

การวิเคราะห์สมรรถนะของการไม่เข้ารหัสและการเข้ารหัส RS ในระบบ DS-CDMA
ชนิดโคฮีเรนท์แบบบีพีเอสเคโดยใช้ช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคาগามิ

UNCODED AND RS CODED PERFORMANCE ANALYSIS COHERENT
DS-CDMA OF BPSK IN NAKAGAMI FADING CHANNELS

ณรงค์ศักดิ์ วิโรจวานิช
NARONGSAK WIROJVANICH

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. 2545
ISBN 974-648-738-8

การวิเคราะห์สมรรถนะของการไม่เข้ารหัสและการเข้ารหัส RS ในระบบ DS-CDMA
ชนิดโคฮีเรนต์แบบบีพีเอสเคโดยใช้ช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคาгами

UNCODED AND RS CODED PERFORMANCE ANALYSIS COHERENT
DS-CDMA OF BPSK IN NAKAGAMI FADING CHANNELS

นายณรงค์ศักดิ์ วิโรจวานิช

NARONGSAK WIROJVANICH

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 43249
วัน, เดือน, ปี..... 8 ต.ค. 2545

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2545

ISBN 974-648-738-8

**UNCODED AND RS CODED PERFORMANCE ANALYSIS COHERENT
DS-CDMA OF BPSK IN NAKAGAMI FADING CHANNELS**

NARONGSAK WIROJVANICH

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2002

ISBN 974-648-738-8

COPYRIGHT 2002

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์สมรรถนะของการไม่เข้ารหัสและการเข้ารหัส RS ในระบบ DS-CDMA ชนิดโคฮีเรนต์แบบบีพีเอสเค โดยใช้ช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคากามิ

นักศึกษา

นายณรงค์ศักดิ์ วิโรจวานิช

รหัสประจำตัว

43061061

ปริญญา

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา

วิศวกรรมไฟฟ้า

พ.ศ.

2545

อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์

รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้เสนอการวิเคราะห์สมรรถนะอัตราผิดพลาดบิตของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบการแบ่งรหัสลำดับโดยตรง (DS-CDMA) ซึ่งมีลำดับข้อมูลแบบเลขฐานสองและใช้การมอดูเลตเชิงเลขทางเฟสในช่องสัญญาณเฟดดิ้งนาคากามิหลายวิถี โดยให้ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในแต่ละวิถีเป็นอิสระต่อกันและมีค่าไม่เหมือนกัน ทางด้านเครื่องรับจะใช้แบบจำลองเครื่องรับแบบเรคโดยใช้เทคนิคการถอดรหัส RS แบบแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว โดยทำการเปรียบเทียบสมรรถนะอัตราความผิดพลาดบิตของระบบ DS-CDMA ในช่องสัญญาณเฟดดิ้งนาคากามิที่มีตัวแปรเสริมไม่เจาะจงและไม่เข้ารหัสกับระบบที่เข้ารหัส RS แบบแก้ไขความผิดพลาด ซึ่งทำการจำลองการทำงานของระบบโดยใช้โปรแกรม MATLAB โดยผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าตัวแปรเสริมเฟดดิ้งมีผลต่อสมรรถนะของระบบทั้งแบบไม่เข้ารหัสและแบบเข้ารหัส อีกทั้งการเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาดแบบ RS จะทำให้สมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดดีขึ้นเมื่อเทียบกับระบบที่ไม่เข้ารหัส

Thesis Title	Uncoded and RS Coded Performance Analysis Coherent DS-CDMA of BPSK in Nakagami Fading Channels
Student	Mr. Narongsak Wirojvanich
Student ID.	43061061
Degree	Master of Engineering
Programme	Electrical Engineering
Year	2002
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Kobchai Dejhan

ABSTRACT

This thesis concerns about the analysis of the bit error rate (BER) performance of direct sequence code division multiple access (DS-CDMA) system with binary data sequence using the phase shift keying modulation in Nakagami multipath fading channel, where the fading parameter in each path are independent but non-identical value. The receiver uses the RAKE receiver model and technique of Reed Solomon (RS) error correcting code with error only decoding. This paper compares the BER performance of DS-CDMA uncoded system, where the non-identical with RS error correcting code. Simulation results by using MATLAB have been done. The numerical analysis is obtained and shows that the fading parameters effect with the uncoded system and coded system on performance. RS error correcting code will improve the performance on bit error rate than the uncoded system.

กิตติกรรมประกาศ

การทำวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมการวิจัยที่กรุณาให้แนวความคิดและคำปรึกษาแนะนำในการดำเนินงานวิจัย ตลอดจนการแก้ปัญหาต่างๆ อันเป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้และคำแนะนำต่างๆ บิดา-มารดาผู้คอยสนับสนุนในด้านการศึกษาของข้าพเจ้า คุณไพบูรณ์ ผู้ประกาย ที่กรุณาให้คำแนะนำการเขียนวิทยานิพนธ์และให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ประโยชน์อันใดที่เกิดจากงานวิจัยนี้ย่อมเป็นผลมาจากความกรุณาของท่านดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยรู้สึกทราบบ้างซึ่งเป็นอย่างยิ่งจึงใคร่ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

ณรงค์ศักดิ์ วิโรจวานิช

รายการสัญลักษณ์และคำย่อ

AMPS	=	Advanced Mobile Phone Service
AWGN	=	Additive White Gaussian Noise
$a^k(t)$	=	Code Sequence
BCH	=	Bose-Chaudhuri-Hocquenghem
BPSK	=	Binary Phase Shift Keying
$b^k(t)$	=	Data Sequence
CDMA	=	Code Division Multiple Access
CPSK	=	Coherent Phase Shift Keying
Cdf	=	Cumulative Distribution Function
DPSK	=	Differential Phase Shift Keying
DS	=	Direct Sequence
d_{\min}	=	Minimum Distance
e	=	Symbol Erasure
FDMA	=	Frequency Division Multiple Access
FH	=	Frequency Hopping
GSM	=	Global System for Mobile Communications
$h_k(\tau)$	=	Impulse Response
$I_{mai}^{(n)}$	=	Multiple Access Interference Noise
$I_{ni}^{(n)}$	=	Additive White Gaussian Noise
$I_0(X)$	=	Bessel Function
$I_{si}^{(n)}$	=	Self Interference Noise
K	=	Rice Factor
K	=	Code Word
L	=	Number of Multipath
L_r	=	RAKE Receiver Branch
MFSK	=	M-ary Frequency Shift Keying
MIP	=	Multipath Intensity Profile
MPSK	=	M-ary Phase Shift Keying
MRC	=	Maximal Ratio Combining

รายการสัญลักษณ์และคำย่อ(ต่อ)

m	=	Fading Parameter
\bar{m}	=	Fading Average Parameter
N	=	Processing Gain
N	=	Data Word
P	=	Power
PDMA	=	Polarization Division Multiple Access
PSK	=	Phase Shift Keying
P_e	=	Probability of error
pdf	=	Probability Density Function
R	=	Code Rate
RS	=	Reed Solomon
S	=	Signal
SDMA	=	Space Division Multiple Access
TDMA	=	Time Division Multiple Access
T_C	=	Chip Interval
T_m	=	Maximum Delay Spread
t	=	Error Correction Capability
U	=	Output Decision Variable
Var	=	Variance
$\Gamma(m)$	=	Gamma Function
Ω_l	=	Second Moment
Ω_0	=	Average Power in the First Coming Path
$\varphi_\gamma(t)$	=	Characteristic Function
β_{lk}	=	Amplitude Distorsion Factor
γ	=	Signal to Noise Ratio
γ_{lk}	=	Phase Delay
ω_C	=	Common Carrier Frequency
τ_{lk}	=	Time Delay
δ	=	Rate of Average Power Decay

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
รายการสัญลักษณ์และคำย่อ.....	IV
สารบัญ.....	VI
สารบัญตาราง.....	X
สารบัญรูป.....	XI
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาของงานวิจัย.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	4
1.3 แนวความคิด.....	4
1.4 ขอบเขตการศึกษา.....	5
บทที่ 2 การสื่อสารระบบดิจิทัล.....	6
2.1 ระบบการเข้าช่องสัญญาณ.....	6
2.1.1 การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งความถี่.....	6
2.1.2 การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งเวลา.....	7
2.1.3 การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส.....	9
2.1.3.1 ข้อดีของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส.....	9
2.1.3.2 ข้อเสียของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส.....	10
2.1.3.3 การประยุกต์ใช้งานระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส.....	10
2.2 การมอดูเลตแบบสเปกตรัมแผ่.....	11
2.2.1 การกระโดดความถี่.....	11
2.2.2 การจัดลำดับโดยตรง.....	12
2.3 คุณลักษณะของสัญญาณที่ผ่านช่องสัญญาณที่มีการจางหายหลายเส้นทาง.....	13
2.3.1 แบบจำลองช่องสัญญาณ.....	14
2.3.1.1 แบบจำลองของ Rayleigh.....	15
2.3.1.2 แบบจำลองของ Rician.....	15
2.3.1.3 แบบจำลองของ Nakagami.....	16

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
2.3.2 คุณลักษณะช่องสัญญาณ.....	16
2.3.2 สัญญาณดิจิทัลบนช่องสัญญาณการจายแบบเจาะจงความถี่ และไม่เจาะจงความถี่.....	18
2.3.3.1 เทคนิคไคเวอร์ซิตีบนช่องสัญญาณหลายเส้นทาง.....	19
บทที่ 3 เทคนิคการเข้ารหัส.....	22
3.1 พื้นฐานการเข้ารหัส.....	22
3.2 รหัสลิเนียร์บล็อก.....	25
3.2.1 ค่าพารามิเตอร์ของรหัสลิเนียร์บล็อก.....	25
3.2.2 ความสามารถในการตรวจสอบและแก้ไขความผิดพลาดของข้อมูลของ รหัสลิเนียร์บล็อก.....	26
3.3 รหัสโบเช-โชนดูริ-ฮ็อกเคิ่งเอ็ม.....	28
3.4 รหัสรีดโซโลมอน.....	28
3.4.1 การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาด.....	32
3.4.1.1 การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว.....	32
3.4.1.2 การถอดรหัสแก้การลบและรหัสแก้ความผิดพลาด.....	32
3.5 รหัสประสาน.....	32
บทที่ 4 อัตราความผิดพลาดของบิตข้อมูลของระบบ DS-CDMA บนช่องสัญญาณเฟดดิ้ง แบบนาคามีโดยใช้เทคนิคการเข้ารหัสรีดโซโลมอน.....	34
4.1 แบบจำลองเครื่องส่ง.....	34
4.2 แบบจำลองช่องสัญญาณ.....	36
4.3 แบบจำลองเครื่องรับ.....	38
4.3.1 ส่วนของสัญญาณ.....	40
4.3.2 ส่วนของการแทรกสอดระหว่างผู้ใช้.....	40
4.3.3 ส่วนของการแทรกสอดระหว่างตัวมันเอง.....	41
4.3.4 ส่วนของการแทรกสอดเนื่องจากสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก.....	42
4.4 กำลั้งของสัญญาณ.....	42
4.4.1 กำลั้งสัญญาณแทรกสอดของนิพจน์ต่างๆ.....	42

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

4.4.1.1	กำลังสัญญาณแทรกสอดแบบเข้าถึงหลายทาง ในส่วนของ การแทรกสอดระหว่างผู้ใช้งาน.....	42
4.4.1.2	กำลังสัญญาณแทรกสอดระหว่างตัวมันเอง.....	43
4.4.1.3	กำลังสัญญาณแทรกสอด ในส่วนของสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก.....	44
4.4.2	กำลังของสัญญาณ.....	44
4.5	การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบ.....	47
4.5.1	การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส.....	47
4.5.1.1	ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของความผิดพลาดของกำลังสัญญาณ.....	47
4.5.1.2	การวิเคราะห์อัตราความผิดพลาดบิตของระบบ.....	49
4.5.2	การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบที่เข้ารหัส.....	51
4.5.2.1	อัตราความผิดพลาดเฉลี่ยของระบบที่ใช้การถอดรหัส แก้ไขความผิดพลาดอย่างเดี่ยว.....	51
บทที่ 5	ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข.....	53
5.1	ผลของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิ (m).....	53
5.1.1	ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิแตกต่างกันในแต่ละวิถี ทำให้อัตราความผิดพลาดมีค่ามากขึ้น.....	53
5.1.2	ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิแตกต่างกันในแต่ละวิถีมากขึ้น ทำให้อัตราความผิดพลาดมีค่ามากขึ้น.....	55
5.1.3	ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมีค่ามากขึ้น ทำให้อัตราความผิดพลาดบิตมีค่าต่ำลง.....	59
5.2	ผลของการเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาดจะดีกว่าระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส ซึ่งเกิดจากค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาด.....	63
5.3	ผลของการเพิ่มจำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรค.....	65
บทที่ 6	สรุปผลการวิเคราะห์.....	73
	เอกสารอ้างอิง.....	75

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
ภาคผนวก.....	77
ก. สูตรทั่วไปของการแจกแจงความเข้มของสัญญาณแบบนาคากามิ.....	78
ข. แบบจำลองเครื่องรับแบบเรด.....	87
ค. ทฤษฎีความน่าจะเป็นและกระบวนการเฟ้นสุ่ม.....	93
ง. การวิเคราะห์เชิงตัวเลขตามกฎของเกาส์.....	105
จ. โปรแกรม.....	112
ฉ. งานเผยแพร่งานวิจัย.....	129
ประวัติผู้เขียน.....	130

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
ก.1 ผลการสังเกตและการทดลองนาคากามิ.....	81
ง.1 จุดของ Gauss และตัวถ่วงน้ำหนัก.....	109

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 การจัดสรรช่องสื่อสารใช้งานแบบ FDMA.....	7
2.2 การจัดสรรช่องสื่อสารใช้งานแบบ TDMA.....	8
2.3 การจัดสรรช่องสื่อสารใช้งานแบบ CDMA.....	9
2.4 แสดงแผนภาพบล็อกด้านส่งของระบบการกระโดดความถี่.....	11
2.5 แสดงแผนภาพบล็อกด้านรับของระบบการกระโดดความถี่.....	11
2.6 แสดงแผนภาพบล็อกด้านส่งของระบบการจัดลำดับโดยตรง.....	12
2.7 แสดงแผนภาพบล็อกด้านรับของระบบการจัดลำดับโดยตรง.....	12
2.8 ตัวอย่างแสดงการตอบสนองทางแกนเวลาของช่องสัญญาณหลายเส้นทาง เมื่อส่งพัลส์สัญญาณช่วงแคบ.....	14
2.9 แสดงคุณลักษณะของ โพรไฟล์ความเข้มของสัญญาณหลายวิถี.....	17
2.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน $\phi_c(\Delta f)$ และฟังก์ชัน $\phi_c(\tau)$	18
2.11 แสดงแผนภาพบล็อกของการสื่อสารระบบไบนารีดิจิตอลโดยใช้วิธีไคเวอร์ซิติ.....	21
2.12 โครงสร้างเครื่องรับแบบเรค.....	21
3.1 แผนภาพบล็อกระบบสื่อสารระบบดิจิตอล.....	23
3.2 ตัวอย่างของบิตตรวจคู่.....	25
3.3 การตรวจสอบและแก้ไขความผิดพลาด.....	26
3.4 M-ary อินพุต , M-ary เอาต์พุต , ช่องสัญญาณ symmetric memoryless.....	30
3.5 การเข้ารหัสประสานด้วยความยาวคอนสเตรนต์ M และอัตราการเข้ารหัส.....	33
4.1 แบบจำลองระบบ DS-CDMA ที่ศึกษา.....	34
4.2 สัญญาณรหัสและสัญญาณข้อมูล.....	35
4.3 แบบจำลองของช่องสัญญาณ.....	36
4.4 เครื่องรับแบบRake.....	39
5.1 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \mathcal{D} = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (d) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$	53

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.2 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (d) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$	54
5.3 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [0.6, 1.4]$, (c) $\bar{m}_2 = [0.7, 1.3]$, (d) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$	55
5.4 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [0.6, 1.4]$, (c) $\bar{m}_2 = [0.7, 1.3]$, (d) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$	56
5.5 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [0.75, 0.8, 1.2, 1.25]$, (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$	57
5.6 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [0.75, 0.8, 1.2, 1.25]$, (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$...	58
5.7 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_2 = [2.5, 1.5]$, (d) $\bar{m}_2 = [2.0, 2.0]$, (e) $\bar{m}_2 = [2.0, 4.0]$, (f) $\bar{m}_2 = [3.0, 3.0]$	59

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.8 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมิมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_2 = [2.5, 1.5]$, (d) $\bar{m}_2 = [2.0, 2.0]$, (e) $\bar{m}_2 = [2.0, 4.0]$, (f) $\bar{m}_2 = [3.0, 3.0]$	60
5.9 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมิมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.5, 2.5, 3.0]$, (d) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.0, 2.0, 2.0]$, (e) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.5, 3.5, 4.0]$, (f) $\bar{m}_4 = [3.0, 3.0, 3.0, 3.0]$	61
5.10 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมิมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.5, 2.5, 3.0]$, (d) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.0, 2.0, 2.0]$, (e) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.5, 3.5, 4.0]$, (f) $\bar{m}_4 = [3.0, 3.0, 3.0, 3.0]$	62
5.11 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมิมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$	63
5.12 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมิมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$	64
5.13 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมิมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$	65

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาของงานวิจัย

การสื่อสารในปัจจุบันมีข้อจำกัดหลายด้าน เช่น เวลาและความถี่ในการเข้าช่องสัญญาณและสัญญาณรบกวนต่างๆภายในระบบ เป็นต้น ทำให้มีการพัฒนาเทคนิคการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส (Code Division Multiple Access :CDMA) เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวรูปแบบการสื่อสารCDMAที่นิยมนำมาใช้งานเชิงพาณิชย์มากที่สุด คือ การจัดลำดับโดยตรง (direct sequence) แต่การสื่อสารข้อมูลแบบไร้สายจะมีปัญหาด้านการเฟดของสัญญาณ โดยมีนักวิจัยทำการศึกษาไว้ดังนี้ Gardner และ Orr [9] อธิบายผลของเฟดคิงที่มีผลต่อสมรรถนะของระบบ DS-CDMA ในช่องสัญญาณที่มีการเฟดคิงแบบรายเลขแสดงนิพจน์ของอัตราส่วนกำลังสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (Signal to noise ratio : SNR) และหาค่าเฉลี่ยความแปรปรวนของสัญญาณ และสัญญาณรบกวน แสดงนิพจน์รหัสการแผ่ ออก (Spreading code) และฟังก์ชันสหสัมพันธ์การเฟด (fading correlation function) ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดจะขึ้นอยู่กับลำดับรหัส (code sequence) กล่าวคือ ถ้ามีความยาวมากจะทำให้ความผิดพลาดมีค่าลดลง Turin [10] พิจารณาผลของการเฟดของสัญญาณสำหรับการสื่อสารแบบอะซิงโครนัส (asynchronous) ของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรงด้วยการมอดูเลตเชิงเลขทางเฟสผลต่าง (differential phase shift keying :DPSK) ในกรณีของการส่งสัญญาณวิถีเดียว ซึ่งกำหนดให้ผู้ใช้งานจะส่งสัญญาณออกไปด้วยพลังงานที่มีค่าเท่ากัน โดยมีการควบคุมกำลังงาน(power control) ที่เครื่องรับให้มีค่าเท่ากัน จำนวนของผู้ใช้งานมีค่าประมาณ 10-20% ของค่าความกว้างรหัส (chip code) ของระบบ แต่กรณีการเฟดของสัญญาณในเมืองและชนบทที่ไม่มีการควบคุมกำลังที่เครื่องส่งทำให้มีการเฟดหลายวิถี เครื่องรับจะรับด้วยกำลังงานที่ไม่เท่ากันและจำนวนผู้ใช้งานที่มีค่ามากที่สุดมีค่าลดลงประมาณ 1-5% ของค่าความยาวรหัส ดังนั้นระบบ CDMA จะต้องมีการควบคุมกำลังส่งของสัญญาณ ช่องสัญญาณควรมีลักษณะที่เป็นการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ค่อยเป็นค่อยไป และแสดงการหาค่าอัตราส่วนกำลังสัญญาณต่อกำลังสัญญาณรบกวน สำหรับช่องสัญญาณในกรณีทั่วไปเนื่องจากลักษณะการเฟดของสัญญาณมีหลายรูปแบบ Borth และ Pursley [11] นำเสนอการหาค่าสมรรถนะของระบบ DS-CDMA ในช่องสัญญาณเฟดคิงและเอาต์พุตของช่องสัญญาณจะประกอบด้วยสัญญาณที่มีความคงทนและสัญญาณที่มีการผิผื่น เนื่องจากสัญญาณที่มีความคงทนจะเกิดได้ในช่องสัญญาณแบบโรเซียนหรือโรซ์ และช่องสัญญาณควรมีลักษณะคงที่ในแนวกว้าง (wide sense stationary : WSS) ซึ่งแสดงลักษณะของการเลือกเฟ้นตามเวลา (time selectivity) และการเลือกเฟ้นตามความถี่ (frequency selectivity) ผลที่ได้รับจะแสดงค่าเฉลี่ยของ SNR ที่ด้านเครื่องรับ ซึ่งแสดงได้ในพจน์ลำดับรหัส และ ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance function) สามารถแบ่งคุณลักษณะ

ของช่องสัญญาณได้เป็น 2 แบบคือ ช่องสัญญาณเฟดดิ้งเปลี่ยนแปลงตามเวลา (time selective fading) และช่องสัญญาณเฟดดิ้งเปลี่ยนแปลงตามความถี่ (frequency selective channel) Suzuki [12] แสดงให้เห็นว่าลักษณะการเฟดของสัญญาณสามารถแสดงด้วยค่าทางสถิติ โดยอธิบายแบบจำลองนาคากามิซึ่งสอดคล้องกับแบบจำลองรายเลขเมื่อตัวแปรเสริมเท่ากับ 1 โดยที่แบบจำลองนาคากามิหรือการแจกแจงแบบ m จะสอดคล้องกับลักษณะทางกายภาพโดยมีตัวแปรเสริมเฟดดิ้งเป็นผลของการแจกแจงของแอมพลิจูด [1] นอกจากนี้ Geraniotis และ Pursley [13] เสนอการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรงโดยใช้การตีมอดูเลตแบบร่วมนัยในช่องสัญญาณเฟดดิ้งในหลายวิธีแบบรายเลข ซึ่งค่าเฉลี่ยความน่าจะเป็นของความผิดพลาดที่เครื่องรับจะขึ้นอยู่กับวิธีที่กำหนดและค่าตัวประกอบของอัตราการลดทอนทางด้านแอมพลิจูดพิจารณาเป็นแบบกำหนดค่าได้ (deterministic) และแบบสุ่มโดยที่ค่าตัวประกอบของอัตราการลดทอนทางด้านแอมพลิจูด การประวิงเวลา และเฟสของสองวิธีใดๆ จะพิจารณาเป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นอิสระแก่กัน Kavehrad และ Ramamurthi [14] เสนอการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรงด้วยการมอดูเลตแบบ DPSK ในช่องสัญญาณแบบรายเลข โดยมีแบบจำลองช่องสัญญาณ 2 รูปแบบ คือ แบบที่มีการประวิงเวลาในแต่ละวิธีที่ต่างกัน และแบบที่มีการประวิงเวลาในแต่ละวิธีที่คิดมาจากค่าเฉลี่ย ด้านเครื่องรับจะใช้เครื่องรับแบบไดเวอร์ซิตี 2 แบบ คือ ไดเวอร์ซิตีเลือกเฟ้น (select diversity) และไดเวอร์ซิตีการรวมก่อนตรวจจับ (predetection combining) นอกจากนี้จะทำการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบด้วยการมอดูเลตเชิงเลขทางเฟสร่วมนัย (Coherent Phase Shift Keying : CPSK) สามารถแสดงความน่าจะเป็นของความผิดพลาดในเครื่องรับแบบไดเวอร์ซิตีของ DPSK จะมีค่ามากกว่า กรณีของ CPSK และ Xiang [7] ศึกษาสมรรถนะของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสโดยตรงซึ่งมีรูปแบบของข้อมูลเป็นเลขฐานสองในช่องสัญญาณเฟดดิ้งในหลายวิธีแบบรายเลขโดยสัญญาณรบกวนเป็นแบบสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวเชิงบวก (Additive White Gaussian Noise: AWGN) ซึ่งพิจารณาผลของสัญญาณแทรกแซงจากผู้ใช้งานอื่นๆที่ไม่ต้องการ และนำเสนอการหาค่าจำนวนผู้ใช้งานที่มากที่สุดในระบบและการหาค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดในพจน์ตัวแปรเสริมของช่องสัญญาณ (Channel parameter) และตัวแปรเสริมของระบบ (system parameter) โดยจำนวนของผู้ใช้งานมากที่สุดของระบบจะหาได้จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของความผิดพลาดของระบบ แต่อย่างไรก็ตาม Wu และ Tsaur [15] แสดงการหาค่าเฉลี่ยของความน่าจะเป็นของความผิดพลาดสำหรับระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรง โดยมีรูปแบบข้อมูลเป็นเลขฐานสองในช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคากามิโดยเครื่องรับแบบไดเวอร์ซิตีและไม่ไดเวอร์ซิตี การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบที่ใช้เทคนิคเครื่องรับแบบไดเวอร์ซิตี และการเข้ารหัสแบบรีดโซโลมอน (Reed Solomon :RS) เปรียบเทียบสมรรถนะกับระบบที่ไม่เข้ารหัสและไม่ไดเวอร์ซิตี (uncode and non-diversity) กับระบบที่เข้ารหัสและใช้รหัสโกลด์ (Gold code) มีค่าเท่ากับ 127 นอกจากนี้ Eng และ Milstein [6] ทำการศึกษาสมรรถนะด้านอัตรา

ความผิดพลาดบิตของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรงในช่องสัญญาณเฟดดิ้งนาคากามิ โดยกำหนดให้ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในแต่ละวิถีเป็นอิสระต่อกันและมีค่าเท่ากันทุกวิถี ด้านรูปแบบเครื่องรับจะใช้เครื่องรับแบบเรคภายใต้สภาวะการเฟดดิ้งหลายวิถี ซึ่งจะได้อัตราความผิดพลาดบิตของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรง โดยใช้การคิมอดูเลตแบบไม่ร่วมนัยซึ่งมีตัวแปรเสริมเฟดดิ้งของทุกวิถีเหมือนกัน Efthymoglou และ Aalo [8] ทำการหา นิพจน์ใหม่ของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส โดยตรงในช่องสัญญาณเฟดดิ้งนาคากามิ โดยใช้การคิมอดูเลตเชิงเลขทางเฟสเลขฐานสองแบบร่วม นัย (Binary Phase Shift Keying :BPSK) ในการวิเคราะห์จะกำหนดให้ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในแต่ละ วิถีเป็นอิสระต่อกันทำการเปรียบเทียบค่าของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในกรณีที่มีค่าเท่ากันและกรณีที่มี ค่าไม่เท่ากันในทุกวิถี ด้านรูปแบบเครื่องรับจะใช้เครื่องรับแบบเรค ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข แสดงให้เห็นว่าผลของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในแต่ละวิถีไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากันและกรณีที่มีตัวแปร เสริมเฟดดิ้งมีค่าไม่เท่ากันจะทำให้อัตราความผิดพลาดบิตของระบบมีค่ามากกว่ากรณีที่มีค่าเท่ากัน Crepeau [16] เสนอการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยใช้กา รคิมอดูเลตเชิงเลขทางความถี่ M ระดับ (M-ary frequency shift keying: MFSK) แบบไม่ร่วมนัย และแบบ DPSK ภายใต้เงื่อนไขการเฟดดิ้งในช่องสัญญาณแบบรายล์เลย์ แบบไรเซียน และแบบจำลอง นาคากามินำเสนอสมรรถนะของการเข้ารหัสและไม่เข้ารหัสของระบบไม่ร่วมนัย MFSK และ DPSK ในช่องสัญญาณนาคากามิ นอกจากนี้จะอธิบายความสัมพันธ์ของอัตราความผิดพลาดกับค่า อัตราส่วนกำลังของสัญญาณรบกวน แสดงให้เห็นผลของเครื่องรับแบบโคเวอร์ซีตี เปรียบเทียบ กับระบบที่ไม่เข้ารหัสในช่องสัญญาณแบบรายล์เลย์ซึ่งสมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดบิตของ ระบบขึ้นอยู่กับตัวแปรเสริม 2 ค่าคือ ช่องสัญญาณกับรหัสจะทำการเปรียบเทียบความแตกต่าง สมรรถนะของระบบในช่องสัญญาณแบบนาคากามิที่ไม่เข้ารหัสกับช่องสัญญาณแบบไรเซียน Hagenauer และ Lutz [3] อธิบายผลการเฟดดิ้งหลายวิถีในช่องสื่อสารแบบไร้สายจะทำให้ สมรรถนะของการส่งข้อมูลลดลงโดยพิจารณาช่องสัญญาณแบบไรเซียนและรายล์เลย์ และจำลอง ระบบด้วยโครงสร้างทางฮาร์ดแวร์ ผลของการเข้ารหัสจะทำให้สมรรถนะของระบบดีขึ้นด้วย เทคนิคการถอดรหัสประสานของ Viterbi และอัลกอริทึมของ Massey และ Berlekamp ในการถอด รหัสรีคโซโลมอน (RS) นอกจากนี้สมรรถนะของระบบจะดีขึ้นด้วยการใช้วางสลับ (interleave) ซึ่ง จะเหมาะสมกับกับความผิดพลาดแบบเบริสต์ (burst error) และการใช้รหัสแก้การลบและรหัสแก้ ความผิดพลาด Jamali และ Ngoc [4] เสนอ การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบด้านอัตราความผิด พลาดบิตของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับ โดยตรงในช่องสัญญาณแบบรายล์เลย์ ด้วยการมอดูเลตเชิงเลขทางเฟส M ระดับ (M-ary phase shift keying : MPSK) ด้วยการเข้ารหัส RS 3รูปแบบ คือ (7,5) (15,8) และ (63,42) ด้วยเทคนิคการถอดรหัสแก้ความผิดพลาดอย่างเดียว และ การถอดรหัสแก้การลบและการถอดรหัสแก้ความผิดพลาด ผลจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสรุปได้

ว่าการใช้รหัสแก้การลบและรหัสแก้ความผิดพลาดทำให้อัตราความผิดพลาดบิดคึกว่าการใช้รหัสแก้ความผิดพลาดอย่างเดียวประมาณ 2 เดซิเบล Ryan และ Conoval [17] เสนอนิยามการถอดรหัสแก้การลบและการถอดรหัสแก้ความผิดพลาด แสดงนิพจน์ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดในการถอดรหัสถูกต้องและไม่ถูกต้องด้วยรหัส RS ซึ่งกำหนดให้เป็น ตัวถอดรหัสไม่สมบูรณ์ (incomplete decoder) ข้อดีของวิธีการนี้คือสามารถทำการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบในกรณีของการใช้รหัสแก้ความผิดพลาดอย่างเดียวและการถอดรหัสแก้การลบและถอดรหัสแก้ความผิดพลาด

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทำการศึกษาวิเคราะห์

1.2.1 ศึกษากระบวนการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรงและสามารถอธิบายลักษณะของสัญญาณ การทำงานของระบบคือ เครื่องส่ง ช่องสัญญาณ เครื่องรับ โดยอธิบายหลักการและเหตุผลของแบบจำลอง

1.2.2 ศึกษาแบบจำลองของช่องสัญญาณแบบนาคากามิและเครื่องรับแบบเรคซึ่งเป็นแบบจำลองที่มีความเหมาะสมและสามารถเปรียบเทียบกับแบบจำลองอื่นๆได้

1.2.3 ศึกษาการหาค่าสมรรถนะของระบบและทำการเปรียบเทียบกับระบบที่ไม่เข้ารหัสและระบบที่ทำการเข้ารหัส

1.2.4 ศึกษาสมรรถนะของระบบด้านอัตราความผิดพลาดบิดของการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรงในช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคากามิที่มีตัวแปรเสริมไม่เจาะจงด้วยการเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาด

1.2.5 ศึกษาตัวแปรเสริมที่มีผลต่อสมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดบิดของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรงในช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคากามิที่มีตัวแปรเสริมไม่เจาะจงโดยใช้รหัสแก้ไขความผิดพลาด

1.3 แนวความคิด

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการวิเคราะห์สมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดบิดของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัสลำดับโดยตรง โดยมีรูปแบบของข้อมูลและรหัสเป็นแบบเลขฐานสอง เนื่องจากมีความถูกต้องของข้อมูลมากกว่ารูปแบบอื่น และเป็นรูปแบบมาตรฐานของการส่งข้อมูล โดยใช้เทคนิคการมอดูเลตเชิงเลขทางเฟส เนื่องจากเหตุผลทางด้านข้อจำกัดด้านแบนด์วิดท์ของช่องสัญญาณและกำลังงาน แต่ในระบบการสื่อสารจะมีผลของการเฟดของสัญญาณ ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้แบบจำลองนาคากามิ เนื่องจากเป็นแบบจำลองที่มีความเหมาะสมคือเป็นแบบจำลองที่ได้มาจากการทดลอง สามารถอธิบายการเฟดของคลื่นหลายวิธีได้ สามารถอธิบายสภาพแวดล้อม

ในเมือง ชนบท และเหมาะกับการสื่อสารแบบไร้สาย นอกจากนี้ยังสามารถอธิบายแบบจำลองแบบอื่นๆ ได้ เช่น กรณีที่ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งมีค่าเท่ากับ 0.5 สามารถอธิบายการแจกแจงแบบเกาส์เซียนข้างเดียว ถ้าตัวแปรเสริมเฟดดิ้งมีค่าเท่ากับ 1 สามารถอธิบายการแจกแจงแบบเรย์เลย์ และถ้าตัวแปรเสริมเฟดดิ้งมีค่าเข้าใกล้อนันต์ก็คือสภาวะที่ไม่มีการผิดเพี้ยนของสัญญาณ โดยที่วิทยานิพนธ์นี้จะสอดคล้องกับหลักความจริงที่ว่าตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในแต่ละวิถีเป็นอิสระต่อกันและไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยอื่นๆ ในอดีตที่กำหนดให้ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในทุกวิถีเท่ากัน ทางด้านเครื่องรับจะใช้เครื่องรับแบบเรค เนื่องจากมีจุดเด่นคือจะให้อัตราส่วนกำลังสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนมีค่าสูงสุด และโครงสร้างภายในประกอบด้วยวงจรกรองเข้าคู่ และตัวชดเชยทางด้านสายการประวิงการแยกต่อ (tapped delay line) ซึ่งโครงสร้างแบบนี้จะชดเชยปัญหาที่สำคัญของการสื่อสาร คือ เฟส การประวิงเวลา และ แอมพลิจูดของสัญญาณ โดยใช้ขบวนการตัดสินใจแบบการตัดสินใจแบบซอฟท์ (soft decision) และใช้การเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาดแบบรีดโซโลมอน เนื่องจากคุณสมบัติที่เป็นลิเนียร์บล็อก สามารถใช้ได้กับข้อมูลที่เป็นเลขฐานสองและไม่ใช้เลขฐานสอง เป็นชั้นคลาสพิเศษของรหัส BCH โดยใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียวย โดยทำการเปรียบเทียบสมรรถนะของระบบที่ไม่เข้ารหัสกับระบบที่ทำการเข้ารหัส

1.4 ขอบเขตของการศึกษา

1.4.1 ศึกษากระบวนการสื่อสารแบบ DS-CDMA พร้อมทั้งอธิบายระบบที่ทำการศึกษา

1.4.2 นำเทคนิคการเข้ารหัสไปประยุกต์ใช้กับการสื่อสารแบบดิจิทัลแบบต่างๆ และระบบ CDMA รูปแบบอื่นๆ

1.4.3 เปรียบเทียบสมรรถนะของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัสกับระบบที่มีการแก้ไขด้วยการเข้ารหัสว่าทำให้สมรรถนะของระบบดีขึ้นมากน้อยเพียงใด โดยมีเงื่อนไขอัตราส่วนกำลังของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (SNR) มีค่าคงที่

1.4.4 สรุปผลของการศึกษาสมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดของบิตข้อมูลของระบบการเข้าถึงช่องสัญญาณหลายทางแบบการเข้ารหัสลำดับโดยตรงที่ได้ทำการเข้ารหัสรีดโซโลมอนกับระบบที่ไม่ได้เข้ารหัสในช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคาอามิ พร้อมทั้งอธิบายตัวแปรต่างๆ ที่มีผลกระทบกับสมรรถนะของระบบ

บทที่ 2

การสื่อสารระบบดิจิทัล

2.1 ระบบการเข้าถึงช่องสัญญาณ (multiple access system)

ระบบสื่อสารอาจแบ่งได้คือระบบสื่อสารอนาล็อกและระบบสื่อสารดิจิทัล เมื่อระบบการสื่อสารอนาล็อกเริ่มเกิดปัญหาเกี่ยวกับความจุของช่องสัญญาณที่ไม่เพียงพอ ทำให้การติดต่อผ่านเครือข่ายระบบสื่อสารอนาล็อกเกิดปัญหาและหยุดชะงัก ดังนั้นจึงเริ่มมีการพัฒนาระบบการสื่อสารดิจิทัลขึ้นมาเพื่อเพิ่มขนาดความจุของช่องสัญญาณให้มากขึ้น สามารถแบ่งวิธีการเข้าถึงระบบเครือข่ายช่องสัญญาณดังนี้

1. การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งความถี่ (Frequency Division Multiple Access : FDMA) โดยแต่ละช่องสัญญาณจะผลัดเปลี่ยนกันใช้งานที่มีความถี่ไม่ตรงกัน

2. การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งเวลา (Time Division Multiple Access : TDMA) โดยแต่ละช่องสัญญาณจะผลัดเปลี่ยนกันใช้แบนด์วิดท์ที่มีช่วงคาบเวลา (Time-sharing) และช่วงความถี่ไม่ตรงกัน

3. การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส (Code Division Multiple Access : CDMA) โดยแต่ละช่องสัญญาณจะใช้แบนด์วิดท์และเวลาเดียวกันก็ได้ และแต่ละช่องสัญญาณจะมีรหัสที่ต่างกัน

4. การเข้าถึงหลายทางแบบแยกโพลาไรเซชัน (Polarization Division Multiple Access : PDMA) โดยแต่ละช่องสัญญาณใช้โพลาไรซ์ต่างกัน ซึ่งวิธีนี้ไม่ถูกนำมาใช้กับระบบวิทยุโทรศัพท์เคลื่อนที่

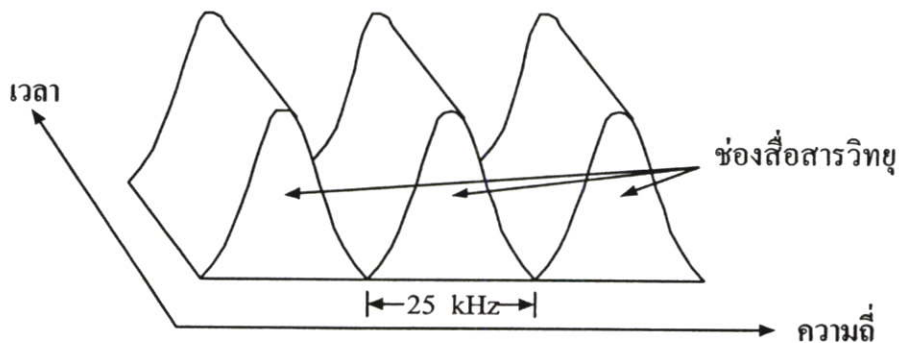
5. การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งสเปซ (space division multiple access :SDMA) วิธีนี้ถูกกำหนดเพื่อนำมาใช้กับดาวเทียมที่มีสายอากาศแบบกำหนดตำแหน่งลำคลื่นเฉพาะจุด (spot beam) ซึ่งการติดต่อที่อยู่ในพื้นที่ควบคุมของลำคลื่นของสายอากาศต่างกันสามารถใช้ความถี่เดียวกันได้

2.1.1 การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งความถี่

FDMA เป็นระบบการเข้าถึงข้อมูลที่ใช้ในระบบอนาล็อกแบบแบ่งความถี่และใช้กันอย่างกว้างขวาง ในระบบดาวเทียมสื่อสารทั่วโลกหลายระบบด้วยกัน รวมทั้งระบบอินเทลแซต โดยใช้งานของโครงข่ายไมโครเวฟภาคพื้นดิน แม้ว่าประสิทธิภาพการใช้งจรจะต่ำก็ตาม จากการเข้าถึงหลายทางในระบบดาวเทียมอินเทลแซต IV-A ปรากฏว่าประสิทธิภาพการใช้งจรความถี่ของระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งความถี่แปรผันตามขนาดของคลื่นพาห์ เช่น 9.6 ช่อง/MHz

สำหรับคลื่นพาห้คลื่นเดียวที่มีความกว้างแถบ 2.5 MHz และ 31.7 ช่อง/MHz ที่มีความกว้างแถบ 25 MHz

ปัจจุบันระบบอินเทลแซตใช้ระบบคลื่นทางปลายทางหลายค่า (multi-destination carrier) ซึ่งสัญญาณเบสแบนด์หลายๆสัญญาณที่ส่งไปตามสถานีคมนาคมภาคพื้นดินจำนวนหนึ่งจะมอดูเลตคลื่นพาห้ร่วมกัน (common carrier) แล้วส่งไปโดยวิธีการของระบบนี้ อย่างไรก็ตามประสิทธิภาพของการใช้วงจรจะลดลง ถ้าจำนวนสถานีคมนาคมภาคพื้นดินเพิ่มขึ้น ในกรณีของการสื่อสารที่ต้องการสัญญาณความจุต่ำนิยมใช้ระบบ FDMA ชนิดเอสซีพีซี (หนึ่งช่องต่อคลื่นพาห้) (single channel per carrier : SCPC) ที่ใช้การกำหนดล่วงหน้าหรือสเปค (spade) ที่ใช้กำหนดตามคำขอเป็นเทคนิคการเข้าถึงแบบหลายทางที่นับได้ว่าเป็นมาตรฐานของระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่ชนิดอนาล็อก เทคนิค FDMA กำหนดให้ผู้ใช้บริการรายหนึ่งครอบครองช่องสื่อสารวิทยุหนึ่งช่องไปตลอดเวลาที่มีการใช้งาน จากรูปเป็นการแสดงรูปแบบการใช้งานช่องสื่อสารผู้ใช้บริการโดยอ้างตามมาตรฐานโทรศัพท์เคลื่อนที่ระบบ TACS ซึ่งแต่ละช่องสื่อสารวิทยุมีแบนด์วิดท์เท่ากับ 25 kHz สำหรับบริการโทรศัพท์เคลื่อนที่ก้าวหน้า (advanced mobile phone service: AMPS) จะมีแบนด์วิดท์เท่ากับ 30 kHz ตามลำดับ ผู้ใช้โทรศัพท์หนึ่งคนจะถูกกำหนดช่องสื่อสารดังกล่าวในหนึ่งช่วงเป็นไปตามหน้าที่ของสถานีนั้นๆ



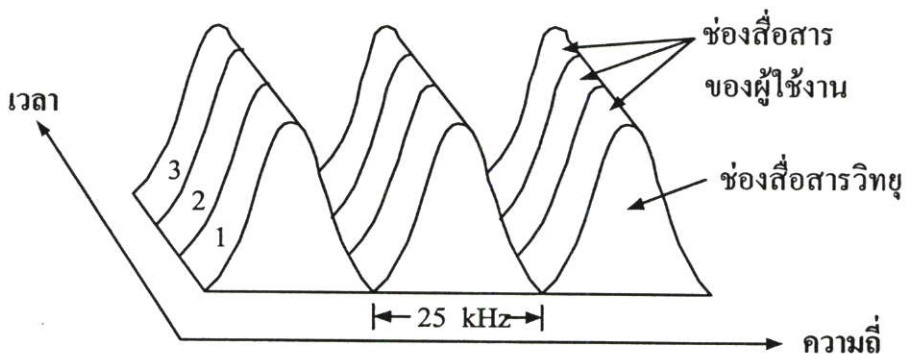
รูปที่ 2.1 การจัดสรรช่องสื่อสารใช้งานแบบ FDMA

2.1.2 การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งเวลา

ระบบ TDMA เป็นระบบที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดจากการใช้ระบบ FDMA ในระบบนี้สัญญาณดิจิทัลที่เกิดจากการมัลติเพล็กซ์ โดยการแบ่งทางเวลาจะมอดูเลตตัวคลื่นพาห้คลื่นเดียวส่งและรับโดยสถานีคมนาคมภาคพื้นดินจำนวนหนึ่งโดยผ่านทรานส์สปอนเดอร์ของดาวเทียมสื่อสารร่วมกัน แม้ว่าระบบจะต้องการเทคนิคการซิงโครไนซ์และความกว้างแถบที่ใช้ความถี่กำหนดสามารถใช้อย่างมีประสิทธิภาพสูงได้เนื่องจากใช้เทคนิคการประมาณเสียงพูดเชิงเลข (Digital Speech Interpolation : DSI) ได้ง่ายกว่า ระบบนี้ให้ความคล่องตัวในการปฏิบัติการสื่อสารเทคนิค

การเข้าถึงแบบ TDMA เป็นระบบ IS-54 การแบ่งช่องสื่อสารวิทยุแต่ละช่องของเทคนิค TDMA กำหนดให้มีแบนด์วิดท์ช่องละ 30 kHz แต่จุดเด่นที่ระบบ IS-54 เหนือกว่าแบบ FDMA ก็คือในหนึ่งช่องสื่อสารวิทยุจะมีการแบ่งช่วงเวลาในการใช้งานออกเป็น 3 ช่วงสลับกันไป ทำให้สามารถรองรับผู้ใช้บริการได้ถึง 3 รายต่อหนึ่งช่องความถี่ การใช้งานของผู้ใช้บริการแต่ละรายจะเป็นไปตามช่วงเวลาที่ถูกกำหนดไว้เรียกว่าช่วงเวลา (time slot) หากพิจารณาให้ละเอียดจะพบว่าระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่ซึ่งใช้เทคนิค TDMA ทุกระบบต่างก็ใช้เทคนิคของ FDMA เป็นพื้นฐาน เพราะยังมีการแบ่งช่องสื่อสารวิทยุออกเป็นช่องๆ ตามช่องความถี่ แล้วจึงนำแต่ละช่องมาแบ่งตามช่วงเวลา

ภายในช่องสื่อสารวิทยุของระบบ IS-54 ซึ่งได้ประกอบไปด้วยเวลา 3 ช่องจะมีการแบ่งแต่ละช่วงเวลาให้ผู้ให้บริการแต่ละรายที่กำหนดโทรศัพท์ ผู้ใช้แต่ละคนจะสามารถรับหรือส่งข้อความได้เฉพาะช่วงเวลาที่ได้รับสิทธิเท่านั้น ช่วงเวลาอื่นๆ จะถูกใช้งานโดยผู้ใช้บริการรายอื่น แต่เนื่องจากช่วงเวลาแต่ละช่วงกินเวลาระยะสั้นมากจนประสาทของมนุษย์ไม่สามารถแยกแยะได้ว่าการแบ่งเวลาออกเป็นช่วงให้ใช้งาน ทำให้ผู้ใช้โทรศัพท์สามารถใช้โทรศัพท์พูดคุยได้ตลอดเวลา ไม่มีการติดขัดแต่อย่างใด จากรูปแสดงให้เห็นรูปแบบการใช้ช่องสื่อสารของผู้ใช้แต่ละราย จะเห็นว่าการแบ่งแถมการแสดงผลออกเป็นแกนความถี่และแกนเวลา

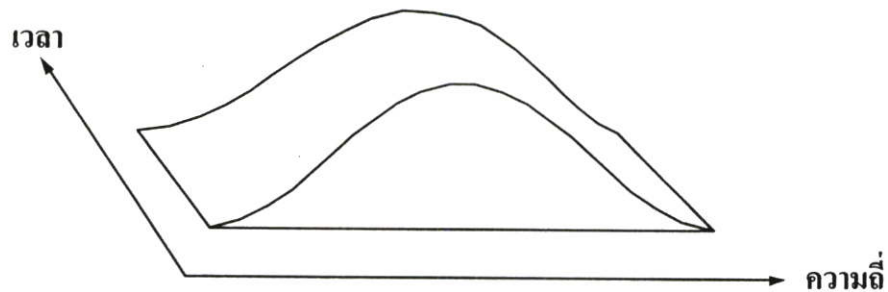


รูปที่ 2.2 การจัดสรรช่องสื่อสารใช้งานแบบ TDMA

ระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่จีเอสเอ็ม (global system for mobile communication : GSM) เป็นอีกระบบหนึ่งที่ใช้เทคนิค TDMA เพียงแต่แบนด์วิดท์ของช่องสัญญาณวิทยุแต่ละช่องมีขนาดเป็น 200 kHz และมีการแบ่งช่องสื่อสารวิทยุออกเป็น 8 ช่องเวลา เมื่อพิจารณาพบว่าระบบ GSM ก็ได้เพิ่มประสิทธิภาพในการใช้ย่านความถี่ให้เหนือระบบอนาล็อกแต่ประการใด ทั้งนี้เนื่องจากการใช้ย่านความถี่กว้าง 200 kHz สำหรับรองรับผู้ใช้บริการ 8 ราย ซึ่งก็เป็นตัวเลขเดียวกันกับระบบอนาล็อกซึ่งผู้ใช้บริการแต่ละรายใช้ช่องสื่อสารวิทยุขนาด 25 kHz รวม 8 ราย ก็ยังคงใช้แบนด์วิดท์ขนาด 200 kHz อยู่เช่นเดียวกัน

2.1.3 การเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส

CDMA (Code Division Multiple Access) เป็นเทคโนโลยีที่ใช้กับโทรศัพท์เคลื่อนที่แบบหนึ่ง ซึ่งข้อมูลที่ส่งออกมาจากสถานีฐานจะประกอบด้วยข้อมูลของผู้ใช้หลายคน ในระบบ CDMA นี้ผู้ใช้แต่ละคนจะได้รับ pseudorandom code ชุดหนึ่งที่ไม่เหมือนกับ code ของผู้ใช้อื่น เมื่อใช้ code ดังกล่าวถอดรหัสสัญญาณจากสถานีฐานแล้วทำให้ผู้ใช้แต่ละคนได้รับข้อมูลในส่วนของตัวเองได้ เมื่อเราพิจารณาถึงหลักการจัดสรรช่องสัญญาณในระบบ FDMA (Frequency Division Multiple Access) ผู้ใช้จะได้รับช่วงความถี่ที่ใช้ในการส่งข้อมูล ระบบ TDMA (Time Division Multiple Access) ผู้ใช้จะได้รับช่วงความถี่และใช้ช่วงเวลาที่กำหนดในการส่งข้อมูล แต่สำหรับระบบ CDMA ผู้ใช้จะใช้ช่วงความถี่ทั้งหมดและไม่จำกัดช่วงเวลาโดยส่ง/รับข้อมูลโดยการเข้า/ถอดรหัส



รูปที่ 2.3 การจัดสรรช่องสื่อสารใช้งานแบบ CDMA

เทคนิค CDMA มีอยู่ด้วยกันหลายแบบ สำหรับรูปแบบที่นำมาใช้ในระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่มีชื่อเรียกว่า การจัดลำดับโดยตรง (direct sequence) หรือ DS-SS ซึ่งกำหนดแบนด์วิดท์ของช่องสื่อสารแต่ละช่องไว้มากมีขนาด 1.25 MHz สำหรับช่องสื่อสารซึ่งใช้รองรับการสนทนาของโทรศัพท์แต่ละช่องจะถูกแบ่งออกจากกันโดยการกำหนดรหัสทางดิจิทัลผู้ใช้บริการทุกรายสามารถใช้ความถี่ได้ทั้งย่าน 1.25 MHz ตลอดเวลา

2.1.3.1 ข้อดีของระบบ CDMA

- ก. มีคุณสมบัติในการเลือกการส่งและการรับ
- ข. มีการใช้รหัสในการรับการส่งข้อมูลซึ่งป้องกันสัญญาณรบกวน
- ค. ระดับสัญญาณขาออกมีค่าค่อนข้างต่ำ
- ง. สามารถป้องกันและแยกสัญญาณรบกวนออกไปได้
- จ. ไม่ต้องมีการบริหารเวลาเหมือนระบบ TDMA
- ฉ. ไม่ต้องมีการบริหารความถี่เหมือนระบบ FDMA

- ช. แบนด์วิดท์มีค่ากว้างมาก
- ซ. การรบกวนข้อมูลทำได้ลำบาก
- ฅ. การดักฟังทำได้ยาก
- ญ. ความปลอดภัยของข้อมูลมีมาก
- ฎ. สามารถใช้งานได้ในช่วงกว้าง
- ฏ. ป้องกันการส่งสัญญาณรบกวน
- ฐ. ป้องกันการแทรกสอดของสัญญาณ
- ฑ. ลดผลของการแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์ได้ดี
- ฒ. เป็นระบบที่มีความเป็นส่วนตัว

2.1.3.2 ข้อเสียของระบบ CDMA

- ก. โครงสร้างทางฮาร์ดแวร์ซับซ้อน
- ข. เป็นระบบที่องค์ประกอบยุ่งยากซับซ้อน
- ค. เสียเวลาในการประมวลผลเนื่องจากการตรวจเช็ครหัส

2.1.3.3 การประยุกต์ใช้งาน

- ก. การทหาร
- ข. การใช้งานเชิงพาณิชย์
- ค. การใช้งานในระบบดาวเทียม
- ง. การใช้งานด้านระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่
- จ. ระบบควบคุมทางอากาศ

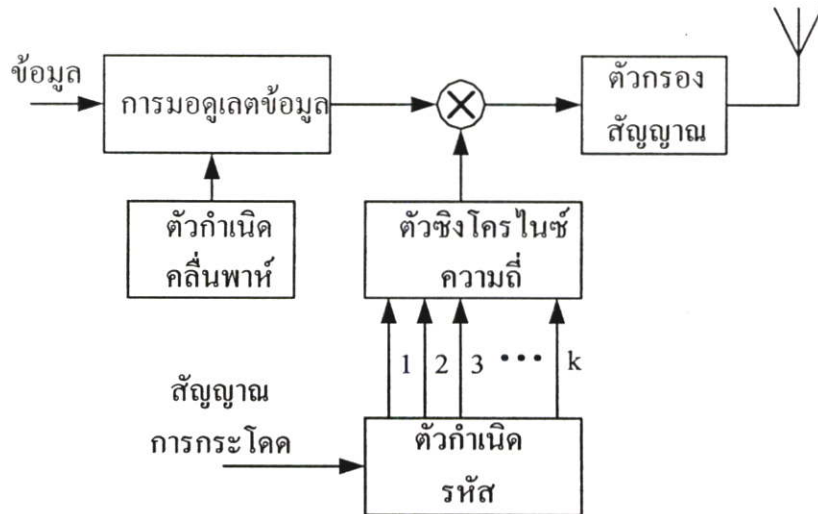
2.2 การมอดูเลตแบบสเปกตรัมแผ่ (spread spectrum)

CDMA เป็นเทคโนโลยีที่ใช้หลักการมอดูเลตแบบสเปกตรัมแผ่ (spread spectrum) โดยที่ CDMA ใช้วิธีการกระจายข้อมูลข่าวสารที่ใช้ในการสื่อสารไปบนแถบความถี่ซึ่งมีแบนด์วิดท์กว้างกว่าแบนด์วิดท์ของสัญญาณข้อมูลที่ต้องการจะส่งมาก เมื่อพิจารณาที่ผู้ใช้แต่ละคนจะถือว่ามีสัญญาณของผู้ใช้ คนอื่นเป็น Interference ดังนั้นจึงไม่จำกัดจำนวนเครื่องลูกข่าย(subscriber)ขึ้นอยู่กับว่าต้องการ Quality of service เท่าใด เทคนิคการกระจายสเปกตรัมถูกใช้ในกิจการทางทหารมานานเนื่องจากข้อดีด้านการใช้แบนด์วิดท์ที่กว้างมาก ทนต่อการรบกวนได้ดี การที่สัญญาณซึ่งถูกส่งแบบกระจายสเปกตรัมถูกตรวจจับได้ลำบาก เพราะว่ามีระดับสัญญาณที่ถูกส่งออกอากาศมีขนาดไม่ต่างจากสัญญาณรบกวนภายในอากาศเท่าใดนัก จากลักษณะดังกล่าวทำให้เกิดความปลอดภัยของสัญญาณข้อมูลตัวนั้น

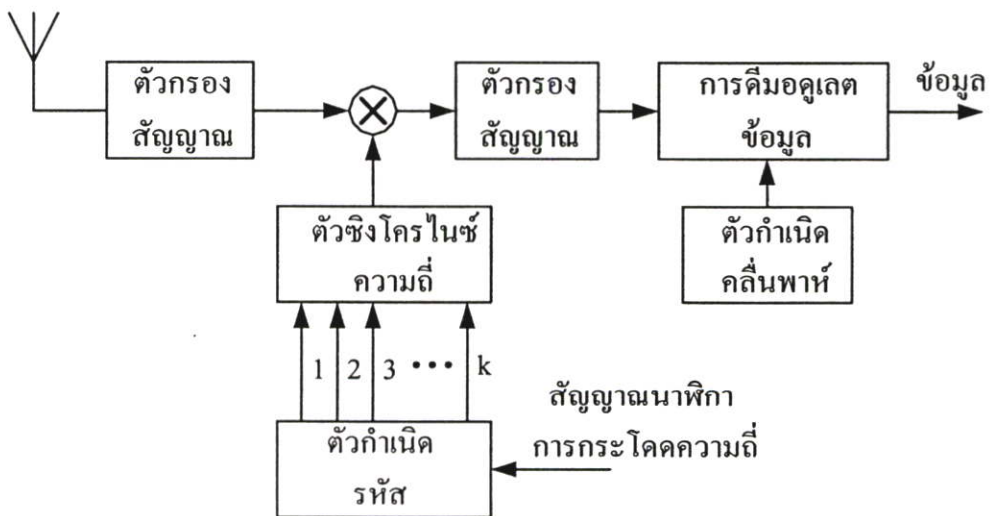
การกระจายสเปกตรัมที่นิยมในปัจจุบันมี 2 วิธีคือ Frequency hopping และ Direct-Sequence

2.2.1 การกระโดดความถี่ (Frequency Hopping :FH)

วิธีการกระโดดความถี่นี้ ความถี่ของสัญญาณพาห้ที่ใช้ในการมอดูเลตกับข้อมูลจะมีค่าไม่คงที่ เปลี่ยนไปตามคาบเวลา การกระจายสเปกตรัมสัญญาณด้วยวิธีนี้ขบวนการห้สจะไม่ถูกนำไปมอดูเลต โดยตรงกับข้อมูล แต่จะนำไปเป็นตัวควบคุมลำดับสัญญาณคลื่นพาห้ ดังนั้นสัญญาณที่ส่งออกไป จึงเหมือนกับการนำข้อมูลไปมอดูเลตกับสัญญาณพาห้โดยความถี่จะเปลี่ยนไปเป็นค่าอื่นๆ ซึ่งขึ้นอยู่กับขบวนการห้ส



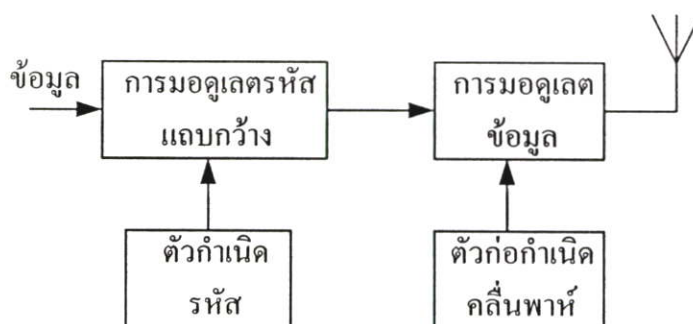
รูปที่ 2.4 แสดงแผนภาพบล็อกด้านส่งของระบบการกระโดดความถี่



รูปที่ 2.5 แสดงแผนภาพบล็อกด้านรับของระบบการกระโดดความถี่

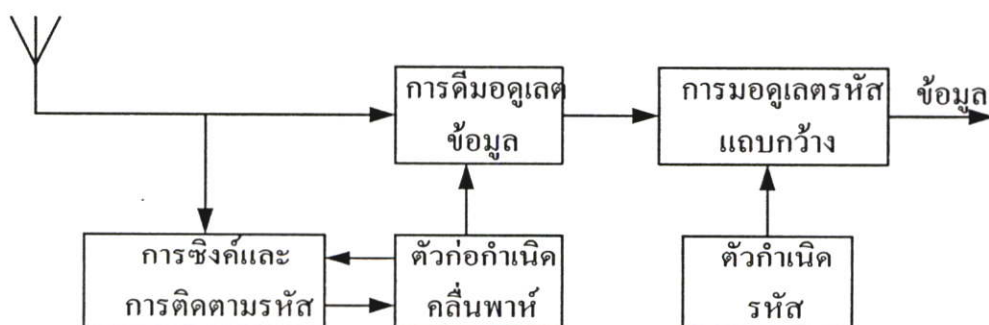
2.2.2 การจัดลำดับโดยตรง (Direct Sequence : DS)

ในการจัดลำดับโดยตรง สัญญาณข้อมูลจะถูกมอดูเลตโดยตรงกับสัญญาณรหัสดิจิทัล โดยสัญญาณข้อมูลเป็นสัญญาณดิจิทัล จากรูปที่ 2.6 แสดงบล็อกไดอะแกรมของเทคนิคการจัดลำดับโดยตรง โดยสัญญาณข้อมูลรหัสฐานสองจะถูกมอดูเลตกับขบวนรหัส (Code Sequence) ซึ่งขบวนรหัสนี้จะประกอบด้วยบิต+1 หรือ -1 ซึ่งเรียกว่าชิป (Chip) และอัตราชิปของขบวนรหัสจะต้องมากกว่าสัญญาณข้อมูล สัญญาณที่ได้จะถูกนำไปมอดูเลตกับคลื่นพาห้ซึ่งการมอดูเลตที่นิยมคือการมอดูเลตเชิงเฟสแบบ BPSK หรือ QPSK



รูปที่ 2.6 แสดงแผนภาพบล็อกด้านส่งของระบบการจัดลำดับโดยตรง

สัญญาณทางด้านรับจะมีตัวที่ทำการซิงโครไนซ์ระหว่างตัวกำเนิดรหัสจากทางด้านส่งกับทางด้านรับ ซึ่งการซิงโครไนซ์นี้จะเริ่มตั้งแต่ตอนด้านรับเริ่มรับข้อมูลและจะรักษาการซิงโครไนซ์ไปจนกระทั่งด้านรับรับสัญญาณข้อมูลจนเสร็จ ซึ่งสามารถแสดงบล็อกไดอะแกรมด้านรับได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 แสดงแผนภาพบล็อกด้านรับของระบบการจัดลำดับโดยตรง

2.3 คุณลักษณะของสัญญาณที่ผ่านช่องสัญญาณที่มีการจางหายหลายเส้นทาง

ในการสื่อสารโดยเทคโนโลยีไร้สาย ทางด้านส่งเมื่อส่งสัญญาณออกไปยังช่องสัญญาณต่างๆจะเกิดการแทรกสอด สะท้อนและการลดทอนสัญญาณที่มาถึงด้านรับ สัญญาณที่รับได้จะเกิดจากการรวมกันของสัญญาณที่มาจากหลายเส้นทาง ซึ่งอาจเป็นการเสริมกันหรือหักล้างกัน

หากทำการส่งพัลส์สัญญาณที่มีคาบสั้นๆไปบนช่องสัญญาณหลายเส้นทางตามการเปลี่ยนแปลงเวลา สัญญาณที่รับได้จะเป็นขบวนการของพัลส์แสดงดังรูปที่ 2.8 ดังนั้นคุณลักษณะของตัวกลางแบบหลายเส้นทางคือ การกระจายช่วงเวลาของสัญญาณที่ส่งผ่านช่องสัญญาณ เมื่อทำการส่งสัญญาณเดิมออกไปหลายๆครั้ง ด้านรับจะรับได้ขบวนการสัญญาณที่แตกต่างกันซึ่งไม่สามารถคาดคะเนสัญญาณที่รับได้ สามารถเขียนเป็นสมการทางภาครับแสดงได้เป็น

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(t) s(t - \tau_n(t)) \quad (2.1)$$

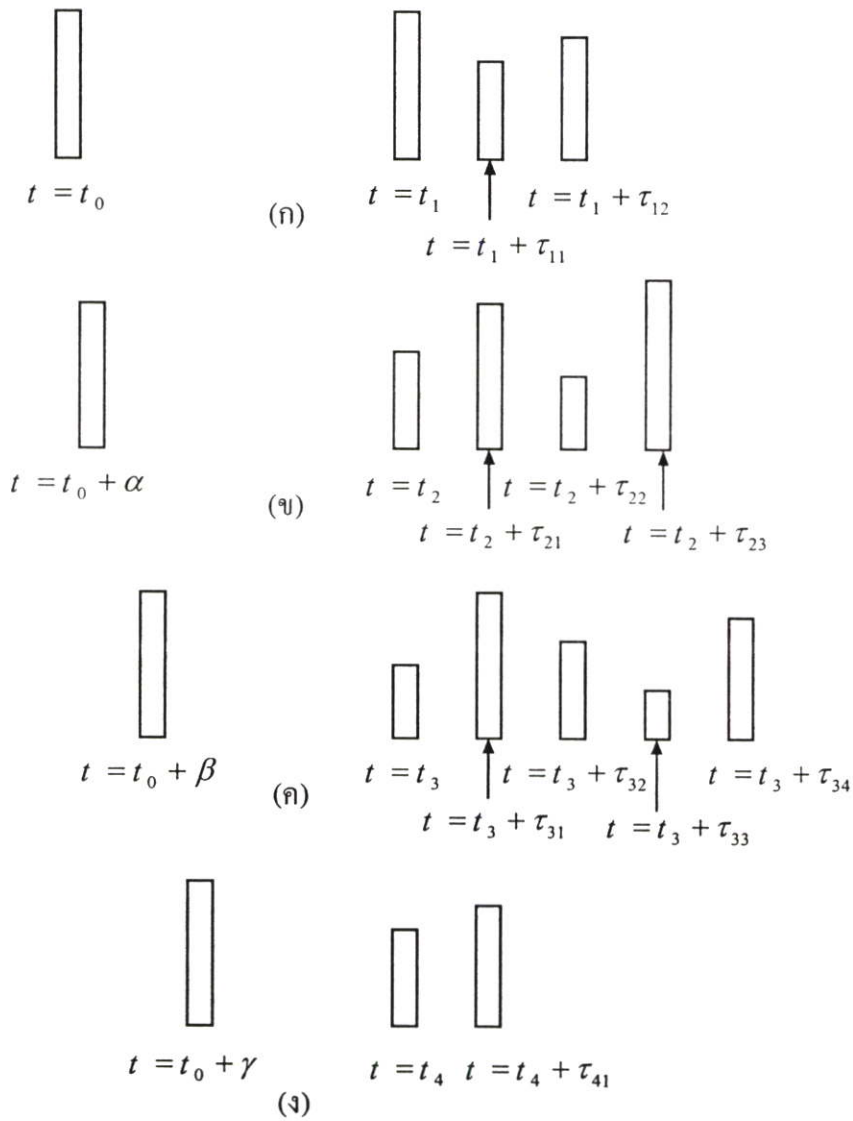
โดย $\beta_n(t)$ เป็นอัตราการลดทอนของสัญญาณในเส้นทางที่ n
 $\tau_n(t)$ เป็นการประวิงเวลาของสัญญาณในเส้นทางที่ n
 $s(t)$ เป็นสัญญาณด้านส่งมีค่าเท่ากับ $\text{Re}[s_1(t)e^{j2\pi f_c t}]$
 $x(t)$ เป็นสัญญาณที่รับได้ที่ภาครับ

สัญญาณที่ได้รับหลังผ่านการกรองสัญญาณ สัญญาณที่ได้สามารถแสดงได้เป็น

$$r_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(t) e^{-j\gamma_n} s_1(t - \tau_n(t)) \quad (2.2)$$

โดย $\gamma_n = 2\pi f_c \tau_n(t)$

แบบจำลองช่องสัญญาณหลายเส้นทาง ซึ่งจะมีสัญญาณที่รับได้แสดงดังสมการ (2) เรียกว่าสัญญาณเฟคดิง โดยปรากฏการณ์เฟคดิงเป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงเวลาในเทอมของเฟส γ_n ในบางครั้งการเปลี่ยนแปลงของ γ_n เป็นผลทำให้สัญญาณด้านรับมีค่าลดลง แต่บางครั้งทำให้มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นค่าการเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูดของสัญญาณด้านรับเกิดจากคุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงของเวลาของช่องสัญญาณหลายเส้นทาง



รูปที่ 2.8 ตัวอย่างแสดงการตอบสนองทางแกนเวลาของช่องสัญญาณหลายเส้นทางเมื่อส่งพัลส์สัญญาณช่วงแคบๆ

2.3.1 แบบจำลองช่องสัญญาณ

ช่องสัญญาณสามารถแทนด้วยแบบจำลองช่องสัญญาณต่างๆ ซึ่งจะมีค่าของผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรความถี่ต่ำในกรณีทั่วไป สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$c(\tau, t) = \sum_{l=0}^{L-1} \beta_n(t) e^{-j\tau_n} \delta(t - \tau_n(t)) \quad (2.3)$$

โดย β_n เป็นอัตราการลดทอนทางด้านแอมพลิจูดของสัญญาณ (amplitude distortion factor) ซึ่งมีความหนาแน่นของความน่าจะเป็น แสดงด้วยการแจกแจงแบบต่างๆ

- τ_n เป็นการประวิงเวลา (time delay) ในเส้นทางต่างๆ ซึ่งกำหนดให้เป็นตัวแปรแบบสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[0, T]$
- γ_n เป็นการประวิงทางเฟส (phase delay) ซึ่งกำหนดให้เป็นตัวแปรแบบสุ่มที่มีการแจกแจงบนช่วง $[0, 2\pi]$
- L เป็นจำนวนเส้นทาง ซึ่งจะสอดคล้องกับผลของการจางหายหลายวิถี (multipat fading) เป็นผลเนื่องมาจากการสะท้อน การหักเห และการกระเจิงของสัญญาณภายในช่องสัญญาณ เป็นต้น

ฟังก์ชันการแจกแจงของความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีหลายรูปแบบดังนี้

2.3.1.1 แบบจำลองของรายล์เลย์ (Rayleigh Model)

เป็นระบบที่อธิบายการแจกแจงของความหนาแน่นกำลังของสัญญาณในชนบท ซึ่งมีบ้านเรือนที่มีขนาดไม่สูงมากนักหรือภูเขา การใช้งานในชนบทก็พบกับปัญหาซึ่งมีผลกระทบต่อระดับความแรงของสัญญาณซึ่งเรียกว่าการจางหายในหลายเส้นทางเกิดขึ้นเมื่อสัญญาณเดินทางมากกว่าหนึ่งเส้นทางจากด้านส่งไปยังด้านรับ สัญญาณจะไม่ได้รับโดยตรงจากด้านส่งแต่จะได้รับการหักเหจากทิศทางอื่นๆ ซึ่งตกกระทบมาเช่น จากบ้านเรือนในชนบท จึงเป็นการยากมากที่จะมีเส้นแนวสายตา (line of sight) ระหว่างตัวส่งและตัวรับ สัญญาณอาจจะเดินทางไปถึงตัวรับโดยผ่านการสะท้อนกับบ้านเรือนหลายครั้ง ซึ่งหมายความว่าสัญญาณที่ได้รับจะเป็นผลรวมของสัญญาณเดียวกันซึ่งมีความแตกต่างเฟสกันเล็กน้อย สามารถแสดงด้วยค่าความหนาแน่นของฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังสมการ

$$p(\beta) = \frac{\beta}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{เมื่อ } \beta \geq 0 \quad (2.4)$$

2.3.1.2 แบบจำลองของไรท์เซียน (Rician Model)

เป็นแบบจำลองที่เหมาะสมกับสภาวะแวดล้อมในเมืองซึ่งประกอบด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าและมีค่าความหนาแน่นความน่าจะเป็นดังสมการ

$$p(\beta) = \frac{\beta}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\beta^2 - a^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left[\frac{a\beta}{\sigma^2}\right] \quad \text{เมื่อ } \beta \geq 0 \quad (2.5)$$

เมื่อ $I_0(x)$ คือฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Function)

2.3.1.3 แบบจำลองของนาคากามิ (Nakagami Model)

เป็นแบบจำลองที่ได้มาจากการทดลองและสามารถอธิบายปรากฏการณ์ของการเฟดดิ้งในบริเวณอื่นๆ ได้ดี เาต์พุตของสัญญาณที่รับจะเป็นผลบวกทางเวกเตอร์ของขนาดของสัญญาณ (signal strength) แบบจำลองนาคากามิไม่ได้อธิบายรายละเอียดทางปัญหาด้านเฟส อย่างไรก็ตามแบบจำลองนาคากามิยังสามารถอธิบายแบบจำลองอื่นๆ ได้ดีอีกด้วย สามารถแสดงค่าความหนาแน่นความน่าจะเป็นดังสมการ

$$p_{\beta_i}(\beta) = 2 \left(\frac{m_i}{\Omega_i} \right)^{m_i} \frac{\beta^{2m_i-1}}{\Gamma(m_i)} \exp \left[-\frac{m_i}{\Omega_i} \beta^2 \right] \quad \text{เมื่อ } \beta \geq 0 \quad (2.6)$$

$$m_i = \frac{\Omega_i^2}{E[(\beta_i^2 - \Omega_i^2)^2]} \geq 0.5$$

โดยจุดเด่นของแบบจำลองนาคากามิ คือ

(ก) เป็นแบบจำลองที่ได้มาจากการทดลองและสอดคล้องกับสภาพแวดล้อมทั้งในชนบทและเมืองใหญ่

(ข) เป็นแบบจำลองที่สอดคล้องกับการแจกแจงของแอมพลิจูด (amplitude distribution) ซึ่งแสดงด้วยตัวแปรเสริมเฟดดิ้ง (m) ต่างๆ ดังนี้

$m = 1$	คือการแจกแจงแบบเรย์เลย์
$m = 0.5$	คือการแจกแจงแบบเกาส์เซียนข้างเดียว
$m \rightarrow \infty$	คือการฉีในอุดมคติที่ไม่มีการเฟดดิ้งของสัญญาณ

2.3.2 คุณสมบัติของสัญญาณ

สัญญาณที่มีได้จากสมการที่ (2.2) พบว่าสัญญาณที่รับได้ $r_i(t)$ เกิดจากสัญญาณที่ค้ำส่ง $s_i(t)$ ผ่านช่องสัญญาณที่ทำให้เกิดการจางหลายเส้นทาง ซึ่งสามารถเขียนสมการของช่องสัญญาณได้ดังสมการที่ (2.7)

$$c(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta(\tau - \tau_n(t)) \quad (2.7)$$

จากสมการที่ (2.7) นำมาหาอัตสหสัมพันธ์ (autocorrelation) ของฟังก์ชันจะได้

$$\phi_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E [c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] \quad (2.8)$$

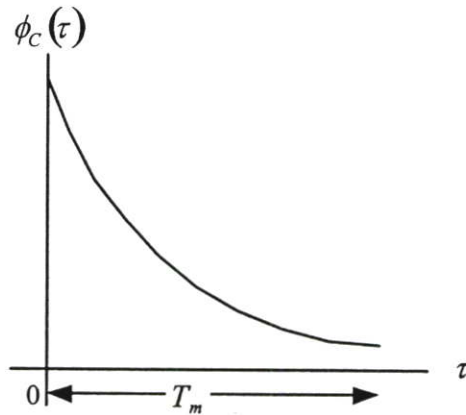
ในการส่งสัญญาณส่วนมาก ความสัมพันธ์ระหว่างการลดทอนและเฟสชิฟของช่องสัญญาณ τ_1 และ τ_2 จะไม่สัมพันธ์กัน ดังนั้นสมการที่ (2.8) จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{2} E[c^*(\tau_1; t)c(\tau_2; t + \Delta t)] = \phi_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (2.9)$$

เมื่อพิจารณาที่ $\Delta t = 0$

$$\phi_c(\tau; 0) \equiv \phi_c(\tau)$$

เรียกว่า โพรไฟล์ความเข้มของสัญญาณหลายวิถี (Multipath intensity profile) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของการประวิงเวลา (τ) และกำลังเอาต์พุตเฉลี่ยของช่องสัญญาณ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูป 2.9

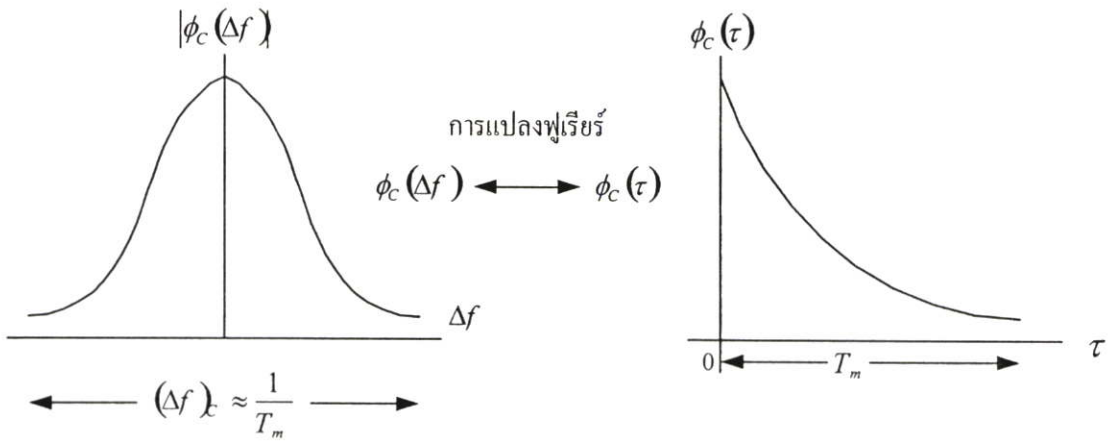


รูปที่ 2.9 แสดงคุณลักษณะของโพรไฟล์ความเข้มของสัญญาณหลายวิถี

โดยช่วงค่าเวลา τ ที่ทำให้ $\phi_c(\tau)$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์เรียกว่า ช่องว่างของสัญญาณหลายวิถี (multipath space) ของช่องสัญญาณหรือ T_m เมื่อทำการแปลงสมการที่ (2.8) ให้อยู่ในรูปความถี่ค่าของโพรไฟล์ความเข้มของสัญญาณหลายวิถีสามารถแปลงได้เป็น

$$\phi_c(\tau; \Delta t) \leftrightarrow \phi_c(\Delta f; \Delta t) \quad (2.10)$$

จะเรียกว่า $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ ว่าช่องว่างความถี่ (space frequency) หรือฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของช่องว่างเวลา(space time) ของช่องสัญญาณ โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันทั้งสองได้ดังรูป 2.10



รูปที่ 2.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน $\phi_c(\Delta f)$ และฟังก์ชัน $\phi_c(\tau)$

จากรูปที่ 2.10 ส่วนกลับของช่องว่างของสัญญาณหลายวิธีจะถูกเรียกว่า ช่องสัญญาณสหสัมพันธ์

$$(\Delta f)_c \approx \frac{1}{T_m} \quad (2.11)$$

2.3.3 สัญญาณดิจิทัลบนช่องสัญญาณการจางหายแบบเจาะจงความถี่และไม่เจาะจงความถี่

จากหัวข้อที่ผ่านมาเมื่อคำนวณส่งทำการส่งสัญญาณ $s_i(t)$ ผ่านช่องสัญญาณที่มีการจางหายหลายเส้นทางไปยังด้านรับ สามารถที่จะอธิบายสัญญาณด้านรับได้ทั้งหมดของฟังก์ชันเวลา $c(\tau; t)$ และ $s_i(t)$ ได้เป็น

$$r_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) s_i(t - \tau) d\tau \quad (2.12)$$

ในเทอมของฟังก์ชันความถี่ $C(f; t)$ และ $S_i(f)$

$$r_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) S_i(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.13)$$

จากสมการที่ (2.13) สามารถอธิบายได้ว่าเมื่อทำการส่งสัญญาณข้อมูล $S_i(f)$ ซึ่งจะมีคาบเวลาเท่ากับ T เมื่อผ่านช่องสัญญาณซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) $C(f; t)$ จะทำให้สัญญาณ $S_i(f)$ มีความผิดเพี้ยนไป ซึ่งผลที่ได้แสดงให้เห็นจากขนาดของสัญญาณด้านรับที่มีค่าหลายค่าหรือเรียกว่าเฟดดิ้ง ถ้าหากขนาดความกว้างช่องสัญญาณของ $S_i(f)$ มีค่ามากกว่าขนาด

ความกว้างช่องสัญญาณสหสัมพันธ์จะเรียกช่องสัญญาณนี้ว่าช่องสัญญาณเจาะจงความถี่ (frequency selective)

ในกรณีที่ขนาดความกว้างของช่องสัญญาณมีค่าน้อยกว่าขนาดความกว้างช่องสัญญาณสหสัมพันธ์ ช่องสัญญาณนี้จะถูกเรียกว่าช่องสัญญาณไม่เจาะจงความถี่ (frequency non-selective) ซึ่งช่องสัญญาณแบบนี้ค่าฟังก์ชันการถ่ายโอน $C(f;t)$ ของช่องสัญญาณจะมีค่าคงที่ทุกๆความถี่ ทำให้สมการที่ (2.13) เมื่อพิจารณาที่ความถี่ $f = 0$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} r_l(t) &= C(0;t) \int_{-\infty}^{\infty} S_l(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= C(0;t) s_l(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

ค่าฟังก์ชันการถ่ายโอน $C(0;t)$ ของช่องสัญญาณไม่เจาะจงความถี่สามารถเขียนได้เป็น

$$C(0;t) = \alpha(t) e^{-j\phi(t)} \quad (2.15)$$

โดย $\alpha(t)$ แทนโครงร่างของช่องสัญญาณ

$\phi(t)$ แทนเฟสของช่องสัญญาณ

2.3.3.1 เทคนิคไคเวอร์ซิติบนช่องสัญญาณหลายเส้นทาง

เทคนิคไคเวอร์ซิติถูกนำมาใช้เพื่อปรับปรุงเรื่องความผิดพลาดในการรับสัญญาณเมื่อการลดทอนของช่องสัญญาณมีค่ามากเช่นเมื่อช่องสัญญาณมีการจางหายของสัญญาณอย่างรุนแรง โดยจะทำการจัดหาอุปกรณ์ทางด้านรับที่จะรับสัญญาณทางด้านส่งที่ส่งผ่านช่องสัญญาณที่มีการจางหายหลายเส้นทาง ในที่นี้จะพิจารณาในกรณีที่ด้านรับได้รับสัญญาณ L แบบซึ่งเกิดจากสัญญาณส่งเดียวกัน ซึ่งเทคนิคไคเวอร์ซิติสามารถแบ่งได้เป็น

- 1) ไคเวอร์ซิติทางความถี่ ทำได้โดยส่งสัญญาณเดียวกันไปบนความถี่คลื่นพาห้ L ความถี่ โดยที่คลื่นพาห้แต่ละตัวความถี่จะห่างกันมากกว่าหรือเท่ากับความกว้างของช่องสัญญาณสหสัมพันธ์ $(\Delta f)_c$
- 2) ไคเวอร์ซิติทางเวลา ทำได้โดยส่งสัญญาณเดียวกันไปในช่องเวลาที่มีความแตกต่างกัน L ช่องซึ่งแต่ละช่องมีคาบเวลาห่างกันมากกว่าหรือเท่ากับเวลาช่องสัญญาณสหสัมพันธ์ $(\Delta t)_c$

นอกจากสองวิธีดังกล่าวยังมีเทคนิคไคเวอร์ซิตีคือจะอาศัยหลักการใช้สัญญาณที่มีความกว้างของสัญญาณมากกว่าช่องสัญญาณสหสัมพันธ์ สมมติว่าสัญญาณมีค่าความกว้างเท่ากับ W เนื่องจากค่าช่องว่างของสัญญาณหลายวิธีมีค่าเท่ากับ $T_m \approx 1/(\Delta f)_C$ ดังนั้นจำนวนสัญญาณที่สามารถจะแก้ปัญหาการจางหายได้มีค่าเท่ากับ $L \approx W/(\Delta f)_C$ ด้านรับซึ่งใช้วิธีดังกล่าวจะเรียกว่า เครื่องรับแบบเรค (RAKE receiver)

สมมติว่ามีช่องสัญญาณทำให้สัญญาณที่มาถึงด้านรับมีความแตกต่างกัน L ช่อง โดยส่งมาจากด้านส่งด้วยสัญญาณเดียวกัน และให้ช่องสัญญาณเป็นแบบไม่เจาะจงความถี่ สัญญาณที่รับได้ทางด้านรับได้สามารถเขียนได้เป็น

$$r_{ik}(t) = \beta_k e^{-j\phi_k} s_{km}(t) + z_k, \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2 \quad (2.16)$$

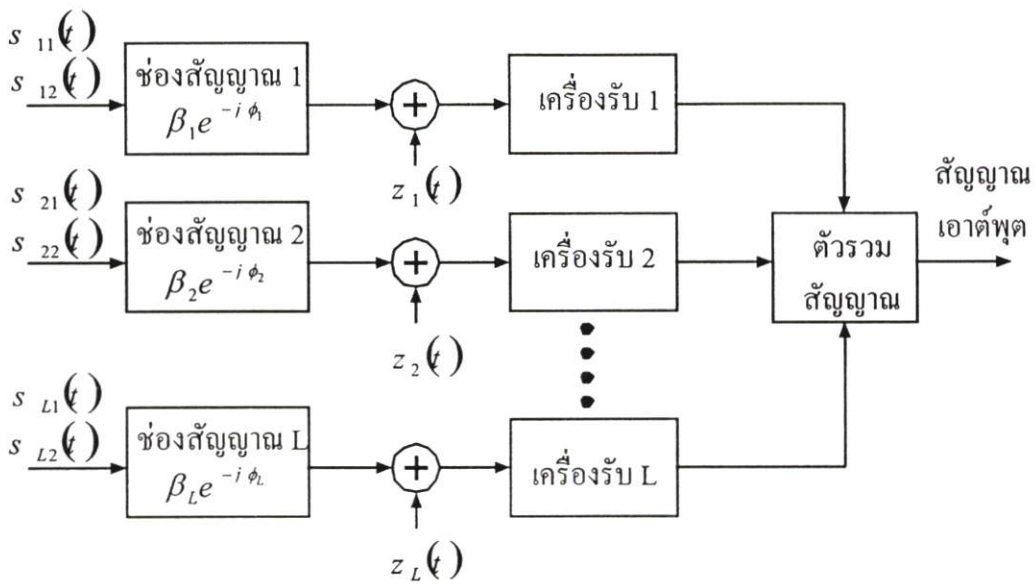
โดย $\beta_k e^{-j\phi_k}$ เป็นตัวแปรการลดทอนและเฟสชิฟของช่องสัญญาณที่ L

$s_{km}(t)$ เป็นสัญญาณที่ m ส่งผ่านช่องสัญญาณที่ k

$z_k(t)$ เป็นสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise) บนช่องสัญญาณที่ k

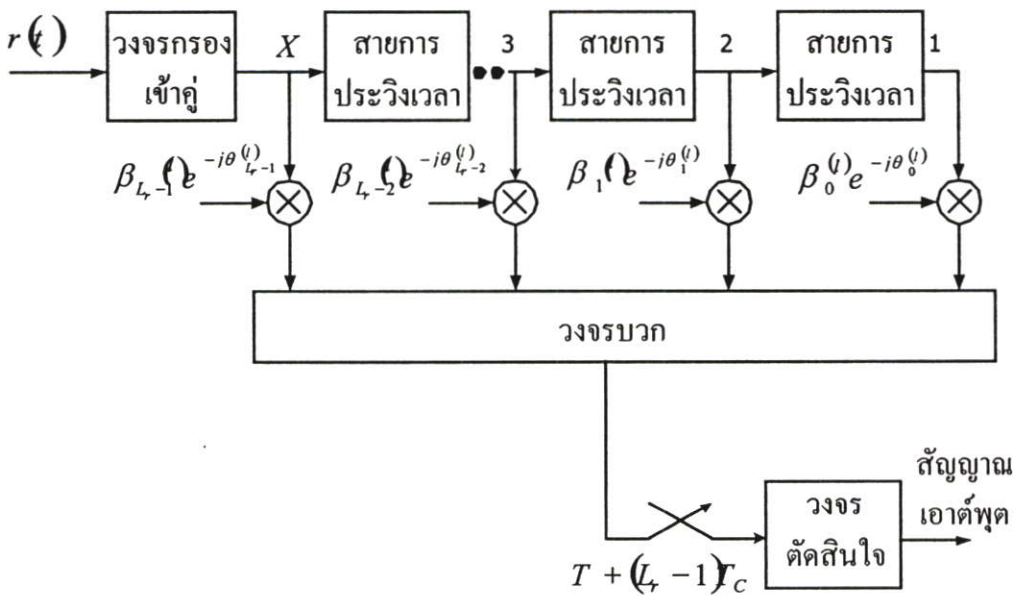
สมมติว่าสัญญาณข้อมูลด้านส่งเป็นรหัสฐานสอง และทำการมอดูเลตสัญญาณแบบเชิงเลขทางเฟส ทางด้านรับใช้วงจรกรองแมตช์ (matched filters) แล้วนำสัญญาณที่ได้มารวมกันเพื่อเลือกสัญญาณที่ดีที่สุด โดยเอาต์พุตของวงจรกรองแมตช์แต่ละตัวจะถูกคูณด้วยอัตราขยายซึ่งเท่ากับ $e^{j\phi_k}$ เพื่อเป็นการชดเชยขนาดและเฟสชิฟอันเนื่องมาจากช่องสัญญาณ หลังจากขบวนการข้างต้นผลลัพธ์จะมีสองแบบ คือ ส่วนจำนวนจริงที่มาจากสัญญาณเอาต์พุตของวงจรกรองแมตช์ที่สอดคล้องกับด้านส่งที่ส่งสัญญาณ 0 และส่วนจำนวนจริงที่มาจากสัญญาณเอาต์พุตของวงจรกรองแมตช์ที่สอดคล้องกับด้านส่งสัญญาณ 1 ซึ่งจะเรียกการรวมกันดังกล่าวว่า การรวมอัตราส่วนสูงสุด (maximal ratio combiner) โดยสามารถแสดงแผนภาพบล็อกของรูปแบบการสื่อสารดิจิทัลแบบรหัสฐานสองดังรูปที่ 2.11

ในกรณีของความกว้างของสัญญาณมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับความกว้างของช่องสัญญาณ $W \gg (\Delta f)_C$ ช่องสัญญาณจะถูกแบ่งออกเป็นช่องสัญญาณย่อยๆ โดยแต่ละช่องสัญญาณย่อยๆ นี้จะต้องมีความถี่ห่างกันอย่างน้อย $(\Delta f)_C$ สัญญาณจะถูกส่งผ่านช่องสัญญาณย่อยๆ เหล่านี้ ซึ่งก็คือเทคนิคไคเวอร์ซิตีทางความถี่



รูปที่ 2.11 แสดงแผนภาพบล็อกของการสื่อสารระบบไบนารีดิจิทัลโดยใช้วิธีโคแวลอร์ซีดี

แบบจำลองเครื่องรับสำหรับใช้ในระบบจะจกความถี่ที่สำคัญคือ เครื่องรับแบบเรค โดย ลักษณะของเครื่องรับแบบเรคคือ สัญญาณอินพุตซึ่งเป็นสัญญาณที่ได้รับเข้ามาแต่ละชุดจะถูกทำการประวิงเวลาโดยมีค่าเท่ากับ T_C นอกจากนี้เครื่องรับแบบเรคยังประกอบด้วยส่วนของวงจรวก วงจรอินทิเกรต วงจรซั๊กตัวอย่าง และวงจรตัดสินใจ ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 โครงสร้างเครื่องรับแบบเรค

บทที่ 3

เทคนิคการเข้ารหัส

3.1 พื้นฐานการเข้ารหัส

สิ่งที่สำคัญสำหรับระบบการสื่อสารก็คือความสามารถในการสื่อสาร และตามปกติถ้าไม่มีสัญญาณรบกวนเราจะส่งสัญญาณอย่างไรก็ได้รับสัญญาณอย่างนั้น แม้ว่าจะถูกลดกำลังด้วยระยะทางก็ตาม แต่ถ้ามีสัญญาณรบกวนแล้วสัญญาณนั้นเพี้ยนไปหรือรับไม่ได้ ถ้าสัญญาณรบกวนมีกำลังมากกว่าสัญญาณ ฉะนั้นต้องออกแบบระบบสื่อสารที่มีการทำงานดีหรือมีอัตราส่วนกำลังของสัญญาณต่อกำลังสัญญาณรบกวน (signal to noise power ratio :SNR) สูง สำหรับระบบสื่อสารอนาล็อก ถ้าอัตราส่วนกำลังของสัญญาณต่อกำลังสัญญาณรบกวนมีค่ามากขึ้นก็แสดงว่าเครื่องมือสื่อสารสามารถขจัดสัญญาณรบกวนได้ดี สำหรับพารามิเตอร์ในการวัดความสามารถในการทำงานของระบบสื่อสารดิจิทัลก็คือ อัตราความผิดพลาด (error rate) ซึ่งอัตราการส่งสัญลักษณ์ข้อมูล (symbol rate) จะเท่ากับอัตราการส่งบิต (bit rate) เมื่อเป็นการส่งข้อมูลแบบรหัสฐานสอง (binary) ดังนั้นในการออกแบบต้องให้มีอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนหรือSNRมีค่าสูง และมีค่าอัตราความผิดพลาดน้อย

การปรับปรุงสมรรถนะของระบบสื่อสารสามารถทำได้หลายวิธี

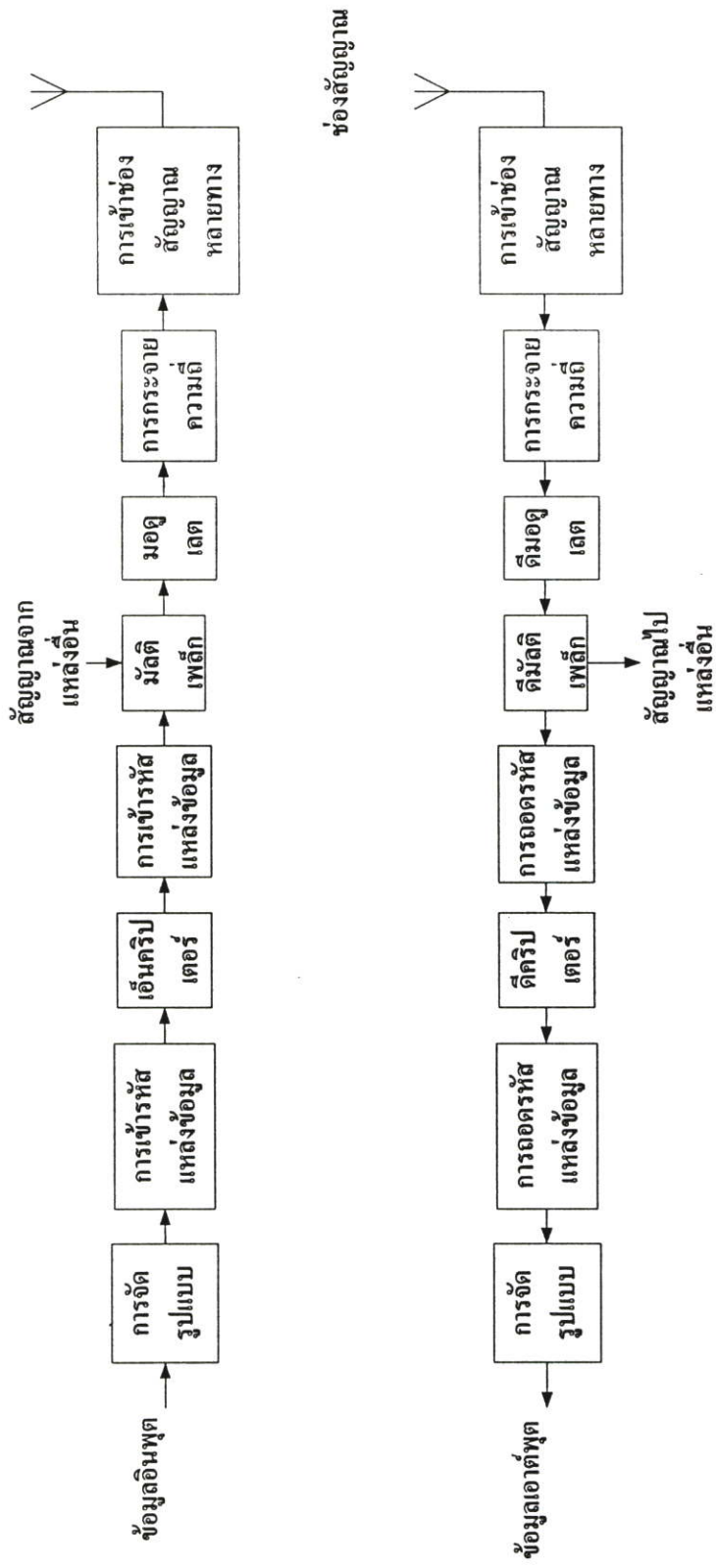
1) การใช้เทคนิคไดเวอร์ซิติ เช่น การรวมอัตราส่วนสูงสุด (Maximal Ratio Combining) ไดเวอร์ซิติทางความถี่ (Frequency Diversity) ไดเวอร์ซิติทางเวลา (Time Diversity)

2) การเข้ารหัส (Coding) เช่น รหัสลิเนียร์บล็อก รหัสประสาน เป็นต้น ซึ่งกระบวนการเข้ารหัสสามารถแบ่งออกตามวัตถุประสงค์ได้เป็น 2 ประเภท คือ

2.1 การเข้ารหัสแหล่งกำเนิด (source coding)

2.2 การเข้ารหัสช่องสัญญาณ (channel coding)

รูปที่ 3.1 แสดงแผนภาพบล็อกระบบสื่อสารดิจิทัล จากรูปจะเห็นว่าข่าวสารสามารถกำเนิดในรูปแบบของอนาล็อกหรือดิจิทัลก็ได้ ถ้าอยู่ในรูปอนาล็อกก็จะผ่านการจัดรูปแบบ (formatting) โดยการชักตัวอย่าง การควอนไทซ์และแปลงเป็นสัญญาณพีซีเอ็ม ส่วนสัญญาณข่าวสารที่เป็นดิจิทัลอาจจะผ่านหรือไม่ผ่านเครื่องเอ็นคริปเตอร์ (Endcryptor) ก็ได้แล้วแต่ความสำคัญและลักษณะงานข้อมูล เครื่องเอ็นคริปเตอร์นี้จะทำหน้าที่แปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปแบบที่มีความปลอดภัยจากการปลอมแปลงหรือขโมยข้อมูลไปใช้งานได้ดี จากนั้นข้อมูลจะผ่านเครื่องเข้ารหัสช่องสัญญาณ โดยเครื่องเข้ารหัสช่องสัญญาณนี้จะแปลงข้อมูลให้ส่งผ่านช่องสัญญาณโดยมีความผิดพลาดน้อย และเป็นการ



รูปที่ 3.1 แผนภาพบล็อกระบบสื่อสารดิจิทัล

ช่วยเพิ่มอัตราข้อมูล ขั้นตอนการเข้ารหัสช่องสัญญาณนี้จะอยู่ระหว่างการเข้ารหัสแหล่งกำเนิด และการมอดูเลต ซึ่งการเข้ารหัสช่องสัญญาณสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ

1) การเข้ารหัสรูปคลื่น (waveform coding) เป็นการสร้างรูปคลื่นใหม่ขึ้นมาเพื่อปรับปรุงคุณสมบัติให้ดีกว่ารูปคลื่นเดิม เช่น การส่งสัญญาณ M ระดับ การส่งสัญญาณตั้งฉาก (Orthogonal) สัญญาณตรงข้ามกัน (Antipodal) สัญญาณตั้งฉากกันสองขั้ว (Biorthogonal)

2) การเข้ารหัสแบบจัดลำดับโครงสร้างของข้อมูล (Structured Sequences) เป็นการเพิ่มบิตเข้าไปรวมกับบิตของข้อมูล เพื่อช่วยในการตรวจสอบความผิดพลาดของบิตข้อมูลอันเนื่องจากสัญญาณรบกวนจากช่องสัญญาณ ตัวอย่างของการเข้ารหัสแบบนี้ เช่น การเข้ารหัสลิเนียร์บล็อก (Linear block code) และการเข้ารหัสประสาน (Convolution)

ข้อมูลที่ผ่านการเข้ารหัสช่องสัญญาณแล้วจะถูกมัลติเพล็กซ์ จากนั้นสัญญาณจะถูกส่งไปยังการมอดูเลตตามระบบดิจิทัลมอดูเลตแล้วผ่านช่องสัญญาณ ซึ่งจะถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเกาส์เซียน ช่องสื่อสารจะเป็นตัวกลางใดๆก็ได้แล้วแต่ความต้องการของงาน เช่น อากาศ สายใยแก้ว และเส้นใยแสง เมื่อข้อมูลมาถึงปลายทางก็จะถูกดีมอดูเลตและดีมัลติเพล็กซ์ จากนั้นจะถูกถอดรหัสช่องสัญญาณ (channel decoding) สัญญาณที่ได้ผ่านเครื่องดีคริปเตอร์ (decryptor) ถ้าใช้เครื่องเอ็นคริปเตอร์ที่ต้นทาง แล้วจะผ่านการถอดรหัสแหล่งกำเนิดเมื่อได้สัญญาณดิจิทัล และจะถูกแปลงกลับเป็นอนาล็อกหรือคงอยู่ในรูปดิจิทัลแล้วแต่ว่าสัญญาณเดิมที่ส่งเป็นอนาล็อกหรือดิจิทัล

จุดประสงค์ของการเข้ารหัส เพื่อเป็นการเพิ่มความน่าเชื่อถือในการรับส่งข้อมูลให้มากขึ้น ดังนั้นรหัสที่สร้างขึ้นจึงต้องมีการตรวจสอบความผิดพลาดของข้อมูลที่ได้รับเข้ามาว่ามีความผิดพลาดหรือไม่ ถ้าไม่มีความผิดพลาดก็นำข้อมูลที่ได้รับไปประมวลผลในขั้นตอนต่อไป หากเกิดความผิดพลาดขึ้นก็อาจให้ด้านส่งทำการส่งข้อมูลเดิมมาใหม่ ในการตรวจสอบความผิดพลาดที่เครื่องรับนั้นมีวิธีอย่างที่สามารถจะตรวจสอบได้ว่าข้อมูลที่รับได้ว่าข้อมูลที่รับเข้ามาเกิดความผิดพลาดหรือไม่ แต่ไม่สามารถจะบอกได้ว่าผิดพลาดที่ตำแหน่งใด ซึ่งจะเรียกรหัสตรวจสอบความผิดพลาดนี้ว่า รหัสตรวจคู่ (parity check code) หลักการของรหัสตรวจคู่ คือ จะทำการเติมบิตต่อท้ายข่าวสาร (information bit) ที่ทางด้านส่งเพื่อให้ผลบวกเลขฐานสองของบิตทั้งหมด (รวมทั้งบิตที่เพิ่มด้วย) เป็น 0 หรือ 1 แล้วแต่ว่าเป็นภาวะคู่หรือภาวะคี่ (even/odd parity) บิตที่ทำการเพิ่มเพื่อตรวจสอบความผิดพลาดนี้เรียกว่า บิตตรวจคู่ (parity check bit)

บิตที่ส่ง	1 1 0 1 0 0 1 0 0	= 0	ภาวะคู่
บิตที่รับ	1 1 1 1 0 0 1 0 0	= 1	ผิดเพราะผลบวกเลขฐานสองเป็นเลขคี่

รูปที่ 3.2 ตัวอย่างของบิตตรวจคู่

วิธีการดังกล่าวสามารถที่จะทำการตรวจสอบความผิดพลาดของข้อมูลได้ง่ายๆ โดยการคำนวณผลบวกเลขฐานสองของจำนวนบิตทั้งหมดที่ได้รับว่าเป็นเลขคู่ 0 หรือเลขคี่ 1 ตามที่ตกลงกันหรือไม่ ถ้าไม่ก็แสดงว่าเกิดความผิดพลาดของข้อมูล สมมติบิตที่รับได้เป็นภาวะคู่และบิตที่ผิดพลาดคือบิตที่ 3 เป็น 1 แทนที่จะเป็น 0 ผลบวกเลขฐานสองของบิตทั้งหมดจะได้ 1 ก็จะทราบได้ทันทีว่าข้อมูลเกิดผิดพลาด แต่ไม่สามารถตรวจสอบได้ว่าผิดที่บิตไหน และสังเกตว่ากรณีที่เกิดผิด 2 บิตพร้อมกันก็ไม่สามารถตรวจสอบได้ว่าบิตไหนผิด ฉะนั้นรหัสตรวจคู่จึงควรใช้ในกรณีที่มีบิตผิดไม่เกินกว่า 1 บิต

3.2 รหัสลิเนียร์บล็อก (Linear block code)

เป็นรหัสที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ที่มีขนาดความยาวจำกัด ซึ่งจะถูกรู้จักว่าคำรหัส (code word) ความยาวของคำรหัสคือ จำนวนตัวประกอบทั้งหมดที่มีอยู่ในเวกเตอร์ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ n โดยตัวประกอบแต่ละตัวจะเรียกว่าบิต ซึ่งคำรหัสจะเลือกจากจำนวนตัวเลขทั้งหมด q หมายเลข ถ้าหากตัวประกอบในเวกเตอร์ประกอบด้วยค่าเพียงสองค่า คือ 1 และ 0 รหัสนี้ถูกเรียกว่าไบนารี หาก $q > 2$ รหัสนี้จะถูกเรียกว่านอนไบนารี

3.2.1 ค่าพารามิเตอร์ของรหัสลิเนียร์บล็อก

ในการเข้ารหัสของข้อมูลซึ่งมีขนาดความยาวเท่ากับ k บิต หลังจากถูกเข้ารหัสจะได้ความยาวของคำรหัสมีค่าเท่ากับ n บิต ซึ่งขนาด $n - k$ บิตเป็นบิตที่เพิ่มรวมเข้าไปกับข้อมูลจะถูกเรียกว่าพาริตีบิตหรือบิตตรวจสอบ โดยรหัสที่ได้จะถูกเรียกว่าเป็นรหัส (n, k) ซึ่งอัตราส่วนของจำนวนบิตข้อมูลกับความยาวของคำรหัส $k/n = R_c$ เรียกว่า อัตราการเข้ารหัส (code rate)

ตัวพารามิเตอร์มีค่าหนึ่งที่มีความสำคัญของการเข้ารหัส คือ น้ำหนักแฮมมิง (Hamming weight) หมายถึงจำนวนบิตของรหัสซึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ เช่น รหัส 101000 จะมีน้ำหนักเท่ากับ 2 แล้วหากมีรหัสลิเนียร์บล็อก 2 ค่า คือ

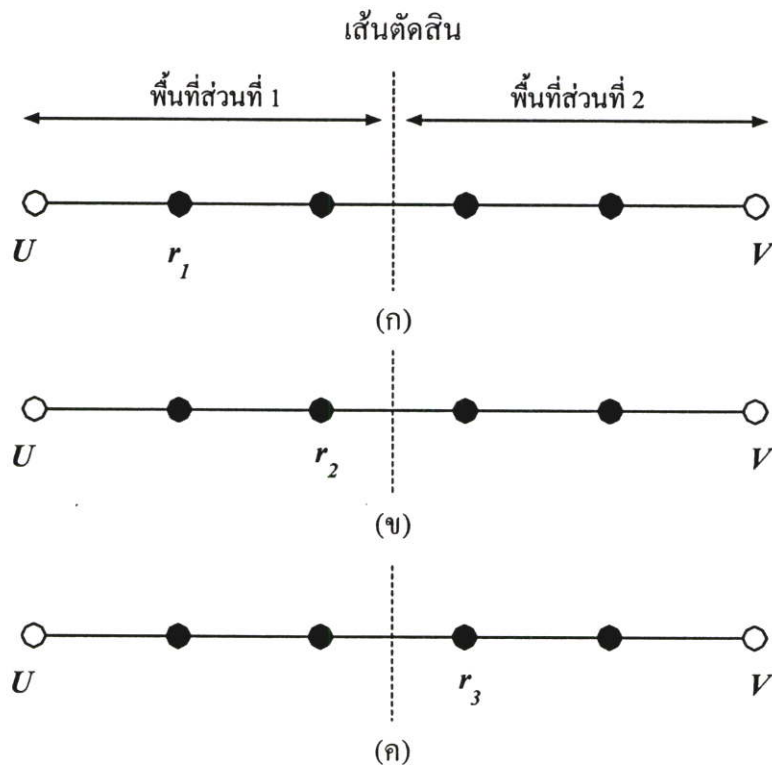
$$C_i = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$C_j = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

ในการหาค่าความแตกต่างระหว่างคำรหัสทั้งสองนี้จะวัดได้จากจำนวนบิตหรือตำแหน่งของบิตที่มีค่าแตกต่างกัน ซึ่งจะเรียกค่าที่ได้นี้ว่าระยะแฮมมิง (Hamming distance) เขียนได้เป็น d_{ij} โดยที่ $i \neq j$ จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่าค่าระยะแฮมมิงเท่ากับ 4 โดยที่ค่าของระยะแฮมมิงมีค่าระหว่าง $0 < d_{ij} < n$ ค่าที่ต่ำสุดของ d_{ij} สำหรับคำรหัสใดๆจะเรียกว่า ระยะความแตกต่างต่ำสุด (minimum distance) ของรหัสเขียนได้เป็น d_{\min}

3.2.2 ความสามารถในการตรวจสอบและแก้ไขความผิดพลาดของรหัสลิเนียร์บล็อก

รหัสลิเนียร์บล็อกสามารถตรวจสอบและแก้ไขความผิดพลาดของข้อมูลได้โดยการตรวจสอบกับซินโดรม ($S = RH^T$) ว่าถ้า $S = 0$ ก็แสดงว่ารหัสที่ได้รับนั้นไม่ผิดพลาด และถ้า $S \neq 0$ ก็แสดงว่ารหัสที่ได้รับผิดพลาด ซึ่งพบว่ารหัสลิเนียร์บล็อกสามารถตรวจสอบแก้ไขบิตที่ผิดพลาดได้ ในการศึกษาความสามารถในการตรวจสอบแก้ไขความผิดพลาดของข้อมูลรหัสลิเนียร์บล็อกนั้นจะต้องใช้สิ่งเหล่านี้วัดความสามารถ เช่น น้ำหนักแฮมมิง (Hamming weight) ของคำรหัส และค่าระยะแฮมมิง (Hamming distance) ระหว่างคำรหัส 2 คำ ซึ่งกล่าวไว้ในตอนต้น



รูปที่ 3.3 การตรวจสอบและแก้ไขความผิดพลาด

ในรูปที่ 3.3 แสดงถึงค่าระยะแฮมมิงของรหัสสองรหัส คือ U และ V โดยจุดดำที่อยู่บนเส้น หมายถึงการที่ค่าของรหัสถูกรบกวน จากรูปที่ 3.3 แสดงถึงด้านรับรับสัญญาณที่เวกเตอร์ r_1 ซึ่งมีระยะห่างจาก U เท่ากับ 1 และระยะห่างจาก V เท่ากับ 4 การแก้ไขความผิดพลาดทำได้โดยอาศัยความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นได้มากที่สุด นั่นคือ ในกรณีนี้จะทำการเลือกสัญญาณ U เมื่อได้รับ r_1 นั่นคือ r_1 เกิดจากการที่เกิดความผิดพลาดขึ้น 1 บิตจากสัญญาณ U ในระหว่างการส่งสัญญาณ แต่ทาง ด้านรับก็สามารถที่จะแก้ไขความผิดพลาดนี้ได้ เช่นเดียวกันหากเกิดความผิดพลาดขึ้น 2 บิตเนื่องจากการส่งสัญญาณ U ซึ่งผลทำให้ด้านรับรับสัญญาณ r_2 ซึ่งจะมีระยะห่างจาก U เท่ากับ 2 และระยะห่างจาก V เท่ากับ 3 ดังแสดงในรูปที่ 3.3 ข การถอดรหัสยังคงเลือกว่าสัญญาณ r_2 ที่ได้รับเกิดจากการส่งสัญญาณ U นั่นเอง ในกรณีที่เกิดความผิดพลาดขึ้น 3 บิตของการส่งสัญญาณ U ซึ่งด้านรับรับได้เวกเตอร์ r_3 ซึ่งมีระยะห่างจาก U เท่ากับ 3 และห่างจาก V เท่ากับ 2 ซึ่งแสดงดังรูปที่ 3.3 ค ในกรณีนี้ตัวถอดรหัสจะทำการเลือกสัญญาณ V ว่าเป็นสัญญาณที่ส่งมาจากด้านส่ง นั่นคือเกิดความผิดพลาดในการถอดรหัส

จากรูปที่ 3.3 สามารถสรุปได้ว่าการตรวจสอบความผิดพลาดจะสามารถตรวจสอบได้ในกรณีที่ มีความผิดพลาดเกิดขึ้น 1, 2, 3 และ 4 บิตซึ่งจะเป็นจุดสีดำ ในกรณีที่ความผิดพลาดเกิดขึ้น 5 บิต เป็นผลทำให้ด้านรับจะรับสัญญาณเวกเตอร์ V จากการส่งสัญญาณเวกเตอร์ U ซึ่งเมื่อเกิดเหตุการณ์นี้ขึ้นด้านรับจะไม่สามารถตรวจสอบความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้

จะเห็นได้ว่าความสามารถในการตรวจสอบและแก้ไขความผิดพลาดของการเข้ารหัสจะมีความสัมพันธ์กับระยะความแตกต่างต่ำสุดระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง จากรูปที่ 3.3 หากเวกเตอร์ด้านรับ r อยู่ในพื้นที่ 1 จะทำการเลือกสัญญาณ U เป็นสัญญาณด้านส่ง หากเวกเตอร์ด้านรับ r อยู่ในพื้นที่ ส่วนที่ 2 จะทำการเลือกสัญญาณ V เป็นสัญญาณด้านส่ง จะพบว่าเวกเตอร์ U และ V จะมีระยะความแตกต่างต่ำสุด (d_{\min}) เท่ากับ 5 ซึ่งจะสามารถแก้ไขความผิดพลาดได้ 2 ตำแหน่งดังนั้น ความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดของรหัสจะมีค่าเท่ากับ

$$t = \left\lfloor \frac{(d_{\min} - 1)}{2} \right\rfloor$$

โดย $\lfloor x \rfloor$ หมายถึง ค่าจำนวนเต็มที่ยกมากที่สุดแต่มีค่าเกิน x

t คือ ความสามารถในการแก้รหัสให้ถูกต้อง

ถ้าจำนวนความผิดพลาดที่ด้านรับมีค่ามากกว่าความสามารถในการแก้ไขให้ถูกต้อง (t) ดังนั้น ตัวถอดรหัสจะไม่สามารถแก้ไขตรวจสอบค่าความถูกต้องและเรียกว่าการถอดรหัสผิดพลาด (decoder failure)

3.3 รหัสโบเช-โชดสูริ-ฮ็อกควิงแฮม (Bose – Chaudhuri – Hocquenghem : BCH)

การออกแบบรหัสแก้ไขความผิดพลาดจะประกอบด้วย การออกแบบรหัสโดยมีความยาวของบล็อกสั้นที่สุด (n) ที่ค่าความยาวค่าหนึ่งที่ทำให้บล็อกข่าวสาร (k) และระยะทางสั้นที่สุด (d_{\min}) ที่ต้องการสำหรับรหัสนั้น หรือสำหรับความยาวของรหัสดำหนึ่งที่กำหนดให้ (n) และอัตรารหัส (k/n) เราต้องการออกแบบให้รหัสนี้มีค่า d_{\min} มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ นั่นคือ จะออกแบบรหัสให้มีความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดได้ดีที่สุด รหัส BCH เป็นรหัสวงเวียนที่นิยมใช้และมีประสิทธิภาพในการแก้ไขความผิดพลาดได้ดีที่สุด รหัส BCH เป็นชั้นรหัสชั้นใหญ่ของรหัสวงเวียนที่ประกอบด้วย

$$\begin{aligned} \text{ความยาวของบล็อก} & : n = 2^m - 1 \\ \text{จำนวนบิตตรวจคู่} & : n - k \leq mt \\ \text{ระยะทางสั้นที่สุด} & : d_{\min} \geq 2t + 1 \end{aligned}$$

เมื่อ m และ t เป็นค่าจำนวนเต็มใดๆที่เป็นบวก

3.4 รหัสรีดโซโลมอน (Reed Solomon : RS code)

เหตุผลที่ใช้การเข้ารหัสแบบรีดโซโลมอนก็เพราะเป็น nonbinary linear block code และใช้ multi-bit character มากกว่าใช้ individual bit ใน maximum-distance-separable (MDS) code ทำให้มีประสิทธิภาพสูงในการใช้ redundancy โดยความยาวของบล็อกและขนาด character สามารถปรับให้เหมาะสมกับสัญญาณ MPSK

การเข้ารหัสแบบรีดโซโลมอนจะมีอัตรารหัส (Code rate) ย่นกว้างนั้นคือสามารถเลือกการเข้ารหัสที่เหมาะสมกับประสิทธิภาพของแบนด์วิดท์ (bandwidth efficiency) ด้วยการเปรียบเทียบกับระบบที่ไม่เข้ารหัส

nonbinary block code ประกอบด้วยเซตที่มีความยาวคำรหัสแน่นอน ซึ่ง element ของคำรหัสถูกเลือกจาก alphabet ของ q symbol แสดงโดย $\{0,1,2,\dots,q-1\}$ โดยทั่วไป $q = 2^k$ นั่นคือ k information bit ถูก map ใน 1 ของ q symbol

N คือ ความยาวของคำรหัสบนไบนารี

K คือ จำนวนของข้อมูลที่ถูกเข้ารหัสในบล็อกของ N symbol

D_{\min} คือ ค่า minimum distance ของการเข้ารหัสบนไบนารี

Systematic (N, K) block code ประกอบด้วย K information symbol และ $N - K$ parity check symbol

ในจำพวกบนไบนารีบล็อกโค้ดจะมีการเข้ารหัสรีดโซโลมอนที่เป็นซับเซตของ BCH code และอยู่ในประเภท cyclic code ซึ่งการเข้ารหัสถูกอธิบายโดยพารามิเตอร์

$$N = q - 1 = 2^k - 1$$

$$K = 1, 2, 3, \dots, N - 1$$

$$D_{\min} = N - K + 1$$

$$R_C = K/N$$

ความสามารถในการแก้ไขของการเข้ารหัสขึ้นอยู่กับ Symbol error

$$t = \left\lfloor \frac{1}{2}(D_{\min} - 1) \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{1}{2}(N - K) \right\rfloor$$

การแจกแจงน้ำหนัก $\{A_i\}$ ของการเข้ารหัสรีดโซโลมอนโดยสัมประสิทธิ์ของโพลีโนเมียลที่ระบุน้ำหนัก กำหนดให้

$$A_i = \binom{N}{i} (q-1) \sum_{j=0}^{i-D} (-1)^j \binom{i-1}{j} q^{i-j-D}, i \geq D_{\min}$$

โดยที่ $D \equiv D_{\min}$ และ $q = 2^k$

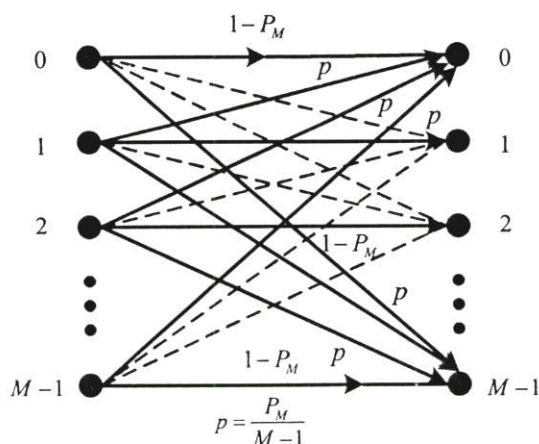
เหตุผลที่สำคัญของการเข้ารหัสแบบรีดโซโลมอนคือคุณสมบัติของ distance เหตุผลที่สองคือ algorithm decoding ยังคงเป็น hard-decision ซึ่งจะสัมพันธ์กับความยาวการเข้ารหัส

การเข้ารหัสนอนไปนารีมีจุดเด่นที่สอดคล้องกับเทคนิค M-ary มอดูเลชันซึ่งความเป็นไปได้ในขณะส่ง 2^k symbol โดยเฉพาะสัญญาณ M-ary orthogonal เช่น M-ary FSK ถูกใช้บ่อยครั้ง โดยแต่ละ 2^k symbol ใน q-ary alphabet ถูก map ใน 1 สัญญาณ orthogonal $M = 2^k$ ดังนั้นการส่งคำรหัสจะถูกส่งโดยสัญญาณ N orthogonal ซึ่งแต่ละสัญญาณถูกเลือกจากเซตของสัญญาณที่เป็นไปได้

$$M = 2^k$$

คีมอดูเลเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับสัญญาณที่ถูกรบกวนโดย AWGN ประกอบด้วย M match filter (หรือ cross-correlator) เนื่องจากเอาต์พุตผ่าน decoder อาจอยู่ในรูป soft decision หรืออยู่ในรูป hard decision โดยคีมอดูเลเตอร์ที่มีความน่าจะเป็นผิดพลาด symbol P_M และพารามิเตอร์การเข้ารหัสแสดงคุณลักษณะสมรรถนะของ decoder โดยความจริง modulator, ช่องสัญญาณ AWGN และคีมอดูเลเตอร์จากคีสกรีตอินพุต (M-ary), คีสกรีตเอาต์พุต, ช่องสัญญาณ memoryless symmetric

แสดงคุณสมบัติโดยความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน $P_C = 1 - P_M$ และ $\frac{P_M}{(M-1)}$ รูปแบบของช่องสัญญาณแสดงโดยรูปที่ 3.4 เป็นหลักการของ Binary symmetric channel



รูปที่ 3.4 M-ary อินพุต, M-ary เอาต์พุต, ช่องสัญญาณ symmetric memoryless

ความน่าจะเป็นความผิดพลาดขอบเขตบนของคำรหัส

$$P_e \leq \sum_{i=t+1}^N \binom{N}{i} P_M^i (1 - P_M)^{N-i}$$

โดยที่ t คือ ค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดของการเข้ารหัส
เมื่อความผิดพลาดคำรหัสเท่ากับความน่าจะเป็นผิดพลาด symbol

$$P_{es} = \frac{1}{N} \sum_{i=t+1}^N i \binom{N}{i} P_M^i (1 - P_M)^{N-i}$$

คุณสมบัติของรหัส RS มีดังนี้

- 1). เป็นรหัสลิเนียร์บล็อก
- 2). ใช้ได้ทั้งในกรณีข้อมูลที่เป็นเลขฐานสองและไม่ใช่เลขฐานสอง
- 3). เป็นกรณีพิเศษของซับคลาสของรหัส BCH
- 4). เป็นรหัสที่มีระยะทางน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ สำหรับการเข้ารหัสที่อินพุตและเอาต์พุตที่มีความยาวเท่ากัน

ความยาวเท่ากัน

- 5). ระยะทางที่น้อยที่สุด (d_{\min}) ของรหัส RS จะกำหนดด้วยความสัมพันธ์

$$d_{\min} = n - k + 1$$

เมื่อ n คือ จำนวนบิตทั้งหมดของบล็อกการเข้ารหัส

k คือ จำนวนบิตข้อมูลที่จะทำการเข้ารหัส

ทฤษฎีซิงกิลิตัน (Singleton Bound)

ค่า minimum distance (minimum weight) ของทุกการเข้ารหัสแบบลิเนียร์ (n, k) สอดคล้องกับ

$$d^* \leq 1 + n - k$$

โดยคำรหัสไม่เป็นศูนย์มีน้ำหนักน้อยที่สุด คือ น้ำหนัก d^* และ symbol ข้อมูลที่ไม่เป็นศูนย์จะมีค่าเดียว และค่า $(n - k)$ คือค่าพาริตี symbol ดังนั้น คำรหัสไม่สามารถมีค่ามากกว่า $1 + (n - k)$ ซึ่งค่าน้ำหนักน้อยที่สุดของการเข้ารหัสจะไม่เกิน $1 + n - k$

ค่า minimum distance ของการเข้ารหัสที่มีค่า $d^* = 1 + n - k$ จะเรียกว่าการเข้ารหัสที่มีระยะห่างสูงสุด (maximum-distance code)

Singleton bound จะบอกกำลังของความสามารถในการแก้ไข t ความผิดพลาด และการเข้ารหัสต้องมีค่าน้อยที่สุด $2t$ parity symbol ไปจนถึง 2 parity symbol ต่อความผิดพลาดที่ถูกแก้ไข

การเข้ารหัสส่วนใหญ่ที่มีการเข้ารหัสที่เหมาะสมแม้จะมี parity symbol มากกว่า Singleton bound ที่ต้องการมาก แต่พบว่ามันจะมีค่าเท่ากับค่า maximum-distance code ที่มี $2t$ parity symbol

ทฤษฎี Reed Solomon code การเข้ารหัสรีดโซโลมอนเป็น maximum distance code และมีค่า minimum distance คือ $n - k + 1$

ให้ $d = 2t + 1$ เป็นระยะห่างของการเข้ารหัสที่ถูกออกแบบ และค่าระยะห่างน้อยที่สุด (minimum distance) d^* สอดคล้องกับ

$$d^* \geq d = 2t + 1 = n - k + 1$$

เนื่องจาก $2t = n - k$ เมื่อเป็นการเข้ารหัสรีดโซโลมอน แต่ Singleton bound ของทุกรหัสลิเนียร์จะเป็น

$$d^* \leq n - k + 1$$

ดังนั้น

$$d^* = n - k + 1$$

เมื่อ

$$d^* = d$$

ทฤษฎีนี้จะบอกว่าถ้า fix (n, k) และไม่มีการเข้ารหัสจะมีค่า minimum distance มากกว่าการเข้ารหัสรีดโซโลมอน ซึ่งนี่คือเหตุผลที่มักจะใช้การเข้ารหัสรีดโซโลมอน

การเข้ารหัสรีดโซโลมอนจะมีความยาวของบล็อกสั้นกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับเข้ารหัสวงเวียนที่มี alphabet เดียวกัน

3.4.1 การถอดรหัสแก้ความผิดพลาด

3.4.1.1 การถอดรหัสแก้ความผิดพลาดอย่างเดียว (Error only decoding)

พิจารณารหัส $RS(n, k)$ กำหนดให้ d คือระยะห่างแฮมมิงและ t คือความสามารถในการแก้ไขให้ถูกต้อง ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}d - 1 &= n - k \\d &= n - k + 1 \\t &= \left\lfloor \frac{(d-1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-k)}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

ถ้าจำนวนความผิดพลาดที่ด้านรับมีค่ามากกว่าความสามารถในการแก้ไขให้ถูกต้อง (t) ดังนั้นตัวถอดรหัสจะไม่สามารถแก้ไขตรวจสอบค่าให้มีค่าความถูกต้องและเรียกว่าการถอดรหัสผิดพลาด (decoder failure)

3.4.1.2 การถอดรหัสแก้การลบและรหัสแก้ความผิดพลาด (Erasure and error decoding)

กำหนดให้ d เป็นระยะทางมากที่สุดและเป็นคุณสมบัติของรหัส RS ในการแก้ไขความผิดพลาด (error) t และการแก้การลบ (erasures) e ด้วยการใช้อัลกอริทึมในการถอดรหัสของ Berlekamp และ Massey จะได้ความสัมพันธ์

$$e + 2t \leq d - 1$$

หรือ $d_{\min} \geq 2t + e + 1$

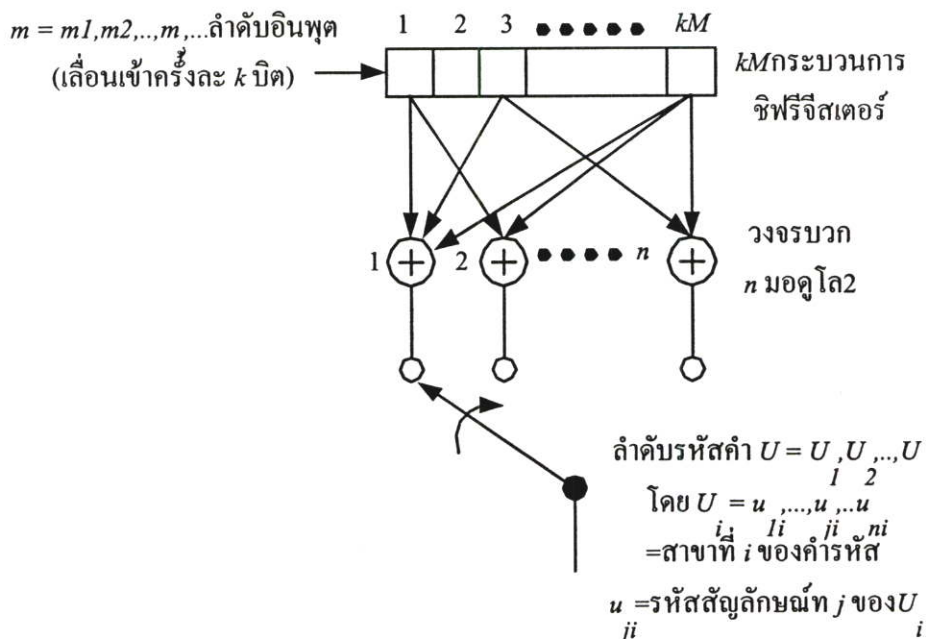
3.5 รหัสการประสาน (Convolution code)

รหัสการประสานจะอธิบายอยู่ในรูปของตัวแปร 3 ตัวคือ n, k และ M โดยอัตราส่วนของ k/n ยังคงเรียกว่าอัตราเข้ารหัส ส่วนตัวแปร M จะเรียกว่า ความยาวคอนสเตรินท์ (constraint length) ซึ่งหมายถึง จำนวนของขั้นตอนกระบวนการในการเข้ารหัสของซีพรีจิสเตอร์ สิ่งที่แตกต่างกันระหว่างรหัสลิเนียร์บล็อกและรหัสการประสานที่สำคัญ คือ การเข้ารหัสของรหัสการประสานจะมีหน่วยความจำ โดยที่จำนวน n บิตเอาต์พุตของรหัสการประสานไม่เพียงขึ้นอยู่กับอินพุต k เท่านั้นแต่ยังขึ้นอยู่กับอินพุตก่อนหน้านั้น $M - 1$ บิต

การเข้ารหัสการประสานโดยทั่วไปแสดงได้ดังรูป 3.4 โดยมีซีพรีจิสเตอร์ kM ชั้นและมีวงจรวกกันแบบมอดูโล 2 (modulo-2) n ตัว โดยที่ M เป็นความยาวคอนสเตรินท์โดยแต่ละครั้งทีอิน

พุด k บิตถูกเลื่อนเข้ามายังรีจิสเตอร์ k ชั้น บิตที่อยู่ในรีจิสเตอร์จะถูกเลื่อนไปทางขวาและเอาต์พุดของวงจรจะถูกเลือกเพื่อเป็นรหัสสัญลักษณ์ (code symbols) สัญญาณที่ได้จะผ่านวงจรมอดูเลตเพื่อเปลี่ยนเป็นรูปคลื่นเพื่อที่จะทำการส่งออกไปตามช่องสัญญาณ

รหัสการประสานเหมือนกับรหัสบล็อกสามารถออกแบบให้ตรวจสอบแก้ไขความผิดพลาดอย่างไรก็ตามเนื่องจากข้อมูลมักถูกส่งเป็นบล็อก รหัสบล็อกจึงเหมาะที่ใช้เป็นการตรวจสอบความผิดพลาดและรหัสการประสานก็มักใช้ในการแก้ไขความผิดพลาด การลงรหัสการประสานสามารถทำได้โดยใช้รีจิสเตอร์ และการวิเคราะห์การทำงานของรหัสการประสานค่อนข้างยุ่งยากเพราะเครื่องเข้ารหัสและเครื่องถอดรหัสมีความเกี่ยวข้องกัน โดยทั่วไปสามารถวัดประสิทธิภาพของการเข้ารหัสการประสานโดยการจำลองการทำงานของเครื่องเข้ารหัสและเครื่องถอดรหัสด้วยคอมพิวเตอร์



รูปที่ 3.5 การเข้ารหัสประสานด้วยความยาวคอนสเตรนต์ M และอัตราการเข้ารหัส k/n

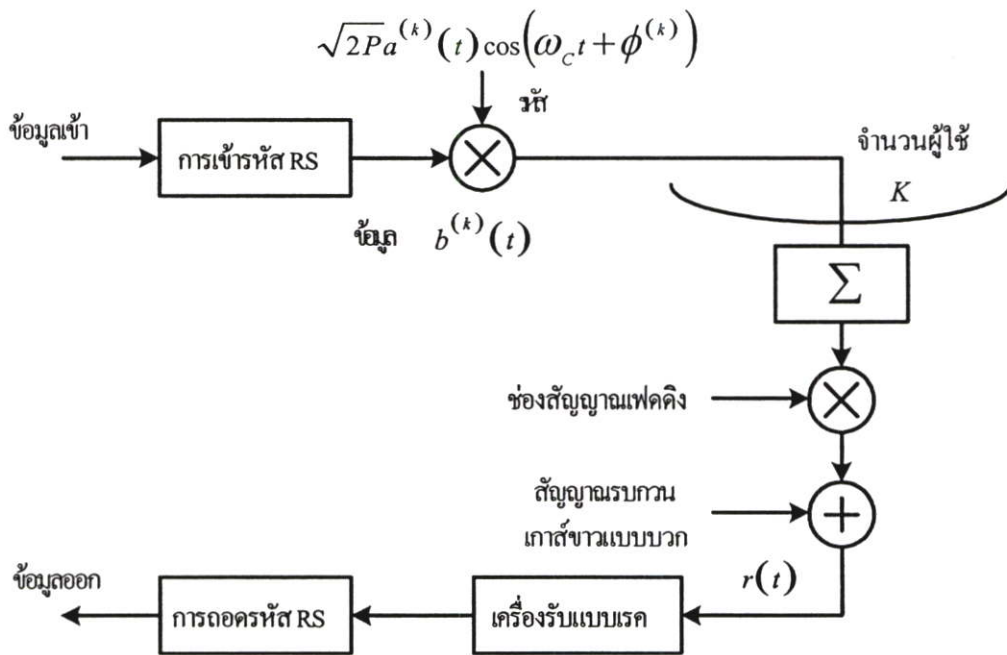
บทที่ 4

อัตราความผิดพลาดของบิตข้อมูลของระบบ DS-CDMA

บนช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคาгамиโดยใช้เทคนิค

การเข้ารหัสรีดโซโลมอน

ในการพิจารณาการทำงานในหัวข้อนี้จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ คือ ระบบ DS-CDMA ในช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนาคาгами ที่ไม่ได้ทำการเข้ารหัสช่องสัญญาณ กับระบบ DS-CDMA ที่ได้ทำการเข้ารหัสช่องสัญญาณ ซึ่งสามารถแบ่งระบบที่ทำการศึกษาได้เป็น 3 ส่วน คือ ด้านเครื่องส่ง ช่องสัญญาณ ด้านเครื่องรับ ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยบล็อกไดอะแกรม



รูปที่ 4.1 แบบจำลองระบบ DS-CDMA ที่ศึกษา

4.1 แบบจำลองเครื่องส่ง

ระบบ CDMA ที่ทำการศึกษากำหนดให้มีจำนวนของผู้ใช้งานเท่ากับ K และกำหนดให้ข้อมูลกับรหัสที่พิจารณาเป็นแบบเลขฐานสอง หลักการของระบบ CDMA จะทำการคูณกันระหว่างลำดับรหัส (code sequence) กับลำดับข้อมูล (data sequence) และสัญญาณที่ได้จะถูกทำการมอดูเลตเชิงเลขฐานสองแบบร่วมนัย (binary phase shift keying) ดังนั้นสัญญาณที่ส่งออกสำหรับผู้ใช้งานลำดับที่ k สามารถแสดงได้เป็น [2]

$$S^{(k)}(t) = \sqrt{2P} a^{(k)}(t) b^{(k)}(t) \cos(\omega_c t + \phi^{(k)}) \quad (4.1)$$

ในสมการที่ (4.1) ค่าแอมพลิจูดของสัญญาณมีค่าเท่ากับ $\sqrt{2P}$

ซึ่ง P คือ กำลังงานเฉลี่ยซึ่งจะมีค่าเท่ากันสำหรับผู้ใช้งานทุกคน

ω_c คือ ความถี่ของคลื่นพาห้

$\phi^{(k)}$ คือ เฟสของมอดูเลตที่ k ซึ่งกำหนดให้มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[0, 2\pi]$

จากสมการที่ (4.1) $a^{(k)}(t)$ เป็นลำดับรหัสของผู้ใช้งานที่ k ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$a^{(k)}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^k p_a(t - jT_C) \quad , \quad a_j^k \in \{-1, 1\} \quad (4.2)$$

และ $b^{(k)}(t)$ เป็นลำดับข้อมูล สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$b^{(k)}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j^k p_b(t - jT) \quad , \quad b_j^k \in \{-1, 1\} \quad (4.3)$$

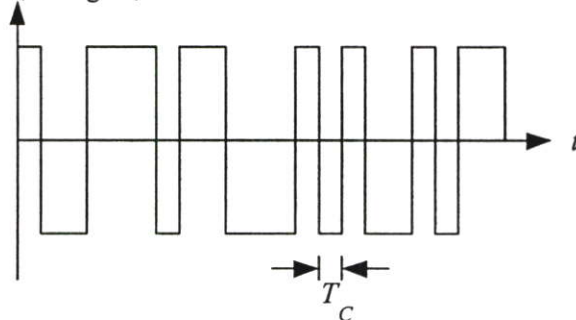
โดย $a^{(k)}(t)$ และ $b^{(k)}(t)$ เป็นสัญญาณพัลส์เลขฐานสอง โดยมีค่าแอมพลิจูดเป็น 1 และ -1 ซึ่งแสดงดังรูปที่ 4.2 โดย $p_a(t)$ และ $p_b(t)$ คือสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมสูง 1 หน่วยและมีความกว้างเท่ากับ T_C และ T ตามลำดับ

T_C คือความกว้างชิปของลำดับรหัส

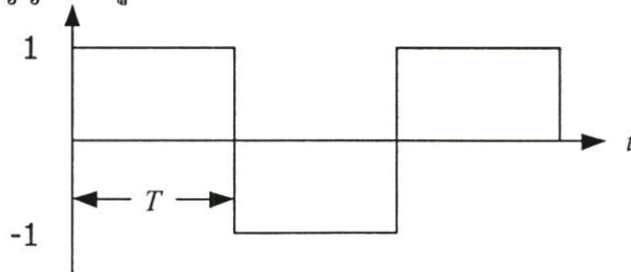
T คือความกว้างชิปของลำดับข้อมูล

$N = \frac{T}{T_C}$ คือค่าอัตราขยายการประมวลผล (processing gain) ของระบบ

สัญญาณรหัส (PN signal)



สัญญาณข้อมูล



รูปที่ 4.2 สัญญาณรหัส และสัญญาณข้อมูล

4.2 แบบจำลองช่องสัญญาณ

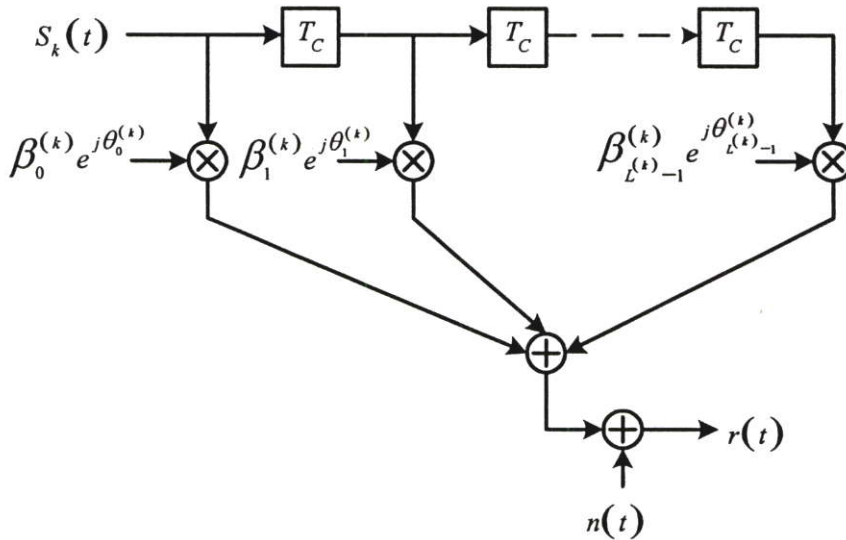
สัญญาณที่ทำการพิจารณาจะมีคุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณอย่างช้าๆ ไม่แปรค่าตามเวลาและเป็นช่องสัญญาณแบบเจาะจงความถี่ สัญญาณจะมีลักษณะของการเฟดดิ้งของคลื่นในหลายวิถี (multipath fading) เช่น การสะท้อน การหักเห หรือการรับสัญญาณได้โดยตรงภายในช่องสัญญาณ และวงจรกรองความถี่ต่ำซึ่งจะสอดคล้องกับผลตอบสนองอิมพัลส์ (impulse response) สำหรับผู้ใช้ลำดับที่ k แสดงได้ดังสมการ [2]

$$h_k(\tau) = \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \beta_l^{(k)} e^{j\theta_l^{(k)}} \delta(\tau - \tau_l^{(k)}) \quad (4.4)$$

โดย

- β_l คืออัตราการลดทอนทางแอมพลิจูดซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่เจาะจง
- θ_l คือมุมเฟสที่มีการประวิงเวลาเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[0, 2\pi]$
- τ_l คือค่าประวิงเวลาซึ่งเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[0, T]$

แบบจำลองช่องสัญญาณสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แบบจำลองของช่องสัญญาณ

$L^{(k)}$ คือจำนวนเส้นทางสูงสุดที่สามารถรับได้ด้วยการใช้เครื่องรับแบบเรค(RAKE receiver) โดยมีค่าเท่ากับ

$$L^{(k)} = \left\lfloor \frac{T_m}{T_c} \right\rfloor + 1 \quad (4.5)$$

โดยที่ T_m คือ การประวิงเวลามากที่สุดของช่องสัญญาณ
 T_C คือ ความกว้างของชิปลำดับรหัส

จากผลตอบสนองอิมพัลส์ ตัวแปรเสริมที่เราให้ความสนใจมากที่สุดคือ ตัวแปรเสริมทางแอมพลิจูด (β_l) เนื่องจากทำการศึกษาแบบจำลองแบบนาคากามิทำให้สัญญาณที่รับได้ในวิถีที่ l โดยที่ $l = 0, 1, \dots, L-1$ สามารถแทนด้วยฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability density function : pdf) สำหรับวิถีที่ l คือ [1] จากสมการที่ (2.6)

$$p_{\beta_l}(\beta) = 2 \left(\frac{m_l}{\Omega_l} \right)^{m_l} \frac{\beta^{2m_l-1}}{\Gamma(m_l)} \exp\left(-\frac{m_l}{\Omega_l} \beta^2\right), \quad \beta \geq 0$$

และตัวแปรเสริมเฟดดิ้งกำหนดด้วยความสัมพันธ์

$$m_l = \frac{\Omega_l^2}{E[(\beta_l^2 - \Omega_l)^2]} \geq 0.5 \quad \text{และ} \quad \Omega_l = E[\beta_l^2]$$

โดยค่า $\Gamma(m_l)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function)

Ω_l คือ ค่าของโมเมนต์อันดับที่สองในเส้นทางที่ l

m_l คือ การแจกแจงของแอมพลิจูดในช่องสัญญาณที่มีการเฟดในวิถีที่ l และมีค่าเท่ากับอัตราส่วนของค่าโมเมนต์อันดับที่สองยกกำลังสองต่อค่าของความแปรปรวน

เมื่อทำการเปลี่ยนค่า m_l จะได้การแจกแจงในรูปแบบต่างๆ เมื่อ

$m = 1$	คือ การแจกแจงแบบ Rayleigh
$m = 0.5$	คือ การแจกแจงแบบเกาส์เซียนข้างเดียว
$m \rightarrow \infty$	คือ กรณีอุดมคติที่ไม่มีการผิดเพี้ยนของสัญญาณ

การแจกแจงแบบไรเซียนและลือกนอร์มัลจะสอดคล้องกับ การแจกแจงแบบนาคากามิเมื่อตัวแปรเสริมเฟดดิ้ง $m > 1$ ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบไรเซียนแสดงด้วยค่าคงตัวของไรซ์ (Rice factor :K) กับการแจกแจงแบบนาคากามิ (m) แสดงด้วยความสัมพันธ์ [8]

$$m = \frac{1}{1 - \left(\frac{K}{1+K}\right)^2} \quad (4.6)$$

ในสมการที่ (4.6) จะเห็นว่าไม่ใช่สมการที่เป็นเชิงเส้น แต่เราสามารถประมาณเป็นแบบเชิงเส้นระหว่าง m และ K เมื่อ $K \geq 2$

ในวิทยานิพนธ์นี้จะแสดงการวิเคราะห์ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งในกรณีทั่วไป คือ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีที่มีค่าเท่ากันและไม่เท่ากันในแต่ละวิถี ซึ่งค่าเฉลี่ยของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเท่ากับ 1 2 และ 3 เป็นต้น โดยใช้ตัวแปร m_i แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรเสริมเฟดดิ้ง และโดยค่า l คือจำนวนสาขาของเครื่องส่งและรับ ตัวอย่างเช่น $m_2 = [0.5, 1.5]$ จะมีค่าตัวแปรเสริมเฉลี่ยเท่ากับ 1 จำนวนสาขาเท่ากับ 2 โดยสาขาแรกมีค่าตัวแปรเสริม 0.5 และสาขาที่สองมีตัวแปรเสริม 1.5 เป็นต้น

4.3 แบบจำลองเครื่องรับ (receiver model)

สัญญาณที่รับได้จากผู้ใช้หลายคนแบบอะซิงโครนัส (multiple asynchronous) ที่มีผู้ใช้งานหลายคน (multiuser) และมีการเฟดหลายวิถี โดย $L^{(k)}$ เป็นจำนวนของวิถีของผู้ใช้ลำดับที่ k เนื่องจากช่องสัญญาณจะเป็นฟังก์ชันของอัตราการลดทอนทางแอมพลิจูด การประวิงเวลา และการประวิงเฟส สัญญาณที่รับได้จะต้องมีการประวิงเวลาจาก $a(t)$ เป็น $a(t-\tau)$ และแอมพลิจูดของช่องสัญญาณก็จะเปลี่ยนแปลงด้วยตัวคูณด้านอัตราการลดทอนทางแอมพลิจูด (β_l) ดังนั้นสัญญาณที่รับได้จากผู้ใช้หลายคนสามารถแสดงได้ดังสมการ [8]

$$r(t) = \sqrt{2P} \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \beta_l^{(k)} a^{(k)}(t-\tau_l^{(k)}) b^{(k)}(t-\tau_l^{(k)}) \cos(\omega_c t + \phi_l^{(k)}) + n(t) \quad (4.7)$$

โดยที่ $r(t)$ คือ สัญญาณที่รับได้

$n(t)$ คือ สัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise :AWGN) ซึ่งมีค่าความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังสัญญาณเท่ากับ $\frac{\eta_0}{2}$

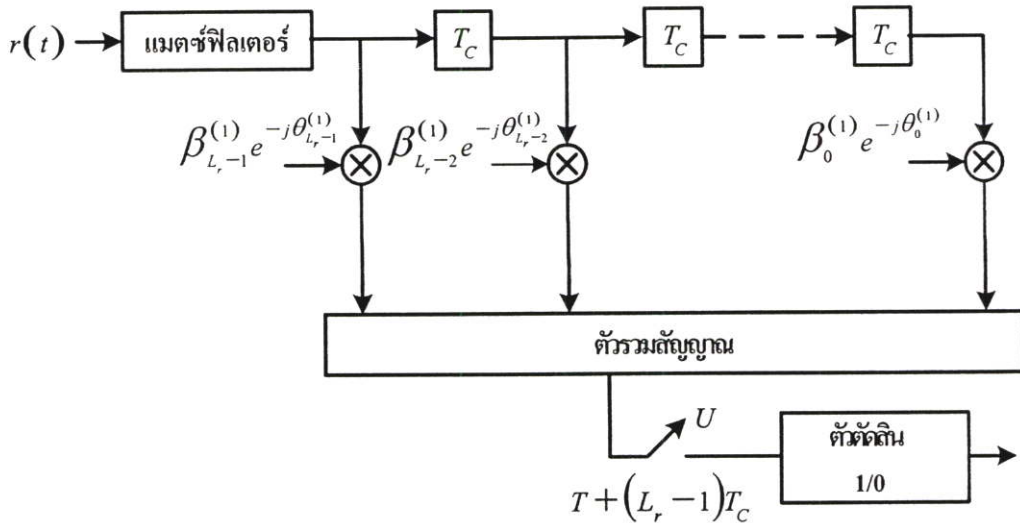
$L^{(k)}$ คือ จำนวนวิถีของผู้ใช้ลำดับที่ k

$\phi_l^{(k)}$ คือ มุมเฟสของเฟดดิ้งวิถีที่ l ของผู้ใช้ลำดับที่ k ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\phi_l^{(k)} = \phi^{(k)} + \theta_l^{(k)} - \omega_c \tau_l^{(k)}$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะกำหนดให้การเฟดของสัญญาณในแต่ละวิถีเป็นอิสระต่อกันและไม่ขึ้นแก่กัน ในที่นี้จะกำหนดให้มุมเฟสในวิถีที่ l ของผู้ใช้ลำดับที่ k หรือ $\phi_l^{(k)}$ มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[0, 2\pi]$ และการประวิงเวลาของผู้ใช้ลำดับที่ k หรือ $\tau_l^{(k)}$ จะเป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[0, T]$

ด้านเครื่องรับแบบ Rack แสดงดังรูปที่ 4.4 โดยจะกำหนดให้ผู้ใช้งานที่เราสนใจคือผู้ใช้งานที่ 1 ($k=1$) เป็นผู้ใช้งานอ้างอิง ด้วยการใช้เครื่องรับแบบเรคซึ่งซิงโครไนซ์กับสัญญาณที่ต้องการและเอาต์พุตของเครื่องรับแบบเรคสำหรับแต่ละเวลาในการสุ่ม (sampling time) สามารถแสดงได้ว่า



รูปที่ 4.4 เครื่องรับแบบ Rack

$$U = \sum_{n=0}^{L_r-1} \int_{nT_C}^{T+nT_C} r(t) \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t - nT_C) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt \quad (4.8)$$

สมการที่ (4.8) คือเอาต์พุตของเครื่องรับแบบเรค ซึ่งตัวถูกอินทิเกรตแสดงโครงสร้างของแมตซ์ฟิลเตอร์ที่มีการประวิงเวลาออกไปที่แต่ละเวลาสุ่ม ตัวแปร $r(t)$ คือสัญญาณที่รับได้และเป็นสัญญาณอินพุตของเครื่องรับแบบเรค พจน์ $\beta_n^{(1)}$ เรียกว่าน้ำหนักจุดแยก (tapped weight) ซึ่งเป็นตัวชดเชยทางด้านแอมพลิจูด

แทนนิพจน์สัญญาณที่รับเข้ามาได้ในสมการที่ (4.8) จะได้

$$U = \sum_{n=0}^{L_r-1} \int_{nT_C}^{T+nT_C} \left\{ \sqrt{2P} \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \beta_l^{(k)} a^{(k)}(t - \tau_l^{(k)}) b^{(k)}(t - \tau_l^{(k)}) \cos(\omega_c t + \varphi_l^{(k)}) + n(t) \right\} \cdot \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t - nT_C) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt \quad (4.9)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะส่วนของการอินทิเกรตสามารถแบ่งได้เป็น

4.3.1 ส่วนของสัญญาณ (Signal)

โดยพิจารณาผู้ใช้ $k = 1$

$$\begin{aligned}
 S^{(n)} &= \int_{nT_c}^{T+nT_c} \sqrt{2P} \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t) b_o^{(1)}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_l^{(1)}) \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt \\
 &= \sqrt{2P} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \int_{nT_c}^{T+nT_c} b_o^{(1)}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_l^{(1)}) dt \\
 &= \sqrt{2P} \{\beta_n^{(1)}\}^2 b_o^{(1)}(t) \frac{T}{2} \\
 &= \sqrt{\frac{2P}{4}} \{\beta_n^{(1)}\}^2 b_o^{(1)}(t) T \\
 &= \sqrt{\frac{P}{2}} \{\beta_n^{(1)}\}^2 b_o^{(1)}(t) T
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

เมื่อ	P	คือ กำลังของสัญญาณ
	T	คือ เวลาของการสุ่ม
	$b_o^{(1)}$	คือ บิตข้อมูลปัจจุบัน
	$b_{-1}^{(1)}$	คือ บิตข้อมูลก่อนหน้า

4.3.2 ส่วนของการแทรกสอดแบบเข้าถึงหลายทางจากผู้ใช้อื่นในระบบในขณะเวลาเดียวกัน (multiple access interference)

$$\begin{aligned}
 I_{mai}^{(n)} &= \sqrt{2P} \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \int_{nT_c}^{T+nT_c} \{\beta_l^{(k)} a^{(k)}(t - \tau_l^{(k)}) b^{(k)}(t - \tau_l^{(k)}) \cos(\omega_c t + \varphi_l^{(k)})\} \\
 &\quad \cdot \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t - nT_c) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt \\
 &= \sqrt{2P} \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \beta_l^{(k)} \beta_n^{(1)} \left(\frac{1}{2} \cos(\varphi_l^{(k)} - \varphi_n^{(1)}) \right) \\
 &\quad \int_{nT_c}^{T+nT_c} a^{(k)}(t - \tau_l^{(k)}) a^{(1)}(t - nT_c) b^{(k)}(t - \tau_l^{(k)}) dt
 \end{aligned}$$

กำหนดให้ มุมเฟส $\varphi_{nl}^{(k)} = \varphi_l^{(k)} - \varphi_n^{(1)}$

และการประวิงเวลา $\tau_{nl}^{(k)} = \tau_l^{(k)} - \tau_n^{(1)}$

$$= \sqrt{\frac{2P}{4}} \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \beta_l^{(k)} \beta_n^{(l)} \cos(\varphi_{nl}^{(k)}) \int_{nT_C}^{T+nT_C} a^{(k)}(t-\tau_l^{(k)}) a^{(l)}(t-nT_C) b^{(k)}(t-\tau_l^{(k)}) dt$$

พจน์อินทิเกรต $\int_{nT_C}^{T+nT_C} a^{(k)}(t-\tau_l^{(k)}) a^{(l)}(t-nT_C) dt$ คือค่าสหสัมพันธ์อัตโนมัติ (auto correlation) ของสัญญาณ

$$\text{กำหนดให้} \quad R_{k1}(\tau_{nl}^{(k)}) = \int_0^{\tau} a^{(k)}(t-\tau_l^{(k)}) a^{(l)}(t-nT_C) dt \quad (4.11)$$

$$\text{และ} \quad \hat{R}_{k1}(\tau_{nl}^{(k)}) = \int_{\tau}^T a^{(k)}(t-\tau_l^{(k)}) a^{(l)}(t-nT_C) dt \quad (4.12)$$

ดังนั้น

$$I_{mai}^{(n)} = \sqrt{\frac{P}{2}} \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \beta_n^{(l)} \beta_l^{(k)} \{b_{-1}^{(k)} R_{k1}(\tau_{nl}^{(k)}) + b_0^{(k)} \hat{R}_{k1}(\tau_{nl}^{(k)})\} \cos(\tau_{nl}^{(k)}) \quad (4.13)$$

4.3.3 ส่วนของการแทรกสอดระหว่างตัวมันเอง (self interference)

สัญญาณแทรกสอดนี้เกิดจากผลของสหสัมพันธ์อัตโนมัติ ในการคำนวณคิดผู้ใช้งานที่ $(k=1)$

$$\begin{aligned} I_{si}^{(n)} &= \sqrt{2P} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{L^{(1)}-1} \int_{nT_C}^{T+nT_C} \{ \beta_l^{(1)} a^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) b^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) \cos(\omega_c t + \varphi_l^{(1)}) \} \\ &\quad \cdot \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t-nT_C) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt \\ &= \sqrt{2P} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{L^{(1)}-1} \beta_l^{(1)} \beta_n^{(1)} \int_{nT_C}^{T+nT_C} a^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) a^{(1)}(t-nT_C) b^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{2} \cos(\varphi_l^{(1)} - \varphi_n^{(1)}) \right) dt \\ &= \sqrt{\frac{2P}{4}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{L^{(1)}-1} \beta_l^{(1)} \beta_n^{(1)} \cos(\varphi_{nl}^{(1)}) \int_{nT_C}^{T+nT_C} a^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) a^{(1)}(t-nT_C) b^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) dt \\ &= \sqrt{\frac{P}{2}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{L^{(1)}-1} \beta_l^{(1)} \beta_n^{(1)} \cos(\varphi_{nl}^{(1)}) \\ &\quad \cdot \left\{ \int_0^{\tau} a^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) a^{(1)}(t-nT_C) b_{-1}^{(1)} dt + \int_{\tau}^T a^{(1)}(t-\tau_l^{(1)}) a^{(1)}(t-nT_C) b_0^{(1)} dt \right\} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$I_{si}^{(n)} = \sqrt{\frac{P}{2}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{L^{(1)}-1} \beta_n^{(1)} \beta_l^{(1)} \{b_{-1}^{(1)} R_{k1}(\tau_{nl}^{(1)}) + b_0^{(1)} \hat{R}_{k1}(\tau_{nl}^{(1)})\} \cos(\varphi_{nl}^{(1)}) \quad (4.14)$$

4.3.4 ส่วนของสัญญาณแทรกสอดเนื่องมาจากสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise)

$$I_{ni}^{(n)} = \int_{nT_C}^{T+nT_C} \{n(t)\beta_n^{(i)} a^{(i)}(t-nT_C)\cos(\omega_C t + \varphi_n^{(i)})\} dt \quad (4.15)$$

ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุตที่ได้หลังจากผ่านเครื่องรับแบบเรกในแต่ละเวลาการสุ่มแสดงได้เป็น

$$U = \sum_{n=0}^{L_r-1} \{S^{(n)} + I_{mai}^{(n)} + I_{si}^{(n)} + I_{ni}^{(n)}\} \quad (4.16)$$

โดย $S^{(n)}$ คือ สัญญาณข้อมูลที่ต้องการ

$I_{mai}^{(n)}$ คือ สัญญาณแทรกสอดแบบการเข้าถึงหลายทางในขณะเวลาเดียวกัน

$I_{si}^{(n)}$ คือ สัญญาณแทรกสอดระหว่างตัวมันเอง

$I_{ni}^{(n)}$ คือ สัญญาณแทรกสอดเนื่องมาจากสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก

4.4 กำลังของสัญญาณ

เนื่องจากการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบจะอยู่ในรูปแบบสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (interference) ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องคำนวณหา กำลังของสัญญาณต่างๆ ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น

4.4.1 กำลังของสัญญาณแทรกสอดของนิพจน์ต่างๆ

ในการหาค่ากำลังของสัญญาณหาได้จาก $Var[I] = E[I^2] - E^2[I]$ แต่เนื่องจากจำลองเทอมของ MAI และ SI เป็นสัญญาณรบกวน Gaussian ขาวแบบบวก เทอมของ $E^2[I]$ จะมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

4.4.1.1 กำลังสัญญาณแทรกสอดแบบเข้าถึงหลายทางในส่วนของการแทรกสอดระหว่างผู้ใช้งาน

$$\begin{aligned} Var[I_{mai}] &= E[I_{mai}^{(2)}] \\ &= E \left[\left\{ \sqrt{\frac{P}{2}} \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \beta_n^{(i)} \beta_l^{(k)} \{b_{-1}^{(k)} R_{k1}(\tau_{nl}^{(k)}) + b_0^{(k)} \hat{R}_{k1}(\tau_{nl}^{(k)})\} \cos(\varphi_{nl}^{(k)}) \right\}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P}{2} \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} \{\beta_n^{(l)}\}^2 E[\{\beta_l^{(k)}\}^2] E[\{b_{-1}^{(k)} R_{k1}(\tau_{nl}^{(k)}) + b_0^{(k)} \hat{R}_{k1}(\tau_{nl}^{(k)})\}^2] E[\cos^2(\varphi_{nl}^{(k)})] \\
&= \frac{P}{2} \{\beta_n^{(1)}\}^2 E\left[\frac{1 + \cos 2\varphi_{nl}^{(k)}}{2}\right] \sum_{k=2}^K E[\{\beta_l^{(k)}\}^2] E[\{b_{-1}^{(k)} R_{k1}(\tau_{nl}^{(k)}) + b_0^{(k)} \hat{R}_{k1}(\tau_{nl}^{(k)})\}^2] \\
&\quad \cdot \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} E[\{\beta_l^{(k)}\}^2] \\
&= \frac{P}{4} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K E[\{b_{-1}^{(k)} R_{k1}(\tau_{nl}^{(k)}) + b_0^{(k)} \hat{R}_{k1}(\tau_{nl}^{(k)})\}^2] \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} E[\{\beta_l^{(k)}\}^2] \\
&= \frac{P}{4} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K \frac{T^2}{3N^3} 2N^2 \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} E[\{\beta_l^{(k)}\}^2] \\
&= \frac{P}{4} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K \frac{2T^2}{3N} \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} E[\{\beta_l^{(k)}\}^2] \\
&= \frac{E_b}{4T} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \frac{2T^2}{3N} \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} E[\{\beta_l^{(k)}\}^2] \quad (E_b = PT) \\
\text{Var}[I_{mai}] &= \frac{E_b}{6N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} E[\{\beta_l^{(k)}\}^2]
\end{aligned}$$

กำหนดให้ $\Omega_l^{(k)} = E[\{\beta_l^{(k)}\}^2]$

$$\sigma_{mai,n}^2 = \frac{E_b T}{6N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{l^{(k)}-1} \Omega_l^{(k)} \quad (4.17)$$

4.4.1.2 กำลังสัญญาณแทรกสอดระหว่างตัวมันเอง

$$\begin{aligned}
\text{Var}[I_{si}] &= E[I_{si}^2] \\
&= E\left[\left\{\sqrt{\frac{P}{2}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{l^{(1)}-1} \beta_n^{(l)} \beta_l^{(1)} \{b_{-1}^{(1)} R_{11}(\tau_{nl}^{(1)}) + b_0^{(1)} \hat{R}_{11}(\tau_{nl}^{(1)})\} \cos(\varphi_{nl}^{(1)})\right\}^2\right] \\
&= \frac{P}{2} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{l^{(1)}-1} \{\beta_n^{(l)}\}^2 E[\{\beta_l^{(1)}\}^2] E[\{b_{-1}^{(1)} R_{11}(\tau_{nl}^{(1)}) + b_0^{(1)} \hat{R}_{11}(\tau_{nl}^{(1)})\}^2] E[\cos^2(\varphi_{nl}^{(1)})] \\
&= \frac{P}{2} \{\beta_n^{(1)}\}^2 E\left[\frac{1 + \cos 2\varphi_{nl}^{(1)}}{2}\right] \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{l^{(1)}-1} E[\{\beta_l^{(1)}\}^2] E[\{b_{-1}^{(1)} R_{11}(\tau_{nl}^{(1)}) + b_0^{(1)} \hat{R}_{11}(\tau_{nl}^{(1)})\}^2] \\
&= \frac{P}{4} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{l^{(1)}-1} E[\{\beta_l^{(1)}\}^2] E[\{b_{-1}^{(1)} R_{11}(\tau_{nl}^{(1)}) + b_0^{(1)} \hat{R}_{11}(\tau_{nl}^{(1)})\}^2]
\end{aligned}$$

กำหนดให้ $\Omega_l^{(1)} = E\left[\{\beta_n^{(1)}\}^2\right]$

$$\begin{aligned} \text{Var}[I_{si}] &= \frac{P}{4N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{L^{(1)}-1} E\left[\{\beta_l^{(1)}\}^2\right] \\ &= \frac{E_b T}{4N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq n}}^{L^{(1)}-1} \Omega_l^{(1)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma_{si,n}^2 = \frac{E_b T}{4N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{l=1}^{L^{(1)}-1} \Omega_l^{(1)} \quad (4.18)$$

4.4.1.3 กำลังสัญญาณแทรกสอดในส่วนของสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก

$$\begin{aligned} \text{Var}[I_{ni}] &= E[I_{ni}^2] \\ &= E\left[\int_{nT_c}^{T+nT_c} n^2(t) \{\beta_n^{(1)}\}^2 a^{2(1)}(t) \cos^2(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt\right] \\ &= E\left[\int_{nT_c}^{T+nT_c} n^2(t) \{\beta_n^{(1)}\}^2 (1) \left(\frac{1 + \cos 2(\omega_c t + \varphi_n^{(1)})}{2}\right) dt\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2} T \{\beta_n^{(1)}\}^2 \frac{\eta_o}{2}\right] \\ &= E\left[\frac{T}{4} \eta_o \{\beta_n^{(1)}\}^2\right] \\ \sigma_{ni,n}^2 &= \frac{T}{4} \eta_o \{\beta_n^{(1)}\}^2 \quad (4.19) \end{aligned}$$

เมื่อ $n(t)$ คือ สัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก ซึ่งมีความหนาแน่นของสเปกตรัม 2 ข้างเท่ากับ $\frac{\eta_o}{2}$

4.4.2 กำลังของสัญญาณ

จากสมการที่ (4.10) สามารถนำมาจัดรูปใหม่ได้

$$S^{(n)} = \sqrt{\frac{P}{2}} b_0^{(1)} T \{\beta_n^{(1)}\}^2$$

$$U_s = \sqrt{\frac{E_b T}{2}} \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \quad (4.20)$$

ดังนั้นกำลังของสัญญาณรบกวนทั้งหมด คือ ผลรวมของกำลังของสัญญาณรบกวนในสมการที่ (4.17) (4.18) และ (4.19) คือ [8]

$$\sigma_T^2 = \sum_{n=0}^{L_r-1} (\sigma_{mai,n}^2 + \sigma_{si,n}^2 + \sigma_{ni,n}^2)$$

$$\sigma_T^2 = E_b T \left[\frac{\sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \Omega_l^{(k)}}{6N} + \frac{\sum_{l=1}^{L^{(1)}-1} \Omega_l^{(1)}}{4N} + \frac{\eta_o}{4E_b} \right] \cdot \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \quad (4.21)$$

กำหนดให้ช่องสัญญาณเป็นการเฟดหลายวิถีและแสดงด้วยคุณลักษณะของโพรไฟล์ความเข้มของสัญญาณหลายวิถี (Multipath Intensity Profile :MIP) แสดงได้ว่าค่ากำลังงานเฉลี่ยของสัญญาณจะเป็นฟังก์ชันของการหน่วงวิถี (path delay) แสดงได้ดังสมการ

$$\Omega_l = \Omega_0 e^{-l\delta} \quad (4.22)$$

โดยที่ Ω_0 เป็นค่าเฉลี่ยกำลังของสัญญาณที่มาในวิถีแรก

δ เป็นอัตราการลดทอนกำลังของสัญญาณ

ดังนั้นกำลังของสัญญาณรบกวนตามสมการ (4.21) สามารถแยกออกและเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} 1. \sigma_{mai,n}^2 &= \frac{E_b T}{6N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \Omega_l^{(k)} \\ &= \frac{E_b T}{6N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} \Omega_0 e^{-l\delta} \\ &= \frac{E_b T}{6N} \Omega_0 \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{k=2}^K \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} e^{-l\delta} \\ &= \frac{E_b T}{6N} \Omega_0 \{\beta_n^{(1)}\}^2 (K-1) \sum_{l=0}^{L^{(k)}-1} e^{-l\delta} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $q(L, \delta) = \sum_{l=0}^{L-1} e^{-l\delta} = \frac{1 - e^{-L\delta}}{1 - e^{-\delta}}$

$$\sigma_{mai,n}^2 = \frac{E_b T}{6N} \Omega_0 (K-1) q(L, \delta) \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sigma_{si,n}^2 &= \frac{E_b T}{4N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{l=1}^{l^{(1)}-1} \Omega_l^{(1)} \\ &= \frac{E_b T}{4N} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{l=1}^{l^{(1)}-1} \Omega_0 e^{-l\delta} \\ &= \frac{E_b T}{4N} \Omega_0 \{\beta_n^{(1)}\}^2 \sum_{l=1}^{l^{(1)}-1} e^{-l\delta} \\ &= \frac{E_b T}{4N} \Omega_0 \{q(L, \delta) - 1\} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \sigma_{ni,n}^2 &= E_b T \left[\frac{\eta_o}{4E_b} \right] \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \\ &= E_b T \Omega_0 \left[\frac{\eta_o}{4E_b \Omega_0} \right] \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

ดังนั้นสมการที่ (4.23) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\sigma_T^2 = E_b T \Omega_0 \left[\frac{(K-1)q(L, \delta)}{6N} + \frac{q(L, \delta) - 1}{4N} + \frac{\eta_o}{4E_b \Omega_0} \right] \cdot \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \quad (4.26)$$

อัตราส่วนกำลังสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (SNR) ที่เครื่องรับ คือ

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{U_S^2}{2\sigma_T^2} \\ &= \frac{E_b T}{2} \left[\sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \right]^2 \frac{1}{2E_b T \Omega_0} \left[\frac{(K-1)q(L, \delta)}{6N} + \frac{q(L, \delta) - 1}{4N} + \frac{\eta_o}{4E_b \Omega_0} \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \left[\sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\Omega_0} \left[\frac{(K-1)q(L,\delta)}{6N} + \frac{q(L,\delta)-1}{4N} + \frac{\eta_0}{4E_b\Omega_0} \right]^{-1} \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \quad (4.27)$$

ดังนั้นสามารถเขียน SNR อยู่ในรูปของ $\sigma_0 S$ ดังนี้

$$\text{โดย } S = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=0}^{L_r-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2 \quad (4.28)$$

$$\sigma_0 = \left[\frac{2(K-1)q(L,\delta)}{3N} + \frac{q(L,\delta)-1}{N} + \frac{\eta_0}{E_b\Omega_0} \right]^{-1} \quad (4.29)$$

4.5 การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบ

4.5.1 การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส

4.5.1.1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของความผิดพลาดของกำลังสัญญาณ

ค่าของกำลังสัญญาณที่เอาต์พุตของเครื่องรับแบบเรคเป็นฟังก์ชันของผลรวมตัวประกอบ การลดทอนของแอมพลิจูด (amplitude distortion factor : β_l) ยกกำลังสองและเรียกการรวมแบบนี้ว่าการรวมอัตราสูงสุด (Maximal Ratio Combining :MRC) จะกำหนดด้วยความสัมพันธ์

$$\gamma = \sum_{l=0}^{L-1} \beta_l^2 \quad (4.30)$$

โดยที่ β_l จะสอดคล้องกับการแจกแจงแบบนาคากามิ [1]

กำหนดให้การเฟดในแต่ละวิถีเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นฟังก์ชันคุณลักษณะ (characteristic function) สามารถแสดงดังสมการ [8] คือ

$$\varphi_r(t) = \prod_{l=0}^{L-1} \left(1 - \frac{jt}{\lambda_l} \right)^{-m_l} \quad (4.31)$$

โดยที่ $\lambda_l = \frac{m_l}{\Omega_l}$ และ $l = 0, 1, \dots, L-1$ และค่าความหนาแน่นความน่าจะเป็น (pdf) ของ γ

ในสมการที่ (4.31) จะได้จากการคำนวณลาปลาซผกผัน[8]และในกรณีทั่วไปค่า cdf ของ γ จะแทนด้วย

$$F_\gamma(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}[\varphi_\gamma(t)e^{-jtx}]}{t} dt \quad (4.32)$$

โดยที่ $\text{Im}[\varphi_\gamma(t)e^{-jtx}]$ เป็นส่วนจินตภาพของ $\varphi_\gamma(t)e^{-jtx}$ และสามารถเขียน $\varphi_\gamma(t)$ ให้อยู่ในพิกัดเชิงขั้วได้ คือ

$$\varphi_\gamma(t) = \frac{\exp\left\{j \sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1}\left(\frac{t}{\lambda_l}\right)\right\}}{\prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l}\right)^2\right]^{m_l/2}} \quad (4.33)$$

แทนสมการที่ (4.33) ลงในสมการที่ (4.32) จะได้

$$F_\gamma(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\sin\left\{\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1}\left(\frac{t}{\lambda_l}\right) - tx\right\}}{\prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l}\right)^2\right]^{m_l/2}} \right\} \frac{dt}{t} \quad (4.34)$$

และทำการหาอนุพันธ์ของ cdf ในสมการที่ (4.34) จะได้ค่า pdf ของ γ ดังสมการ

$$\begin{aligned} p(\gamma) &= \frac{d}{dx} \{F_\gamma(x)\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\cos\left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1}\left(\frac{t}{\lambda_l}\right) - t\gamma\right]}{\prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l}\right)^2\right]^{m_l/2}} \right\} dt \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.5.1.2 การวิเคราะห์อัตราความผิดพลาดบิตของระบบ

ในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบจะแสดงอยู่ในรูปของค่าสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน โดยเมื่อพิจารณาการคิ่มอดูเลตแบบร่วมนัย ค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาด (probability of error) ขณะใดๆของสัญญาณรบกวนสามารถแสดงได้เป็น [8]

$$P_e(S) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right)}{2\sqrt{\pi}} \quad (4.36)$$

โดย $\Gamma(b, x) = \int_x^\infty y^{b-1} e^{-y} dy$ เป็นแกมมาฟังก์ชันแบบไม่สมบูรณ์ (incomplete gamma function)

เนื่องจากค่า S เป็นค่าแบบไม่เจาะจง ดังนั้นจึงต้องหาค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดเฉลี่ย (average error probability) ซึ่งค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดบิตเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ

$$\bar{P}_e = \int_0^\infty P_e(S) p(S) dS \quad (4.37)$$

แทนสมการที่ (4.35) และ (4.36) ลงในสมการที่ (4.37) จะได้

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \frac{\cos\left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1}\left(\frac{t}{\lambda_l}\right) - tS\right]}{\prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l}\right)^2\right]^{m_l/2}} \right\} dt dS \quad (4.38)$$

เปลี่ยนการอินทิเกรตสองชั้นในสมการที่ (4.38) ให้เป็นอินทิเกรตชั้นเดียวได้โดยใช้คุณสมบัติของตรีโกณมิติ

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (4.39)$$

ดังนั้นจากสมการที่ (4.38) จะได้

$$\begin{aligned} \bar{P}_e &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l} \right)^2 \right]^{-m_l/2} \\ &\quad \cdot \left\{ \cos A(t) \int_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \cos(tS) dS + \sin A(t) \int_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \sin(tS) dS \right\} dt \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\text{โดยที่ } A(t) = \sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right)$$

$$\text{และ } \lambda_l = \frac{\Omega_0 m_l}{\Omega_l}$$

ใช้การอินทิเกรตแบบแยกส่วนจะได้

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \cos(tS) dS &= \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \frac{\sin(tS)}{t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\sin(tS)}{t} d\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \\ &= \frac{\sqrt{\sigma_0}}{t} \int_0^\infty \sin(tS) S^{-1/2} e^{-\sigma_0 S} dS \\ &= \frac{1}{t} \left\{ \frac{\sqrt{\pi\sigma_0} \sin \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{3/4}} \right\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

และ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \sin(tS) dS &= -\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \frac{\cos(tS)}{t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos(tS)}{t} d\Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{t} - \frac{\sqrt{\sigma_0}}{t} \int_0^\infty \cos(tS) S^{-1/2} e^{-\sigma_0 S} dS \\ \int_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{2}, \sigma_0 S\right) \sin(tS) dS &= \frac{\sqrt{\pi}}{t} - \frac{1}{t} \left\{ \frac{\sqrt{\pi\sigma_0} \cos \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{3/4}} \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

แทนสมการที่ (4.41) และ (4.42) ลงในสมการที่ (4.40) จะได้อัตราความผิดพลาดบิตเฉลี่ยตามสมการที่(4.43)

$$\begin{aligned} \bar{P}_e = & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l} \right)^2 \right]^{m_l/2}} \left\{ \cos \left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{\sigma_0} \sin \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{1/4}} \right] \right. \\ & \left. + \sin \left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right) \right] \left[1 - \frac{\sqrt{\sigma_0} \cos \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{1/4}} \right] \right\} \frac{dt}{t} \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.5.2 การวิเคราะห์สัสมรณระบบที่เข้ารหัส

4.5.2.1 อัตราความผิดพลาดเฉลี่ยของระบบที่ใช้การถอดรหัสแก้ความผิดพลาดอย่างเดี่ยว เทคนิคการเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาดด้วยรหัส (n, k) แบบ RS มีพารามิเตอร์

d คือระยะทางแฮมมิงที่น้อยที่สุด $d = n - k + 1$

t คือความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดให้ถูกต้อง $t = \left\lfloor \frac{(d-1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-k)}{2} \right\rfloor$

ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดในบล็อกข้อมูลแสดงได้ดังนี้

$$P_{WE} = \sum_{i=t+1}^n \binom{n}{i} P_b^i (1 - P_b)^{n-i} \quad (4.44)$$

ความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตขอบเขตล่างภายหลังการถอดรหัสดังสมการ

$$P_{ED} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=t+1}^n i \binom{n}{i} P_b^i (1 - P_b)^{n-i} \quad (4.45)$$

บทที่ 5

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในบทนี้จะทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรม MATLAB เพื่อเลียนแบบการทำงาน โดยทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขตามกฎของเกาส์ อัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ไม่เข้ารหัส สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.43) ซึ่งแทนความน่าจะเป็นอัตราความผิดพลาดบิตเฉลี่ย ส่วนระบบที่ใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.45) ซึ่งแทนความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ยของระบบที่ใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว โดยในวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาผลของตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคากามิ การเข้ารหัส RS แก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว จำนวนชุดรับแบบเรค ค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาด ตามสมการที่กล่าวไว้ข้างต้น โดยในการวิเคราะห์นั้นจะแสดงอยู่ในรูปของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ยกับสัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต (เดซิเบล) ซึ่งสามารถแบ่งตามหัวข้อได้ดังนี้

5.1 ผลของตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคากามิ (m)

5.1.1 ตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคากามิแตกต่างกันในแต่ละวิถี ทำให้อัตราความผิดพลาดบิตมีค่ามากขึ้น

5.1.2 ตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคากามิแตกต่างกันในแต่ละวิถีมากขึ้น ทำให้อัตราความผิดพลาดบิตจะมากขึ้น

5.1.3 ตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคากามิมีค่ามากขึ้น อัตราความผิดพลาดบิตจะต่ำลง

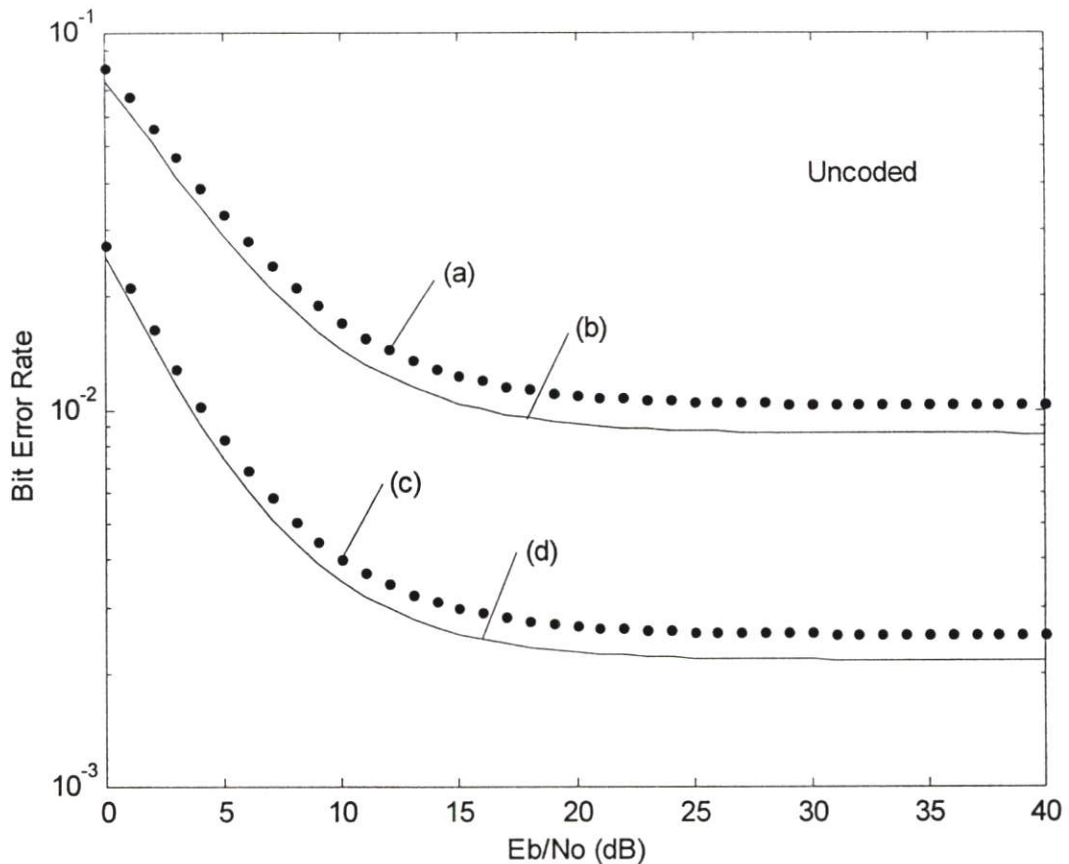
5.2 ผลของการเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาดจะดีกว่าระบบที่ไม่ได้เข้ารหัสซึ่งเกิดจากค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาด (t)

5.3 ผลของการเพิ่มจำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคทำให้อัตราความผิดพลาดมีค่าลดลง ซึ่งจำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคที่มีความเหมาะสมเท่ากับ 4 สาขา

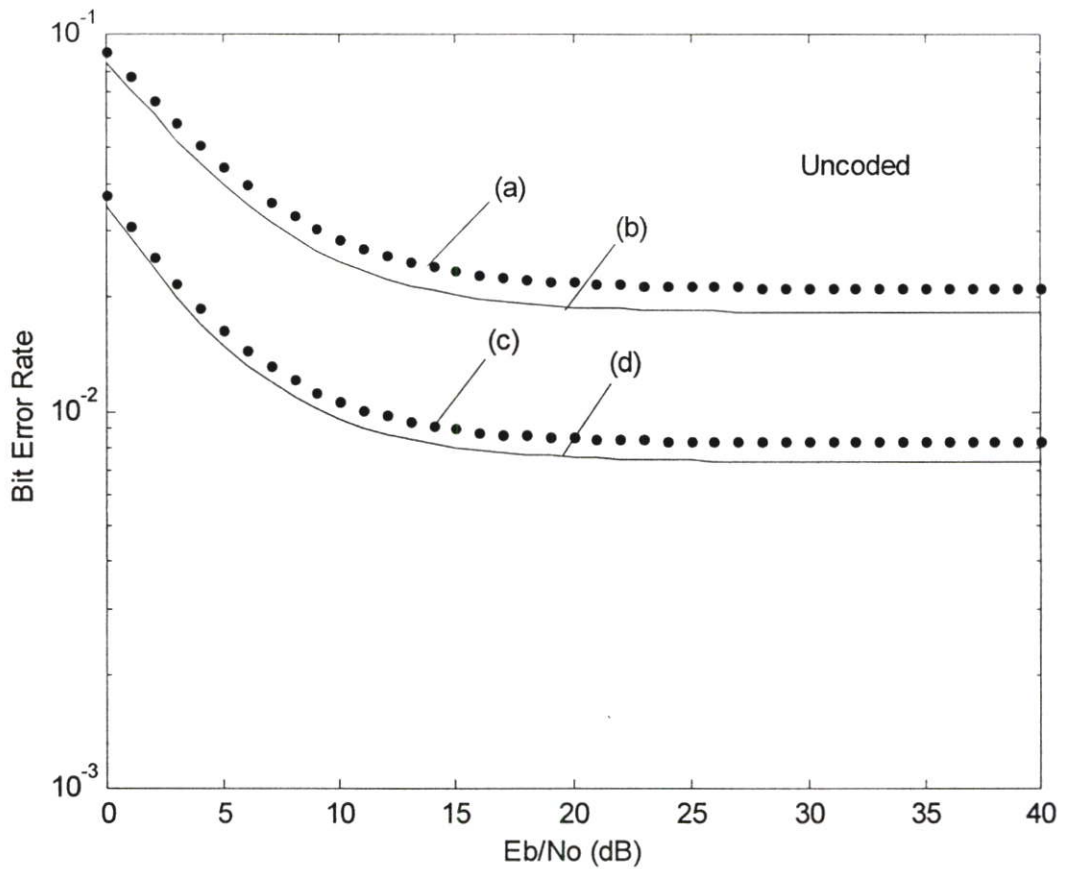
5.1 ผลของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิ (m)

ผลของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิ (m) ของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส

รูปที่ 5.1-5.2 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส โดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 และ 40 ตามลำดับ จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคเท่ากับ 2 และ 4 สาขา อัตราการลดทอนของสัญญาณเป็น 0 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าค่าเฉลี่ยของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิในแต่ละวิถีแตกต่างกันทำให้อัตราความผิดพลาดบิตมีมากกว่ากรณีที่ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมีค่าเท่ากันในทุกวิถี

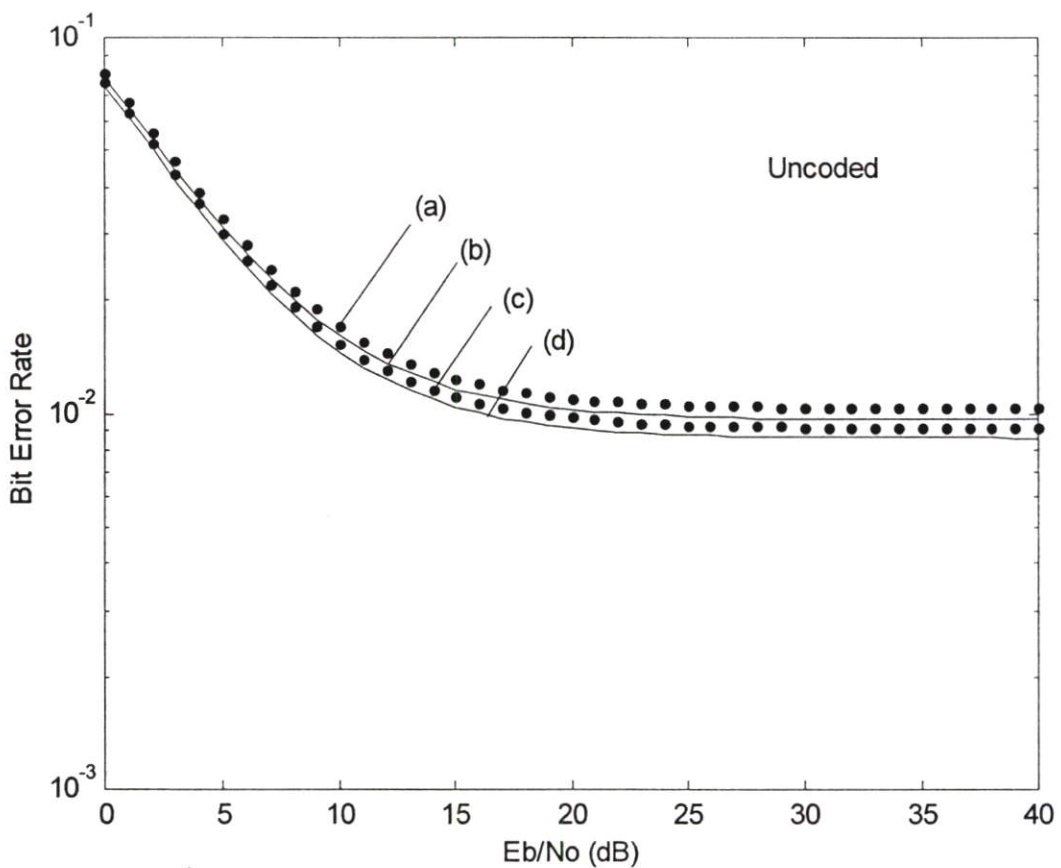


รูปที่ 5.1 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ยกับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมีค่าเฉลี่ย
 (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$,
 (d) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$

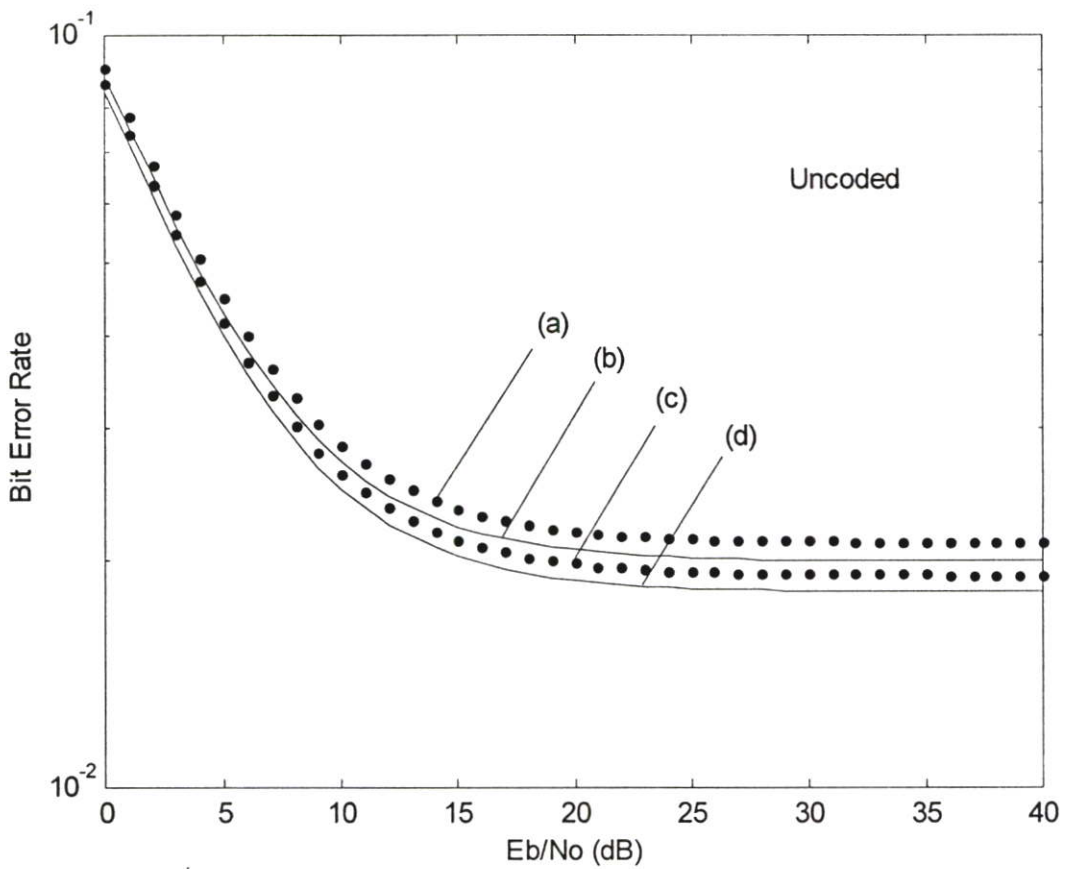


รูปที่ 5.2 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย
 (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$,
 (d) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$

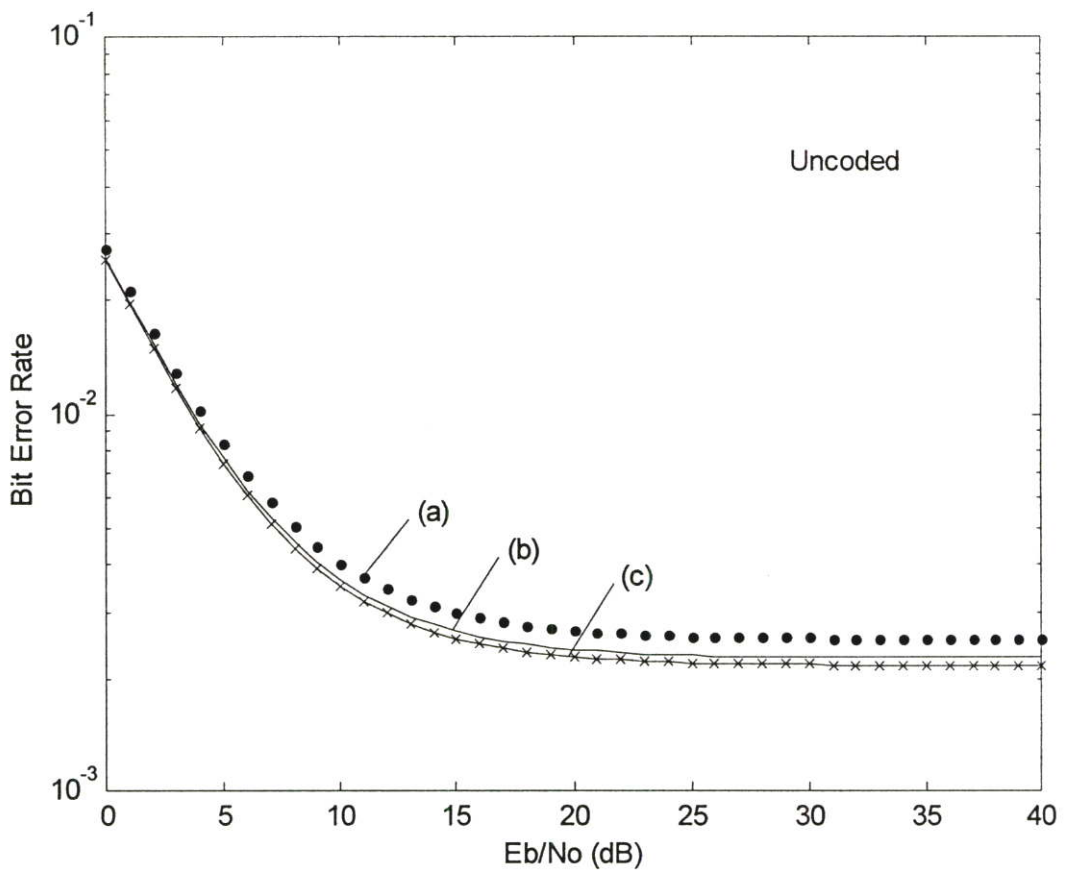
รูปที่ 5.3-5.6 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ไม่เข้ารหัส โดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 และ 40 ตามลำดับ จำนวนสาขาเครื่องรับเท่ากับ 2 และ 4 อัตราการลดทอนของสัญญาณเป็น 0 และมีค่าเฉลี่ยของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิเท่ากับ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิแตกต่างกันในแต่ละวิธีมากขึ้นอัตราความผิดพลาดบิตจะมีค่ามากขึ้น ตัวอย่างเช่น รูปที่ 5.3 กรณีตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิเฉลี่ย (a) ความแตกต่างของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งเท่ากับ 1.0 (b) ความแตกต่างของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งเท่ากับ 0.8 (c) ความแตกต่างของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งเท่ากับ 0.6 (d) ความแตกต่างของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งเท่ากับ 0 จะเห็นได้ว่าอัตราความผิดพลาดบิตเรียงจะน้อยที่สุดไปกรณีที่มีมากที่สุด คือ (d) (c) (b) และ (a) ตามลำดับ



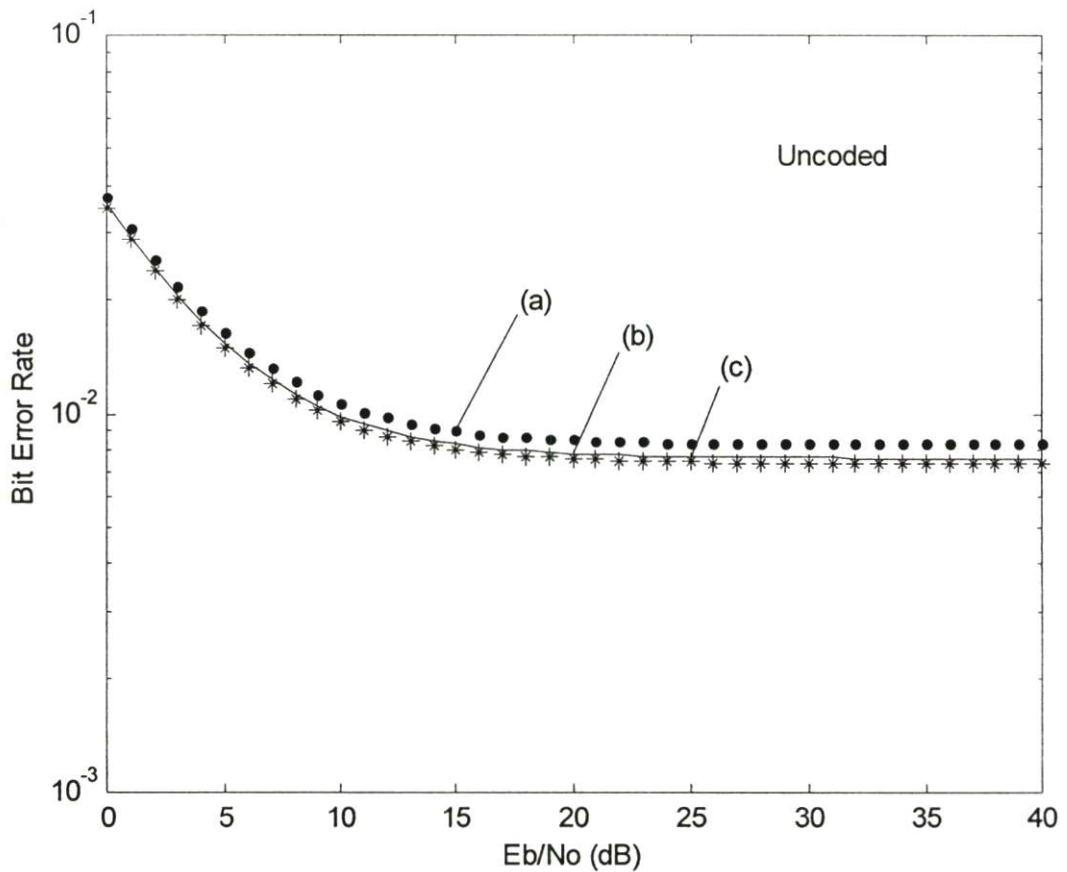
รูปที่ 5.3 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25$, $L = L_r$, $\delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามิมี่ค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [0.6, 1.4]$, (c) $\bar{m}_2 = [0.7, 1.3]$, (d) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$



รูปที่ 5.4 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [0.6, 1.4]$, (c) $\bar{m}_2 = [0.7, 1.3]$, (d) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$

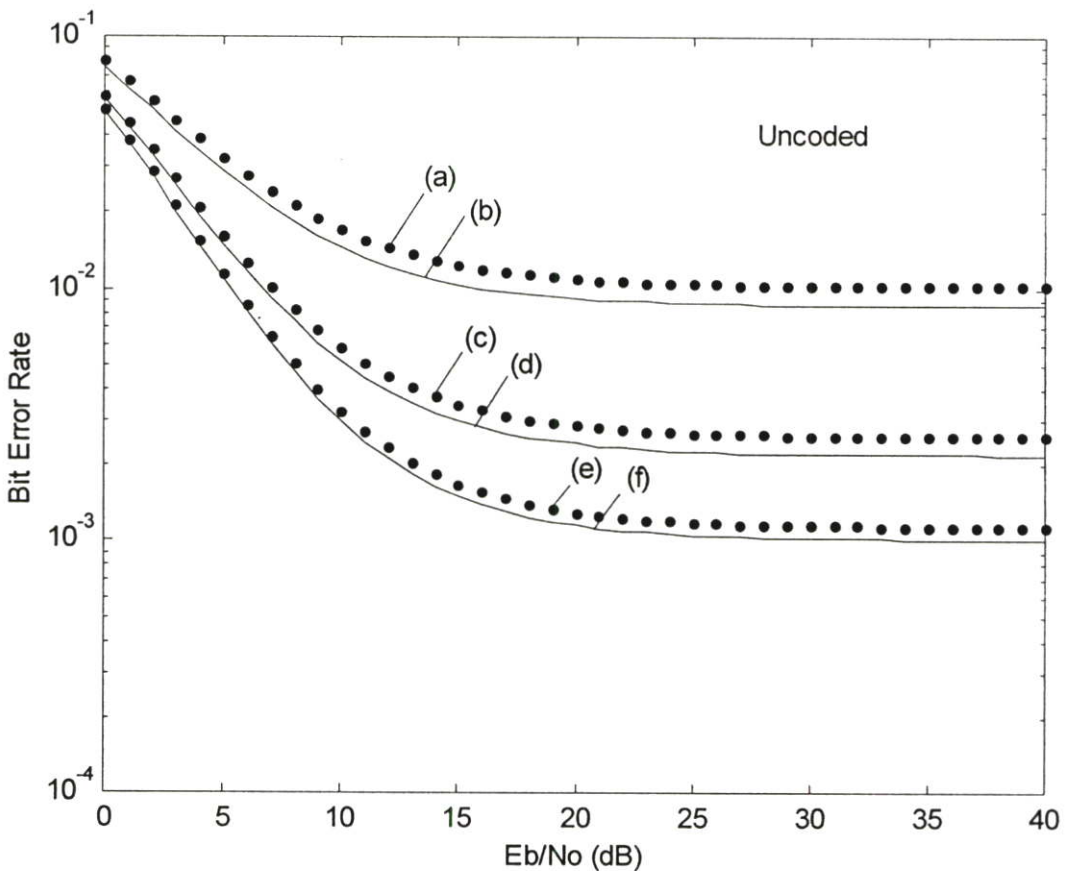


รูปที่ 5.5 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย
 (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [0.75, 0.8, 1.2, 1.25]$,
 (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$

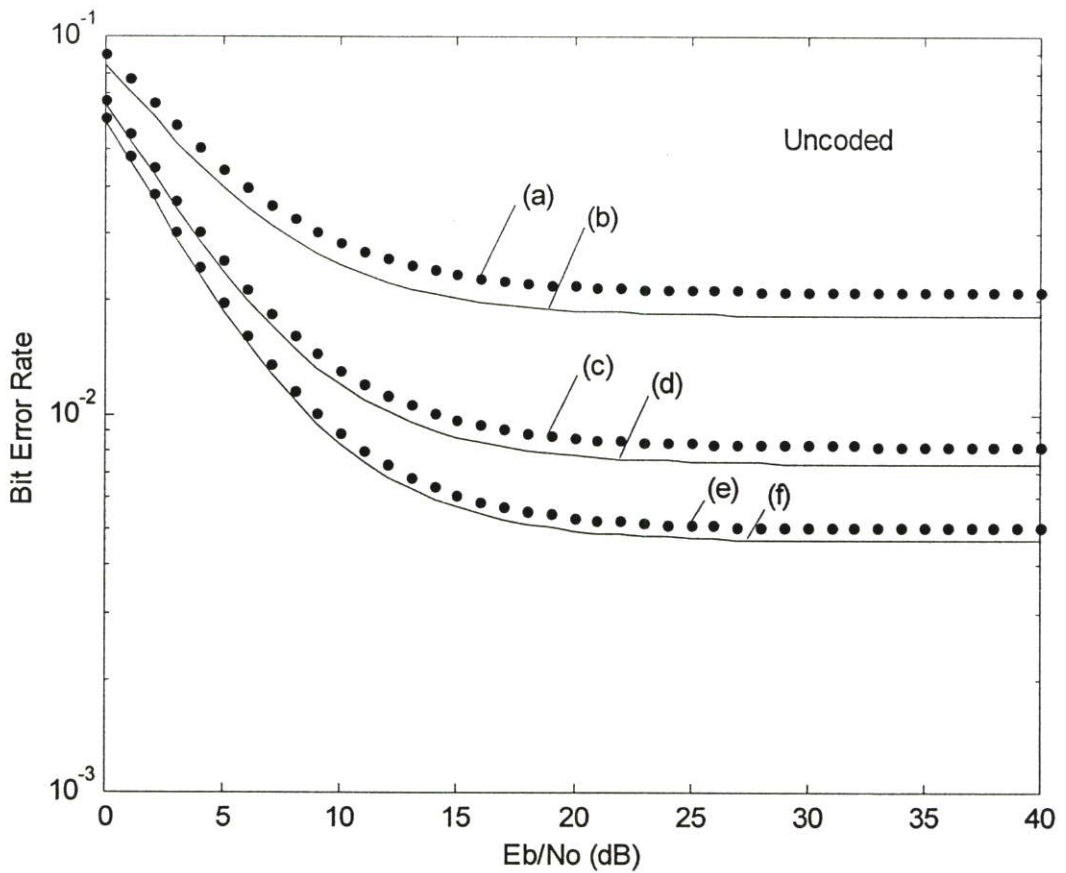


รูปที่ 5.6 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย
 (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [0.75, 0.8, 1.2, 1.25]$,
 (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$

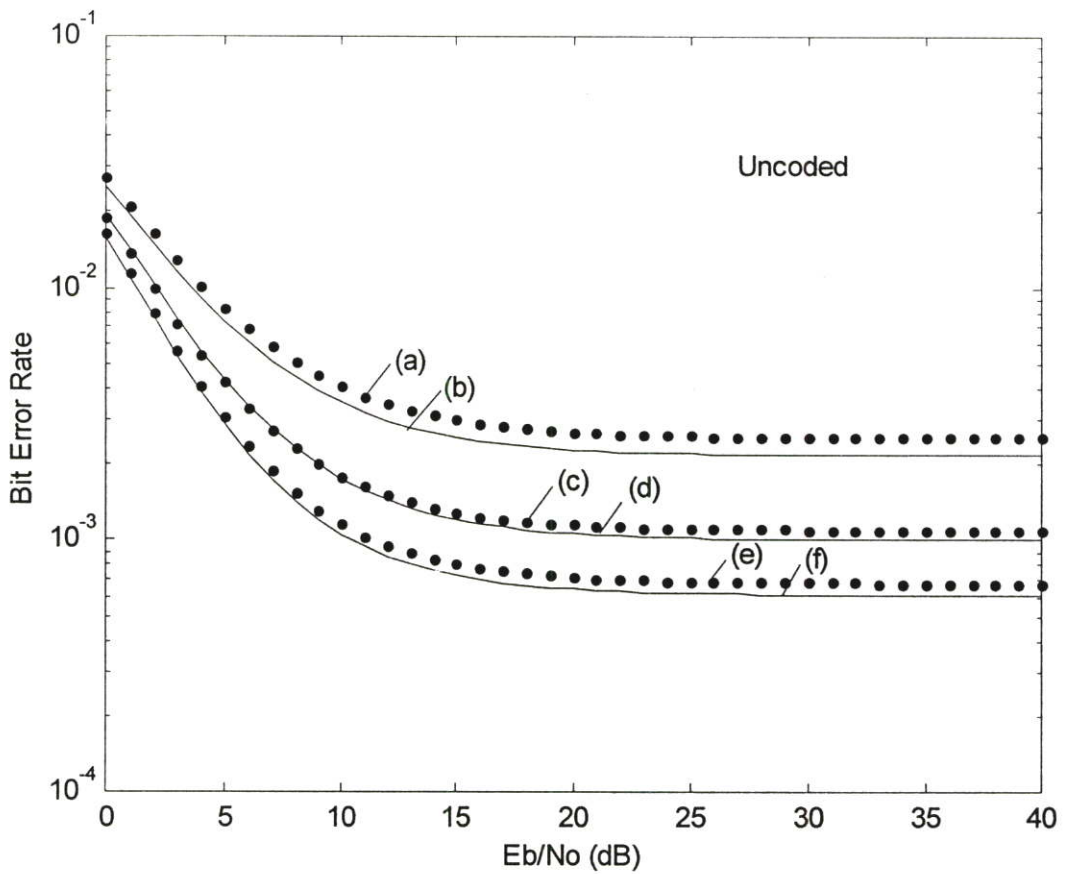
รูปที่ 5.7-5.8 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ไม่เข้ารหัสโดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 และ 40 ตามลำดับ จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคเท่ากับ 2 และ 4 สาขา อัตราการลดทอนของสัญญาณเป็น 0 และตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีเฉลี่ยเท่ากับ 1 2 และ 3 ตามลำดับ ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าค่าเฉลี่ยของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีเฉลี่ยมากขึ้น ความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตจะต่ำลง



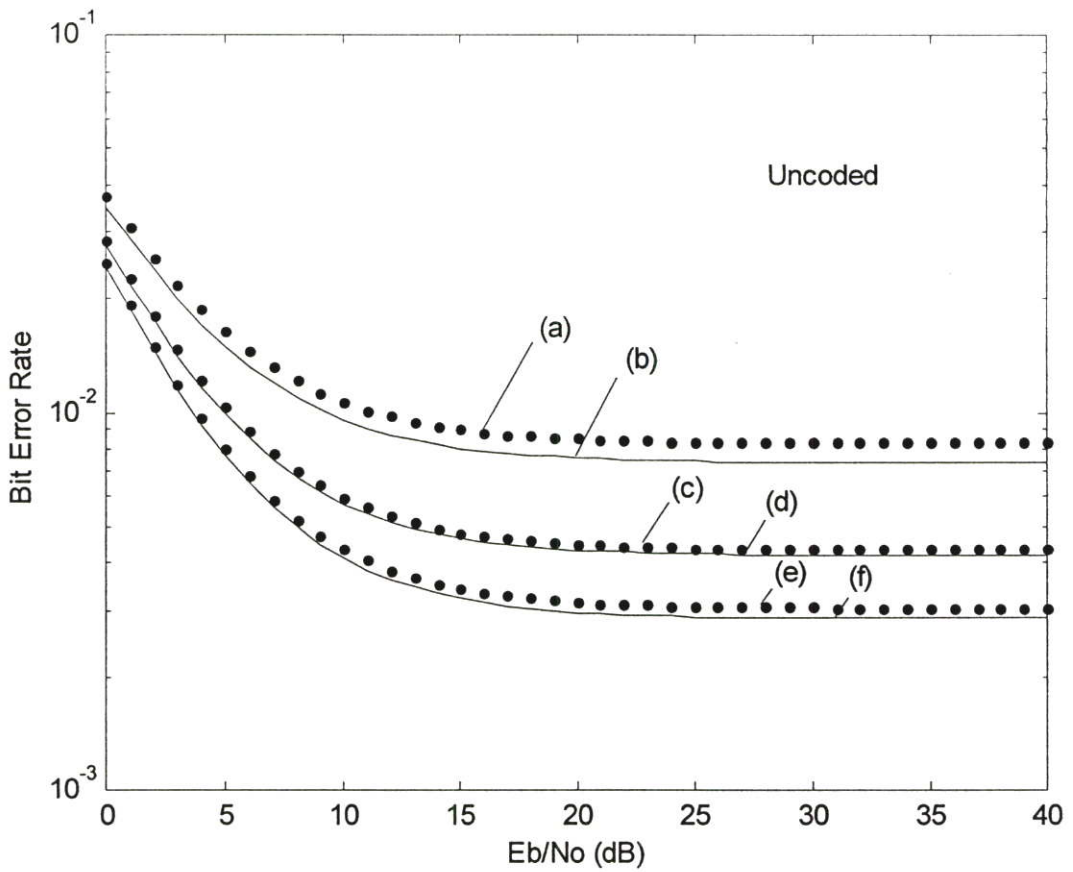
รูปที่ 5.7 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ยกับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_2 = [2.5, 1.5]$, (d) $\bar{m}_2 = [2.0, 2.0]$, (e) $\bar{m}_2 = [2.0, 4.0]$, (f) $\bar{m}_2 = [3.0, 3.0]$



รูปที่ 5.8 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40$, $L = L_r$, $\delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย
 (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$, (c) $\bar{m}_2 = [2.5, 1.5]$, (d) $\bar{m}_2 = [2.0, 2.0]$,
 (e) $\bar{m}_2 = [2.0, 4.0]$, (f) $\bar{m}_2 = [3.0, 3.0]$



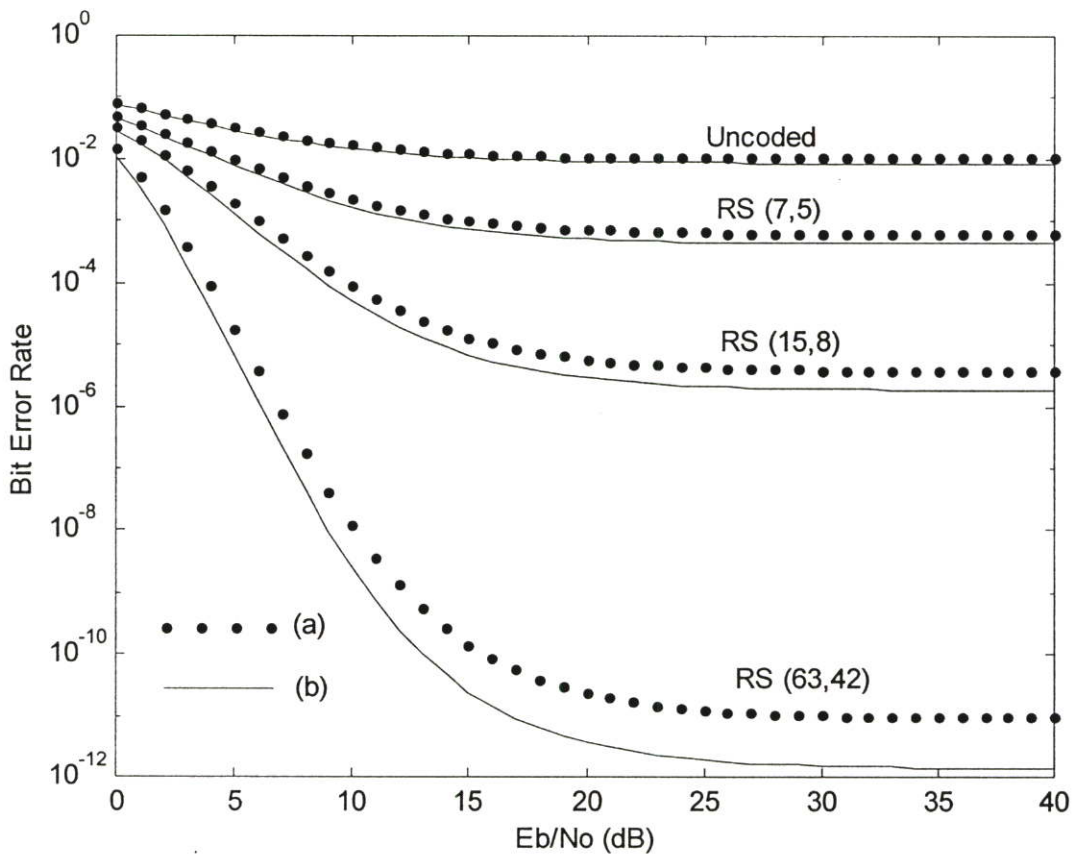
รูปที่ 5.9 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย
 (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$,
 (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.5, 2.5, 3.0]$, (d) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.0, 2.0, 2.0]$,
 (e) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.5, 3.5, 4.0]$, (f) $\bar{m}_4 = [3.0, 3.0, 3.0, 3.0]$



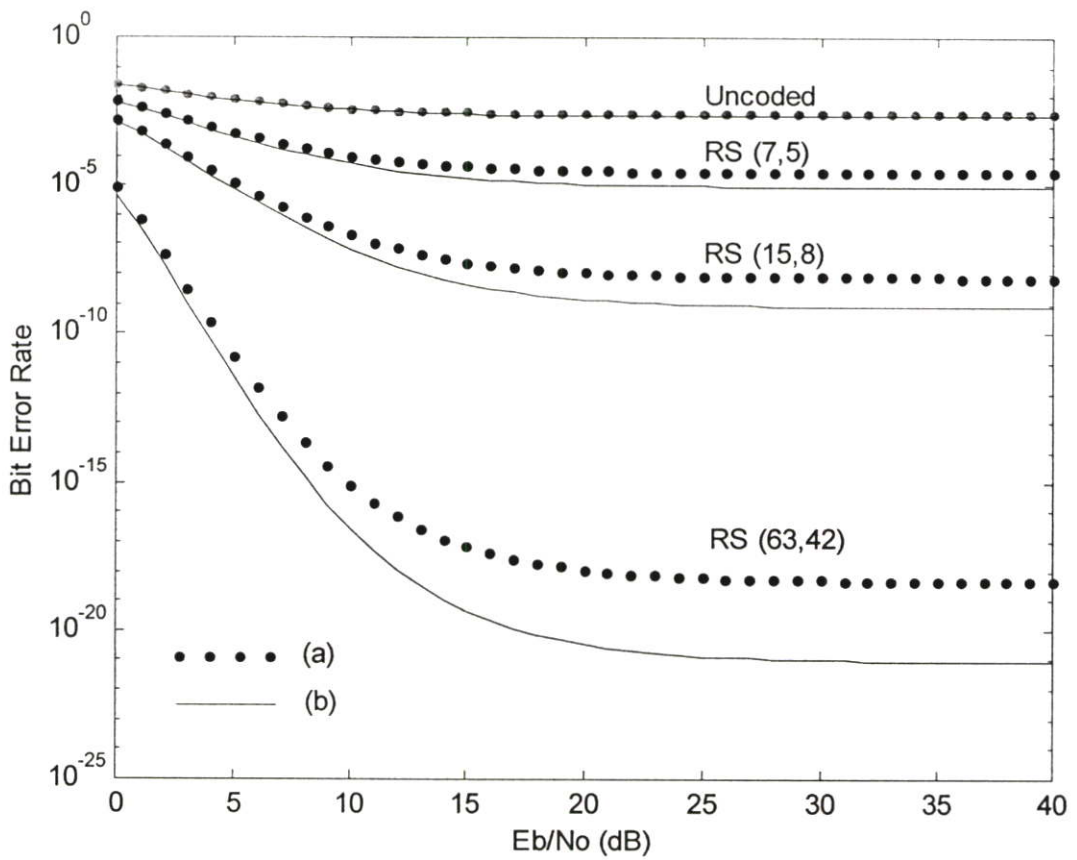
รูปที่ 5.10 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย
 (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$,
 (c) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.5, 2.5, 3.0]$, (d) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.0, 2.0, 2.0]$,
 (e) $\bar{m}_4 = [2.0, 2.5, 3.5, 4.0]$, (f) $\bar{m}_4 = [3.0, 3.0, 3.0, 3.0]$

5.2 ผลของตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคาгами (m) ของระบบที่เข้ารหัสรีดโซโลมอน และผลของค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาด (t)

รูปที่ 5.11-5.12 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ไม่เข้ารหัสกับระบบที่ใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียวกัวยรหัส RS(7,5) RS(15,8) และ RS(63,42) ตามลำดับ โดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคเท่ากับ 2 และ 4 สาขา ตามลำดับ อัตราการลทอนของสัญญาณเป็น 0 และตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคาгамиมีเฉลี่ยเท่ากับ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่ารหัส RS(63,42) มีค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดเท่ากับ 10 RS(15,8) มีค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดเท่ากับ 3 และ RS(7,5) มีค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดเท่ากับ 1 ซึ่งจะเห็นว่าค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดมากขึ้น ความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตจะต่ำลง



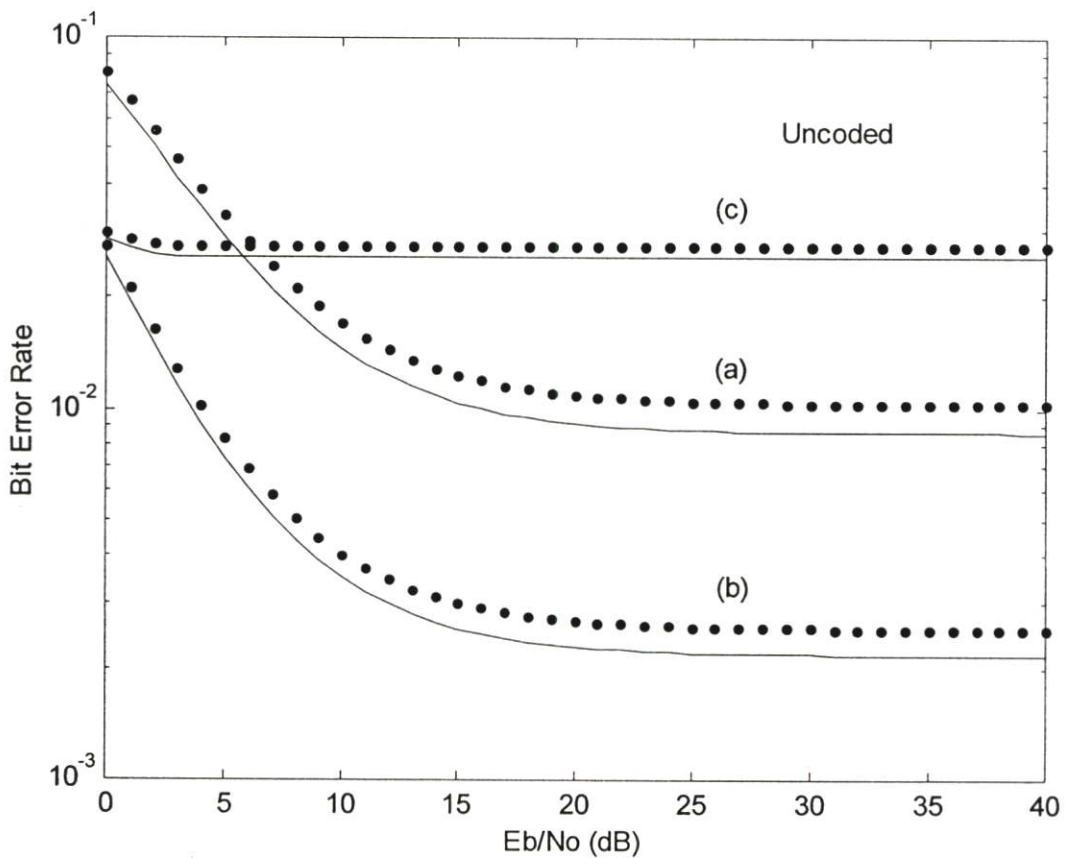
รูปที่ 5.11 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคาгамиมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_2 = [0.5, 1.5]$, (b) $\bar{m}_2 = [1.0, 1.0]$



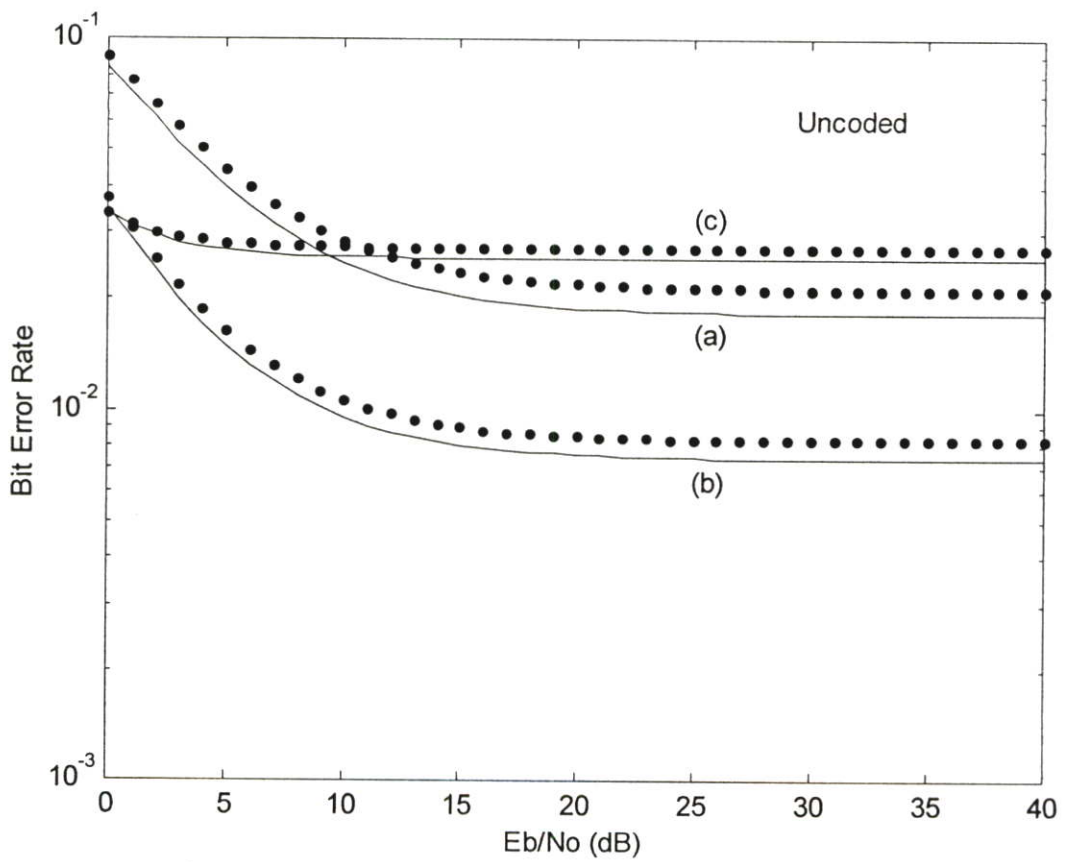
รูปที่ 5.12 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ย (a) $\bar{m}_4 = [0.5, 0.75, 1.25, 1.5]$, (b) $\bar{m}_4 = [1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$

5.3 ผลของการเพิ่มจำนวนเครื่องรับแบบเรค (L)

รูปที่ 5.13-5.14 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ไม่เข้ารหัสโดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 และ 40 ตามลำดับ จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคเท่ากับ 2 4 และ 6 สาขา ตามลำดับ อัตราการลดทอนของสัญญาณเป็น 0 และตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีเฉลี่ยเท่ากับ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าจำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคที่เหมาะสมในวิทยานิพนธ์นี้มีค่าเท่ากับ 4 สาขา

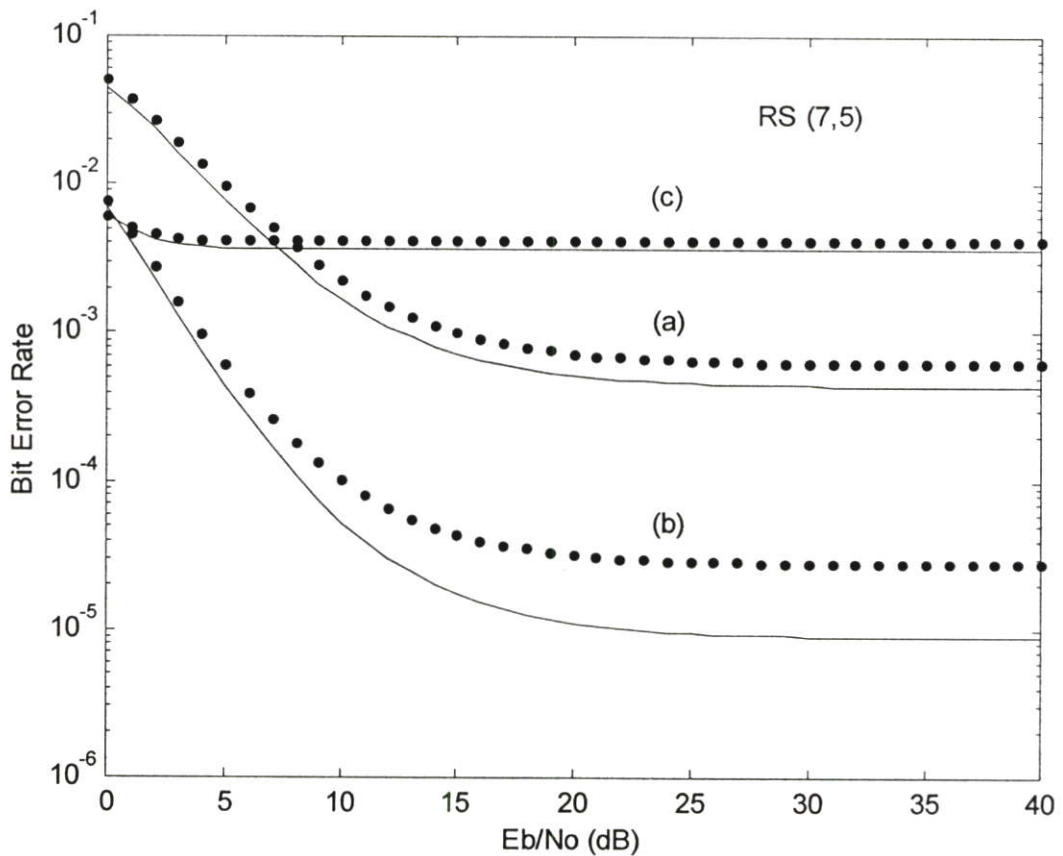


รูปที่ 5.13 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25$, $L = L_r$, $\delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคากามีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$

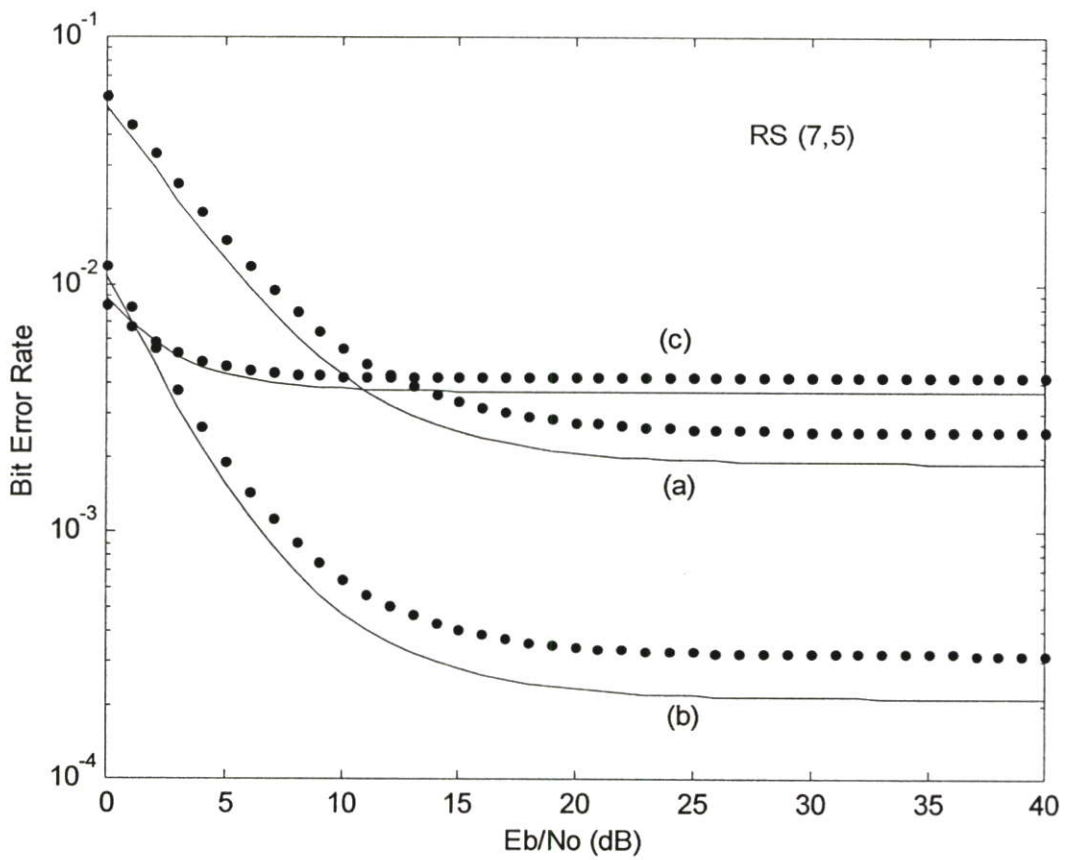


รูปที่ 5.14 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40$, $L = L_r$, $\delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$

รูปที่ 5.15-5.16 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดี่ยวด้วยรหัส RS(7,5) โดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 และ 40 ตามลำดับ จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรกเท่ากับ 2 4 และ 6 สาขา ตามลำดับ อัตราการลดทอนของสัญญาณเป็น 0 และตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคามีเฉลี่ยเท่ากับ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าจำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรกที่เหมาะสมในวิทยานิพนธ์นี้มีค่าเท่ากับ 4 สาขา

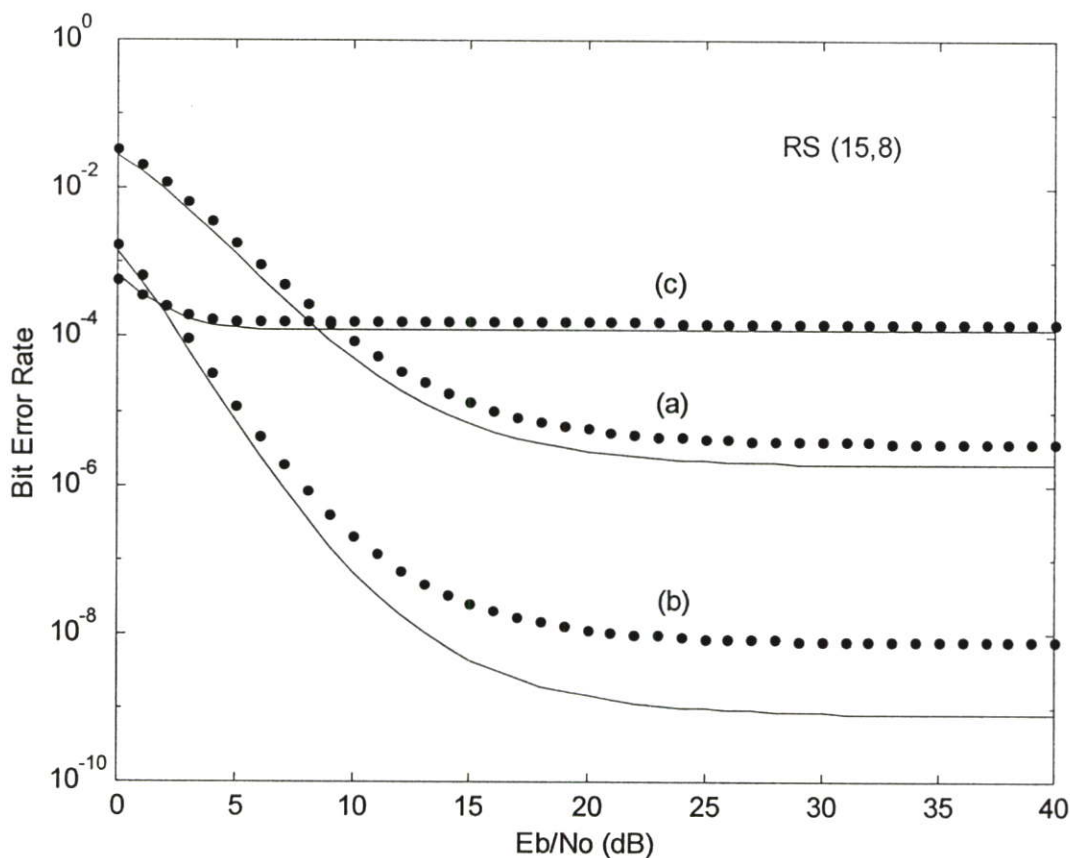


รูปที่ 5.15 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ยกับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 25$, $L = L_r$, $\delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$

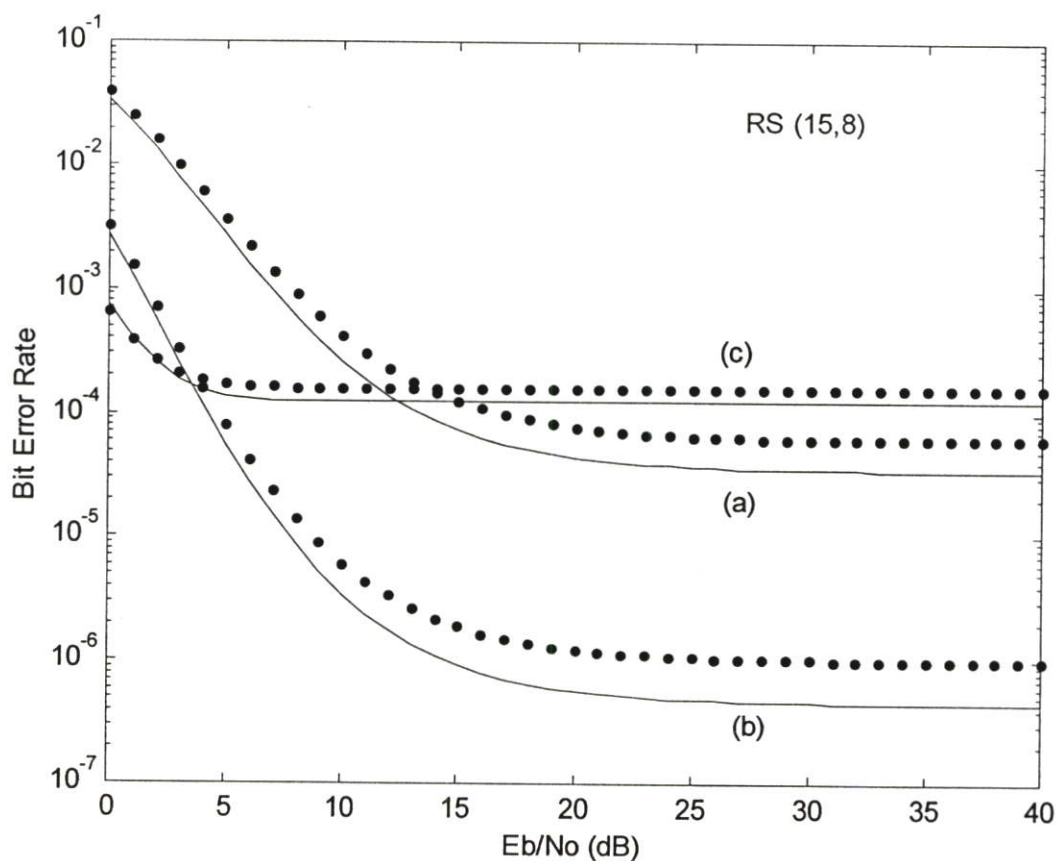


รูปที่ 5.16 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127$, $K = 40$, $L = L_r$, $\delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคาทามิมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$

รูปที่ 5.17-5.18 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียวกับรหัส RS(15,8) โดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 และ 40 ตามลำดับ จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคเท่ากับ 2 4 และ 6 สาขา ตามลำดับ อัตราการลดทอนของสัญญาณเป็น 0 และตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคามีเฉลี่ยเท่ากับ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าจำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคที่เหมาะสมในวิทยานิพนธ์นี้มีค่าเท่ากับ 4 สาขา

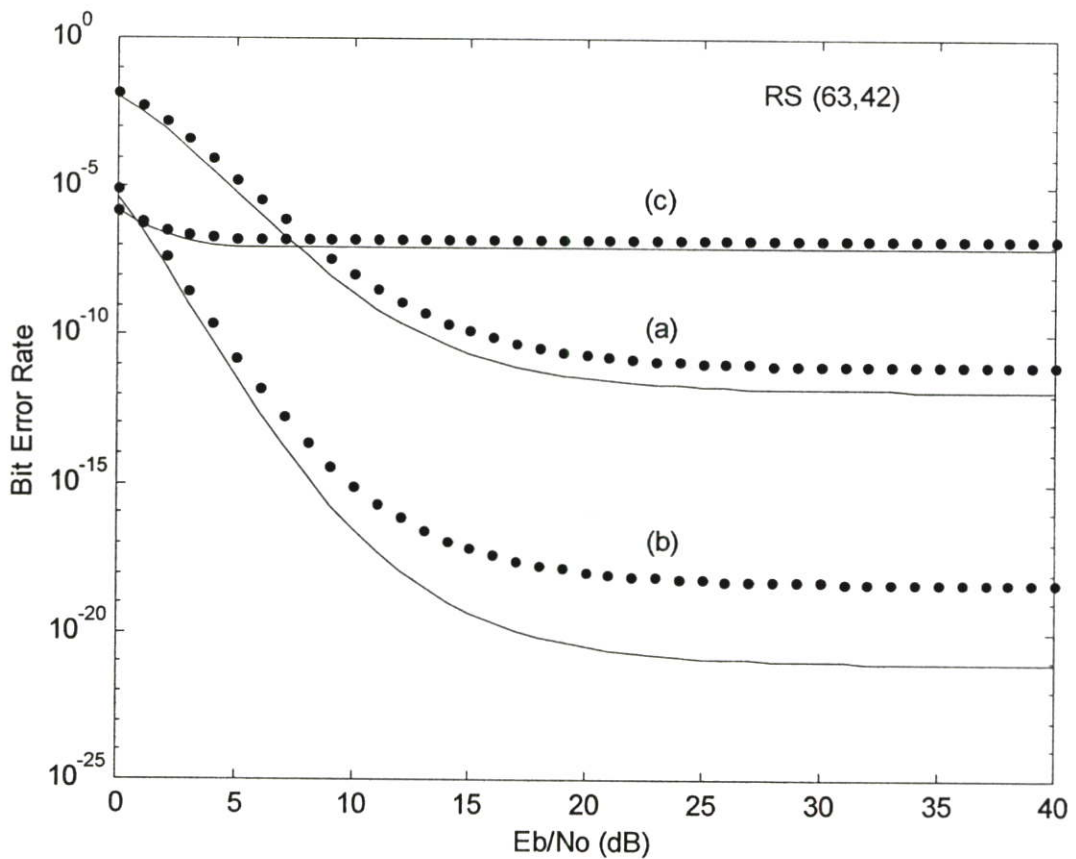


รูปที่ 5.17 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดคิงแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$

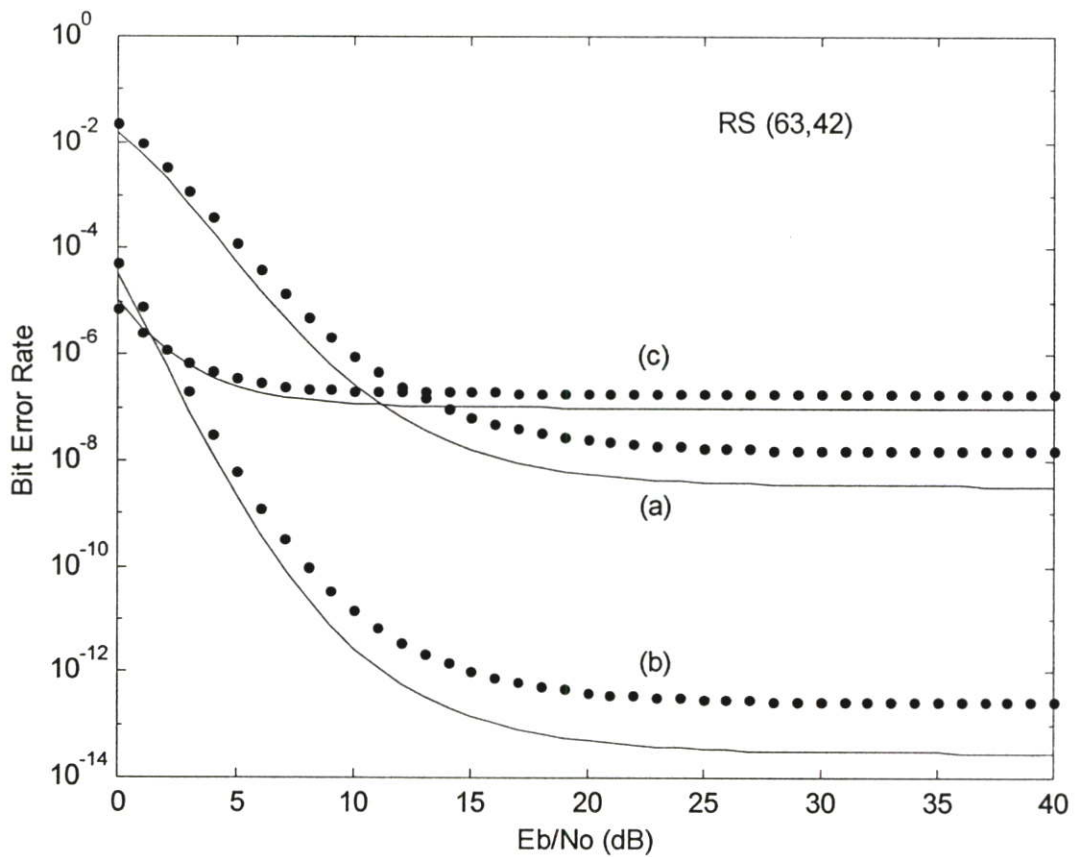


รูปที่ 5.18 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$

รูปที่ 5.19-5.20 แสดงอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเฉียวด้วยรหัส RS(15,8) โดยมีตัวแปรเสริม อัตราการขยายประมวลผล 127 จำนวนผู้ใช้งาน 25 และ 40 ตามลำดับ จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคเท่ากับ 2 4 และ 6 สาขา ตามลำดับ อัตราการลดทอนของสัญญาณเป็น 0 และตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีเฉลี่ยเท่ากับ 1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าจำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคที่เหมาะสมในวิทยานิพนธ์นี้มีค่าเท่ากับ 4 สาขา



รูปที่ 5.19 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ยกับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 25, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$



รูปที่ 5.20 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของอัตราความผิดพลาดบิตค่าเฉลี่ย กับ สัญญาณพลังงานต่อความหนาแน่นสัญญาณรบกวนใน 1 บิต โดยมีตัวแปรเสริม $N = 127, K = 40, L = L_r, \delta = 0$ ตัวแปรเสริมเฟดดิ้งแบบนาคามีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1 (a) $L_r = 2$, (b) $L_r = 4$, (c) $L_r = 6$

บทที่ 6

สรุปผลการวิเคราะห์

ระบบการเข้าถึงหลายทางแบบแบ่งรหัส (CDMA) เป็นระบบที่มีคุณสมบัติสามารถแยกสัญญาณรบกวนออกไปได้ และป้องกันการดักฟัง ทำให้ข้อมูลมีความปลอดภัยของข้อมูลสูง ซึ่งระบบการสื่อสารที่ทำการศึกษาคือได้แก่ วิธีจัดลำดับโดยตรงหรือ Direct Sequence CDMA (DS-SS) โดยระบบที่ทำการศึกษาจะประกอบด้วย เครื่องส่ง ช่องสัญญาณ และเครื่องรับ โดยเครื่องส่งจะประกอบด้วยลำดับข้อมูลและทำการคูณด้วยลำดับรหัสแบบสุ่มเทียม ซึ่งมีรูปแบบเป็นเลขฐานสอง จากนั้นก็จะนำไปมอดูเลตเพื่อส่งข้อมูลให้ได้ระยะทางที่ไกลขึ้น และมีความปลอดภัยจากสัญญาณรบกวนต่างๆ ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้รูปแบบการมอดูเลตเชิงเลขฐานสอง เนื่องจากใช้กำลังส่งที่มีค่าน้อยและเหมาะสมกับการสื่อสารในปัจจุบันที่มีข้อจำกัดด้านแบนด์วิธของช่องสัญญาณ จากนั้นสัญญาณจะส่งผ่านช่องสัญญาณซึ่งก็คืออากาศ จะแสดงลักษณะการแผ่หลายวิถี ทำให้ขนาดของสัญญาณมีการเพิ่มขึ้น แบบจำลองของช่องสัญญาณที่ทำการศึกษาคือแบบจำลองช่องสัญญาณนาคากามิ เนื่องมาจากเป็นแบบจำลองที่ได้มาจากการทดลองสอดคล้องกับสภาพแวดล้อมทั้งในเมือง ชนบท และเมืองใหญ่ เป็นแบบจำลองที่สอดคล้องกับการแจกแจงของแอมพลิจูด สามารถอธิบายการแผ่หลายแบบอื่นๆ ได้ด้วยตัวแปรเสริมเฟดคิง เช่น กรณีที่ตัวแปรเสริมเฟดคิงมีค่าเท่ากับ 0.5 คือการแจกแจงแบบเกาส์เซียนข้างเดียว กรณีที่ตัวแปรเสริมเฟดคิงมีค่าเท่ากับ 1 คือการแจกแจงแบบเรย์เลย์ และกรณีที่ตัวแปรเสริมเฟดคิงมีค่าเข้าใกล้อนันต์ คือสถานะที่ไม่มีการลดทอนของสัญญาณ แต่ในการสื่อสารจะมีสัญญาณรบกวนซึ่งกำหนดเป็นสัญญาณรบกวนเกาส์เซียนแบบบวกรวม จากนั้นสัญญาณจะส่งไปที่เครื่องรับ ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้เครื่องรับแบบเรซซึ่งใช้การรวมแบบ MRC ทำให้อัตราส่วนกำลังสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนมีค่าสูงสุด โดยที่เครื่องรับแบบเรซจะมีตัวชดเชยของการประวิงเวลา เฟส และอัตราการลดทอนด้านแอมพลิจูด ซึ่งการวิเคราะห์ระบบ DS-SS ที่ทำการศึกษาจะประกอบด้วยนิพจน์ของสัญญาณและนิพจน์สัญญาณรบกวน 3 นิพจน์ คือสัญญาณแทรกสอดระหว่างผู้ใช้ สัญญาณแทรกสอดระหว่างกัน และสัญญาณแทรกสอดเนื่องมาจากช่องสัญญาณรบกวนเกาส์เซียนแบบบวกรวม จะได้ค่าแอมพลิจูดอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนใน 1 บิต ทำการวิเคราะห์ระบบโดยใช้การหาค่าเฉลี่ยแบบร่วมหาค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาด และหาอัตราความผิดพลาดบิตเฉลี่ยของระบบซึ่งมีค่าเท่ากับอัตราสัญลักษณ์ข้อมูลผิดพลาด เนื่องจากการมอดูเลตเชิงเลขฐานสอง แต่จากผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าอัตราความผิดพลาดบิตของระบบมีค่ามาก จึงทำการปรับปรุงสมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดบิตของระบบให้ดีขึ้น สามารถทำได้ 3 วิธี คือ การเข้ารหัสแก้ไขความผิดพลาด การใช้โคเวอร์ซิติ และการใช้เทคนิคการวางสลัป แต่จุดค้อยของการใช้โคเวอร์ซิติ คือเปลืองจำนวนชุดตัวรับ และจุด

ค้อยของการวางสลับ คือ ใช้ได้เฉพาะกรณีที่มีความผิดพลาดแบบเบริสต์ (burst error) ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้วิธีการเข้ารหัส RS แก้ไขความผิดพลาด เนื่องจากระหัส RS เป็นรหัสลิเนียร์บล็อก เป็นรหัสที่สามารถใช้กับข้อมูลที่เป็นเลขฐานสองและไม่ใช้เลขฐานสอง เป็นชั้นคลาสพิเศษของรหัส BCH และเป็นรหัสที่มีระยะทางน้อยที่สุดที่เป็นไปได้สำหรับการเข้ารหัสที่อินพุตและเอาต์พุตมีความยาวเท่ากัน ซึ่งใช้เทคนิคการถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว โดยเปรียบเทียบสมรรถนะด้านอัตราผิดพลาดบิตของระบบที่ทำการศึกษา คือ ระบบที่เข้ารหัสกับระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า ตัวแปรเสริมที่มีผลต่อสมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่ทำการศึกษา คือ ตัวแปรเสริมเฟดคิง ซึ่งพบว่าการเปลี่ยนตัวแปรเสริมเฟดคิงของระบบมีผลกับค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาด โดยเมื่อตัวแปรเสริมเฉลี่ยมีค่ามากขึ้น ทำให้ค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดมีค่าลดลง ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีที่เมื่อค่าตัวแปรเสริมเฟดคิงเข้าใกล้อนันต์ คือ ไม่มีการลดทอนของสัญญาณ ทำให้การรับส่งข่าวสารไม่มีความผิดพลาด และยังพบอีกว่าตัวแปรเสริมที่มีค่าแตกต่างกันในแต่ละวิถีซึ่งในงานวิจัยอื่นๆที่ผ่านมาจะให้ตัวแปรเสริมเฟดคิงทุกวิถีเท่ากัน คือยังมีค่าความแตกต่างของตัวแปรเสริมเฟดคิงมีค่ามากขึ้นทำให้อัตราความผิดพลาดบิตมีค่ามากขึ้น

นอกจากนั้นการเข้ารหัส RS แก้ไขความผิดพลาดดีกว่าระบบที่ไม่เข้ารหัส พบว่าเมื่อทำการเข้ารหัสทำให้ระบบดีขึ้นอย่างเห็นได้ชัด โดยสังเกตจากค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดมีค่าลดลง เมื่อเปรียบเทียบที่อัตราส่วนของสัญญาณและสัญญาณรบกวนที่ค่าเดียวกัน จากการเปรียบเทียบสมรรถนะด้านอัตราความผิดพลาดบิตของระบบที่เข้ารหัส RS แก้ไขความผิดพลาด ทั้ง 3 รหัส คือ RS(7,5) RS(15,8) และ RS(63,42) ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าการใช้รหัส RS(63,42) มีความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาด $t=10$ รหัส RS(15,8) มีความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาด $t=3$ และ RS(7,5) มีความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาด $t=1$ ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าค่าความสามารถในการแก้ไขความผิดพลาดสูงสุดจึงทำให้สมรรถนะของระบบดีที่สุด อีกทั้งยังขึ้นอยู่กับค่าอัตรารหัส (Code Rate) ด้วย ซึ่งจะเห็นว่ารหัส RS(15,8) มีค่าอัตรารหัสเท่ากับ 0.53 ซึ่งมีค่าต่ำกว่ารหัส RS(7,5) มีค่าอัตรารหัสเท่ากับ 0.71 โดยจะเห็นว่าค่าอัตรารหัสที่มีค่าต่ำจะทำให้สมรรถนะของระบบดีกว่าอัตรารหัสสูง

สำหรับการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้ตัวแปรเสริมสุดท้ายที่มีผลต่อสมรรถนะของระบบคือจำนวนเครื่องรับแบบเรค โดยที่จำนวนสาขาเครื่องรับแบบเรคมีจำนวนมากขึ้นสมรรถนะของระบบด้านอัตราความผิดพลาดบิตจะมีค่าลดลง และจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจำนวนเครื่องรับแบบเรคที่มีความเหมาะสมสำหรับวิทยานิพนธ์นี้มีค่าเท่ากับ 4 เครื่องรับสาขา

เอกสารอ้างอิง

- [1] N. Nakagami, "The m-distribution a general formula for intensity distribution of rapid," in statistical methods in radio wave propagation, W. G. Hoffman, Ed. Oxford, England: Pergamon, pp. 3-36, 1960.
- [2] J.G. Proakis, Digital Communications. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [3] J. Hagenauer and E. Lutz, "Forward error correction coding for fading compensation in mobile satellite channels," IEEE J. Selected. Areas Commun., Vol. SAC-5, No. 2, pp. 224-236, Feb. 1987.
- [4] S.H. Jamali and T.L. Ngoc, "On the performance of bandwidth efficient RS Coded MPSK signaling over Rayleigh fading channel," Proc.ICC91 Denver, June 23-26, pp. 1090-1094, 1991.
- [5] K.T. Wu and S.A. Tsaur, "Selection Diversity for DS-CDMA Communication on Nakagami fading channels," IEEE Trans. Veh.Techonl., Vol. 43, No. 3, pp. 428-443, Aug.,1994.
- [6] T. Eng and L.B. Milstein, "Coherent DS-CDMA Performance in Nakagami Multipath fading," IEEE Trans. Commun.,Vol. 43, No. 2-4, pp. 1134-1143, 1995.
- [7] H. Xiang, "Binary code division multiple access system operating in multiple fading, noisy channels," IEEE Trans. on Commun., Vol. COMM-33, No. 8, pp. 775-784, Aug.,1985.
- [8] G. Efthymoglou and V. Aalo, "Performance analysis of Coherent DS-CDMA Systems in a Nakagami Fading Channel with Arbitrary Parameters," IEEE Trans. Veh. Technol., Vol. 46, No. 2, pp. 289-297, May.,1997.
- [9] C.S. Gardner and J.A. Orr, "Fading Effects on the Performance of Spread Spectrum Multiple Access Communication System," IEEE Trans. communication, Vol. COMM-27, pp. 43-49., Jan .,1979.
- [10] G.L. Turin, "The Effects of Multipath and Fading on the Performance of Direct Sequence CDMA Systems," IEEE J. Selected Areas Communication, Vol. COMM-35, pp. 1189-1198, Nov.,1987.
- [11] D.E. Borth and M.B. Pursley, "Analysis of Direct sequence Spread Spectrum Multiple Access Communication Over Rician Fading channels," IEEE Trans. Communication, Vol. COMM-27, pp. 1566-1577, Oct.,1979.

- [12] H. Suzuki, "A Statistical Model fo Urban Radio Propagation," IEEE Trans. communication, Vol. COMM-25, pp. 673-680, July.,1977.
- [13] E.A. Geraniotis and M.B. Pursley, "Performance Coherent Direct sequence Spread Spectrum Communications Over Specular Multipath fading Channels," IEEE Trans. Communication, Vol. COMM-33, pp. 502-508, June., 1985.
- [14] M. Kavehrad and B. Ramamurthi, "Direct sequence spread spectrum with DPSK modulation and diversity for indoor wireless communications," IEEE Trans. Communication, Vol. COMM-35, pp. 224-236, Aug., 1987.
- [15] K.T. Wu and S.A. Tsaur, "Selection Diversity for DS-CDMA Communication on Nakagami fading channels," IEEE Trans. Vehicular Technology, Vol. 43, No. 3, pp. 432-443, Aug., 1994.
- [16] P.J. Crepeau, "Uncoded and Coded Performance of MFSK and DPSK in Nakagami Fading Channels," IEEE Trans. Communication, Vol. COMM-40, pp. 487-493, Mar., 1992.
- [17] W.E. Ryan and P. Conoval., "A method of analysis for interlerleaved Reed-Solomon coding with erasure decoding on burst error channel," IEEE Trans. Communication, Vol. COMM-41, pp. 430-434, Mar., 1993.
- [18] I.S. Gradhtteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals Series and Products, New York Academic Press Inc, 1980.
- [19] A. Papoulis, Proabability Random Variables and Stochastic Process, New York, McGraw-Hill, 1992.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

สูตรทั่วไปของการแจกแจงความเข้มของสัญญาณ การแจกแจง
แบบนาคากามิ

การแจกแจงแบบนาคากามีเสนอแนวคิดและหลักการทั่วไปของการศึกษาด้านความเข้มของสัญญาณและเกิดการเฟดดิ้งของสัญญาณ วิธีการได้มาของการแจกแจงนี้ได้มาจากทดลองย่านความถี่สูง การแจกแจงแบบนี้จะเหมาะกับชั้นบรรยากาศไอโอโนสเฟียร์ และโทรโพสเฟียร์สามารถยืนยันได้ว่ามาจากการทดลองและการสังเกต โดยทฤษฎีของการแจกแจงแบบลือกนอร์มัลเป็นรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงแบบนาคากามี นอกจากนี้วิธีการที่นำเสนอจะปรับปรุงเป็นสูตรทั่วไปในการอธิบายการแจกแจงแบบอื่นๆ สุดท้ายแสดงความสัมพันธ์แบบอื่นๆกับการแจกแจงแบบนาคากามีด้วยสูตรของ m และอธิบายค่าตัวแปรเสริมของการแจกแจงแบบนาคากามี

ก.1 บทนำ

ปัจจุบันวิศวกรสื่อสารได้ศึกษาและเน้นความสำคัญรายละเอียดไม่เพียงแต่ด้านความเข้มของสัญญาณ แต่จะมุ่งเน้นผลของการเฟดของสัญญาณทางสถิติ ซึ่งมีการศึกษาทดลองไว้เป็นจำนวนมากและรองรับด้วยทฤษฎีทางด้านความเข้มของสัญญาณภายใต้การเกิดเฟดดิ้งของสัญญาณ ซึ่งได้มีการอธิบายการแจกแจงด้านความเข้มของสัญญาณ ดังนี้

การแจกแจงแบบเรย์เลย์

$$p(R) = \frac{2}{R} \exp(-R^2 / \Omega) \quad (\text{ก.1})$$

โดยที่ $\Omega = \langle R^2 \rangle$ เป็นค่าเฉลี่ยของ R^2 ซึ่งค้นพบโดย Lord Rayleigh [3] และการทดลองของ Pawsey [3] พิสูจน์ด้วยการทดลองยืนยันการแจกแจงแบบเรย์เลย์ในโหมดของการแจกแจง และการกระจายคลื่น

การแจกแจงแบบลือกนอร์มัล

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-(x-\bar{x})^2 / 2\sigma_x^2} \quad (\text{ก.2})$$

โดยที่ x คือความเข้มของสัญญาณในเทอมเดซิเบล (dB) ค้นพบโดย Grosskopf [3] ซึ่งได้มาจากสังเกตในช่วงเวลาที่นานๆ โดยมีค่าทางทฤษฎีสันับสนุนได้ว่าเป็นการแจกแจงซึ่งมีคุณสมบัติของลือกการิทึมของจำนวนเต็มบวกค่าต่างๆกัน และการแจกแจงแบบ m ได้นำเสนอโดยนาคากามี ซึ่งอธิบายการแจกแจงของสัญญาณในเทอมของค่าเฉลี่ยความเข้มของสัญญาณซึ่งอธิบายการศึกษาของ Grosskopf และใช้ได้ในช่วงที่กว้างกว่า มีสมการดังนี้

$$p(R) = \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} e^{-(m/\Omega)R^2} \quad (\text{ก.3})$$

โดยที่ $\Omega = \langle R^2 \rangle$ และ

$$m = \frac{\overline{(R^2)^2}}{(\overline{R^2} - R^2)^2} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{ก.4})$$

เมื่อ m เป็นค่าส่วนกลับของค่าอันอร์เมลไลซ์ของแวลเรียนซ์ของ R^2 ซึ่งค้นพบโดยนาคากามิ โดยใช้ในช่วงกว้างของการทดลองย่านความถี่สูง และซึ่งได้ยืนยันผลการศึกษาโดย Wambeck และ Ross [3] โดยการค้นพบนี้ทำให้ยืนยันได้ว่า การแจกแจงแบบเรย์เลย์เหมือนการแจกแจงแบบนาคากามิ เมื่อ $m=1$ และแสดงได้ในรูปแบบดังนี้

$$p(R) = \frac{2R}{\sigma} e^{-(R^2+R_0^2)/\sigma} I_0\left(\frac{2RR_0}{\sigma}\right) \quad (\text{ก.5})$$

และ

$$p(R) = \frac{2R}{\sqrt{\alpha\beta}} e^{-(R^2/2)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)} I_0\left[\frac{R^2}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\right] \quad (\text{ก.6})$$

ค้นพบโดย Nakagami และ Nakagami กับ Sasaki [3] ตามลำดับ สำหรับในทางทฤษฎีเรียกปัญหาที่พบว่าการแทรกแซงแบบสุ่ม ซึ่งเป็นปัญหาหลักของการเฟคของสัญญาณ ในทางวิศวกรรมสื่อสารแล้ว เรียกว่าการแจกแจงแบบ n และการแจกแจงแบบ q ตามลำดับ นอกจากนี้แล้ว Nakagami Wada และ Fujimura [3] ได้พิสูจน์ว่าการแจกแจงแบบ m จะเป็นผลเฉลยทั่วไปในการแก้ปัญหาทางเวกเตอร์สุ่ม นอกจากนี้แล้วการการแจกแจงแบบนาคากามิ m สามารถอธิบายการแจกแจงแบบ n และ q ได้ดี และมีความเหมาะสมโดยที่การแจกแจงแบบ m จะเป็นฟังก์ชันการแจกแจงร่วม (joint distribution) ของตัวแปร 2 ค่าและเป็นไปตามการแจกแจงแบบ m

ก.2 การได้มาซึ่งการแจกแจงแบบ m และคุณสมบัติพื้นฐาน

ก.2.1 การได้มาซึ่งการแจกแจงแบบ m

ก.2.1.1 ช่วงเวลาของการสังเกต

การสังเกตผลของการเฟดดิ้งของสัญญาณตามลำพัง ตัวอย่างเช่นการไม่คิดผลของการเฟดดิ้งอย่างช้าๆระยะเวลาของการสังเกตควรจะเลือกให้เหมาะสมเนื่องจากผลของการเฟดดิ้งอย่างช้าๆจะมีลักษณะเด่นเมื่อเวลาในการศึกษามีค่ามากๆดังนั้นในทางสถิติควรจะเลือกช่วงเวลาให้มีค่าน้อยๆซึ่งทางปฏิบัติต้องพยายามเลือกช่วงเวลาให้เหมาะสม และความยาวของช่วงเวลานี้จะขึ้นอยู่กับหลายปัจจัยเช่น ความถี่ เส้นทาง ช่วงเวลาในวันนั้นๆ หลังจากทำการศึกษาแล้วจะพบว่าในการทดลองหนึ่งๆค่าเวลาที่เหมาะสมคือ 3-7 นาที

ก.2.1.2 เครื่องมือ

ในการทดลองใช้สายอากาศแบบตั้งซึ่งมีความยาว 1.5 เมตร และเอาต์พุตที่ได้จะมีการขยาย การบีบอัดตัวแบบล็อก และการตีเทคชันขอบด้วยแผ่นป้ายเบน (deflecting plate) ของหลอดรังสีแคโทด (cathode ray tube) ซึ่งจะมีการเคลื่อนตำแหน่งของจุดบนจอฟลูออเรสเซนต์ ซึ่งก็คือการแปรผันของสัญญาณ และทำการบันทึกบนแผ่นของจอภาพด้านหน้าของจอ และการแจกแจงแบบนี้ได้มาจากการวัดค่าความหนาแน่นของน้ำยาเคลือบฟิล์มของแผ่น ซึ่งจะได้ค่าคงตัวทางเวลามีค่ามากที่สุดเท่ากับ 2 ms ตัวอย่างผลการสังเกตและการทดลองแสดงดังตาราง

ตารางที่ ก.1 ผลการสังเกตและการทดลองของนาคากามิ

สถานี	ระยะทาง (km)	สัญญาณ	ความถี่ (kHz)	วันที่	จำนวน แผ่น	จำนวน แผ่น $m < 0.5$
Changehum	1,500	JMP2	10,065	Apr. 1941	34	0
Pulau	3,200	JRAK	11,740	Oct. 1941	15	0
San Francisco	3,240	KNY/	19,080	Nov. 1940- Oct. 1941	67	1
		KGEN/	9,670	Oct. 1941	17	0
		KWU	15,355	Oct. 1941	14	0
Berlin	8,900	DFZ	20,020	Apr. 1941	19	0
Taipei	2,200	JIB	10,535	Oct. 1941- Dec. 1941	265	0

ก.2.1.3 การได้มาของฟังก์ชันการแจกแจง

จากผลการทดลองนำไปแสดงความสัมพันธ์ด้วยกราฟในแกนล็อก-ล็อก ซึ่งก็คือพิกัดที่หนึ่ง และพิกัดที่สอง ซึ่งแทนด้วยเส้นตรงที่มีความชันเป็นค่า m ต่างๆดังรูป ก.1 ซึ่งแสดงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$p'(x) = \exp\left[m\left(1 + \frac{2x}{m} - e^{2x/m}\right)\right] \quad (\text{ก.7})$$

โดยที่ x คือ ความเข้มของสัญญาณเป็น เดซิเบล

$$M \text{ คือ } 20 \log_{10} e = 8.686$$

ทำการนอร์มัลไลซ์สมการที่ (ก.7) แล้วแปลงเป็น เดซิเบล จะได้

$$p(x) = \frac{2m^m}{M\Gamma(m)} \exp\left[m\left(\frac{2x}{M} - e^{2x/m}\right)\right] \quad (\text{ก.8})$$

จากตารางที่ ก.1 จะเห็นได้ว่ามีค่า m ที่เป็นไปตามเงื่อนไขคือ

$$m \geq \frac{1}{2} \quad (\text{ก.9})$$

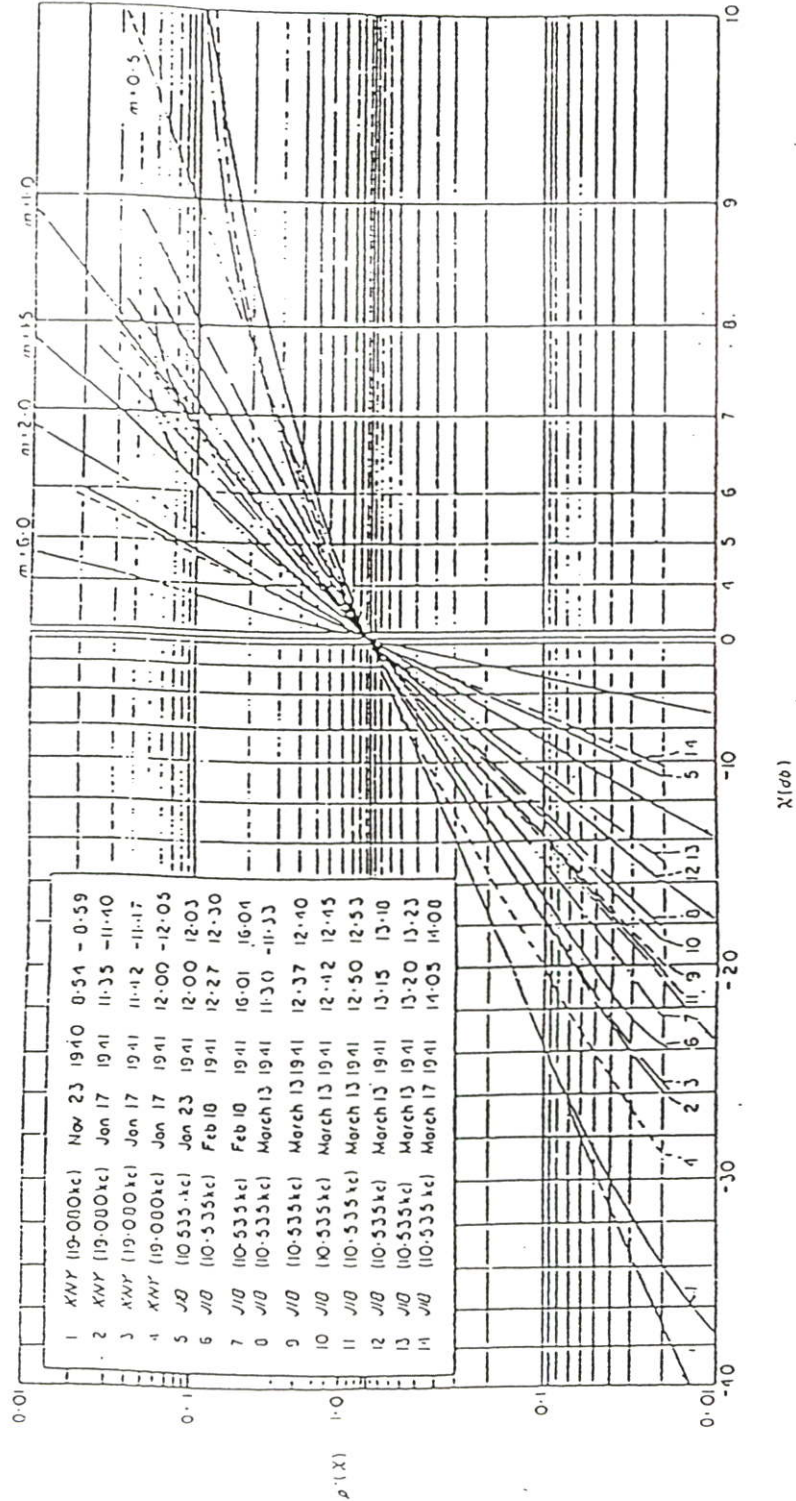
โดยการแปลงจาก $e^{x/M} = X = R/\Omega^{1/2}$ ซึ่ง $\Omega = \langle R^2 \rangle$ เป็นค่าเฉลี่ยของค่ากำลังสองของความเข้มของสัญญาณ สุดท้ายจะได้การแจกแจงดังนี้

$$p(x) = \frac{2m^m x^{2m-1} e^{-mx^2}}{\Gamma(m)} = M(x, m, 1) \quad (\text{ก.10})$$

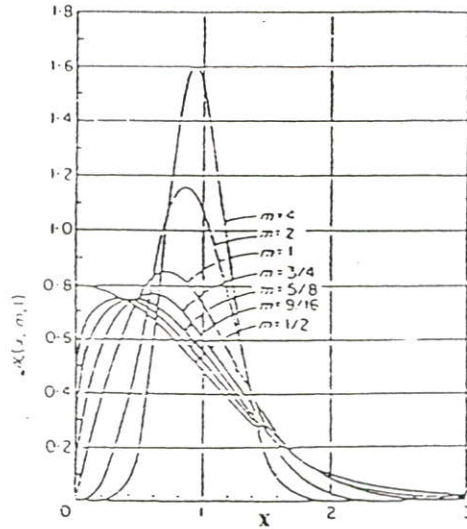
โดยความสัมพันธ์ระหว่าง $M(x, m, 1)$ และตัวแปรสุ่ม (x) แสดงได้ดังรูปที่ ก.2 และสมการที่ ก.10 จัดรูปใหม่ได้ว่า

$$p(R) = \frac{2m^m R^{2m-1} e^{-(m/\Omega)R^2}}{\Gamma(m)\Omega^m} = M(R, m, \Omega) \quad (\text{ก.11})$$

โดยสมการที่ ก.11 เป็นการรวมกรณีที่เป็นการแจกแจงแบบเกาส์เซียนข้างเดียว เมื่อ $m=0.5$ และการแจกแจงแบบเรย์เลย์เมื่อ $m=1$ ตามลำดับ



รูปที่ ก.1 การแจกแจงแบบ m



รูปที่ ก.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $M(x,m,1)$ และตัวแปรสุ่ม (x)

ก.3 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบ m

ก.3.1 ค่ามากที่สุดของ $M_2(x,m,0)$

$$p(0) = \frac{2m^m}{M\Gamma(m)e^m} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \quad (\text{ก.12})$$

ที่ $x=0$ หรือ $R=\Omega^{1/2}$

จากสมการที่ ก.12 ถ้า $x \leq M$ ทำให้ $M_2(x,m,0)$ มีค่าเข้าใกล้การแจกแจงแบบล็อกนอร์มัล

$$p(x) = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \exp\left[-2m\left(\frac{x}{M}\right)^2\right] \quad (\text{ก.13})$$

นอกจากนี้ $M_2(x,m,0)$ สามารถแสดงได้ในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$p(\tau) = \frac{2m^m}{M\Gamma(m)} \exp\left[m\left(\frac{2(\tau - \tau_0)}{M} - \exp(2(\tau - \tau_0)/M)\right)\right] = u_\tau(\tau, m, \tau_0) \quad (\text{ก.14})$$

โดยที่ τ และ τ_0 เป็นความเข้มของสัญญาณใน dB และ $R=\Omega^{1/2}$ ซึ่งมีค่าความเข้มเป็น 1 และฟังก์ชันการแจกแจงรวม จะกำหนดดังนี้

$$M(x, m) = \int_{-\infty}^x M_z(x, m, 0) dx \quad (\text{ก.15})$$

สมการฟังก์ชันคุณลักษณะ

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u_z(x, m, 0) e^{-2x} dx = \frac{\Gamma\left(m - \frac{M}{2} z\right)}{\Gamma(m)} m^{\left(\frac{M}{2}\right)z} \quad (\text{ก.16})$$

โมเมนต์และเวเรียนซ์

$$\overline{R^n} = \frac{\Gamma\left(m + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{\frac{n}{2}}, \overline{R^{2n}} = \left(\frac{\Omega}{m}\right)^n (m+n-1)(m+n-2)\dots m \quad (\text{ก.17})$$

$$V(R^2) = \frac{\Omega^2}{m}, V(R) = \Omega \left[1 - \left(\frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{m}\Gamma(m)} \right)^2 \right] \cong \frac{\Omega}{5m} \quad (\text{ก.18})$$

โดยที่ n' และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สำหรับโมเมนต์และเวเรียนซ์จําคูรูปในหน่วย dB แสดงได้ดังนี้

$$\overline{x} = \frac{M}{2} \{\varphi(m) - \log_e m\} \quad (\text{ก.19})$$

$$\overline{x^2} = \left(\frac{M}{2}\right)^2 \{\varphi(m) - \log_e m\}^2 + \varphi'(m) \quad (\text{ก.20})$$

$$\overline{x^3} = \left(\frac{M}{2}\right)^3 \{\varphi(m) - \log_e m\}^3 + 3\varphi'(m) \{\varphi(m) - \log_e m\} + \varphi''(m) \quad (\text{ก.21})$$

โดยที่ $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ และ $\varphi''(x)$ คือ ฟังก์ชันแกมมาลำดับที่สอง แกมมาลำดับที่สาม และ แกมมาลำดับที่สี่ ตามลำดับ

ก.3.2 ตัวแปรเสริม m

ตัวแปรเสริม m แสดงได้ในพจน์ดังนี้

$$m = \frac{\Omega^2}{V(R^2)} = \frac{1}{V_N(R^2)} \quad (\text{ก.22})$$

โดย $V_N(R^2)$ คือ นอร์มัลไลซ์แวกเรียนซ์ของ R^2 ดังนั้น m คือส่วนกลับค่านอร์มัลไลซ์แวกเรียนซ์ของ R^2 ความสัมพันธ์ในการเฟดของสัญญาณในช่วง $N(P)$ หรือ $X_2 - X_1$

$$P = \int_{-\infty}^{x_1} M_z(x, m, 0) dx = \int_{x_2}^{\infty} M_z(x, m, 0) dx \quad (\text{ก.23})$$

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้ว่า

$$N(P) = 10 \left(\frac{1}{m} + 0.2 \right) \log_{10} \frac{1}{P} + 1.5 \text{dB}, (m < 8) \quad (\text{ก.24})$$

จะเห็นได้ว่า $N(P)$ เป็นสัดส่วนเชิงเส้นกับ $1/m$ หรือรูปร่างเฟดดิ้ง (fading figure)

ภาคผนวก ข.
แบบจำลองเครื่องรับแบบเรค

สำหรับช่องสัญญาณเลือกเฉพาะความถี่ (frequency selective channel) จะแทนแบบจำลองนี้ด้วยสายการประวิงเวลา (tapped delay line) ซึ่งแต่ละจุดเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นค่าถ่วงน้ำหนักสาย (tapped weight) หรือ $\{c_n(t)\}$ จะเป็นอิสระต่อกัน ถ้ากำหนดให้มีจำนวนชุดการประวิงเวลาเท่ากับ L ชุดและส่งสัญญาณที่เหมือนกัน เครื่องรับจะรับสัญญาณด้วยการประวิงเวลาออกไปครั้งละ T ซึ่งเครื่องรับสัญญาณแบบนี้จะทำให้สัญญาณที่รับได้มีความถูกต้องมากขึ้น เรียกเครื่องรับแบบนี้ว่าเครื่องรับแบบไดเวอร์ซิตี (diversity)

พิจารณาสัญญาณเลขฐานสองในช่องสัญญาณกำหนดให้มี 2 สัญญาณซึ่งมีพลังงานเท่ากันคือ $S_{11}(t)$ และ $S_{12}(t)$ ซึ่งอาจเป็นสัญญาณตั้งฉาก (orthogonal) หรือสัญญาณตรงกันข้าม (antipodal) โดยช่วงเวลา T จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $T \gg T_m$ เมื่อ T_m คือ สัญญาณที่มีการแผ่กว้าง (spreading signal) และไม่คิดผลของการแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์ (intersymbol interference) ของการเพดคิงหลายวิธี เนื่องจากแบนด์วิดท์ของสัญญาณมีค่ามากกว่าแบนด์วิดท์รวมนัยของช่องสัญญาณ ดังนั้นสัญญาณที่รับได้คือ

$$r_1(t) = \sum_{k=1}^K c_k(t) S_{1i} \left(t - \frac{k}{W} \right) + z(t)$$

เมื่อ $c_k(t)$ คือ การถ่วงน้ำหนักสาย

$S_{1i}(t)$ คือ สัญญาณที่ส่ง

W คือ แบนด์วิดท์ของสัญญาณ

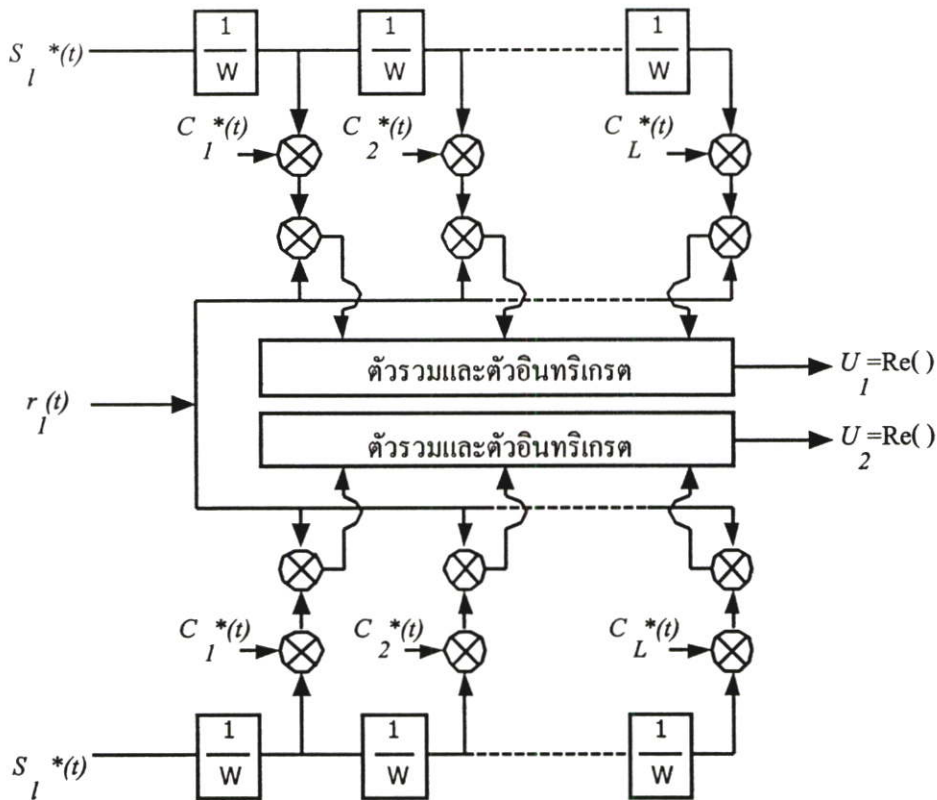
$z(t)$ คือ สัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์

กำหนดค่าการถ่วงน้ำหนักของช่องสัญญาณ ดังนั้นการรับแบบเหมาะสมประกอบด้วยวงจรกรองเข้าคู่ 2 ชุด ของ $V_1(t)$ และ $V_2(t)$ วงจรซีกตัวอย่าง และวงจรตัดสินใจ ซึ่งจะทำการเลือกสัญญาณให้สอดคล้องกับเอาต์พุตที่มีค่าสูงสุด และการรับอีกแบบที่นิยมใช้คือ การใช้สหสัมพันธ์ข้ามโดยมีตัวแปรการตัดสินใจ (decision variable) สำหรับการตีเทคแบบรวมนัยของสัญญาณเลขฐานสอง คือ

$$U_m = \text{Re} \left[\int_0^{\infty} r_1(t) V_m^*(t) dt \right]$$

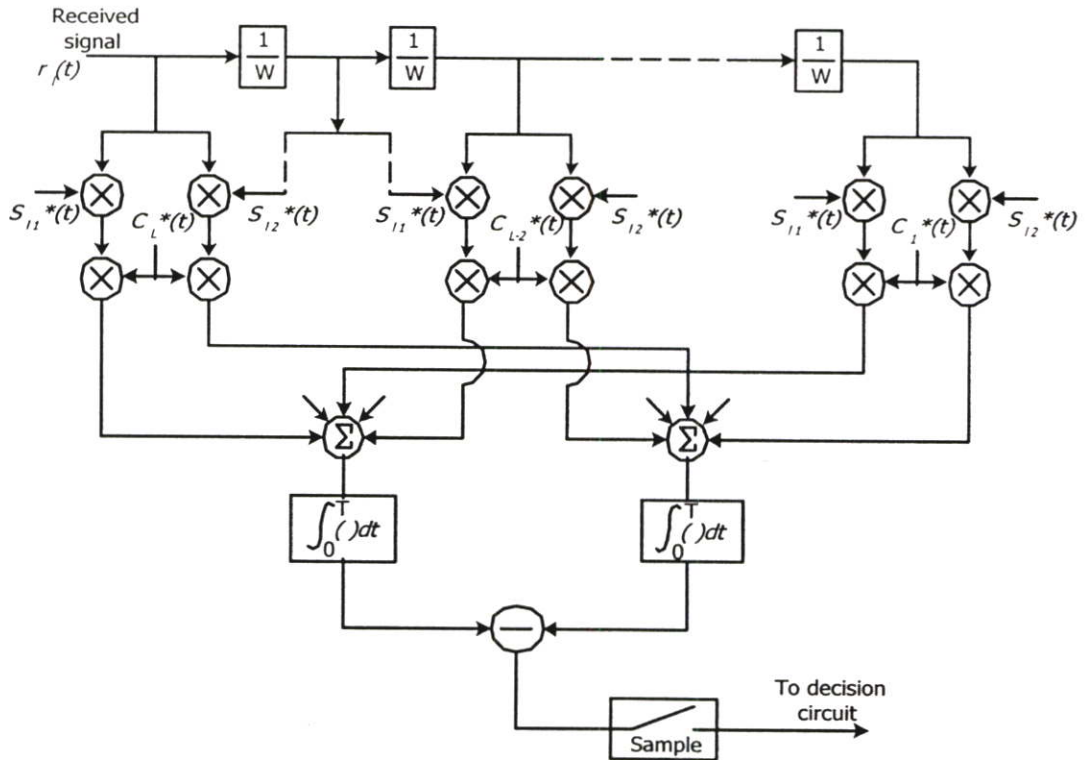
โดยที่ $m=1,2$ และ U_m จะมีโครงสร้างดังรูป

$$U_m = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L \int_0^{\infty} r_1(t) c_k^*(t) S_{1i} \left(t - \frac{k}{W} \right) dt \right]$$



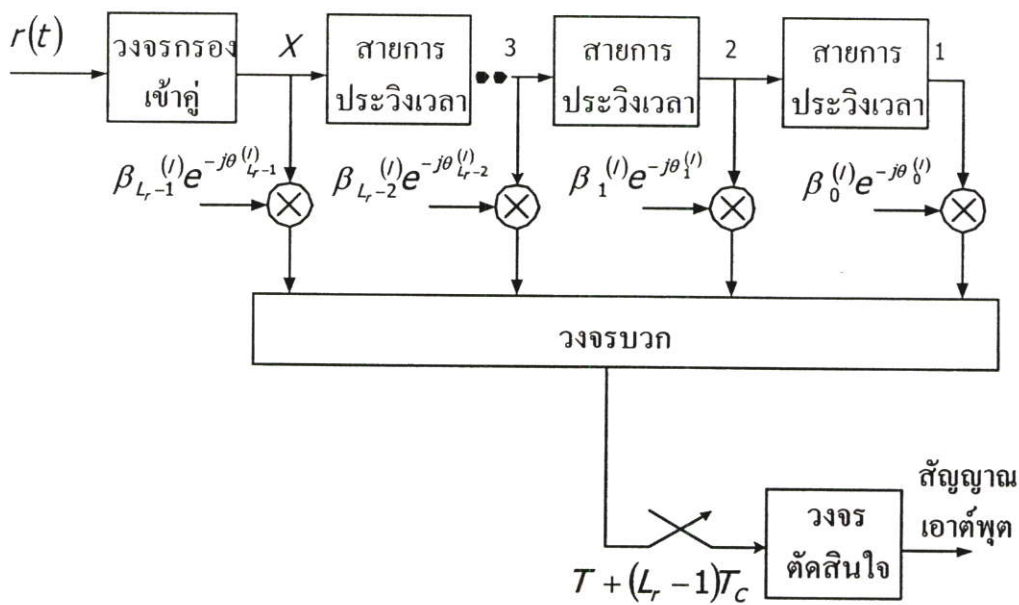
รูปที่ ข.1 การตีมอดูเลตสำหรับสัญญาณแถบกว้างโดยใช้การประวิงเวลาเป็นตัวอ้างอิง

จะเห็นว่าเครื่องรับแบบนี้จะมีสัญญาณอ้างอิง 2 สัญญาณ ($S_{11}(t), S_{12}(t)$) ที่มีการประวิงเวลาไป และมีความสัมพันธ์กับสัญญาณที่รับเข้ามาอีกรูปแบบคือการใช้เครื่องรับที่มีสายการประวิงเวลาชุดเดียว (single delay line) โดยนำสัญญาณที่รับมาประวิงเวลาครั้งละ $\frac{1}{W}$ จำนวน L ชุด ดังนั้นสัญญาณแต่ละชุดของเครื่องรับแบบแรกจะสัมพันธ์กันด้วยพจน์ของ $C_k(t) S_{1m}^*(t)$ เมื่อ $k=1,2,\dots,L$ และ $m=1,2$ และมีโครงสร้างดังรูป



รูปที่ 2 ข. การคิมอดูเลตสำหรับสัญญาณแถบกว้างแบบฐานสองโดยใช้การประวิงเวลาสัญญาณที่รับเป็นตัวอ้างอิง

แบบจำลองที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ คือ เครื่องรับแบบเรด แต่แต่ละชุดของการประวิงเวลามีการประวิงเวลาเท่ากับ T_c (แต่ถ้าเป็น DPSK จะมีการประวิงเวลาเท่ากับ $2T_c$) องค์ประกอบภายในประกอบด้วย วงจรบวก วงจรอินทิเกรต วงจรชักตัวอย่าง และวงจรตัดสินใจ อินพุตของเครื่องรับแบบเรด คือ สัญญาณที่รับเข้ามา (received signal : $r(t)$) โครงสร้างภายในประกอบด้วยวงจรกรองเข้าคู่ 1 ชุด และชุดการประวิงเวลาจำนวน 3 ชุด ทั้งนี้สัญญาณที่จุดต่างๆ จะเป็นดังนี้คือ



รูปที่ ข.3 โครงสร้างของเครื่องรับแบบเรด

สัญญาณที่จุด 1:

$$U_1 = \int_0^T r(t) \beta_0^{(1)} a^{(1)}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt$$

เมื่อ $r(t)$ คือ สัญญาณอินพุตที่รับเข้ามาและเป็นอินพุตของเครื่องรับแบบเรด
 $\beta_0^{(1)}$ คือ ค่าถ่วงน้ำหนักการประวิงเวลา
 $a^{(1)}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)})$ คือ พจน์ของสัญญาณที่มีความสัมพันธ์กัน

สัญญาณที่จุด 2 ซึ่งมีการประวิงเวลาไป T_c :

$$U_2 = \int_0^{T+T_c} r(t) \beta_1^{(1)} a^{(1)}(t-T_c) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt$$

สัญญาณที่จุด 3 ซึ่งมีการประวิงเวลาไป $(n-1)T_c$:

$$U_3 = \int_0^{T+(n-1)T_c} r(t) \beta_{n-1}^{(1)} a^{(1)}(t-(n-1)T_c) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt$$

สัญญาณที่จุด x :

$$U_x = \int_0^{T+nT_c} r(t) \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t-nT_c) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt$$

นำสัญญาณทุกจุดมารวมกันด้วยวงจรวก ดังนั้น

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_x$$

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T r(t) \beta_0^{(1)} a^{(1)}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt + \int_{T_c}^{T+T_c} r(t) \beta_1^{(1)} a^{(1)}(t-T_c) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt \\ &+ \int_{(n-1)T_c}^{T+(n-1)T_c} r(t) \beta_{n-1}^{(1)} a^{(1)}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt + \dots + \int_{nT_c}^{T+nT_c} r(t) \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t-nT_c) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt \end{aligned}$$

ซึ่ง U สามารถเขียนในนิพจน์ของผลรวม คือ

$$U = \sum_{n=0}^{L_c-1} \int_{nT_c}^{T+nT_c} r(t) \beta_n^{(1)} a^{(1)}(t-nT_c) \cos(\omega_c t + \varphi_n^{(1)}) dt$$

ภาคผนวก ค.

ทฤษฎีความน่าจะเป็น และ กระบวนการเฟ้นสุ่ม

ค.1 ทฤษฎีความน่าจะเป็น และ กระบวนการเฟ้นสุ่ม

ทฤษฎีความน่าจะเป็นและกระบวนการเฟ้นสุ่ม (stochastic process) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในการออกแบบระบบสื่อสารแบบดิจิทัล ซึ่งเป็นส่วนสำคัญในแบบจำลองทางสถิติของแหล่งกำเนิดที่สร้างข้อมูล ในการแปลงเป็นเชิงเลข (digitization) ของแหล่งกำเนิดเอาต์พุต (output) ในการอธิบายคุณสมบัติของช่องสัญญาณที่ทำการส่งสัญญาณทางดิจิทัลออกไป ในการออกแบบเครื่องรับที่จะทำการประมวลผลข้อมูลผ่านทางช่องสัญญาณและในการหาค่าสมรรถนะของระบบสื่อสาร ในหัวข้อนี้จะทำการกล่าวถึงคำนิยามและพื้นฐานของทฤษฎีความน่าจะเป็นและ กระบวนการเฟ้นสุ่มและกล่าวถึงส่วนที่มีความสำคัญในการออกแบบระบบสื่อสารดิจิทัลที่มีคุณภาพและในการวิเคราะห์ค่าสมรรถนะของระบบ

ค.1.1 ความน่าจะเป็น

พิจารณาการทดลองโดยการทอดลูกเต๋ากับจำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในเอกภพสัมพัทธ์ s ของการทดลองประกอบไปด้วย เซต ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในที่นี่

$$s = \{1,2,3,4,5,6\} \quad (\text{ค.1})$$

โดยที่จำนวนเต็ม $1, \dots, 6$ แสดงถึงจำนวนจุดบนหน้าลูกเต๋าสี่ค่าทั้ง 6 นี้เป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ของการทดลอง เหตุการณ์ที่เป็นเซตย่อยของ s ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นส่วนหนึ่งของเอกภพสัมพัทธ์ของการทดลอง ตัวอย่างเช่นพิจารณาเหตุการณ์ A

$$A = \{2,4\} \quad (\text{ค.2})$$

ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกคือ $\{2,4\}$ คอมพลีเมนต์ของ A เขียนเป็น \bar{A} คือสมาชิกที่อยู่ใน s แต่ไม่อยู่ใน A เขียนได้เป็น

$$\bar{A} = \{1,3,5,6\} \quad (\text{ค.3})$$

เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์กล่าวว่าจะเป็น เหตุการณ์ไม่เกิดร่วม (mutually exclusive event) กันถ้าเหตุการณ์ทั้ง 2 ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เช่นถ้าเหตุการณ์ B คือ

$$B = \{1,3,6\} \quad (\text{ก.4})$$

นั่นคือเหตุการณ์ A และ B เป็น เหตุการณ์ไม่เกิดร่วม ต่อกัน ในทำนองเดียวกัน A และ \bar{A} ก็ เป็นเหตุการณ์ที่ เหตุการณ์ไม่เกิดร่วม ต่อกัน

การยูเนียนของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ จะเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกรวมของเหตุการณ์ทั้ง 2 เช่นกำหนดเหตุการณ์ C เป็น

$$C = \{1,2,3\} \quad (\text{ก.5})$$

ให้ D เป็นผลของการยูเนียนเหตุการณ์ B และ C จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D &= B \cup C \\ D &= \{1,2,3,6\} \end{aligned} \quad (\text{ก.6})$$

ในทำนองเดียวกัน $A \cup \bar{A} = S$ จะได้เอกภพสัมพัทธ์ของเหตุการณ์ ในทางกลับกันการ อินเตอร์เซกชัน ของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ จะได้เหตุการณ์ที่เป็นสมาชิกร่วมของเหตุการณ์ทั้ง 2 เช่น ถ้าให้ $E = B \cap C$ จะได้ว่า

$$E = \{1,3\} \quad (\text{ก.7})$$

เมื่อเหตุการณ์ทั้ง 2 เป็น เหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกันผลของการอินเตอร์เซกชันจะได้เซตว่าง ϕ เช่น $A \cap B = \phi$ ซึ่งผลของการยูเนียนและอินเตอร์เซกชันสามารถนำไปใช้กับกรณีที่มีมากกว่า 2 เหตุการณ์ได้เช่นกัน

โอกาสของการเกิดเหตุการณ์ใดๆคือค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้น ซึ่งสอดคล้องกับสัจพจน์ดังต่อไปนี้

สัจพจน์ที่ 1 $P(A) \geq 0$ สำหรับทุกเหตุการณ์ A

สัจพจน์ที่ 2 $P(S) = 1$ สำหรับทุกเหตุการณ์ S

ถ้า $A_i, i=1,2,\dots$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกัน ทั้งหมดในเอกภพสัมพัทธ์ S นั่นคือ

$$A_i \cap A_j = \phi \quad (\text{ก.8})$$

โดยที่ $i \neq j = 1, 2, \dots$ ดังนั้นความน่าจะเป็นของยูเนียนของเหตุการณ์ที่เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมดังกล่าวจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) \quad (\text{ค.9})$$

ค.1.2. เหตุการณ์ร่วมและความน่าจะเป็นร่วม (joint events and joint probability)

เมื่อทำการทดลอง 2 การทดลองและพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้เช่นการทดลองทั้งสองอาจเป็นการทอดลูกเต๋าลูกเดียว 2 ครั้ง หรือการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ในแต่ละกรณีเอกภพสัมพัทธ์ s จะประกอบไปด้วยสมาชิก 36 สมาชิก ซึ่งแสดงได้โดยพิกัด (i, j) โดย $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ถ้ากำหนดให้ลูกเต๋าดังกล่าวมีความน่าจะเป็นของการเกิดหน้าต่างๆเท่ากัน ดังนั้นแต่ละสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ จะมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $1/36$ เราอาจพิจารณาถึงเหตุการณ์ร่วมเช่น $\{i \text{ เป็นจำนวนคู่}, j=3\}$ และหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ดังกล่าวได้

โดยทั่วไปการทดลองที่ 1 มีผลลัพธ์ที่ได้คือ $A_i, i=1, 2, \dots, n$ และการทดลองที่ 2 มีผลลัพธ์ที่ได้คือ $B_j, j=1, 2, \dots, m$ ดังนั้นการทดลองร่วมจะได้ผลลัพธ์คือ $(A_i, B_j), i=1, 2, \dots, n$ และ $j=1, 2, \dots, m$ ให้ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ร่วม (A_i, B_j) คือ $P(A_i, B_j)$ ซึ่งตรงกับเงื่อนไขดังนี้คือ

$$0 \leq P(A_i, B_j) \leq 1 \quad (\text{ค.10})$$

สมมติให้ผลลัพธ์ $B_j, j=1, 2, \dots, m$ เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมจะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = P(A_i) \quad (\text{ค.11})$$

ในทำนองเดียวกัน $A_i, i=1, 2, \dots, n$ เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมจะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^n P(A_i, B_j) = P(B_j) \quad (\text{ค.12})$$

และถ้าผลลัพธ์ของการทดลองทั้ง 2 เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกันดังนั้น

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = 1 \quad (\text{ค.13})$$

ซึ่งสามารถนำไปใช้กับการทดลองมากกว่า 2 การทดลองได้

ค.1.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

พิจารณาเหตุการณ์ร่วมที่มีความน่าจะเป็นคือ $P(A,B)$ สมมติให้เหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้วและต้องการแสดงความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ A เรียกว่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A เมื่อเกิดเหตุการณ์ B ขึ้นแสดงได้โดย

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \quad \text{โดย } P(B) > 0 \quad (\text{ค.14})$$

ในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อเกิดเหตุการณ์ A ขึ้นคือ

$$P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)} \quad \text{โดย } P(A) > 0 \quad (\text{ค.15})$$

ความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ทั้ง 2 แสดงได้โดย

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (\text{ค.16})$$

ค.1.4 การมีอิสระเชิงสถิติ (Statistical Independence)

พิจารณาเหตุการณ์ A และ B และความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $P(A|B)$ สมมติว่าเหตุการณ์ A ไม่ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ B จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(A,B) &= P(A)P(B) \end{aligned} \quad (\text{ค.17})$$

เมื่อเหตุการณ์ A และ B เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าว เหตุการณ์ A และ B จะเป็นเหตุการณ์อิสระเชิงสถิติต่อกัน

ค.1.5 ตัวแปรสุ่ม การแจกแจงของความน่าจะเป็น และความหนาแน่นของการแจกแจงของความน่าจะเป็น

พิจารณาการทดลองที่มีเอกภพสัมพัทธ์ S และให้ $s \in S$ กำหนดให้ $X(s)$ มีโดเมนคือ S ซึ่งมีพิสัย (range) คือเซตของจำนวนจริง ดังนั้นเรียก $X(s)$ ว่าตัวแปรสุ่ม เช่นทำการทอยเหรียญผลลัพธ์ที่เป็นไปได้จะเป็นหัว (H) และก้อย (T) ดังนั้น S ประกอบไปด้วยสมาชิก 2 ตัวคือ H และ T สมมติให้ $X(s)$ คือ

$$X(s) = \begin{cases} 1, (s = H) \\ -1, (s = T) \end{cases} \quad (\text{ก.18})$$

ดังนั้นสามารถโยงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งสองของการทอยเหรียญกับจุดทั้งสอง $(1 - 1)$ บนแกนจำนวนจริงได้

พิจารณาตัวแปรสุ่ม X ที่เหตุการณ์ $\{X \leq x\}$ โดย x คือจำนวนจริงใดๆ ในช่วง $(-\infty, +\infty)$ ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ดังกล่าวแสดงได้โดย $P(X \leq x)$ หรือ $F(x)$ นั่นคือ

$$F(x) = P(X \leq x), (-\infty < x < \infty) \quad (\text{ก.19})$$

เรียก $F(x)$ ว่าฟังก์ชันการแจกแจงของความน่าจะเป็น (Probability Distribution Function) ของตัวแปรสุ่ม X หรือเรียกอีกอย่างได้ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function: CDF)

คุณสมบัติของ $F(x)$

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2) $F(x_1) \leq F(x_2)$ ถ้า $x_1 \leq x_2$
- 3) $F(-\infty) = 0$
- 4) $F(+\infty) = 1$

เมื่อทำการหาค่าเชิงอนุพันธ์ของ $F(x)$ แสดงได้โดย $p(x)$ ซึ่งเรียกว่าความหนาแน่นของการแจกแจงของความน่าจะเป็น (Probability Density Function: PDF) ของตัวแปรสุ่ม X ดังนั้น

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}, (-\infty < x < +\infty) \quad (\text{ก.20})$$

หรือ

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx, (-\infty < x < +\infty) \quad (\text{ก.21})$$

และ

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = p(X \leq x_2) - p(X \leq x_1) \quad (\text{ก.22})$$

$$\begin{aligned}
 &= F(x_2) - F(x_1) \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx
 \end{aligned}$$

คุณสมบัติของ PDF

- 1) $p(x) \geq 0$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$

ค.1.6 การหาค่าเฉลี่ยทางสถิติของตัวแปรสุ่ม

พิจารณาตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมี PDF คือ $p(x)$ ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดคะเนของ X แสดงได้โดย

$$E(x) \equiv m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (\text{ก.23})$$

โดย $E()$ แสดงถึงค่าคาดคะเน ซึ่งเป็นโมเมนต์แรกของตัวแปรสุ่ม X สำหรับกรณีของโมเมนต์ที่ m แสดงได้โดย

$$E(x^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p(x) dx \quad (\text{ก.24})$$

กำหนดให้ $Y=g(X)$ โดย $g(X)$ คือ ฟังก์ชันใดๆของตัวแปรสุ่ม X ค่าคาดคะเนของ Y คือ

$$E(y) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x) dx \quad (\text{ก.25})$$

ถ้าให้ $Y=(x-x_0)^n$ จะได้ว่า

$$E[(x-x_0)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^n p(x) dx \quad (\text{ก.26})$$

ถ้า x_0 เป็นค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม X หรือ m_x แทนค่าลงไปจะได้ว่า

$$E[(x - m_x)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^n p(x) dx \quad (\text{ค.27})$$

เรียกสมการที่ ค.27 ว่าเป็นค่าโมเมนต์กลางของตัวแปรสุ่ม X

ถ้าให้ $n=2$ สมการที่ ค.27 จะเรียกว่า ความแปรปรวน (variance) ของตัวแปรสุ่มแสดงได้โดย σ_x^2 นั่นคือ

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = E(X^2) - m_x^2 \quad (\text{ค.28})$$

ในกรณีของตัวแปรสุ่ม 2 ตัว X_1 และ X_2 ซึ่งมี PDF ร่วมคือ $p(x_1, x_2)$ ทำการแสดงโมเมนต์ร่วมคือ

$$E[(X_1^k X_2^n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^k x_2^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{ค.29})$$

และโมเมนต์ศูนย์กลางร่วมคือ

$$E[(X_1 - m_1)^k (X_2 - m_2)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)^k (x_2 - m_2)^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{ค.30})$$

โดย $m_i = E(X_i)$ ในกรณีที่ $k=n=1$ สมการ ค.29 และ ค.30 จะเรียกว่า สหสัมพันธ์ (correlation) และความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance) ของตัวแปรสุ่ม x_1 และ x_2 ตามลำดับ

ถ้าตัวแปรสุ่มทั้งสองไม่สหสัมพันธ์กัน (uncorrelated) คือ $E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2) = m_1 m_2$ ซึ่งทำให้ค่า ความแปรปรวนร่วมเกี่ยว นั่นคือถ้าตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 เป็นอิสระต่อกันและถ้า $E(X_1 X_2) = 0$ กล่าวได้ว่าตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 มีลักษณะเชิงตั้งฉากต่อกัน (orthogonal)

ค.1.7 ฟังก์ชันของ สหสัมพันธ์ และ ความหนาแน่นกำลังเชิงสเปกตรัมโดยการหาค่าเฉลี่ยทั้งหมด

เชิงสถิติ (Correlation and Power Spectrum Density Function by Ensemble Averaging)

โดยปกติทั่วไปตัวแปรสุ่มมักขึ้นอยู่กับเวลาตัวอย่างเช่น สัญญาณรบกวนที่เกิดในตัวความต้านทานของอุปกรณ์ อิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลา สัญญาณเอาต์พุตของแหล่งกำเนิดที่สร้างข้อมูลซึ่งเป็นลักษณะตัวแปรสุ่มที่ขึ้นอยู่กับเวลาเช่นกัน หรือ สัญญาณเสียงที่ส่งที่ส่งไปยังช่องสัญญาณ

โทรศัพท์ก็เป็นตัวแปรสุ่มที่ขึ้นอยู่กับเวลาเช่นกัน ดังนั้นจึงต้องพิจารณาถึงคุณสมบัติของตัวแปรสุ่มที่ขึ้นอยู่กับเวลา ดังนี้

ค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม $X(t)$

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) p_x[x(t)] dx(t) \quad (\text{ก.31})$$

ค่าฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ (Autocorrelation function) ของตัวแปรสุ่ม $X(t)$ แสดงได้โดย $R_{XX}(t_1, t_2)$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x(t_2)p_x(x(t_1), x(t_2))dx(t_1)dx(t_2) \quad (\text{ก.32})$$

ค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวตัวเอง (Autocovariance function) ของตัวแปรสุ่ม $X(t)$ แสดงได้โดย $Cov_{XX}(t, t+\tau)$

$$\begin{aligned} Cov_{XX}(t, t+\tau) &= E[(X(t) - \mu_X(t))(X(t+\tau) - \mu_X(t+\tau))] \\ &= R_{XX}(t, t+\tau) - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau) \\ &= \sigma_{XX}^2(t, t+\tau) \end{aligned} \quad (\text{ก.33})$$

ค่าสัมประสิทธิ์อัตโนมัติสหสัมพันธ์ (Autocorrelation coefficient) ของตัวแปรสุ่ม $X(t)$

$$P_{XX}(t, t+\tau) = \frac{Cov_{XX}(t, t+\tau)}{[Cov_{XX}(t, t)Cov_{XX}(t+\tau, t+\tau)]^{1/2}} \quad (\text{ก.34})$$

ก.2. กระบวนการเฟ้นสุ่ม

ตัวแปรสุ่มที่มีความต่อเนื่องทางเวลา $X(t)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่แปรตามเวลา (Stationary) แบบคงที่ในแนวแคบ (narrow sense stationary) ถ้าที่ทุกจำนวนเต็มบวก n ค่า pdf. กำลังที่ n ไม่ขึ้นอยู่กับเวลาที่เลื่อนไป τ นั่นคือที่ $n \geq 1$

$$P_x[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] = P_x[x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)] \quad (\text{ก.35})$$

ดังนั้น คุณสมบัติทางสถิติจะไม่ขึ้นอยู่กับเวลา เนื่องจาก pdf. รวม ไม่ขึ้นอยู่กับเวลาเริ่มต้นนั่นเอง แต่จะขึ้นอยู่กับความแตกต่างของเวลาที่ใช้ในการสังเกต

ตัวแปรสุ่มที่มีความต่อเนื่องทางเวลา $X(t)$ เป็นแบบคงที่ในแนวกว้าง (wide sense stationary) จะมีค่าคาดคะเนที่ไม่ขึ้นอยู่กัเวลา และค่าฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับความแตกต่างของเวลา t_1 และ t_2 เท่านั้น นั่นคือ

$$\mu_x(t) = \mu_x \quad \text{โดยที่ } \mu_x \text{ มีค่าคงที่}$$

$$R_{xx}(t, t + \tau) = R_{xx}(\tau) \quad \text{สำหรับทุก } t \text{ และ } \tau$$

กล่าวได้ว่าทุกกระบวนการสุ่มแบบคงที่ (strict sense stationary random process) เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่แปรตามเวลาในแนวกว้างและในทางกลับกันถ้ากระบวนการสุ่มไม่เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่แปรตามเวลาในแนวกว้างก็จะเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่คงที่ (nonstationary)

ถ้า $\tau=0$

$$R_{xx}(0) = E[X^2(t)] \quad (\text{ค.36})$$

ซึ่งให้ค่าพลังงานเฉลี่ยของกระบวนการสุ่มค่าความแปรปรวมร่วมเกี่ยวกับตัวเอง (auto covariance) สำหรับกระบวนการสุ่มแบบคงที่แนวกว้าง คือ

$$Cov_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2 = \sigma_{xx}^2(\tau) \quad (\text{ค.37})$$

ค่า สัมประสิทธิ์อัตโนมัติสหสัมพันธ์ (autocorrelation coefficient) สำหรับกระบวนการสุ่มแบบคงที่แนวกว้าง คือ

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{\sigma_{xx}^2(\tau)}{\sigma_{xx}(0)\sigma_{xx}(0)} = \frac{\sigma_{xx}^2(\tau)}{\sigma_{xx}^2(0)} \quad (\text{ค.38})$$

โดย $Cov_{xx}(t, t) = Cov_{xx}(t + \tau, t + \tau) = Cov_{xx}(0, 0) = \sigma_{xx}^2(0)$ สำหรับกระบวนการสุ่มแบบคงที่แนวกว้าง

คุณสมบัติของฟังก์ชันสหสัมพันธ์

- 1) ค่าอัตโนมัติสหสัมพันธ์ ที่ $\tau=0$ จะเป็นค่ากำลังเฉลี่ยของ กระบวนการสุ่ม
- 2) ค่าอัตโนมัติสหสัมพันธ์ ของตัวแปรสุ่มจำนวนจริงแบบคงที่แนวกว้าง เป็นฟังก์ชันคู่คือ

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

- 3) ค่าอัตโนมัติสหสัมพันธ์ ของตัวแปรสุ่มจำนวนจริงแบบคงที่ในแนวกว้างจะให้ค่าสูงสุดที่จุดกำเนิดคือ

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

4) ค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่มที่ต่อเนื่องทางเวลา $X(t)$ และ $Y(t)$ เรียกว่า ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้ามระหว่างตัวแปรสุ่มทั้งสอง

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)Y(t + \tau)p_{XY}(X(t), Y(t + \tau))dX(t)dY(t + \tau) \quad (\text{ก.39})$$

และ

$$R_{YX}(t, t + \tau) = E[Y(t)X(t + \tau)] \quad (\text{ก.40})$$

5) ค่า ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวข้าม (Cross Covariance) คือ

$$\begin{aligned} Cov_{XY}(t, t + \tau) &= E[(X(t) - \mu_X(t))(Y(t + \tau) - \mu_Y(t + \tau))] \\ &= R_{XY}(t, t + \tau) - \mu_X(t)\mu_Y(t + \tau) \\ &= \sigma_{XY}^2(t, t + \tau) \end{aligned} \quad (\text{ก.41})$$

6) ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวข้าม สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีความต่อเนื่องทางเวลา คือ

$$\rho_{XY}(t, t + \tau) = \frac{Cov_{XY}(t, t + \tau)}{[Cov_{XY}(t, t)Cov_{XY}(t + \tau, t + \tau)]^{1/2}} \quad (\text{ก.42})$$

7) ตัวแปรสุ่ม $X(t)$ และ $Y(t)$ จะมีลักษณะคงที่ร่วมแบบแท้จริง ถ้าทุกจำนวนเต็ม n ค่า pdf. ลำดับที่ n ไม่ขึ้นอยู่กับเวลาที่เลื่อนไป τ ถ้าตัวแปรสุ่มทั้ง 2 เป็นคงที่ร่วมแบบแท้จริงดังนั้น แต่ละตัวจะมีลักษณะคงที่แบบแท้จริง

8) ตัวแปรสุ่ม $X(t)$ และ $Y(t)$ จะเป็นมีลักษณะคงที่ร่วมในแนวกว้างถ้ามีเงื่อนไขดังนี้

8.1) ทั้ง $X(t)$ และ $Y(t)$ ต่างมีลักษณะคงที่ในแนวกว้าง

$$8.2) R_{XY}(t, t + \tau) = R_{XY}(\tau)$$

ถ้าตัวแปรสุ่มทั้ง 2 มีลักษณะคงที่ในแนวกว้างดังนั้นแต่ละตัวแปรจะไม่ขึ้นกับเวลาในแนวกว้าง

คุณสมบัติของฟังก์ชันสหสัมพันธ์โดยสมมติให้ตัวแปรสุ่มทั้ง 2 มีลักษณะคงที่ร่วมในแนวกว้าง

1) $R_{XY}(\tau) = R_{XY}(-\tau)$ เป็น ปฏิสมมาตร (Antisymmetric)

$$2) |R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$$

$$3) |R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_{XX}(0) + R_{YY}(0)$$

4) ค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้าม ที่ตำแหน่ง $\tau=0$ จะไม่ใช่ค่าสูงสุด

5) ตัวแปรสุ่ม $X(t)$ และ $Y(t)$ มีความสัมพันธ์แบบไม่สหสัมพันธ์ (Uncorrelation). ถ้า

$Cov_{XY}(t, t+\tau) = 0$ สำหรับทุก t และ τ นั่นคือ $R_{XY}(t, t+\tau) = \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)$ สำหรับทุก t และ τ

ค.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นกำลังเชิงสเปกตรัม (Power Spectral Density Function: psd)

psd สำหรับกระบวนการสุ่มแบบคงที่ในแนวกว้างแบบต่อเนื่องทางเวลาและเป็นจำนวนจริง $X(t)$ คือผลการแปลงฟูเรียร์ของ ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ตัวเอง ของ กระบวนการสุ่ม คือ

$$S_{XX}(\omega) = S_{XX}(2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (\text{ค.43})$$

โดย

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) e^{j\omega\tau} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (\text{ค.44})$$

ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1) psd เป็นฟังก์ชันคู่ เป็นจำนวนจริง และเป็นค่าบวก

2) ค่ากำลังเฉลี่ย ของ $X(t)$ คือ

$$R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \geq 0 \quad (\text{ค.45})$$

นั่นคือค่ากำลังเฉลี่ยของกระบวนการสุ่มคืออินทิกรัลของ psd ตลอดช่วงความถี่ ดังนั้น psd จึงมีหน่วยเป็นกำลังต่อเฮิรตซ์

ภาคผนวก ง.

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขตามกฎของเกาส์
(Gauss Quadratures)

Gauss Quadratures หรือ Gauss – Legendre Quadratures

Gauss – Legendre Quadratures (หรือ Gauss อย่างง่าย) เป็นวิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยใช้รากของ Legendre polynomials

Gauss Quadrature นี้ไม่สามารถนำมาใช้อินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูปตารางที่มีช่วงข้อมูลห่างเท่าๆกัน ทั้งนี้เพราะจุดที่ได้จาก Legendre จะมีระยะห่างไม่เท่ากัน แต่วิธีการนี้มีความเหมาะสมในกรณีที่ทำกรอินทิเกรต analytical function ข้อดีของ Gauss quadrature คือความถูกต้องแม่นยำที่สูงกว่าวิธีของ Newton - Cotes

ก่อนที่จะพูดถึงสมการของ Gauss quadrature ลองกลับดูเทอมค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรจาก Newton – Cotes จากสมการที่ (ง.1) ซึ่งให้เห็นถึงค่าความคลาดเคลื่อนจากกฎ Trapezoidal จะเป็นสัดส่วนกับ f''

$$E = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$\cong -\frac{1}{12} h^3 f''(\bar{x}) \quad (ง.1)$$

ถ้ากฎ trapezoidal ถูกนำมาใช้ในการอินทิเกรตสำหรับ $f = 1, x, x^2, x^3, \dots$ ดังนั้นผลลัพธ์จะไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนสำหรับ $f = 1$ และ $f = x$ แต่จะให้ความคลาดเคลื่อนเมื่อ x^2 และที่กำลังสูงขึ้นไป ค่าความคลาดเคลื่อนของ Simson ที่กำหนดในสมการ (ง.2) จะเป็นสัดส่วนกับ f^{iv}

$$E = -\frac{N h^5}{2 \cdot 90} \bar{f}^{iv} = -(b-a) \frac{h^4}{180} \bar{f}^{iv} \quad (ง.2)$$

ในเมื่อ

$$\bar{f}^{iv} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{iv}(\bar{x}_i) \quad \text{และ} \quad N = \frac{b-a}{2}$$

สำหรับภายใต้ช่วงที่กำหนด $[a, b]$ ความคลาดเคลื่อนจะเป็นสัดส่วนกับ h^4

ดังนั้นความถูกต้องจะเกิดขึ้นเมื่อ $f = 1, x, x^2$ และ x^3 โดยปกติแล้ววิธีการ Newton – Cotes แบบ Closed formula เมื่อ N เป็นเลขคี่จะให้ค่าถูกต้อง

ถ้าหากการอินทิเกรตโพลิโนเมียลอันดับที่ N หรือต่ำกว่า และถ้าหาก N เป็นเลขคู่จะให้ค่าถูกต้องเมื่อโพลิโนเมียลที่จะทำการอินทิเกรตมีอันดับเป็น $N+1$ หรือต่ำกว่า

ตัวอย่างถัดไปแสดงให้เห็นว่าการอินทิเกรตเชิงตัวเลขจากการใช้ข้อมูลสองจุดจะให้ค่าที่ถูกต้องสำหรับ โพลิโนเมียลอันดับที่สาม

ตัวอย่าง สูตรในการอินทิเกรตเมื่อมีข้อมูลสองจุดที่สามารถให้ค่าถูกต้องเมื่อ โพลีโนเมียลที่ใช้เป็นอันดับที่ 3 ให้หาค่าของจุดเหล่านั้น

วิธีทำ

$$\text{พิจารณาจาก } I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (\text{A})$$

สูตรในการอินทิเกรตที่ใช้ข้อมูลสองจุด คือ

$$I = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + E \quad (\text{B})$$

เมื่อ w_k ที่ $k=1,2$ เป็นตัวถ่วงน้ำหนัก

และ x_k เป็นจุดที่ไม่รู้ค่า

E เป็นเทอมค่าความคลาดเคลื่อน

เนื่องจากทั้ง w_k และ x_k ไม่รู้ค่า เราต้องการให้ $E=0$ (กล่าวคือ I จะได้ค่าที่ถูกต้อง) สำหรับ $f(x)=1, x, x^2$ และ x^3 จากการแทน $f(x)=1, x, x^2$ และ x^3 ลงในสมการ (B) จะได้ 4 สมการสอดคล้อง

$$2 = w_1 + w_2 \quad (\text{Z1})$$

$$0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad (\text{Z2})$$

$$\frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 \quad (\text{Z3})$$

$$0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 \quad (\text{Z4})$$

$$\int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1^2 - (-1)^2) = 0$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} (1^3 - (-1)^3) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} (1^4 - (-1)^4) = 0$$

โดยทางซ้ายมือคือค่าที่ถูกต้อง

ค่า limite ของการอินทิเกรตคือ -1 และ 1 ซึ่งจะมีความสมมาตรรอบจุด $x=0$ ดังนั้นเรา กำหนด $x_2 = -x_1$ และต้องการจุดที่วางอยู่ในลักษณะสมมาตรจากสมการแรกและสมการที่ 2 เราให้

จากสมการ (Z1) คือ

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$0 = x_1 + x_2$$

$$x_2 = -x_1$$

จากสมการ (Z2) คือ

$$\frac{2}{3} = x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + (-x_1)^2 = 2x_1^2$$

$$\frac{1}{3} = x_1^2$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.577350269$$

และ

$$x_2 = -x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -0.577350269$$

จากค่าถ่วงน้ำหนักและจุดต่างๆ สมการ (B) ให้ค่าถูกต้องสำหรับพหุนามเมียบลอันดับที่ต่ำกว่าหรือเท่ากับ 3 จากตัวอย่างจะพิจารณาช่วงอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 เป็นตัวอย่างง่ายๆ แต่ก็สามารถเปลี่ยนเป็นค่าใดๆก็ได้

สูตรในการอินทิเกรตได้จากตัวอย่างเป็นสมาชิกอย่างง่ายที่สุดของ Gauss quadrature ที่ใช้กับจำนวนจุดที่มากกว่าสองไม่สามารถทำได้ง่ายๆ ด้วยการขยายวิธีการจากตัวอย่างนี้ ดังนั้นในส่วนที่เหลือของย่อหน้านี้จะเป็นการหาสูตรทั่วไปของ Gauss quadrature และจะแสดงให้เห็นว่า Gauss quadrature อันดับ N จะให้ค่าถูกต้องเมื่อทำการอินทิเกรตพหุนามเมียบลใดๆ ที่มีอันดับไม่เกิน $2N - 1$

วิธีของ Gauss quadrature จะแตกต่างไปจากสูตรของ Newton-Cotes เนื่องจาก N จุดของ Gauss จะถูกกำหนดให้เป็นรากของ $P_N(x)$ เมื่อ $P_N(x)$ เป็นพหุนามเมียบลแบบ Legendre อันดับ N ที่จริงแล้ว x_1 และ x_2 ที่กำหนดจากตัวอย่างต่างก็เป็นรากของ $P_2(x)$

การขยาย Gauss Quadrature ภายในช่วง $[-1, 1]$ กำหนดได้จาก

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{k=1}^N w_k f(x_k) \quad (9.3)$$

เมื่อ N เป็นจำนวนจุดของ Gauss

w_k เป็นตัวถ่วงน้ำหนัก

x_k เป็นจุดของ Gauss ที่ได้จาดตารางที่ ง.1 เครื่องหมาย \pm ในตารางหมายถึงค่า x ที่ได้จะปรากฏเป็นคู่โดยค่านึงจะเป็นบวก อีกค่านึงจะเป็นลบ

ตัวอย่างถ้า $N = 4$ สมการที่ (ง.4) จะกลายเป็น

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong 0.34785 f(-0.86113) + 0.65214 f(-0.33998) \\ + 0.65214 f(0.33998) + 0.34785 f(0.86113) \quad (\text{ง.4})$$

สูตรการอินทิเกรตของ Gauss นี้จะถูกนำมาใช้ภายในช่วง $[a, b]$ ใดๆ โดยใช้การแปลง

$$x = \frac{2Z - a - b}{b - a} \quad (\text{ง.5})$$

เมื่อ Z เป็น coordinate เดิม โดย $a < Z < b$

x เป็น normalized coordinate ในช่วง $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้นการแปลงจาก x ไป Z จะเป็น

$$Z = \frac{(b-a)x + a + b}{2} \quad (\text{ง.6})$$

ตารางที่ ง.1 จุดของ Gauss และตัวถ่วงน้ำหนัก

	$\pm x_i$	w_i
$N = 2$	0.577350269	1
$N = 3$	0	0.888888889
	0.774596669	0.555555556
$N = 4$	0.339981043	0.652145155
	0.861136312	0.347854845
$N = 5$	0	0.56888889
	0.538469310	0.478628670
	0.906179846	0.236926885
$N = 6$	0.238619186	0.467913935
	0.661209387	0.360761573
	0.932469514	0.171324492
$N = 8$	0.183434642	0.362683783
	0.525532410	0.313706646
	0.796666478	0.222381034
	0.960289857	0.101228536

$N = 10$	0.148874339	0.295524225
	0.433395394	0.269266719
	0.679409568	0.219086363
	0.865063367	0.14945139
	0.973906528	0.066671344

*see Abramowitz and Stegun for more data

จากการใช้การแปลงการอินทิเกรตจะกลายเป็น

$$\int_a^b f(z) dz = \int_{-1}^1 f(z) \left(\frac{dz}{dx} \right) dx \cong \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N w_k f(z_k) \quad (ง.7)$$

ตัวอย่างเมื่อ $N=2, a=0, b=2$ เนื่องจากจุดของ Gauss คือ x_k สำหรับ $N=2$ จากการ normalized coordinate x โดย $-1 \leq x \leq 1$ จะได้ค่า $x = \pm 0.57735$ (อ่านจากตารางที่ ง.1) ซึ่งจะสอดคล้องกับจุด Z คือ

$$Z_1 = \frac{1}{2} [(2-0)(-0.57735) + 0 + 2] = 0.42265$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} [(2-0)(0.57735) + 0 + 2] = 1.57735$$
(ง.8)

อนุพันธ์ $\frac{dz}{dx} = \frac{b-a}{2} = 1$ ดังนั้น Gauss quadrature จะกลายเป็น

$$\int_0^2 f(z) dz = \int_{-1}^1 f(z) \left(\frac{dz}{dx} \right) dx \cong (1) [(1)f(0.42264) + (1)f(1.57735)] \quad (ง.9)$$

แสดงให้เห็นว่า ถ้าโพลิโนเมียล $f(x)$ มีอันดับไม่เกิน $2N-1$ Gauss quadrature อันดับที่ N จะให้ค่าที่ถูกต้อง

สมมติ $f(x)$ ในสมการ (ง.3) เป็นโพลิโนเมียลอันดับ $2N-1$ หรือต่ำกว่าที่จะถูกอินทิเกรตภายในช่วง $[-1,1]$ โดยการใช้โพลิโนเมียลของ Legendre อันดับที่ N ซึ่งเป็น $P_N(x)$ ดังนั้น $f(x)$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$f(x) = c(x)P_N(x) + r(x) \quad (3.10)$$

เมื่อ $c(x)$ และ $r(x)$ ต่างก็เป็นโพลิโนเมียลอันดับที่ $N-1$ หรือต่ำกว่าสมการข้างล่างจะมี ส่วนสำคัญอยู่สองส่วน ในส่วนแรกนั้นจากการอินทิเกรตของสมการ (3.10) ในช่วง $[-1,1]$ จะได้

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 r(x) dx \quad (3.11)$$

เมื่อเทอมแรกของสมการ (3.10) หายไปจากการอินทิเกรตเป็นเพราะ $P_N(x)$ ตั้งฉากกับโพลิโนเมียลอันดับไม่เกิน $N-1$ ใดๆ ในส่วนที่สองถ้า x ถูกกำหนดให้เป็นหนึ่งในบรรดารากของ $P_N(x)$ เทอมแรกของสมการ (3.10) จะหายไป และสมการที่ (3.10) จะถูกลดรูปเป็น $f(x_i) = r(x_i)$

การอินทิเกรต $r(x)$ ในสมการที่ (3.11) เป็นโพลิโนเมียลอันดับที่ $N-1$ หรือต่ำกว่า ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ถูกต้องได้ในรูปของ Lagrange interpolation ของอันดับที่ $N-1$

$$r(x) = \sum_{i=1}^N \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] r(x_i) \quad (3.12)$$

สรุป

- 1). Gauss (Legendre) quadrature อาศัยหลักการพื้นฐานจากการอินทิเกรตโพลิโนเมียลที่ถูกกำหนดจุดข้อมูลเป็นรากของ Legendre polynomail
- 2). อันดับของความถูกต้องแม่นยำของ Gauss quadrature จะประมาณสองเท่าของ Newton – Cotes แบบ closed formula จากการใช้จำนวนจุด
- 3). เนื่องจากสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นบวกจึงไม่มีปัญหาเรื่องความคลาดเคลื่อนจากการปิดเศษ อันเป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายที่อยู่ภายใน limit ของการอินทิเกรต

ภาคผนวก จ.

โปรแกรม

โปรแกรมในส่วนของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส

ฟังก์ชันของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส โดยใช้จำนวนชุดรับ 2 สาขา

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l} \right)^2 \right]^{m_l/2}} \left\{ \cos \left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{\sigma_0} \sin \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{1/4}} \right] \right\}$$

สมการ

$$+ \sin \left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right) \right] \left[1 - \frac{\sqrt{\sigma_0} \cos \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{1/4}} \right] \left. \right\} \frac{dt}{t}$$

โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยกฎของเกาส์

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n$$

function Nume_2=Nume_2(rdb,m1,m2,L,delta)

```
t=[0.093307812017
0.492691740302
1.215595412071
2.269949526204
3.667622721751
5.425336627414
7.565916226613
10.120228568019
13.130282482176
16.654407708330
20.776478899449
25.623894226729
31.407519169754
38.530683306486
48.026085572686];
```

```
wt=[0.2395781770311
0.560100842793
0.887008262919
1.22366440215
1.57444872163
1.94475197653
2.34150205664
2.77404192683
3.25564334640
3.80631171423
4.45847775384
5.27001778443
6.35956346973
8.03178763212
11.5277721009];
```

```

r=10^(rdb/10);
m1=m1; % ตัวแปรเสริมเฟดคิง
m2=m2;
g=15; % จำนวนราก
L_0=m1/exp(0*delta);
L_1=m2/exp(-1*delta);
Sum=0; % ค่าเริ่มต้นของผลบวก
for i=1:g
    ti=t(i);
    wti=wt(i);
    X_0=ti/L_0;
    X_1=ti/L_1;
    Xa=(1+X_0^(2))^(m1/2);
    Xb=(1+X_1^(2))^(m2/2);
    Xc=Xa*Xb;

    Ya=(m1*atan(X_0)+(m2*atan(X_1)));

    S=Sigma_2(rdb,m1,m2,L,delta); % เรียกใช้ฟังก์ชัน sigma
    Za=ti/S;
    Zb=1/2*atan(Za);
    Zc=sqrt(S);
    Zd=(ti^(2)+S^(2))^(1/4);
    Ze=Zc*sin(Zb)/Zd;
    Ha=Zc*cos(Zb)/Zd;

    Co1=1/Xc;
    Co2=cos(Ya);
    Co3=Ze;
    Co4=sin(Ya);
    Co5=1-Ha;
    numt=(Co1*((Co2*Co3)+(Co4*Co5)))/ti;
    Sum=Sum+wti*numt;
end
Nume_2=Sum;

```

ฟังก์ชันของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส โดยใช้จำนวนชุดรับ 2 สาขา

```

function Nocode_2=Nocode_2(rdb,m1,m2,L,delta)
D=Nume_2(rdb,m1,m2,L,delta);
N=1/(2*pi)*D;
Nocode_2=N;

```

ฟังก์ชันของ SNR ที่อยู่ในรูป $\sigma_0 S$ โดยมีค่า

$$S = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=0}^{L-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2$$

$$\sigma_0 = \left[\frac{2(K-1)q(L,\delta)}{3N} + \frac{q(L,\delta)-1}{N} + \frac{\eta_0}{E_b \Omega_0} \right]^{-1}$$

```

function Sigma_2 = Sigma_2(rdb,m1,m2,L,delta)
    r=10^(rdb/10);
    m1=m1; % ตัวแปรเสริมเฟดคิง
    m2=m2;
    L=L; % วิถี
    N=127; % รหัสโกลด์
    K=25; % จำนวนผู้ใช้งาน
    delta=delta; % อัตราการลดลงเฉลี่ย
    Sum=0; % ค่าเริ่มต้นของผลบวก
    for l=0:(L-1)
        q=exp(-l*delta);
        Sum=Sum+q;
    end
    qL=Sum;
    Co_1=(2*(K-1)*qL)/(3*N);
    Co_2=(qL-1)/N;
    Co_3=1/r;
    Co_4=(Co_1+Co_2+Co_3)^(-1);
    Sigma_2=Co_4;

```

โปรแกรมส่วนแสดงผล BER กับ Eb/No ที่ไม่ได้เข้ารหัส โดยมีจำนวนชุดรับ 2 สาขา

```

status='start'
m1=1.5;
m2=0.5;
L=2;
delta=0;
for rdb=0:40
    N1=Nocode_2(rdb,m1,m2,L,delta);
    NOCODE_21=[NOCODE_21,N1];
    R=[R,rdb];
end
status='1 from 8'
m1=1.4;
m2=0.6;
L=2;
delta=0;
for rdb=0:40
    N2=Nocode_2(rdb,m1,m2,L,delta);
    NOCODE_22=[NOCODE_22,N2];
end
status='2 from 8'
m1=1.3;
m2=0.7;
L=2;
delta=0;
for rdb=0:40
    N3=Nocode_2(rdb,m1,m2,L,delta);
    NOCODE_23=[NOCODE_23,N3];
end
End

```

```

status='3 from 8'
m1=1;
m2=1;
L=2;
delta=0;
for rdb=0:40
    N4=Nocode_2(rdb,m1,m2,L,delta);
    NOCODE_24=[NOCODE_24,N4];
end
status='4 from 8'
semilogy(R,NOCODE_21,'B.',R,NOCODE_22,'B',R,NOCODE_23,'K.',R,NOCODE_24,'
K')
xlabel('Eb/No (dB)')
ylabel('Bit Error Rate')
set(gcf,'paperposition',[0.25,4 8 6]);
text(25,0.023,'Uncoded')
whitebg(gcf,'w')
hold

```

ฟังก์ชันของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของระบบที่ไม่ได้เข้ารหัส โดยใช้จำนวนชุดรับ 4 สาขา

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\prod_{l=0}^{L-1} \left[1 + \left(\frac{t}{\lambda_l} \right)^2 \right]^{m_l/2}} \left\{ \cos \left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{\sigma_0} \sin \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{1/4}} \right] \right\}$$

สมการ

$$+ \sin \left[\sum_{l=0}^{L-1} m_l \tan^{-1} \left(\frac{t}{\lambda_l} \right) \right] \left[1 - \frac{\sqrt{\sigma_0} \cos \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sigma_0} \right) \right]}{(t^2 + \sigma_0^2)^{1/4}} \right] \left. \right\} \frac{dt}{t}$$

โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยกฎของเกาส์

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n$$

```

function Nume_4=Nume_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta)
t=[0.093307812017
0.492691740302
1.215595412071
2.269949526204
3.667622721751
5.425336627414
7.565916226613
10.120228568019
13.130282482176
16.654407708330
20.776478899449
25.623894226729
31.407519169754
38.530683306486
48.026085572686];

```

```

wt=[0.2395781770311
    0.560100842793
    0.887008262919
    1.22366440215
    1.57444872163
    1.94475197653
    2.34150205664
    2.77404192683
    3.25564334640
    3.80631171423
    4.45847775384
    5.27001778443
    6.35956346973
    8.03178763212
    11.5277721009];

r=10^(rdb/10);

m1=m1; % ตัวแปรเสริมเฟดคิง
m2=m2;
m3=m3;
m4=m4;

g=15; % จำนวนราก

L_0=m1/exp(0*delta);
L_1=m2/exp(-1*delta);
L_2=m3/exp(-2*delta);
L_3=m4/exp(-3*delta);

Sum=0; % ค่าเริ่มต้นของผลบวก
for i=1:g
    ti=t(i);
    wti=wt(i);
    X_0=ti/L_0;
    X_1=ti/L_1;
    X_2=ti/L_2;
    X_3=ti/L_3;
    Xa=(1+X_0^2)^(m1/2);
    Xb=(1+X_1^2)^(m2/2);
    Xc=(1+X_2^2)^(m3/2);
    Xd=(1+X_3^2)^(m4/2);
    Xe=Xa*Xb*Xc*Xd;
    Ya=(m1*atan(X_0))+ (m2*atan(X_1))+ (m3*atan(X_2))+ (m4*atan(X_3));
    S=Sigma_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta);
    Za=ti/S;
    Zb=1/2*atan(Za);
    Zc=sqrt(S);
    Zd=(ti^2+S^2)^(1/4);
    Ze=Zc*sin(Zb)/Zd;
    Ha=Zc*cos(Zb)/Zd;

    Co1=1/Xe;
    Co2=cos(Ya);
    Co3=Ze;
    Co4=sin(Ya);
    Co5=1-Ha;
    numt=(Co1*((Co2*Co3)+(Co4*Co5)))/ti;
    Sum=Sum+wti*numt;
end

Nume_4=Sum; % ผลของการอินทิเกรต

```

ฟังก์ชันของ SNR ที่อยู่ในรูป $\sigma_0 S$ โดยมีค่า

$$S = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=0}^{L-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2$$

$$\sigma_0 = \left[\frac{2(K-1)q(L, \delta)}{3N} + \frac{q(L, \delta) - 1}{N} + \frac{\eta_0}{E_b \Omega_0} \right]^{-1}$$

```
function Sigma_4=Sigma_4 (rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta)
    r=10^(rdb/10);
    m1=m1; % ตัวแปรเสริมเฟดคิง
    m2=m2;
    m3=m3;
    m4=m4;
    L=L; % จำนวนวิถี
    N=127; % รหัสโกลด์
    K=25; % จำนวนผู้ใช้งาน
    delta=delta; % อัตราการลดทอน
    Sum=0; % ค่าเริ่มต้นของผลบวก
    for l=0:(L-1)
        q=exp(-l*delta);
        Sum=Sum+q;
    end
    qL=Sum;
    Co_1=2*(K-1)*qL/(3*N);
    Co_2=(qL-1)/N;
    Co_3=1/r;
    Co_4=(Co_1+Co_2+Co_3)^(-1);
    Sigma_4=Co_4;
```

โปรแกรมส่วนแสดงผล BER กับ E_b/N_0 ที่ไม่ได้เข้ารหัส โดยมีจำนวนชุดรับ 4 สาขา

```
status='start'
m1=0.5;
m2=0.75;
m3=1.25;
m4=1.5;
L=4;
delta=0;
for rdb=0:40
    N1=Nocode_4 (rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta);
    NOCODE_41=[NOCODE_41,N1];
    R=[R,rdb];
end
status='1 from 8'

m1=0.75;
m2=0.8;
m3=1.2;
m4=1.25;
```

```

for rdb=0:40
    N2=Nocode_4 (rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta);
    NOCODE_42=[NOCODE_42,N2];
end
status='2 from 8'

m1=1;
m2=1;
m3=1;
m4=1;
for rdb=0:40
    N3=Nocode_4 (rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta);
    NOCODE_43=[NOCODE_43,N3];
end
status='3 from 8'
semilogy(R,NOCODE_41,'B.',R,NOCODE_42,'B ',R,NOCODE_43,'K*')
xlabel('Eb/No (dB)')
ylabel('Bit Error Rate')
set(gcf,'paperposition',[0.25,4 8 6]);
text(25,0.023,'Uncoded')
whitebg(gcf,'w')
hold

```

โปรแกรมของระบบที่ใช้การเข้ารหัส RS และใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว โดยใช้จำนวนชุดรับ 2 สาขา

สมการความน่าจะเป็นอัตราความผิดพลาดบิตเฉลี่ยของขอบเขตล่างภายหลังการถอดรหัส

$$P_{ED} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=t+1}^n i \binom{n}{i} P_b^i (1 - P_b)^{n-i}$$

```

function Error_2=Error_2 (rdb,m1,m2,L,delta,n,k)
    d=n-k+1;
    t=fix((n-k)/2);
    A=Uncode_2 (rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    B=1-A;
    Sum=0;
    for i=(t+1):n
        ni=fact(n)/(fact(i)*fact(n-i));
        ki=i*ni*A^i*B^(n-i);
        Sum=Sum+ki;
    end
    E=Sum/n;
    Error_2=E;

```

ฟังก์ชันของระบบที่เข้ารหัสโดยใช้จำนวนชุดรับ 2 สาขา

```

function Uncode_2=Uncode_2 (rdb,m1,m2,L,delta,n,k)
    D=Numer_2 (rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    U=(1/(2*pi))*D;
    Uncode_2=U;

```

ฟังก์ชันการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของระบบที่เข้ารหัสโดยใช้จำนวนชุดรับ 2 สาขา

```
function Numer_2=Numer_2(rdb,m1,m2,L,delta,n,k)
t=[0.093307812017
0.492691740302
1.215595412071
2.269949526204
3.667622721751
5.425336627414
7.565916226613
10.120228568019
13.130282482176
16.654407708330
20.776478899449
25.623894226729
31.407519169754
38.530683306486
48.026085572686];

wt=[0.2395781770311
0.560100842793
0.887008262919
1.22366440215
1.57444872163
1.94475197653
2.34150205664
2.77404192683
3.25564334640
3.80631171423
4.45847775384
5.27001778443
6.35956346973
8.03178763212
11.5277721009];

r=10^(rdb/10);
m1=m1;
m2=m2;

g=15; % จำนวนราก

L_0=m1/exp(0*delta);
L_1=m2/exp(-1*delta);

Sum=0; % ค่าเริ่มต้นของผลบวก
for i=1:g
    ti=t(i);
    wti=wt(i);
    X_0=ti/L_0;
    X_1=ti/L_1;
    Xa=(1+X_0^(2))^(m1/2);
    Xb=(1+X_1^(2))^(m2/2);
    Xc=Xa*Xb;

    Ya=(m1*atan(X_0)+(m2*atan(X_1)));

    S=Sigma_02(rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    Za=ti/S;
    Zb=1/2*atan(Za);
    Zc=sqrt(S);
```

```

Zd=(ti^(2)+S^(2))^(1/4);
Ze=Zc*sin(Zb)/Zd;
Ha=Zc*cos(Zb)/Zd;

Co_1=1/Xc;
Co_2=cos(Ya);
Co_3=Ze;
Co_4=sin(Ya);
Co_5=1-Ha;
numt=(Co_1*((Co_2*Co_3)+(Co_4*Co_5)))/ti;
Sum=Sum+wti*numt;
end
Numer_2=Sum; % ผลของการอินทิเกรต

```

ฟังก์ชันของ SNR ที่อยู่ในรูป $\sigma_0 S$ โดยมีค่า

$$S = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=0}^{L-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2$$

$$\sigma_0 = \left[\frac{2(K-1)q(L, \delta)}{3N} + \frac{q(L, \delta) - 1}{N} + \frac{\eta_0}{E_b \Omega_0} \right]^{-1}$$

```

function Sigma_02=Sigma_02(rdb,m1,m2,L,delta,n,k)
r=10^(rdb/10);
m1=m2; % ตัวแปรเสริมเฟดคิง
m2=m2;
L=L; % จำนวนวิถี
delta=delta; % อัตราการลดลงเฉลี่ย
n=n;
k=k;
Code=k/n;
N=127; % รหัสโกลด์
K=25; % จำนวนผู้ใช้งาน

Sum=0;
for l=0:(L-1)
q=exp(-l*delta);
Sum=Sum+q;
end
qL=Sum;

Co_1=2*(K-1)*qL/(3*N);
Co_2=(qL-1)/N;
Co_3=1/(Code*r);
Co_4=(Co_1+Co_2+Co_3)^(-1);
Sigma_02=Co_4;

```

โปรแกรมส่วนแสดงผล BER กับ Eb/No ที่เข้ารหัส โดยมีจำนวนชุดรับ 2 สาขา

```

status='start'
m1=1.5;
m2=0.5;
L=2;
delta=0;

%RS(7,5) m1=1.5, m2=0.5
n=7;
k=5;
for rdb=0:40
    N1=Nocode_2(rdb,m1,m2,L,delta);
    NOCODE_21=[NOCODE_21,N1];
    E1=Error_2(rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    ERROR_21=[ERROR_21,E1];
    R=[R,rdb];
end
status='1 from 8'

%RS(15,8) m1=1.5, m2=0.5
n=15;
k=8;
for rdb=0:40
    E2=Error_2(rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    ERROR_22=[ERROR_22,E2];
end
status='2 from 8'

m1=1;
m2=1;
L=2;
delta=0;
%RS(7,5) m1=1 m2=1
n=7;
k=5;
for rdb=0:40
    N2=Nocode_2(rdb,m1,m2,L,delta);
    NOCODE_22=[NOCODE_22,N2];
    E3=Error_2(rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    ERROR_23=[ERROR_23,E3];
end
status='3 from 8'

%RS(15,8) m1=1 m2=1
n=15;
k=8;
for rdb=0:40
    E4=Error_2(rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    ERROR_24=[ERROR_24,E4];
end
status='4 from 8'

m1=1;
m2=1;
L=2;
delta=0;

```

```

%RS(63,42) m1=1 m2=1
n=63;
k=42;
for rdb=0:40
    E5=Error_2(rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    ERROR_25=[ERROR_25,E5];
end
status='5 from 8'

m1=1.5;
m2=0.5;
L=2;
delta=0;
%RS(63,42) m1=1.5, m2=0.5
n=63;
k=42;
for rdb=0:40
    E6=Error_2(rdb,m1,m2,L,delta,n,k);
    ERROR_26=[ERROR_26,E6];
end
status='6 from 8'

semilogy(R,NOCODE_21,'M.',R,ERROR_21,'R.',R,ERROR_22,'B.',R,NOCODE_22,'M
',R,ERROR_23,'R',R,ERROR_24,'B',R,ERROR_25,'G',R,ERROR_26,'G. ');
Xlabel('Eb/No (dB)');
Ylabel('Bit Error Rate');
set(gcf,'paperposition',[0.25,4 8 6]);
text(25,0.023,'Uncoded');
text(25,1.4*10^(-3),'Error Only(7,5)');
text(25,1*10^(-5),'Error Only(15,8)');
whitebg(gcf,'w');
hold

```

โปรแกรมของระบบที่ใช้การเข้ารหัส RS และใช้การถอดรหัสแก้ไขความผิดพลาดอย่างเดียว โดยใช้จำนวนชุดรับ 4 สาขา

สมการความน่าจะเป็นอัตราความผิดพลาดบิตเฉลี่ยของขอบเขตล่างภายหลังการถอดรหัส

$$P_{ED} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=t+1}^n i \binom{n}{i} P_b^i (1 - P_b)^{n-i}$$

```

function Error_4=Error_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k)
d=n-k+1;
t=fix((n-k)/2);
A=Uncode_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k);
B=1-A;
Sum=0;
for i=(t+1):n
    ni=fact(n)/(fact(i)*fact(n-i));
    ki=i*ni*A^i*B^(n-i);
    Sum=Sum+ki;
end
E=Sum/n;
Error_4=E;

```

ฟังก์ชันของระบบที่เข้ารหัสโดยใช้จำนวนชุดรับ 4 สาขา

```
function Uncode_4=Uncode_4 (rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k)
    D=Numer_4 (rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k);
    U=(1/(2*pi))*D;
    Uncode_4=U;
```

ฟังก์ชันการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของระบบที่เข้ารหัสโดยใช้จำนวนชุดรับ 4 สาขา

```
function Numer_4=Numer_4 (rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k)
```

```
t=[0.093307812017
    0.492691740302
    1.215595412071
    2.269949526204
    3.667622721751
    5.425336627414
    7.565916226613
    10.120228568019
    13.130282482176
    16.654407708330
    20.776478899449
    25.623894226729
    31.407519169754
    38.530683306486
    48.026085572686];
```

```
wt=[0.2395781770311
    0.560100842793
    0.887008262919
    1.22366440215
    1.57444872163
    1.94475197653
    2.34150205664
    2.77404192683
    3.25564334640
    3.80631171423
    4.45847775384
    5.27001778443
    6.35956346973
    8.03178763212
    11.5277721009];
```

```
r=10^(rdb/10);
```

```
m1=m1;
```

```
m2=m2;
```

```
m3=m3;
```

```
m4=m4;
```

```
g=15;
```

% จำนวนราก

```
L_0=m1/exp(0*delta);
```

```
L_1=m2/exp(-1*delta);
```

```
L_2=m3/exp(-2*delta);
```

```
L_3=m4/exp(-3*delta);
```

```
Sum=0;
```

% ค่าเริ่มต้นของผลบวก

```

for i=1:g
    ti=t(i);
    wti=wt(i);
    X_0=ti/L_0;
    X_1=ti/L_1;
    X_2=ti/L_2;
    X_3=ti/L_3;

    Xa=(1+X_0^2)^(m1/2);
    Xb=(1+X_1^2)^(m2/2);
    Xc=(1+X_2^2)^(m3/2);
    Xd=(1+X_3^2)^(m4/2);
    Xe=Xa*Xb*Xc*Xd;

    Ya=(m1*atan(X_0))+(m2*atan(X_1))+(m3*atan(X_2))+(m4*atan(X_2));

    S=Sigma_04(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k);

    Za=ti/S;
    Zb=1/2*atan(Za);
    Zc=sqrt(S);
    Zd=(ti^2+S^2)^(1/4);
    Ze=Zc*sin(Zb)/Zd;
    Ha=Zc*cos(Zb)/Zd;

    Co1=1/Xe;
    Co2=cos(Ya);
    Co3=Ze;
    Co4=sin(Ya);
    Co5=1-Ha;
    numt=(Co1*((Co2*Co3)+(Co4*Co5)))/ti;
    Sum=Sum+wti*numt;
end
Numer_4=Sum; % ผลของการอินทิเกรต

```

ฟังก์ชันของ SNR ที่อยู่ในรูป $\sigma_0 S$ โดยมีค่า

$$S = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{n=0}^{L-1} \{\beta_n^{(1)}\}^2$$

$$\sigma_0 = \left[\frac{2(K-1)q(L,\delta)}{3N} + \frac{q(L,\delta)-1}{N} + \frac{\eta_0}{E_b \Omega_0} \right]^{-1}$$

```

function Sigma_04 = Sigma_04(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k)
    r=10^(rdb/10);
    m1=m1; % ตัวแปรเสริมเฟดดิ้ง
    m2=m2;
    m3=m3;
    m4=m4;
    L=L; % จำนวนวิถี
    delta=delta; % อัตราการลดลงของกำลังเฉลี่ย
    n=n;
    k=k;

```

```

Code=k/n;
N=127; % รหัสโกลด์
K=25; % จำนวนผู้ใช้งาน
Sum=0;
for l=0:(L-1)
    q=exp(-l*delta);
    Sum=Sum+q;
end
qL=Sum;

Co_1=(2*(K-1)*qL)/(3*N);
Co_2=(qL-1)/N;
Co_3=1/(Code*r);
Co_4=(Co_1+Co_2+Co_3)^(-1);
Sigma_04=Co_4;

```

โปรแกรมส่วนแสดงผล BER กับ E_b/N_0 ที่เข้ารหัส โดยมีจำนวนชุดรับ 4 สาขา

```

status='start'
m1=0.5;
m2=0.75;
m3=1.25;
m4=1.5;
L=4;
delta=0;

%RS(7,5) m1=0.5, m2=0.75, m3=1.25, m4=1.5
n=7;
k=5;
for rdb=0:40
    N1=Nocode_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta);
    NOCODE_41=[NOCODE_41,N1];
    E1=Error_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k);
    ERROR_41=[ERROR_41,E1];
    R=[R,rdb];
End

status='1 from 8'

%RS(15,8) m1=0.5, m2=0.75, m3=1.25, m4=1.5
n=15;
k=8;
for rdb=0:40
    E2=Error_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k);
    ERROR_42=[ERROR_42,E2];
end
status='2 from 8'

m1=1;
m2=1;
m3=1;
m4=1;
L=4;
delta=0;

```

```

%RS(7,5) m1=1.0, m2=1.0 ,m3=1.0, m4=1.0
n=7;
k=5;
for rdb=0:40
    N2=Nocode_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta);
    NOCODE_42=[NOCODE_42,N2];
    E3=Error_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k);
    ERROR_43=[ERROR_43,E3];
end
status='3 from 8'

%RS(15,8) m1=1.0, m2=1.0 ,m3=1.0, m4=1.0
n=15;
k=8;
for rdb=0:40
    E4=Error_4(rdb,m1,m2,m3,m4,L,delta,n,k);
    ERROR_44=[ERROR_44,E4];
end
status='4 from 8'

semilogy(R,NOCODE_41,'M.',R,NOCODE_42,'M',R,ERROR_43,'R.',R,ERROR_41,'R'
,R,ERROR_44,'B.',R,ERROR_42,'B')
xlabel('Eb/No (dB)')
ylabel('Bit Error Rate')
set(gcf,'paperposition',[0.25,4 8 6]);
text(25,1*10^(-2),'Uncoded')
text(25,1.4*10^(-4),'Error Only(7,5)')
text(25,1.4*10^(-7.5),'Error Only(15,8)')
whitebg(gcf,'w')
hold

```

ภาคผนวก จ.

การเผยแพร่งานวิจัย

1. ณรงค์ศักดิ์ วิโรจวานิช, กอบชัย เดชหาญ, “การวิเคราะห์สมรรถนะของการไม่เข้ารหัสและการเข้ารหัส R-S ในระบบ DS-CDMA ชนิดโคฮีเรนต์แบบบีพีเอสเคโดยใช้ช่องสัญญาณเฟดดิ้งแบบนากามิ,”;วิศวกรรมลาดกระบัง ปีที่18 ฉบับที่ 3 เดือน กันยายน 2544

ประวัติผู้เขียน

นายณรงค์ศักดิ์ วิโรจวานิช เกิดเมื่อวันที่ 28 เมษายน 2519 ที่จังหวัดตาก สำเร็จการศึกษา
วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม จากภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะ
วิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปีการศึกษา 2543