พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันขั้นบันไดเป็นฟังก์ชันถ่วง

ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH STEP FUNCTIONS AS THEIR WEIGHT FUNCTIONS

สุขพักตร์ แพนสมบูรณ์
SUKPAK PANSOMBOON

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2550

พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันขั้นบันไดเป็นฟังก์ชันถ่วง

ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH STEP FUNCTIONS AS THEIR WEIGHT FUNCTIONS

สุขพักตร์ แผนสมบูรณ์
SUKPAK PANSOMBOON

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2550

ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH STEP FUNCTIONS AS THEIR WEIGHT FUNCTIONS

SUKPAK PANSOMBOON

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2007

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันขั้นบันไดเป็นฟังก์ชันถ่วง

Orthogonal Polynomials with Step Functions as Their Weight Functions

ชื่อนักศึกษา นางสาวสุขพักตร์ แผนสมบูรณ์

รหัสประจำตัว 48067409

ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		**ลายมือชื่อ**
ผศ.ดร.ฉัฐไชย์	ลีนาวงศ์	
ดร.พรรณทิพย์	ภัทรอินทรากร	
ผศ.ดร.ศรัณย์	ว่องไว	
รศ.ดร.ไมตรี	โพธิ์สุข	ไมตรี โพธิ์สุข

วัน / เดือน/ ปี ที่สอบ 21 พฤษภาคม 2550 เวลา 10.00 น. เป็นต้นไป

สถานที่สอบ ณ อาคารจุฬาภรณวลัยลักษณ์ 1 ห้อง 219

บัณฑิตวิทยาลัยรับรองแล้ว

(รศ.ดร.จารุวัตร เจริญสุข)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่......30.......**เดือน**....พฤษภาคม.....**พ.ศ.**....2550....

หัวข้อวิทยานิพนธ์	พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันขั้นบันไดเป็นฟังก์ชันถ่วง
นักศึกษา	นางสาวสุขพักตร์ แผนสมบูรณ์
รหัสประจำตัว	48067409
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2550
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นการศึกษาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง [0,1] ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันขั้นบันได สำหรับแต่ละลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉาก จะทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ทำการหารูปแบบการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขชนิดรูปแบบเกาส์–ควอดเดรเจอร์ มีการประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากในสองแนวทาง ได้แก่ หาปริพันธ์เชิงตัวเลข และการประมาณค่าในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุด

Thesis	Orthogonal Polynomials with Step Functions as Their Weight Functions
Student	Miss Sukpak Pansomboon
Student ID.	48067409
Degree	Master of Science
Program	Applied Mathematics
Year	2007
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk

ABSTRACT

This thesis is a study of orthogonal polynomials with step functions as their weight functions. Six sequences of orthogonal polynomials on the interval [0,1] with respect to the six weight functions are obtained. The orthogonal polynomials of degrees 1 to 7 are constructed for each sequence of orthogonal polynomials. The numerical integration formulas, Gauss–Quadrature formula type, are formulated. There are two applications of our constructed orthogonal polynomials; finding numerical values of definite integrals; and interpolating functions by least–squares approximation.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เรื่อง พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันขั้นบันไดเป็นฟังก์ชันถ่วง สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข ที่ให้คำแนะนำ ตลอดจนให้ความรู้ ทำให้วิทยานิพนธ์สำเร็จผล ผู้วิจัยขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณ ประธานกรรมการ ดร.พรรณทิพย์ ภัทรอินทากร ที่ให้คำแนะนำ ในการทำวิทยานิพนธ์

ขอขอบคุณ กรรมการ ผศ.ดร.ศรัณย์ ว่องไว ที่ให้คำแนะนำ ในการทำวิทยานิพนธ์

ขอขอบคุณ กรรมการและที่ปรึกษาประจำรุ่น ผศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์ ที่ให้คำแนะนำและเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาที่ดีตลอดระยะเวลาในการศึกษา และทำวิทยานิพนธ์

ขอขอบคุณ ภาควิชาวิทยาศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่อำนวยความสะดวกในการใช้คอมพิวเตอร์ และเครื่องพิมพ์เอกสาร

สุขพักตร์ แผนสมบูรณ์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ หน้า

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ในคณิตศาสตร์ลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากเป็นลำดับอนันต์ $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots,$ ซึ่งแต่ละ $p_n(x)$ มีระดับขั้น n สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

โดยการวิจัยนี้จะคำนวณหาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากหกลำดับ บนช่วง [0,1] ตามฟังก์ชันถ่วง (weight functions) หกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันขั้นบันได (step functions) โดยเริ่มต้นที่ $p_0(x) = 1$ โดยจะทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากถึงอันดับที่ 7 เมื่อได้พหุนามเชิงตั้งฉาก (orthogonal polynomials) แล้ว จะคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข เพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต จากนั้นจะนำพหุนามเชิงตั้งฉากที่ได้ทั้งหมดนี้นำไปใช้ประมาณค่าในช่วงของฟังก์ชันต่างๆ แบบกำลังสองน้อยสุด

ตาราง 1.1 ฟังก์ชันถ่วง ที่สำคัญ

ฟังก์ชันถ่วง $w(x)$	**ช่วง**	**พหุนาม**
1	$[-1,1]$	Legendre
e^{-x}	$[0,\infty)$	Laguerre
$x^{\alpha} e^{-x}$	$(0,\infty)$	Associated Laguerre
$\left(1-x^2\right)^{-1/2}$	$[-1,1]$	Chebyshev
e^{-x^2}	$(-\infty,\infty)$	Hermite
$\left(1-x^2\right)^{\alpha-1/2}$	$[-1,1]$	Gegenbauer
$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$[-1,1]$	Jacobi

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง $[0,1]$ ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันขั้นบันได

1.2.2 เพื่อหาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.2.3 เพื่อนำไปคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต

1.2.4 เพื่อนำไปใช้ประมาณค่าในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุดของฟังก์ชันต่างๆ

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1.3.1 ศึกษาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง$[0,1]$ ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันขั้นบันได

$$w(x)=\begin{cases}\frac{2}{3},0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3},\frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{2}{3},0\le x<\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\ ,\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3},\frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{4}{3},0\le x<\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\ ,\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3},\frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},0\le x<\frac{1}{3}\\ 1\ ,\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2},\frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{4}{3},0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3},\frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ 1\ ,\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2},\frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

1.3.2 หาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.3.3 นำไปคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต

1.3.4 นำไปใช้ประมาณค่าในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุดของฟังก์ชันต่างๆ

1.4 ขั้นตอนการวิจัย

1.4.1 ค้นคว้าเอกสาร ทฤษฎีบท งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับพหุนามเชิงตั้งฉาก

1.4.2 ศึกษาเอกสาร ทฤษฎีบท งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับพหุนามเชิงตั้งฉากเพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย

1.4.3 ทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.4.4 ทำการหาค่ารากพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.4.5 ทำการประยุกต์ใช้ในสองแนวทาง ได้แก่ หาปริพันธ์เชิงตัวเลขและการประมาณในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุด

1.4.6 สรุปผลและเขียนวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้ลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง $[0,1]$ ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันขั้นบันได ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

1.5.2 ได้รูปแบบเชิงตัวเลขที่ดี สำหรับการหาค่าปริพันธ์แบบจำกัดเขต

1.5.3 ได้พหุนามเชิงตั้งฉากที่ใช้ในการประมาณค่าที่ดี

บทที่ 2
นิยาม ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ฟังก์ชันขั้นบันได

นิยาม 2.1.1 ฟังก์ชันขั้นบันไดเป็นฟังก์ชันจริง $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a และ b เป็นจำนวนจริงหรือเป็นอนันต์ การแบ่งกันของ $[a,b]$ คือ $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวบนทุกช่วงเปิด $\left(x_j,x_{j+1}\right)$

2.2 ฟังก์ชันถ่วง

นิยาม 2.2.1 ฟังก์ชันถ่วงเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งทางคณิตศาสตร์เมื่อมีการหาปริพันธ์ เพื่อที่จะให้บางส่วนมีค่าถ่วงต่างจากส่วนอื่น ค่าขอบเขตจะเป็นจำนวนจริงหรือเป็นอนันต์ก็ได้ แต่ต้องไม่มีศูนย์ระหว่างช่วงการหาปริพันธ์ และต้องได้ค่าบวก ฟังก์ชันถ่วงสามารถสร้างในฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องและฟังก์ชันต่อเนื่องได้

2.3 พหุนามเชิงตั้งฉาก

นิยาม 2.3.1 ให้ $p_k(x)$ เป็นพหุนามกำลัง k เรียก $p_k(x)$ ว่าเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้า $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx=0$ เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใด ๆ ที่ $m\le k-1$

นิยาม 2.3.2 ให้ $p_0(x),p_1(x),p_2(x),...,p_k(x),...$ เป็นลำดับของพหุนามเรียกลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้าทุกๆ พหุนาม $p_i(x),i=0,1,...,k,...$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ($w(x)$ มีค่าเป็นบวกในช่วงเปิด (a,b))

ทฤษฎีบท 2.3.1 พหุนาม $p_k(x)$ ที่ทำให้ $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx=0$ สำหรับทุก ๆ พหุนาม $q_m(x)$ ที่ $m\le k-1$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น (ยกเว้นพหุนามที่เป็นผลคูณของ $p_k(x)$ กับค่าคงที่ใดๆ) [1]

2.4 รูปแบบของนิวตัน–โค้ต (Newton–Cotes formula)

กำหนด $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจุดอยู่ในช่วงปิด $[a,b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ ต้องการหาจำนวนจริง $A_1, A_2, ..., A_n$ เพื่อใช้หาค่าประมาณของ

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E(f) \tag{2.4.1}$$

เรียกรูปแบบที่ (2.4.1) ว่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยรูปแบบของนิวตัน–โค้ต $w(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อน

นิยาม 2.4.1 ถ้า $x_1 = a$ และ $x_n = b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน–โค้ตจาก (2.4.1) ว่า รูปแบบนิวตัน–โค้ต ชนิดปิด (Newton–Cotes closed formula) และถ้า $x_1 > a$ และ $x_n < b$ แล้ว เรียกรูปแบบนิวตัน–โค้ตนี้ว่า รูปแบบ นิวตัน–โค้ตชนิดเปิด (Newton–Cotes open formula)

ทฤษฎีบท 2.4.1 ถ้ากำหนดจุด $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจุดต่าง ๆ กันในช่วงปิด $[a,b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ และฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ แล้วจะมีจำนวนจริง $A_1, A_2, ..., A_n$ ที่ทำให้

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

สำหรับ $f(x)$ เป็นพหุนามที่กำลังน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n-1$ [1]

2.5 รูปแบบเกาส์–ควอดเดรเจอร์ (Gauss–Quadrature formula type)

เป็นรูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f]$$

เมื่อ $w(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) ซึ่งเป็นรากของ พหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

ทฤษฎีบท 2.5.1 กำหนดให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ สมมติว่าสามารถหาค่า $A_1, A_2, ..., A_n$ ได้และการหาค่าปริพันธ์

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f] \tag{2.5.1}$$

ไม่มีความคลาดเคลื่อน สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $n-1$ แล้วรูปแบบ (2.5.1) จะไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนเลย ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $2n-1$ [1]

ทฤษฎีบท 2.5.2 ถ้ารูปแบบ (2.5.1) ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนเลยสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $2n-1$ แล้วจุด $x_1, x_2, ..., x_n$ จะเป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ [1]

ทฤษฎีบท 2.5.3 ค่า $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ในรูปแบบที่ (2.5.1) เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมด [1]

2.6 การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least–squares approximation)

สมมติให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าแน่นอนในช่วงเปิด (a,b) และต้องการหาพหุนาม $p(x)$ ที่มีกำลังไม่เกิน k มาเป็นฟังก์ชันเพื่อใช้หาค่าแทน $f(x)$ โดยให้ค่า $\int_a^b [f(x) - p(x)]^2 w(x) dx$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $w(x)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงของพหุนามเชิงตั้งฉากตามช่วงปิด $[a,b]$

ถ้า $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)$ เป็นลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $y = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + d_2 p_2(x) + ... + d_k p_k(x)$ โดยค่า $d_0, d_1, d_2, ..., d_k$ จะเป็นเซตของจำนวนจริงเพียงเซตเดียวเท่านั้นเนื่องจาก $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)$ เป็นอันดับของพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$\therefore \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 w(x) dx = \int_a^b [f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - ... - d_k p_k(x)]^2 w(x) dx$$

สิ่งที่ต้องการคือหา $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k$ ที่ทำให้ค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์น้อยที่สุด กำหนดให้ $g\left(d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k\right) = \int_a^b \left[f(x) - p(x)\right]^2 w(x)\,dx$ ดังนั้น จะต้องหา $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k$ ที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน g จากแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะต้องหาค่า $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k$ ที่ทำให้ $\frac{\partial g}{\partial d_0} = \frac{\partial g}{\partial d_1} = \ldots = \frac{\partial g}{\partial d_k} = 0$ แต่

$$\frac{\partial g}{\partial d_i} = \frac{\partial}{\partial d_i} \int_a^b \left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)\right]^2 w(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial d_i} \left[\left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)\right]^2 w(x)\right] dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial d_i} \left[w(x) - d_i \left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)\right]^2 + \right.$$

$$\left. \left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)\right]^2 \frac{\partial}{\partial d_i} w(x)\right] dx$$

$$= \int_a^b w(x) - 2\left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)\right]\left(-p_i(x)\right) dx$$

$$= -2\int_a^b w(x)\left[f(x)\, p_i(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_1(x)\, p_i(x) - \ldots - \right.$$

$$\left. d_i p_i(x)\, p_i(x) - \ldots - d_k p_k(x)\, p_i(x)\right] dx$$

$$= -2\left[\int_a^b w(x) f(x)\, p_i(x)\,dx - d_0 \int_a^b w(x)\, p_0(x)\, p_i(x)\,dx\right.$$

$$\left. -d_1 \int_a^b w(x)\, p_i(x)\, p_i(x)\,dx - \ldots - d_i \int_a^b w(x)\, p_i^2(x)\,dx - \ldots - d_k \int_a^b w(x)\, p_k(x)\, p_i(x)\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_a^b w(x) f(x)\, p_i(x)\,dx - \ldots - d_i \int_a^b w(x)\, p_i^2(x)\,dx\right]$$

แต่ต้องการ $\frac{\partial g}{\partial d_i} = 0$ สำหรับทุกๆ i

$$\therefore \int_a^b w(x) f(x) p_i(x)\,dx = d_i \int_a^b w(x) p_i^2(x)\,dx = 0$$

$$\therefore d_i = \frac{\int_a^b w(x) f(x) p_i(x)\,dx}{\int_a^b w(x) p_i^2(x)\,dx}$$

นั่นคือถ้าจะให้ g มีค่าน้อยสุด d_i จะต้องมีค่าดังข้างต้นสำหรับทุกๆ ค่าของ $i = 0,1,2,...,k$

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

A.Carrido (2005) [2] ได้นำฟังก์ชันถ่วงของ Freud ซึ่งใช้ในพหุนามเชิงตั้งฉาก โดยฟังก์ชันถ่วงคือ $w(x) = e^{-x^4}$ และเรียกพหุนามเชิงตั้งฉากนี้ว่า Freud–type orthogonal polynomials

Alex Kasman (1996) [3] ได้แสดงถึงพหุนามเชิงตั้งฉากในการหาปริพันธ์แบบต่อเนื่อง ในกรณีเชิงเส้นคู่ $c = \sum_{i=1}^{m} \delta_{\lambda_i} \circ \sum_{j=0}^{\mu_i} \alpha_{ij} \partial_z^j$, δ_λ เป็นฟังก์ชันเดลตา $z = \lambda$ เป็นค่าคงที่, $\lambda_i \in C$, ∂_z เป็นตัวดำเนินการผลต่าง ∂ / ∂_z และ $\alpha_{ij} \in C$ ซึ่ง $\alpha_{i\mu_i} \neq 0$

Alicia Cachafeiro (2000) [4] ได้ศึกษาถึงพีชคณิต และการวิเคราะห์เกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉาก $(p,q)_s = \sum_{k=0}^{N} \int_R \lambda_k p^{(k)}(x) q^{(k)}(x)\, d\mu_k(x)$ ซึ่ง $(\mu_k)_{k=0}^{N}$ และ $N = 1$ p และ q เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากที่เป็นจำนวนจริง

A.Iserles (1988) [5] ได้แสดงว่าพหุนามเชิงตั้งฉากมีการประยุกต์ของคณิตศาสตร์และสมบัติของศูนย์โดยเฉพาะส่วนของระบบจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบท ได้ขยายการสำรวจตำแหน่งของศูนย์ในการตัดการกระจายในพหุนามเชิงตั้งฉาก

D.V.Chudnovsky (1999) [6] ใช้วิธีการวิเคราะห์ความกว้างของการสั่นสะเทือนของคลื่นวิทยุ (PWM) ปัญหานี้ได้นำสูตรมาใช้สองสูตร สูตรแรกเป็นพีชคณิตเป็นผลรวมของกำลังคี่ กำหนดให้เซต $\{x_i\}(i = 1,..,n)$ สมการคือ $\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m-1} = s_{2m-1,m=1,...,n}$ สูตรที่สอง เป็นผลรวมโคไซน์ กำหนดให้ $\{\alpha_i\}(i = 1,..,n)$ สมการคือ $\sum_{i=1}^{n} \cos(2m-1)\alpha_i = c_{2m-1}, m = 1,...,n$ สูตรนี้เป็นฐานหลักของวิธีการวิเคราะห์ความกว้างของการสั่นสะเทือนของคลื่นวิทยุ ได้นำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีการประมาณค่าทางเทคนิค และวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ได้ผลรวดเร็ว

Evgeniy D. Golovin (2003) [7] ได้ใช้วิธีใหม่สำหรับลักษณะเฉพาะของวงจรไฟฟ้า ซึ่งเป็นตัวแปรเสริมในอนุกรม โดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เทย์เลอร์ เช่นเดียวกันกับรูปแบบของความเที่ยงเพิ่ม ซึ่งพิจารณาจากการลดทอนของจำนวนของพจน์ในอนุกรม โดยใช้การแปรผันจากดีกรีในฐานของพหุนามเชิงตั้งฉากของเลคเกอร์, เลอช็องดร์ และรูปแบบที่หนึ่งของเชบีเชฟ และการเคลื่อนที่ของพหุนาม

Gradimir V. Milovanovic (2005) [8] ได้ทำการวิจัยพหุนามเชิงตั้งฉากบนครึ่งวงกลม ซึ่งเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนเชิงซ้อน $[f,g]_m = \int_0^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) g\left(e^{i\theta}\right) w_m\left(e^{i\theta}\right) d\theta \quad m = 1,2,\ldots,r$ บนฟังก์ชันถ่วง $w_m(x)$ $, m = 1,2,\ldots,r$ ได้แสดงพหุนามเชิงตั้งฉากบนครึ่งวงกลมในรูปแบบ II ซึ่งเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากของจำนวนจริง ตามฟังก์ชันถ่วง $w_m(x)$ $, m = 1,2,\ldots,r$

Ira M. Gessel (1988) [9] ได้นำพหุนามของ Laguerre และ Charlier มาศึกษาในการวิจัยโดยมีลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากคือ $p_0(x), p_1(x), \ldots$ และรูปในการหาปริพันธ์คือ

$$\int \prod_{i=1}^{r} p_{n_i}(x)\, d\mu$$

J. Arveu$'$ (2001) [10] พหุนามเชิงตั้งฉาก $\{p_n(x) : n = 0,1,2,\ldots\}$ สอดคล้องกับเมเชอร์ μ บนเส้นจำนวนจริง ซึ่ง p_n มีดีกรี n สอดคล้องกับเงื่อนไข $\int_{\mathbb{R}} p_n(x) x^j d\mu(x) = 0,\ j = 0,1,\ldots,n-1$ นิยามการคูณตัวประกอบพหุนามในกรณีที่พหุนามเชิงตั้งฉากไม่ต่อเนื่องเมเชอร์ μ $\mu = \sum_{k=0}^{N} \rho_k \delta_{x_k}$ $\rho_k > 0, x_k \in \mathbb{R}$ และ $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Jose$'$ L . (1991) [11] ได้หาค่าประมาณในพหุนามเชิงตั้งฉากของแอร์มีต ภายใต้ลิมิตของพหุนามเชิง ตั้งฉาก $H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$

K. H. Kwon (2001) [12] อธิบายถึงสมการอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งมีรูปแบบ $L[u] := A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_x + E(x,y)u_y = \lambda_n u \quad (n = 0,1,2,\ldots)$ ว่าเป็นพหุนามเชิง ตั้งฉากที่เป็นฟังก์ชันเฉพาะ ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนตัวแปรของพีชคณิตเชิงซ้อน ซึ่งประกอบด้วย

$$\left(x^2 + y + 1\right)u_{xx} + 2x(y+1)u_{xy} + (y+1)^2 u_{yy} + g\left(xu_x + yu_y\right) = n(n-1+g)u$$

และ $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + \left(y^2 - y\right)u_{yy} + g\left\{(x-1)u_x + (y-\gamma)u_y\right\} = n(n-1+g)u$

Manuel Alfaro (1991) [14] ได้ศึกษาพหุนามเชิงตั้งฉาก แบบเชิงเส้นคู่ $\mathrm{B}_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{N})}(f,g) = F(c)AG(c)^{T} + \left\langle u, f^{(N)}g^{(n)} \right\rangle$ โดยที่ u เป็นคล้ายกับนิยามฟังก์ชันนัลเชิงเส้นบนปริภูมิเชิงเส้นของพหุนามจำนวนจริง c เป็นจำนวนจริง N เป็นจำนวนเต็มบวก A เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นจำนวนจริง $N \times N$ ซึ่งแต่ละเมตริกซ์ย่อยเป็นเมตริกซ์สามัญ และ $F(c) = \left(f(c), f'(c), \ldots, f^{(N-1)}(c)\right)$ $G(c) = \left(g(c), g'(c), \ldots, g^{(N-1)}(c)\right)$

Phimpraphai Phutthiwat (2548) [15] ได้คำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนสองลำดับบนช่วง [0,1] โดยมีฟังก์ชันถ่วงคือ $\sqrt{1+x^2}$ และ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ซึ่งได้นำพหุนามเชิงตั้งฉากนี้ไปใช้ในการคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต และหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

V.F.Aleksin (1996) [17] ได้ศึกษาถึงพหุนามเชิงตั้งฉากเพื่อนำไปใช้ในวิชาที่เกี่ยวกับแรงของการเคลื่อนตัวของของเหลว เนื่องจากการวิเคราะห์นั้นซับซ้อนจึงได้มีการนำการประมาณค่ามาใช้ในการคำนวณ รูปแบบของฟังก์ชันคือ $G_n^{(\alpha)} = \int\limits_0^{\infty} w^{(\alpha)}(x)\, x^n\, dx$

Yunier Bello Cruz (2005) [18] ได้นำพหุนามเชิงตั้งฉากของ Legendre มาศึกษา โดยมีพหุนามเชิงตั้งฉาก Legendre (Legendre orthogonal polynomial) $\int\limits_{-1}^{1} L_n(x)\, x^k\, dx = 0$ $k = 0,1,\ldots,n-1$ โดยที่ ς เป็นจำนวนเชิงซ้อน และโดยที่ $n \in N$ ให้ P_n เป็นพหุนามโมนิคที่มีระดับขั้น n ซึ่ง $(n+1)L_n(z) = \left((z-\varsigma)P_n(z)\right)' - P_n(z) + (z-\varsigma)P_n'(z)$ P_n เรียก n ว่าพหุนามเชิงขั้ว Legendre (Legendre polar polynomial)

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 ฟังก์ชันถ่วง

การวิจัยนี้ได้ศึกษาถึงพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง $[0,1]$ ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันขั้นบันได

$$w(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}, 0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}, \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ 1, \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

$$w(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}, 0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

และ

$$w(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ 1, \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

3.2 การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันถ่วง

การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันถ่วงทั้งหกฟังก์ชันได้ใช้ ทฤษฎีบท 2.3.1 คำนวณโดยสูตร

$$c_k = \int_0^1 w(x) \cdot x^k \, dx$$

3.3 การหาสัมประสิทธิ์

นำค่าปริพันธ์ที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันถ่วง มาทำการหาสัมประสิทธิ์ โดยใช้ขั้นตอนในการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.2.1

$$\begin{aligned}
a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_{k-1}c_{k-1} &= -c_k \\
a_0c_1 + a_1c_2 + a_2c_3 + \ldots + a_{k-1}c_k &= -c_{k+1} \\
a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_4 + \ldots + a_{k-1}c_{k+1} &= -c_{k+2} \\
. \qquad\qquad &\quad . \\
. \qquad\qquad &\quad . \\
. \qquad\qquad &\quad . \\
a_0c_{k-1} + a_1c_k + a_2c_{k+1} + \ldots + a_{k-1}c_{2k-2} &= -c_{2k-1}
\end{aligned}$$

มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรม MATLAB โดยค่า $a_0, a_1, \ldots, a_{13}$ เขียนแทนด้วย a0,a1,…,a13 ตามลำดับ ดังตัวอย่าง

```
[a0]=solve('a0=-7.0/12.0')
```

ผลที่ได้คือ a0 = -0.58333333333333333333333333333333

```
[a0,a1]=solve('a0+(7.0/12.0)*a1=-5.0/12.0','(7.0/12.0)*a0+(5.0/12.0)*a1=
    -31.0/96.0')
```

ผลที่ได้คือ a0 = 0.19318181818181818181818181818177

a1 = -1.0454545454545454545454545454545

```
[a0,a1,a2]=solve('a0+(7.0/12.0)*a1+(5.0/12.0)*a2=31.0/96.0','(7.0/12.0)*a0+
    (5.0/12.0)*a1+(31.0/96.0)*a2=-21.0/80.0','(5.0/12.0)*a0+
    (31.0/96.0)*a1+(21.0/80.0)*a2=-127.0/576.0')
```

ผลที่ได้คือ a0 = -0.58735380116959064327485380117067e-1

a1 = 0.66345029239766081871345029239826

a2 = -1.5628654970760233918128654970766

3.4 การหารากของพหุนามเชิงตั้งฉาก

นำสัมประสิทธิ์ที่ได้มาทำการหารากของพหุนามเชิงตั้งฉากโดยใช้ ทฤษฎีบท 2.4.2 มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรม MATLAB ดังตัวอย่าง

[x]=solve('x-0.583333333333333333333333333333=0.0')

ผลที่ได้คือ x = [0.583333333333333333333333333333]

[x]=solve('x^2-1.045454545454545454545454545454545*x+
0.193181818181818181818181818177=0.0')

ผลที่ได้คือ x = [0.23977500913661971875372793939125]
[0.80567953631792573579172660606325]

[x]=solve('x^3-1.5628654970760233918128654970766*x^2+
0.66345029239766081871345029239826*x-
0.05873538011695906432748538011707=0.0')

ผลที่ได้คือ x =[0.11969453865649418040359310757348]
[0.54845260110973155491450743175859]
[0.89471835730979765649476495774453]

3.5 การหาค่าถ่วง

นำรากของพหุนามที่ได้จากการคำนวณมาหาค่าถ่วงคำนวณโดยนำทฤษฎีบท 2.4.3 มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรม MATLAB โดยค่า $A_n, n = 1, 2, ..., 7$ เขียนแทนด้วย A1,A2,…,A7 ตามลำดับ ดังตัวอย่าง

[A1]=solve('A1=1)

ผลที่ได้คือ A1=1

[A1,A2]=solve('A1+A2=1','0.23977500913661971875372793939125*A1+
0.80567953631792573579172660606325*A2=7/12')

ผลที่ได้คือ A1 = 0.39290408947966681828098089749002
A2 = 0.60709591052033318171901910250998

```
[A1,A2,A3]=solve('A1+A2+A3=1','
        0.11969453865649418040359310757348*A1+
        0.54845260110973155491450743175859*A2+
        0.89471835730979765649476495774453*A3=7/12','
        0.11969453865649418040359310757348^2*A1+
        0.54845260110973155491450743175859^2*A2+
        0.89471835730979765649476495774453^2*A3=5/12')
```

ผลที่ได้คือ A1 = 0.19719531345342270158960286485235

A2 = 0.45789673476013001242255459434969

A3 = 0.34490795178644728598784254079796

3.6 การหาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง

นำค่าถ่วงที่ได้มาทำการหาค่าปริพันธ์โดยใช้รูปแบบเกาส์–ควอดเดรเจอร์ (Gauss–Quadrature formula) โดยใช้สูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$, $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$ และ $\int_0^1 w(x)e^x dx$ จะทำให้ทราบค่าคลาดเคลื่อนซึ่งเกิดขึ้นระหว่างค่าจริงกับค่าที่คำนวณได้

3.7 การหาค่าประมาณแบบกำลังสองน้อยสุด

ในการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด ได้ใช้ฟังก์ชันถ่วง นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชันต่างๆ โดยจัดให้อยู่ในรูปของสมการ

$$y = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + d_2 p_2(x) + \ldots + d_7 p_7(x)$$

ค่า $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_7$ หาได้จาก

$$d_i = \frac{\int_a^b w(x) f(x)\, p_i(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, p_i^2(x)\, dx}$$

การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงได้แก่

ฟังก์ชันถ่วงที่ 1 และฟังก์ชันถ่วงที่ 5 นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2(1-x) & ; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

ฟังก์ชันถ่วงที่ 2 นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{2}{3} + 3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3$$

ฟังก์ชันถ่วงที่ 3 นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{4}{3} - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3$$

ฟังก์ชันถ่วงที่ 4 และฟังก์ชันถ่วงที่ 6 นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 3x^2 - 3x + 1 & ; x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ 1 - x & ; x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

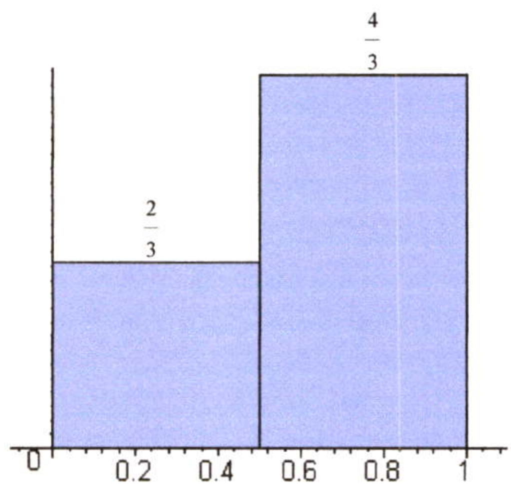
บทที่ 4

ผลงานการวิจัย

การวิจัยนี้ได้ทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ บนช่วง $[0,1]$ ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันขั้นบันได โดยคำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของลำดับของ พหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ เพื่อทำการหาค่ารากพหุนามเชิงตั้งฉาก และทำการประยุกต์ใช้ในสองแนวทาง ได้แก่ หาปริพันธ์เชิงตัวเลขและการประมาณในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุด ซึ่งได้ผลการวิจัยดังนี้

4.1 ค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก

4.1.1 ฟังก์ชันถ่วงที่ 1



$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, 0\le x<\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $c_k=\int_0^1 w(x)\cdot x^k\,dx$ โดย $k=0,1,2,\ldots,13$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^0 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^0 dx = 1$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^1 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^1 dx = \frac{7}{12}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^2 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^2 dx = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^3 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^3 dx = \frac{31}{96}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^4 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^4 dx = \frac{21}{80}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^5 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^5 dx = \frac{127}{576}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^6 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^6 dx = \frac{85}{448}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^7 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^7 dx = \frac{511}{3072}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^8 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^8 dx = \frac{341}{2304}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^9 dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^9 dx = \frac{2047}{15360}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/2} x^{10}dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^{10}dx = \frac{1365}{11264}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/2} x^{11}dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^{11}dx = \frac{8191}{73728}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/2} x^{12}dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^{12}dx = \frac{5461}{53248}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/2} x^{13}dx + \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^{13}dx = \frac{4681}{49152}$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x - 0.58333333333333333333333333333333$

$p_2(x) = x^2 - 1.0454545454545454545454545454545\,x + 0.19318181818181818181818181818181817$

$= (x-0.2397750091366197187537279393 91)(x-0.80567953631792573579172660 6063)$

$p_3(x) = x^3 - 1.5628654970760233918128654970\,x^2 + 0.6634502923976608187134502923 9\,x$

$-0.058735380116959064327485380117 07$

$= (x-0.11969453865649418040359310757 3)(x-0.54845260110973155491450743175 85)$

$(x-0.89471835730979765649476495774 45)$

$p_4(x) = x^4 - 2.0504780575421380617039219337\,x^3 + 1.3641869892622846941792915267 2\,x^2$

$-0.3181179192958136522156805377261 8\,x + 0.016791080144588090309666968631 7$

$= (x-0.073460490598607236808731744404 6)(x-0.35634771302872154022178119166 5)$

$(x-0.68700455360335717250056888706 8)(x-0.93366530031145211217284011057 30)$

$p_5(x) = x^5 - 2.5592610402515818992035020935 9\,x^4 + 2.3415924270759297525335108203\,x^3$

$-0.9092894413350548543080620341 74\,x^2 + 0.1349605698784260948439418596344\,x$

$-0.0046757078278155445230782511480 2$

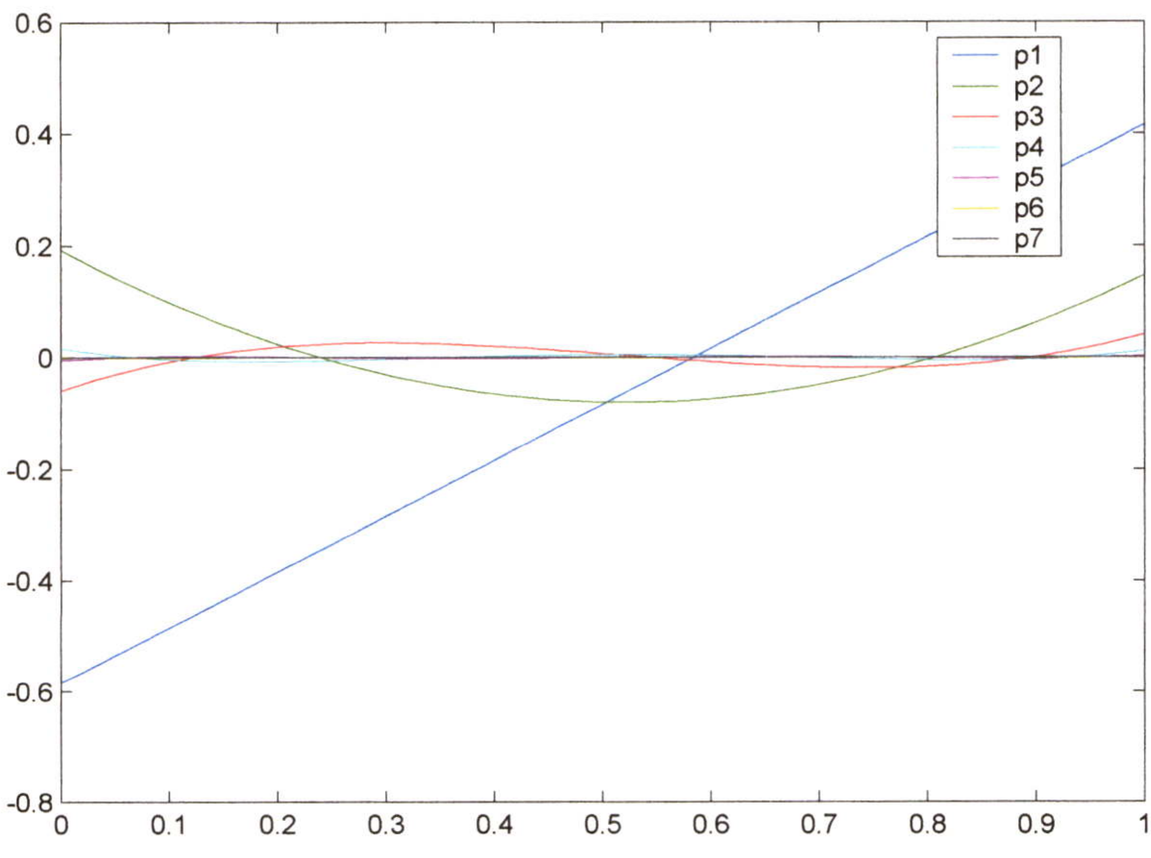
$= (x-0.048754072849315865364254709109 8)(x-0.24069700702867798440510374369 0)$

$(x-0.53509027600822161705649773197 85)(x-0.77968882631969494351562786863 1)$

$(x-0.95503085804567148886201804018 214)$

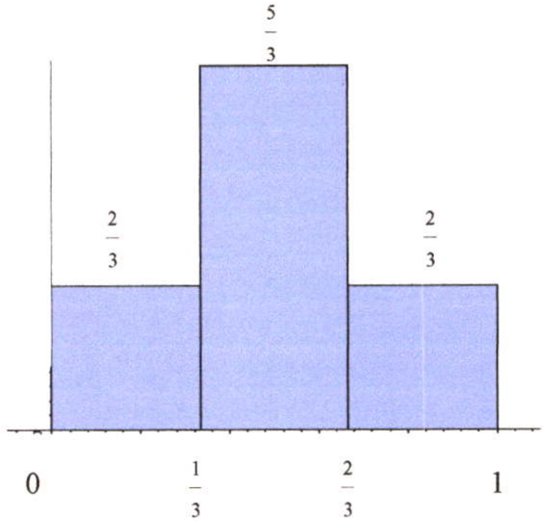
$$p_6(x) = x^6 - 3.05222866258346787388092446612\,x^5 + 3.54206377050205181046445862224\,x^4$$
$$-1.93820840651878470556612724912\,x^3 + 0.49977511963943234324741975427 16\,x^2$$
$$-0.05175033423868028949765005660227\,x + 0.00127800514878935877342863807763$$
$$= (x - 0.03504397275470270010228970136 36)(x - 0.17636068511052204752420783550)$$
$$(x - 0.40307832719306325745867745621 7)(x - 0.63423900927504342041872286750 90)$$
$$(x - 0.83621065160987182290032108466 1)(x - 0.96729601664026462547670552086 64)$$

$$p_7(x) = x^7 - 3.55783643389528044895379093 19\,x^6 + 5.02065207862469642599013631262\,x^5$$
$$-3.56366705120730219572993289511\,x^4 + 1.32838261137975697558969570076 83\,x^3$$
$$-0.24566202734350013663573444228 0\,x^2 + 0.01871922498605201886642829765 69\,x$$
$$-0.00034392118457704274271067417751$$
$$= (x - 0.02618051534231070960560040399 41)(x - 0.13312410082955646060994460522 7)$$
$$(x - 0.30711425706509578167837912500 0)(x - 0.52784744131602465004949508506 91)$$
$$(x - 0.71341622225131523885962508193 5)(x - 0.87483268683480769257005383040 69)$$
$$(x - 0.97532121025616991558069280027623)$$



ภาพที่ 4.1 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

4.1.2 ฟังก์ชันถ่วงที่ 2



$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, 0\le x<\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{5}{3}\ ,\dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{2}{3}\\[2mm] \dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $\quad c_k=\int_0^1 w(x)\cdot x^k\,dx \quad$ โดย $k=0,1,2,\ldots,13$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{0}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{0}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{0}dx=1$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{1}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{1}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{1}dx=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{2}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{2}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{2}dx=\frac{25}{81}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{3}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{3}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{3}dx=\frac{23}{108}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{4}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{4}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{4}dx=\frac{193}{1215}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{5}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{5}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{5}dx=\frac{61}{486}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{6}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{6}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{6}dx=\frac{1585}{15309}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{7}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{7}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{7}dx=\frac{1543}{17496}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{8}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{8}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{8}dx=\frac{13633}{177147}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{9}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{9}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{9}dx=\frac{13463}{196830}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{10}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{10}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{10}dx=\frac{120145}{1948617}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{11}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{11}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{11}dx=\frac{39821}{708588}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{12}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{12}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{12}dx=\frac{1071073}{20726199}$$

$$\frac{2}{3}\int_{0}^{1/3} x^{13}dx+\frac{5}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{13}dx+\frac{2}{3}\int_{2/3}^{1} x^{13}dx=\frac{1068343}{22320522}$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x)$=1

$p_1(x)$= x-0.5000000000000000000

$p_2(x)=x^2$ -1.000000000000000000 x +0.191358024691358024691358024691 36

= (x-0.257838947581073691542389889785 5)(x-0.742161052418926308457610110214)

$p_3(x)=x^3$ -1.49999999999999999999999999999 x^2 +0.607017543859649122807017543 85 x

-0.0535087719298245614035087719292 0

= (x-0.121869789437089703998902316219)(x-0.499999999999999999999999999986)

(x-0.878130210562910296001097683779 09)

$p_4(x)=x^4$ -1.99999999999999999999999999999 x^3 +1.298334433927654266637317484 67 x^2

-0.298334433927654266637317484730 54 x +0.015524901965579931681626596876 3

= (x-0.072396547057832142917212855150 25)(x-0.362810885620319815511162438 18)

(x-0.637189114379680184488837561771)(x-0.927603452942167857082787144832 3)

$p_5(x)=x^5$ -2.50000000000000000000000000011 x^4 +2.236575367356063655430925215 0 x^3

-0.854863051034095483146387822378 x^2 +0.127203282028055571180264768413 8 x

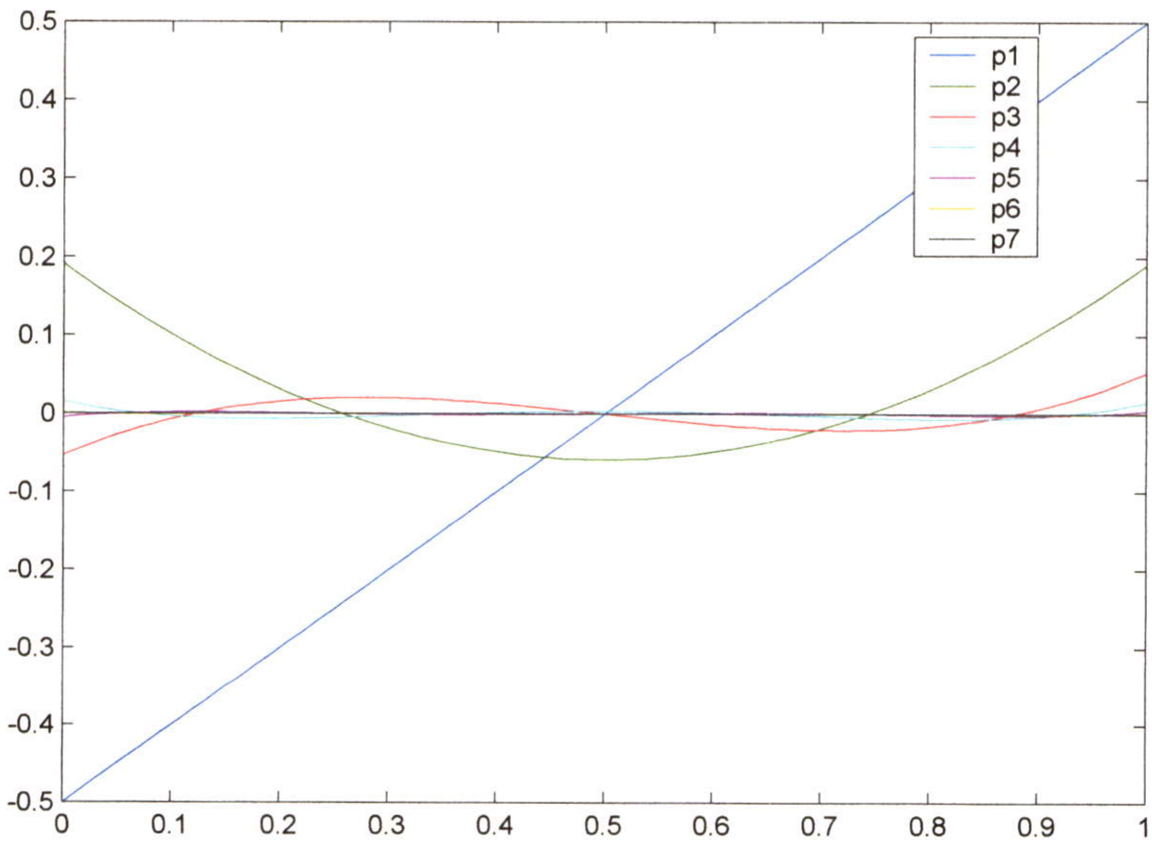
-0.004457799175011871732401080487 52

= (x-0.049488046897364146653206370072 6)(x-0.254106501192925439962222684920)

(x-0.500000000000000000000000000502)(x-0.745893498807074560037777315153)

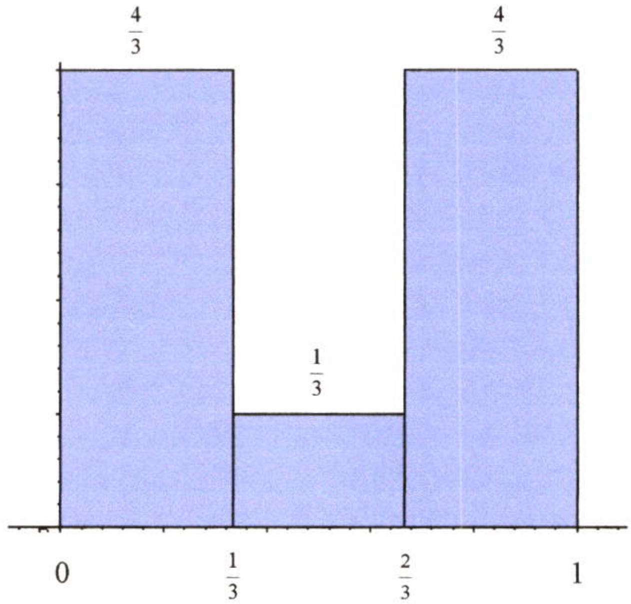
(x-0.950511953102635853346793629921 47)

$$p_6(x) = x^6 - 3.00000000000000000000000000082\,x^5 + 3.41784663423829285959479356334\,x^4$$
$$-1.83569326847658571918958710402\,x^3 + 0.46540192673807754180031832876\,94\,x^2$$
$$-0.04755529249978468220552477996022\,x + 0.00116189274363403749173151146927$$
$$= (x-0.0347101820027377402413888995428)(x-0.1755280164182820158441831627 26)$$
$$(x-0.3981339953648566981723881745819)(x-0.6018660046351433018276118293 96)$$
$$(x-0.8244719835817179841558168407312)(x-0.9652898179972622597586111012 27)$$
$$p_7(x) = x^7 - 3.50000000000000000000000015165\,x^6 + 4.86030302161701744710049656 46\,x^5$$
$$-3.40075755404254361775124079303\,x^4 + 1.25454793443894632463097002931 53\,x^3$$
$$-0.23106434761587586919521442187 03\,x^2 + 0.01761980260834910417944969403 8\,x$$
$$-0.000324428502946694482230460892 08$$
$$= (x-0.0262486746274799652900948482832)(x-0.1340960515786531878084263044 02)$$
$$(x-0.3228815068367179807288990366 87)(x-0.500000000000000000000000360356)$$
$$(x-0.6771184931632820192711010316 86)(x-0.8659039484213468121915737337 30)$$
$$(x-0.9737513253725200347099051607 8705)$$



ภาพที่ 4.2 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 2

4.1.3 ฟังก์ชันถ่วงที่ 3



$$w(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\ ,\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3},\frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $c_k=\int_0^1 w(x)\cdot x^k\,dx$ โดย $k=0,1,2,\ldots,13$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{0}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{0}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{0}dx=1$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{1}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{1}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{1}dx=\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{2}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{2}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{2}dx=\frac{29}{81}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{3}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{3}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{3}dx=\frac{31}{108}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{4}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{4}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{4}dx=\frac{293}{1215}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{5}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{5}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{5}dx=\frac{101}{486}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{6}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{6}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{6}dx=\frac{2789}{15309}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{7}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{7}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{7}dx=\frac{2831}{17496}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{8}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{8}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{8}dx=\frac{25733}{177147}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{9}dx+\frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{9}dx+\frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{9}dx=\frac{25903}{196830}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{10}dx + \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{10}dx + \frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{10}dx = \frac{234149}{1948617}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{11}dx + \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{11}dx + \frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{11}dx = \frac{78277}{708588}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{12}dx + \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{12}dx + \frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{12}dx = \frac{2117573}{20726199}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/3} x^{13}dx + \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} x^{13}dx + \frac{4}{3}\int_{2/3}^{1} x^{13}dx = \frac{2120303}{22320522}$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x)$=1

$p_1(x)$= x-0.5000000000000000000

$p_2(x) = x^2$ -1.000000000000000000000000000001 x +0.141975308641975308641975308642

= (x-0.171328900938910219857370650468)(x-0.828671099061089780142629349531)

$p_3(x) = x^3$ -1.500000000000000000000000000035 x^2 +0.596190476190476190476190476190476 x

-0.0480952380952380952380952380952380958 1

= (x-0.107814426821276596918740469578)(x-0.500000000000000000000000000024)

(x-0.892185573178723403081259530422 41)

$p_4(x) = x^4$ -2.000000000000000000000000000049 x^3 +1.261354464744295252769829041 x^2

-0.261354464744295252769829041049 17 x +0.012003000138593358932341983192 49

= (x-0.063477897036946826965154658331 1)(x-0.280696582606612462663851300679)

(x-0.719303417393387537336148699356 7)(x-0.936522102963053173034845341682)

$p_5(x) = x^5$ -2.500000000000000000000000000039 x^4 +2.211451036338818181531136566 8 x^3

-0.817176554508227272296704849612 x^2 +0.112928283766142274273997942553 6 x

-0.003601382798366591754214829710 11

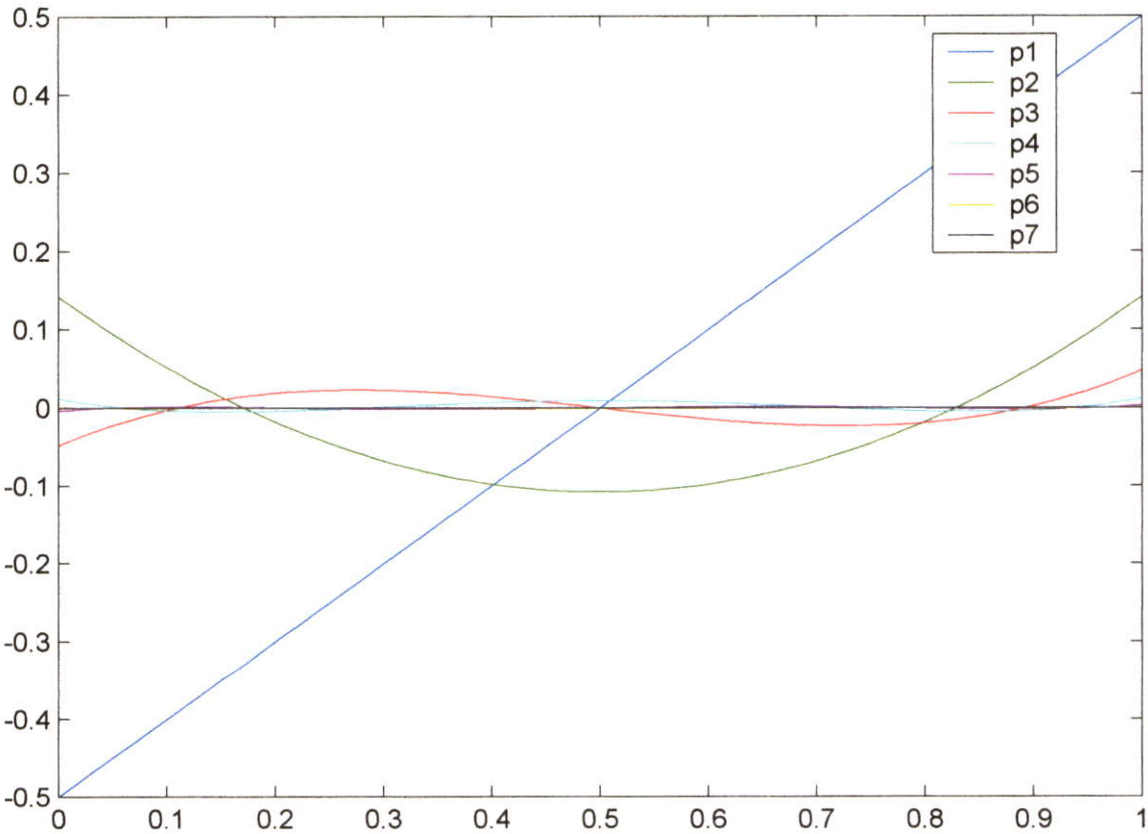
= (x-0.044672610815342445343960449052 8)(x-0.214998364356508976554878780809)

(x-0.500000000000000000000000000189)(x-0.785001635643491023445121219337 8)

(x-0.955327389184657554656039551004 89)

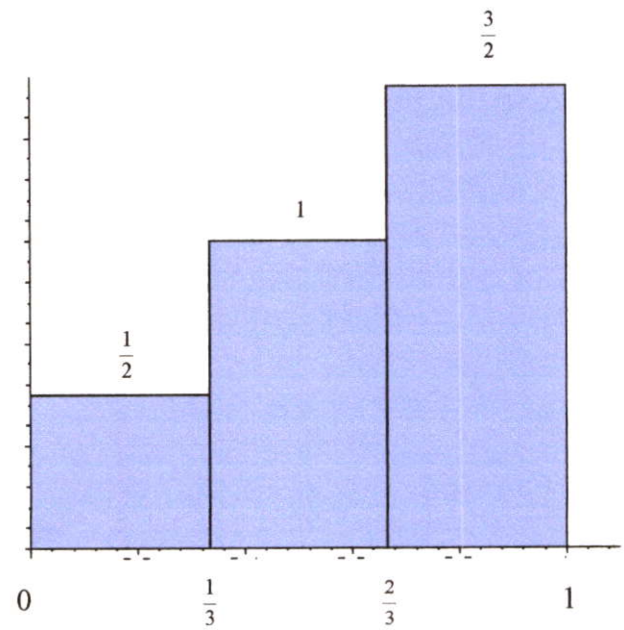
$$
\begin{aligned}
p_6(x) = {} & x^6 - 2.99999999999999999999999999947\, x^5 + 3.39007220353818276633106605714\, x^4 \\
& - 1.78014440707636553266213212894\, x^3 + 0.43148255157893788102148368921 73\, x^2 \\
& - 0.04141034804075511469041762263217\, x + 0.0009439312591846367939508794158 9 \\
= {} & (x - 0.03230730066900243042197541482 96)(x - 0.1605285269024349472660506079 16) \\
& (x - 0.33890855265635141155211339389 2)(x - 0.66109144734364858844788660291 20) \\
& (x - 0.83947147309756505273394939036 9)(x - 0.96769269933099756957802458483 34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_7(x) = {} & x^7 - 3.50000000000000000000000000681\, x^6 + 4.82894452905716510652974578925\, x^5 \\
& - 3.32236132264291276632436419258\, x^4 + 1.18637389603709221374173847682 7\, x^3 \\
& - 0.20719952141272555428824360142 4\, x^2 + 0.01474606190980545817715095345 4\, x \\
& - 0.00025182147421222891801367873882 \\
= {} & (x - 0.02429037123866073496606880273 69)(x - 0.12240483355470584474925442526 3) \\
& (x - 0.27157559166381917790573245378 29)(x - 0.50000000000000000000000028643) \\
& (x - 0.72842440833618082209426756924 5)(x - 0.87759516644529415525074558843 49) \\
& (x - 0.97570962876133926503393120006614)
\end{aligned}
$$



ภาพที่ 4.3 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 3

4.1.4 ฟังก์ชันถ่วงที่ 4



$$w(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ 1\ , \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $c_k=\int_0^1 w(x)\cdot x^k dx$ โดย $k=0,1,2,...,13$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{0}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{0}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{0}dx=1$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{1}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{1}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{1}dx=\frac{11}{18}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{2}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{2}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{2}dx=\frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{3}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{3}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{3}dx=\frac{113}{324}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{4}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{4}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{4}dx=\frac{116}{405}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{5}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{5}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{5}dx=\frac{1061}{4374}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{6}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{6}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{6}dx=\frac{1072}{5103}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{7}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{7}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{7}dx=\frac{9713}{52488}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{8}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{8}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{8}dx=\frac{1084}{6561}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{9}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{9}dx+\frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{9}dx=\frac{88061}{590490}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{10}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{10}dx + \frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{10}dx = \frac{88232}{649539}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{11}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{11}dx + \frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{11}dx = \frac{795113}{6377292}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{12}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{12}dx + \frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{12}dx = \frac{795796}{6908733}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1/3} x^{13}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{13}dx + \frac{3}{2}\int_{2/3}^{1} x^{13}dx = \frac{7166261}{66961566}$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x - 0.611111111111111111111111111111$

$p_2(x) = x^2 - 1.08695652173913043478260869565\,x + 0.21980676328502415458937198067643$

$= (x-0.268593090747961478708930414134)(x-0.818363430991168956073678281 5178)$

$p_3(x) = x^3 - 1.57506436918201624083977025 15\,x^2 + 0.67965933848286789463260051 4956\,x$

$-0.0640841970907330384454567461 1101$

$= (x-0.13046855059687340788355361 1703)(x-0.54757168362893700231064655 40733)$

$(x-0.89702413495620583064557008 576021)$

$p_4(x) = x^4 - 2.09097368239151775123616725 30\,x^3 + 1.42707968945844479577113828 933\,x^2$

$-0.34388979485225154078584785 726630\,x + 0.01873682163262734683407673 355117$

$= (x-0.07574943533106755907267503 96237)(x-0.37553583846783270260926665 7319)$

$(x-0.70374644382297924800105592 11837)(x-0.93594196476963824155316963 4938)$

$p_5(x) = x^5 - 2.57774463800679011007727125 235\,x^4 + 2.38444008592591555786316264 86\,x^3$

$-0.94331469075973911441799181 8530\,x^2 + 0.14503687821839468375488929 37030\,x$

$-0.00524569849700815840505079 617449$

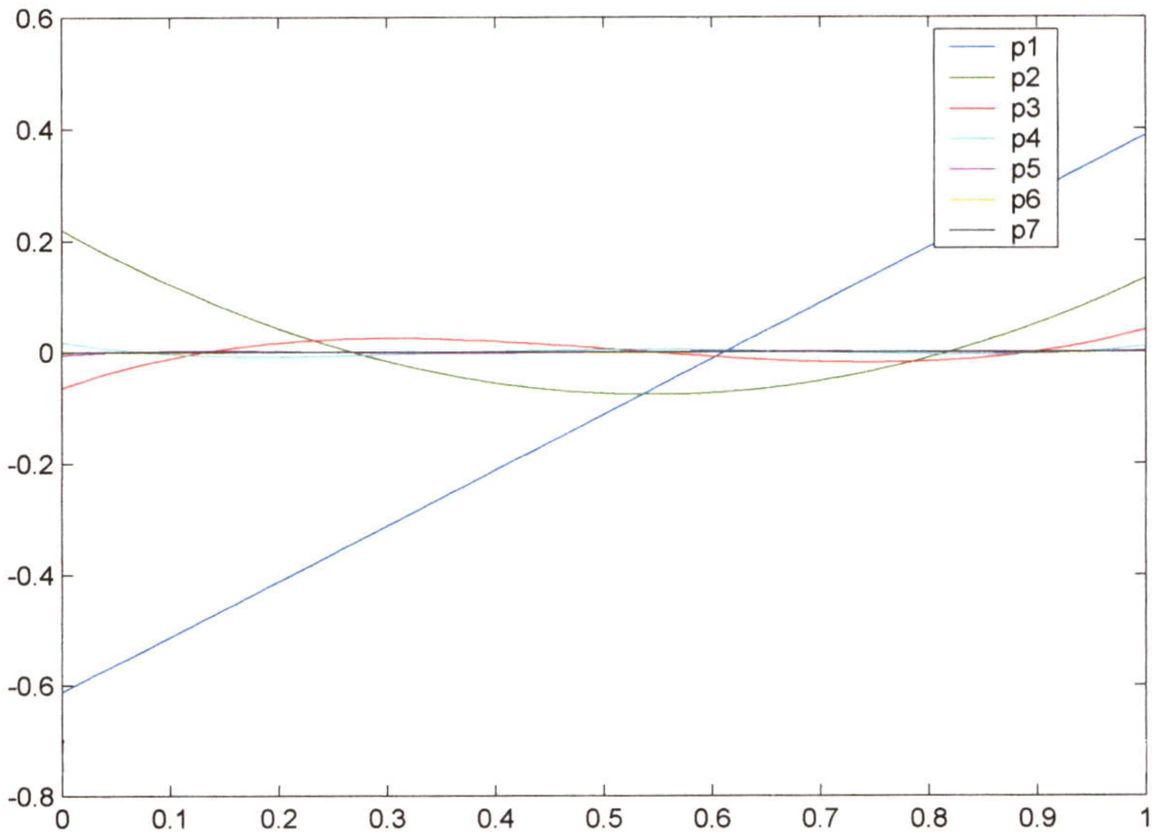
$= (x-0.05104805851884510744810383 70673)(x-0.26065120063666437586717210 3999)$

$(x-0.52584012409356463142693143 8207)(x-0.78443672459621903283935724 18149)$

$(x-0.95576853016149696249570663 126720)$

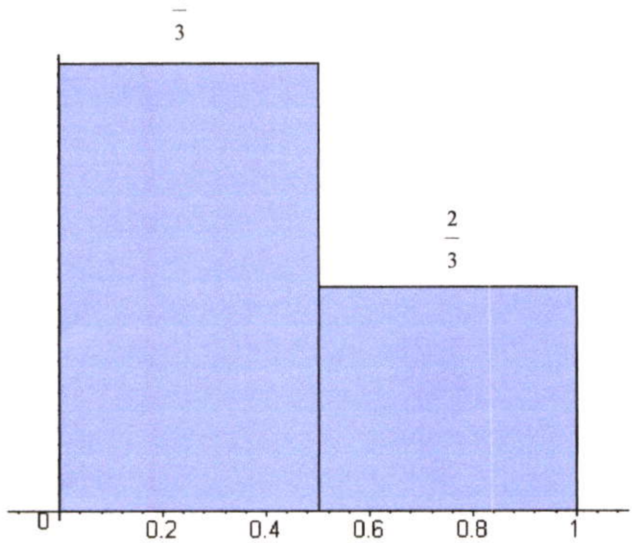
$$p_6(x) = x^6 - 3.08363483591298330009495708084\,x^5 + 3.62226472428600521721252040083\,x^4$$
$$- 2.01109205663214499000749982304\,x^3 + 0.527733466614475761879137875480 5\,x^2$$
$$- 0.0558422318223080753470152544960 9\,x + 0.00141278701779855388660619060263$$
$$= (x-0.0359392627483222598578665383884)(x-0.181868479104801800563498953007)$$
$$(x-0.410786301718329301466863378533)(x-0.647326145269704111368481664868 9)$$
$$(x-0.839771709950919888556742345322)(x-0.967942937120905938281504200723 8)$$

$$p_7(x) = x^7 - 3.58459795752208804220762003762\,x^6 + 5.10595497757512984450072667 95\,x^5$$
$$- 3.66822042980511013396799771061\,x^4 + 1.38953409443354520264052592456 66\,x^3$$
$$- 0.262583463496848299830061548916 2\,x^2 + 0.0205263560358599863132636176 96\,x$$
$$- 0.000387257333812426992790286419825 13$$
$$= (x-0.0268900595924284614480548732546)(x-0.137278939379155037709388654949)$$
$$(x-0.327549610084880813385605588183)(x-0.518985884730470314627935689216 1)$$
$$(x-0.721227993494410757276666437073)(x-0.876964765281926475105451724398 2)$$
$$(x-0.975700704958816182654517070544 26)$$



ภาพที่ 4.4 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 4

4.1.5 ฟังก์ชันถ่วงที่ 5



$$w(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}, 0 \le x < \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \le x \le 1\end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $c_k = \int_0^1 w(x)\cdot x^k dx$ โดย $k = 0,1,2,...,13$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^0 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^0 dx = 1$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^1 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^1 dx = \frac{5}{12}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^2 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^2 dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^3 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^3 dx = \frac{17}{96}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^4 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^4 dx = \frac{11}{80}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^5 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^5 dx = \frac{65}{576}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^6 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^6 dx = \frac{43}{448}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^7 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^7 dx = \frac{257}{3072}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^8 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^8 dx = \frac{19}{256}$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^9 dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^9 dx = \frac{205}{3072}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/2} x^{10}dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^{10}dx = \frac{683}{11264}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/2} x^{11}dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^{11}dx = \frac{4097}{73728}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/2} x^{12}dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^{12}dx = \frac{2731}{53248}$$

$$\frac{4}{3}\int_{0}^{1/2} x^{13}dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^{13}dx = \frac{16385}{344064}$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x)$=1

$p_1(x)$= x-0.41666666666666666666666666666667

$p_2(x)$= x^2 -0.95454545454545454545454545454545 x +0.14772727272727272727272727272727272

= (x-0.19432046368207426420827339393 6)(x-0.76022499086338028124627206060 86)

$p_3(x)$= x^3 -1.43713450292397660818713450292 x^2 +0.53771929824561403508771929824 x

-0.04184941520467836257309941520441

= (x-0.10528164269020234350523504225 5)(x-0.45154739889026844508549256824 08)

(x-0.88030546134350581959640689242643)

$p_4(x)$= x^4 -1.94952194245786193829607806626 x^3 +1.21275281663587050906752572 55 x^2

-0.25882188660234155103113671457531 x +0.01238209256892107056935602391925

= (x-0.06633469968854788782715988942 27)(x-0.31299544639664282749943111291 7)

(x-0.64365228697127845977821880832 6)(x-0.92653950940139276319126825559 42)

$p_5(x)$= x^5 -2.44073895974841810079649790618 x^4 +2.10454826606960215571950244 54 x^3

-0.75992159838324300807145786484 5 x^2 +0.10411480742977804701434187775 00 x

-0.00332680753990354934281030102145

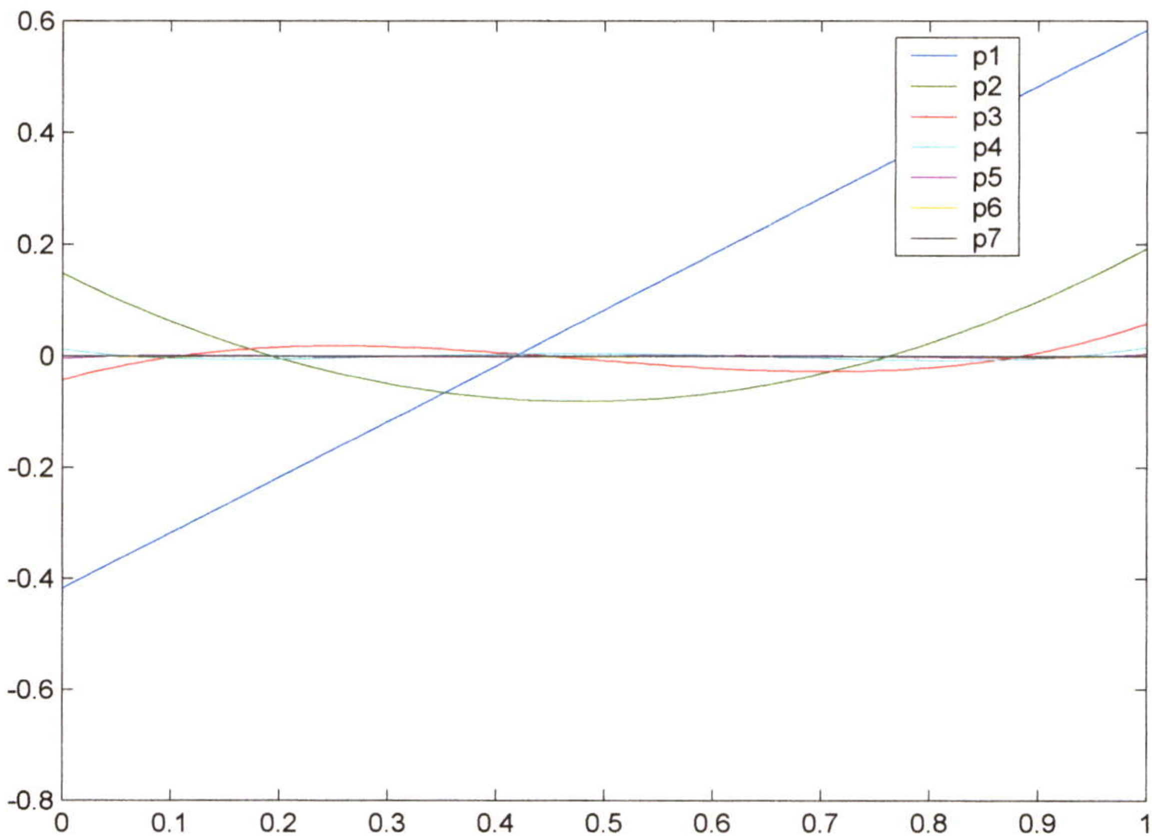
= (x-0.04496914195432851113798195977 55)(x-0.22031117368030505648437213126 0)

(x-0.46490972399177838294350226794 7)(x-0.75930299297132201559489625630 39)

(x-0.95124592715068413463574529089755)

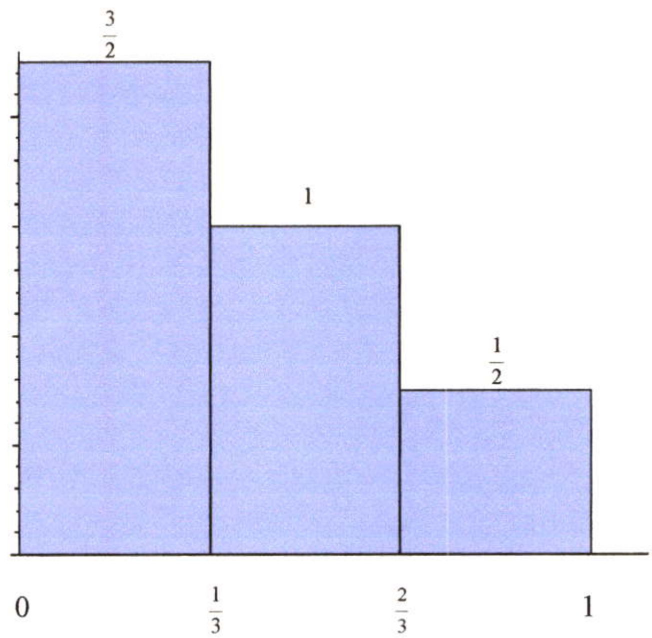
$$
\begin{aligned}
p_6(x) = {} & x^6 - 2.94777133741653212611907557756\,x^5 + 3.28092045758471244105983639 70\,x^4 \\
& -1.70776004965474379748246266855\,x^3 + 0.41524589726071035052654511167 02\,x^2 \\
& -0.04028645457469815275201986779837\,x + 0.00092949194934064354060524304339 \\
= {} & (x-0.03270398335973537452329448029 56)(x-0.16378934839012817709967892095 8) \\
& (x-0.36576099072495657958127714270 05)(x-0.59692167280693674254132255910 8) \\
& (x-0.82363931488947795247579217362 7)(x-0.96495602724529729989771030087 42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_7(x) = {} & x^7 - 3.44216356610471955104621178004\,x^6 + 4.67363347525301373226739859 99\,x^5 \\
& -3.17204683348697319991389330797\,x^4 + 1.12350651489190347349551300191 38\,x^3 \\
& -0.19645777736971514134825547847 4\,x^2 + 0.01411658936091332567225100449 99\,x \\
& -0.00024448135984559638409136973625 \\
= {} & (x-0.02467878974383008441930725086 57)(x-0.12516731316519230742994641813 5) \\
& (x-0.28658377774868476114037543046 6)(x-0.47215255868397534995050556555 01) \\
& (x-0.69288574293490421832162158850 5)\ (x-0.86687589917044353939005582761 0) \\
& (x-0.97381948465768929039439969890 805)
\end{aligned}
$$



ภาพที่ 4.5 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 5

4.1.6 ฟังก์ชันถ่วงที่ 6



$$w(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}, 0\le x<\frac{1}{3}\\ 1\ , \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\le x\le 1\end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $c_k=\int_0^1 w(x)\cdot x^k\,dx$ โดย $k=0,1,2,\ldots,13$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{0}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{0}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{0}dx=1$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{1}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{1}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{1}dx=\frac{7}{18}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{2}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{2}dx=\frac{2}{9}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{3}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{3}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{3}dx=\frac{49}{324}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{4}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{4}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{4}dx=\frac{46}{405}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{5}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{5}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{5}dx=\frac{397}{4374}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{6}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{6}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{6}dx=\frac{386}{5103}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{7}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{7}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{7}dx=\frac{3409}{52488}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{8}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{8}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{8}dx=\frac{374}{6561}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{9}dx+\int_{1/3}^{2/3} x^{9}dx+\frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{9}dx=\frac{30037}{590490}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{10}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{10}dx + \frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{10}dx = \frac{29866}{649539}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{11}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{11}dx + \frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{11}dx = \frac{267769}{6377292}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{12}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{12}dx + \frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{12}dx = \frac{267086}{6908733}$$

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{1/3} x^{13}dx + \int_{1/3}^{2/3} x^{13}dx + \frac{1}{2}\int_{2/3}^{1} x^{13}dx = \frac{342811}{9565938}$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x)=1$

$p_1(x)=$ x-0.38888888888888888888888888888889

$p_2(x)=x^2$ -0.91304347826086956521739130434 x +0.13285024154589371980676328502 41

=(x-0.18163656900883104392632171848 2)(x-0.73140690925203852129106958586 56)

$p_3(x)=x^3$ -1.42493563081798375916022974846 x^2 +0.52953060011883541295306001188 x

-0.04051077221011861534737351730795

= (x-0.10297586504379416935442991423 9)(x-0.45242831637106299768935344592 70)

(x-0.86953144940312659211644638829709)

$p_4(x)=x^4$ -1.90902631760848224876383274 69 x^3 +1.15415864228389154206263653009 x^2

-0.23734853689008479704792696219 28 x +0.01095303384730285058319991255 4997

= (x-0.06405803523036175844683036505 75)(x-0.29625355617702075199894407880 2)

(x-0.62446416153216729739073334266 8)(x-0.92425056466893244092732496037 36)

$p_5(x)=x^5$ -2.42225536199320988992272874836 x^4 +2.07346153389875511755407764 06 x^3

-0.74353773897726689870786861422 5 x^2 +0.10074920244950268819930859344 97 x

-0.00317193688077285871773807533759

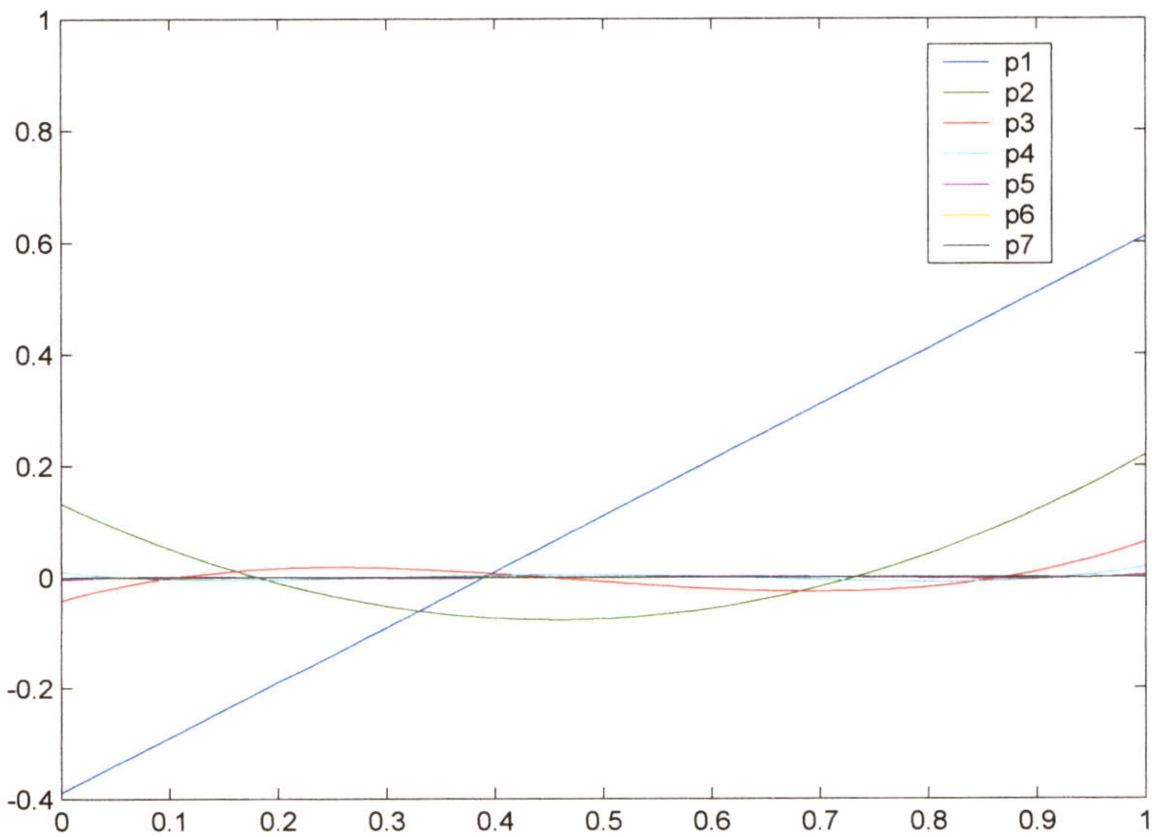
= (x-0.04423146983850303750429336876 5)(x-0.21556327540378096716064275833 27)

(x-0.47415987590643536857306856205 9)(x-0.73934879936333562413282789622 94)

(x-0.94895194148115489255189616298028)

$$
\begin{aligned}
p_6(x) = {} & x^6 - 2.9163651640870166999050430098\,x^5 + 3.2040905447210887167377352212\,0x^4 \\
& - 1.6416184813820428778930111850 2\,x^3 + 0.3916972833042390941821901125596\,x^2 \\
& - 0.0372332490893128467640572651 2739\,x + 0.0008418535508431675287923163 3170 \\
= {} & (x-0.0320570628790940617184958020871)(x-0.1602282900490801114432576674 89) \\
& (x-0.3526738547302958886315183592 38)(x-0.5892136982816706985331366459490) \\
& (x-0.8181315208951981994365010684 1)(x-0.9640607372516777401421334666 9009)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_7(x) = {} & x^7 - 3.4154020424779119577923846905 8\,x^6 + 4.5983672324426015912550200953\,x^5 \\
& - 3.0925850952392184554213499209 2\,x^4 + 1.0842430005226422676234085926732\,x^3 \\
& - 0.1872766538931043161764979416 9\,x^2 + 0.0132671358654794279606407858 7827\,x \\
& - 0.0002263198866761304560466418 6025 \\
= {} & (x-0.0242992950411838173454830230043)(x-0.1230352347180735248945487134 98) \\
& (x-0.2787720065055892427233343744 64)(x-0.4810141152695296853720655697834) \\
& (x-0.6724503899151119186614395641866)(x-0.8627210606208449622906120693077) \\
& (x-0.9731099404075715385519452986 6398)
\end{aligned}
$$



ภาพที่ 4.6 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 6

4.2 ค่าถ่วง (weight)

ตารางที่ 4.1 ค่าของ A_n $,n=1,2,\ldots,7$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

n	A_n
1	1
2	0.39290408947966681828098089749002
	0.60709591052033318171901910250998
3	0.19719531345342270158960286485235
	0.45789673476013001242255459434969
	0.34490795178644728598784254079796
4	0.12295285954528757391201940923783
	0.25048959837946762538137154958331
	0.40523381440886462744989364381112
	0.22132372766638017325671539736774
5	0.082131592392737410545983464278778
	0.16750432393067525809377329813235
	0.29668784181893128603717690086971
	0.30237071466226216310696827188262
	0.15130552719539388221609806483653
6	0.059305005154454017279358247062014
	0.12586228921724343702319914488791
	0.17914932574367590281786446984142
	0.29318566892637456887824200566873
	0.23190826413579377556411262973033
	0.11058944682245829843722350280959
7	0.044418282606446791894755600410081
	0.096214512198751731020905711256009
	0.13285765072287354606331305601208
	0.21963608518136225968444680294799
	0.24294268194633390535681888624327
	0.18023351918715672618161704652376
	0.083697268157075039798142896606813

ตารางที่ 4.2 ค่าของ A_n $,n = 1,2,\ldots,7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2

n	A_n
1	1
2	0.5 0.5
3	0.20506703022040445353328788911444 0.58986593955919109293342422176815 0.20506703022040445353328788911742
4	0.12138819997722003479185349013339 0.37861180002277996520814650981949 0.37861180002277996520814650988798 0.12138819997722003479185349015914
5	0.083658895892366652512162351004668 0.20411437985291232548196387504189 0.42445344850944204401174754804944 0.20411437985291232548196387490355 0.083658895892366652512162351000449
6	0.058779531926939883138129083185835 0.12662222086064519374718227663393 0.31459824721241492311468864405671 0.31459824721241492311468863974622 0.12662222086064519374718227446070 0.058779531926939883138129081916606
7	0.044569705905698385778573440551039 0.097720596944962220375936744582255 0.19873022938164164213528173117967 0.31795893553539550342041628506624 0.19873022938164164213528164924796 0.097720596944962220375936723511208 0.044569705905698385778573425861624

ตารางที่ 4.3 ค่าของ A_n $, n = 1, 2, \ldots, 7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3

n	A_n
1	1
2	0.50000000000000000000000000000008
	0.49999999999999999999999999999992
3	0.35116385735580782020410503382813
	0.29767228528838435959178993234654
	0.35116385735580782020410503382533
4	0.21034581643646849244924370149614
	0.28965418356353150755075629851417
	0.28965418356353150755075629853366
	0.21034581643646849244924370145603
5	0.14996117912219104135044769553423
	0.28219977026140549337376072964466
	0.13567810123280693055158314981118
	0.28219977026140549337376072963845
	0.14996117912219104135044769537148
6	0.10909984282036241202188223856062
	0.22403516491226172529782992214465
	0.16686499226737586268028783869093
	0.16686499226737586268028783648341
	0.22403516491226172529782992438815
	0.10909984282036241202188223973224
7	0.082283459676165518097105569108577
	0.17434063704155627451401413853040
	0.20189596164985410846204532692042
	0.082959883264848197853669951022159
	0.20189596164985410846204533436273
	0.17434063704155627451401412041508
	0.082283459676165518097105559640636

ตารางที่ 4.4 ค่าของ A_n $,n=1,2,...,7$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4

n	A_n
1	1
2	0.37697981267664155127765892057168 0.62302018732335844872234107942832
3	0.16520330435004262254603424859288 0.45578592376732429254164119825173 0.37901077188263308491232455315539
4	0.095252317442156386700088382720697 0.26979281413624705464473297587667 0.39493430163961656464878640239395 0.24002056678197999400639223900868
5	0.064695877389021118531730937478037 0.15374252821353002640869073704077 0.28623150755222136199233553952474 0.32800438135644904773376595780497 0.16732570548877844533347682815148
6	0.045651427056491249925042421810438 0.098528913327773155262725155486866 0.21337138589351586670619425067216 0.26622616340441040906568354765457 0.25431296053151118821055047217991 0.12190914978629813082980415219606
7	0.034240555935978057402911912691668 0.074930907770386878607838259782554 0.14053026949830233392969125845946 0.20666903301184354754866999586600 0.25221999640721237712535353668601 0.19872521879015367307307579620205 0.092684018586123132312459240312257

ตารางที่ 4.5 ค่าของ A_n $,n=1,2,\ldots,7$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5

n	A_n
1	1
2	0.60709591052033318171901910250994 0.39290408947966681828098089749006
3	0.34490795178644728598784254079711 0.45789673476013001242255459435029 0.19719531345342270158960286485260
4	0.22132372766638017325671539735360 0.40523381440886462744989364381139 0.25048959837946762538137154959585 0.12295285954528757391201940923915
5	0.15130552719539388221609806471727 0.30237071466226216310696827185997 0.29668784181893128603717690098669 0.16750432393067525809377329816553 0.082131592392737410545983464270539
6	0.11058944682245829843722350674455 0.23190826413579377556411263697992 0.29318566892637456887824200864081 0.17914932574367590281786446405709 0.12586228921724343702319914010918 0.059305005154454017279358243468453
7	0.083697268157075039798143068565529 0.18023351918715672618161738183472 0.24294268194633390535681921874663 0.21963608518136225968444648167571 0.13285765072287354606331294095469 0.096214512198751731020905474515666 0.044418282606446791894755433707048

ตารางที่ 4.6 ค่าของ A_n $,n=1,2,...,7$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6

n	A_n
1	1
2	0.62302018732335844872234107942839 0.37697981267664155127765892057161
3	0.37901077188263308491232455315509 0.45578592376732429254164119825284 0.16520330435004262254603424859207
4	0.24002056678197999400639223899485 0.39493430163961656464878640239102 0.26979281413624705464473297589005 0.095252317442156386700088382724083
5	0.16732570548877844533347682827847 0.32800438135644904773376595795884 0.28623150755222136199233553947725 0.15374252821353002640869073686646 0.064695877389021118531730937418985
6	0.12190914978629813082980416267796 0.25431296053151118821055048979101 0.26622616340441040906568354651491 0.21337138589351586670619423928304 0.098528913327773155262725146070079 0.045651427056491249925042415663005
7	0.092684018586123132312459590841448 0.19872521879015367307307642694991 0.25221999640721237712535374143088 0.20666903301184354754867009844407 0.14053026949830233392969047729490 0.074930907770386878607837961245036 0.034240555935978057402911703793754

4.3 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง

นำ $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$ หาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 – 6 และนำมาหาค่าความคาดเคลื่อนโดยเปรียบเทียบกับค่าจริง

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx = \int_0^{1/2} \frac{2/3}{1+x}dx + \int_{1/2}^1 \frac{4/3}{1+x}dx = 6.538861686744842\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.7 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	7.200000000000000e-001	6.611383132551574e-002
2	6.531302876480541e-001	7.558810264300941e-004
3	6.538642693695598e-001	2.189930492446646e-005
4	6.538854886497317e-001	6.800247525085013e-007
5	6.538861490553494e-001	1.961913487225075e-008
6	6.538861680772735e-001	5.972107253171544e-010
7	6.538861686572146e-001	1.726963017034677e-011

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx = \int_0^{1/3} \frac{2/3}{1+x}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{5/3}{1+x}dx + \int_{2/3}^1 \frac{2/3}{1+x}dx = 6.852416716875066\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.8 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	6.666666666666666e-001	1.857500502083997e-002
2	6.845070422535211e-001	7.346294339855009e-004
3	6.852211634337641e-001	2.050825374255716e-005
4	6.852410743309206e-001	5.973565859740404e-007
5	6.852416524022427e-001	1.928526394134877e-008
6	6.852416711624146e-001	5.250919699051337e-010
7	6.852416716712104e-001	1.629618662235544e-011

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx = \int_0^{1/3} \frac{4/3}{1+x}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1/3}{1+x}dx + \int_{2/3}^{1} \frac{4/3}{1+x}dx = 7.010526894323841\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.9 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	6.666666666666666e-001	3.438602276571745e-002
2	7.002881844380402e-001	7.645049943438842e-004
3	7.010225430640392e-001	3.014636834486328e-005
4	7.010519705525911e-001	7.188797930268720e-007
5	7.010526654174071e-001	2.401497700699196e-008
6	7.010526887390886e-001	6.932955320948508e-010
7	7.010526894128737e-001	1.951039330094773e-011

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx = \int_0^{1/3} \frac{1/2}{1+x}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{1+x}dx + \int_{2/3}^{1} \frac{3/2}{1+x}dx = 6.404669227310321\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.10 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	6.206896551724138e-001	1.977726755861831e-002
2	6.397905759162303e-001	6.763468148017759e-004
3	6.404461376719507e-001	2.078505908142958e-005
4	6.404663298980785e-001	5.928329536164512e-007
5	6.404669041787808e-001	1.855225129077098e-008
6	6.404669221984105e-001	5.326216134804440e-010
7	6.404669227151841e-001	1.584798958731426e-011

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx = \int_0^{1/2} \frac{4/3}{1+x}dx + \int_{1/2}^{1} \frac{2/3}{1+x}dx = 7.324081924454063\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.11 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	7.058823529411764e-001	2.652583950422993e-002
2	7.315315315315315e-001	8.766609138748382e-004
3	7.323826485899253e-001	2.554385548103610e-005
4	7.324074028661177e-001	7.895792886181141e-007
5	7.324081696169057e-001	2.282850064538877e-008
6	7.324081917517544e-001	6.936519136857555e-010
7	7.324081924253265e-001	2.007982669027797e-011

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx = \int_0^{1/3} \frac{3/2}{1+x}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{1+x}dx + \int_{2/3}^{1} \frac{1/2}{1+x}dx = 7.458274383888585\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.12 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	7.200000000000000e-001	2.582743838885848e-002
2	7.449822904368360e-001	8.451479520225069e-004
3	7.458013626535924e-001	2.607573526602902e-005
4	7.458266921248682e-001	7.462639902700019e-007
5	7.458274152541198e-001	2.313473868031934e-008
6	7.458274377189017e-001	6.699567567380882e-010
7	7.458274383690382e-001	1.982025654712061e-011

นำ $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$ หาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 – 6 และนำมาหาค่าความคาดเคลื่อนโดยเปรียบเทียบกับค่าจริง

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{2/3}{1+x^2}dx + \int_{1/2}^1 \frac{4/3}{1+x^2}dx = 7.380991451960602\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.13 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	8.686327077747990e-001	1.305335625787387e-001
2	7.396766629643341e-001	1.577517768273862e-003
3	7.379816980805027e-001	1.174471155575008e-004
4	7.381032403870126e-001	4.095190952346783e-006
5	7.380991655604700e-001	2.036440971409093e-008
6	7.380991347242751e-001	1.047178510571456e-008
7	7.380991457835600e-001	5.874997155430606e-010

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1/3} \frac{2/3}{1+x^2}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{5/3}{1+x^2}dx + \int_{2/3}^1 \frac{2/3}{1+x^2}dx = 7.898508247492242\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.14 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	8.000000000000000e-001	1.014917525077586e-002
2	7.912452482432899e-001	1.394423494065711e-003
3	7.897429438185045e-001	1.078809307196726e-004
4	7.898546267604991e-001	3.802011274922634e-006
5	7.898508261607097e-001	1.411485484048569e-009
6	7.898508162398817e-001	8.509342452889257e-009
7	7.898508253057777e-001	5.565534699769614e-010

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1/3} \frac{4/3}{1+x^2}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1/3}{1+x^2}dx + \int_{2/3}^{1} \frac{4/3}{1+x^2}dx = 7.809455020456724\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.15 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	8.000000000000000e-001	1.905449795432768e-002
2	7.821793042905738e-001	1.233802244901439e-003
3	7.807927438136798e-001	1.527582319925669e-004
4	7.809499472495420e-001	4.445203869662961e-006
5	7.809454933938349e-001	8.651837468676149e-009
6	7.809454916570888e-001	1.038858354895922e-008
7	7.809455026764784e-001	6.308060740423116e-010

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1/3} \frac{1/2}{1+x^2}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{2/3}^{1} \frac{3/2}{1+x^2}dx = 7.232206661240676\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.16 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	7.280898876404494e-001	4.869221516381805e-003
2	7.247424461181962e-001	1.521779994128614e-003
3	7.231061264812677e-001	1.145396427998380e-004
4	7.232241270390553e-001	3.460914987707398e-006
5	7.232206971813419e-001	3.105727430785521e-008
6	7.232206562781736e-001	9.845893989002263e-009
7	7.232206666696354e-001	5.455678131482955e-010

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{4/3}{1+x^2}dx + \int_{1/2}^{1} \frac{2/3}{1+x^2}dx = 8.326971815988362\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.17 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	8.520710059171597e-001	1.937382431832346e-002
2	8.340036274741740e-001	1.306445875337792e-003
3	8.325727313569297e-001	1.244502419065485e-004
4	8.327023399584416e-001	5.158359605350604e-006
5	8.326971522912841e-001	2.930755216290493e-008
6	8.326971718765498e-001	9.722286420377202e-009
7	8.326971822512553e-001	6.524191187295969e-010

$$\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx = \int_0^{1/3} \frac{3/2}{1+x^2}dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{2/3}^{1} \frac{1/2}{1+x^2}dx = 8.475756606708290\text{e-}001$$

ตารางที่ 4.18 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	8.686327077747990e-001	2.105704710396994e-002
2	8.487185619928982e-001	1.142901322069179e-003
3	8.474511605565669e-001	1.245001142621272e-004
4	8.475805945057764e-001	4.933834947373761e-006
5	8.475756212246134e-001	3.944621562723683e-008
6	8.475756519006188e-001	8.770210224717800e-009
7	8.475756613065661e-001	6.357371296061842e-010

นำ $\int_0^1 w(x)e^x dx$ หาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 – 6 และนำมาหาค่าความคาดเคลื่อนโดยเปรียบเทียบกับค่าจริง

$$\int_0^1 w(x)e^x dx = \int_0^{1/2} \frac{2}{3}e^x dx + \int_{1/2}^1 \frac{4}{3}e^x dx = 1.858561590811975e{+}000$$

ตารางที่ 4.19 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 w(x)e^x dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.475340615490622e+000	3.832209753213531e-001
2	1.858178970529911e+000	3.826202820640390e-004
3	1.858560814399235e+000	7.764127400999854e-007
4	1.858561589904118e+000	9.078571228116061e-010
5	1.858561590811360e+000	6.150635556423367e-013
6	1.858561590811975e+000	0
7	1.858561590811975e+000	0

$$\int_0^1 w(x)e^x dx = \int_0^{1/3} \frac{2}{3}e^x dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{5}{3}e^x dx + \int_{2/3}^1 \frac{2}{3}e^x dx = 1.697642834941283e{+}000$$

ตารางที่ 4.20 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 w(x)e^x dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.648721270700128e+000	4.892156424115512e-002
2	1.697300108855624e+000	3.427260856589953e-004
3	1.697642165483522e+000	6.694577610044661e-007
4	1.697642834203955e+000	7.373281984968116e-010
5	1.697642834940721e+000	5.619948950652542e-013
6	1.697642834941283e+000	0
7	1.697642834941283e+000	0

$$\int_0^1 w(x)e^x dx = \int_0^{1/3}\frac{4}{3}e^x dx + \int_{1/3}^{2/3}\frac{1}{3}e^x dx + \int_{2/3}^{1}\frac{4}{3}e^x dx = 1.738920821976807\text{e+000}$$

ตารางที่ 4.21 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 w(x)e^x dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.648721270700128e+000	9.019955127667911e-002
2	1.738577111020065e+000	3.437109567421270e-004
3	1.738919853545993e+000	9.684308139856768e-007
4	1.738920821114883e+000	8.619240876583945e-010
5	1.738920821976125e+000	6.821210263296962e-013
6	1.738920821976807e+000	0
7	1.738920821976808e+000	8.881784197001252e-016

$$\int_0^1 w(x)e^x dx = \int_0^{1/3}\frac{1}{2}e^x dx + \int_{1/3}^{2/3}e^x dx + \int_{2/3}^{1}\frac{3}{2}e^x dx = 1.905749509618186\text{e+000}$$

ตารางที่ 4.22 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 w(x)e^x dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.842477459047710e+000	6.327205057047602e-002
2	1.905389958078633e+000	3.595515395529159e-004
3	1.905748736918605e+000	7.726995809864690e-007
4	1.905749508789143e+000	8.290430564272810e-010
5	1.905749509617579e+000	6.070699498650356e-013
6	1.905749509618185e+000	1.110223024625157e-015
7	1.905749509618185e+000	1.110223024625157e-015

$$\int_0^1 w(x)e^x dx = \int_0^{1/2} \frac{4}{3}e^x dx + \int_{1/2}^1 \frac{2}{3}e^x dx = 1.578002066106116\text{e+}000$$

ตารางที่ 4.23 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 w(x)e^x dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.516896796388214e+000	6.110526971790198e-002
2	1.577635647295285e+000	3.664188108309929e-004
3	1.578001314405789e+000	7.517003270951506e-007
4	1.578002065220114e+000	8.860019384826501e-010
5	1.578002066105513e+000	6.030731469763850e-013
6	1.578002066106115e+000	1.110223024625157e-015
7	1.578002066106115e+000	1.110223024625157e-015

$$\int_0^1 w(x)e^x dx = \int_0^{1/3} \frac{3}{2}e^x dx + \int_{1/3}^{2/3} e^x dx + \int_{2/3}^1 \frac{1}{2}e^x dx = 1.530814147299906\text{e+}000$$

ตารางที่ 4.24 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6 โดยสูตร $\int_0^1 w(x)e^x dx$

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.475340615490622e+000	5.547353180928405e-002
2	1.530477133772658e+000	3.370135272480201e-004
3	1.530813410367620e+000	7.369322858608030e-007
4	1.530814146501351e+000	7.985549999034447e-010
5	1.530814147299316e+000	5.899725152858082e-013
6	1.530814147299905e+000	8.881784197001252e-016
7	1.530814147299905e+000	8.881784197001252e-016

4.4 การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least–squares approximation)

การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least–squares approximation) ได้แสดงโดยการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ดังนี้

4.4.1 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

$y_1 = 0.6060606053 - 0.1818181806\,x$

$y_2 = -0.1169590471 + 3.730994053\,x - 3.742689965\,x^2$

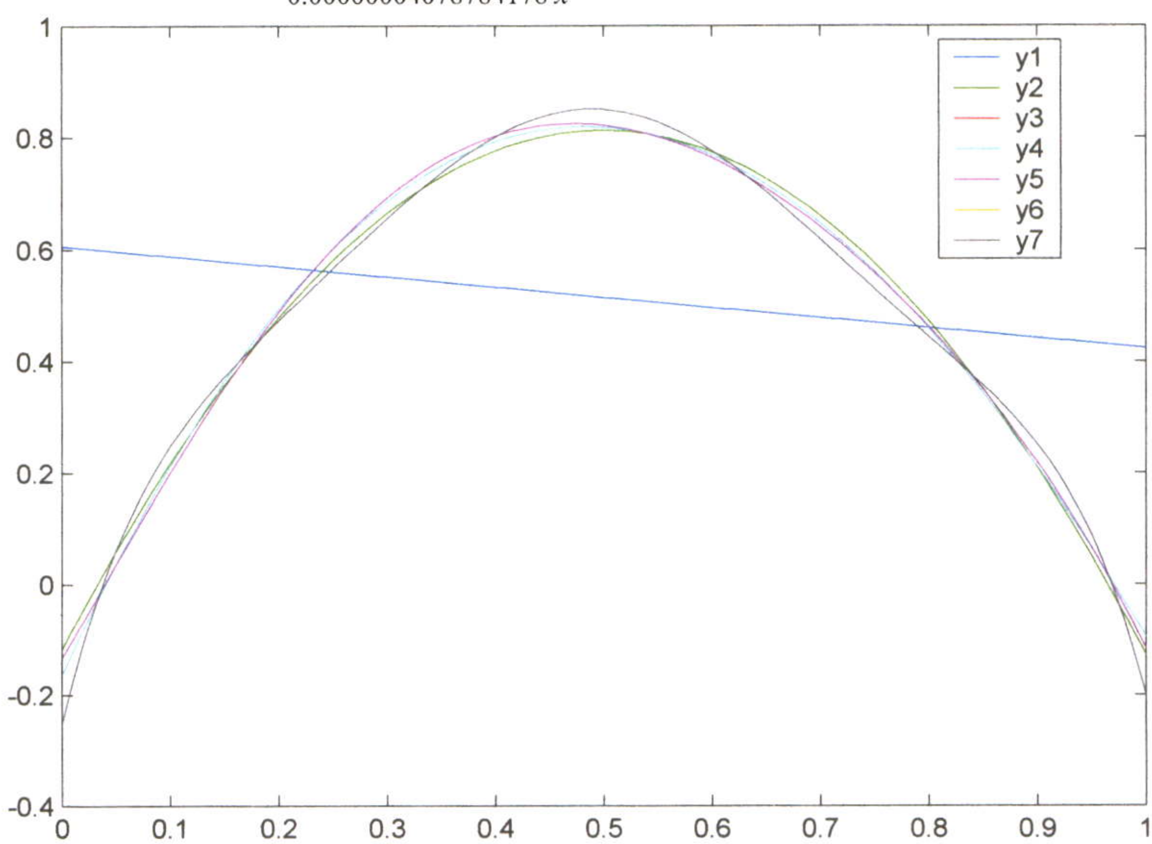
$y_3 = -0.1630688966 + 4.251831632\,x - 4.969607927\,x^2 + 0.7850438595\,x^3$

$y_4 = -0.163072195 + 4.251894122\,x - 4.969875904\,x^2 + 0.7854466495\,x^3 - 0.0001964371028\,x^4$

$y_5 = -0.1337212802 + 3.404703421\,x + 0.738024995\,x^2 - 13.91347859\,x^3 + 16.06510436\,x^4 - 6.277320114\,x^5$

$y_6 = -0.2514666616 + 8.172573761\,x - 45.30733886\,x^2 + 164.6578585\,x^3 - 310.2728999\,x^4 + 274.9311151\,x^5 - 92.13216513\,x^6$

$y_7 = -0.2514666616 + 8.172573760\,x - 45.30733885\,x^2 + 164.6578584\,x^3 - 310.2728998\,x^4 + 274.9311149\,x^5 - 92.13216498\,x^6 - 0.00000004078784178\,x^7$



ภาพที่ 4.7 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

4.4.2 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2

$y_1 = 1.177485380 - 0.1605263150\,x$

$y_2 = 0.7469298261 + 2.089473676\,x - 2.249999991\,x^2$

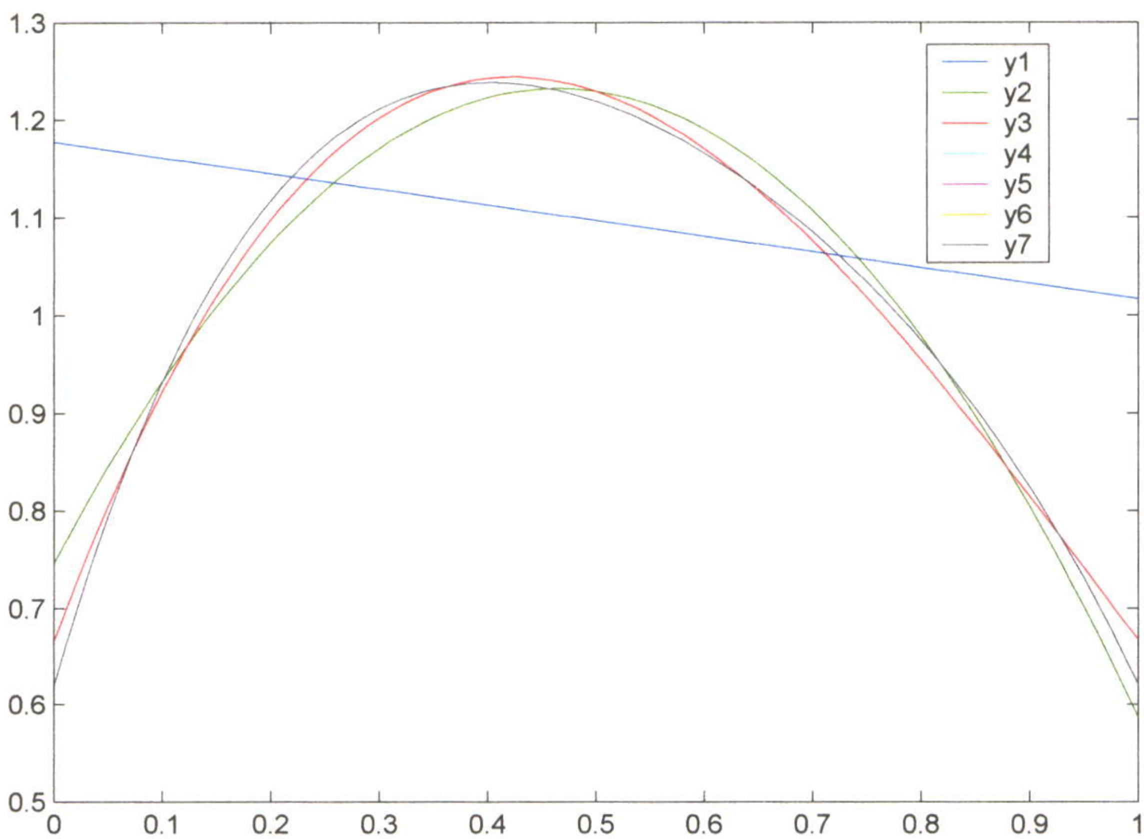
$y_3 = 0.6666666848 + 2.999999804\,x - 4.499999526\,x^2 + 1.499999690\,x^3$

$y_4 = 0.6203994375 + 3.889094823\,x - 8.369290321\,x^2 + 7.460391240\,x^3 - 2.980195775\,x^4$

$y_5 = 0.6203996075 + 3.889089971\,x - 8.369257714\,x^2 + 7.460305931\,x^3 - 2.980100418\,x^4 - 0.00003814284903\,x^5$

$y_6 = 0.6203986235 + 3.889130243\,x - 8.369651840\,x^2 + 7.461860490\,x^3 - 2.982994825\,x^4 + 0.002502410379\,x^5 - 0.0008468510760\,x^6$

$y_7 = 0.6203986235 + 3.889130243\,x - 8.369651840\,x^2 + 7.461860490\,x^3 - 2.982994825\,x^4 + 0.002502410379\,x^5 - 0.0008468510760\,x^6$



ภาพที่ 4.8 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2

4.4.3 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3

$$y_1 = 1.025079365+0.1442857147\,x$$

$$y_2 = 1.344523806-2.105714262\,x+2.249999977\,x^2$$

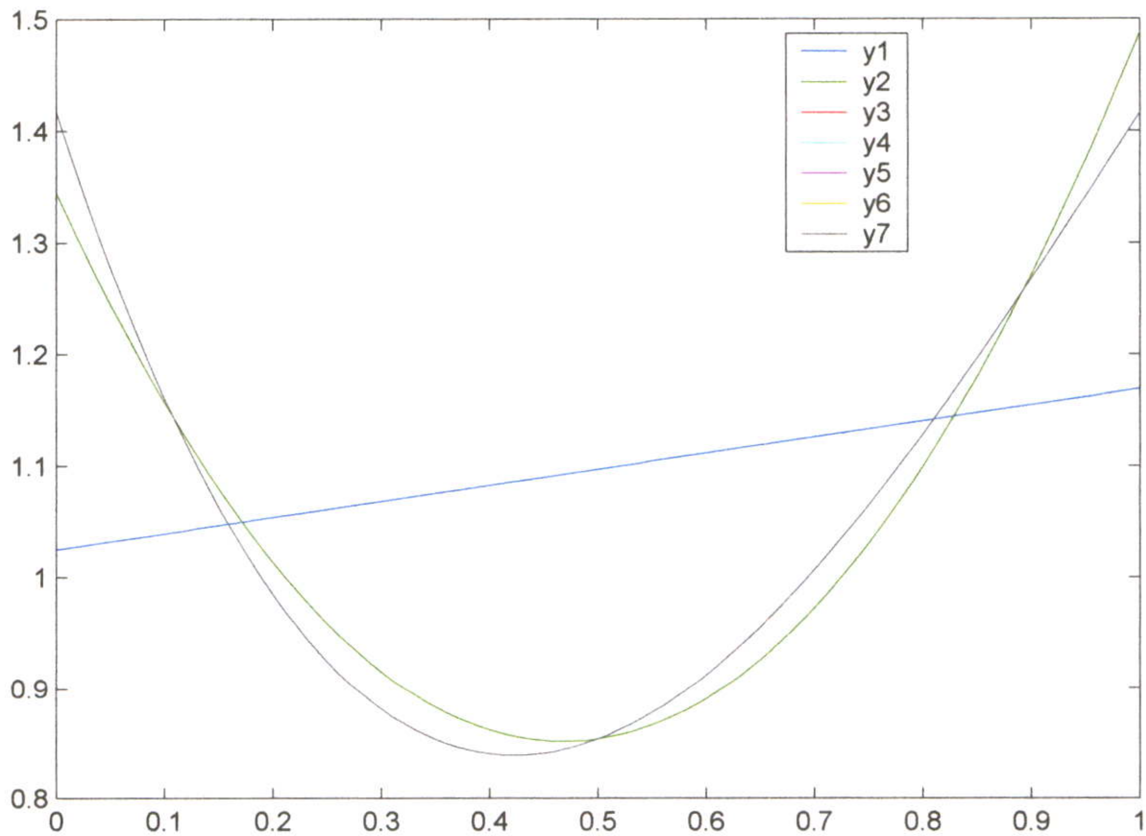
$$y_3 = 1.416666671-3.000000076\,x+4.500000227\,x^2-1.500000167\,x^3$$

$$y_4 = 1.416666774-3.000002323\,x+4.500011070\,x^2-1.500017360\,x^3+ 0.000008596358010\,x^4$$

$$y_5 = 1.416666952-3.000007914\,x+4.500051527\,x^2-1.500126845\,x^3+ 0.0001323670143\,x^4-0.00004950826253\,x^5$$

$$y_6 = -3.000054067\,x+1.416668004+4.500532427\,x^2-1.502110867\,x^3+ 0.003910700797\,x^4-0.003393095263\,x^5+0.001114529000\,x^6$$

$$y_7 = 1.416655912-2.999345973\,x+4.490582870\,x^2-1.445142133\,x^3- 0.1556264576\,x^4+0.2284889949\,x^5-0.1669526979\,x^6+ 0.04801920768\,x^7$$



ภาพที่ 4.9 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3

4.4.4 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4

$$y_1 = 0.2657004831 - 0.1014492754\,x$$

$$y_2 = -0.0042582624 + 1.233511555\,x - 1.228163963\,x^2$$

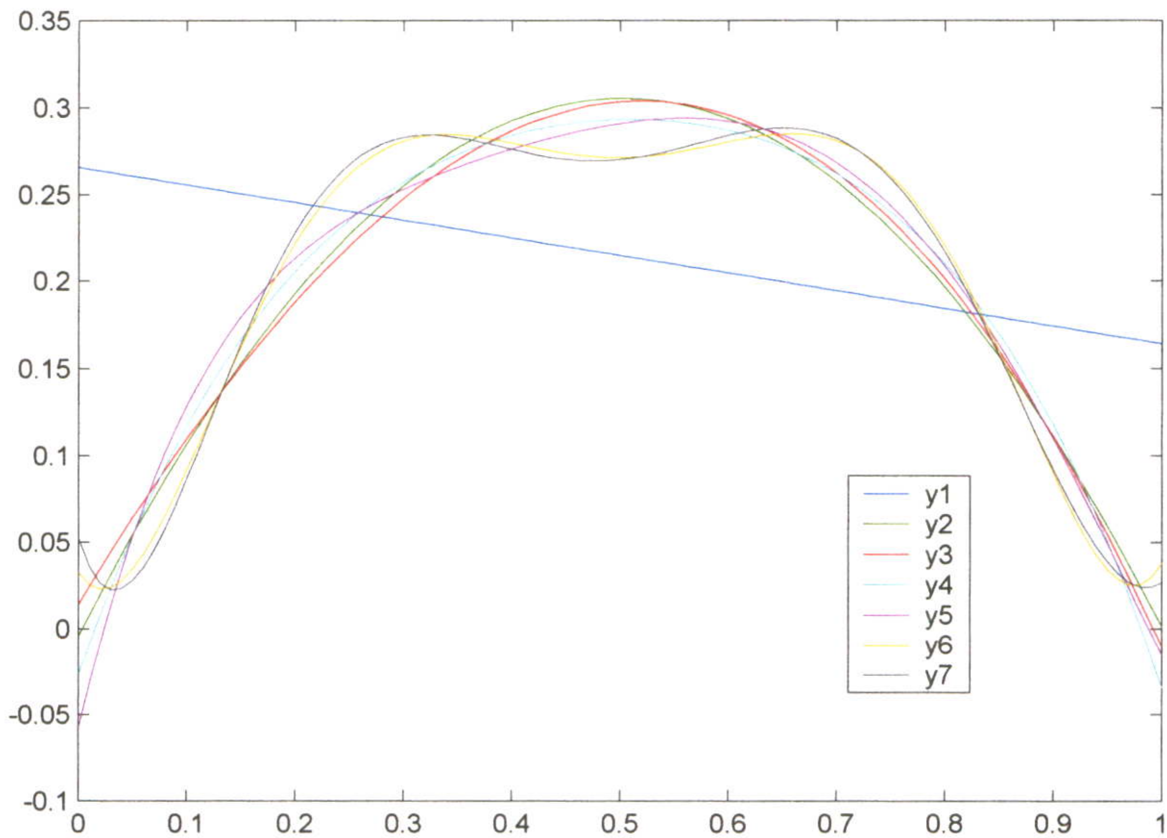
$$y_3 = 0.01434627386 + 1.036196969\,x - 0.7709008078\,x^2 - 0.2903139479\,x^3$$

$$y_4 = -0.02641719266 + 1.784356951\,x - 3.875627761\,x^2 + 4.258767928\,x^3 - 2.175580647\,x^4$$

$$y_5 = -0.05758199955 + 2.646024144\,x - 9.479880501\,x^2 + 18.42477745\,x^3 - 17.49001664\,x^4 + 5.941021374\,x^5$$

$$y_6 = 0.03263773642 - 0.920027460\,x + 24.22086378\,x^2 - 110.0023613\,x^3 + 213.8256473\,x^4 - 190.9780593\,x^5 + 63.85940331\,x^6$$

$$y_7 = 0.05209079237 - 1.951125692\,x + 37.41119063\,x^2 - 179.8026778\,x^3 + 398.0909691\,x^4 - 447.4649458\,x^5 + 243.9241265\,x^6 - 50.23289231\,x^7$$



ภาพที่ 4.10 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4

4.4.5 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5

y_1 = 0.09090909144+0.1818181806 x

y_2 = -0.4619882993+3.754385937 x -3.742690030 x^2

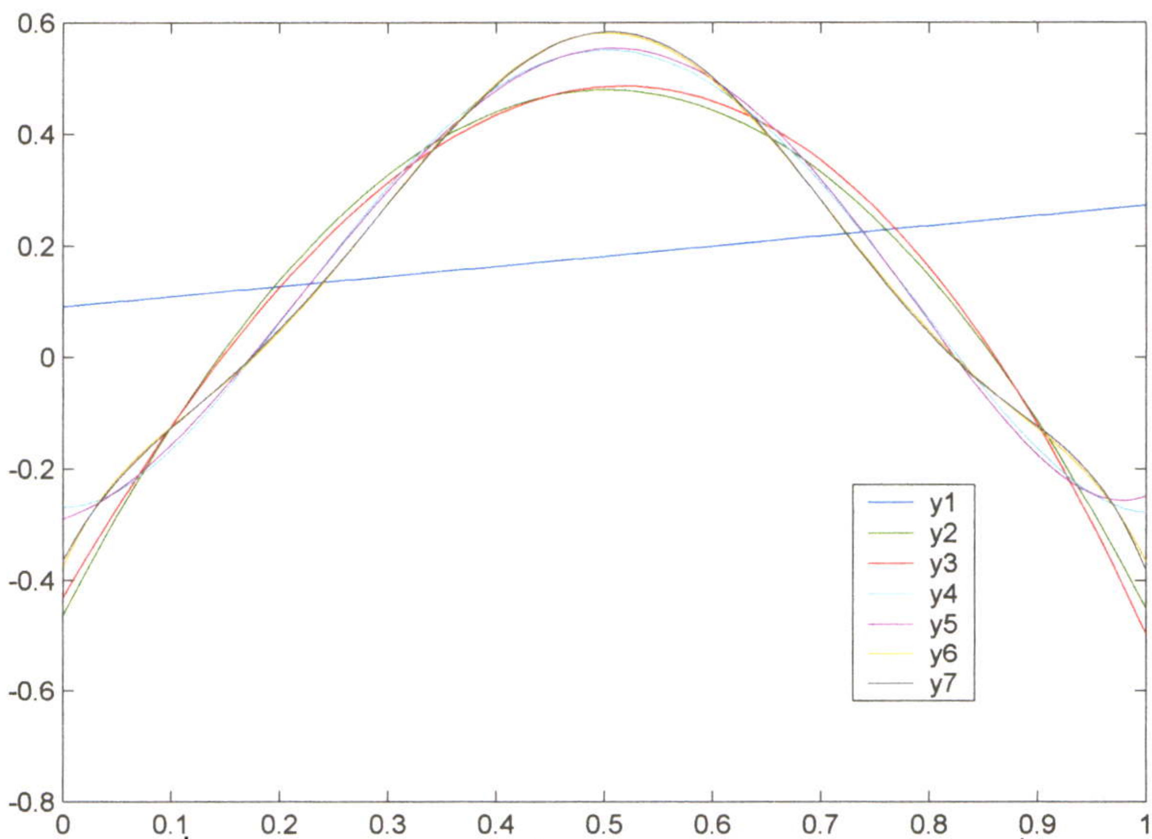
y_3 = -0.4291346822+3.332252824 x -2.614476734 x^2 -0.7850436362 x^3

y_4 = -0.2678645022-0.038764796 x +13.18098465 x^2 -26.17653160 x^3 + 13.02446893 x^4

y_5 = -0.2887224288+0.613998845 x +8.416540448 x^2 -12.98174572 x^3 - 2.27811571 x^4 +6.269652301 x^5

y_6 = -0.3741496601+4.316623999 x -29.74764950 x^2 +143.9741191 x^3 - 303.8191360 x^4 +277.1917877 x^5 -91.90744615 x^6

y_7 = -0.3624242223+3.639585920 x -20.32544467 x^2 +90.09023290 x^3 - 151.6863195 x^4 +53.0421893 x^5 +73.18029235 x^6 -47.96045723 x^7



ภาพที่ 4.11 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5

4.4.6 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6

$$y_1 = 0.1642512077+0.1014492754\,x$$

$$y_2 = 0.0010893260+1.222816390\,x-1.228163983\,x^2$$

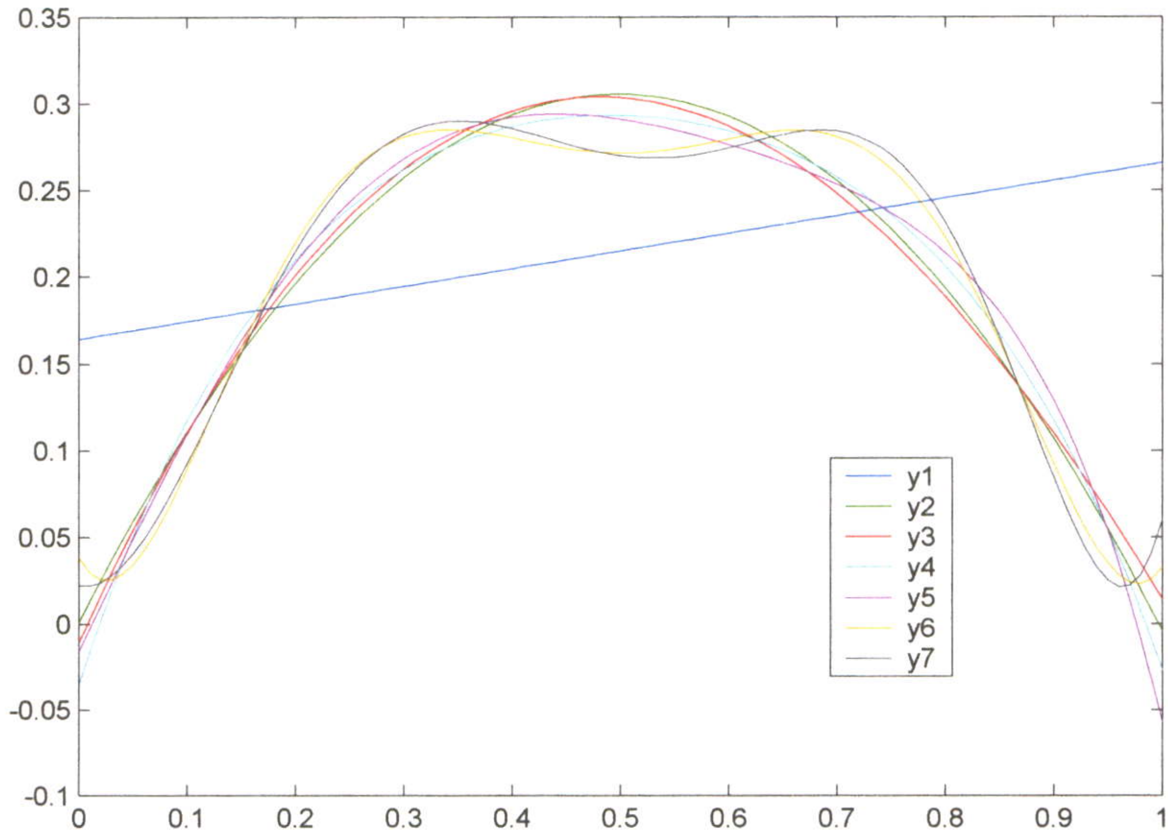
$$y_3 = -0.01067150831+1.376546406\,x-1.641842393\,x^2+0.2903137527\,x^3$$

$$y_4 = -0.03450015145+1.892905039\,x-4.152748027\,x^2+4.443455933\,x^3-2.175529033\,x^4$$

$$y_5 = -0.01565254125+1.294254509\,x+0.2653441346\,x^2-7.877027180\,x^3+12.21748274\,x^4-5.941987784\,x^5$$

$$y_6 = 0.03815601158-1.085574202\,x+217.0125747\,x^4-112.8039644\,x^3+25.30136607\,x^2-192.3466052\,x^5+63.91676175\,x^6$$

$$y_7 = 0.02206126791-0.1420815456\,x+11.98318274\,x^2-35.69799985\,x^3-2.9166816\,x^4+134.6663807\,x^5-178.9696288\,x^6+71.11502178\,x^7$$



ภาพที่ 4.12 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6

บทที่ 5
สรุปผลงานการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานการวิจัย

การวิจัยนี้ได้ทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ เพื่อทำการหาค่ารากพหุนามเชิงตั้งฉากและทำการประยุกต์ใช้ในสองแนวทาง ได้แก่ หาปริพันธ์เชิงตัวเลขและการประมาณค่าในช่วงแบบกำลังสองน้อยสุด ซึ่งได้ผลดังนี้

5.1.1 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง

ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง ได้ใช้รูปแบบของเกาส์–ควอดเดรเจอร์ (Gauss–Quadrature formula type) โดยรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ซึ่งค่าถ่วงเหล่านี้จะเป็นค่าคงที่ ทำให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ มีค่าคงที่ด้วย นั่นคือในรูปแบบแต่ละรูปแบบของของเกาส์จะมี n จุดจากพหุนามเชิงตั้งฉากหนึ่ง และมีเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น

การหาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง ได้ทำการหาค่าปริพันธ์โดยใช้สูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$ $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$ และ $\int_0^1 w(x)e^x dx$ ซึ่งเมื่อนำค่าที่ได้ระหว่างค่าจริงกับค่าที่คำนวณได้ มาเปรียบเทียบกัน พบว่า การหาค่าปริพันธ์โดยมีฟังก์ชันถ่วงเป็นตัวที่ช่วยในการทำให้เกิดค่าคาดเคลื่อนที่น้อยกว่ามาก และในตารางที่ 4.3.13 กับตารางที่ 4.3.14 ใน $n=6$ และ $n=7$ และตารางที่ 4.3.15 ใน $n=6$ ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนในการหาค่าปริพันธ์

5.1.2 การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least–squares approximation)

ในการหาค่าประมาณแบบกำลังสองน้อยสุดนั้น ได้ทำการประมาณค่าโดยการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) พบว่า ค่าที่ได้นั้นใกล้เคียงกับฟังก์ชันที่ได้นำมาใช้ในการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) โดยได้ค่าที่ดีที่สุดพบเมื่อ $d_7 = 0$ ในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 ทำให้สมการที่ได้จากการหา y_7 เป็นสมการเดียวกันกับการหา y_6 สมการที่ได้คือ

$$y = 3.889130243\,x + 0.6203986235 - 8.369651840\,x^2 + 7.461860490\,x^3 - 2.982994825\,x^4 + 0.002502410379\,x^5 - 0.000846851076\,x^6$$

5.2 ข้อเสนอแนะ

ฟังก์ชันถ่วงทั้งหกฟังก์ชันที่นำเสนอนี้เป็นฟังก์ชันถ่วงที่กำหนดขึ้นในช่วง [0,1] เนื่องจากต้องการศึกษาให้สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ หากต้องการนำฟังก์ชันถ่วงไปประยุกต์ใช้ในงานด้านต่างๆ สามารถกำหนดฟังก์ชันถ่วง และช่วงของฟังก์ชันถ่วงได้ เพื่อให้สอดคล้องกับงานที่จะนำไปใช้ในด้านนั้นๆ ได้อย่างเหมาะสม

ฟังก์ชันถ่วงต่างๆ นั้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับงานทางด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งการประยุกต์ใช้อย่างเหมาะสมนั้นจะทำให้ค่าที่ได้ใกล้เคียงกับค่าจริง โดยการประยุกต์ขึ้นอยู่กับงานที่จะใช้ หากมีการคำนวณที่เหมาะกับงานจะทำให้การคำนวณนั้นคุ้มค่าเนื่องจากมีการคำนวณที่ต่อเนื่อง ดังนั้นจึงควรใช้ฟังก์ชันถ่วงที่เหมาะสมกับงานที่จะประยุกต์นั้นๆ

เอกสารอ้างอิง

[1] ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2529.

[2] A.Garrido. **An Electrostatic Interpretation of the Zero of the Freud-Type Orthogonal Polynomials**. Mathematics. Kent State University, 2005.

[3] Alex Kasmas. **Orthogonal polynomials and the finite Toda lattice. Mathematics.** Uiversity of Georgia, 1996.

[4] Alicia Cachafeiro. **On asymptotic properties of Freud–Sobolev orthogonal polynomials.** Matematica Aplicada. Universidad de Vigo, 2000.

[5] A.Iserles. **Zero of expansions in orthogonal polynomials.** Applied Mathematics and Theoretical Physics. University of Cambridge, 1988.

[6] D. V. Chudnovsky. **Solution of the pulse width modulation problem using orthogonal polynomials and Korteweg-de Vries equations.** Mathematics and Advanced Supercomputing. Polytechnic Unversity, 1999.

[7] Evgeniy D. Golovin. **Usage of Orthogonal Polynomials at Calculation of Transfer Processes in Electric Circuits with Variable Parameters Using Differential Transformations.** Master of Education. Tomsk State University, 2003.

[8] Gradimir V. Milovanovic′. **Multiple Orthogonal Polynomials on the semicircle.** Ser.Math. Facta Universitatis, 2005.

[9] Ira M. Gessel. **Generalized Rook Polynomials and Orthogonal Polynomials.** Mathematics. Brandeis University, 1988.

[10] J. Arveu′. **Some discrete multiple orthogonal polynomials.** Mathematics. Universidad Carlos III de Madrid, 2001.

[11] Jose′ L. **Approximation of Orthogonal Polynomials in Terms of Hermite Polynomials.** Matématia Aplicada. Universidad de Zaragoza, 1991.

[12] K.H.Kwon. **Orthogonal Polynomials Eigenfunctions of second-order partial differential equation.** American Mathematical society. Seoul National University, 2001.

[13] Le Active Math. **Definition of step functions.** [Online]. Avalable:

http://demo.activemath.org/ActiveMath2/search/edit.cmd?dictNum=0&stepnum=4

[14] Manuel Alfaro. **Sobolev orthogonal polynomials: the discrete–continuous case.**

Mathematics. Universidad de Zaragoza, 1991.

[15] Phimpraphai Phutthiwat. **Orthogonal Polynomials and Applications.** Master of Science.

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, 2005

[16] Sci–Tech Dictionary. **Weight function.** [Online]. Avalable: http://www.answers.com/topic/

weight-function

[17] V.F.Aleksin. **Construction and Application of Orthogonal Polynomials in Kinetics of**

Quasi–particles. Physics and Technology. Kharkov State University, 1996.

[18] Yunier Bello Cruz. **Legendre Orthogonal Polynomial Primitives**. Mathematics.

Universidad de Matanzas, 2005.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – สกุล	นางสาวสุขพักตร์ แผนสมบูรณ์
วัน เดือน ปีเกิด	8 ตุลาคม 2522
ที่อยู่ปัจจุบัน	กองปลัดบัญชี กรมพลาธิการทหารบก 9/44 ถนนติวานนท์ ตำบลท่าทราย อำเภอเมือง จังหวัดนนทบุรี 11000
ประวัติการศึกษา	สถาบันราชภัฏจันทรเกษม
วุฒิการศึกษา	ครุศาสตรบัณฑิต
ปีการศึกษาที่จบ	2545