy Flow Model. *Applied Mathematics*, 2(12): 1432–1436, 2011.
- [12] T. Kasamwan and K. Wuttanachamsri. Unsteady One-Dimension Flow in PCL with Stokes-Brinkman Equation. *Applied Mathematical Modelling*, 39(1):244–254, 2015.

- [13] P.R. Sears, K. Thompon, M.R. Knowles, and C.W. Davis. Human Ariway Ciliary Dynamics. *American Journal of Physiology : Lung Cellular and Molecular Physiology*, 304(3):170–183, 2012.
- [14] T.F. Weinstein and L.S. Benethum. On the Derivation of the Transport Equation for Swelling Porous Materials with Finite Deformation. *International Journal of Engineering Science*, 44(18-19):1408–1422, 2006.
- [15] K. Wuttanachamsri and L. Schreyer. Effect of Cilia Movement on Fluid Velocity: II Numerical Solutions over a Fixed Domain, Tansport in Porous Media. *Accepted*, 2020.

ภาคผนวก ก

ผลเฉลยของการไหลในชั้นเพอริซิลีเรียโดยวิธีการผลต่างอันตะและ
นิวตันราฟสันแบบ n มิติ

Solutions of Flow over Periciliary Layer Using Finite Difference and
 n -Dimensional Newton-Raphson Methods

ณัฐพล อังวัชรปรการ^{1*} และ กนกณัฐภูษิต วัฒนแจ่มศรี¹

Nattapol Oangwacharaparkan¹ and Kanognudge Wuttanachamsri¹

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

วันที่ส่งบทความ : 9 มีนาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 15 กรกฎาคม 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 17 กรกฎาคม 2563

Received: 9 March 2020, Revised: 15 July 2020, Accepted: 17 July 2020

บทคัดย่อ

ปัจจุบันนี้อากาศมีการปนเปื้อนด้วยมลพิษมากมาย ซึ่งเมื่อเราหายใจรับอากาศที่ปนเปื้อนด้วยมลพิษเข้าไปในร่างกาย ระบบทางเดินหายใจที่ทำหน้าที่คัดกรองมลพิษทำการสร้างเมือกเพื่อมาดักจับอนุภาคขนาดเล็กที่มาจากอากาศและกำจัดออกจากร่างกายโดยการพัดของเส้นขนขนาดเล็กหรือที่เรียกว่า ซิเลีย ที่เรียงตัวอยู่บนชั้นเนื้อเยื่อบุผิวที่เรียกว่า ชั้นเพอริซิลีเรีย โดยของไหลบริเวณชั้นดังกล่าว หรือของไหลที่ซีแอลจะส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของเส้นขนและการขับเมือกออกจากร่างกาย ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษารายละเอียดการเคลื่อนที่ของของไหลที่ซีแอลเพื่อที่จะทราบค่าขอบบนของชั้นซีแอลและสามารถนำค่าขอบนั้นเป็นขอบล่างในการคำนวณหาความเร็วของเมือกในชั้นเมือกเพื่อช่วยในการรักษาผู้ป่วยที่มีปัญหาเกี่ยวกับทางเดินหายใจ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้หาความเร็วของของไหลที่อยู่ในชั้นของซีแอลโดยใช้สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นโดยของไหลที่ซีแอลจะเคลื่อนที่จากการพัดโบกของเส้นขนโดยที่ไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรความดันเพียงอย่างเดียว วิธีการผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) และวิธีการนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) ถูกนำมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวและได้จัดรูปแบบของสมการให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นเพื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ผลการศึกษาได้แสดงผลเฉลยที่เส้นขนทำมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบ ซึ่งผลเฉลยนั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นได้ เช่น การไหลของของไหลผ่านทุ่งนา หรือตัวกลางที่มีรูพรุนในลักษณะเดียวกัน เป็นต้น

คำสำคัญ : ชั้นเพอริซิลีเรีย วิธีการผลต่างอันตะ วิธีการนิวตันราฟสัน สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น

*ที่อยู่ติดต่อ E-mail address: 61605024@kmitl.ac.th

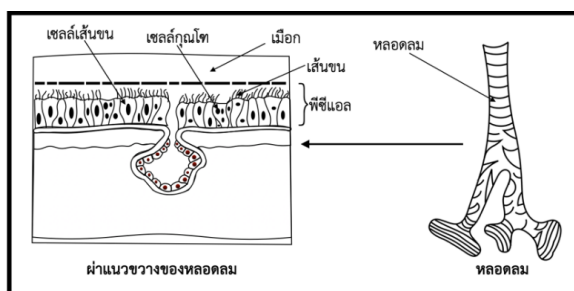
Abstract

Nowadays, air is contaminated with pollution. When we take this polluted air into the lungs, organs involved in breathing system produce mucus to catch the particles and remove them from the human body by the movement of tiny hair lining on the epithelium cell in the respiratory system. The layer containing the tiny hair called is cilia. The cilia are arranged on the epithelium called the Periciliary Layer (PCL). The fluid around that layer or PCL fluid will affect the movement of cilia and the mucus from the body. In this research, we find the velocity of the fluid in the PCL by using the nonlinear Brinkman equation, where the fluid flows by the movement of cilia, not just the pressure gradient. The second-order finite difference method and the Newton-Raphson approach are employed to calculate the numerical solutions. The results are compared with the exact solution for the linear terms of the equation without nonlinear term, with a good agreement. We present the solutions of the nonlinear Brinkman equation when the cilia make angles 70° , 80° and 90° with the horizontal plane. Applications are fluid flow through rice field and other similarly porous media.

Keywords: Periciliary Layer, Finite Difference Method, Newton Raphson Method, Nonlinear Brinkman Equation.

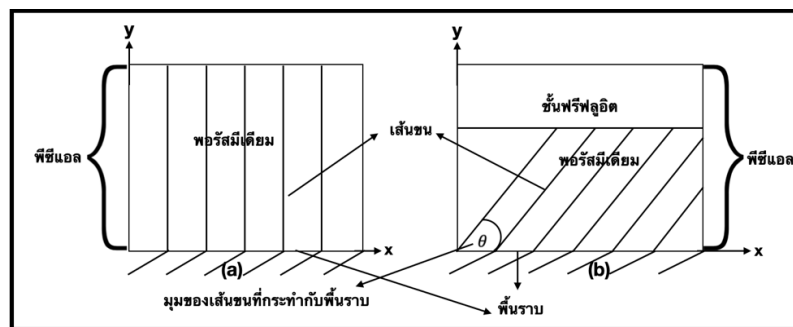
1. บทนำ

ปัจจุบันมลภาวะอากาศเป็นพิษเป็นอันตรายกับมนุษย์อย่างมาก ถ้าหากสูดอากาศที่เป็นมลพิษนี้เข้าไปมาก ๆ ร่างกายของมนุษย์ก็จะเกิดการสะสมและทำให้เป็นโรคที่เกี่ยวข้องกับระบบทางเดินหายใจ ซึ่งมนุษย์นั้นก็จะมีภูมิคุ้มกันที่มากำเนิด โดยเมื่อมนุษย์สูดอากาศเข้ามาในร่างกาย อวัยวะในระบบทางเดินหายใจก็จะทำการตรวจจับฝุ่นละอองขนาดเล็ก และทำการสร้างเมือกมาจับฝุ่นละอองเหล่านั้นและพัดเมือกนั้นออกจากร่างกายโดยการพัดโบกของเส้นขน ดังแสดงรูปที่ 1



รูปที่ 1. หลอดลมและชั้นพืชแอล

รูปที่ 1 แสดงส่วนหนึ่งของระบบทางเดินหายใจของมนุษย์ ซึ่งรูปทางขวามือจะเป็นรูปของหลอดลม ซึ่งทำหน้าที่ลำเลียงอากาศเข้ามายังปอด และรูปทางซ้ายมือจะเป็นรูปของการตัดแนวขวางของหลอดลม ซึ่งประกอบไปด้วย ชั้นพีซีแอล เส้นขน เมื่อก เซลล์กุ่มโท และเซลล์เส้นขน เมื่ออากาศผ่านเข้ามาสู่หลอดลม ร่างกายก็จะตรวจจับฝุ่นละอองขนาดเล็ก โดยที่เซลล์กุ่มโทจะคอยสร้างเมื่อกขึ้นมาเพื่อกักจับฝุ่นละอองขนาดเล็กที่เข้ามายังร่างกายและเมื่อกจะเรียงตัวอยู่บริเวณปลายเส้นขนหรือเรียกว่า ชั้นเมื่อก หลังจากนั้นแล้วเส้นขนที่อยู่ในชั้นพีซีแอลก็จะทำการพัดพาฝุ่นละอองที่ถูกเมื่อกจับนั้นออกจากร่างกาย เนื่องจากว่า ในชั้นพีซีแอลประกอบด้วยของแข็งคือเส้นขนและของไหลคือของไหลพีซีแอล ดังนั้นชั้นนี้จะถูกมองว่าเป็น ชั้นที่มีรูพรุนหรือพอร์สมีเดีย (porous medium) ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหลพีซีแอลที่เกิดจากการพัดของเส้นขนเมื่อเส้นขนทำมุมตั้งฉากกับพื้นราบและเส้นขนทำมุม θ โดยที่ θ ทำมุม น้อยกว่า 90° กับพื้นราบในชั้นพีซีแอล เมื่อเส้นขนทำมุมน้อยกว่า 90° กับพื้นราบจะเกิดช่องว่างขึ้นที่มีของไหลเพียงอย่างเดียวจะเรียกส่วนนั้นว่า ชั้นฟรีฟลูอิด (free-fluid region) ดังแสดงรูปที่ 2



รูปที่ 2. (a) แสดงเส้นขนทำมุม 90° กับพื้นราบ (b) แสดงเส้นขนทำมุม θ กับพื้นราบ โดยที่ $\theta < 90^\circ$

รูปที่ 2 (a) แสดงเส้นขนที่ขนานกับแกน y ทำมุมตั้งฉากกับพื้นราบหรือแกน x จะเห็นได้ว่าความสูงของชั้นพีซีแอลเท่ากับความยาวของเส้นขนซึ่งชั้นนี้มีทั้งเส้นขนที่เป็นของแข็งและของไหลพีซีแอลจะเป็นชั้นที่มีรูพรุน (b) แสดงเส้นขนทำมุม θ กับพื้นราบ โดยที่ $\theta < 90^\circ$ จากรูปจะเห็นได้ว่ามีช่องว่างระหว่างปลายของเส้นขนกับขอบบนชั้นพีซีแอล ช่องว่างที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่า ชั้นฟรีฟลูอิด (free-fluid region) ในงานวิจัยนี้จะหาความเร็วของของไหลพีซีแอลเมื่อเส้นขนทำมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบ ซึ่งการหาความเร็วนี้สามารถทราบถึงค่าขอบบนของชั้นพีซีแอลและสามารถนำค่าขอบบนนั้นเป็นขอบล่างของชั้นเมื่อกในการคำนวณหาความเร็วของเมื่อกในชั้นเมื่อกเพื่อช่วยในการรักษาผู้ป่วยที่มีปัญหาเกี่ยวกับทางเดินหายใจ โดยเฉพาะเมื่อร่างกายผู้ป่วยมีการผลิตเมื่อกมากผิดปกติ

สำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้พัฒนามาจากแบบจำลองของ Chamsri [1] ซึ่งเป็นการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของของไหลในชั้นพีซีแอลโดยใช้ทฤษฎีผสมแบบไฮบริด (Hybrid Mixture Theory) กับสมการที่ได้จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม [2] ซึ่งรูปแบบของสมการเป็นสมการบริงก์แมนในระดับมหภาค (macroscopic scale) ซึ่งเป็นการศึกษา

การเคลื่อนที่ของของไหลพีซีแอลอันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขนหลายเส้น ต่อมา Chamsri [3] ได้ประยุกต์วิธีการขึ้นประกอบอันตะแบบผสม (Mixed Finite Element Method) กับสมการบริงก์แมนแบบ n มิติ Chamsri [4] ได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยของสมการบริงก์แมน (Brinkman Equation) มีเพียงผลเฉลยเดียวจากงานวิจัยของ Wattanachamsri และ Schreyer [5] ได้ใช้สมการบริงก์แมนในการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลแต่ผู้วิจัยสังเกตว่าผลเฉลยที่ได้ไม่เชิงเส้นและความเร็วของเส้นขนที่พัดโบกไปมาในลักษณะคลื่นเมตาโครนอล (metachronal wave) มีผลต่อความเร็วของของไหลพีซีแอลอย่างมาก ดังนั้นงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการไหลของของไหลพีซีแอลด้วยสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น สำหรับสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นนั้นได้มีนักวิจัยศึกษาดังตัวอย่างต่อไปนี้ Gatica และคณะ [6] ได้นำเสนอแบบจำลองบริงก์แมนไม่เชิงเส้น (Nonlinear Brinkman Model) กับเงื่อนไขค่าขอบแบบผสม (Mixed Boundary Conditions) โดยใช้วิธีการขึ้นประกอบอันตะแบบผสม (Mixed Finite Element Method) Jha และ Kaurangini [7] ได้วิเคราะห์การประมาณค่าของของไหลบนโดเมนที่เป็นรูพรุนโดยใช้แบบจำลองดาร์ซีแบบขยายบริงก์แมนฟอร์ตไฮเมอร์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear Brinkman-Forchheimer Extended Darcy Model) และ Kasamwan และ Wuttanachamsri [8] ได้หาความเร็วของของไหลในชั้นเพอริซิติลิตี้ด้วยสมการบริงก์แมนที่ขึ้นอยู่กับเวลาและหาผลเฉลยโดยใช้วิธีขึ้นประกอบอันตะ ซึ่งในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้สมการเส้นบริงก์แมนไม่เชิงเส้นเพื่อให้ความใกล้เคียงกับปัญหาจริงมากยิ่งขึ้น วิธีการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นผู้วิจัยใช้วิธีการนิวตันราฟสันซึ่งได้มีการประยุกต์ในงานวิจัยหลายเรื่อง เช่น Abbasbandy และ Asady [9] ได้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการไม่เชิงเส้นแบบคลุมเครือ (Fuzzy Nonlinear) Abbasbandy และ Ezzati [10] ได้หาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นแบบคลุมเครือ (Fuzzy Nonlinear System) โดยใช้วิธีการของนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) Chun [11] ได้หาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นโดยใช้วิธีการทำซ้ำของนิวตันราฟสัน งานวิจัยนี้ผู้วิจัยจึงได้ใช้วิธีนิวตันราฟสันในส่วนที่ไม่เชิงเส้นควบคู่กับวิธีการผลต่างอันตะ ซึ่งทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นมีความถูกต้องแม่นยำในการศึกษาความเร็วของของไหลที่อยู่ชั้นพีซีแอล

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายปัญหาการไหลของของไหลในชั้นพีซีแอลคือ สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นในระดับมหภาคที่การเคลื่อนที่ของเส้นขนมีผลต่อการเคลื่อนที่ของของไหล [1]

$$\rho(v^l \cdot \nabla v^l) + \mu k^{-1}(e^l v^l - \varepsilon^l v^s) + \nabla p - \mu(\nabla^2 v^l + \nabla(\nabla \cdot v^l)) = \rho g \quad (1)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของของไหลพีซีแอล ε^l คือความพรุน v^l คือความเร็วของของไหลพีซีแอล p คือความดัน k^{-1} คือค่าผกผันของการซึมผ่าน μ คือความหนืด g คือแรงโน้มถ่วงและ v^s คือความเร็วของของแข็ง (เส้นขน) และมีสมการที่ได้จากกฎอนุรักษ์มวล คือ [12]

$$\nabla \cdot (e^l v^l) = f \quad (2)$$

เมื่อ $f = \frac{\varepsilon^l}{(1-\varepsilon^l)} + \nabla \cdot \varepsilon^l v^s$ และ ε^l คืออนุพันธ์ของความพຼຸນเทียบกับเวลา และค่าของ $\varepsilon^l = \frac{-|v^s| \frac{\partial \varepsilon^l}{\partial \theta}}$ ได้มาจาก [5] เมื่อ ξ คือความยาวของเส้นขนและ $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเส้นขนกับพื้นราบ เนื่องจากความเร็วของของไหลพีซีแอล จะเปลี่ยนตามความเร็วของเส้นขน ซึ่งความเร็วของเส้นขนจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนเส้นขนหรือแกน y นั่นคือความเร็วที่จุดปลายของเส้นขนมีความเร็วมากที่สุด และลดลงมาเป็นลำดับจนถึงโคนของเส้นขน ดังนั้นความเร็วของของไหลพีซีแอลจะเปลี่ยนไปเมื่อ y เปลี่ยนไปแต่จะมีค่าเท่ากันที่จุด y เดียวกันสำหรับทุกค่าบนแกน x ดังนั้น v^l ขึ้นอยู่กับ y นั่นคือ $v^l = v^l(y)$ แต่เนื่องจากของไหลพีซีแอล ไหลในแนวพื้นราบหรือแกน x ดังนั้นความดันจึงขึ้นอยู่กับแกน x ซึ่งในงานวิจัยนี้สมมติการเปลี่ยนแปลงของความดัน $\frac{dp}{dx}$ เป็นค่าคงที่ กำหนดให้ $v = \varepsilon^l v^l$ และแทนสมการที่ (2) ในสมการ (1) ดังนั้นสมการที่ (1) สามารถเขียนในรูปของสมการ 1 มิติได้ดังนี้

$$\frac{\rho}{\varepsilon^l} v \frac{dv}{dy} + \varepsilon^l \mu k^{-1} v - \mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \mu (\varepsilon^l)^2 v^s k^{-1} - \varepsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho g \varepsilon^l, \quad 0 < y < a \quad (3)$$

สมการที่ (3) จะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ v ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ y เท่านั้น และ a แทนความยาวของค่าของความเร็วของของแข็ง v^s นั้นแทนด้วยสมการพหุนามดีกรี 8 [5] ที่ขึ้นอยู่กับความยาวของเส้นขน $\xi = \frac{y}{\sin \theta}$ โดย Wuttanachamsri และ Schreyer [5] ที่ได้ทำการประมาณค่า v^s จากผลการทดลองของ Sear และคณะ [13]

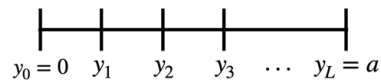
$$v^s = m_8 \xi^8 + m_7 \xi^7 + m_6 \xi^6 + m_5 \xi^5 + m_4 \xi^4 + m_3 \xi^3 + m_2 \xi^2 + m_1 \xi^1 \quad (4)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ $m_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ แสดงในตารางที่ 4 ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ขอบล่างของความเร็วของของไหลพีซีแอลคือ $v(0) = 0$ และค่าขอบบนของความเร็วของของไหลพีซีแอล $v(a)$ มีค่าเป็น 135, 185 และ 215 เมื่อเส้นขนทำมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบตามลำดับ

3. วิธีการเชิงตัวเลข

3.1 วิธีผลต่างอันดับ

จากสมการที่ (3) สำหรับพจน์ที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของสมการที่มีอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ จะสามารถประยุกต์ใช้วิธีการผลต่างอันดับกลางกับพจน์ดังกล่าว โดยทำการแบ่งโดเมน $[0, a]$ ดังแสดงรูปที่ 3



รูปที่ 3. การแบ่งโดเมน $[0, a]$

โดยที่ระยะห่างระหว่าง y_i และ y_{i+1} มีค่าเท่ากันคือ $h = y_{i+1} - y_i$ กำหนดให้ $v_i = v(y_i)$ ดังนั้น

$$\varepsilon^l \mu k^{-1} v = \varepsilon^l \mu k^{-1} v_i \quad (5)$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon^l} v \frac{dv}{dy} = \frac{\rho}{\varepsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1})}{2h} \quad (6)$$

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} \quad (7)$$

โดยที่ $i = 1, 2, \dots, L-1$ แทนค่าสมการที่ (5) - (7) ในสมการที่ (3) จะได้

$$\frac{\rho}{\varepsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1}))}{2h} + \varepsilon^l \mu k^{-1} v_i - \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} = \mu (\varepsilon^l)^2 v^s k^{-1} - \varepsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho g \varepsilon^l \quad (8)$$

โดยที่พจน์ทางขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า สังเกตว่าพจน์ที่ 1 ของสมการที่ (8) เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นผู้วิจัยจะใช้วิธีการนิวตันกราฟเส้นกับพจน์ดังกล่าวแบบ n มิติ ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.2 วิธีการนิวตันกราฟเส้นแบบ n มิติ

เนื่องจากสมการที่ (8) เป็นสมการไม่เชิงเส้น ในหัวข้อนี้จะใช้วิธีการนิวตันกราฟเส้นแบบ n มิติ ในการหาผลเฉลยของสมการ (8) สังเกตว่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในสมการที่ (8) คือ $v_i, i = 1, 2, \dots, L-1$ ดังนั้นกำหนดให้

$$F_i(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1}) = \frac{\rho}{\varepsilon^l} v_i \frac{(v_{i+1} - v_{i-1}))}{2h} \varepsilon^l \mu k^{-1} v_i - \mu \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} - \left(\mu (\varepsilon^l)^2 v^s k^{-1} - \varepsilon^l \frac{dp}{dx} + \mu \frac{df}{dy} + \rho g \varepsilon^l \right) \quad (9)$$

ดังนั้น

$$F_i(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1}) = 0 \quad (10)$$

โดยการประยุกต์ใช้นุกรมเทเลอร์ $L - 1$ มิติ กับสมการที่ (10) และเขียนระบบสมการที่ได้ในรูปแบบของเมทริกซ์ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1^{(k)} \\ \Delta v_2^{(k)} \\ \Delta v_3^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta v_{L-1}^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1(v^{(k)}) \\ F_2(v^{(k)}) \\ F_3(v^{(k)}) \\ \vdots \\ F_{L-1}(v^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

หรือสามารถเขียนในรูปสมการ

$$A(V^{(k)})X^{(k)} = B(V^{(k)}) \quad (12)$$

เมื่อ

$$A(V^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_1(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_2(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_3(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_1} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_2} & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial F_{L-1}(V^{(k)})}{\partial v_{L-1}} \end{bmatrix}$$

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta v_1^{(k)} \\ \Delta v_2^{(k)} \\ \Delta v_3^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta v_{L-1}^{(k)} \end{bmatrix} \text{ และ } B(V^{(k)}) = - \begin{bmatrix} F_1(v^{(k)}) \\ F_2(v^{(k)}) \\ F_3(v^{(k)}) \\ \vdots \\ F_{L-1}(v^{(k)}) \end{bmatrix}$$

โดยที่ $V^{(k)} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1})^{(k)}$ เมื่อ $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{L-1})^{(k)}$ คือ $(v_1, v_2, \dots, v_{L-1})$ ที่ได้จากการทำซ้ำ k รอบโดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots$ และ $\Delta v_i^{(k)} = (v_i)^{(k+1)} - (v_i)^{(k)}, i = 1, 2, \dots, L - 1$

จากวิธีการนิวตันกราฟเส้นจะทำการสุ่มค่าเริ่มต้น $v^{(0)}$ และทำการทำซ้ำจนกว่าผลเฉลยจะลู่เข้าหรือค่าคลาดเคลื่อน $\|\Delta v_i^{(k)}\| \leq \text{tol}$ เมื่อ tol มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยมาก ๆ เช่น 10^{-5} จึงได้ $v^{(k+1)} = v^{(k)} + x^{(k)}$ เป็นผลเฉลยที่ได้ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ

4. ผลเฉลยจริง

เนื่องจากสมการที่ผู้วิจัยนำมาใช้คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่คำนวณได้ ผู้วิจัยจะทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงที่ตัดพจน์ที่ไม่เชิงเส้นออกก่อนและทำการเทียบผลที่ได้กับผลเฉลยจริง เนื่องจากสมการของผลเฉลยจริงเป็นสมการเชิงเส้น ผู้วิจัยจึงได้จัดรูปของสมการ (3) ให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\frac{dp}{dx} = -\mu vk^{-1} + \frac{\mu}{e^t} \frac{d^2v}{dy^2} \quad (13)$$

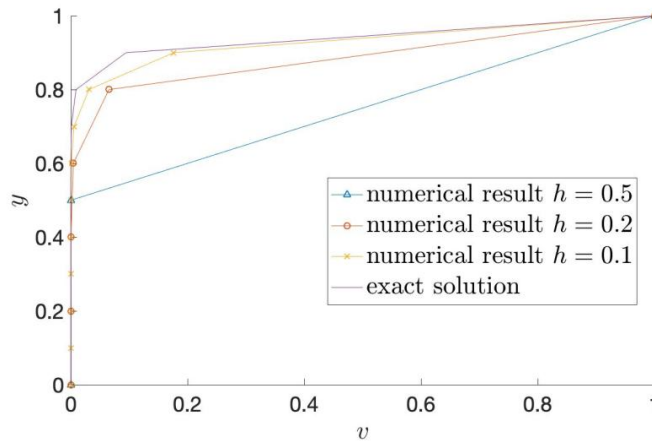
ผลเฉลยจริงของสมการ (13) จากงานวิจัย [14] คือ

$$v(y) = \frac{1}{1 + \frac{(1-a)}{\sqrt{k}}} \left(e^{\frac{y-a}{\sqrt{k}}} \right), \quad y < a \quad (14)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบคือ $v(a) = 1$ และ $v(0) = 0$

5. ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในการตรวจสอบผลเฉลยเชิงตัวเลขผู้วิจัยเปรียบเทียบผลเฉลยของสมการที่ (13) กับผลเฉลยจริงสมการที่ (14) โดยกำหนดให้ $k^{-1} = \frac{1}{0.0024}$, $\frac{dp}{dx} = 0$, $\mu = 3 \times 10^{-6}$ และ $h = 0.5, 0.2$ และ 0.1 ผลเฉลยที่ได้ ดังแสดงรูปที่ 4 ซึ่งในปัญหาจริงเส้นขนจะขนานกับแกน y ดังนั้นผู้วิจัยจึงให้ตัวแปรต้น y เป็นแกนในแนวตั้งเพื่อสะดวกในการตรวจสอบความเร็วของของไหลที่ซีแอล นั่นคือที่ $y = 0$ คือบริเวณโคนของเส้นขน และ $y = 1$ คือบริเวณปลายเส้นขน สังเกตว่าความเร็วของของไหลที่ซีแอลมีความเร็วมากที่สุดที่ปลายของเส้นขนและมีความเร็วลดลงมาเป็นลำดับจนถึงโคนของเส้นขน ซึ่งสอดคล้องกับปัญหาที่พิจารณากราฟแสดงว่าเมื่อ h มีค่าน้อยลง ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ลู่เข้าหาผลเฉลยจริง ดังแสดงตารางที่ 1, 2 และ 3 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $h = 0.5, 0.2$ และ 0.1 ตามลำดับ

รูปที่ 4. ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.5, 0.2, 0.1$

ตารางที่ 1. ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.5$

y	0	0.5	1.0
ค่าคลาดเคลื่อน	0	0	0

ตารางที่ 2. ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.2$

y	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
ค่าคลาดเคลื่อน	0	0.0003	0.0043	0.0042	0.0565	0

ตารางที่ 3. ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $h = 0.1$

y	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
ค่าคลาดเคลื่อน	0	0	0	0.00009	0.0222	0

ต่อไปเป็นการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการที่ (3) เนื่องจากในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยทำการหาความเร็วของของไหลที่ซีแอลเมื่อเส้นขนทำมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° กับพื้นราบ ค่าสัมประสิทธิ์ของความเร็วจนของเส้นขน v^s ของมุมต่าง ๆ ดังแสดงตารางที่ 4 โดยที่ $\xi = \frac{v}{\sin \theta}$ คือความยาวของเส้นขนกราฟของความเร็วจนของเส้นขน v^s ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 5 และในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $g = 9.8 \times 10^{-6}$, $\mu = 3 \times 10^{-6}$, $\frac{dp}{dx} = -1 \times 10^{-9}$, $\rho = 9.922 \times 10^{-13}$, $\epsilon^l = 0.5223\theta^5 - 3.0283\theta^4 + 7.0630\theta^3 - 8.4987\theta^2 + 5.5056\theta - 0.8627$ และค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1} ดังแสดงตารางที่ 5 ซึ่งค่าของ ϵ^l และ k^{-1} ได้อ้างอิงมาจากงานวิจัยที่ [5] และ [15] ตามลำดับ ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขคู่กับความเร็วจนของเส้นขนที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 6, 7 และ 8 ตามลำดับ โดยค่า h ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° มีค่าเป็น 0.0094, 0.0098 และ 0.01 ตามลำดับ จะเห็นว่าความเร็วของของไหลที่ซีแอล มีค่าน้อยกว่าความเร็วของเส้นขนในแต่ละมุมมอง ซึ่งเป็นไปตามหลักการที่ความเร็วของของแข็ง

มากกว่าความเร็วของของไหล ผลเฉลยทั้ง 3 นั้นได้มีการทำซ้ำโดยวิธีการนิวตันกราฟสัน 3 รอบโดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของมุม $70^\circ, 80^\circ$ และ 90° เท่ากับ 0 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ประมาณค่าพหุนามของผลเฉลยที่ได้ของมุมต่าง ๆ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 12 ดังแสดงตารางที่ 6 ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบความเร็วของของไหลพีซีแอลกับค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 9 จะเห็นว่าความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุม θ เพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับความเร็วของเส้นขน และแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของกราฟดังกล่าวแบบ l_2 -norm ดังแสดงตารางที่ 7

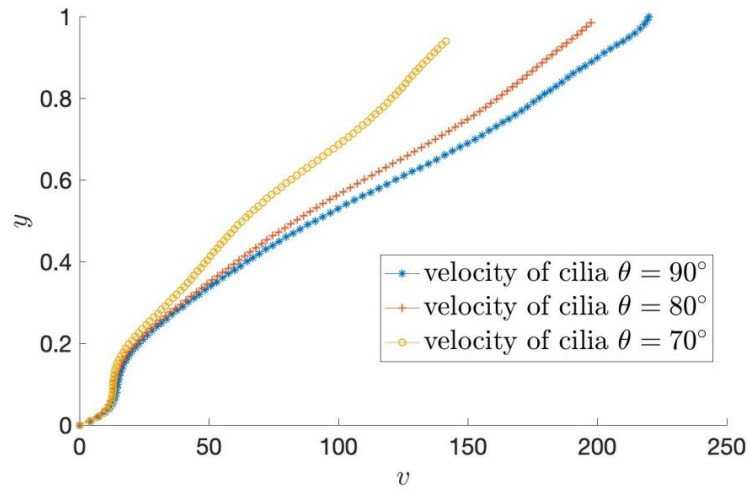
ตารางที่ 4. ค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 8 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ของฟังก์ชัน

$$v^s = m_8 \xi^8 + m_7 \xi^7 + m_6 \xi^6 + m_5 \xi^5 + m_4 \xi^4 + m_3 \xi^3 + m_2 \xi^2 + m_1 \xi^1$$

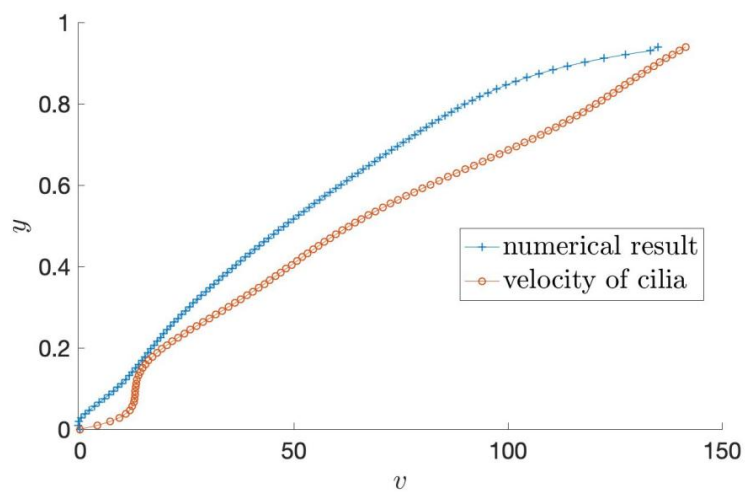
ค่าสัมประสิทธิ์ $10^5 \times$	ค่ามุม θ		
	70°	80°	90°
m_8	-0.4987	-0.3648	-0.5386
m_7	2.1268	1.5687	2.2148
m_6	-3.7102	-2.7659	-3.7309
m_5	3.4021	2.5751	3.3198
m_4	-1.7529	-1.3584	-1.6788
m_3	0.5012	0.4022	0.4803
m_2	-0.0717	-0.0593	-0.0694
m_1	0.0049	0.0044	0.0050

ตารางที่ 5. ค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1} ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

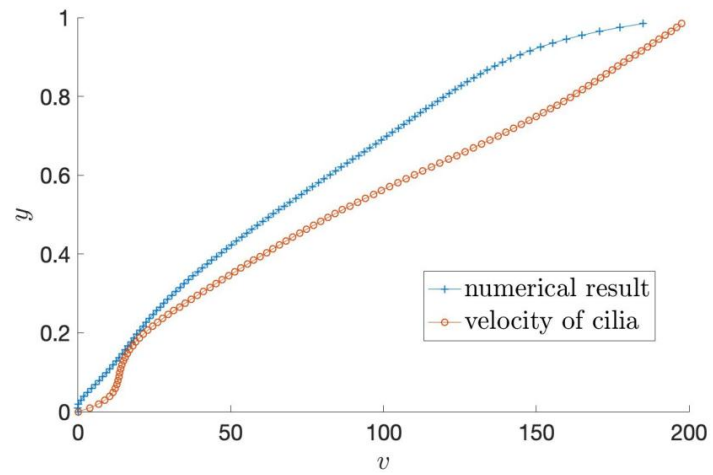
ค่ามุม θ	ค่าผกผันการซึมผ่าน k^{-1}
70°	1/0.0022
80°	1/0.0023
90°	1/0.0024



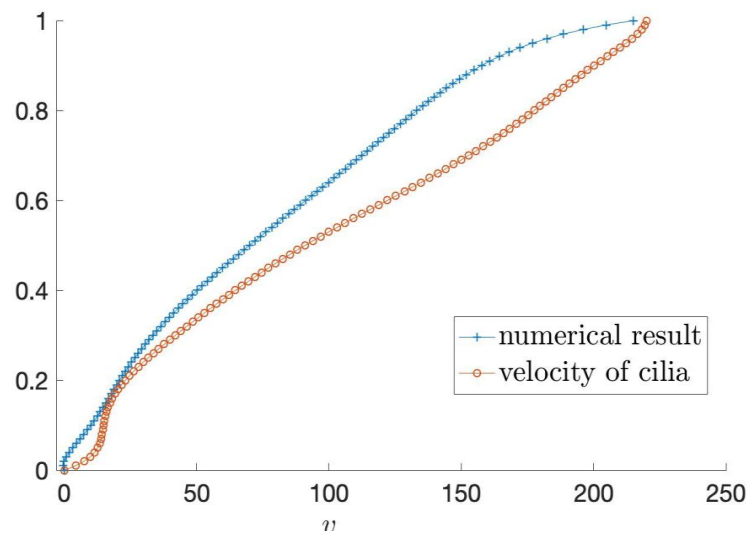
รูปที่ 5. ความเร็วของเส้นขนของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°



รูปที่ 6. ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 70^\circ$ และ $h = 0.0094$



รูปที่ 7. ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 80^\circ$ และ $h = 0.0098$

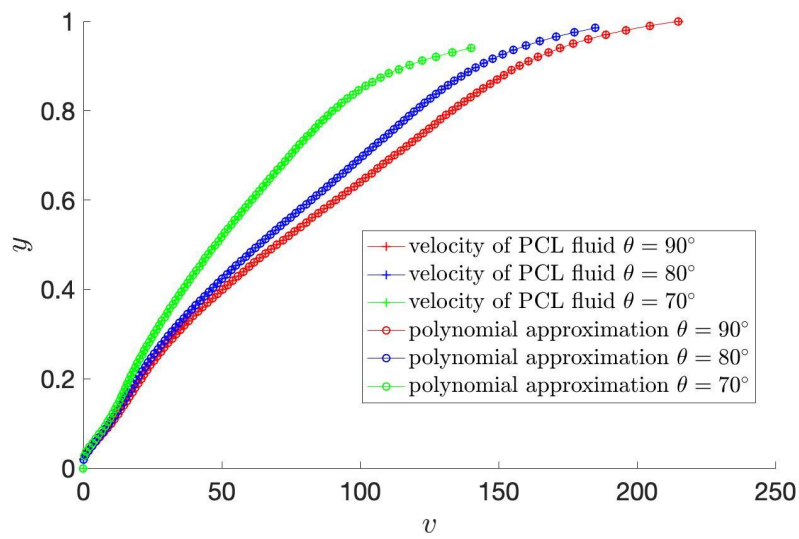


รูปที่ 8. ผลเฉลยเชิงตัวเลขและความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 90^\circ$ และ $h = 0.01$

ตารางที่ 6. ค่าสัมประสิทธิ์พหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ของผลเฉลยเชิงตัวเลข

$$v = m_{12} \xi^{12} + m_{11} \xi^{11} + m_{10} \xi^{10} + m_9 \xi^9 + m_8 \xi^8 + m_7 \xi^7 + m_6 \xi^6 + m_5 \xi^5 + m_4 \xi^4 + m_3 \xi^3$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $10^8 \times$	ค่ามุม θ		
	70°	80°	90°
m_{12}	0.0604	0.0584	0.0323
m_{11}	-0.3549	-0.3403	-0.1935
m_{10}	0.9299	0.8826	0.5254
m_9	-1.4361	-1.3455	-0.8539
m_8	1.4543	1.3424	0.9229
m_7	-1.0156	-0.9228	-0.6950
m_6	0.4996	0.4470	0.3703
m_5	-0.1730	-0.1526	-0.1386
m_4	0.0410	0.0358	0.0352
m_3	-0.0062	-0.0054	-0.0056
m_2	0.0005	0.0005	0.0005



รูปที่ 9. ความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ของมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

ตารางที่ 7. ค่าความคลาดเคลื่อนของความเร็วของของไหลพีซีแอลและค่าประมาณพหุนามดีกรี 12 ที่มุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90°

ค่ามุม θ	ค่าความคลาดเคลื่อน
70°	2.1554
80°	0.4313
90°	0.4418

6. อภิปรายและสรุปผล

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้นเพื่อหาความเร็วของของไหลพีซีแอลที่อยู่ในชั้นเพอริซิเลียรี สำหรับพจน์ที่มีอนุพันธ์นั้นผู้วิจัยได้ใช้วิธีการผลต่างอันดับกลางที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับ 2 และใช้วิธีการนิวตันราฟสันกับพจน์ที่ไม่เชิงเส้นในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในการตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้ ผู้วิจัยได้ตัดพจน์ที่ไม่เชิงเส้นออกจากสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น และทำการเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง ทำให้ได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่ผลเฉลยจริงเมื่อ h มีค่าน้อยลง ดังแสดงตารางที่ 1, 2 และ 3 และแสดงรูปที่ 4 และสำหรับผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการบริงก์แมนไม่เชิงเส้น ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบกับความเร็วของเส้นขน จะเห็นว่าความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าน้อยกว่าความเร็วของเส้นขน ที่แต่ละมุม $\theta = 70^\circ, 80^\circ$ และ 90° ดังแสดงรูปที่ 6, 7 และ 8 และความเร็วของของไหลพีซีแอลมีค่าลดลงเมื่อมุม θ มีค่าลดลงซึ่งสอดคล้องกับความเร็วของเส้นขนที่กำหนดให้ ดังแสดงรูปที่ 5 และ 9 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ประมาณค่าความเร็วของของไหลพีซีแอลด้วยพหุนามดีกรี 12 ดังแสดงตารางที่ 6 สำหรับผู้ที่สนใจสามารถนำผลเฉลยเชิงตัวเลขนี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่คล้าย ๆ กันได้ เช่น ปัญหาเรื่องการไหลของของไหลที่ไหลผ่านท่อนำ หรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับของไหลที่ตัวกลางเป็นรูพรุนในลักษณะเดียวกันได้ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง (References)

- [1] Chamsri, K. 2012. Modeling the Flow of PCL Fluid due to the Movement of Lung Cilia. Ph.D. thesis, University of Colorado Denver.
- [2] Bennethum, L.S. and Cushman, J.H. 1996. Multiphase, Hybrid Mixture Theory for Swelling Systems-I: Balance Laws. *International Journal of Engineering Science*, 34(2), 125-145.
- [3] Chamsri, K. 2014. N-Dimensional Stokes-Brinkman Equations using a Mixed Finite Element Method. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 8(11), 30-36.
- [4] Chamsri, K. 2015. Formulation of a Well-Posed Stokes-Brinkman Problem with a Permeability Tensor. *Journal of Mathematics*, 1, 1-7.
- [5] Wuttanachamsri, K. and Schreyer, L. 2020. Effect of Cilia Movement on Fluid Velocity: II Numerical Solutions over a Fixed Domain. *Transport in Porous Media*, Accepted.

- [6] Gatica, G.N., Gatica, L.F. and Sequeira, F.A. 2015. Analysis of an Augmented Pseudostress- Based Mixed Formulation for a Nonlinear Brinkman Model of Porous Media Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289, 104-130.
- [7] Jha, B.K. and Kaurangini, M.L. 2011. Approximate Analytical Solutions for the Nonlinear Brinkman-Forchheimer-Extended Darcy Flow Model. *Applied Mathematics*, 2(12), 1432-1436.
- [8] Kasamwan, T. and Wuttanachamsri, K. 2020. Unsteady One-Dimension Flow in PCL with Stokes- Brinkman Equation. Proceeding The 9th Phayao Research Conference, Phayao, 353.
- [9] Abbasbandy, S. and Asady, B. 2004. Newton's method for solving fuzzy nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 159(2), 349-356.
- [10] Abbasbandy, S. and Ezzati, R. 2006. Newton's method for solving a system of fuzzy nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 175(2), 1189-1199.
- [11] Chun, C. 2005. Iterative methods improving newton's method by the decomposition method. *Computers & Mathematics with Applications*, 50(10-12), 1559-1568.
- [12] Weinstein, T.F. and Bennethum, L.S. 2006. On the Derivation of the Transport Equation for Swelling Porous Materials with Finite Deformation. *International Journal of Engineering Science*, 44(18-19), 1408-1422.
- [13] Sears, P.R., Thompon, K., Knowles, M.R. and Davis, C.W. 2013. Human Airway Ciliary Dynamics. *Journal of Physiology-Lung Cellular and Molecular Physiology*, 304(3), 170-183.
- [14] Koplik, J., Levine, H. and Zee, A. 1983. Viscosity Renormalization in the Brinkman Equation. *The Physics of fluids*, 26(10), 2864-2870.
- [15] Chamsri, K. and Bennethum, L.S. 2015. Permeability of Fluid Flow Through a Periodic Array of Cylinders. *Applied Mathematical Modelling*, 39(1), 244-254.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นายณัฐพล อังวัชรปรการ
วัน เดือน ปี	1 มิถุนายน 2538
ที่อยู่ปัจจุบัน	57 หมู่ 6 ต.เทพราช อ.บ้านโพธิ์ จ.ฉะเชิงเทรา 24140
ประวัติการศึกษา	2561 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ เกรตเฉลี่ย 3.21 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2563 วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ เกรตเฉลี่ย 3.88 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ทุนอุดหนุนการศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษาคณะวิทยาศาสตร์
ผลงานทางวิชาการ	ผลเฉลยของการไหลในชั้นเพอร์ซิเลียรีโดยวิธีการผลต่างอันดับ และนิเวศน์กราฟสัน แบบ n มิติ