

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
ของแขนกลอ่อนตัวชนิดสองข้อต่อแบบบาง

MATHEMATICAL MODELING
FOR A THIN TWO-LINK FLEXIBLE ROBOT ARM

กุลวิตรี พรวุ้ง
KUNWITREE PHRAMRUNG

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2545

ISSN 074-648-542-3

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
ของแขนกลอ่อนตัวชนิดสองข้อต่อแบบบาง

MATHEMATICAL MODELING
FOR A THIN TWO-LINK FLEXIBLE ROBOT ARM

กุลวิตรี พรำรุ่ง

KUNWITREE PHRAMRUNG

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 42569
วัน, เดือน, ปี..... 3 1 พ.ค. 2545

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2545

ISBN 974-648-542-3

MATHEMATICAL MODELING
FOR A THIN TWO-LINK FLEXIBLE ROBOT ARM

KUNWITHREE PHRAMRUNG

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2002

ISBN 974-648-542-3

COPYRIGHT 2002

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวชนิด
	สองข้อต่อแบบบาง
นักศึกษา	นางสาวกุลวิตรี พรำรุ่ง
รหัสประจำตัว	39065361
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2545
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวัฒน์
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม	ผศ.ดร.ปิติเขต สุรักษา

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวชนิดสองข้อต่อแบบบาง โดยใช้ทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli) โดยอาศัยวิธีของลากรานจ์ (Lagrange Method) โดยจะพิจารณาผลกระทบของการหน่วงรวมทั้งการศึกษาและวิเคราะห์ลักษณะโครงสร้างการอ่อนตัวของแขนกลในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้จำลองผลและแสดงลักษณะการสั่นเนื่องด้วยกลไกการสั่นตามแบบจำลองที่สร้างขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB โดยจำลองภาพเป็นกราฟเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง

Thesis Title	Mathematical modeling for a Thin Two-Link Flexible Robot Arm
Student	Miss Kunwitree Phramrung
Student ID.	39065361
Degree	Master of science
Program	Applied Mathematics
Year	2002
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Pongpan Rattanathanawan
Thesis Co-advisor	Assist. Prof. Dr. Pitikhate Sooraksa

ABSTRACT

This research was investigate a new mathematical model of a thin two-link flexible robot arm by uses the Euler-Bernoulli beam theory along with Lagrange Method. There are significant damping effects of the arm model in consideration. Detailed analysis and derivation are given to support the mathematical model of these particular flexibles mechanisms. The MATLAB simulation results of the model are performed to validate the accuracy of the model.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ด้วยความช่วยเหลือจาก รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ รวมทั้งได้รับการให้คำปรึกษาและคำแนะนำ เป็นอย่างดีในการจัดทำวิทยานิพนธ์จาก ผศ.ดร.ปิติเชต สู้รักษา ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม และขอขอบคุณ รศ.ภักคินี ชิตสกุล ที่ให้ความกระจ่างในส่วนของเนื้อหา สุดท้ายขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ให้กำลังใจมาโดยตลอด และหวังว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะมีประโยชน์ต่อผู้สนใจ และผู้ศึกษาในแนวทางเดียวกัน

กุลวิตรี พรำรุ่ง

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญภาพ.....	VI
รายการสัญลักษณ์.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	1
1.3 แนวความคิดที่ใช้ในงานวิจัย.....	2
1.4 ขอบเขตของงานวิจัย.....	3
1.5 ขั้นตอนของงานวิจัย.....	3
1.6 สมมติฐานเบื้องต้น.....	3
1.7 คำจำกัดความที่ใช้ในงานวิจัย.....	4
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
2.1 เนื้อหาสำคัญที่ใช้ในงานวิจัย.....	5
2.1.1 การหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีพลังงาน.....	5
2.1.2 การหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีลากรางจ์.....	7
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
บทที่ 3 วิธีดำเนินงานวิจัย.....	14
3.1 แขนกล้ออ่อนตัวสองระดับขั้นความเร็ว.....	14
3.2 แขนกล้ออ่อนตัวสองระดับขั้นความเร็วที่มีกลไกการหน่วง.....	27
บทที่ 4 ผลของงานวิจัย.....	36
4.1 กรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วง.....	37

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.2	กรณีที่พิจารณาการหนดวงโดยกำหนดค่าคงตัวของการหนดวงที่ปลายแขนเท่ากัน.....	41
4.3	กรณีที่พิจารณาการหนดวงโดยกำหนดค่าคงตัวของการหนดวงที่ปลายแขนไม่เท่ากัน...	45
4.4	การเปรียบเทียบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	62
บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ.....		72
5.1	สรุปผลของงานวิจัย.....	72
5.2	ข้อเสนอแนะ.....	73
เอกสารอ้างอิง.....		74
ภาคผนวก.....		78
ประวัติผู้เขียน.....		107

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
2.1 แผนภาพเสรีพลวัต.....	5
2.2 แบบจำลองระบบโครงสร้างเคลื่อนที่เสรี.....	6
3.1 แขนกลอ่อนตัวสองระดับชั้นความเสรี	14
4.1 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1,$ $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งมีค่าเอาท์พุทเป็น y_2	38
4.2 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1,$ $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.1.....	38
4.3 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1,$ $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งมีค่าอินพุทเป็น u_2	40
4.4 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1,$ $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.3.....	40
4.5 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2,$ $d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งมีค่าเอาท์พุทเป็น y_1	42
4.6 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1,$ $d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.5.....	42
4.7 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2,$ $d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งมีค่าอินพุทเป็น u_2	44
4.8 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1,$ $d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.7.....	44
4.9 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01,$ $d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งค่าเอาท์พุทเป็น y_1	46
4.10 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1,$ $d_1=0.01, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.9.....	46
4.11 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01,$ $d_2=0.04, d_3=0, d_4=0.2$ ค่าเอาท์พุทเป็น y_1	48
4.12 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1,$ $d_1=0.01, d_2=0.04, d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.11.....	48

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
4.13 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งค่าเอทพุทเป็น y_1	50
4.14 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.13.....	50
4.15 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0.04, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งค่าเอทพุทเป็น y_1	52
4.16 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0.04, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.15.....	52
4.17 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุทเป็น u_4	54
4.18 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.17.....	54
4.19 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0.04, d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุทเป็น u_4	56
4.20 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0.04, d_3=0, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.19.....	56
4.21 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุทเป็น u_4	58
4.22 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.21.....	58
4.23 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0.04, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุทเป็น u_4	60
4.24 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0.04, d_3=0.05, d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.23.....	60
4.25 แสดงการจำลองการสั่นของแขนจากงานวิจัยของลูกาในกรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วงเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, M_1=0.1, M_2=0.1, m_1=1.2, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$	62
4.26 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุทเป็น u_1	63

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
4.27 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1,$ $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_2	64
4.28 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1,$ $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_3	65
4.29 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1,$ $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_4	66
4.30 แสดงการจำลองการสั่นของแขนจากงานวิจัยของลูคาในกรณีที่พิจารณาการหน่วงเมื่อเทียบกับ เวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, M_1=0.1, M_2=0.1, m_1=1.2, m_2=0.1, d_1=0.1, d_2=d_3=0.002,$ $d_4=0.1$	67
4.31 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1, d_1=0.1,$ $d_2=d_3=0.002, d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_1	68
4.32 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1, d_1=0.1,$ $d_2=d_3=0.002, d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_2	69
4.33 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1, d_1=0.1,$ $d_2=d_3=0.002, d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_3	70
4.34 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=1.2, m_2=0.1, d_1=0.1,$ $d_2=d_3=0.002, d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_4	71
1 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$	78
2 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าเอาต์พุตเป็น y_3 (สอดคล้องกับ ภาพที่ 1).....	78
3 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$	79
4 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าเอาต์พุตเป็น y_4 (สอดคล้องกับ ภาพที่ 3).....	79
5 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$	80
6 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าอินพุตเป็น u_3 (สอดคล้องกับภาพ ที่ 5).....	80
7 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$	81

สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
8 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าอินพุทเป็น u_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 7)	81
9 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.05$	82
10 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.05$ โดยค่าเอาต์พุทเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 9)	82
11 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=d_3=0, d_4=0.01$	83
12 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=d_3=0, d_4=0.01$ โดยค่าเอาต์พุทเป็น y_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 11).....	83
13 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0, d_4=0.05$	84
14 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0, d_4=0.05$ โดยค่าอินพุทเป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 13).....	84
15 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0, d_4=0.01$	85
16 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0, d_4=0.01$ โดยค่าอินพุทเป็น u_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 15).....	85
17 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$	86
18 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าเอาต์พุทเป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 17).....	86
19 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$	87
20 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าเอาต์พุทเป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 19).....	87
21 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$	88
22 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าเอาต์พุทเป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 21).....	88
23 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$	89
24 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าเอาต์พุทเป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 23).....	89
25 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$	90

สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
26 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าเอาท์พุทเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 25).....	90
27 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$	91
28 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าเอาท์พุทเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 27).....	91
29 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$	92
30 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าเอาท์พุทเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 29).....	92
31 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$	93
32 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าเอาท์พุทเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 31).....	93
33 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$	94
34 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุทเป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 33).....	94
35 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$	95
36 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุทเป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 35).....	95
37 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$	96
38 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุทเป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 37).....	96
39 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$	97
40 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุทเป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 39).....	97
41 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$	98
42 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าอินพุทเป็น u_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 41).....	98
43 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$	99

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
44 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าอินพุตเป็น u_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 43).....	99
45 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$	100
46 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าอินพุตเป็น u_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 45).....	100
47 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$	101
48 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าอินพุตเป็น u_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 47).....	101

รายการสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย	หน่วย
A_{ai}	พื้นที่ตัดขวางของข้อที่ i (ค่าคงที่)	m^2
d	ค่าคงตัวของการหน่วง	$N*s/m$
d_i	ค่าคงตัวของการหน่วงของข้อที่ i	$N*s/m$
E	ค่ามอดูลัสของยัง	N/m^2
E_i	โมดูลัสความยืดหยุ่นของข้อที่ i	N/m^2
$F(t)$	แรงภายนอก	N
F_d	แรงต้านของตัวหน่วง	N
F_s	แรงต้านของสปริง	N
F_x	แรงในทิศทางของ x	N
k	ค่าคงตัวของสปริง	N/m
I_i	พื้นที่โมเมนต์ความเฉื่อยของข้อที่ i	m^4
L_i	ความยาวของข้อที่ i	m
m_i	มวลที่ปลายแขนของข้อที่ i	kg
Q_i	แรงวางนัยทั่วไป	N
t	เวลา	s
T	พลังงานจลน์	$N*m$
U	พลังงานศักย์	$N*m$
w'_{1,L_1}	อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของข้อที่ 1 ณ ตำแหน่ง L_1 เมื่อเทียบกับระยะทาง	
w'_{2,L_2}	อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของข้อที่ 2 ณ ตำแหน่ง L_2 เมื่อเทียบกับระยะทาง	
\dot{w}_{1,L_1}	อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของข้อที่ 1 ณ ตำแหน่ง L_1 เมื่อเทียบกับเวลา	
\dot{w}_{2,L_2}	อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของข้อที่ 2 ณ ตำแหน่ง L_2 เมื่อเทียบกับเวลา	
$w_i(x, t)$	ระยะการโค้งงอในแนวตามขวางของข้อที่ i	
W	งาน	$N*m$
x_i	ระยะทางสำหรับข้อที่ i	m

รายการสัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย	หน่วย
\dot{x}	ความเร็ว	m/s
\ddot{x}	ความเร่ง	m/s ²
ξ	สัมประสิทธิ์การหน่วง	N*s/m
ρ	ความหนาแน่นของมวล	kg/m ³
ρ_i	ความหนาแน่นเชิงปริมาตรของข้อที่ i	kg/m ³
θ_i	การกระจัดเชิงมุม	rad
$\dot{\theta}_i$	ความเร็วเชิงมุม	rad/s
$\ddot{\theta}_i$	ความเร่งเชิงมุม	rad/s ²
ω	ความถี่ธรรมชาติ	rad/s

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย

ปัจจุบันโลกได้มีการพัฒนาทางเทคโนโลยีไปอย่างมากมายและรวดเร็ว โดยเฉพาะทางด้านอุตสาหกรรมมีการใช้เครื่องมือ เครื่องทุ่นแรงมาช่วยในการประกอบ การ ผู้วิจัยเล็งเห็นว่าการสร้างเครื่องมือบางประเภทโดยเฉพาะเครื่องยกของที่จะช่วยลดแรงงานคนและเพิ่มความสะดวกรวดเร็วในการประกอบ การ จึงมีความสนใจในการนำแขนหุ่นยนต์มาใช้ ซึ่งปัจจุบันการนำแขนกลที่มีลักษณะทางกายภาพ ที่มีน้ำหนักเบา อ่อนตัว มีลักษณะของแขนเหมือนกันตลอดทั้งลำแขน ซึ่งในลักษณะดังกล่าวได้มีผู้นำมาใช้งานบ้างแล้ว ข้อดีของแขนกลแบบนี้คือ น้ำหนักเบาจะช่วยให้การลดพลังงาน และในการขับเคลื่อนสามารถให้ผลตอบสนองที่รวดเร็ว ซึ่งน่าจะให้ผลที่ดีกว่าแขนกลแบบดั้งเดิม (conventional robot arm) หรือแขนกลหลายข้อต่อที่พบเห็นได้ในปัจจุบัน ซึ่งจะมีรูปร่างค่อนข้างใหญ่และวัสดุที่ใช้ประกอบเป็นแขนหุ่นยนต์มีข้อจำกัดในการเคลื่อนไหวมาก แต่แขนหุ่นยนต์ที่ทำจากวัสดุน้ำหนักเบาจะมีความยืดหยุ่น และสามารถเคลื่อนที่เร็ว และใช้พลังงานในการขับเคลื่อนน้อย แต่เนื่องจากความอ่อนตัวของแขนหุ่นยนต์ จะเกิดการแกว่งที่ตำแหน่งปลายเมื่อแขนหุ่นยนต์มีการเคลื่อนที่ ทำให้การควบคุมทำได้ยากกว่าแขนหุ่นยนต์แบบแข็งเกร็ง และในหลายสถานการณ์ไม่สามารถใช้การออกแบบตัวควบคุมที่ใช้ได้ดีกับแขนหุ่นยนต์แบบแข็งเกร็ง มาใช้กับแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวโดยที่ละเลยความอ่อนตัวได้ จึงต้องใช้ตัวควบคุมที่มีความสามารถในการจัดการสั่นไหวเพื่อให้เหมาะสมกับประเภทของงานที่ต้องการจะใช้สอย ซึ่งวิธีการควบคุมแขนกลดังกล่าวสามารถทำได้หลายวิธีด้วยกัน และในหลายวิธีเหล่านั้นต้องการแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อออกแบบและทำนายการควบคุม รวมทั้งนำสมการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างระบบ

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้นำเอาทฤษฎีลำแขนของออยเลอร์-เบอร์นูลีและวิธีแบบลากรางจ์มาใช้ในการวิเคราะห์และแก้ปัญหา จุดประสงค์ของโครงงานนี้เป็นการศึกษาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อ และปรากฏการทางกายภาพและอันตรกริยาเนื่องจากผลกระทบของการหน่วงต่อแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อ

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) เพื่อพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวชนิดสองข้อต่อแบบบาง

2) เพื่อศึกษาผลกระทบของการเกิดการหน่วงจากโครงสร้าง (structural damping)

1.3 แนวความคิดที่ใช้ในงานวิจัย

จากรายงานเชิงเอกสารพบว่าจีวอเตอร์ (Gevater) [1] ได้ศึกษาโครงสร้างเชิงกลอ่อนตัวในระบบยานพาหนะเป็นคนแรก ซึ่งได้รับความสนใจเป็นอย่างมากจากวิศวกร นักวิจัยและนักวิทยาศาสตร์โดยทั่วไป โดยได้นำทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลลีมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบแรก โดยสามารถสร้างแทนแบบจำลองแขนกลในรูปคานอ่อนตัว (flexible beam) เป็น

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

เมื่อ E คือค่ามอดูลัสของยัง (Young's modulus)

I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของภาคตัดขวาง

A คือพื้นที่หน้าตัดของแขน

ρ คือความหนาแน่นของมวล

$y = y(x, t)$ คือฟังก์ชันของระยะขจัด

สมการของออยเลอร์-เบอร์นูลลีในแต่ละลำแขนเมื่อมีอากาศหน่วง (air damping) คือ

$$EI \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

เมื่อ M คือโมเมนต์การโค้งงอ

γ คือค่าคงที่ของการหน่วงโดยอากาศ

และสมการโมเมนต์ (moment) ใหม่ที่ได้จากการหน่วงแบบเคลวิน-วอยท์ (Kelvin-Voigt damping) คือ

$$M_{KV} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \zeta I \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t}$$

เมื่อ ζ คือค่าสัมประสิทธิ์ของการหน่วงแบบเคลวิน-วอจท์

ดังนั้นสมการออยเลอร์-เบอร์นูลลีที่มีส่วนประกอบของการหน่วงในแต่ละลำแขนจะอยู่ในรูปของ

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \zeta I \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

1.4 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) นำทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลลีมาวิเคราะห์และหาผลเฉลยสุดท้ายของสมการในกรณีต่างๆ ของแขนกล พร้อมทั้งจำลองผลทางคอมพิวเตอร์เพื่อพิจารณาผลการจำลองโดยกราฟ
- 2) ศึกษาผลกระทบของการหน่วงต่อการสั่นของแขน

1.5 ขั้นตอนของงานวิจัย

- 1) ค้นคว้าเอกสารและข้อมูลที่เกี่ยวข้อง
- 2) ศึกษาเอกสารและข้อมูลที่รวบรวมได้
- 3) หาผลเฉลยของสมการในกรณีต่างๆ ของแขนกล พร้อมทั้งจำลองผลทางคอมพิวเตอร์เพื่อพิจารณาการสั่นของแขนซึ่งจำลองภาพโดยกราฟ
- 4) ศึกษาผลกระทบของการหน่วงพร้อมทั้งจำลองผลทางคอมพิวเตอร์เพื่อพิจารณาการสั่นของแขนซึ่งจำลองภาพโดยกราฟ
- 5) สรุปผลและเรียบเรียงวิทยานิพนธ์

1.6 สมมติฐานเบื้องต้น

- 1) ลักษณะของแขนกลเป็นเนื้อเดียวกันตลอดทั้งลำแขน ซึ่งมีลักษณะทั้งเบาและบาง
- 2) การเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งอยู่ในแนวระดับบนระนาบ XY
- 3) แรงโน้มถ่วงของโลก แรงดึงในแนวแกน แรงอัดตัวที่ทำให้เสียรูปและความเสียหายจะไม่นำมาพิจารณา
- 4) ศึกษาผลกระทบการหน่วงโดยโครงสร้างภายใน

1.7 คำจำกัดความที่ใช้ในงานวิจัย

- 1) ทฤษฎีลำแขนของออยเลอร์-เบอร์นูลี คือการเคลื่อนที่หรือการสั่นสะเทือนในแนวขวาง โดยไม่มีแรงภายนอกกระทำและจะใช้ได้เฉพาะในกรณีที่แขนกลมีความยาวมากและมีหน้าตัดบาง
- 2) การหน่วงโดยโครงสร้างภายใน เป็นการหน่วงที่เกิดจากโครงสร้างที่มีผลต่อการด้านการเคลื่อนที่ภายในเนื้อสาร

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 เนื้อหาสำคัญที่ใช้ในงานวิจัย

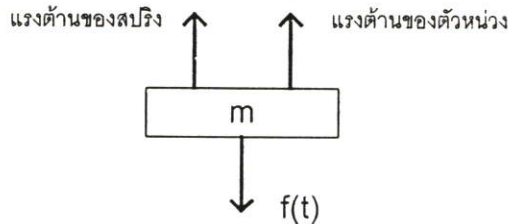
2.1.1 การหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีพลังงาน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์หรือสมการเชิงอนุพันธ์การเคลื่อนที่ของระบบโครงสร้างสามารถจะหาได้โดยใช้หลักของพลังงาน เช่นในกรณีของการเคลื่อนที่แบบเสรี (ถ้า $d=F(t)=0$) ถ้าไม่มีการสูญเสียพลังงานขณะที่มวลเคลื่อนที่ ผลรวมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ย่อมเท่ากับค่าคงตัว นั่นคือ

$$T + U = \text{ค่าคงตัว}$$

และ
$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2.1.1)$$

ผลที่ได้รับจากการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาในสมการที่ (2.1.1) ก็คือสมการอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของระบบโครงสร้าง หรือเรียกว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ



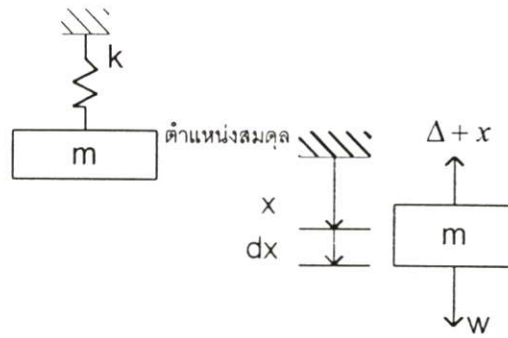
ภาพที่ 2.1 แผนภาพเสรีพลวัต (dynamic free-body diagram) ของมวล

ถ้าพิจารณาระบบโครงสร้างในภาพที่ 2.1 โดยสมมติให้มวลและค่าคงที่ของสปริงเคลื่อนที่ขึ้น-ลงในแนวดิ่ง และเนื่องจาก T เป็นฟังก์ชันของความเร็วและ U เป็นฟังก์ชันของระยะการเคลื่อนที่ ดังนั้นพลังงานจลน์ (kinetic energy) ของระบบในภาพที่ 2.1 คือ

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

เมื่อ m คือมวลของวัตถุ

\dot{x} คือความเร็วของวัตถุ



ภาพที่ 2.2 แบบจำลองระบบโครงสร้างเคลื่อนที่แบบเสรี

ถ้าพิจารณาที่ตำแหน่งสมดุลของมวล เช่นในภาพที่ 2.2 พลังงานศักย์ (potential energy) จะเป็นผลรวมของงานเชิงกล (mechanical work) ที่ทำให้มวลจากตำแหน่ง x ใดๆ กลับเข้าสู่ตำแหน่งสมดุล

$$U = \int_x^0 [W - k(\Delta + x)] dx = -\int_x^0 kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

เมื่อ W คืองาน

k คือค่าคงตัวของสปริง

Δ คือระยะทางที่เปลี่ยนแปลงไป

x คือระยะทาง

แทนค่า T และ U ลงในสมการที่ (2.1.1) ดังนั้น

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0$$

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

เนื่องจาก \dot{x} ไม่เท่ากับศูนย์ตลอดเวลา ดังนั้น

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

2.1.2 การหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีลากรางจ์

การหาสมการเชิงอนุพันธ์หรือสมการเคลื่อนที่ของระบบ โดยเฉพาะระบบที่ซับซ้อนมักจะหาโดยวิธีของลากรางจ์ ซึ่งจะต้องกำหนดพิกัดวางนัยทั่วไป (generalized coordinate) แรงวางนัยทั่วไป (generalized force) และความสัมพันธ์ของพลังงานของระบบ โดยที่พลังงานศักย์จะเป็นฟังก์ชันของพิกัดวางนัยและพลังงานจลน์จะเป็นฟังก์ชันของความเร็ว ดังนั้น

$$U = U(q_i)$$

$$T = T(\dot{q}_i)$$

เมื่อ q_i คือพิกัดวางนัยทั่วไป

เราสามารถหาสมการลากรางจ์ได้ คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1.2)$$

เมื่อ Q_i คือแรงวางนัยทั่วไป

ในกรณีที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำ $Q_i = 0$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (2.1.3)$$

ถ้า i มีค่าจาก 1 ถึง n เราจะได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบ n สมการ โดยวิธีนี้ก็สามารถจะหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือนได้โดยง่าย โดยทั่วไปพลังงานศักย์จะไม่ขึ้นกับ \dot{q}_i ดังนั้นถ้าให้ L ซึ่งเรียกว่าลากรางเจียน (Lagrangian) คือ

$$L = T - U \quad (2.1.4)$$

สมการที่ (2.1.2) สามารถเขียนในเทอมของลากรางเจียนได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1.5)$$

ถ้าระบบการสั่นสะเทือนมีตัวหน่วงอยู่ด้วย แรงต้านของตัวหน่วงจะเป็นฟังก์ชันของความเร็วและพลังงานที่ระบบต้องสูญเสีย นั่นคือ

$$D = D(\dot{q}_i) = \frac{1}{2} d\dot{q}_i^2 \quad (2.1.6)$$

เมื่อ d คือค่าคงตัวของตัวหน่วง

และสมการลากรางจ์ของระบบสั่นสะเทือนที่ประกอบด้วยตัวหน่วงก็คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2.1.7)$$

และสมการลากรางจ์จะมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือนที่ซับซ้อน แล้วสามารถใช้วิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ด้วย

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ.1970 จีวอร์เตอร์ ได้ศึกษาโครงสร้างเชิงกลอ่อนตัวสำหรับยานพาหนะเป็นคนแรก และมีผู้พัฒนาแขนกลอ่อนตัวในเวลาต่อมา ซึ่งแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวนั้นจะพิจารณาเสมือนลำแขนท่อนหนึ่ง โดยได้นำเอาทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลีมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบแรกสามารถสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล ได้ดังนี้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

จากนั้นเรลห์ (Rayleigh) ได้พัฒนาสมการของออยเลอร์-เบอร์นูลีให้ดีขึ้นโดยพิจารณาผลกระทบจากความเฉื่อยของการหมุน ซึ่งได้สมการการเคลื่อนที่ของแขนกล ดังนี้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + -I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1971 ทิมอสเซนโก (Timosshenko) ได้พัฒนาสมการของเรเลห์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโดยพิจารณาผลกระทบโดยเนื่องมาจากความเค้นเฉือนที่มีผลต่อแกนกล จนสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของแกนกล ได้ดังนี้

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - I \left(1 - \frac{E}{\kappa^2 G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa^2 G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$$

เมื่อ κ คือสัมประสิทธิ์ความเค้นของทิมอสเซนโก

G คือมอดูลัสความแข็งของเนื้อสาร

ในปี ค.ศ. 1984 แคนนอนและชมิทซ์ (Cannon and Schmitz) [2] ได้ศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับแกนกลอ่อนตัว ในงานวิจัยนี้มีการสร้างแบบจำลองสำหรับแกนกลและได้นำทฤษฎีค่าแขนของออยเลอร์-เบอร์นูลีมาใช้ การสร้างแบบจำลองของแคนนอนและชมิทซ์ในครั้งนั้นยังไม่มี การพิจารณาความเฉื่อยของการหมุนและการเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉือน ทั้งนี้ได้นำหลักของแฮมิลตัน (Hamilton's principal) ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะได้รูปแบบของการเริ่มต้นของอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สี่และสี่เงื่อนไขว้ขอบเขต งานวิจัยของแคนนอนและชมิทซ์เป็นงานวิจัยที่เริ่มต้นทำการทดลองและวางแนวทางการควบคุมแกนกลชนิดนี้

ในปี ค.ศ. 1986 ยูโกวิชและคณะ (Yurkovich et al.) [3] ได้ศึกษาแกนกลชนิดนี้เช่นกันโดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ให้กับแกนกลขึ้นมาจริงๆ กำหนดขนาดและความยาวของวัสดุที่ใช้ในลักษณะต่างๆ ทางด้านฮาร์ดแวร์ (hardware) ได้ทดลองในห้องปฏิบัติการโดยคำนึงถึงการยืดหยุ่นของลำแขน ซึ่งอาศัยสมมติฐานในวิธีแบบแผนสมมติ (assume mode method)

ในปี ค.ศ. 1988 เบโย (Bayo) [4] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับแกนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยใช้วิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ (finite element)

ในปี ค.ศ. 1990 พัท ทานากะและมิอุ (Bhat, Tanaka and Miu) [5] ได้ศึกษาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแกนกลชนิดนี้โดยใช้เทคนิคของการแปลงลาปลาซ (Laplace transform technique) ในการแก้ปัญหา การพิจารณาส่วนของแกนกลนั้นจะพิจารณาจากตำแหน่งของจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งของแขน ซึ่งเปรียบเสมือนลักษณะของแขนแบบปลายหมุน-ปลายอิสระ โดยการศึกษาคุณสมบัติทางกายภาพของแขนพร้อมทั้งอาศัยผลเฉลยของสมการทางคณิตศาสตร์

ในปี ค.ศ. 1993 เลา (Lao) [6] ได้สร้างแบบจำลองนี้โดยศึกษาตามทฤษฎีใหม่และอาศัยหลักของเอ-ดีเพนเดนทดิฟเฟอเรนเชียล (A-dependent differential operators) ในการแก้

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และในปีเดียวกันนี้คูบิกาและแวง (Kubica and Wang) [7] ได้สร้างแบบจำลองชนิดนี้เช่นกัน ซึ่งได้พิจารณาในกรณีปลายติดแน่น-ปลายอิสระ โดยศึกษาแนวทางของกริทซัน (Gritzun) ในการนำทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลลีมาใช้ในการสร้างแบบจำลอง ต่อมาไควและเชน (Qi and Chen) [8] ได้ศึกษาพบว่าในแขนกลมีพื้นที่ตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งจะมีผลกระทบของการแปรรูปของความเค้นเนื่องต่อการสั่นของแขน จะมีน้ำหนักเป็นสามเท่าของผลกระทบความเฉื่อยของการหมุน จากนั้นลินและเลวิส (Lin and Lewis) [9] ได้สร้างทฤษฎีโดยอาศัยสมมติฐานในวิธีแบบแผนสมมติเช่นกัน

ในปี ค.ศ. 1994 ซีนาว์นและโครรามิ (Zeinoun and Khorrami) [10] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยพิจารณาในกรณีแบบปลายติดแน่น-ปลายอิสระ โดยใช้หลักการของการเคลื่อนที่ของลากรางเจียน (Lagrangian dynamics) ในการแก้ปัญหาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทั้งหมด

ในปี ค.ศ. 1997 สุรัक्षा (Sooraksa) [11] ได้สร้างแบบจำลองแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยอาศัยทฤษฎีทิมอสเซนโก ซึ่งพิจารณาผลกระทบของความเฉื่อยในการหมุนและความเค้นเฉือนในภาคตัดขวาง ซึ่งมีผลกระทบของการหน่วงโดยอากาศและการหน่วงแบบเคลวิน-วอจท์ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกล

ในแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อนั้นมีผู้ให้ความสนใจมากมายจึงได้เกิดทฤษฎีที่น่าสนใจขึ้นหลายทฤษฎีดังต่อไปนี้

ในปี ค.ศ. 1989 เชอมูสโก, อคูเลนโกและโบลอนนิค (Chemousko, Akulenko and Bolotnik) [12] ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีการควบคุมเวลาที่ดียิ่งที่สุดที่นำไปสู่โครงสร้างการควบคุมของหุ่นยนต์ เมื่อไม่นานมานี้มีงานวิจัยได้พัฒนาถึงปัญหาที่แตกต่างของการควบคุมที่ดีที่สุดสำหรับหุ่นยนต์ในโรงงาน เราให้ความสำคัญเกี่ยวข้องกับงานที่ทำในทำนองนี้และนำเสนอผลลัพธ์ใหม่ที่เหมาะสมที่สุดของการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์จักรกล ซึ่งพัฒนาการขับเคลื่อนโดยการผสมโลหะที่เกี่ยวข้องกับไฟฟ้า เราจะได้วงรอบเปิด (open-loop) และการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมด้วยเวลาที่ดียิ่งที่สุดสำหรับการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ทั้งวิธีการวิเคราะห์และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ผลลัพธ์แสดงว่าการควบคุมที่ดีที่สุดสามารถนำไปสู่การพิจารณาการปรับปรุงให้ดีขึ้นในเวลาที่เกิดขึ้นสำหรับวิธีการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์

ในปี ค.ศ. 1990 เฟดดีมา, ไอสเลอร์และซีกาลแมน (Feddema, Eisler and Segalman) [13] ได้วิเคราะห์ผลการทดลองการควบคุมแบบจำลองและการเซนเซอร์ (sensor) สำหรับแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อในแนวระนาบ โดยใช้วิธีไฟไนท์อีลีเมนต์ในการหาเวลาเหมาะสมที่สุดสำหรับการประมาณค่าการเคลื่อนที่ของแขนกลแบบอ่อนตัว โดยมีส่วนประกอบของมอเตอร์ (motor) อยู่ด้วย และในปีเดียวกันลูคา (Luca) [14] ได้พิจารณาการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ของ

แขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อที่มีน้ำหนักเบาในแนวระนาบ (โดยไม่คิดผลสะท้อนของการบิด) และความสามารถในการรับน้ำหนักของแขน โดยได้นำแนวความคิดของบุค (W.J. Book) ซึ่งใช้สมการออยเลอร์-เบอร์นูลีและวิธีแบบแผนสมมติสำหรับแต่ละข้อต่อ รวมทั้งใช้วิธีลากรางจ์หาผลเฉลยของสมการ

ในปี ค.ศ. 1991 ฮิลสเลย์และยูโกวิช (Hillsley and Yurkovich) [15] ได้ทำการวิเคราะห์และทดลองเกี่ยวกับการควบคุมการสั่นของแขนกลสองข้อต่อ โดยมีการเชื่อมต่องานเป็นแบบหมุนและมีส่วนประกอบของมอเตอร์ด้วย และในปีเดียวกันวังและวียาซากา (Wang and Viyasagar) [16,17] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมแบบเชิงเส้น ในการอินพุท-เอาต์พุท (input-output) ของสมการสำหรับกลุ่มของหุ่นยนต์หลายข้อต่อ ระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) และข้อต่อของแขนกลซึ่งแสดงว่าสมการอินพุท-เอาต์พุทเป็นเพียงการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมแบบเชิงเส้น ถ้าค่าที่เกิดขึ้นถูกเลือกอย่างเหมาะสมแล้ว อย่างไรก็ตามหากการเคลื่อนที่แบบไม่เชิงเส้นไม่ได้เกิดจากการสังเกตโดยการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุม นั่นคือความไม่เสถียรเป็นอุปสรรคที่แสดงว่าเทคนิคการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมแบบเชิงเส้นไม่เหมาะสมสำหรับกลุ่มของเครื่องจักรนี้ ซึ่งวิธีที่สำคัญที่สุดยังอยู่ในช่วงสำรวจ และยังได้ทำการศึกษาเพิ่มเติมอีกด้วยว่าการควบคุมและการออกแบบการสังเกตสำหรับกลุ่มของเครื่องจักรหลายข้อต่อที่มีลำแขนเป็นแบบยืดหยุ่นซึ่งแสดงว่ามีความเป็นไปได้ในการเปลี่ยนแปลงสมการสเปซ (state-space) ของเครื่องจักรเหล่านี้ไปในเซตของสมการที่เท่ากันซึ่งเป็นเชิงเส้นเกือบหมด การควบคุมโดยใช้การป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมที่มีสถานะไม่เชิงเส้น ซึ่งถูกออกแบบให้เป็นพื้นฐานเท่านั้นในส่วนเชิงเส้นของการเปลี่ยนแปลงระบบสมการ การสังเกตซึ่งประมาณสถานะเข้าสู่สถานะแท้จริงเลขชี้กำลังซึ่งแสดงว่าส่วนประกอบของการสังเกตกับการควบคุมมีผลลัพธ์ในระบบซึ่งเป็นค่าเสถียรในการอินพุท-เอาต์พุทที่จำกัดในเหตุผลที่จำกัด

ในปี ค.ศ. 1993 เลวิสและวานดีกรีฟ (Lewis and Vandegriff) [18] ได้นำเสนอการควบคุมไม่เชิงเส้นสำหรับตำแหน่งปลายของแขนและความเร็วของแขนหุ่นยนต์ยืดหยุ่นหลายข้อต่อถูกออกแบบโดยยืนยันการแสดงผลการควบคุมมี 3 ส่วน โดยส่วนภายนอกเป็นพื้นฐานภายในการอินพุท-เอาต์พุทข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมและการเพิ่มส่วนภายในว่ามีความเสถียรในช่วงการเคลื่อนที่ (เช่นโหมดการยืดหยุ่น) ใช้รูปแบบเอกฐานที่มีความยุ่งเหยิงซึ่งหากว่าโหมดการยืดหยุ่นตั้งฉากกับ 2 ตำแหน่ง ส่วนหนึ่งควบคุมที่ขจัดบนความต้องการตำแหน่งปลาย และ (ขอบเขตของขั้นตอนในการแก้ไข) ส่วนที่สามารถใช้ให้เกิดความเสถียรในการเคลื่อนที่ที่ยืดหยุ่น และในปีเดียวกันมัทซุโนและยามาโมโตะ (Matsuno and Yamamoto) [19] ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีการแสดงทั้งติดต่อกับแรงที่ใช้โดยเครื่องจักรที่ยืดหยุ่นและควบคุมตำแหน่งของจุดปลายเมื่อติดต่อกับพื้นผิว ซึ่งได้ประมาณค่าการเปลี่ยนรูปที่ยืดหยุ่นโดยความหมายของฟังก์ชัน B-spline และสมการการ

เคลื่อนที่ของมุมที่เชื่อมต่อกัน การสั้นของแขนที่ยืดหยุ่นและการจำกัดแรง การควบคุมสำหรับการผสมตำแหน่ง/แรงควบคุมสำหรับเครื่องจักรกลยืดหยุ่นถูกออกแบบบนพื้นฐานของวิธีการที่ยู่งยาก และ แสดงผลที่ยอมรับได้ว่าการรูปแบบการควบคุมการสังเกตที่ดี ต่อมา ลัวและกัว (Luo and Guo) [20] ได้แสดงการวิเคราะห์ความเสถียรสำหรับบางสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสองโดยทั่วไป แสดงจากการควบคุมความเครียดของการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมโดยตรง การแสดงออกของความเสถียรของเลขชี้กำลังต้องอาศัยสามส่วนของสมการอนุพันธ์ หนึ่งในนั้นอยู่ในรูปแบบทั่วไปของสมการย่อยที่ปรากฏขึ้นและอีกสองชนิดอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อย จะได้ผลลัพธ์เป็นทฤษฎีเฉพาะที่น่าสนใจเพราะแสดงให้เห็นส่วนประกอบที่สำคัญของการควบคุมความตึงเครียดของการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุมโดยตรงและสาธิตกำลังในการควบคุมของแขนกลยืดหยุ่นด้วย

ในปี ค.ศ. 1997 วัง, ซู, เซา, แซง (Wang, Xu, Tso and Zhang) [21] ได้หาผลเฉลยของการทดลองแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อในแนวระนาบโดยแขนกลขนาดใหญ่จะรวมกับแขนกลขนาดเล็กที่จุดปลายแขนของแขนกลขนาดใหญ่ด้วยการเชื่อมต่อแบบหมุน ซึ่งใช้แสงเลเซอร์พีเอสดี (Laser- PSD) สำหรับวัดตำแหน่งของปลายแขนของแขนกลขนาดเล็ก

ในปี ค.ศ. 1998 ย่าง, คริสชาน, อัง (Yang, Krishnan and Ang) [22] ได้สร้างแบบจำลองการควบคุมการสั้นแบบการป้อนข้อมูลแก่อุปกรณ์ควบคุม (feedback) ของแขนกลอ่อนตัวหลายข้อต่อ ซึ่งแสดงการพิสูจน์ด้วยทฤษฎีเลียปูนอฟ (Lyapunov) และในปีเดียวกันโคแกนและอิฟเตอร์ (Dogan and Ifter) [23] ได้สร้างแบบจำลองและการควบคุมของเครื่องจักรหุ่นยนต์ยืดหยุ่น 2 ข้อต่อ ซึ่งข้อต่อแรกแข็งเกร็งและข้อที่ 2 ยืดหยุ่น เราแสดงสมการการเคลื่อนที่ของระบบโดยความหมายของหลักแฮมิลตันอันดับแรกเป็น PD และ PD แบบไม่เชิงเส้น ลักษณะการควบคุมและการออกแบบได้รับแนวทางของความต้องการการอ้างอิงสัญญาณและค่าเบี่ยงเบนที่ถูกกำจัดที่จุดปลายของแขนที่ยืดหยุ่นแล้วพื้นฐานการควบคุมที่ตรงกันข้ามกับวิธี singular perturbation ถูกออกแบบซึ่งได้รับผลการควบคุมที่เหมือนกันกับวัตถุประสงค์ของการดำเนินการของการควบคุมการออกแบบถูกเปรียบเทียบกับแต่ละพื้นฐานอื่นๆ ในการแสดงผลลัพธ์ และสาร์การ์, ยามาโมโตะ และ มอนริ (Sarkar, Yamamoto and Mohri) [24] ได้พบแนวทางข้อผิดพลาดของแบบจำลองแขนกลอ่อนตัว โดยใช้ทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลีกับแบบจำลองการเคลื่อนที่ของข้อต่อแขนกลอ่อนตัวและหาผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ซึ่งแสดงด้วยสมการลากรางจ์โดยใช้วิธีของไฟไนท์อีลีเมนต์

สำหรับการสร้างแบบจำลองของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อนั้น ในปี ค.ศ. 1975 บุค, เมียดซา-นีโต และวิทนี (Book, Maizza-Neto and Whitney) [25] ได้ประมาณค่าแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อโดยตรงด้วยแบบจำลองอนุพันธ์เชิงเส้น

ในปี ค.ศ. 1978 บาลาส (Balas) [26] ได้ประมาณค่าแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อในแบบจำลองการแจกแจงตัวแปรแบบไม่เชิงเส้น

ในปี ค.ศ. 1979 บุค (Book) [27] ได้ใช้เทคนิคพิเศษซึ่งวิเคราะห์แขนกลอ่อนตัวโดยสมมติว่าข้อต่อนั้นโค้งงอในโหมดแรกของการสั่น

ในปี ค.ศ. 1982 ในงานของทรัคเคนบรอต (Truckenbrodt) [28] ได้วิเคราะห์การเปลี่ยนรูปของกลุ่มของข้อต่อที่ยืดหยุ่นโดยใช้วิธีการของ ริท-คานโตโรวิทช์ (Ritz-Kantorovitch) และศึกษาพฤติกรรมทางพลวัตที่เป็นแนวเส้นตรงโดยมีความสัมพันธ์กับสมการเชิงอนุพันธ์

ในปี ค.ศ. 1985 คาคโคเนนและฮาลมี (Karkkainen and Halme) [29] ได้ศึกษาปัญหาการประมาณค่าการอ่อนตัวของแขนกล จัดด์ และฟาลเคนเบิร์ก (Judd and Falkenburg) [30] ได้ประยุกต์เทคนิคดังกล่าวกับข้อต่อของแขนกลที่ไม่แข็งเกร็ง โดยนำเทคนิคของ สุนาดา และดูบอวสกี (Sunada and Dubowsky) [31] มาใช้และได้ปรับปรุงแนวทางของการพิจารณาโหมดการสั่นที่เพิ่มขึ้นด้วย ในขณะที่ชาสเซียคอสและเบคี (Chassiakos and Bekey) [32] ได้ประมาณค่าผลตอบรับของระบบการแจกแจงของตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับแขนกลดังกล่าว

สำหรับรายละเอียดและการดำเนินการวิจัยของแขนกลสองข้อต่อที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะนำเสนอในบทที่ 3 ซึ่งจะแสดงการดำเนินการคำนวณแบบจำลองโดยละเอียด

บทที่ 3

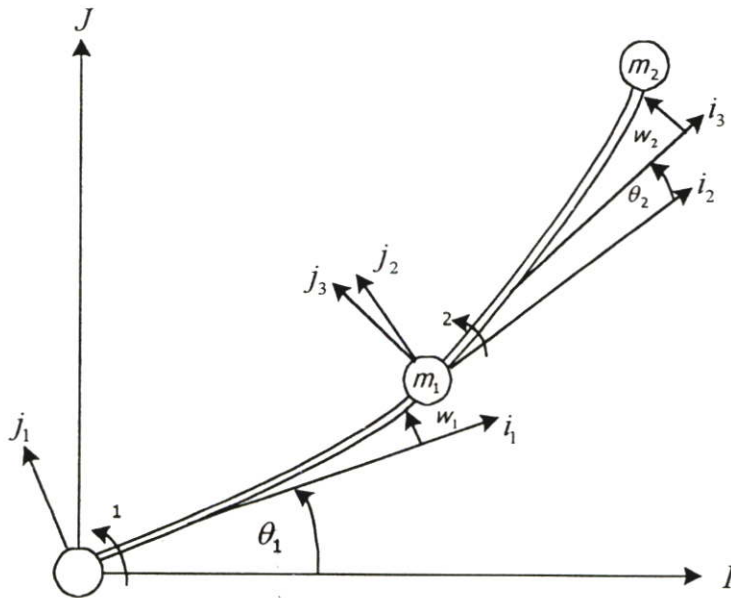
วิธีดำเนินงานวิจัย

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อการประยุกต์ใช้งานทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมเป็นปัญหาวิจัยหนึ่งที่ได้รับ ความสนใจจากนักวิจัยทั้งในภาคการศึกษาและอุตสาหกรรม หนึ่งในปัญหาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กำลังเป็นที่สนใจจากนักวิจัยก็คือ การสร้างแบบจำลองแขนกลอ่อนตัวเพื่อใช้ในการออกแบบระบบควบคุมชนิดต่างๆ ที่ต้องการแบบจำลองในการช่วยออกแบบและจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะพิจารณาแบบจำลองแขนกลของวงรอบเปิด โดยอันดับแรกจะพิจารณาแขนกลสองข้อต่อซึ่งสมการการเคลื่อนที่เป็นสมการที่ไม่มีหน่วย โดยได้แสดงลักษณะตัวแปรต่อผลกระทบทางพลศาสตร์ของวงรอบเปิดตามแบบสมาร์ท (Smart) [33] ซึ่งพิจารณาในรูปสองระดับชั้นความเร็ว

3.1 แขนกลอ่อนตัวสองระดับชั้นความเร็ว

เนื้อหาในบทนี้บรรยายถึงแบบจำลองเชิงเส้นของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อที่ขึ้นกับเวลา (ภาพที่ 3.1) ในระนาบ XY โดยไม่มีผลกระทบจากแรงโน้มถ่วงของโลก



ภาพที่ 3.1 แขนกลอ่อนตัวสองระดับชั้นความเร็ว

ให้ θ_1 แทนมุมข้อต่อของหัวไหล่ และ θ_2 แทนมุมข้อต่อของข้อศอก ในภาพที่ 3.1, m_1 และ m_2 แทนมวลของข้อที่ 1 และข้อที่ 2 ตามลำดับ จะใช้การสร้างแบบจำลองแบบแผนสมมติ เพื่อแสดงระยะโค้งงอในแนวตามขวางร่วมกับสมการพลศาสตร์ลากรางจ์ โดยตั้งต้นที่การกำหนดพลังงานจลน์และพลังงานศักย์สำหรับระบบสองข้อต่อตามแบบวิธีของสมาร์ท จนกระทั่งได้แบบจำลองของสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปของสมการสเตสเปซที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการออกแบบระบบควบคุมแบบต่างๆ ในทางวิศวกรรมต่อไป

เนื่องจากลักษณะของแขนกลเป็นแขนบาง ความเฉื่อยในการหมุนและแรงเค้นเฉือนในการเปลี่ยนรูปจึงมีค่าน้อยมากโดยอาจจะไม่นำมาพิจารณา ซึ่งใช้ทฤษฎีแขนกลของออยเลอร์-เบอร์นูลีดังจะกำหนดระบบพิกัดตามรูปที่ 3.1 ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I \\ J \end{Bmatrix} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{Bmatrix} i_2 \\ j_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(w'_{1,L_1}) & \sin(w'_{1,L_1}) \\ -\sin(w'_{1,L_1}) & \cos(w'_{1,L_1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{Bmatrix} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{Bmatrix} i_3 \\ j_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_2 \\ j_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1.3)$$

ในสมการที่ (3.1.2) นั้น ได้สมมติว่ามุมที่จุดปลายของข้อที่ 1 อันเป็นผลมาจากการโค้งงอเนื่องด้วยความยืดหยุ่นของข้อนั้นได้ประมาณค่าเป็น $\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=L_1}$ นอกจากนี้จะสังเกตได้ว่าการหมุนของข้อที่ 2 ของวัตถุแข็งเกร็งมีความสัมพันธ์กับจุดปลายของข้อที่ 1 ในแกนพิกัดของสมการที่ (3.1.1-3) ดังภาพที่ 3.1 โดย I และ J เป็นแกนในแนวตั้งและแนวนอนตามลำดับ และพิกัด i_1 และ j_1 แสดงการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งของข้อที่ 1 เทียบกับ I และ J ในทำนองเดียวกันพิกัด i_3 และ j_3 แสดงการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งของข้อที่ 2 เทียบกับ i_2 และ j_2

โดยอาศัยการแปลงพิกัดของสมการที่ (3.1.1-3) สำหรับตำแหน่งมวลบนข้อที่ 1 และ 2 ที่จุดตามลำดับ x_1 และจุด x_2 จะได้

$$\vec{r}_{1,x} = L_1 \hat{i}_1 + w_{1,L_1} \hat{j}_1 \quad (3.1.4)$$

$$\vec{r}_{2,x} = L_1 \hat{i}_1 + w_{1,L_1} \hat{j}_1 + x_2 \hat{i}_3 + w_2 \hat{j}_3 \quad (3.1.5)$$

และความเร็วสำหรับมวลบนข้อที่ 1 และ 2 ที่จุด x_1 และ x_2 ตามลำดับ คือ

$$\dot{\vec{r}}_{1,x} = (L_1\dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1,L_1})\hat{j}_1 - w_{1,L_1}\dot{\theta}_1\hat{i}_1 \quad (3.1.6)$$

$$\dot{\vec{r}}_{2,x} = (L_1\dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1,L_1})\hat{j}_1 - w_{1,L_1}\dot{\theta}_1\hat{i}_1 + (x_2\omega + \dot{w}_2)\hat{j}_3 - w_2\omega\hat{i}_3 \quad (3.1.7)$$

เมื่อ

$$\omega = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{1,L_1} \quad (3.1.8)$$

เนื่องจากมุมในสมการที่ (3.1.2) ที่พิจารณามีการเปลี่ยนแปลงที่เล็กน้อย จึงประมาณโดยสมมติ w'_{1,L_1} ว่ามีขนาดเล็กมาก ซึ่งทำให้ $\cos(w'_{1,L_1}) \cong 1$ และ $\sin(w'_{1,L_1}) \cong w'_{1,L_1}$ และให้ Ω เป็นผลรวมเชิงเส้นในการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้น

$$\cos(\Omega + w'_{1,L_1}) \approx \cos \Omega - w'_{1,L_1} \sin \Omega \quad (3.1.9)$$

$$\sin(\Omega + w'_{1,L_1}) \approx \sin \Omega + w'_{1,L_1} \cos \Omega$$

โดยผลคูณแบบจุด (dot product) ของความเร็ว คือ

$$\dot{\vec{r}}_{1,x} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,x} = L_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2L_1\dot{\theta}_1\dot{w}_{1,L_1} + \dot{w}_{1,L_1}^2 + w_{1,L_1}^2\dot{\theta}_1^2 \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{2,x} \cdot \dot{\vec{r}}_{2,x} &= L_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2L_1\dot{\theta}_1\dot{w}_{1,L_1} + \dot{w}_{1,L_1}^2 + x_2^2\omega^2 + 2x_2\omega\dot{w}_2 + \dot{w}_2^2 \\ &\quad + 2L_1\dot{\theta}_1x_2\omega \cos \theta_2 + 2L_1\dot{\theta}_1\dot{w}_2 \cos \theta_2 + 2\dot{w}_{1,L_1}x_2\omega \cos \theta_2 \\ &\quad + 2\dot{w}_{1,L_1}\dot{w}_2 \cos \theta_2 + w_{1,L_1}^2\dot{\theta}_1^2 + w_2^2\omega^2 + 2w_{1,L_1}\dot{\theta}_1w_2\omega \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

โดยอาศัยสมการข้างต้น พลังงานศักย์และพลังงานจลน์จะสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปของพหุนามเอกพันธ์กำลังสอง ซึ่งแนวคิดนี้สอดคล้องกับการสมมติโดยสมาร์ท ซึ่งพบว่าผลของการทดลองยืนยันการสมมติการกำหนดพลังงานจลน์ของระบบสองข้อต่อตามแนวคิดดังกล่าว

กำหนดให้ระยะโค้งงอตามขวางของแต่ละข้อ $w_i(x, t); i = 1, 2$ สัมพันธ์กับการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งสอดคล้องกับค่ามุม $\theta_i; i = 1, 2$ ของแต่ละข้อต่อ ตามลำดับ พหุนามเอกพันธ์กำลังสองของพลังงานจลน์สำหรับข้อที่ 1 และข้อที่ 2 สามารถหาได้ในรูป

$$\begin{aligned} T &= T_{L_1} + T_{L_2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (\rho A)_1 (\dot{r}_{1,x} \cdot \dot{r}_{1,x}) dx_1 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}_{1,x} \cdot \dot{r}_{1,x}) \Big|_{x_1=L_1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (\dot{r}_{2,x} \cdot \dot{r}_{2,x}) dx_2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}_{2,x} \cdot \dot{r}_{2,x}) \Big|_{x_2=L_2} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

ในสมการที่ (3.1.12) มวลที่จุดปลายคิดเสมือนมวลโดยรวมที่ปราศจากความเฉื่อยของการหมุนและการกำหนดพลังงานศักย์จะอาศัยสมมติฐานให้เป็นแกนกลเอกรูปในสถานะที่โค้งงอ และลำแขนจะปรับตัวเข้าสู่ระนาบเดิม ซึ่งสมบัติทางพลศาสตร์ของแขนเป็นไปตามกฎของฮุก (Hook's Law) ในที่นี้จะพิจารณากรณีที่ระยะการขจัดมีค่าน้อยๆ

งานวิจัยนี้จะสร้างสมการการเคลื่อนที่โดยใช้วิธีแบบแผนสมมติร่วมกับสมการลากรางจ์ โดยแบบแผนสมมติของแต่ละแขนนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันพิชัคคูณด้วยฟังก์ชันซึ่งขึ้นกับเวลาโดยมิโรวิต (Meirovitch) [34] ได้ว่า

$$w_1(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x_1) a_i(t) = \phi^T a = a^T \phi \quad (3.1.13)$$

$$w_2(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x_2) c_j(t) = \psi^T c = c^T \psi$$

แทนค่าแบบแผนสมมติตามสมการที่ (3.1.13) ลงในสมการที่ (3.1.12) ดังนั้นพหุนามเอกพันธ์กำลังสองของพลังงานจลน์ T_{L_1} สำหรับข้อที่ 1 คือ

$$T_{L_1} = \frac{1}{2} J_1^{(1)} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{a}^T M_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} \dot{a} + \dot{\theta}_1 \dot{a}^T M_{\dot{a}\theta_1}^{(1)} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 a^T M_{\theta_1\theta_1}^{(1)} a \quad (3.1.14)$$

เมื่อ

$$J_1^{(1)} = \int_0^{L_1} (\rho A)_1 x_1^2 dx_1 + m_1 x_1^2 \Big|_{x_1=L_1} \quad (3.1.15)$$

$$M_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} = \int_0^{L_1} (\rho A)_1 \phi \phi^T dx_1 + m_1 \phi \phi^T \Big|_{x_1=L_1} \quad (3.1.16)$$

$$M_{1\dot{a}}^{(1)} = \int_0^{L_1} (\rho A)_1 x_1 \phi dx_1 + m_1 x_1 \phi \Big|_{x_1=L_1} \quad (3.1.17)$$

$$M_{1aa}^{(1)} = \int_0^{L_1} (\rho A)_1 \phi \phi^T dx_1 + m_1 \phi \phi^T \Big|_{x_1=L_1} \quad (3.1.18)$$

โดย $J_1^{(1)}$ เป็นเทอมของความเฉื่อยการหมุนสำหรับข้อที่ 1, $M_{1\dot{a}}^{(1)T}$ เป็นเทอมของการป้อนข้อมูลล่วงหน้าของมุม θ_1 ถึงพิกัดโดยทั่วไปหรือเทอมที่เป็นระยะขจัดของจุดปลาย q , $M_{1\dot{a}}^{(1)}$ เป็นเทอมของการป้อนข้อมูลย้อนกลับจากระยะขจัดที่จุดปลายถึงมุม θ_1 จากอีกปลายหนึ่งของแขน

ในการทำงานเดียวกัน พหุนามเอกพันธ์กำลังสองของพลังงานจลน์ในข้อที่ 2 โดย T_{L_2} คือ

$$\begin{aligned} T_{L_2} = & \frac{1}{2} J_1^{(2)} \dot{\theta}_1^2 + J_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} J_2^{(2)} \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{a}^T M_{1\dot{a}}^{(2)} + \dot{\theta}_2 \dot{a}^T M_{2\dot{a}} \\ & + \frac{1}{2} \dot{a}^T M_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)} \dot{a} + \dot{\theta}_1 \dot{c}^T M_{1\dot{c}} + \dot{\theta}_2 \dot{c}^T M_{2\dot{c}} + \frac{1}{2} \dot{c}^T M_{\dot{c}\dot{c}} \dot{c} + \dot{c}^T M_{\dot{c}\dot{a}} \dot{a} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \mathbf{a}^T M_{1aa} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \mathbf{c}^T M_{1cc} \mathbf{c} + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \mathbf{c}^T M_{12cc} \mathbf{c} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \mathbf{c}^T M_{2cc} \mathbf{c} \\ & + \dot{\theta}_1^2 \mathbf{c}^T M_{1ca} \mathbf{a} + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \mathbf{c}^T M_{12ca} \mathbf{a} + \dot{\theta}_2^2 \mathbf{c}^T M_{2ca} \mathbf{a} + \dot{\theta}_1 \dot{c}^T \mathbf{c} M_{1c\dot{a}} \dot{a} + \dot{\theta}_2 \dot{c}^T \mathbf{c} M_{2c\dot{a}} \dot{a} \\ & + \frac{1}{2} \dot{c}^T \mathbf{c} M_{cc\dot{a}} \dot{a}^T \dot{a} + \dot{\theta}_1 \dot{c}^T M_{1c\dot{a}} \mathbf{a}^T \dot{a} \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} J_1^{(2)} = & \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (L_1^2 + x_2^2 + 2L_1 x_2 \cos \theta_2) dx_2 \\ & + m_2 (L_1^2 + x_2^2 + 2L_1 x_2 \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

$$J_{12} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (x_2^2 + L_1 x_2 \cos \theta_2) dx_2 + m_2 (x_2^2 + L_1 x_2 \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.21)$$

$$J_2 = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 x_2^2 dx_2 + m_2 x_2^2 \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.22)$$

$$M_{1\dot{a}}^{(2)} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (L_1 \phi_{L_1} + x_2^2 \phi'_{L_1} + L_1 x_2 \phi'_{L_1} \cos \theta_2 + x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2) dx_2 \\ + m_2 (L_1 \phi_{L_1} + x_2^2 \phi'_{L_1} + L_1 x_2 \phi'_{L_1} \cos \theta_2 + x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.23)$$

$$M_{2\dot{a}} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (x_2^2 \phi'_{L_1} + x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2) dx_2 + m_2 (x_2^2 \phi'_{L_1} + x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.24)$$

$$M_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (\phi_{L_1} \phi_{L_1}^T + x_2^2 \phi'_{L_1} \phi'_{L_1}{}^T + 2x_2 \phi_{L_1} \phi'_{L_1}{}^T \cos \theta_2) dx_2 \\ + m_2 (\phi_{L_1} \phi_{L_1}^T + x_2^2 \phi'_{L_1} \phi'_{L_1}{}^T + 2x_2 \phi_{L_1} \phi'_{L_1}{}^T \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.25)$$

$$M_{1\dot{c}} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (x_2 \psi + L_1 \psi \cos \theta_2) dx_2 + m_2 (x_2 \psi + L_1 \psi \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.26)$$

$$M_{2\dot{c}} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 x_2 \psi dx_2 + m_2 x_2 \psi \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.27)$$

$$M_{\dot{c}\dot{c}} = M_{1cc} = M_{12cc} = M_{2cc} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 \psi \psi^T dx_2 + m_2 \psi \psi^T \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.28)$$

$$M_{\dot{c}\dot{a}} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (x_2 \psi \phi'_{L_1}{}^T + \psi \phi_{L_1}^T \cos \theta_2) dx_2 + m_2 (x_2 \psi \phi'_{L_1}{}^T + \psi \phi_{L_1}^T \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.29)$$

$$M_{1aa} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (\phi_{L_1} \phi_{L_1}^T) dx_2 + m_2 (\phi_{L_1} \phi_{L_1}^T) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.30)$$

$$M_{1ca} = M_{12ca} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (\psi \phi_{L_1}^T \cos \theta_2) dx_2 + m_2 (\psi \phi_{L_1}^T \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.31)$$

$$M_{1cc\dot{a}} = M_{2cc\dot{a}} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (\psi^T \psi \phi_{L_1}'^T) dx_2 + m_2 (\psi^T \psi \phi_{L_1}'^T) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.32)$$

$$M_{cc\dot{a}\dot{a}} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (\psi^T \psi \phi_{L_1}'^T \phi_{L_1}'^T) dx_2 + m_2 (\psi^T \psi \phi_{L_1}'^T \phi_{L_1}'^T) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.33)$$

$$M_{1ca\dot{a}} = \int_0^{L_2} (\rho A)_2 (\psi \phi_{L_1}^T \phi_{L_1}'^T \cos \theta_2) dx_2 + m_2 (\psi \phi_{L_1}^T \phi_{L_1}'^T \cos \theta_2) \Big|_{x_2=L_2} \quad (3.1.34)$$

พหุนามเอกพันธ์กำลังสองของพลังงานศักย์ U คือ

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (EI)_1 (w_1'')^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} (EI)_2 (w_2'')^2 dx_2 \quad (3.1.35)$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (3.1.13) จะได้ว่า

$$U = \frac{1}{2} a^T K_a a + \frac{1}{2} c^T K_c c \quad (3.1.36)$$

เมื่อ

$$K_{aa} = \int_0^{L_1} ((EI)_1 \phi'' \phi''^T) dx_1 \quad (3.1.37)$$

$$K_{cc} = \int_0^{L_2} ((EI)_2 \psi'' \psi''^T) dx_2$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (3.1.14,19) และ (3.1.36) ของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์จะได้สมการลากรางเจียน (Lagrangian equation) L เป็น

$$\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2} J_1^{(1)} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{a}^T M_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} \dot{a} + \dot{\theta}_1 \dot{a}^T M_{\dot{a}\dot{\theta}_1}^{(1)} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 a^T M_{aa}^{(1)} a + \frac{1}{2} J_1^{(2)} \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + J_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} J_2^{(2)} \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{a}^T M_{\dot{a}\dot{\theta}_1}^{(2)} + \dot{\theta}_2 \dot{a}^T M_{\dot{a}\dot{\theta}_2} + \frac{1}{2} \dot{a}^T M_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)} \dot{a} \\
&\quad + \dot{\theta}_1 \dot{c}^T M_{\dot{c}} + \dot{\theta}_2 \dot{c}^T M_{\dot{c}} + \frac{1}{2} \dot{c}^T M_{\dot{c}\dot{c}} \dot{c} + \dot{c}^T M_{\dot{c}\dot{a}} \dot{a} + \dot{\theta}_1^2 c^T M_{1ca} a \\
&\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^T M_{12ca} a + \dot{\theta}_1 c^T M_{1ca\dot{a}} a^T \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 c^T M_{1cc} c + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^T M_{12cc} c \\
&\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 c^T M_{2cc} c + \dot{\theta}_1 c^T c M_{1cc\dot{a}} \dot{a} + \dot{\theta}_2 c^T c M_{2cc\dot{a}} \dot{a} + \frac{1}{2} c^T c M_{cc\dot{a}\dot{a}} \dot{a}^T \dot{a} \\
&\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 a^T M_{1aa} a - \frac{1}{2} a^T K_{aa} a - \frac{1}{2} c^T K_{cc} c
\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

สมการการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับสมการลากรางจ์ของระบบที่ไม่มีแรงภายนอก โดยสามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3.1.39}$$

เมื่อ

$$q = \left[\theta_1 \quad \theta_2 \quad a^T \quad c^T \right]^T \tag{3.1.40}$$

สมมติให้การขจัดตามแนวแกนยาว (axial axis) และความเร็วเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งในแนวนั้นมีค่าน้อยโดยแอสติ้ง (Hasting) [35] ดังนั้นสมการลากรางจ์จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$\bar{M} \ddot{q} + \bar{K} q = 0 \tag{3.1.41}$$

เมื่อ

$$\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + a^T (M_{1aa}^{(1)} + M_{1aa}^{(2)}) a + 2c^T M_{1ca} a + c^T M_{1cc} c \\ J_{12} + c^T M_{12ca} a + c^T M_{12cc} c \\ M_{1\dot{a}}^{(1)} + M_{1\dot{a}}^{(2)} + c^T M_{1ca\dot{a}} a + c^T c M_{1cc\dot{a}} \\ \vdots \\ M_{1\dot{c}} \end{bmatrix} \tag{3.1.42}$$

$$\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} J_{12} + c^T M_{12ca} a + c^T M_{12cc} c \\ J_2 + c^T M_{2cc} c \\ M_{2\dot{a}} + c^T c M_{2cc\dot{a}} \\ M_{2\dot{c}} \end{bmatrix} \quad (3.1.43)$$

$$\bar{M}_3 = \begin{bmatrix} M_{1\dot{a}}^{(1)} + M_{1\dot{a}}^{(2)} + c^T M_{1ca\dot{a}} a + c^T c M_{1cc\dot{a}} \\ M_{2\dot{a}} + c^T c M_{2cc\dot{a}} \\ \frac{1}{2} (M_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} + M_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)}) + \frac{1}{2} (M_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} + M_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)})^T + \frac{1}{2} c^T (M_{cc\dot{a}\dot{a}} + M_{cc\dot{a}\dot{a}}^T) c \\ M_{\dot{c}\dot{a}} \end{bmatrix} \quad (3.1.44)$$

$$\bar{M}_4 = \begin{bmatrix} M_{1\dot{c}} \\ M_{2\dot{c}} \\ M_{\dot{c}\dot{a}}^T \\ \frac{1}{2} (M_{\dot{c}\dot{c}} + M_{\dot{c}\dot{c}}^T) \end{bmatrix} \quad (3.1.45)$$

$$\bar{M} = [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2 \quad \bar{M}_3 \quad \bar{M}_4] \quad (3.1.46)$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{aa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{cc} \end{bmatrix} \quad (3.1.47)$$

เพื่อแปลงรูปให้สมการอยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ จะนิยามตัวแปรดังต่อไปนี้ เพื่อให้กับสมการการเคลื่อนที่

$$\eta_1 = \frac{m_1}{(\rho AL)_1}, \quad \eta_2 = \frac{m_2}{(\rho AL)_2}, \quad \eta_L = \frac{(\rho AL)_2}{(\rho AL)_1}, \quad \eta_e = \eta_1 + \eta_L (1 + \eta_2), \quad r_L = \frac{L_2}{L_1},$$

$$\mu_i = \left(\frac{EI}{\rho AL^4} \right)_i, \quad M_i = (\rho AL)_i, \quad \phi^* = \frac{\phi}{L_1}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{L_2}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{L_1} \quad \text{และ} \quad \xi_2 = \frac{x_2}{L_2}$$

เมื่อ η_1 และ η_2 แทนความสัมพันธ์ของมวลที่จุดปลายในแต่ละข้อต่อกับมวลของข้อต่อนั้นๆ

η_L แทนอัตราส่วนของมวลระหว่างข้อที่ 1 กับข้อที่ 2

η_e แทนตัวแปรซึ่งทำให้สมการทั้งหลายเข้าใจง่ายขึ้น

r_L แทนอัตราส่วนของความยาวระหว่างสองข้อต่อ

μ_i แทนคุณสมบัติความแข็งแรงของข้อที่ i

M_i แทนมวลของข้อที่ i

ϕ^* และ ψ^* แทนฟังก์ชันปกติ (normalized function) ของพิกัดช่วง ϕ และ ψ ตามลำดับ

ξ_1 และ ξ_2 แทนระยะของข้อที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

โดยอาศัยชุดตัวแปรไร้มิตติดังกล่าว สมการที่ (3.1.46-47) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} J_1^* &= \left\{ \frac{1}{3} + \eta_e + \eta_L r_L^2 \left(\frac{1}{3} + \eta_2 \right) \right\} + \{ \eta_L r_L (1 + 2\eta_2) \} \cos \theta_2 \\ &= J_{1,i}^* + J_{1,ii}^* \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

$$\begin{aligned} J_{12}^* &= \left\{ \frac{1}{3} + \eta_2 \right\} \eta_L r_L^2 + \left(\frac{1}{2} + \eta_2 \right) r_L^2 \cos \theta_2 \\ &= J_2^* + J_{12,ii}^* \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

$$J_2^* = \left(\frac{1}{3} + \eta_2 \right) \eta_L r_L^2 \quad (3.1.50)$$

$$\begin{aligned} M_{1\dot{a}}^* &= \left\{ \int_0^1 \phi^* d\xi_1 + \eta_e \phi_1^* \right\} + \left\{ \eta_L r_L L_2 \left(\frac{1}{3} + \eta_2 \right) \phi_1'^* \right\} \\ &\quad + \left\{ \eta_L \left(\frac{1}{2} + \eta_2 \right) (r_L \phi_1^* + L_2 \phi_1'^*) \right\} \cos \theta_2 \\ &= M_{1\dot{a},i}^* + M_{1\dot{a},ii}^* \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

$$\begin{aligned} M_{2\dot{a}}^* &= \left\{ r_L^2 \left(\frac{1}{3} + L_2 \eta_2 \right) \phi_1'^* \right\} + \left\{ r_L^2 \left(\frac{1}{2} + \eta_2 \right) \phi_1^* \right\} \cos \theta_2 \\ &= M_{2\dot{a},i}^* + M_{2\dot{a},ii}^* \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

$$\begin{aligned} M_{\dot{a}\dot{a}}^* &= \left\{ \int_0^1 \phi^* \phi^{*T} d\xi_1 + \eta_e \phi_1^* \phi_1^{*T} \right\} + \left\{ L_2^2 r_L \left(\frac{1}{3} + \eta_2 \right) \phi_1'^* \phi_1'^{*T} \right\} \\ &\quad + \left\{ L (L_2 + 2\eta_2) \phi_1^* \phi_1'^{*T} \right\} \cos \theta_2 \\ &= M_{1\dot{a}\dot{a}}^* + M_{\dot{a},ii}^* + M_{\dot{a},iii}^* \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.1.53)$$

$$\begin{aligned}
M_{1\dot{c}}^* &= \eta_L r_L^2 \left\{ \int_0^1 \xi_2 \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \right\} + \left\{ r_L^2 \left(\int_0^1 \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \right) \right\} \cos \theta_2 \\
&= M_{2\dot{c}}^* + M_{1\dot{c},ii}^* \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.1.54}$$

$$M_{2\dot{c}}^* = \eta_L r_L^2 \left(\int_0^1 \xi_2 \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \right) \tag{3.1.55}$$

$$M_{\dot{c}\dot{c}}^* = M_{1cc}^* = M_{12cc}^* = M_{2cc}^* = \eta_L r_L^2 \left(\int_0^1 \psi^* \psi^{*T} d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \psi_1^{*T} \right) \tag{3.1.56}$$

$$\begin{aligned}
M_{\dot{c}\dot{a}}^* &= r_L^2 L_2 \left\{ \int_0^1 \xi_2 \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \right\} \phi_1'^{*T} + r_L^2 \left\{ \left(\int_0^1 \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \right) \phi_1'^{*T} \right\} \cos \theta_2 \\
&= M_{\dot{c}\dot{a},i}^* + M_{1ca}^*
\end{aligned} \tag{3.1.57}$$

$$M_{1aa}^* = \int_0^1 \phi^* \phi^{*T} d\xi_1 + \eta_e \phi_1^* \phi_1'^{*T} \tag{3.1.58}$$

$$M_{1ca}^* = M_{12ca}^* = r_L^2 \left(\int_0^1 \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \right) \phi_1'^{*T} \cos \theta_2 \tag{3.1.59}$$

$$M_{1cc\dot{a}}^* = M_{2cc\dot{a}}^* = r_L^2 \left(\int_0^1 \psi^{*T} \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1'^{*T} \psi_1^* \right) \phi_1'^{*T} \tag{3.1.60}$$

$$M_{cc\dot{a}\dot{a}}^* = r_L \left(\int_0^1 \psi^{*T} \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1'^{*T} \psi_1^* \right) \phi_1'^{*T} \phi_1'^* \tag{3.1.61}$$

$$M_{1ca\dot{a}}^* = r_L \left(\int_0^1 \psi^* d\xi_2 + \eta_2 \psi_1^* \right) \phi_1'^{*T} \phi_1'^* \cos \theta_2 \tag{3.1.62}$$

$$K_{aa}^* = \left(\frac{EI}{L} \right)_1 \left[\int_0^1 \phi''^* \phi''^{*T} d\xi_1 \right] \tag{3.1.63}$$

$$K_{cc}^* = \left(\frac{EI}{L} \right)_2 \left[\int_0^1 \psi^{**} \psi^{**T} d\xi_2 \right] \quad (3.1.64)$$

เมื่อ ϕ^* แทนอนุพันธ์เมื่อเทียบกับตัวแปรในช่วง ξ_1

ϕ_1^* แทน ϕ^* ที่ $\xi_1=1$

ψ^* แทนอนุพันธ์เมื่อเทียบกับตัวแปรในช่วง ξ_2

ψ_1^* แทน ψ^* ที่ $\xi_2=1$

เมตริกซ์ที่นิยามในสมการที่ (3.1.48-64) นำมาใช้สร้างระบบเมตริกซ์

$$M_{1,i}^* = \begin{bmatrix} J_{1,i}^* + J_{1,ii}^* + a^T M_{1aa}^* a + c^T M_{\dot{c}\dot{c}}^* c \\ J_2^* + c^T M_{\dot{c}\dot{c}}^* c \\ M_{1\dot{a},i}^* + L_2 c^T c M_{1cc\dot{a}}^* \\ M_{2\dot{c}}^* \end{bmatrix} \quad (3.1.65)$$

$$M_{2,i}^* = \begin{bmatrix} J_2^* + c^T M_{\dot{c}\dot{c}}^* c \\ J_2^* + c^T M_{\dot{c}\dot{c}}^* c \\ M_{2\dot{a},i}^* + L_2 c^T c M_{1cc\dot{a}}^* \\ M_{2\dot{c}}^* \end{bmatrix} \quad (3.1.66)$$

$$M_{3,i}^* = \begin{bmatrix} M_{1\dot{a},i}^* + L_2 c^T c M_{1cc\dot{a}}^* \\ M_{2\dot{a},i}^* + L_2 c^T c M_{1cc\dot{a}}^* \\ M_{1aa}^* + M_{\dot{a}\dot{a},ii}^* + L_2^2 c^T c M_{cc\dot{a}\dot{a}}^* \\ M_{\dot{c}\dot{a},i}^* \end{bmatrix} \quad (3.1.67)$$

$$M_{4,i}^* = \begin{bmatrix} M_{2\dot{c}}^* \\ M_{2\dot{c}}^* \\ M_{\dot{c}\dot{a},i}^{*T} \\ M_{\dot{c}\dot{c}}^* \end{bmatrix} \quad (3.1.68)$$

$$M_{sys,i}^* = [M_{1,i}^* \quad M_{2,i}^* \quad M_{3,i}^* \quad M_{4,i}^*] \quad (3.1.69)$$

$$M_{1,ii}^* = \begin{bmatrix} J_{1,ii}^* + 2c^T M_{1ca}^* a \\ J_{12,ii}^* + c^T M_{1ca}^* a \\ M_{1\dot{a},ii}^* + L_2 c^T M_{1ca\dot{a}}^* a \\ M_{1\dot{c},ii}^* \end{bmatrix} \quad (3.1.70)$$

$$M_{2,ii}^* = \begin{bmatrix} J_{12,ii}^* + c^T M_{1ca}^* a \\ 0 \\ M_{2\dot{a},ii}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.71)$$

$$M_{3,ii}^* = \begin{bmatrix} M_{1\dot{a},ii}^* + L_2 c^T M_{1ca\dot{a}}^* a \\ M_{2\dot{a},ii}^* \\ M_{\dot{a}\dot{a},ii}^* \\ M_{\dot{c}\dot{a},ii}^* \end{bmatrix} \quad (3.1.72)$$

$$M_{4,ii}^* = \begin{bmatrix} M_{1\dot{c},ii}^* \\ 0 \\ M_{\dot{c}\dot{a},ii}^{*T} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.73)$$

$$M_{sys,ii}^* = [M_{1,ii}^* \quad M_{2,ii}^* \quad M_{3,ii}^* \quad M_{4,ii}^*] \quad (3.1.74)$$

$$M_{sys}^* = M_{sys,i}^* + M_{sys,ii}^* \cos \theta_2 \quad (3.1.75)$$

$$K_{sys}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 K_{aa}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_L^2 r_L^2 \mu_2 K_{cc}^* \end{bmatrix} \quad (3.1.76)$$

ซึ่งผลลัพธ์ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 คือ

$$[M_{sys,i}^* + M_{sys,ii}^* \cos \theta_2] \cdot (\ddot{q}) + K_{sys}^*(q) = u \quad (3.1.77)$$

เมื่อ

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & a^T & c^T \end{bmatrix}^T \quad (3.1.78)$$

ระบบเมตริกซ์ในรูปอนุพันธ์อันดับ 2 สามารถอยู่ในรูปของสมการสเตสเปซที่อนุพันธ์อันดับ 1 คือ

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1.79)$$

เมื่อ

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & a^T & c^T & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{a}^T & \dot{c}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.1.80)$$

รูปแบบสมการสเตสเปซที่อนุพันธ์อันดับ 1 ของสมการที่ (3.1.77) จะเปลี่ยนเป็นสมการที่ (3.1.81) ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi}_L \\ \dot{\psi}_L \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi}_L \\ \dot{\psi}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & I \\ -\text{inv}(M_{sys}^*)K_{sys}^* & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \phi_L \\ \psi_L \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi}_L \\ \dot{\psi}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \text{inv}(M_{sys}^*)f \end{bmatrix} \cdot u \quad (3.1.81)$$

3.2 แขนกลอ่อนตัวสองระดับชั้นความเร็วที่มีกลไกการหน่วง

ต่อจากนี้จะพิจารณาแขนกลในกรณีที่มีกลไกการหน่วงเข้ามาเกี่ยวข้อง โดยสมมติว่ากลไกการหน่วงที่อยู่ในลำแขนนั้นเกิดจากแรงเสียดทานภายในเนื้อแขน ทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานและฟังก์ชันนี้อยู่ในรูปของสมการที่ขึ้นกับความเร็วของแขนที่เคลื่อนที่

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.2.1)$$

ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันแพร่กระจายของพลังงาน (dissipation function) ซึ่งเสนอโดยลอร์ด เรย์ไล (Lord Rayleigh) [36]

ผลคูณแบบจุดของความเร็วสำหรับมวลระหว่างข้อที่ 1 และ 2 คือ

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{1,x} \cdot \dot{\vec{r}}_{2,x} = & L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2L_1 \dot{\theta}_1 \dot{w}_{1,L_1} + L_1 \dot{\theta}_1 x_2 \omega \cos \theta_2 + L_1 \dot{\theta}_1 \dot{w}_2 \cos \theta_2 + \dot{w}_{1,L_1}^2 \\ & + \dot{w}_{1,L_1} x_2 \omega \cos \theta_2 + \dot{w}_{1,L_1} \dot{w}_2 \cos \theta_2 + w_1^2 \dot{\theta}_1^2 + w_{1,L_1} \dot{\theta}_1 w_2 \omega \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

และมีสมการการหน่วง อยู่ในรูป

$$D = \frac{1}{2} d_1 (\dot{\vec{r}}_{1,x} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,x}) + \frac{1}{2} d_2 (\dot{\vec{r}}_{1,x} \cdot \dot{\vec{r}}_{2,x}) + \frac{1}{2} d_3 (\dot{\vec{r}}_{2,x} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,x}) + \frac{1}{2} d_4 (\dot{\vec{r}}_{2,x} \cdot \dot{\vec{r}}_{2,x}) \quad (3.2.3)$$

โดยพหุนามเอกพันธ์กำลังสองของการหน่วง คือ

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{2} I_1^{(1)} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{a}^T D_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} \dot{a} + \dot{\theta}_1 \dot{a}^T D_{1\dot{a}}^{(1)} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \dot{a}^T D_{1aa}^{(1)} \dot{a} + \frac{1}{2} I_1^{(2)} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{12}^{(12)} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{a}^T D_{1a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{c}^T D_{1c}^{(12)} + \frac{1}{2} \dot{a}^T D_{aa} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{a}^T D_{1a}^{(12)} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \dot{a}^T D_{2a}^{(12)} \\ & + \frac{1}{2} \dot{a}^T D_{aa} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{c}^T D_{c\dot{a}}^{(12)} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \dot{a}^T D_{1aa}^{(12)} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \dot{c}^T D_{1ca}^{(12)} \dot{a} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{c}^T D_{12ca}^{(12)} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{c}^T D_{1caa} \dot{a}^T \dot{a} + \frac{1}{2} I_1^{(2)} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{12}^{(2)} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{4} I_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} \dot{a}^T D_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \dot{a}^T D_{2a}^{(2)} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{a}^T D_{1a}^{(2)} + \frac{1}{4} \dot{c}^T D_{c\dot{c}} \dot{c} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{c}^T D_{1c}^{(2)} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \dot{c}^T D_{1ca}^{(2)} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{c}^T D_{12ca}^{(2)} \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{c}^T D_{1ca\dot{a}} \dot{a}^T \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{c}^T D_{c\dot{a}}^{(2)} \dot{a} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{c}^T D_{12cc} \dot{c} + \frac{1}{4} \dot{\theta}_1^2 \dot{c}^T D_{1cc} \dot{c} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \dot{c}^T c D_{1cc\dot{a}} \dot{a}^T + \frac{1}{4} \dot{\theta}_2^2 \dot{c}^T D_{2cc} \dot{c} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \dot{c}^T c D_{2cc\dot{a}} \dot{a}^T \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

เมื่อ

$$I_1^{(1)} = d_1 x_1^2 \quad (3.2.5)$$

$$D_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} = D_{1aa}^{(1)} = d_1 \phi \phi^T \quad (3.2.6)$$

$$D_{1\dot{a}}^{(1)} = d_1 x_1 \phi \quad (3.2.7)$$

$$I_1^{(12)} = (d_2 + d_3)(L_1^2 + L_1 x_2 \cos \theta_2) \quad (3.2.8)$$

$$I_{12}^{(12)} = (d_2 + d_3)L_1 x_2 \cos \theta_2 \quad (3.2.9)$$

$$D_{1a} = (d_2 + d_3)L_1 x_2 \phi'_{L_1} \cos \theta_2 \quad (3.2.10)$$

$$D_{1\dot{c}}^{(12)} = (d_2 + d_3)L_1 \psi \cos \theta_2 \quad (3.2.11)$$

$$D_{aa} = D_{1aa}^{(12)} = (d_2 + d_3)\phi_{L_1} \phi_{L_1}^T \quad (3.2.12)$$

$$D_{1\dot{a}}^{(12)} = (d_2 + d_3)(2L_1 \phi_{L_1} + x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2) \quad (3.2.13)$$

$$D_{2\dot{a}}^{(12)} = (d_2 + d_3)x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2 \quad (3.2.14)$$

$$D_{a\dot{a}} = (d_2 + d_3)x_2 \phi_{L_1}'^T \phi_{L_1} \cos \theta_2 \quad (3.2.15)$$

$$D_{\dot{c}\dot{a}}^{(12)} = D_{1ca}^{(12)} = D_{12ca}^{(12)} = (d_2 + d_3)\psi \phi_{L_1}'^T \cos \theta_2 \quad (3.2.16)$$

$$D_{1caa} = (d_2 + d_3)\psi \phi_{L_1}'^T \phi_{L_1} \cos \theta_2 \quad (3.2.17)$$

$$I_1^{(2)} = d_4(2L_1^2 + L_1 x_2 \cos \theta_2 + 2x_2^2) \quad (3.2.18)$$

$$I_{12}^{(2)} = d_4(L_1 x_2 \cos \theta_2 + 2x_2^2) \quad (3.2.19)$$

$$I_2 = d_4 x_2^2 \quad (3.2.20)$$

$$D_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)} = d_4(\phi_{L_1} \phi_{L_1}^T + x_2 \phi_{L_1} \phi_{L_1}'^T \cos \theta_2 + 2x_2^2 \phi_{L_1}' \phi_{L_1}'^T) \quad (3.2.21)$$

$$D_{1\dot{a}}^{(2)} = d_4(L_1 x_2 \phi_{L_1}' \cos \theta_2 + L_1 \phi_{L_1} + x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2 + x_2^2 \phi_{L_1}') \quad (3.2.22)$$

$$D_{2\dot{a}}^{(2)} = d_4 (x_2 \phi_{L_1} \cos \theta_2 + x_2^2 \phi'_{L_1}) \quad (3.2.23)$$

$$D_{1aa}^{(2)} = d_4 \phi_{L_1}^T \phi_{L_1} \quad (3.2.24)$$

$$D_{\dot{c}\dot{c}}^{(2)} = D_{1cc} = D_{12cc} = D_{2cc} = d_4 \psi \psi^T \quad (3.2.25)$$

$$D_{1\dot{c}}^{(2)} = d_4 (L_1 \psi \cos \theta_2 + x_2 \psi) \quad (3.2.26)$$

$$D_{2\dot{c}} = d_4 x_2 \psi \quad (3.2.27)$$

$$D_{\dot{c}\dot{a}}^{(2)} = d_4 (\psi \phi_{L_1}^T \cos \theta_2 + x_2 \psi \phi'_{L_1}) \quad (3.2.28)$$

$$D_{1ca\dot{a}} = d_4 \psi \phi_{L_1}^T \phi'_{L_1} \cos \theta_2 \quad (3.2.29)$$

$$D_{1ca}^{(2)} = D_{12ca}^{(2)} = d_4 \psi \phi_{L_1}^T \cos \theta_2 \quad (3.2.30)$$

$$D_{cc\dot{a}\dot{a}}^{(2)} = d_4 \psi^T \psi \phi_{L_1}'^T \phi'_{L_1} \quad (3.2.31)$$

$$D_{1cc\dot{a}} = D_{2cc\dot{a}} = d_4 \psi^T \psi \phi_{L_1}'^T \quad (3.2.32)$$

สมการลากรางจ์สำหรับระบบที่มีการหน่วงอยู่ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.2.33)$$

ดังนั้น โดยอาศัยสมการลากรางจ์ที่มีการหน่วงจะได้สมการการเคลื่อนที่ที่เป็น

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{D}\dot{q} + \bar{K}q = 0 \quad (3.2.34)$$

โดยกำหนดให้

$$\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} I_1^{(1)} + I_1^{(12)} + I_1^{(2)} + a^T \left(D_{1aa}^{(1)} + D_{1aa}^{(12)} + \frac{1}{2} D_{1aa}^{(2)} \right) a + c^T \left(D_{1ca}^{(12)} + D_{1ca}^{(2)} \right) a + \frac{1}{2} c^T D_{1cc} c \\ \frac{1}{2} \left(I_{12}^{(12)} + I_{12}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} c^T \left(D_{12ca}^{(12)} + D_{12ca}^{(2)} \right) a + \frac{1}{2} c^T D_{12cc} c \\ D_{1\dot{a}}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(D_{1\dot{a}}^{(12)} + D_{1\dot{a}}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} c^T D_{1ca\dot{a}} a + \frac{1}{2} c^T c D_{1c\dot{a}} \\ \frac{1}{2} \left(D_{1\dot{c}}^{(12)} + D_{1\dot{c}}^{(2)} \right) \end{bmatrix} \quad (3.2.35)$$

$$\bar{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(I_{12}^{(12)} + I_{12}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} c^T \left(D_{12ca}^{(12)} + D_{12ca}^{(2)} \right) a + \frac{1}{2} c^T D_{12cc} c \\ \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2} c^T D_{2cc} c \\ \frac{1}{2} \left(D_{2\dot{a}}^{(12)} + D_{2\dot{a}}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} c^T c D_{2c\dot{a}} \\ \frac{1}{2} D_{2\dot{c}} \end{bmatrix} \quad (3.2.36)$$

$$\bar{D}_3 = \begin{bmatrix} D_{1\dot{a}}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(D_{1\dot{a}}^{(12)} + D_{1\dot{a}}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} c^T D_{1ca\dot{a}} a + \frac{1}{2} c^T c D_{1c\dot{a}} \\ \frac{1}{2} \left(D_{2\dot{a}}^{(12)} + D_{2\dot{a}}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} c^T c D_{2c\dot{a}} \\ \frac{1}{2} \left(D_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} + D_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left(D_{\dot{a}\dot{a}}^{(1)} + D_{\dot{a}\dot{a}}^{(2)} \right)^T + \frac{1}{4} c^T c \left(D_{cc\dot{a}\dot{a}} + D_{cc\dot{a}\dot{a}}^T \right) \\ \frac{1}{2} D_{\dot{c}\dot{a}}^{(12)} + \frac{1}{2} D_{\dot{c}\dot{a}}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.2.37)$$

$$\bar{D}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(D_{1\dot{c}}^{(12)} + D_{1\dot{c}}^{(2)} \right) \\ \frac{1}{2} D_{2\dot{c}} \\ \frac{1}{2} \left(D_{\dot{c}\dot{a}}^{(12)} + D_{\dot{c}\dot{a}}^{(2)} \right)^T \\ \frac{1}{4} \left(D_{\dot{c}\dot{c}} + D_{\dot{c}\dot{c}}^T \right) \end{bmatrix} \quad (3.2.38)$$

$$\bar{D} = [\bar{D}_1 \quad \bar{D}_2 \quad \bar{D}_3 \quad \bar{D}_4] \quad (3.2.39)$$

เพื่อจัดรูปตัวแปรและสมการให้อยู่ในรูปไร้มิติจะนิยามตัวแปรต่อไปนี้เพื่อใช้กับสมการการเคลื่อนที่

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{(\rho AL)_1}, \quad \alpha_2 = \frac{d_2}{(\rho AL)_1}, \quad \alpha_3 = \frac{d_3}{(\rho AL)_2}, \quad \alpha_4 = \frac{d_4}{(\rho AL)_2} \quad \text{และ} \quad \alpha_e = \alpha_2 + r_L \alpha_3 + r_L \alpha_4$$

เมื่อ α_1 , α_2 , α_3 และ α_4 แทนความสัมพันธ์ของมวลที่จุดปลายในแต่ละข้อต่อกับมวลของข้อต่อ นั้น ๆ

ฉะนั้นเมตริกซ์ที่กำหนดในสมการที่ (3.2.35) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned}
I_1^* &= \int_0^1 2\alpha_1 \xi_1 d\xi_1 + \int_0^1 4\alpha_4 \eta_L r_L^2 \xi_2 d\xi_2 + \alpha_2 + (\alpha_3 + 2\alpha_4)r_L \\
&\quad + \int_0^1 (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 r_L) r_L d\xi_2 \cos \theta_2 \\
&= I_{1,i}^* + I_{1,ii}^* \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

$$\begin{aligned}
I_{12}^* &= \int_0^1 2r_L^2 \eta_L \alpha_4 \xi_2 d\xi_2 + \int_0^1 \alpha_e r_L d\xi_2 \cos \theta_2 \\
&= I_2^* + I_{12,ii}^* \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

$$I_2^* = \int_0^1 2r_L^2 \eta_L \alpha_4 \xi_2 d\xi_2 \tag{3.2.42}$$

$$\begin{aligned}
D_{1\dot{a}}^* &= \int_0^1 2\alpha_1 \phi^* d\xi_1 + \int_0^1 2r_L^2 L_2 \alpha_4 \phi'^* d\xi_2 + (2\alpha_2 + 2\alpha_3 r_L + \alpha_4 r_L) \phi_1^* \\
&\quad + \int_0^1 (\alpha_e \phi^* + \alpha_4 L_2 \phi'^*) r_L d\xi_2 \cos \theta_2 \\
&= D_{1\dot{a},i}^* + D_{1\dot{a},ii}^* \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

$$\begin{aligned}
D_{2\dot{a}}^* &= \int_0^1 2r_L^2 L_2 \alpha_4 \phi'^* d\xi_2 + \int_0^1 \alpha_e \phi^* r_L d\xi_2 \cos \theta_2 \\
&= D_{2\dot{a},i}^* + D_{2\dot{a},ii}^* \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

$$\begin{aligned}
D_{\dot{a}\dot{a}}^* &= \int_0^1 4L_2^2 r_L \alpha_4 \xi_2 \phi'^* \phi'^{*T} d\xi_2 + (\alpha_1 + r_L \alpha_4) \phi_1^* \phi_1^{*T} \\
&\quad + \int_0^1 L_2 \alpha_4 r_L \phi^* \phi'^{*T} d\xi_2 \cos \theta_2 \\
&= D_{\dot{a}\dot{a},i}^* + D_{\dot{a}\dot{a},ii}^* \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

$$\begin{aligned}
D_{1\dot{c}}^* &= \int_0^1 r_L^2 \alpha_4 \psi \eta_L d\xi_2 + \alpha_e r_L \psi_1^* \cos \theta_2 \\
&= D_{1\dot{c},i}^* + D_{1\dot{c},ii}^* \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

$$D_{2\dot{c}}^* = \int_0^1 r_L^2 \eta_L \alpha_4 \psi^* d\xi_2 \quad (3.2.47)$$

$$D_{\dot{c}\dot{c}}^* = D_{1cc}^* = D_{12cc}^* = D_{2cc}^* = \alpha_4 r_L^2 \eta_L \psi_1^* \psi_1^{*T} \quad (3.2.48)$$

$$\begin{aligned} D_{\dot{c}\dot{a}}^* &= \int_0^1 L_2 r_L^2 \alpha_4 \psi^* \phi'^{*T} d\xi_2 + \alpha_e \psi_1^* r_L \phi_1^{*T} \cos \theta_2 \\ &= D_{\dot{c}\dot{a},i}^* + D_{\dot{c}\dot{a},ii}^* \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

$$D_{1aa}^* = (\alpha_1 + \alpha_e) \phi_1^* \phi_1^{*T} \cos \theta_2 \quad (3.2.50)$$

$$D_{1a}^* = \int_0^1 (\alpha_2 + r_L \alpha_3) L_2 \phi'^{*T} d\xi_2 \cos \theta_2 \quad (3.2.51)$$

$$D_{aa}^* = (\alpha_2 + r_L \alpha_3) \phi_1^* \phi_1^{*T} \quad (3.2.52)$$

$$D_{a\dot{a}}^* = \int_0^1 (\alpha_2 + r_L \alpha_3) L_2 \phi'^* \phi^{*T} d\xi_2 \cos \theta_2 \quad (3.2.53)$$

$$D_{1caa}^* = (\alpha_2 + r_L \alpha_3) \psi_1^* \phi_1^* \phi_1^{*T} \cos \theta_2 \quad (3.2.54)$$

$$D_{1ca}^* = D_{12ca}^* = \alpha_e r_L \psi_1^* \phi_1^{*T} \cos \theta_2 \quad (3.2.55)$$

$$D_{1cc\dot{a}}^* = D_{2cc\dot{a}}^* = r_L^2 \alpha_4 \psi_1^* \psi_1^{*T} \phi_1'^* \quad (3.2.56)$$

$$D_{cc\dot{a}\dot{a}}^* = r_L \alpha_4 \psi_1^{*T} \psi_1^* \phi_1'^{*T} \phi_1'^* \quad (3.2.57)$$

$$D_{1ca\dot{a}}^* = r_L \alpha_4 \psi_1^* \phi_1^{*T} \phi_1'^* \cos \theta_2 \quad (3.2.58)$$

เมตริกซ์ที่นิยามในสมการที่ (3.2.40-58) จะได้ว่า

$$D_{1,i}^* = \begin{bmatrix} I_{1,i}^* + \frac{1}{2}c^T D_{1cc}^* c \\ \frac{1}{2}I_2^* + \frac{1}{2}c^T D_{12cc}^* c \\ D_{1\dot{a},i}^* + \frac{1}{2}L_2 c^T c D_{1cc\dot{a}}^* \\ \frac{1}{2}D_{1\dot{c},i}^* \end{bmatrix} \quad (3.2.59)$$

$$D_{2,i}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_2^* + \frac{1}{2}c^T D_{12cc}^* c \\ \frac{1}{2}I_2^* + \frac{1}{2}c^T D_{2cc}^* c \\ \frac{1}{2}D_{2\dot{a},i}^* + \frac{1}{2}L_2 c^T c D_{2cc\dot{a}}^* \\ \frac{1}{2}D_{2\dot{c}}^* \end{bmatrix} \quad (3.2.60)$$

$$D_{3,i}^* = \begin{bmatrix} D_{1\dot{a},i}^* + \frac{1}{2}L_2 c^T c D_{1cc\dot{a}}^* \\ \frac{1}{2}D_{2\dot{a},i}^* + \frac{1}{2}L_2 c^T c D_{2cc\dot{a}}^* \\ \frac{1}{2}(D_{\dot{a}\dot{a},i}^* + D_{\dot{a}\dot{a},i}^{*T}) + \frac{1}{4}L_2^2 c^T c (D_{cc\dot{a}\dot{a}} + D_{cc\dot{a}\dot{a}}^T) \\ \frac{1}{2}D_{\dot{c}\dot{a},i}^* \end{bmatrix} \quad (3.2.61)$$

$$D_{4,i}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}D_{1\dot{c},i}^* \\ \frac{1}{2}D_{2\dot{c}}^* \\ \frac{1}{2}D_{\dot{c}\dot{a},i}^{*T} \\ \frac{1}{4}(D_{\dot{c}\dot{c}}^* + D_{\dot{c}\dot{c}}^{*T}) \end{bmatrix} \quad (3.2.62)$$

$$D_{sys,i}^* = [D_{1,i}^* \quad D_{2,i}^* \quad D_{3,i}^* \quad D_{4,i}^*] \quad (3.2.63)$$

$$D_{1,ii}^* = \begin{bmatrix} I_{1,ii}^* + a^T D_{1aa}^* a + c^T D_{1ca}^* a \\ \frac{1}{2}I_{12,ii}^* + \frac{1}{2}c^T D_{12ca}^* a \\ D_{1\dot{a},ii}^* + \frac{1}{2}L_2 c^T D_{1ca\dot{a}}^* a \\ \frac{1}{2}D_{1\dot{c},ii}^* \end{bmatrix} \quad (3.2.64)$$

$$D_{2,ii}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_{12,ii}^* + \frac{1}{2}c^T D_{12ca}^* a \\ 0 \\ \frac{1}{2}D_{2\dot{a},ii}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.65)$$

$$D_{3,ii}^* = \begin{bmatrix} D_{1\dot{a},ii}^* + \frac{1}{2}L_2c^T D_{1ca\dot{a}}^* a \\ \frac{1}{2}D_{2\dot{a},ii}^* \\ \frac{1}{2}(D_{\dot{a}\dot{a},ii}^* + D_{\dot{a}\dot{a},ii}^{*T}) \\ \frac{1}{2}D_{\dot{c}\dot{a},ii}^* \end{bmatrix} \quad (3.2.66)$$

$$D_{4,ii}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}D_{1\dot{c},ii}^* \\ 0 \\ \frac{1}{2}D_{\dot{c}\dot{a},ii}^{*T} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.67)$$

$$D_{sys,ii}^* = [D_{1,ii}^* \quad D_{2,ii}^* \quad D_{3,ii}^* \quad D_{4,ii}^*] \quad (3.2.68)$$

$$D_{sys}^* = D_{sys,i}^* + D_{sys,ii}^* \cos \theta_2 \quad (3.2.69)$$

ซึ่งผลลัพธ์ในรูปแบบอนุพันธ์อันดับ 2 สำหรับระบบที่มีตัวหน่วง คือ

$$[M_{sys,i}^* + M_{sys,ii}^* \cos \theta_2](\ddot{q}) + [D_{sys,i}^* + D_{sys,ii}^* \cos \theta_2](\dot{q}) + K_{sys}^*(q) = u \quad (3.2.70)$$

รูปแบบสมการสเทสเปซที่อนุพันธ์อันดับ 1 ของสมการที่ (3.2.70) จะเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับเป็นสมการที่ (3.1.81) ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi}_L \\ \dot{\psi}_L \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\phi}_L \\ \dot{\psi}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & I \\ -inv(M_{sys}^*)K_{sys}^* & -inv(M_{sys}^*)D_{sys}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \phi_L \\ \psi_L \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \phi_L \\ \psi_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ inv(M_{sys}^*) \end{bmatrix} \cdot u \quad (3.2.71)$$

หมายเหตุ จะเห็นได้ว่าหากไม่มีผลกระทบจากการหน่วงสมการสเทสเปซที่ (3.2.71) จะเปลี่ยนเป็นสมการสเทสเปซที่ (3.1.81)

บทที่ 4

ผลของงานวิจัย

ในบทนี้เป็นการจำลองผลโดยใช้คอมพิวเตอร์ซึ่งโปรแกรม MATLAB แสดงการตอบสนองของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อแบบบางที่สร้างในบทที่ 3 โดยการทดสอบจากการให้อินพุต การตอบสนองการดล (impulse response) และจะแสดงผลการจำลองทั้งกรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วงและกรณีที่พิจารณาการหน่วงและเปรียบเทียบความแตกต่างทั้งสองกรณีด้วยกราฟ โดยคาดหวังว่าผลการทดลองของทั้งสองกรณีจะสามารถใช้เป็นแนวทางในการออกแบบแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อเพื่อลดการสั่นขณะปฏิบัติงานได้

ในการทดสอบตำแหน่งอ้างอิงในการเคลื่อนที่ของแบบจำลองแขนกลกับการดลจะเริ่มจากตำแหน่งหยุดนิ่ง คือมุมของข้อต่อที่ 1 และข้อต่อที่ 2 เป็นศูนย์องศา โดยกำหนดค่าต่างๆ ดังนี้ ความหนาแน่นของอลูมิเนียมที่ใช้ทำลำแขน $\rho = 2710 \text{ kg/m}^3$, พื้นที่หน้าตัดของแขน $A = 1.613 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ และความเกร็งของการโค้งงอ $EI = 0.0684 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ โดยอาศัยสมการสแตทสเปซกำหนดให้

- 1) อินพุตในรูปการดลที่ θ_1 ซึ่งการป้อนมีผลโดยตรงต่อตำแหน่งที่เกิดทำให้ค่าของมุมที่เบี่ยงเบนไปจากแกนอ้างอิงของลำแขนที่ 1 หรือ L_1 (หรือเรียกสั้นๆ ว่า u_1)
- 2) อินพุตในรูปการดลที่ θ_2 ซึ่งการป้อนมีผลโดยตรงต่อตำแหน่งค่าของมุมที่เบี่ยงเบนไปจากแกนอ้างอิงของลำแขนที่ 2 หรือ L_2 (หรือเรียกสั้นๆ ว่า u_2)
- 3) อินพุตในรูปการดลที่ ϕ_L ซึ่งการป้อนมีผลเชิงกล ส่งผลให้ค่าของส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากตำแหน่งเดิมของความยาวของลำแขนที่ 1 หรือ L_1 (หรือเรียกสั้นๆ ว่า u_3)
- 4) อินพุตในรูปการดลที่ ψ_L ซึ่งการป้อนมีผลทางเชิงกลค่าของส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากตำแหน่งเดิมของความยาวของลำแขนที่ 2 หรือ L_2 (หรือเรียกสั้นๆ ว่า u_4)

โดยใช้การป้อนค่าลงในสมการสแตทสเปซทีละค่า และผลในการป้อนค่า u_i โดย $i = \{1,2,3,4\}$ แต่ครั้งละครั้งจะได้ค่าเอาต์พุตเป็นค่า y_i โดย $i = \{1,2,3,4\}$ ทั้งหมด 4 ค่า ซึ่งกำหนดให้

y_1 = ค่าเอาต์พุตในรูปการดลที่ θ_1 ซึ่งหมายถึงค่าของมุมที่เบี่ยงเบนไปจากแกนอ้างอิงของ L_1

y_2 = ค่าเอาต์พุตในรูปการดลที่ θ_2 ซึ่งหมายถึงค่าของมุมที่เบี่ยงเบนไปจากแกนอ้างอิงของ L_2

y_3 = ค่าเอาต์พุตในรูปการดลที่ ϕ_L ซึ่งหมายถึงค่าของส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากตำแหน่งเดิมของความยาวของ L_1

y_4 = ค่าเอาต์พุตในรูปการดลที่ ψ_L ซึ่งหมายถึงค่าของส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากตำแหน่งเดิมของความยาวของ L_2

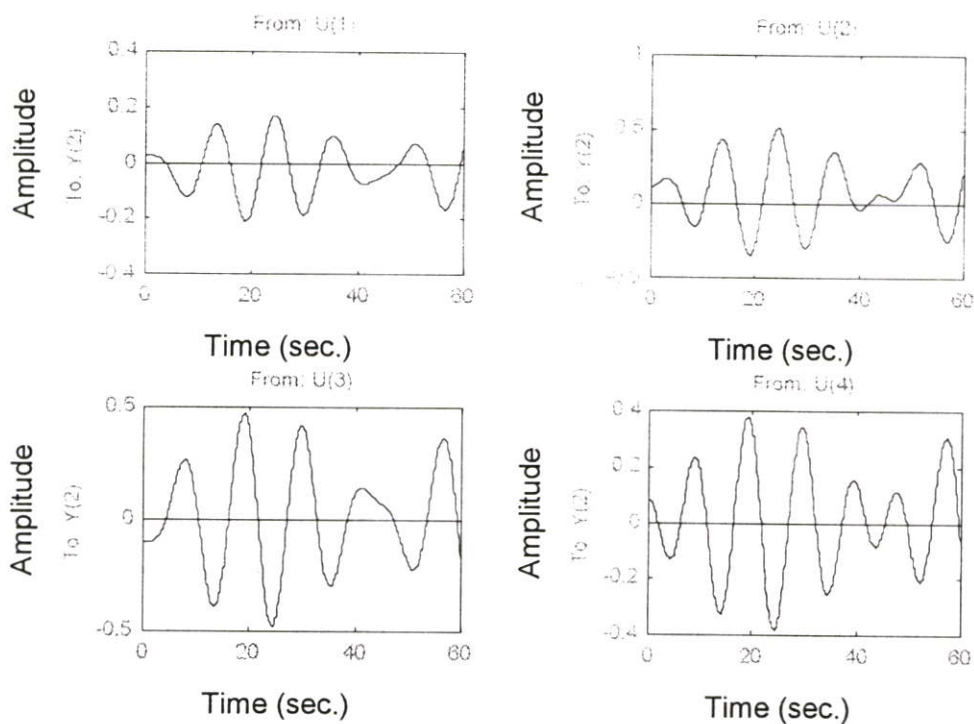
เมื่อพารามิเตอร์ของระบบมีการเปลี่ยนแปลงจึงได้จำลองระบบทั้งหมดแบ่งเป็น 3 กรณี โดยแต่ละกรณีมีลักษณะความยาวของลำแขนและภาระมวล (mass load) ที่แตกต่างกัน ดังนี้

- $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3$ และ $m_2=0.1$
- $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4$ และ $m_2=0.1$
- $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8$ และ $m_2=0.1$

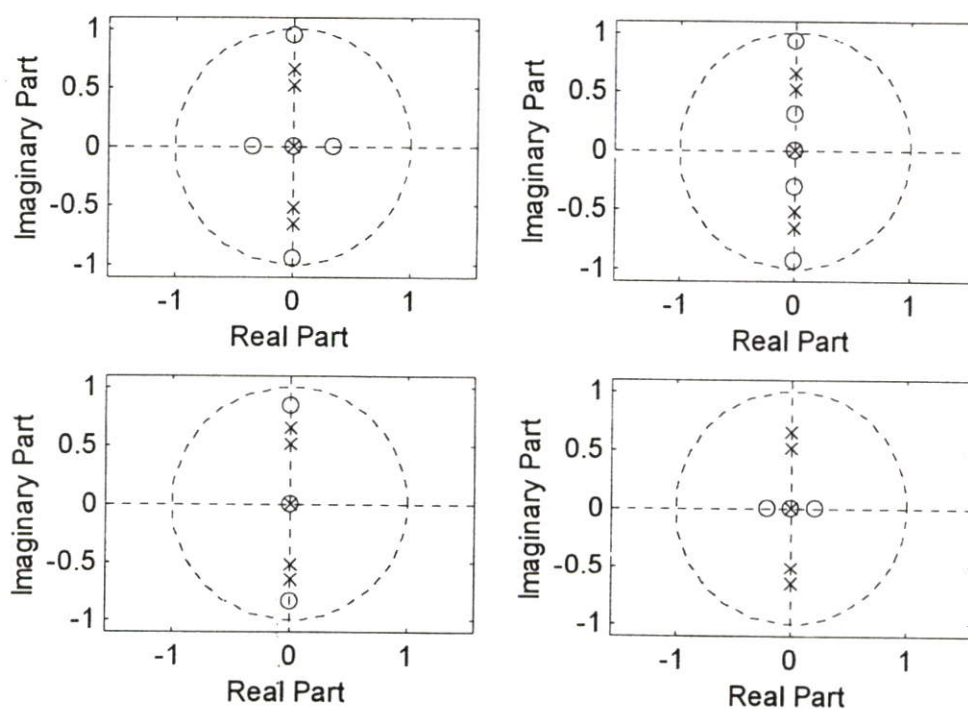
ผลของการจำลองระบบจะแสดงเอาท์พุทดังภาพที่ (4.1-2), (4.5-6) และ (4.9-16) และแสดงอินพุทดังภาพที่ (4.3-4), (4.7-8) และ (4.17-24) การจำลองผลในส่วนนี้เป็นการจำลองผลเพื่อสำรวจคุณธรรมชาติดของการสั่นเพื่อประโยชน์ในการนำไปออกแบบการสร้างจริง ดังที่ได้กล่าวต่อไปในบทที่ 4 ในส่วนนี้จะพิจารณาการสั่นของลำแขนกลอ่อนตัวจากการดลในแต่ละจุดตามลำดับโดยจะพิจารณาทั้งใน กรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วง และกรณีที่พิจารณาการหน่วงโดยกำหนดค่าคงตัวของการหน่วงที่ปลายแขนเท่ากันและแตกต่างกัน

4.1 กรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วง

ภาพที่ 4.1 เป็นภาพการจำลองผลเพื่อตรวจสอบสมบัติทางกายภาพของแบบจำลองของแขนกล โดยกำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.5 เมตร, m_1 หนัก 0.4 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของการหน่วง ณ ตำแหน่งกลางแขนที่ 1 หรือ d_1 , ค่าคงตัวของการหน่วง ณ ตำแหน่งปลายแขนที่ 1 ที่เชื่อมต่อกับแขนที่ 2 หรือ d_2 , ค่าคงตัวของการหน่วง ณ ตำแหน่งปลายแขนที่ 2 ที่เชื่อมต่อกับแขนที่ 1 หรือ d_3 , และค่าคงตัวของการหน่วง ณ ตำแหน่งกลางแขนที่ 2 หรือ d_4 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อทำการป้อนอินพุทในรูปการดลทั้ง 4 ค่า โดยเลือกจำลองค่าเอาท์พุทเป็น y_2 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 เมื่อทำการอินพุทค่า u_i โดย $i = \{1,2,3,4\}$ จะเกิดขึ้นไม่ว่าจะทำการอินพุทค่าที่จุดใดของแขนกล ส่วนภาพที่ 4.2 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่ซึ่งบรรยายถึงฟังก์ชันถ่ายโอนภาพที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.1 โดยแสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ (poles and zeroes) ของฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function) โดยอาศัยการแปลงจากสมการสเปซเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งจะเห็นว่าโพลทั้งหมดมีค่าเป็นคู่คอนจูเกต (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน ทำให้เส้นทางสัญญาณวัตต์ของระบบเกิดการแกว่งตัวขึ้น-ลงตลอดเวลา ซึ่งถือว่าเป็นระบบที่มีเสถียรภาพแบบวิกฤต (critically stable)

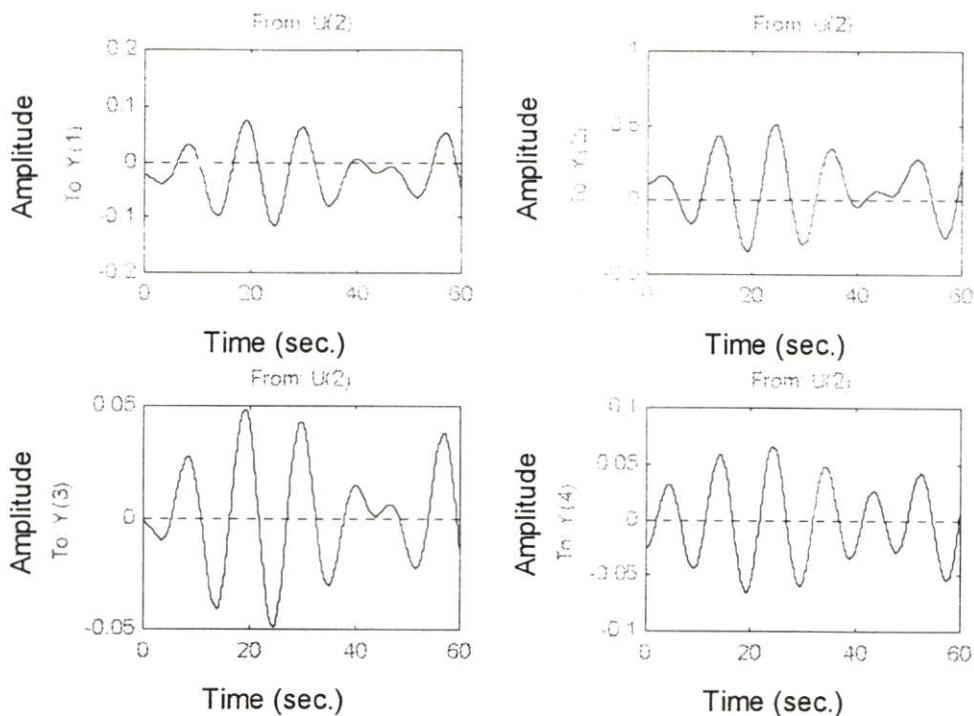


ภาพที่ 4.1 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=0.4$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งมีค่าเอาท์พุทเป็น y_2

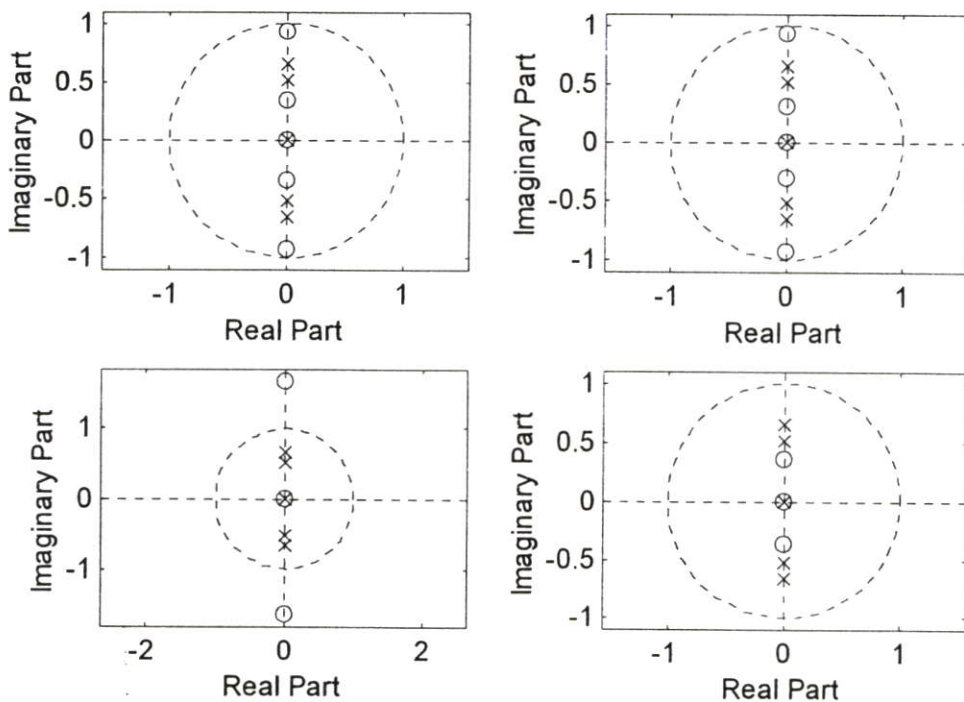


ภาพที่ 4.2 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=0.4$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.1

ภาพที่ 4.3 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.5 เมตร, m_1 หนัก 0.4 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของสปริง d_1, d_2, d_3 และ d_4 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อเลือกทำการป้อนค่าอินพุต u_2 ในรูปการลดลงจากการป้อนสัญญาณให้กับมอเตอร์ที่ตำแหน่งข้อศอก ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีขนาดใหญ่กว่า y_1 นั้นเพราะค่าอินพุต u_2 เป็นการค่าอินพุตค่าของมุมที่เบี่ยงเบนไปจากแกนอ้างอิงของ L_2 ทำให้เกิดการบิดที่มุมของ L_2 มากกว่า นั่นเพราะเป็นจุดที่การลดกระทำโดยตรงก่อนที่คลื่นการสั่นจะส่งผลกระทบต่อไปตามแนวของ L_1 นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อมุมที่ข้อศอก (y_2) บิดไปทางหนึ่ง จะเกิดความเฉื่อยต้านการเคลื่อนที่ที่เชื่อมต่อกันระหว่างทั้งสองมอเตอร์ ส่งผลให้มุมที่ใหญ่ (y_1) จะบิดไปในทิศตรงข้ามตามกฎความเฉื่อยเมื่อมีการลดเกิดขึ้นที่ตำแหน่งมอเตอร์ที่ข้อศอกยังผลให้มุมที่ใหญ่เบนจากแนวกลาง ปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันนี้ สามารถสังเกตเห็นได้จากเอาต์พุต y_3 และ y_4 เช่นกัน ส่วนภาพที่ 4.4 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่ (frequency domain) ซึ่งบรรยายถึงฟังก์ชันถ่ายโอนที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.3 โดยแสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ของฟังก์ชันถ่ายโอน โดยอาศัยการแปลงจากสมการสแตตัสเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลทั้งหมดมีค่าเป็นคู่คอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อน ทำให้เส้นทางสัญญาณวัดของระบบเกิดการแกว่งตัวขึ้น-ลงตลอดเวลาซึ่งถือว่าเป็นระบบที่มีเสถียรภาพแบบวิกฤต



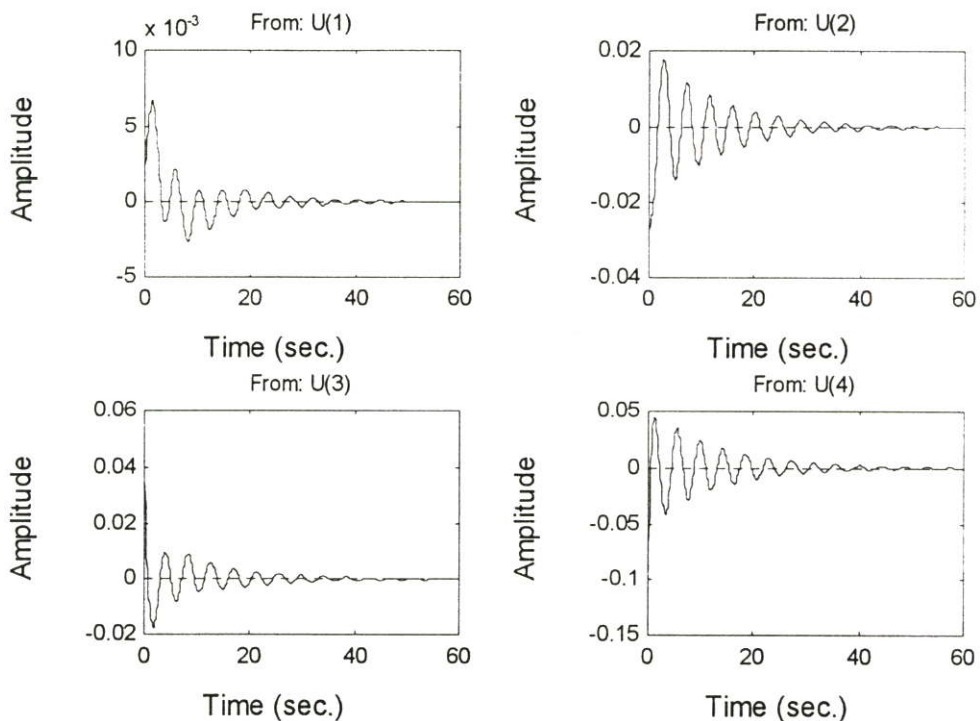
ภาพที่ 4.3 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=0.4$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งมีค่าอินพุทเป็น u_2



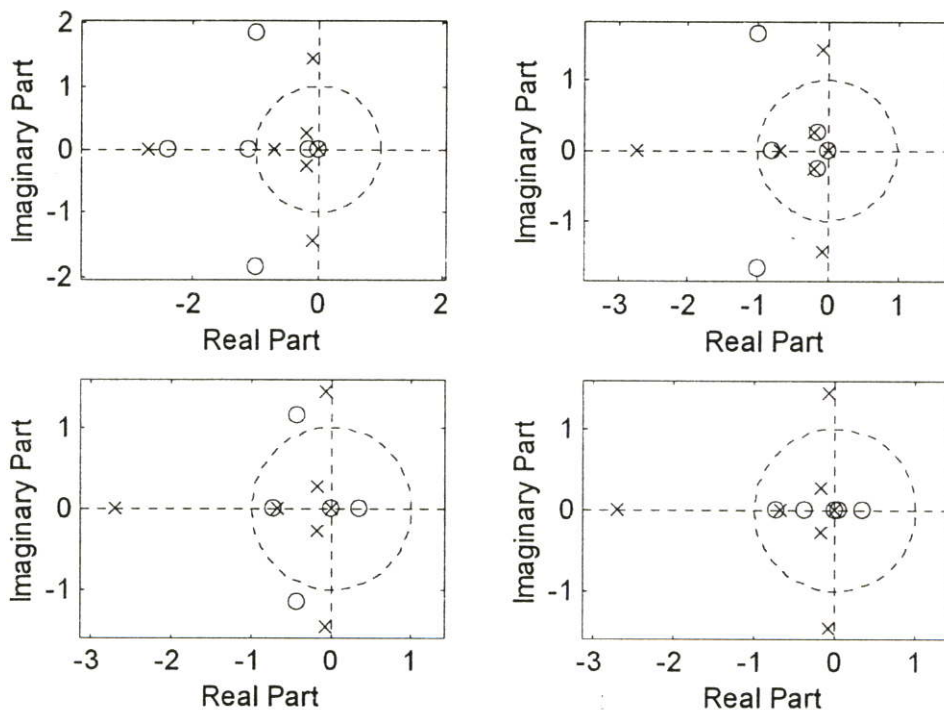
ภาพที่ 4.4 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=0.4$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.3

4.2 กรณีที่พิจารณาการหน่วงโดยกำหนดค่าคงตัวของการหน่วงที่ปลายแขนเท่ากัน

ภาพที่ 4.5 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.4 เมตร, m_1 หนัก 0.3 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของการหน่วง $d_1=d_4=0.2$ และสมมติให้ไม่มีกลไกส่งผ่านการหน่วงเนื่องจากลำแขนหนึ่งไปอีกลำแขนหนึ่ง นั่นคือ d_2, d_3 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อทำการป้อนอินพุตในรูปการดลทั้ง 4 ค่า โดยเลือกจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_1 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_1 เมื่อทำการอินพุตค่า u_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ จะเกิดขึ้นในช่วงประมาณ 50 วินาทีแรก แล้วการสั่นก็มิขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นผลกระทบมาจากการหน่วง ส่วนภาพที่ 4.6 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่บรรยายถึงลักษณะของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.5 จะเห็นได้ว่าโพลที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกนจินตภาพเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง ในขณะที่โพลที่เป็นคู่คอนจูเกตทำให้เกิดกลไกการสั่น ซึ่งในรูปการจำลองผลนี้เกิดการสั่นและหยุดลงในช่วงระยะเวลาต่อมา และทำให้ระบบมีเสถียรภาพแบบเชิงเส้นกำกับ (asymptotic stability) นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าศูนย์ของระบบไม่ได้อยู่ทางด้านซ้ายมือทั้งหมด ซึ่งชี้ให้เห็นว่าระบบนี้ไม่เป็นระบบที่มีค่าเฟสน้อยสุด (non minimum phase)

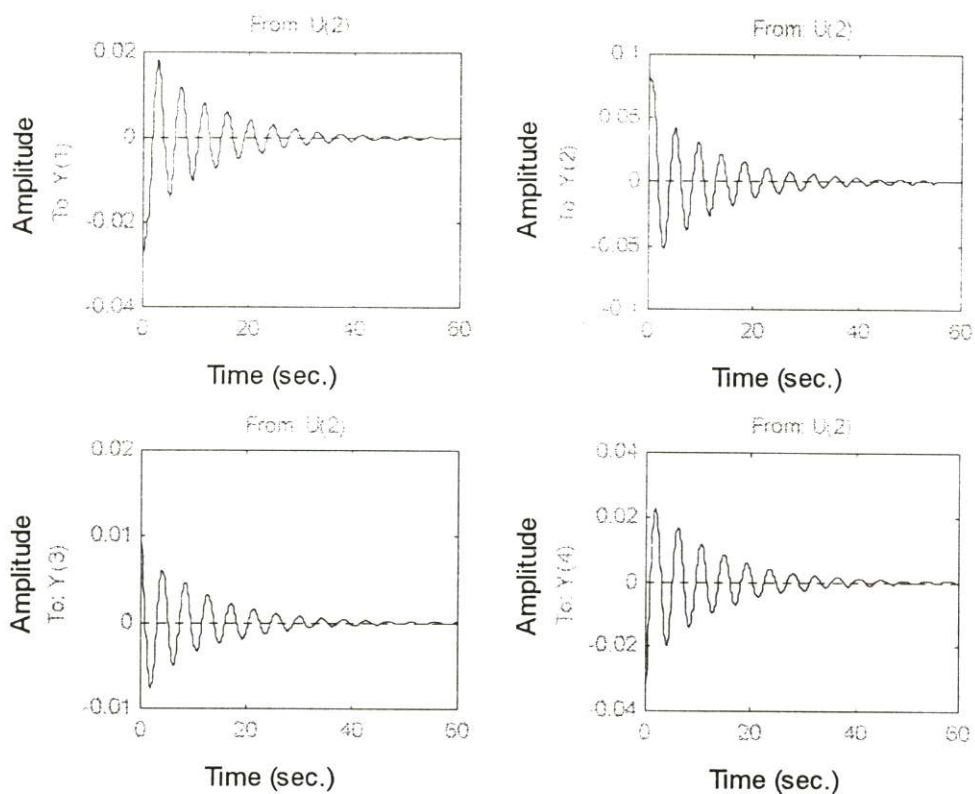


ภาพที่ 4.5 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=0.2$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งมีค่าเอทพุทเป็น y_1

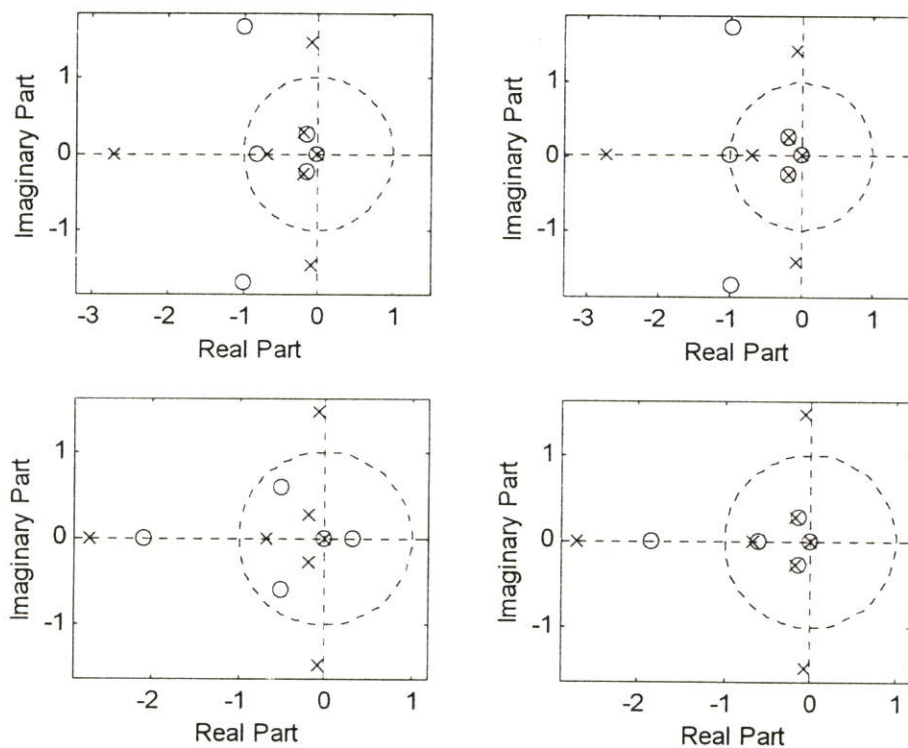


ภาพที่ 4.6 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=0.2$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.5

ภาพที่ 4.7 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.4 เมตร, m_1 หนัก 0.3 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของสปริง $d_1=d_4=0.2$ และ d_2, d_3 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อเลือกทำการป้อนค่าอินพุต u_2 ในรูปการลดลงจากการป้อนสัญญาณให้กับมอเตอร์ที่ตำแหน่งข้อศอก ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีขนาดใหญ่กว่า y_1 นั้นเพราะค่าอินพุต u_2 เป็นการอินพุตค่าของมุมที่เบี่ยงเบนไปจากแกนอ้างอิงของ L_2 ทำให้เกิดการบิดที่มุมของ L_2 มากกว่า เนื่องจากเป็นจุดที่การลดกระทำโดยตรงก่อนที่คลื่นการสั่นจะส่งผลกระทบต่อไปตามแนวของ L_1 นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อมุมที่ข้อศอกบิดไปทางหนึ่ง จะเกิดความเฉื่อยต้านการเคลื่อนที่ที่เชื่อมต่อกันระหว่างทั้งสองมอเตอร์ ส่งผลให้มุมที่ใหญ่จะบิดไปในทิศตรงข้ามตามกฎความเฉื่อยเมื่อมีการลดเกิดขึ้นที่ตำแหน่งมอเตอร์ที่ข้อศอกยังผลให้มุมที่ใหญ่เบนจากแนวกลาง ปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันนี้ สามารถสังเกตเห็นได้จากเอาต์พุต y_3 และ y_4 เช่นกัน ส่วนภาพที่ 4.8 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่ที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.7 โดยแสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ของฟังก์ชันถ่ายโอน โดยอาศัยการแปลงจากสมการสเตทสเปซเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกนจินตภาพเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง ในขณะที่โพลที่เป็นคู่คอนจูเกตทำให้เกิดกลไกการสั่น ซึ่งในการจำลองผลนี้เกิดการสั่นและหยุดลงในช่วงระยะเวลาต่อมา และทำให้ระบบมีเสถียรภาพแบบเชิงเส้นนอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าศูนย์ของระบบที่อยู่ทางด้านขวามือของแกนจินตภาพบ่งชี้ได้ว่าระบบนี้ไม่เป็นระบบที่มีค่าเฟสน้อยสุด



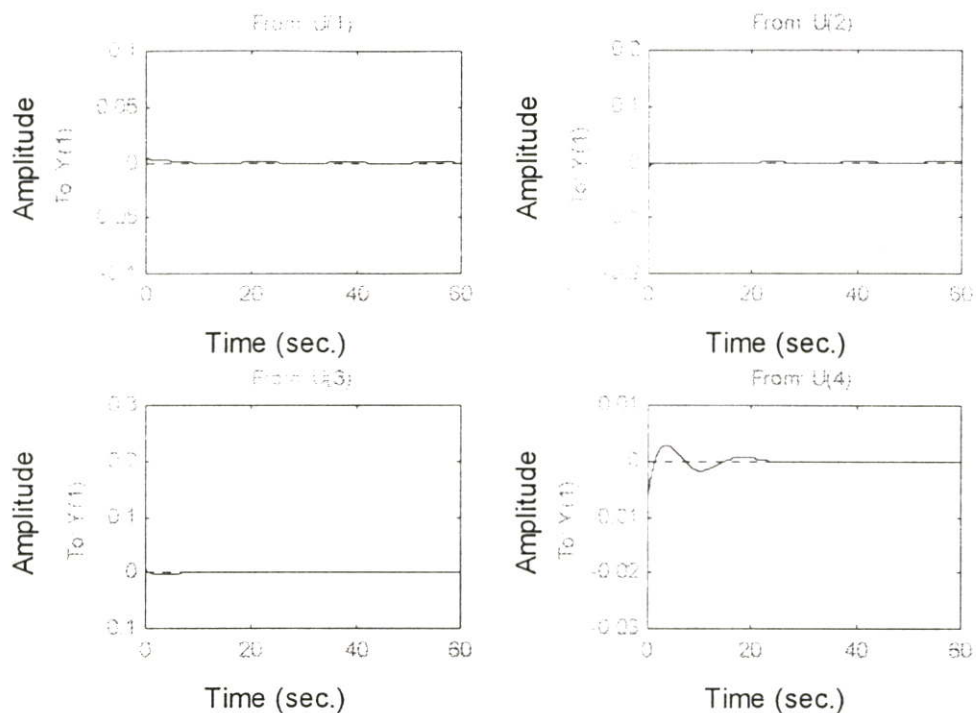
ภาพที่ 4.7 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=0.2$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งมีค่าอินพุทเป็น u_2



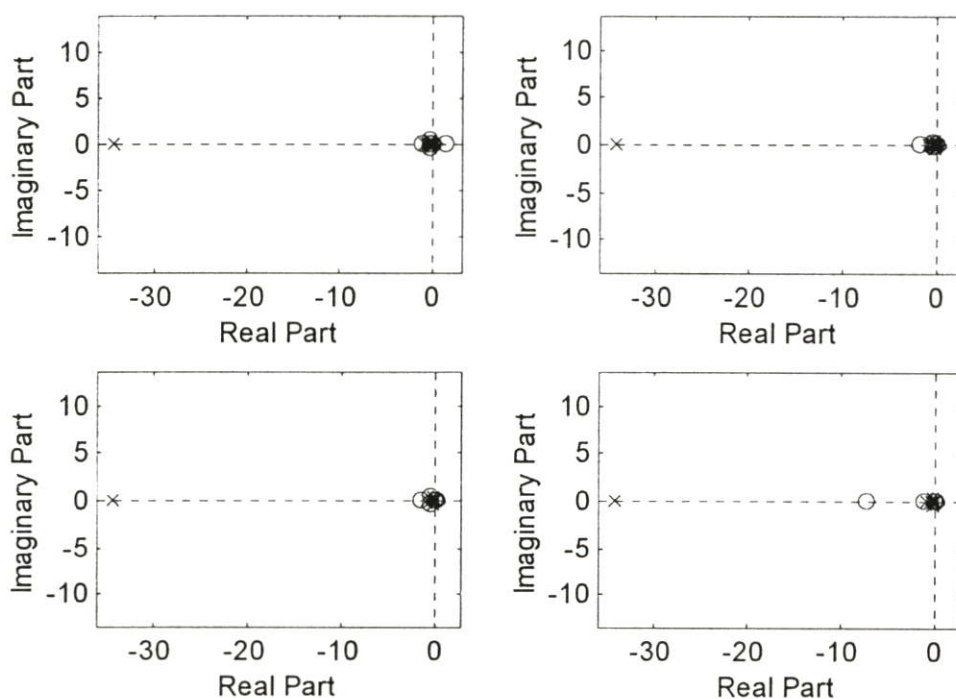
ภาพที่ 4.8 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=0.2$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.7

4.3 กรณีที่พิจารณาการหน่วงโดยกำหนดค่าคงตัวของการหน่วงที่ปลายแขนไม่เท่ากัน

ภาพที่ 4.9 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของการหน่วง $d_1=0.01$, $d_4=0.2$ และสมมติให้ไม่มีกลไกส่งผ่านการหน่วงเนื่องจากลำแขนหนึ่งไปอีกลำเขียนหนึ่ง นั่นคือ d_2, d_3 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อทำการป้อนอินพุตในรูปการดลทั้ง 4 ค่า โดยเลือกจำลองค่าเอาท์พุทเป็น y_1 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_1 เมื่อทำการอินพุทค่า u_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ แทบจะไม่เกิดขึ้นเลย จะมีก็แต่ในการอินพุทค่า u_4 เท่านั้นที่มีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 25 วินาทีแรก แล้วการสั่นก็มีขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นผลกระทบมาจากการหน่วง ส่วนภาพที่ 4.10 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่บรรยายถึงลักษณะของฟังก์ชันที่ถ่ายโอนที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.9 จะเห็นได้ว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ แต่มีโพลอยู่ 1 ค่าทางซ้ายมือของแกนจินตภาพเกิดขึ้นซึ่งเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง

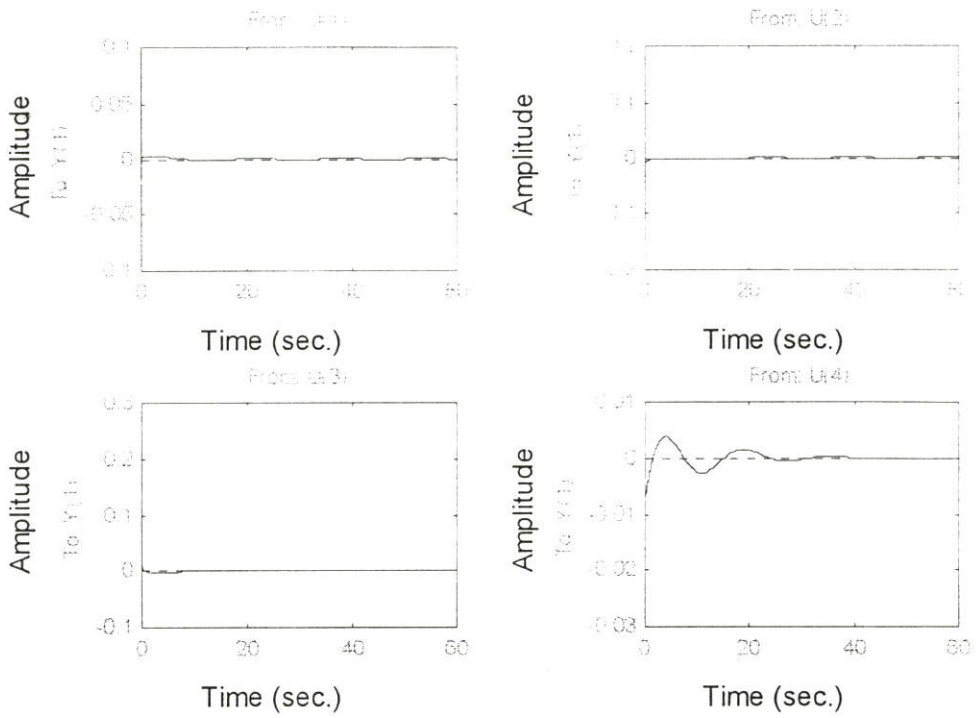


ภาพที่ 4.9 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งค่าเกาท์พุทเป็น y_1

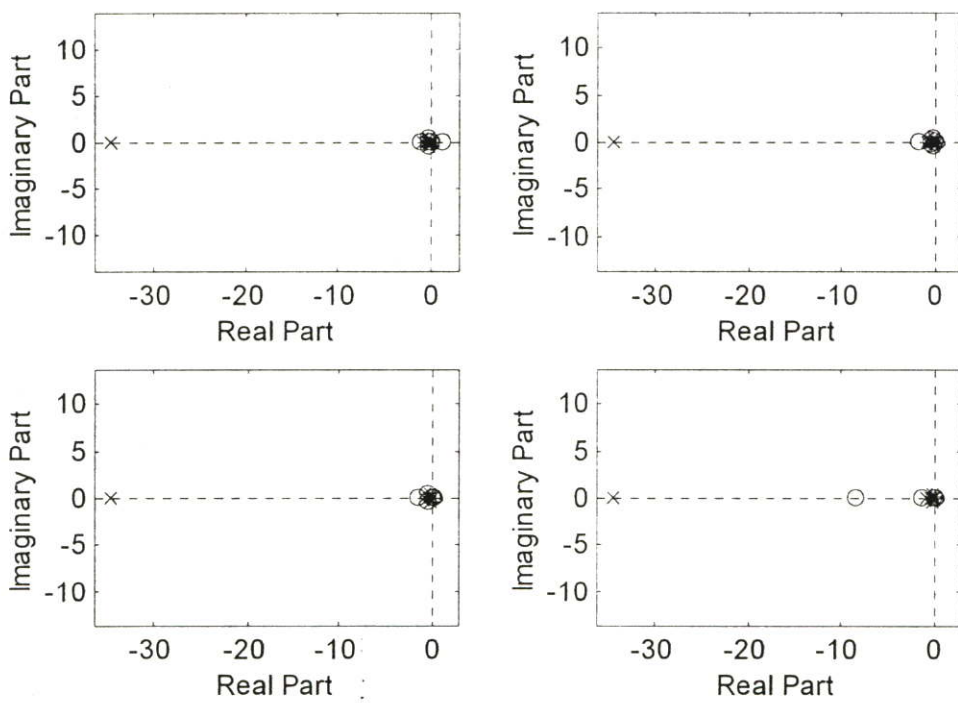


ภาพที่ 4.10 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.9

ภาพที่ 4.11 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของการหน่วง $d_1=0.01$, $d_4=0.2$ และ $d_2=0.04$ โดย d_3 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อทำการป้อนอินพุทในรูปการดลทั้ง 4 ค่า โดยเลือกจำลองค่าเอาท์พุทเป็น y_1 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_1 เมื่อทำการอินพุทค่า u_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ แทบจะไม่เกิดขึ้นเลย จะมีก็แต่ในการอินพุทค่า u_4 เท่านั้นที่มีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 30 วินาทีแรก แล้วการสั่นก็มีขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นผลกระทบมาจากการหน่วง แต่มีความแตกต่างกับภาพที่ 4.9 ตรงที่มีขนาดของการสั่นที่ใหญ่กว่า ทั้งนี้เป็นเพราะมีการเพิ่มค่า d_2 ซึ่งอาจทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไปแต่ไม่มากนัก เพราะการสั่นมีขนาดลดลงจนหยุดนิ่งในเวลาต่อมา ส่วนภาพที่ 4.12 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่บรรยายถึงลักษณะของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.11 ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ แต่มีโพลอยู่ 1 ค่าทางซ้ายมือของแกนจินตภาพเกิดขึ้นซึ่งเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง

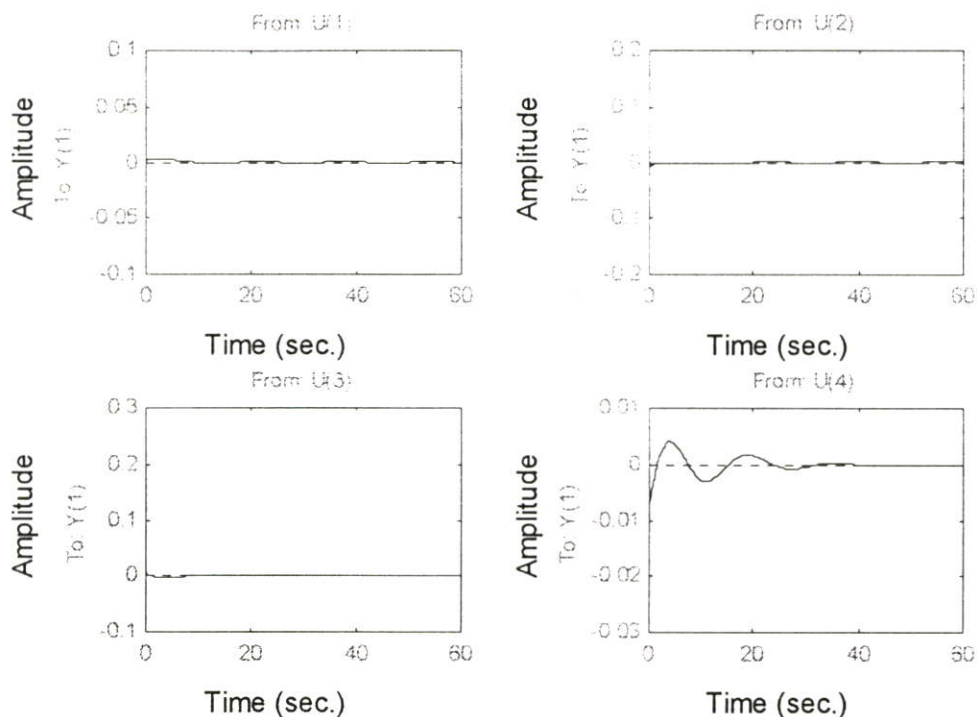


ภาพที่ 4.11 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0$, $d_4=0.2$ ค่าเอาต์พุตเป็น y_1

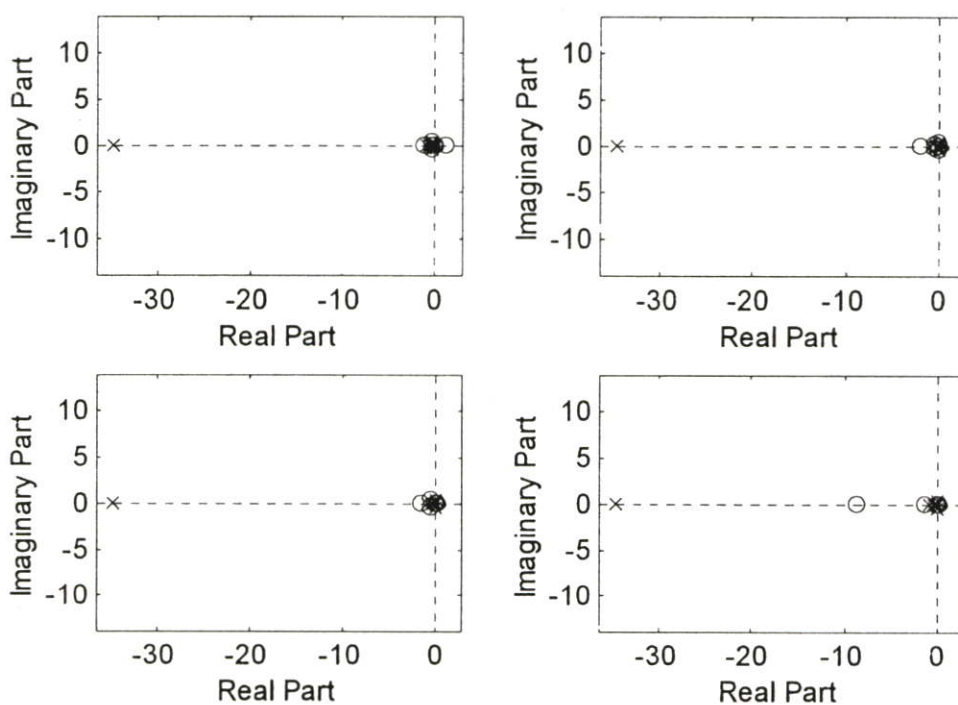


ภาพที่ 4.12 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.11

ภาพที่ 4.13 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของสปริง $d_1=0.01$, $d_2=0.2$ และ $d_3=0.05$ โดย d_2 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อทำการป้อนอินพุตในรูปการดลทั้ง 4 ค่า โดยเลือกจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_1 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_1 เมื่อทำการอินพุตค่า u_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ แทบจะไม่เกิดขึ้นเลย จะมีก็แต่ในการอินพุตค่า u_4 เท่านั้นที่มีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 40 วินาทีแรก และการสั่นก็มีขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นผลกระทบมาจากการหน่วง แต่มีความแตกต่างกับภาพที่ 4.9 ตรงมีขนาดของการสั่นที่ใหญ่กว่ารวมทั้งเวลาที่ใช้ในการหยุดนิ่งเพิ่มขึ้นด้วย ทั้งนี้เป็นเพราะมีการเพิ่มค่า d_3 ซึ่งอาจทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไป และการควบคุมสัญญาณการแกว่งของลำแขนที่ 2 เป็นไปได้ยากกว่าลำแขนที่ 1 จึงใช้เวลาในการหยุดนิ่งมากกว่าภาพที่ 4.11 ส่วนภาพที่ 4.14 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่บรรยายถึงลักษณะของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.13 ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ แต่มีโพลอยู่ 1 ค่าทางซ้ายมือของแกนจินตภาพเกิดขึ้นซึ่งเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง

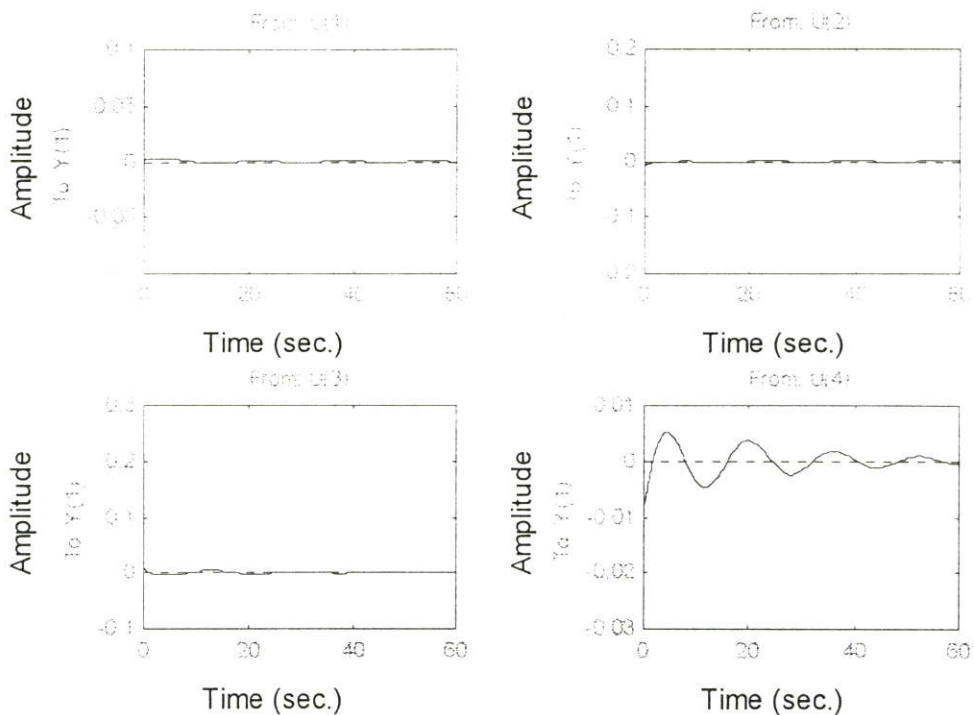


ภาพที่ 4.13 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งค่าเอาต์พุตเป็น y_1

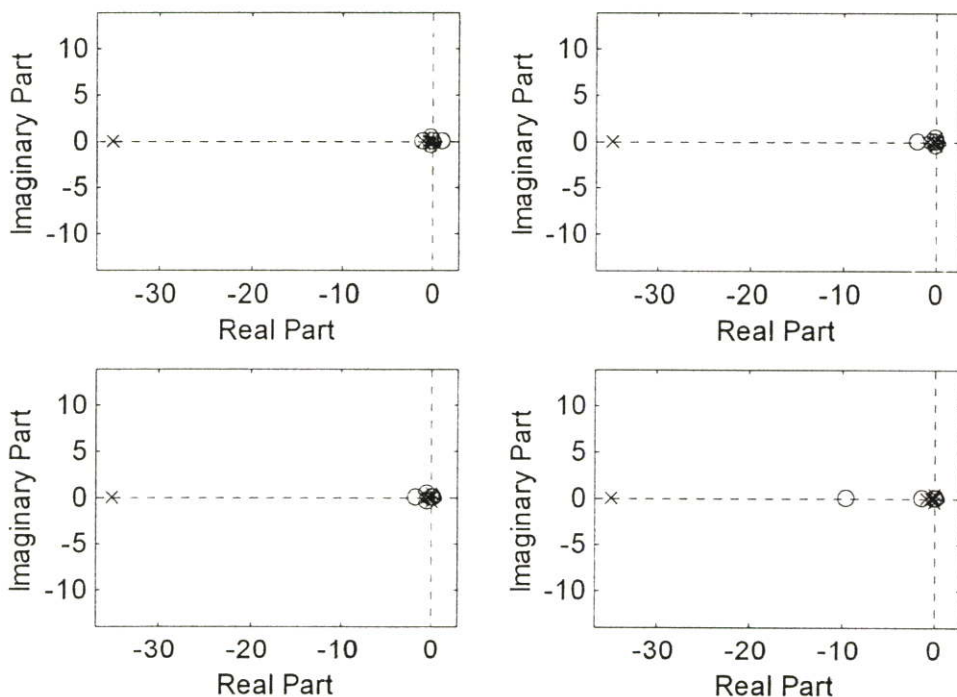


ภาพที่ 4.14 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.13

ภาพที่ 4.15 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าคงตัวของการหน่วง $d_1=0.01$, $d_4=0.2$, $d_2=0.04$ และ $d_3=0.05$ และเมื่อทำการป้อนอินพุตในรูปการดลทั้ง 4 ค่า โดยเลือกจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_1 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_1 เมื่อทำการอินพุตค่า u_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ แทบจะไม่เกิดขึ้นเลย จะมีก็แต่ในการอินพุตค่า u_4 เท่านั้นที่มีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 60 วินาทีแรก และการสั่นก็มีขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นผลกระทบมาจากการหน่วง แต่มีความแตกต่างกับภาพที่ 4.9 ตรงมีขนาดของการสั่นที่ใหญ่กว่ารวมทั้งเวลาที่ใช้ในการหยุดนิ่งเพิ่มขึ้นด้วย ทั้งนี้เป็นเพราะมีการเพิ่มค่า d_2 และ d_3 พร้อมกัน ซึ่งอาจทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไปและการควบคุมสัญญาณการแกว่งของลำแขนที่ 2 เป็นไปได้ยากกว่าลำแขนที่ 1 จึงใช้เวลาในการหยุดนิ่งมากกว่าภาพที่ 4.11 และ 4.13 ส่วนภาพที่ 4.16 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่บรรยายถึงลักษณะของฟังก์ชันที่ถ่ายโอนที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.15 แต่เป็นการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ของแขนกล ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ แต่มีโพลอยู่ 1 ค่าทางซ้ายมือของแกนจินตภาพเกิดขึ้นซึ่งเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง

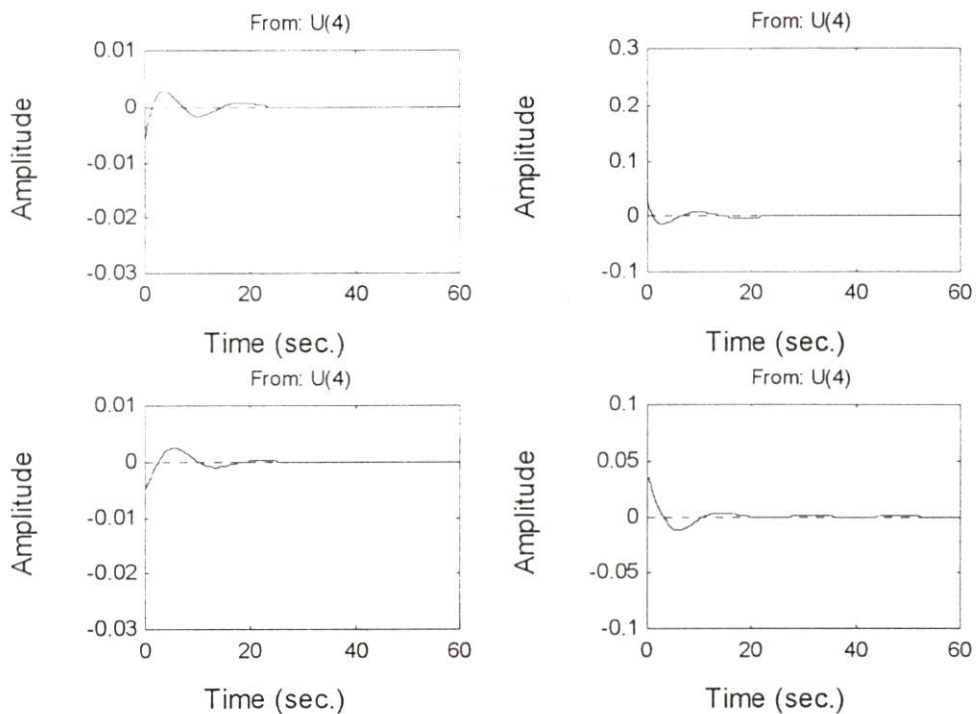


ภาพที่ 4.15 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งค่าเอาต์พุตเป็น y_1

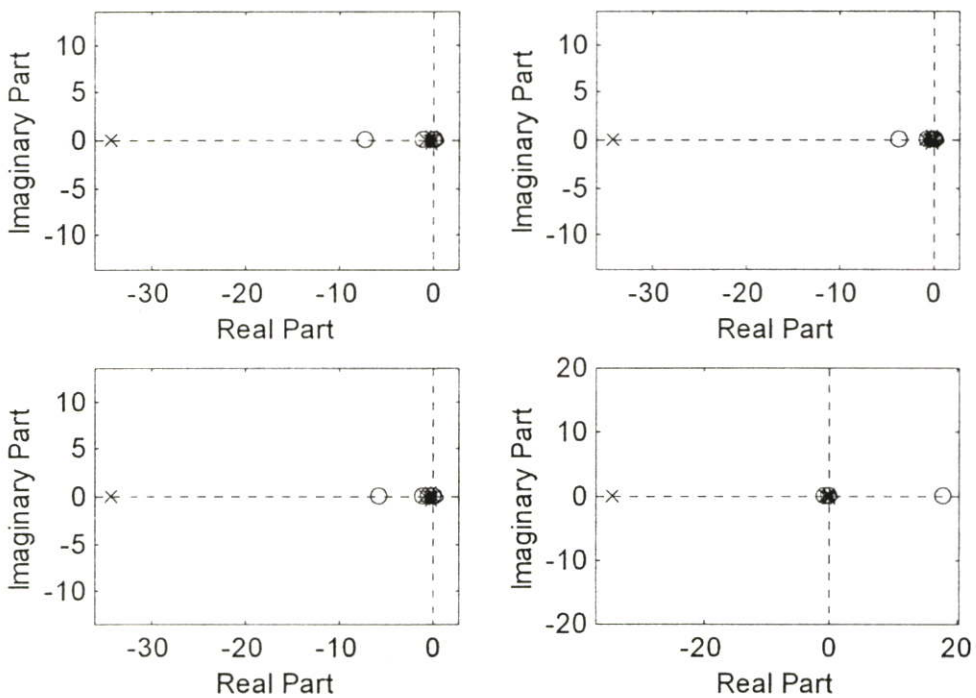


ภาพที่ 4.16 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.15

ภาพที่ 4.17 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าการหน่วง $d_1=0.01$, $d_4=0.2$ และ d_2 , d_3 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อเลือกทำการป้อนค่าอินพุต u_4 ในรูปการลดลงจากการป้อนสัญญาณให้กับแขนที่ตำแหน่งปลายลำแขนที่ 2 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ ซึ่งมีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 20 วินาทีแรก แล้วการสั่นก็มีขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อมุมที่ข้อศอกบิดไปทางหนึ่ง จะเกิดความเคี้ยวด้านการเคลื่อนที่ที่เชื่อมต่อกันระหว่างทั้งสองมอเตอร์ ส่งผลให้มุมที่ไหล่จะบิดไปในทิศตรงข้ามตามกฎความเคี้ยวเมื่อมีการลดลงที่ตำแหน่งมอเตอร์ที่ข้อศอกยังผลให้มุมที่หัวไหล่เบนจากแนวกลาง ปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันนี้ สามารถสังเกตเห็นได้จากเอาต์พุต y_3 และ y_4 เช่นกัน ส่วนภาพที่ 4.18 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่ที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.17 โดยแสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งจะเห็นว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ และโพลที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกนจินตภาพเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าศูนย์ของระบบที่อยู่ทางด้านขวามือของแกนจินตภาพบ่งชี้ได้ว่าระบบนี้ไม่เป็นระบบที่มีค่าเฟสน้อยสุด

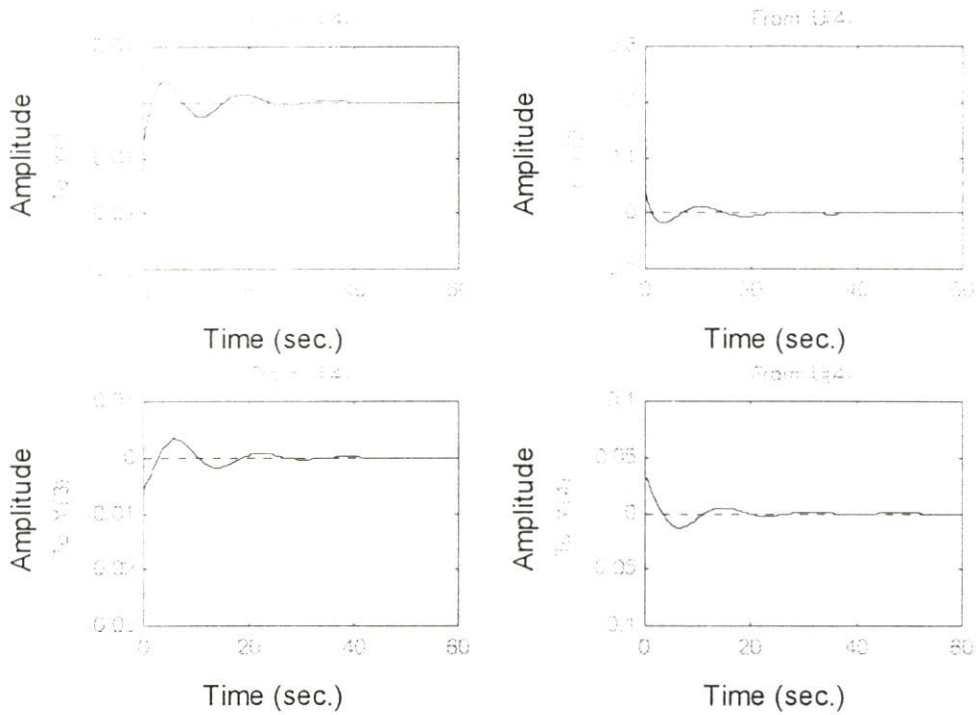


ภาพที่ 4.17 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_4

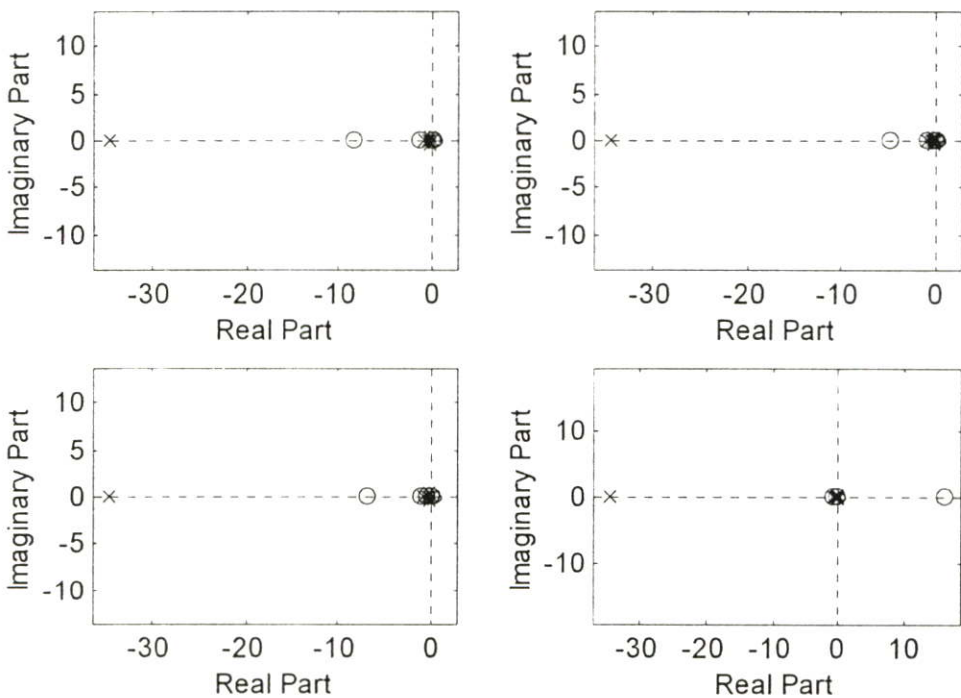


ภาพที่ 4.18 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.17

ภาพที่ 4.19 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าการหน่วง $d_1=0.01$, $d_4=0.2$ และ $d_2=0.04$ โดย d_3 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อเลือกทำการป้อนค่าอินพุต u_4 ในรูปการลดลงจากการป้อนสัญญาณให้กับแขนที่ตำแหน่งปลายลำแขนที่ 2 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ มีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 30 วินาทีแรก แล้วการสั่นก็จะมีขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อมุมที่ข้อศอกบิดไปทางหนึ่ง จะเกิดความเฉื่อยต้านการเคลื่อนที่ที่เชื่อมต่อกันระหว่างทั้งสองมอเตอร์ ส่งผลให้มุมที่ไหล่จะบิดไปในทิศตรงข้ามตามกฎความเฉื่อยเมื่อมีการลดลงที่ตำแหน่งมอเตอร์ที่ข้อศอกยังผลให้มุมที่หัวไหล่เบนจากแนวกลาง ปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันนี้ สามารถสังเกตเห็นได้จากเอาต์พุต y_3 และ y_4 เช่นกัน แต่มีความแตกต่างกับภาพที่ 4.17 ตรงมีขนาดของการสั่นที่ใหญ่กว่ารวมทั้งเวลาที่ใช้ในการหยุดนิ่งเพิ่มขึ้นด้วย ทั้งนี้เป็นเพราะมีการเพิ่มค่า d_2 ซึ่งอาจทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไปจึงใช้เวลาในการหยุดนิ่งมากกว่าภาพที่ 4.17 ส่วนภาพที่ 4.20 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่ที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.19 โดยแสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ และโพลที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกนจินตภาพเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าศูนย์ของระบบที่อยู่ทางด้านขวามือของแกนจินตภาพบ่งชี้ได้ว่าระบบนี้ไม่เป็นระบบที่มีค่าเฟสน้อยสุด

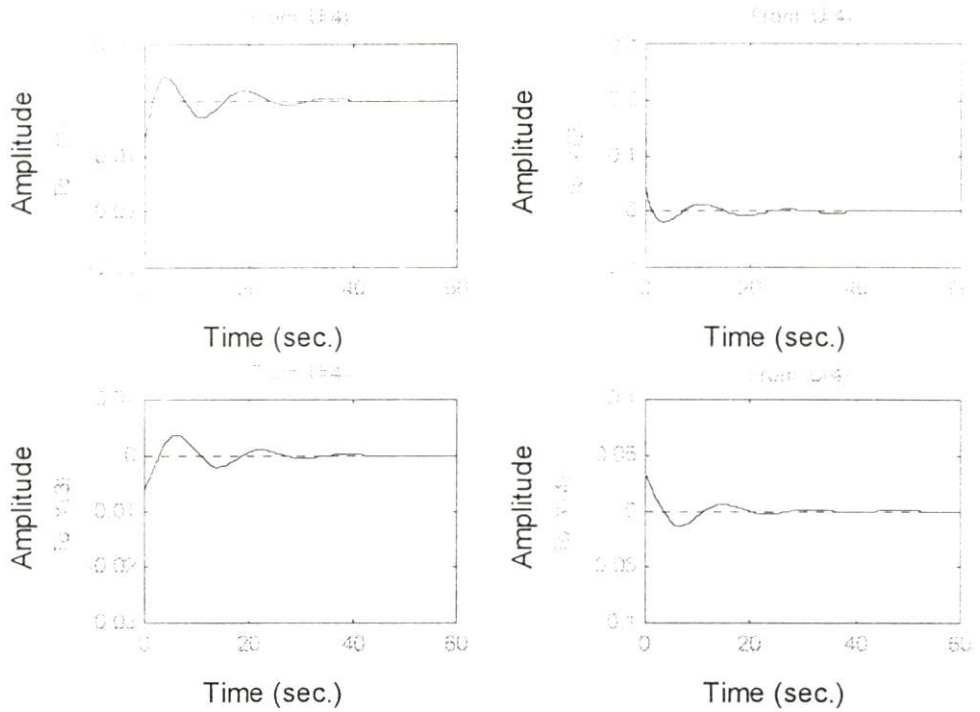


ภาพที่ 4.19 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_4

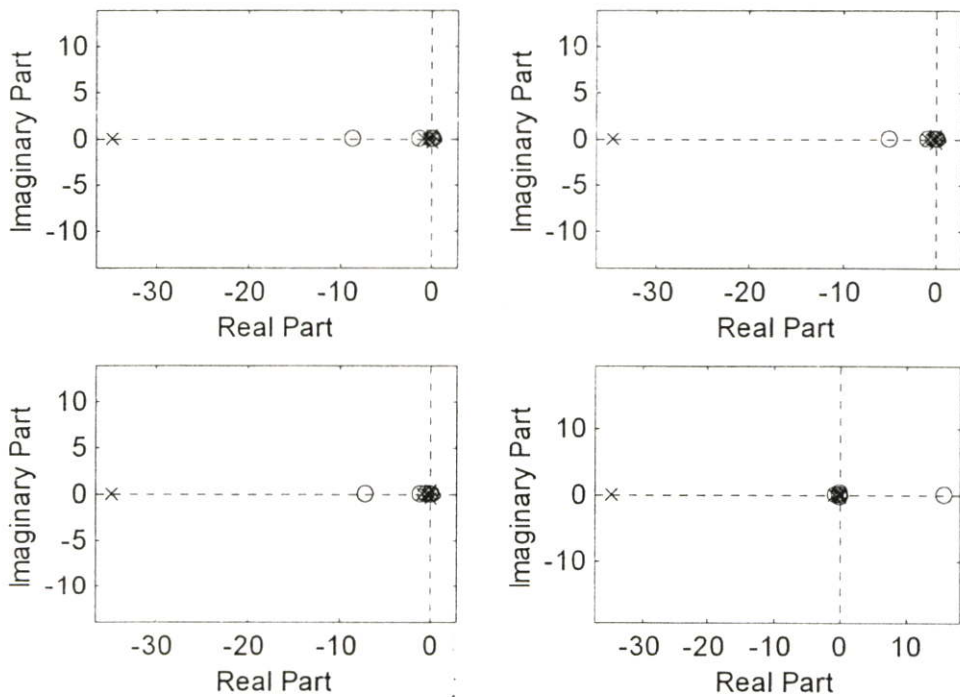


ภาพที่ 4.20 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.19

ภาพที่ 4.21 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าการหน่วง $d_1=0.01$, $d_4=0.2$ และ $d_3=0.05$ โดย d_2 มีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อเลือกทำการป้อนค่าอินพุต u_4 ในรูปการลดลงจากการป้อนสัญญาณให้กับแขนที่ตำแหน่งปลายลำแขนที่ 2 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ มีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 30 วินาทีแรก แล้วการสั่นก็มีขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อมุมที่ข้อศอกบิดไปทางหนึ่ง จะเกิดความเฉื่อยด้านการเคลื่อนที่ที่เชื่อมต่อกันระหว่างทั้งสองมอเตอร์ ส่งผลให้มุมที่ไหล่จะบิดไปในทิศตรงข้ามตามกฎความเฉื่อยเมื่อมีการลดเกิดขึ้นที่ตำแหน่งมอเตอร์ที่ข้อศอกยังผลให้มุมที่หัวไหล่เบนจากแนวกลาง ปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันนี้ สามารถสังเกตเห็นได้จากเอาต์พุต y_3 และ y_4 เช่นกัน แต่มีความแตกต่างกับภาพที่ 4.17 ตรงที่มีขนาดของการสั่นที่ใหญ่กว่ารวมทั้งเวลาที่ใช้ในการหยุดนิ่งเพิ่มขึ้นด้วย ทั้งนี้เป็นเพราะมีการเพิ่มค่า d_3 ซึ่งอาจทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไปจึงใช้เวลาในการหยุดนิ่งมากกว่าภาพที่ 4.17 และ 4.19 ส่วนภาพที่ 4.22 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่ที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.21 โดยแสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ และโพลที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกนจินตภาพเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าศูนย์ของระบบที่อยู่ทางด้านขวามือของแกนจินตภาพบ่งชี้ได้ว่าระบบนี้ไม่เป็นระบบที่มีค่าเฟสน้อยสุด

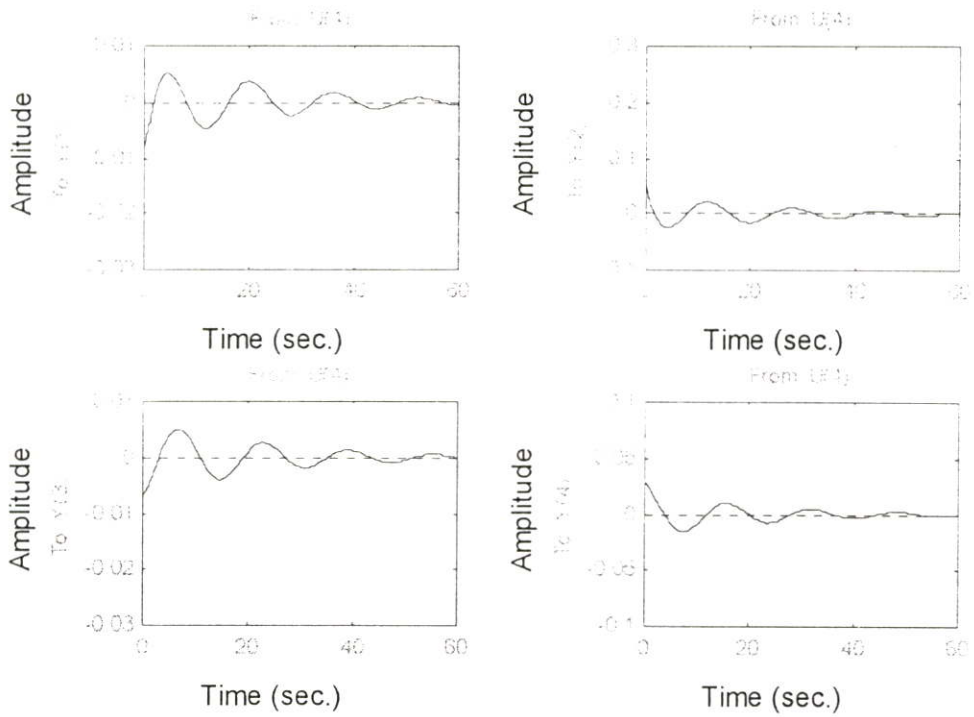


ภาพที่ 4.21 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_4

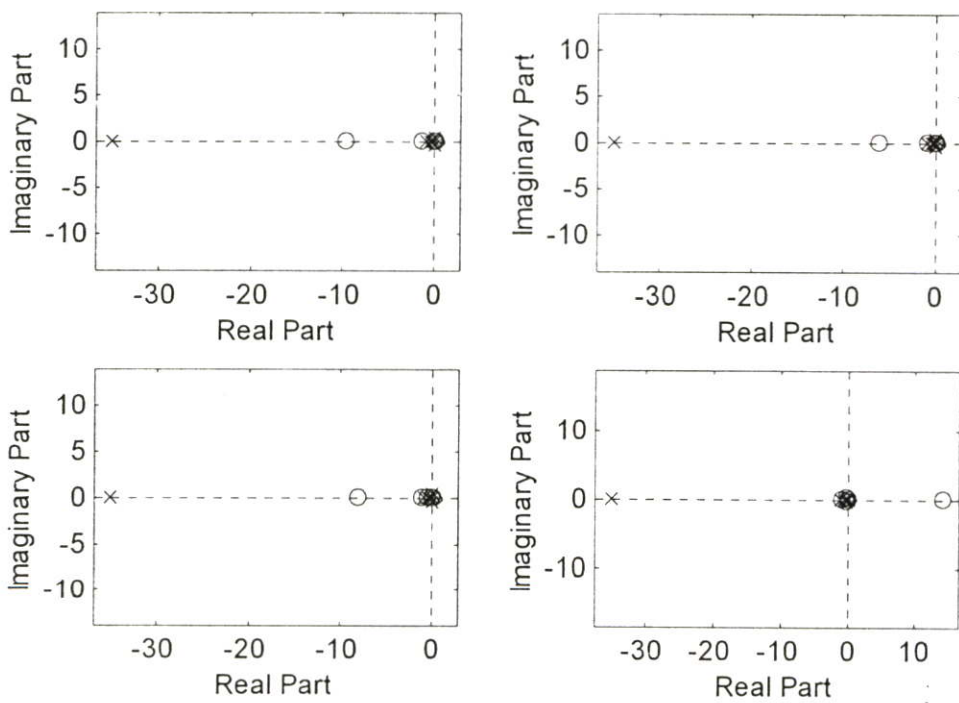


ภาพที่ 4.22 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.21

ภาพที่ 4.23 กำหนดให้ L_1 ยาว 0.5 เมตร, L_2 ยาว 0.7 เมตร, m_1 หนัก 0.8 กิโลกรัม, m_2 หนัก 0.1 กิโลกรัม และค่าการหน่วง $d_1=0.01$, $d_4=0.2$, $d_2=0.04$ และ $d_3=0.05$ และเมื่อเลือกทำการป้อนค่าอินพุต u_i ในรูปการลดลงจากการป้อนสัญญาณให้กับแขนที่ตำแหน่งปลายลำแขนที่ 2 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ มีการสั่นเกิดขึ้นแต่ก็เกิดในช่วงประมาณ 60 วินาทีแรก แล้วการสั่นก็มียขนาดลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่งในช่วงเวลาต่อมา นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อมุมที่ข้อศอกบิดไปทางหนึ่ง จะเกิดความเฉื่อยด้านการเคลื่อนที่ที่เชื่อมต่อกันระหว่างทั้งสองมอเตอร์ ส่งผลให้มุมที่ไหล่จะบิดไปในทิศตรงข้ามตามกฎความเฉื่อยเมื่อมีการลดเกิดขึ้นที่ตำแหน่งมอเตอร์ที่ข้อศอกยังผลให้มุมที่หัวไหล่เบนจากแนวกลาง ปรากฏการณ์ทำนองเดียวกันนี้ สามารถสังเกตเห็นได้จากเอาต์พุต y_3 และ y_4 เช่นกัน แต่มีความแตกต่างกับภาพที่ 4.17 ตรงมีขนาดของการสั่นที่ใหญ่กว่ารวมทั้งเวลาที่ใช้ในการหยุดนิ่งเพิ่มขึ้นด้วย ทั้งนี้เป็นเพราะมีการเพิ่มค่า d_2 และ d_3 พร้อมกัน ซึ่งอาจทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไปจึงใช้เวลาในการหยุดนิ่งมากกว่าภาพที่ 4.17, 4.19 และ 4.21 ส่วนภาพที่ 4.24 เป็นภาพในรูปโดเมนความถี่ที่สอดคล้องกับภาพที่ 4.23 โดยแสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งจะเห็นได้ว่าโพลเกือบทั้งหมดอยู่บนจุดกำเนิดโดยจะหักล้างกับค่าศูนย์ที่จุดเดียวกัน ทำให้ไม่เกิดผลใดๆ ขึ้นกับระบบ และโพลที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกนจินตภาพเป็นโพลที่ทำให้เกิดกลไกการหน่วง นอกจากนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าศูนย์ของระบบที่อยู่ทางด้านขวามือของแกนจินตภาพบ่งชี้ได้ว่าระบบนี้ไม่เป็นระบบที่มีค่าเฟสน้อยสุด



ภาพที่ 4.23 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งค่าอินพุทเป็น u_4

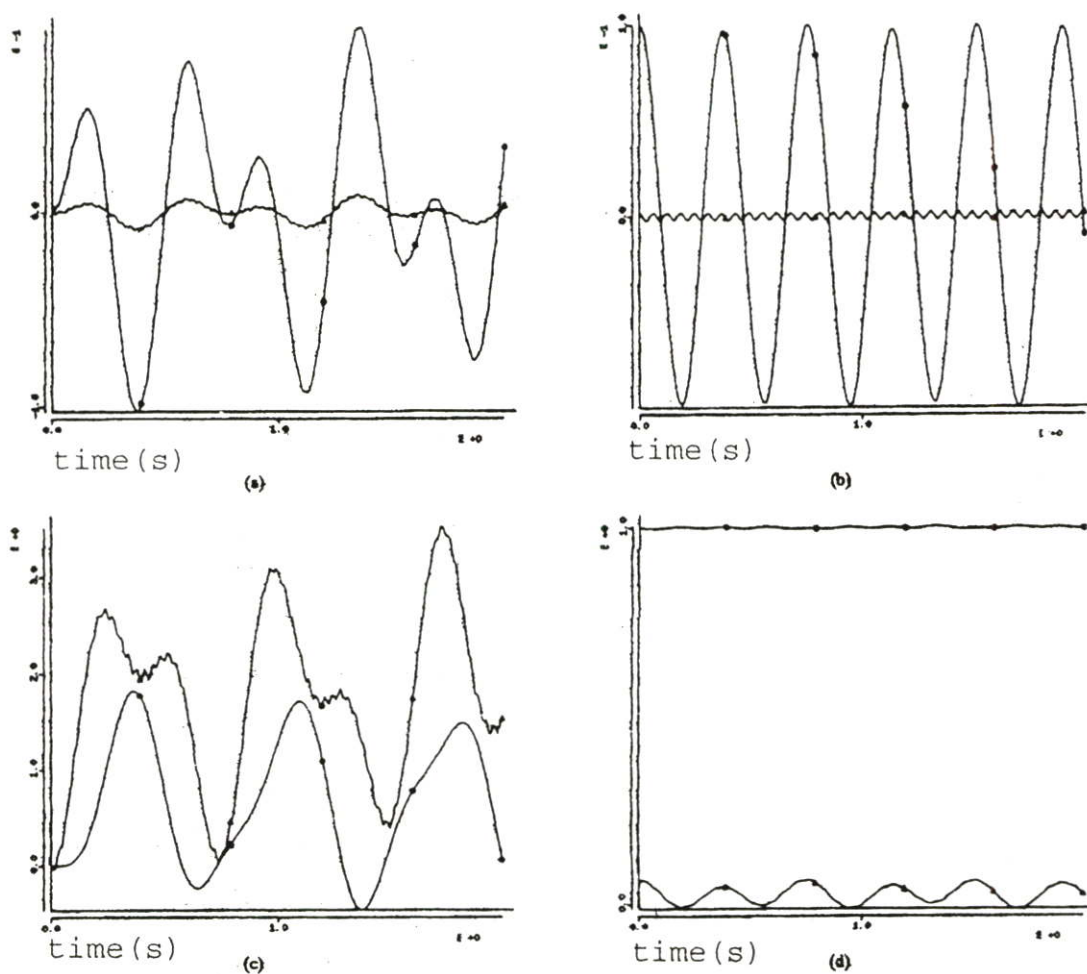


ภาพที่ 4.24 แสดงการจำลองตำแหน่งของโพลและค่าศูนย์ โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=0.01$, $d_2=0.04$, $d_3=0.05$, $d_4=0.2$ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 4.23

จากการจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์พบว่า แบบจำลองในกรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วงของลำแขน จะพบว่ามี การสั่นเกิดขึ้นมาก เพราะไม่มีความสมดุลของระบบ แต่ถ้าพิจารณาการใส่ค่ากลไกการหน่วงพบว่าสามารถทำให้เกิดความสมดุลของระบบขึ้นได้ ในกรณีที่ค่าคงตัวของการหน่วงของลำแขนที่ 1 มีค่าไม่เท่ากับของลำแขนที่ 2 นั้นสามารถปรับตัวให้เข้ากับ ความสมดุลของระบบได้ดีกว่า ส่วนกรณีที่ค่าคงตัวของการหน่วงของลำแขนที่ 1 มีค่าเท่ากับของลำแขนที่ 2 สามารถควบคุมระบบของแขนกลได้ดีเช่นกัน แต่การปรับตัวให้เข้ากับระบบจะช้ากว่า แต่ในระบบจริงอาจมีความไม่แน่นอนที่ยากต่อการจำลองแบบทำให้ระบบของแขนอาจจะเกิดมีความเหมาะสมได้

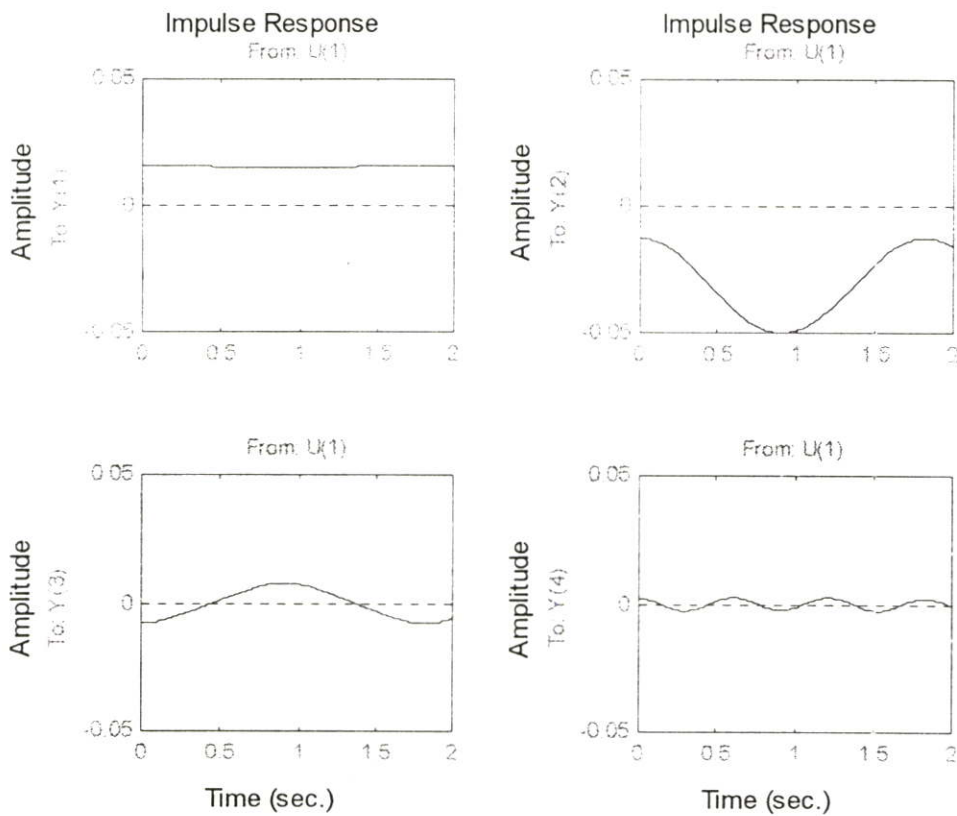
4.4 การเปรียบเทียบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากภาพที่ 4.25 ในส่วนของภาพย่อย (a) นั้นแสดงการแกว่งตัวของแขนในข้อที่ 1, ภาพย่อย (b) แสดงการแกว่งตัวของแขนในข้อที่ 2, ภาพย่อย (c) แสดงการบิดของมุมในข้อที่ 2 และภาพย่อย (d) แสดงการบิดของแขนที่จุดปลายของแขน ซึ่งเป็นการจำลองผลจากงานวิจัยของ ลูคา (Luca) [37] เพื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองที่สร้างขึ้นในสมการที่ (3.1.81)



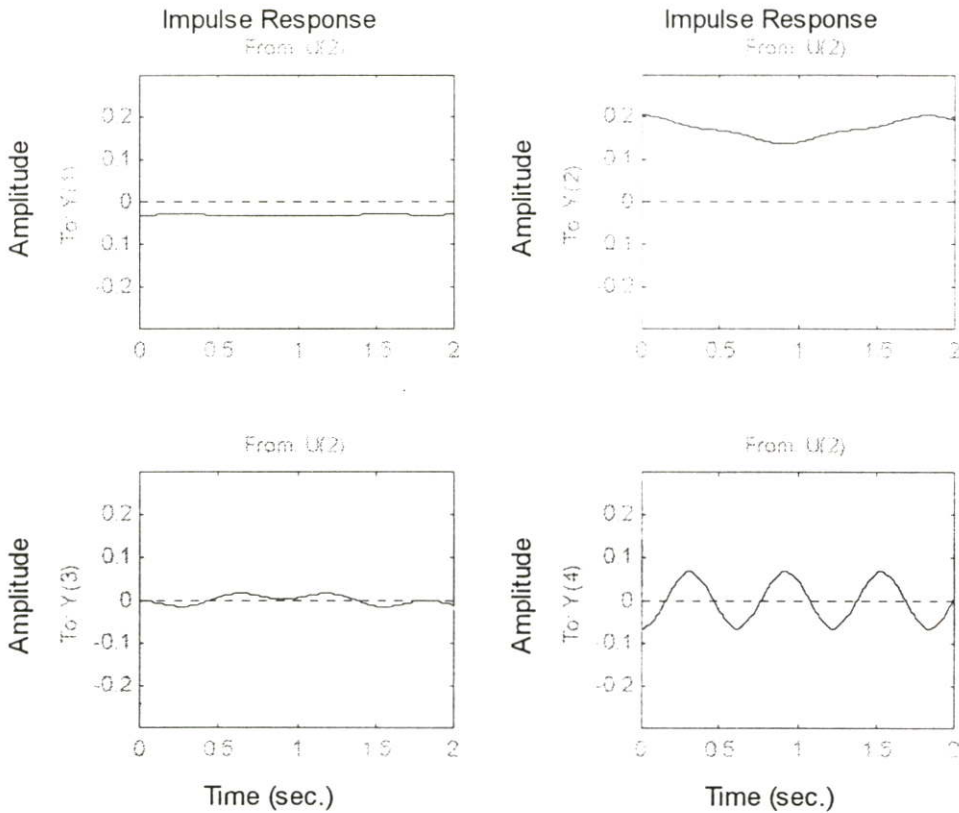
ภาพที่ 4.25 แสดงการจำลองการสั่นของแขนจากงานวิจัยของลูคาในกรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วงเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $M_1=0.1$, $M_2=0.1$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$

กำหนดให้ $p_1=0.2$, $p_2=0.2$, $a_1=0$, $a_2=0$, $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $M_1=0.1$, $M_2=0.1$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$, $(EI)_1=1$ และ $(EI)_2=1$ ตามการกำหนดค่าเบื้องต้นของงานวิจัยของลูกาและเมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_1 ในรูปของการดลซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i = \{1,2,3,4\}$ ในภาพที่ 4.26 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีขนาดใหญ่กว่า y_1 นั่นคือมุมของแขนที่ 2 มีการบิดตัวมากกว่าในแขนที่ 1 ส่วนในกรณีนี้ที่ทำการเอาต์พุตค่า y_3 การสั่นของค่าแอมพลิจูด (amplitude) จะมีขนาดใหญ่กว่า y_4 แต่จะมีความถี่ในการแกว่งตัวที่ช้ากว่า y_4 และจะสังเกตเห็นได้ว่าการแกว่งของแขนและการบิดของมุมนั้นเกิดขึ้นน้อยมากเมื่อเทียบกับในงานวิจัยของลูกา



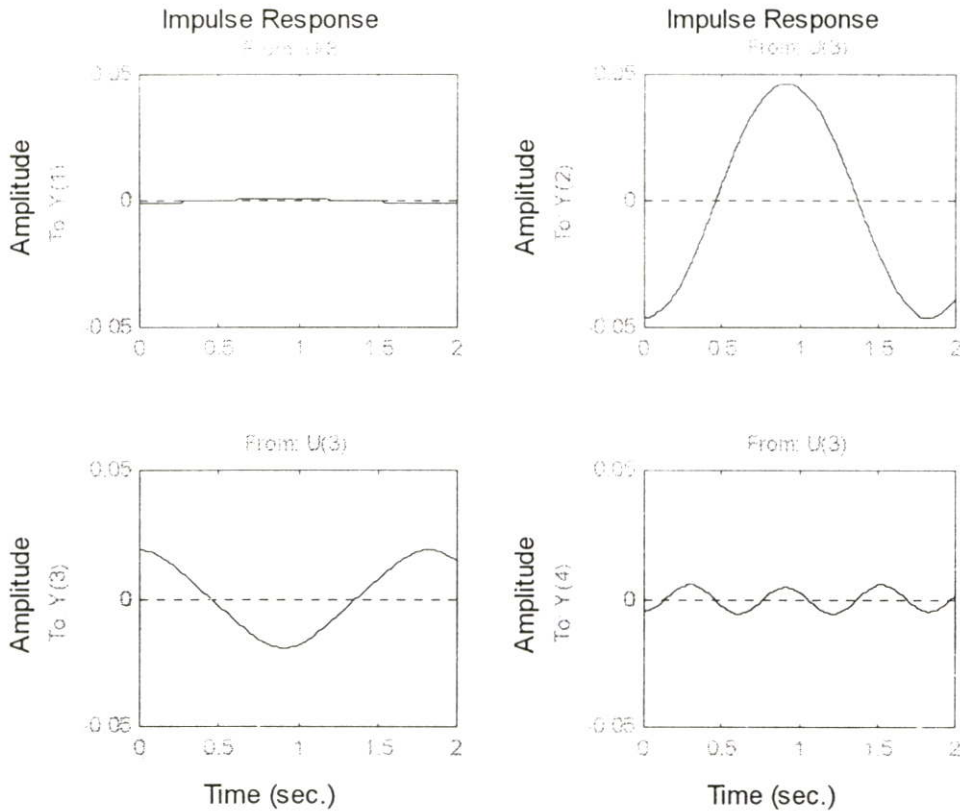
ภาพที่ 4.26 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_1

เมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_2 ในรูปของการดลซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i = \{1,2,3,4\}$ ในภาพที่ 4.27 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีขนาดใหญ่กว่า y_1 ส่วนในกรณีที่ทำให้การเอาต์พุตค่า y_4 การสั่นของแอมพลิจูดจะมีขนาดใหญ่กว่า y_3 ซึ่งอาจเป็นเพราะทำการอินพุตค่าที่มุมของแกนที่ 2 ทำให้เกิดการบิดตัวของแกนที่ 2 มากกว่าแกนที่ 1 โดยสอดคล้องกับการแกว่งตัวของ y_3 และ y_4 ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของลูคาจะสังเกตได้ว่าการแกว่งของแกนและการบิดของมุมเกิดขึ้นน้อยมาก



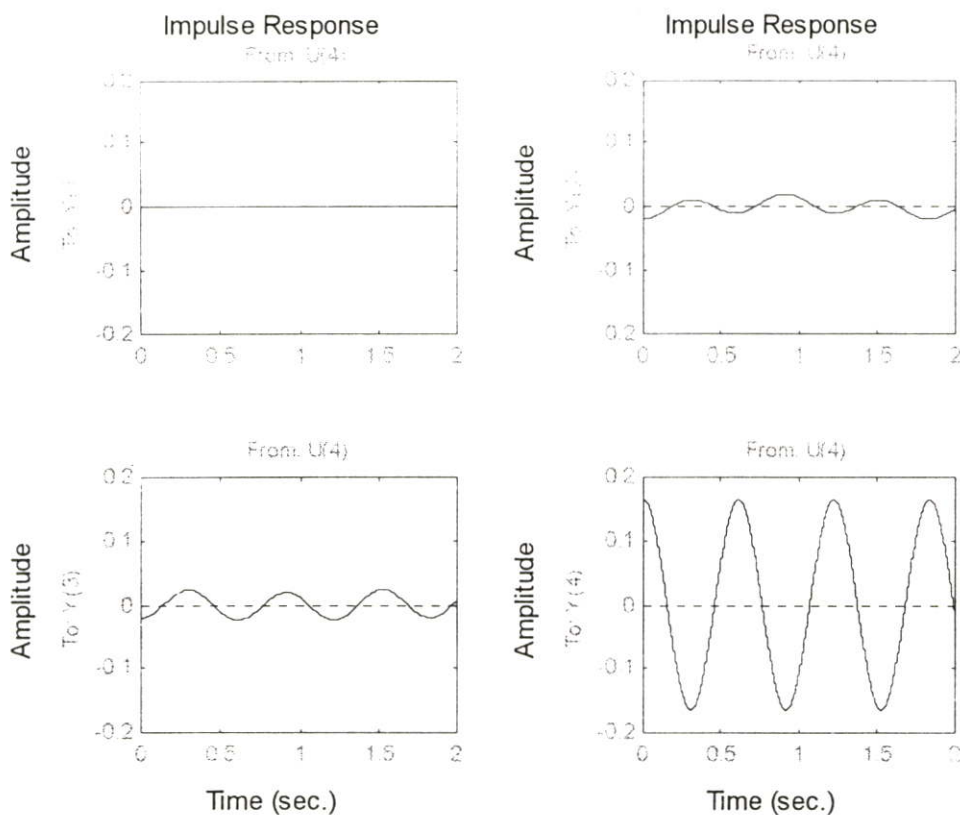
ภาพที่ 4.27 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_2

เมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_3 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ ในภาพที่ 4.28 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีขนาดใหญ่กว่า y_1 ส่วนในกรณีที่ทำกรเอาต์พุตค่า y_3 การสั่นจะมีขนาดใหญ่กว่า y_4 แต่จะมีการบิดตัวที่ช้ากว่า y_4 โดยจะเห็นได้ว่าลักษณะที่เกิดขึ้นจะคล้ายกับภาพที่ 4.26 เพียงแต่ค่าเอาต์พุต y_2 และ y_3 ในภาพที่ 4.28 จะมีขนาดใหญ่กว่า และเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของลูการแกว่งของแขนและการบิดของมุมเกิดขึ้นน้อยมาก



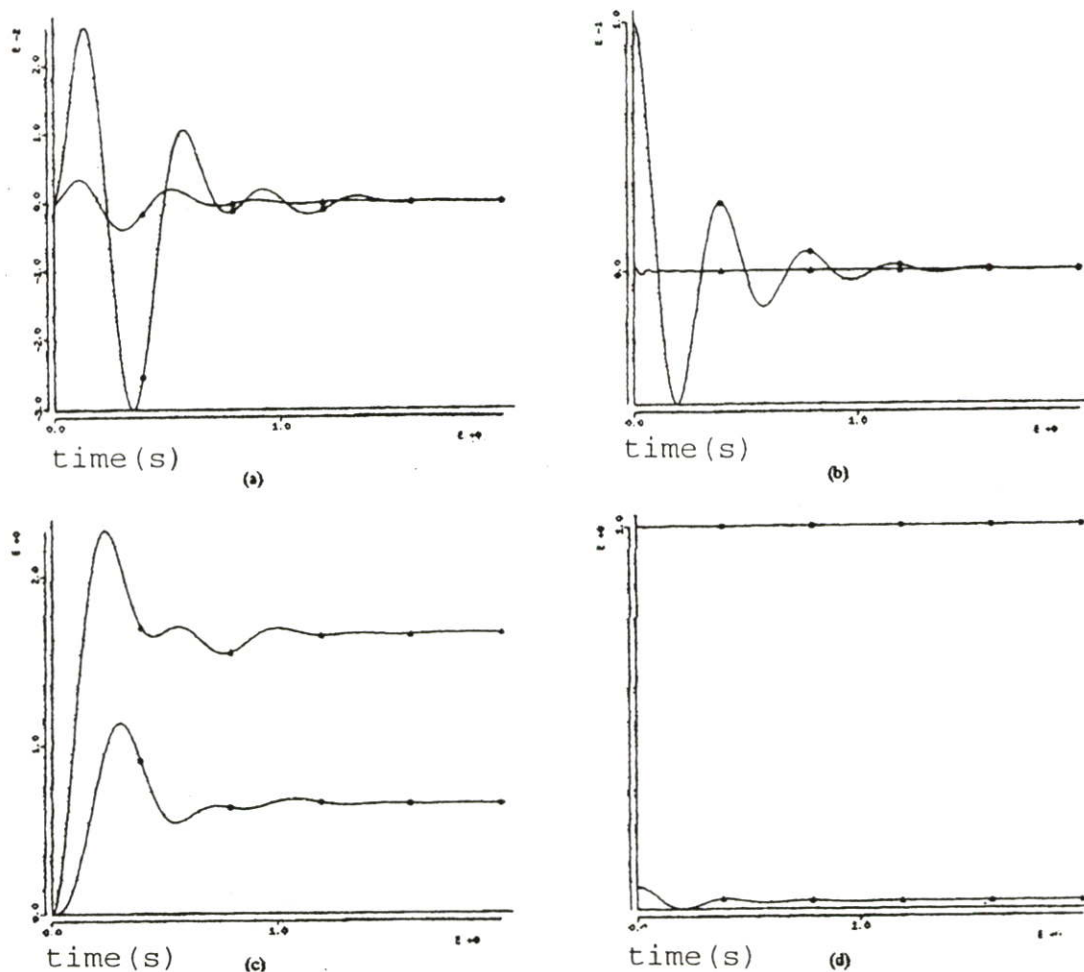
ภาพที่ 4.28 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_3

เมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_4 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ ในภาพที่ 4.29 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีขนาดใหญ่กว่า y_1 ซึ่งแทบจะไม่เกิดการสั่นขึ้นเลย ส่วนในกรณีที่ทำการเอาต์พุตค่า y_4 การสั่นจะมีขนาดใหญ่กว่า y_3 และสังเกตเห็นได้ว่าค่าเอาต์พุต y_4 มีความถี่ในการแกว่งตัวเร็วมากเมื่อเทียบกับค่าเอาต์พุต y_4 ของภาพที่ 4.27 และจากการแกว่งของแกนและการปิดของมูมนั้นเกิดขึ้นน้อยมากเมื่อเทียบกับในงานวิจัยของลูคา



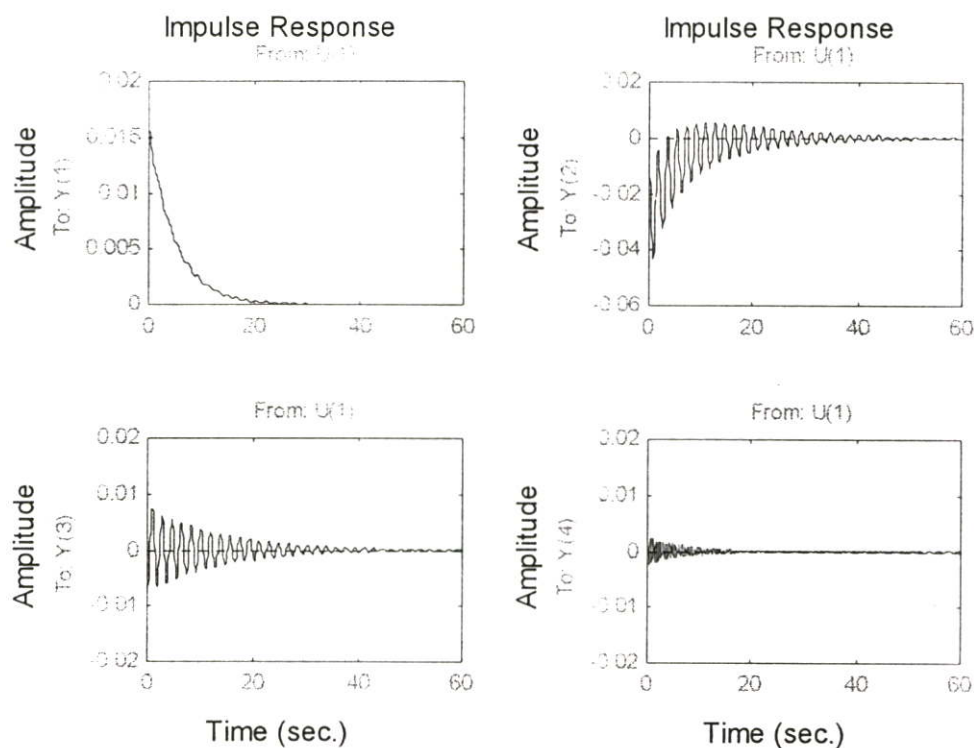
ภาพที่ 4.29 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ ซึ่งค่าอินพุตเป็น u_4

จากภาพที่ 4.30 ในภาพย่อย (a) ซึ่งเป็นผลงานวิจัยของลูกคานั้นแสดงการแกว่งตัวของแขนในข้อที่ 1, ส่วนภาพย่อย (b) แสดงการแกว่งตัวของแขนในข้อที่ 2, ภาพย่อย (c) แสดงการบิดของมุมในข้อที่ 2 และภาพย่อย (d) แสดงการบิดของแขนที่จุดปลายของแขน ซึ่งเป็นการจำลองผลจากงานวิจัยของลูกคา โดยได้เปรียบเทียบกับแบบจำลองของสมการที่ (3.2.71)



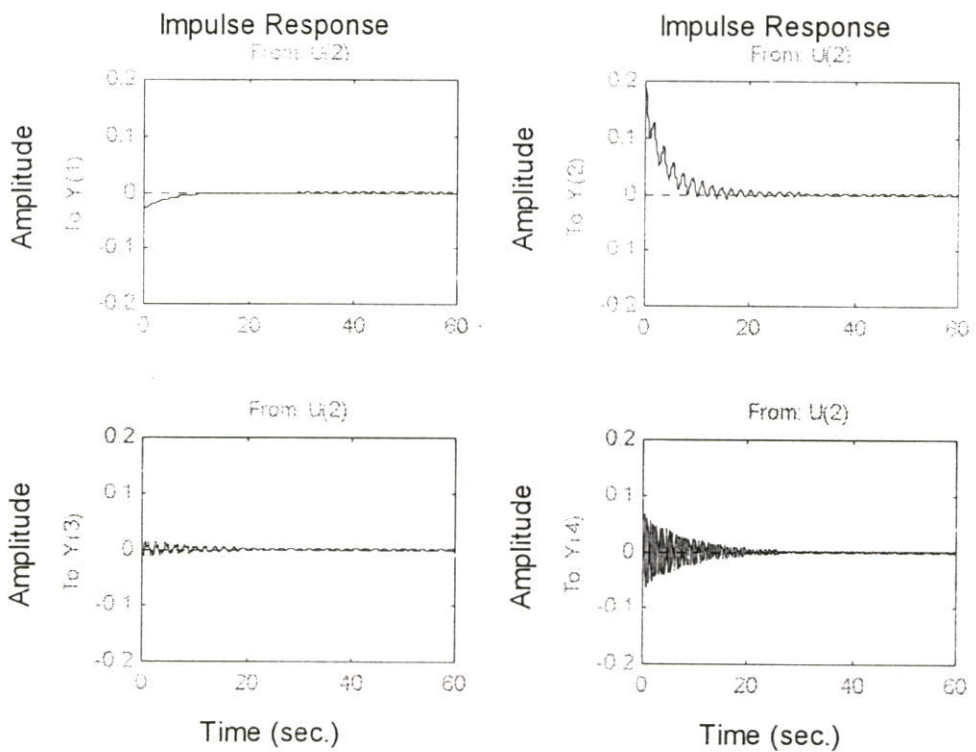
ภาพที่ 4.30 แสดงการจำลองการสั่นของแขนจากงานวิจัยของลูกคาในกรณีที่พิจารณาการหน่วงเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $M_1=0.1$, $M_2=0.1$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=0.1$, $d_2=d_3=0.002$, $d_4=0.1$

กำหนดให้ $p_1=0.2$, $p_2=0.2$, $a_1=0$, $a_2=0$, $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $M_1=0.1$, $M_2=0.1$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=0.1$, $d_2=0.002$, $d_3=0.002$, $d_4=0.1$, $(EI)_1=1$ และ $(EI)_2=1$ ตามการกำหนดค่าเบื้องต้นของงานวิจัยของลูคาและเมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_1 ในรูปของการดลซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ ในภาพที่ 4.31 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีความถี่ในการบิดตัวมากกว่า y_1 และการบิดตัวของมุมจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่ง ส่วนในกรณีนี้ทำการเอาต์พุตค่า y_3 การสั่นจะมีขนาดใหญ่กว่า y_4 แต่ความถี่ในการแกว่งตัวจะมีน้อยกว่า y_4 และการแกว่งของแขนจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่งเช่นกัน และจะสังเกตเห็นได้ว่าการแกว่งของแขนและการบิดของมุมเกิดขึ้นน้อยมากเมื่อเทียบกับในงานวิจัยของลูคา แต่ให้รูปแบบการสั่นในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน ทั้งนี้เป็นเพราะในงานวิจัยของลูคานั้นได้บังคับเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบปลายตรึง-ปล่อย (clamp-free) แต่ในงานวิจัยฉบับนี้เป็นลักษณะการให้คำตอบโดยทั่วไป (general solution)



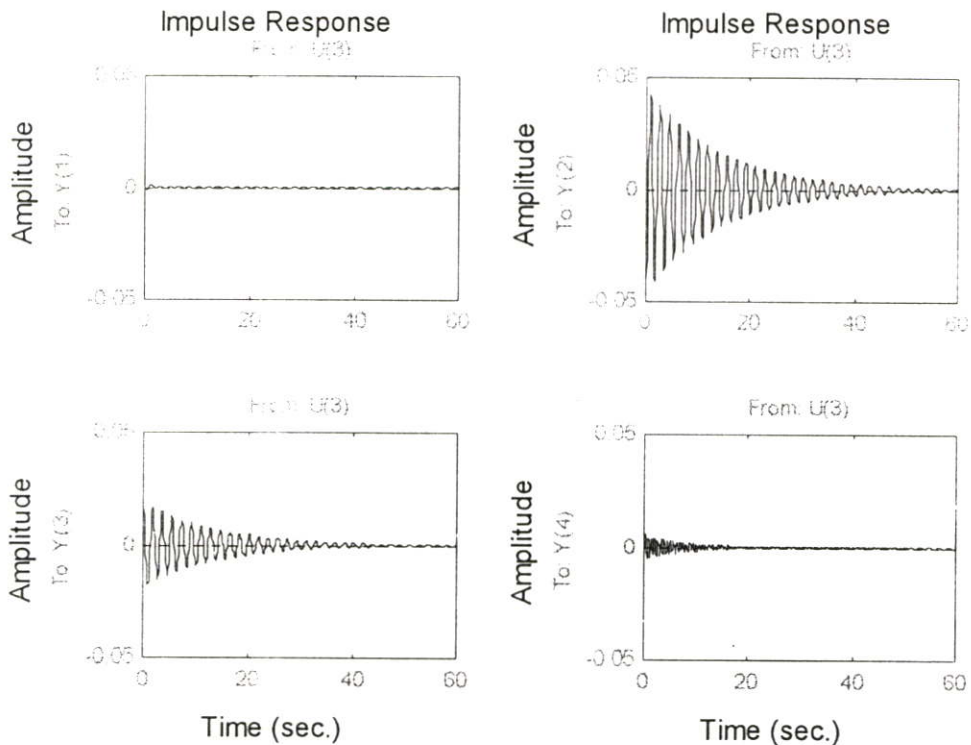
ภาพที่ 4.31 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=0.1$, $d_2=d_3=0.002$, $d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_1

เมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_2 ในรูปการดลซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ ในภาพที่ 4.32 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีความถี่ในการบิดตัวมากกว่า y_1 และการบิดตัวของมูมจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่ง ส่วนในกรณีที่ทำกรเอาต์พุตค่า y_4 จะมีขนาดในการแกว่งตัวใหญ่กว่า y_3 และการแกว่งของแขนจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่งเช่นกัน และจะสังเกตเห็นได้ว่าการแกว่งของแขนและการบิดของมูมจะใช้ระยะเวลาในการหยุดนิ่งนานกว่าเมื่อเทียบกับงานวิจัยของลูคา แต่ให้รูปแบบการสั่นในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน ทั้งนี้เป็นเพราะในงานวิจัยของลูคานั้นได้บังคับเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบปลายตรึง-ปล่อย แต่ในงานวิจัยฉบับนี้เป็นลักษณะการให้คำตอบโดยทั่วไป



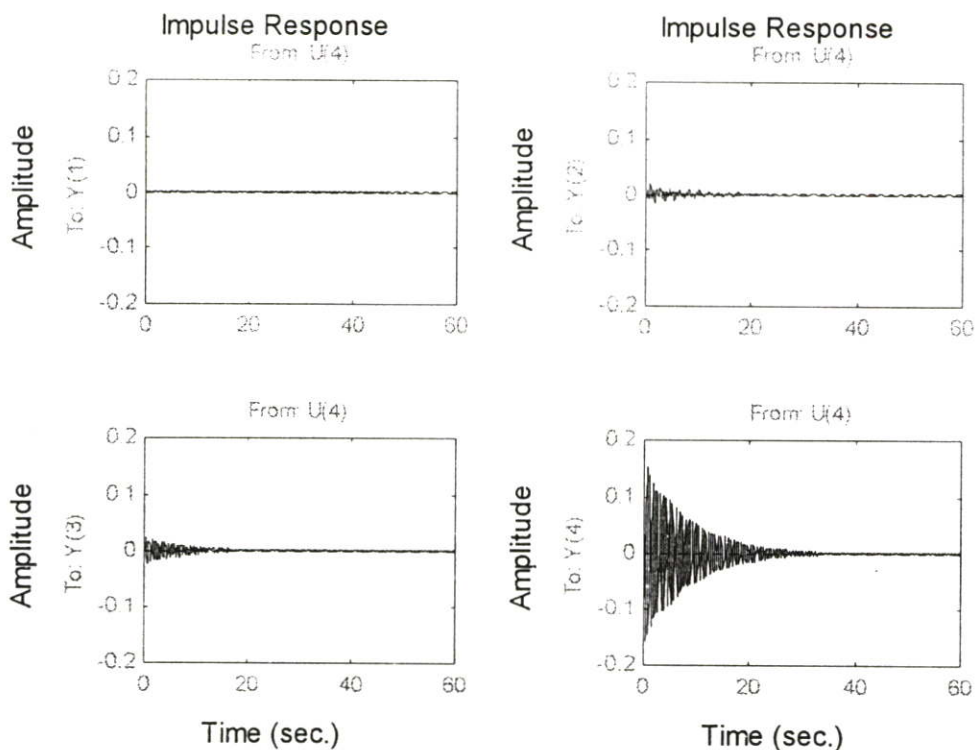
ภาพที่ 4.32 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=0.1$, $d_2=d_3=0.002$, $d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_2

เมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_3 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_i โดย $i=\{1,2,3,4\}$ ในภาพที่ 4.33 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีความเร็วในการบิดมากกว่า y_1 และการบิดตัวของมุมจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่ง ซึ่งสอดคล้องกับการอินพุตค่า u_1 ที่ค่าเอาต์พุต y_2 มีขนาดการบิดที่ใหญ่กว่า y_1 ส่วนในกรณีนี้ทำการเอาต์พุตค่า y_4 จะมีความถี่ในการแกว่งตัวมากกว่า y_3 และใช้เวลาในการแกว่งตัวน้อยกว่า y_3 และจากการสังเกตจะเห็นได้ว่าการแกว่งของแขนและการบิดของมุมจะใช้ระยะเวลาในการหยุดนิ่งนานกว่าเมื่อเทียบกับงานวิจัยของลูคา



ภาพที่ 4.33 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=0.1$, $d_2=d_3=0.002$, $d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_3

เมื่อทำการป้อนค่าอินพุต u_4 ซึ่งจำลองค่าเอาต์พุตเป็น y_1 ในภาพที่ 4.34 จะสังเกตเห็นได้ว่าการสั่นของ y_2 จะมีความเร็วในการบิดมากกว่า y_1 และการบิดตัวของมุมจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่ง ซึ่งสอดคล้องกับการอินพุตค่า u_2 ที่ค่าเอาต์พุต y_2 มีขนาดการบิดที่ใหญ่กว่า y_1 ส่วนในกรณีที่ทำการเอาต์พุตค่า y_4 การสั่นจะมีขนาดการแกว่งตัวใหญ่กว่า y_3 และใช้เวลาในการแกว่งตัวมากกว่า y_3 และจะสังเกตเห็นได้ว่าการแกว่งของแขนและการบิดของมุมจะใช้ระยะเวลาในการหยุดนิ่งนานกว่าเมื่อเทียบกับงานวิจัยของลูคา



ภาพที่ 4.34 แสดงค่าแอมพลิจูดเมื่อเทียบกับเวลา โดย $L_1=0.5$, $L_2=0.5$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=0.1$, $d_2=d_3=0.002$, $d_4=0.1$ โดยค่าอินพุตเป็น u_4

จากการเปรียบเทียบที่ได้แสดงไปแล้วนั้นจะสังเกตเห็นได้ว่าแบบจำลองที่ได้ทำการวิจัยผ่านมานั้นมีความน่าพอใจในระดับหนึ่ง เพราะระบบมีการแสดงให้เห็นว่ามีประสิทธิภาพพอสมควรในการที่จะนำไปใช้ในการทดสอบก่อนที่จะลงมือสร้างแบบจำลองจริงขึ้น แต่ในงานวิจัยนี้มีการตอบสนองของระบบน้อยมากเมื่อเทียบกับงานวิจัยของลูคา ซึ่งอาจจะเกิดจากความแตกต่างในการกำหนดค่า หรือลักษณะของการนำเสนอที่ให้ความสนใจแตกต่างกันในบางกรณี โดยเฉพาะอย่างยิ่งเวลาของเวลาสุ่มสัญญาณ (sampling time) ที่ใช้ในงานวิจัยของลูคานั้น ใช้เวลาสั้นมากเพียง 0.001 วินาที แต่ในงานวิจัยนี้ใช้เวลา t เท่ากับ 0.1 วินาที

บทที่ 5

สรุปผลของงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

ผลสรุปของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อแบบบาง โดยใช้ทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลีในการกำหนดคุณสมบัติของลำแขน

5.1 สรุปผลของงานวิจัย

จากการออกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อแบบบางนั้นได้ใช้หลักการคิดด้วยวิธีลากรางจ์และวิธีแบบแผนสมมุติ ซึ่งจะมีความยุ่งยากน้อยกว่าวิธีของนิวตัน เพราะไม่จำเป็นต้องหาแรงทุกแรงที่กระทำต่อมวลในแต่ละแขนซึ่งเมื่อทำการแตกแรงตามหลักของเวกเตอร์แล้วจะเกิดความยุ่งยากในการจัดรูปการคำนวณในตอนต้นมากกว่า นั้นเพราะวิธีลากรางจ์ใช้พลังงานของลำแขนมาเป็นตัวพิจารณาจึงทำให้ง่ายต่อการพิจารณาว่าวิธีของนิวตัน

การศึกษาระบบของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อแบบบางทำได้โดยจัดรูปแบบสมการการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปของสมการสเตสเปซซึ่งเป็นชุดของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยมีเวลาเป็นตัวแปรอิสระ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

เมื่อ $x(t)$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรสเตสเปซ และ $u(t)$ เป็นอินพุทของระบบ

การจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกลในงานวิจัยนี้พิจารณาแขนกลแบบ 2 ข้อต่อ โดยสมการลากรางจ์ของแขนกลมีรูปสมการคือ

$$L = T - U$$

ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดของทั้งสองข้อต่อกับตำแหน่งของความเร็วและความเร่งเชิงมุมของข้อต่อนั้นๆ ค่าเอาท์พุทวัดได้จากมุมที่หมุนไปของมอเตอร์และส่วนที่เบี่ยงเบนไปของตำแหน่งเดิมจากแกนปกติ ตัวควบคุมเขียนด้วยโปรแกรม MATLAB บนเครื่องคอมพิวเตอร์เพนเทียมที่ 650 MHz ผลควบคุมในภาพที่ 4.1-2, 5-6 และ 9-16 แสดงเอาท์พุทจากระบบ และภาพที่ 4.3-4, 7-8 และ 17-24 แสดงอินพุทระบบ สมการจำลองจากสมการสเตสเปซสามารถนำมาสร้างเป็นแบบจำลองโดยเมื่อทำการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ m และ L

จะได้ว่าค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ภายในเมตริกซ์สเตสเปซมีการเปลี่ยนแปลงในช่วงที่มีขอบเขต เริ่มจากการศึกษากระบวนการควบคุมตามแนวทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลี โดยเป็นแนวความคิดที่ใช้กันอย่างกว้างขวางทั่วไป แล้วนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลโดยใช้วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ของแขนกล จึงทำให้ทราบค่าที่ใกล้เคียงกับลักษณะของแขนกลที่แท้จริง ปัญหาสำคัญที่ควรคำนึงถึงคือ ปัญหาเรื่องการกำหนดค่าซึ่งเกี่ยวข้องกับความปลอดภัยเคลื่อนของค่าเอาท์พุท หรือการกำหนดค่าอินพุทที่ไม่เหมาะสมอาจทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ แต่ถ้ากำหนดค่าให้ระบบน้อยเกินไปอาจทำให้ค่าเอาท์พุทของระบบเกิดการแกว่งได้ เนื่องจากการใช้งานจริงของแขนกลอาจมีการเปลี่ยนแปลงค่าของภาระหนักและความยาวของคานอ่อนตัวเพื่อให้เหมาะสมกับวัสดุที่ใช้ผลิตแขนกล โดยตัวควบคุมที่ดีจะต้องสามารถประกันเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวได้

จากผลการทดลองเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงทั้งความยาวลำแขนจาก 0.5-0.7 เมตร และภาระมวลจาก 0.4-0.8 กิโลกรัม ทำให้เกิดการสังเกตเห็นว่าพารามิเตอร์ d_1, d_2, d_3 และ d_4 สามารถเลือกได้หลายค่าและแต่ละค่าให้ผลตอบสนองไม่เหมือนกัน ค่าที่เลือกมาใช้ในงานวิจัยอาจไม่ใช่ค่าที่ดีที่สุด เพราะการเลือกต้องคำนึงถึงลักษณะผลตอบสนองที่ต้องการและขนาดสัญญาณที่ระบบสามารถให้ได้ จากผลการจำลองระบบพบว่าการควบคุมแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อแบบบาง โดยใช้ตัวควบคุมโครงสร้างได้ให้ผลเป็นที่น่าพอใจพอสมควร

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาการสร้างแบบจำลองของแขนกลอ่อนตัวสองข้อต่อแบบบางนั้น เป็นการให้คุณสมบัติของทฤษฎีของออยเลอร์-เบอร์นูลีเท่านั้น ผู้ที่สนใจสามารถนำทฤษฎีอื่นมากำหนดคุณสมบัติของลำแขนได้อีก หรือจะพัฒนาโปรแกรมการแสดงผลที่มีความทันสมัย และง่ายต่อการเข้าใจมากกว่าโปรแกรม MATLAB ก็ได้ และยังสามารถใช้วิธีการแก้สมการโดยวิธีอื่นที่มีความยุ่งยากน้อยกว่าวิธีลากรางจ์ก็ได้และอาจขยายผลโดยการใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ กับคำตอบทั่วไปที่ได้จากงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Gevarter, W.B. "Basic Relation for Control of Flexible Vehicles." AIAA Journal. Vol.8, no.4, April 1970. pp. 666-672.
- [2] Cannon, R.H.Jr. and Schmitz, E. "Inertial Experiment on the End-point Control of Flexible One-Link Robot." The International Journal of Robotic Research. Vol.3, no.3, 1984. pp. 62-75.
- [3] Yukovich, S., Oquner, U., Tzes, A. and Konik, P.T. "Flexible Manipulator Control Experiment and Analysis." Technical Report CLR-1008-Su86-P. The Ohio State University, Control Research Laboratory, 1986.
- [4] Bayo, E. "Computed Torque for the Position Control of Open-chain Flexible Robots." Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Robotics and Automation. Philadelphia, Pa., April 1988. pp. 316-321.
- [5] Bhat, S.P., Tanaka, M. and Denney, K.M. "Experiments on Point to Point Position Control of a Flexible Beam using Laplace Transfer Technique: Part I Open Loop." Robotics Research in the ASME. Dsc-Vol.26, 1990. pp. 39-45.
- [6] Lao, Z.H. "Direct Strain Feedback Control of Flexible Robot Arm: New Theoretical and Experiment Result." IEEE Trans. Automation. Control. Vol.38, no.11, 1993. pp. 1610-1622.
- [7] Kubica, E. and Wang, D. "A Fuzzy Control Strategy for a Flexible Link Robot." Proc. IEEE Int. Conf. Robotic Automation. Atlanta, GA., Vol.2, May 2-6, 1993. pp. 226-231.
- [8] Qi, X. and Chen, G. "Mathematical Modeling of Kinematics and Dynamics of Certain Single Flexible Link Robot Arms." First IEEE Conf. On Control Applications. Vol.1, 1993. pp. 288-293.
- [9] Lin, J. and Lewis, F. "Dynamic Equation of Manipulator with Rigid and Flexible Links: Derivation and Symbolic Computation." Proc. of American Control Conf. San Francisco, CA., 1993. pp. 2868-2872.
- [10] Zeinoun, I. and Khorrami, F. "Fuzzy Based Adaptive Control for Flexible-Link Manipulators Actuated by Piezoceramics." Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Vol.1, 1994. pp. 643-648.

- [11] Sooraksa, P. "Mathematical modeling of a Single Flexible-Link Robot Arm with Damping." 20th Electrical Engineering Conference. Vol.1, November 1997. pp. 313-319.
- [12] Chernousko, F.L., Akulenko, L.D. and Bolotnik, N.N. "Time-Optimal Control for Robotic Manipulators." Optimal Control Application & Methods. Vol.10, 1989. pp. 293-311.
- [13] Feddema, J.T., Eisler, G.R. and Segalman, D.J. "Integration of Model-Based and Sensor-Based Control for a Two-Link Flexible Robot Arm." IEEE. 1990. pp. 435-439.
- [14] Luca, A.D. "Explicit Dynamic modeling of a Planar Two-Link Flexible Manipulator." Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control. December 1990. pp. 528-530.
- [15] Hillsley, K.L. and Yurkovich, S. "Vibration Control of a Two-Link Flexible Robot Arm." Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation. April 1991. pp. 2121-2126.
- [16] Wang, D. and Vidyasager, M. "Control of a Class of Manipulators with a Single Flexible Link-Part I: Feedback Linearization." Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol.113, December 1991. pp. 655-661.
- [17] Wang, D. and Vidyasager, M. "Control of a Class of Manipulators with a Single Flexible Link-Part II: Observer-Controller Stabilization." Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol.113, December 1991. pp. 662-668.
- [18] Lewis, F.L. and Vandegrift, M. "Flexible Robot Arm Control By a Feedback Linearization/Singular Perturbation Approach." IEEE. 1993. pp. 729-736.
- [19] Matsuno, F. and Yamamoto, K. "Dynamic Hybrid Position/Force Control of a Flexible Manipulator." IEEE. 1993. pp. 462-467.
- [20] Luo, Z.H. and Guo, B. "Further Theoretical Results on Direct Strain Feedback Control of Flexible Robot Arms." IEEE Transactions on Automatic Control. Vol.40, no.4, April 1995. pp. 747-751.
- [21] Wang, X.S., Xu, W.L., Tso, S.K. and Zhang, J.Z. "Path Error Compensation of a Two-Link Flexible Robot Arm Based on Integrated Laser Transducers." 1997 IEEE. 1997. pp. 3786-3790.

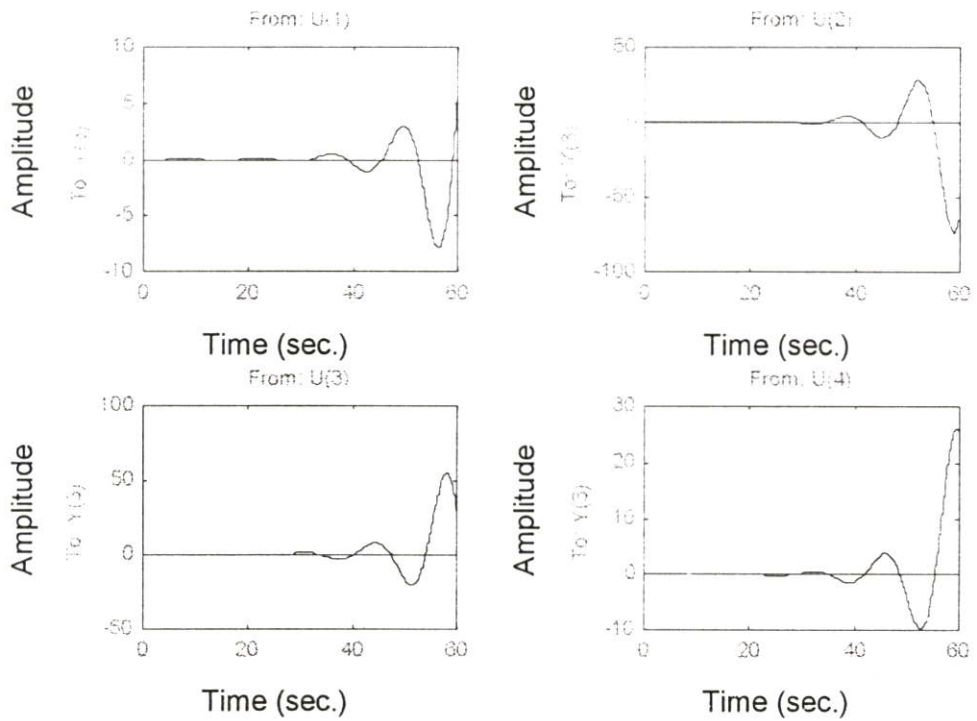
- [22] Yang, H., Krishnan, H., Ang, M.H.Jr. "A Model Feedback Control Law for Vibration Control of Multi-Link Flexible Robots." Proceedings of the American Control Conference. June 1998. pp. 1821-1822.
- [23] Dogan, A. and Ifter, A. "Modeling and Control of a Two-Link Flexible Robot Manipulator." Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications. September 1998. pp. 761-765.
- [24] Sarkar, P.K., Yamamoto, M. and Mohri, A. "A Numerical Method to Minimize Tracking Error of Multi-Link Elastic Robot." Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems. October 1998. pp. 685-690.
- [25] Book, W.J., Maizza-neto, and Whitney, D.E. "Feedback Control of two-beam two-joint Systems with distributed Flexibility." Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control. December 1975. pp. 424-431.
- [26] Balas, M. "Feedback Control of Flexible Systems." IEEE Transactions of Automatic Control. Vol.23, 1978. pp. 673-679.
- [27] Book, W.J. "Analysis of Masses Elastic Chains with Servo Controllers Joints." Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control. Vol. 101, 1979. pp. 187-192.
- [28] Truckenbrodt, A. "Control of Elastic Mechanical Systems." Regelungstechnik. Vol.30. 1982. pp. 277-285.
- [29] Karkkainen, P. and Halme, A. "Model Space Control of Manipulator Vibration Motion." SYROCO 1985. Barcelona, November 1985. pp. 101-105.
- [30] Judd, R.P. and Falkenburg, D.R. "Dynamics of Non rigid Articulated Robot Linkages." IEEE Transactions on Automatic Control. Vol.30, 1985. pp. 499-502.
- [31] Sunada, W.H. and Dubowsky, S. "On the Dynamic Analysis and behavior of industrial Robotic Manipulator with Elastic Members." Journal of Mechanical Design. Vol.105, 1983. pp. 42-51.
- [32] Chassiakos, A.G. and Bekey, G.A. "Pointwise Control of Flexible Manipulator Arm." SYROCO 1985. Barcelona, November 1985. pp. 113-117.
- [33] Smart, D. "Effect of Gravity on the Static and Dynamic Characteristics of a Single Link Component of Flexible Multibody Systems." Proceedings of ASME 14th

Biennial Component Conference on Mechanical Vibration and Noise. Albuquerque, NM, September 19-22, 1993.

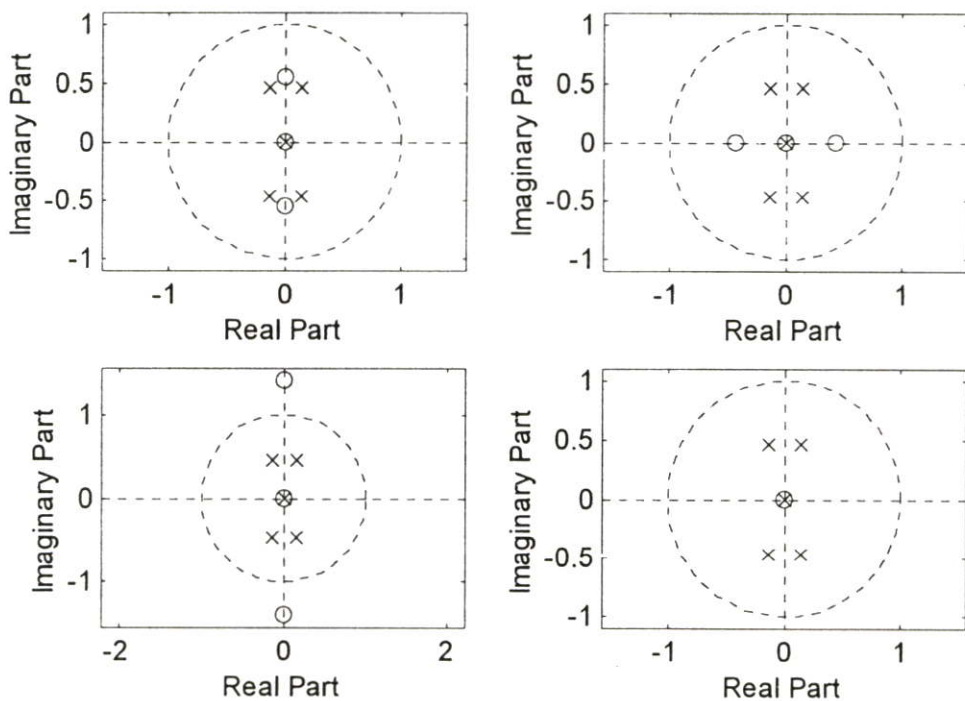
- [34] Meirovith, L. **Analytical Methods in Vibrations**. New York, NY: Macmillan. 1976
- [35] Hasting, G.G. and Book, W.J. "Verification of a linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulation." IEEE International Conference on Robotics and Automation. April 1986. pp. 1024-1029.
- [36] Rayleigh, L. **Theory of Sound**. Vol.1 New York: Dover. 1945. pp. 103,130.
- [37] Luca, A.D. "Closed-Form Dynamic Model of Planar Multilink Lightweight Robots." IEEE Transactions on systems. Vol.21, no.4, July/August 1991. pp. 826-839.

ภาคผนวก

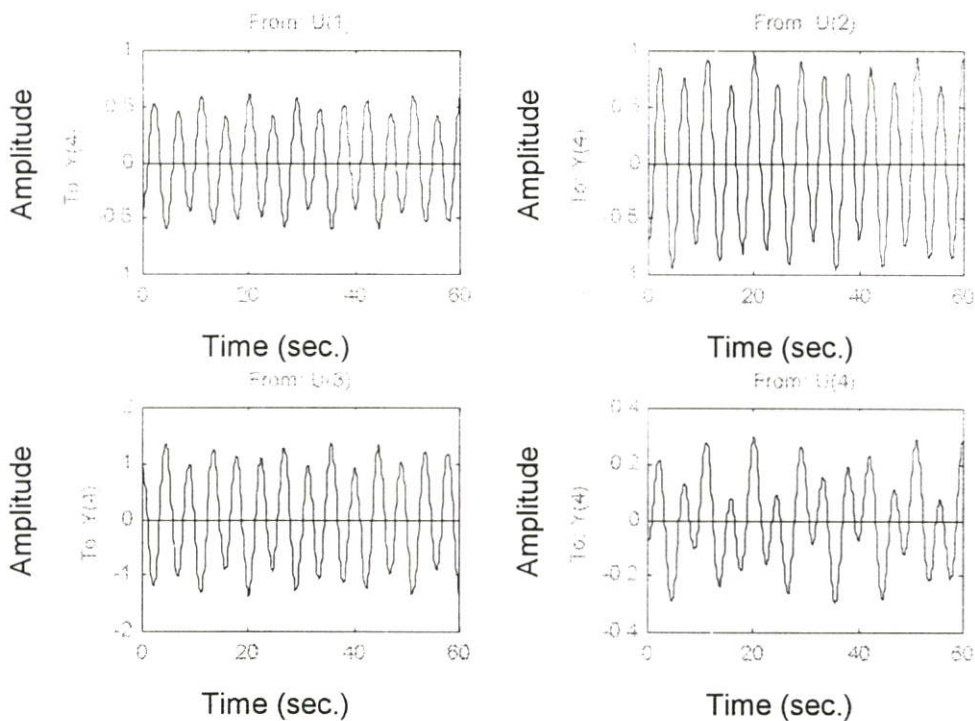
1. กรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วง



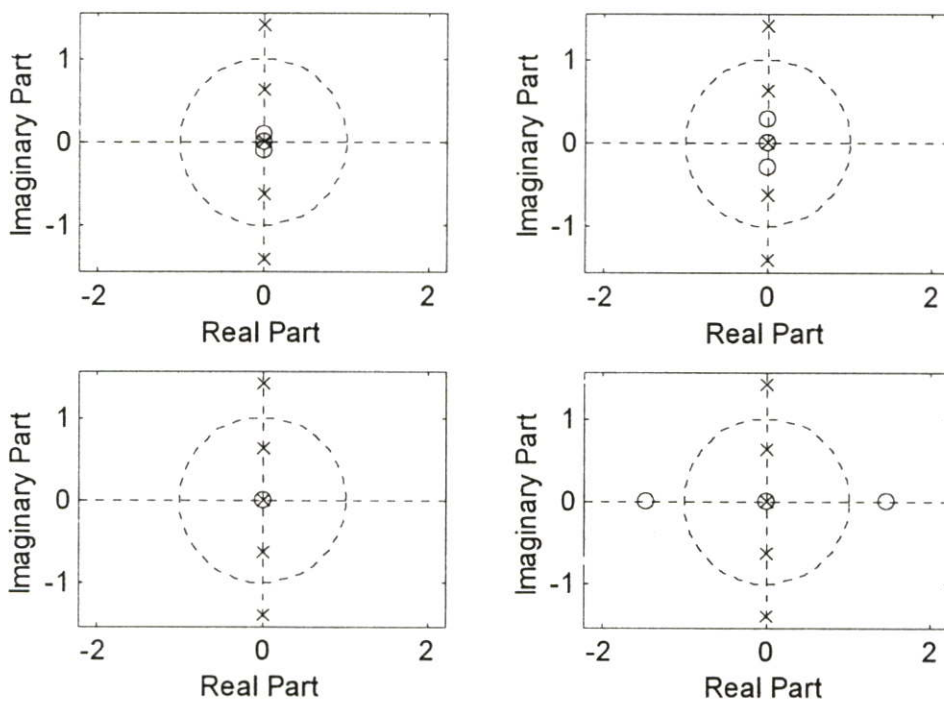
ภาพที่ 1 $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$



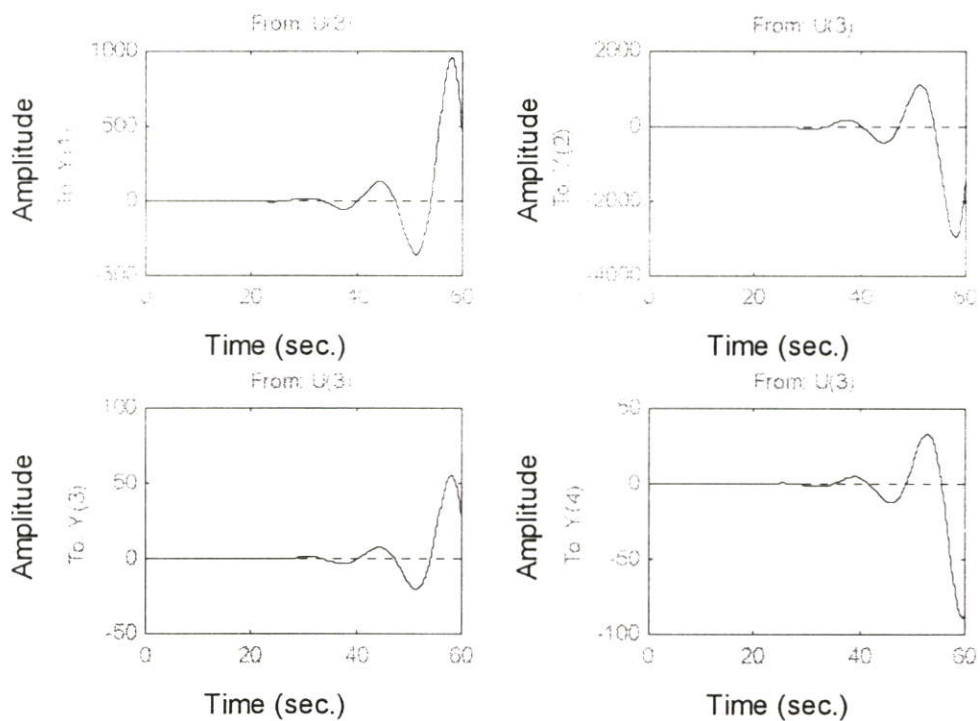
ภาพที่ 2 $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าเอพท์ทุกเป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 1)



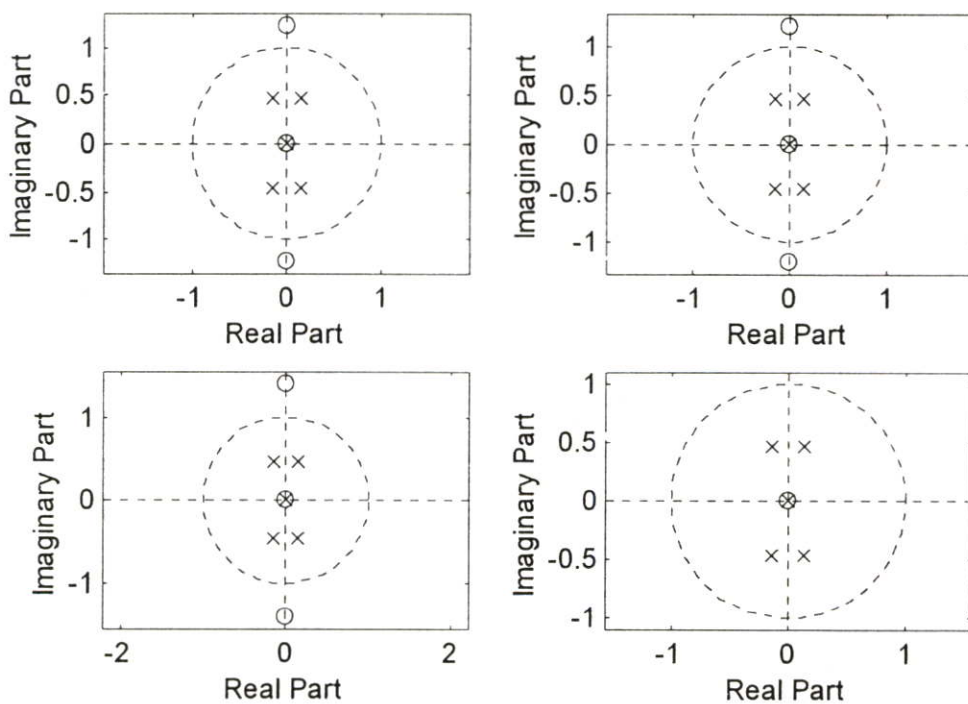
ภาพที่ 3 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$



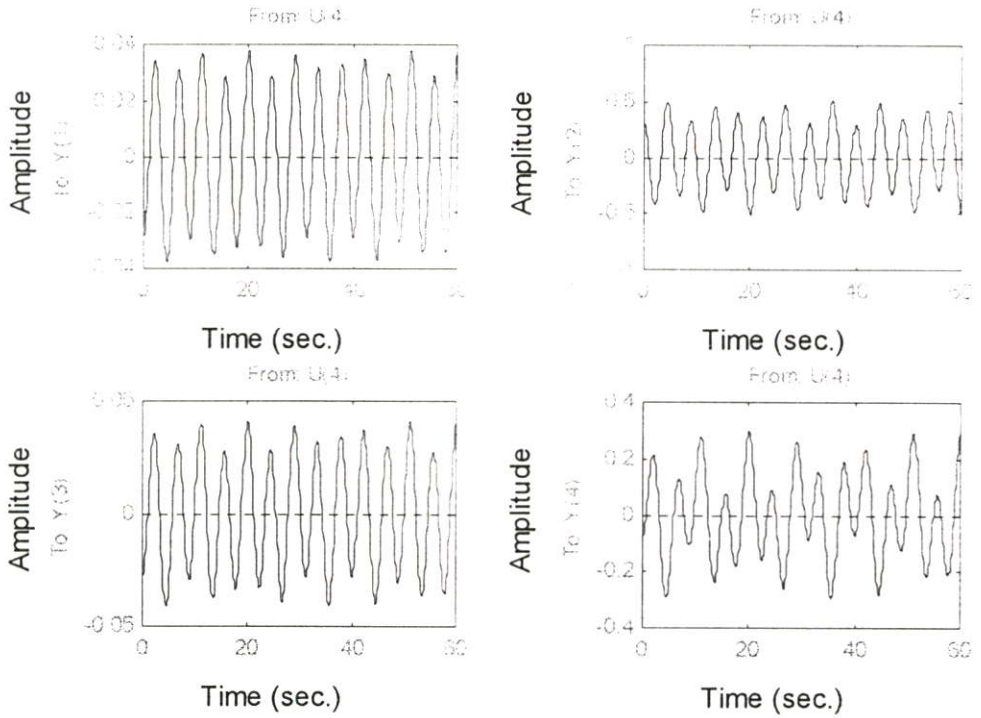
ภาพที่ 4 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าเอทพุทเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 3)



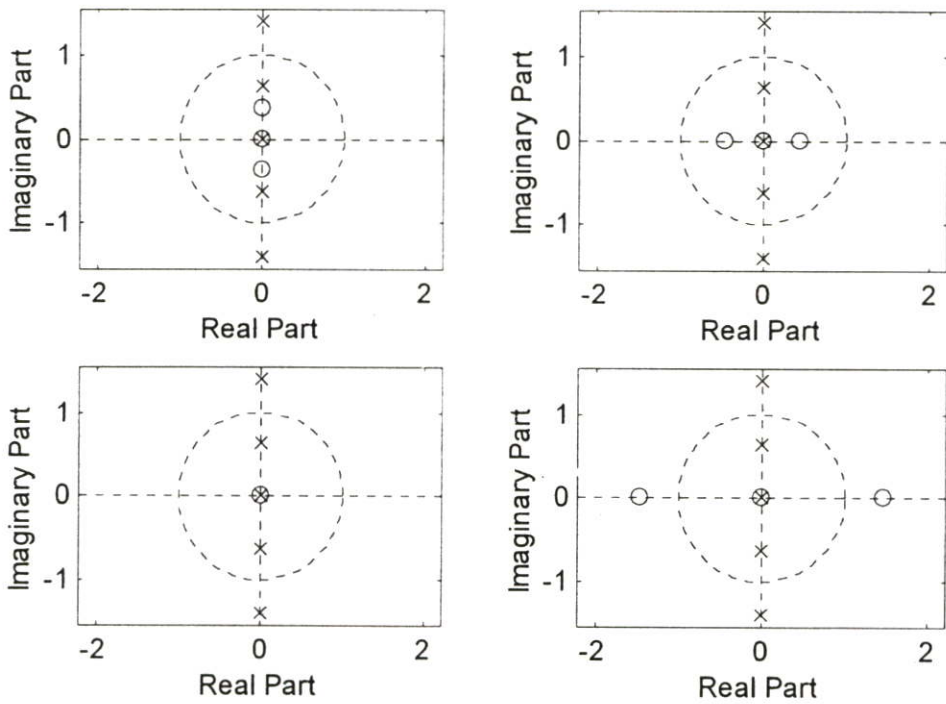
ภาพที่ 5 $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$



ภาพที่ 6 $L_1=0.5$, $L_2=0.4$, $m_1=0.3$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าอินพุทเป็น u_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 5)

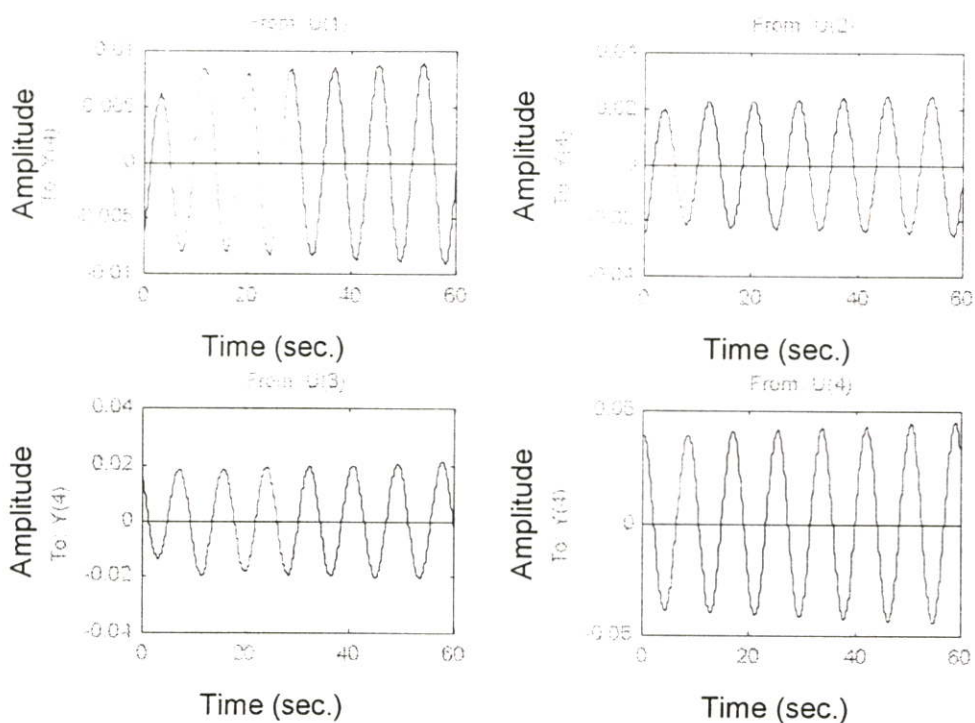


ภาพที่ 7 $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$

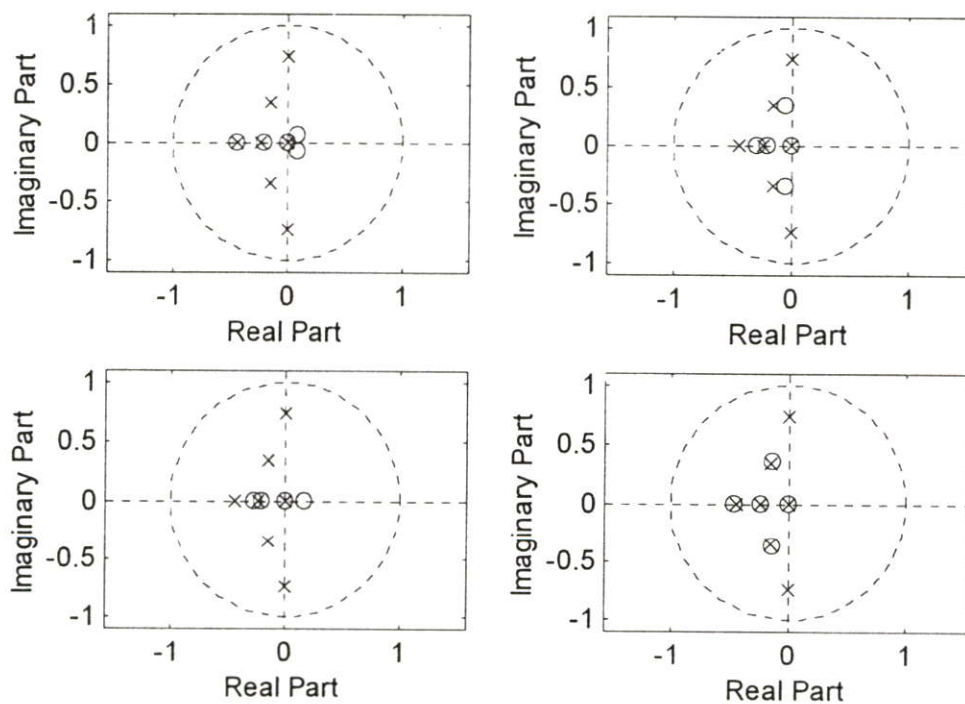


ภาพที่ 8 $L_1=0.5$, $L_2=0.7$, $m_1=0.8$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ โดยค่าอินพุทเป็น u_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 7)

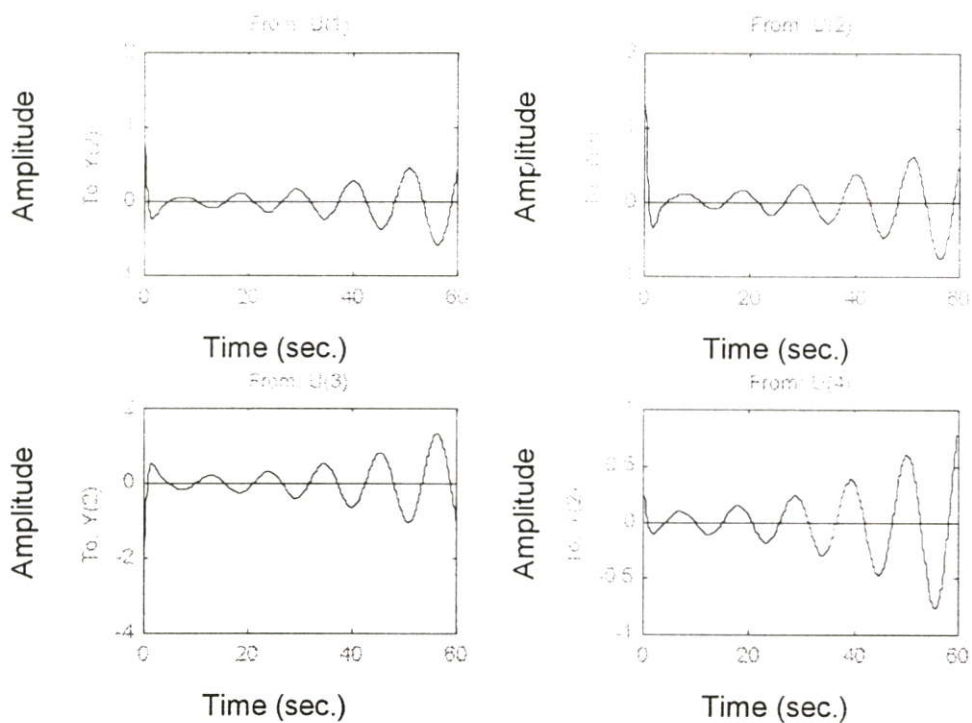
2. กรณีที่พิจารณากาการหน่วงโดยกำหนดค่าการหน่วงที่ปลายแขนเท่ากัน



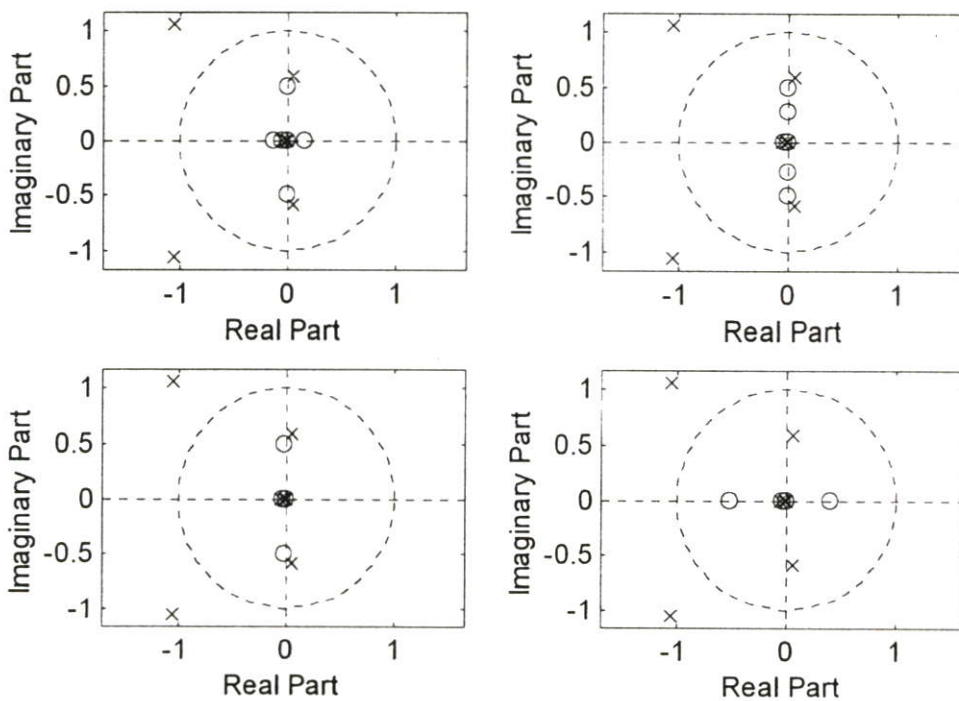
ภาพที่ 9 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.05$



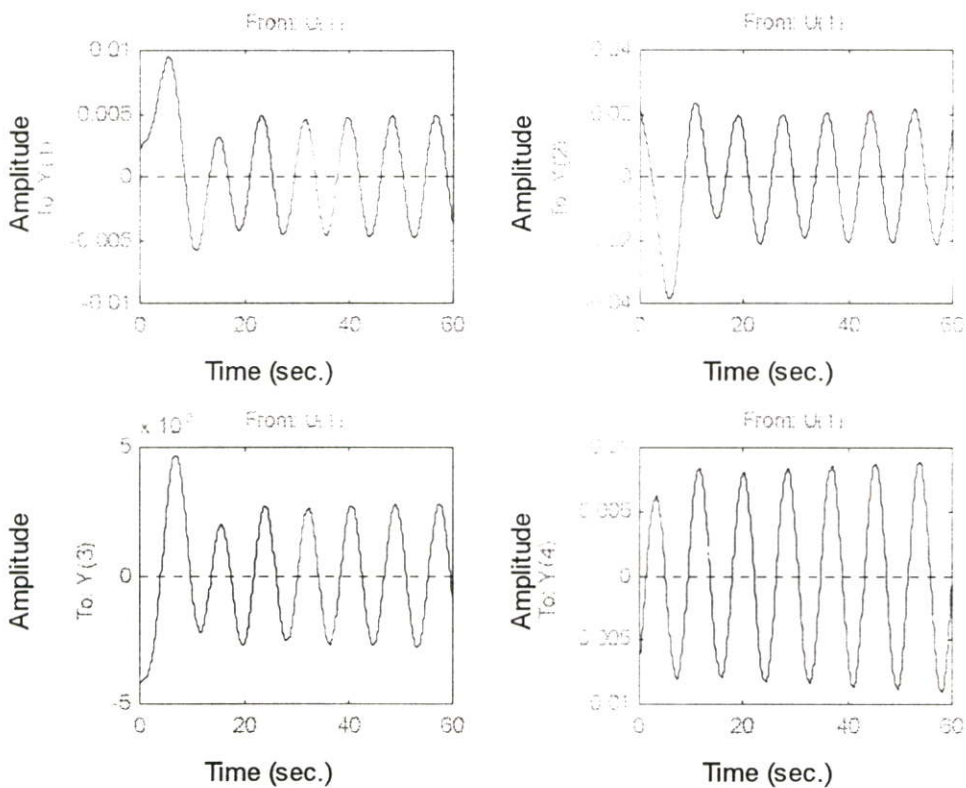
ภาพที่ 10 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.05$ โดยค่าเอาต์พุตเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 9)



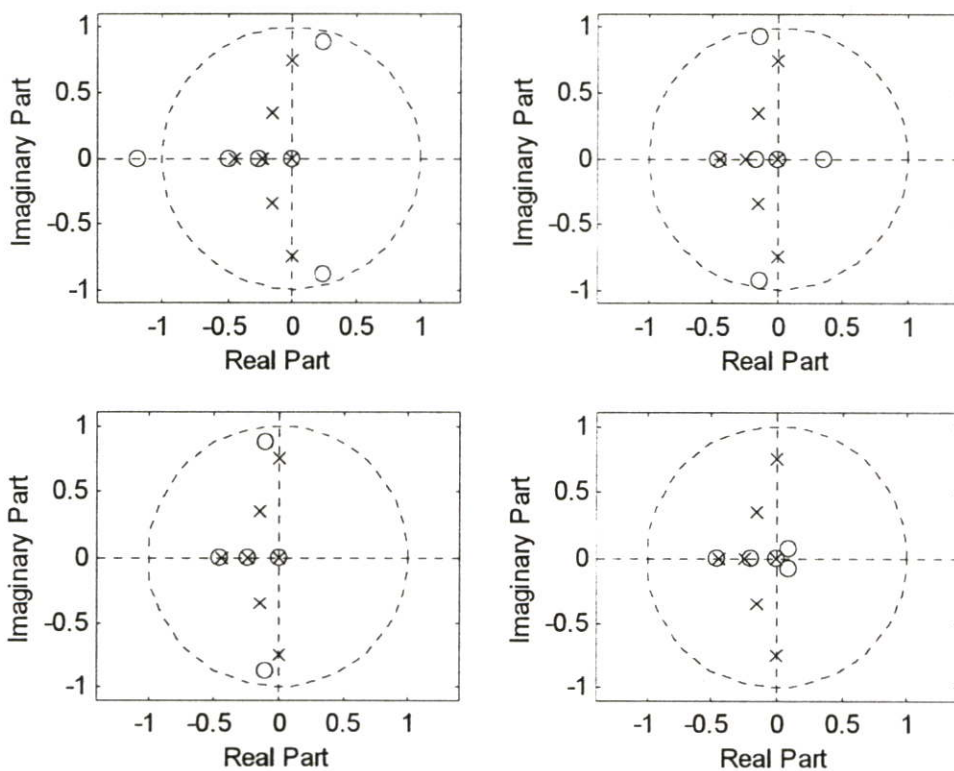
ภาพที่ 11 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=d_3=0, d_4=0.01$



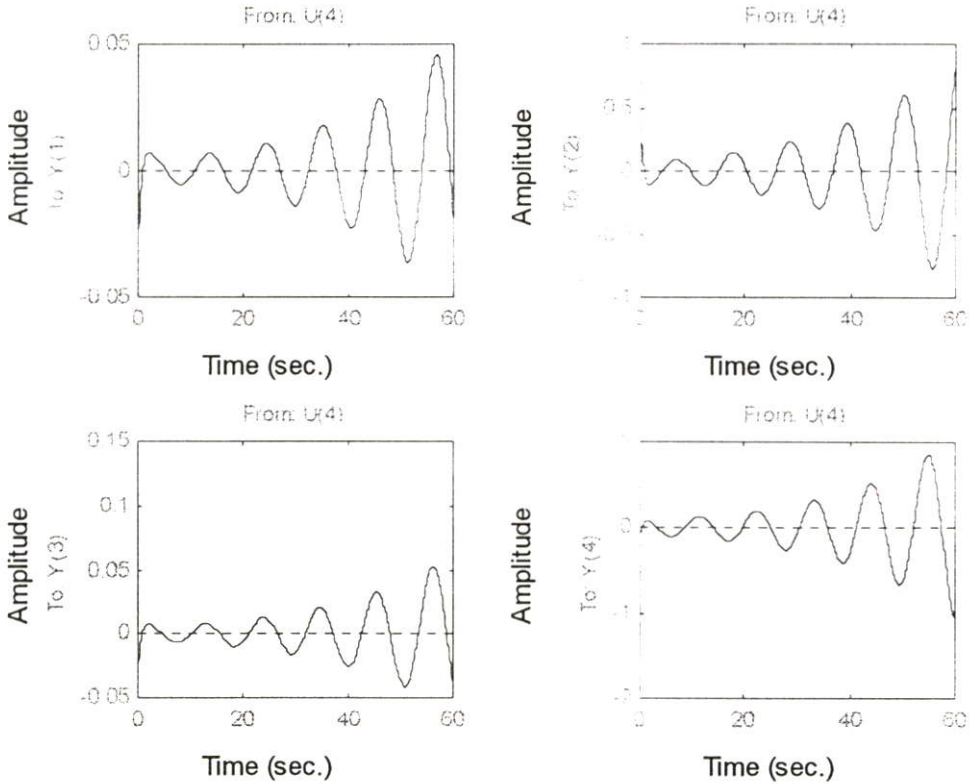
ภาพที่ 12 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=d_3=0, d_4=0.01$ โดยค่าเอาต์พุตเป็น y_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 11)



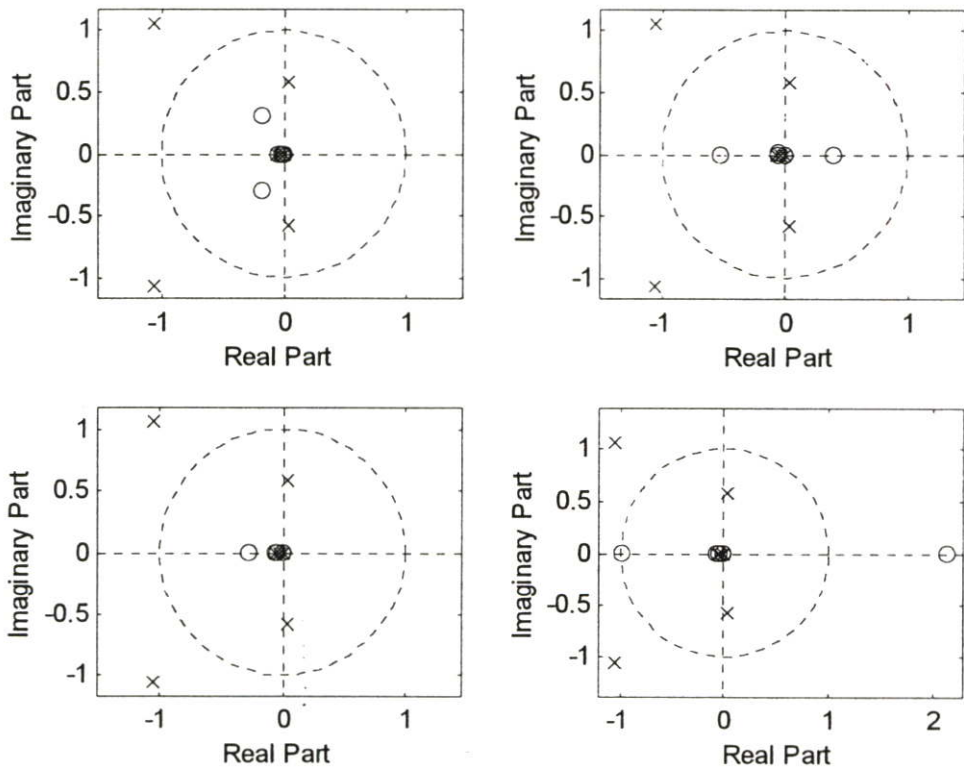
ภาพที่ 13 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0, d_4=0.05$



ภาพที่ 14 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0, d_4=0.05$ โดยค่าอินพุตเป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 13)

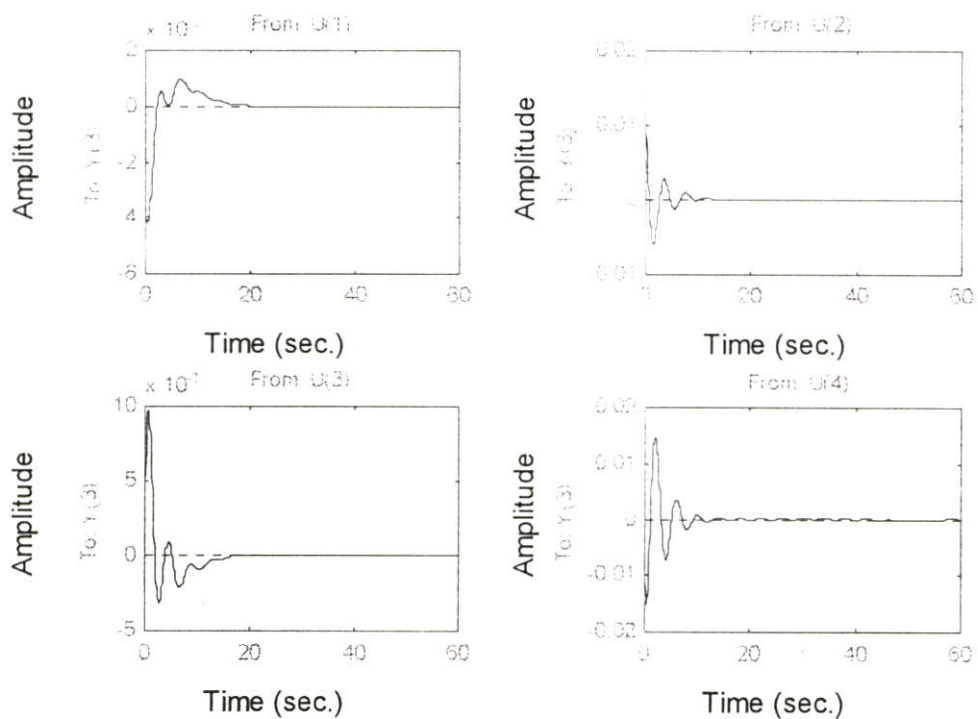


ภาพที่ 15 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0, d_4=0.01$

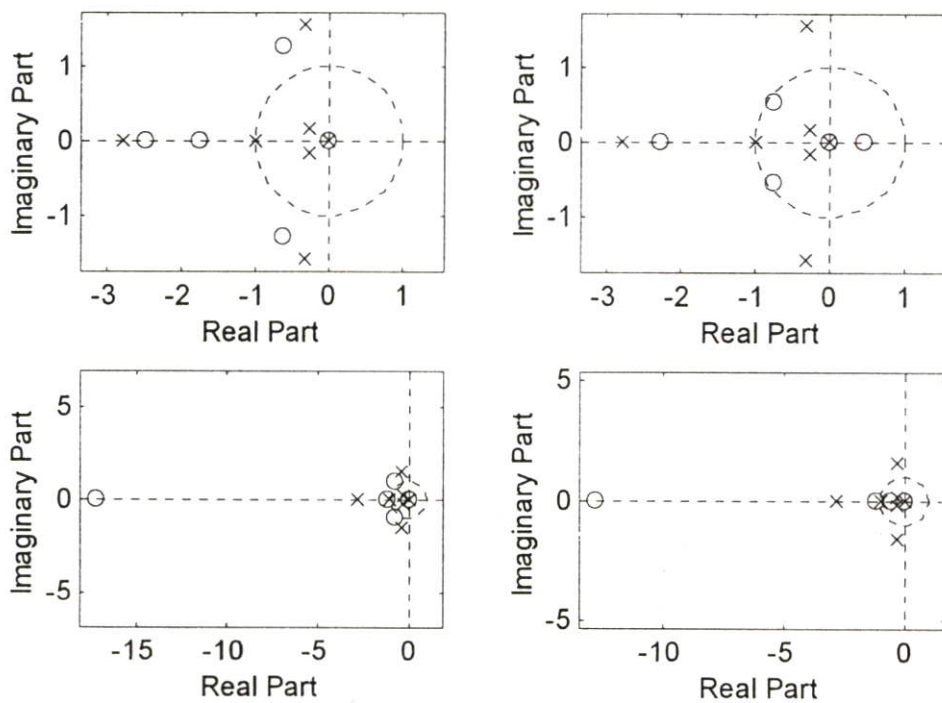


ภาพที่ 16 $L_1=0.5, L_2=0.7, m_1=0.8, m_2=0.1, d_1=0.01, d_2=0, d_3=0, d_4=0.01$ โดยค่าอินพุตเป็น u_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 15)

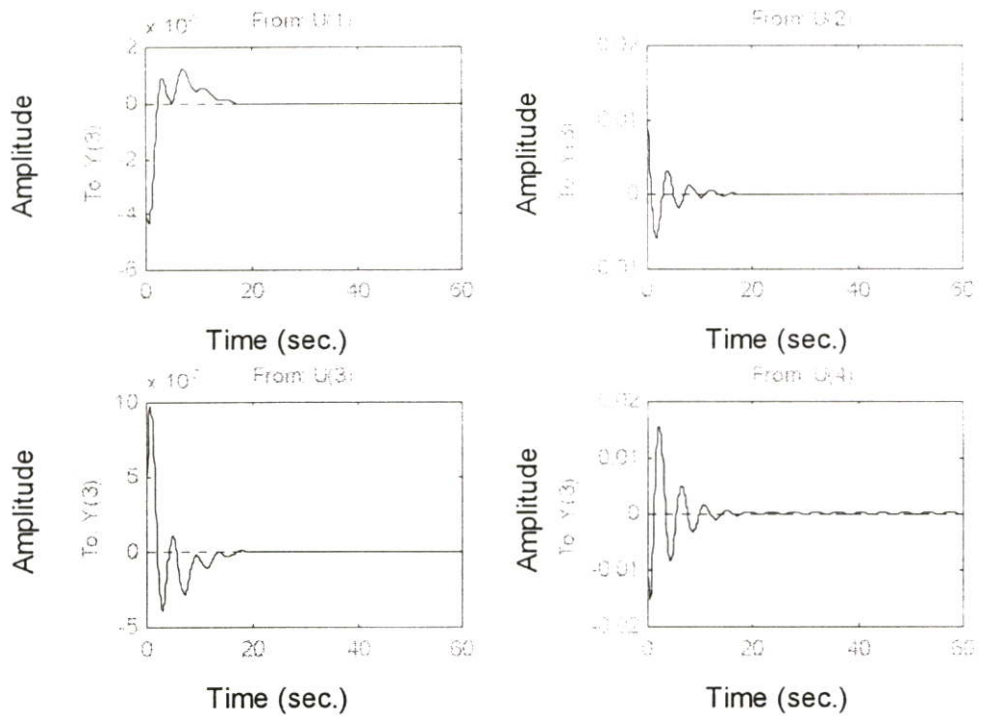
3. กรณีที่พิจารณากาการหน่วงโดยกำหนดค่าการหน่วงที่ปลายแขนไม่เท่ากัน



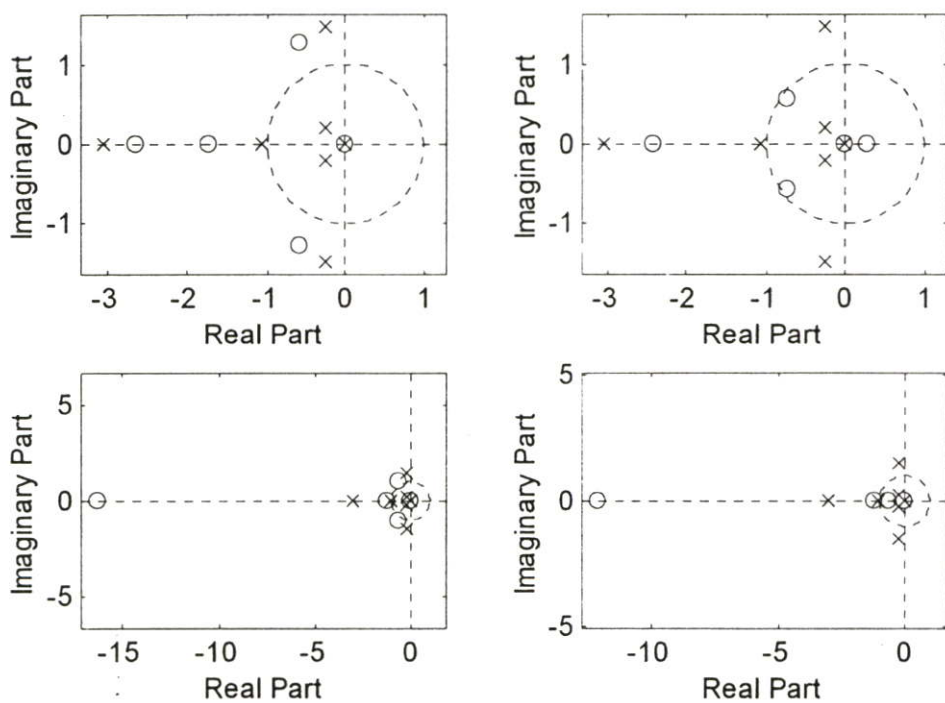
ภาพที่ 17 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$



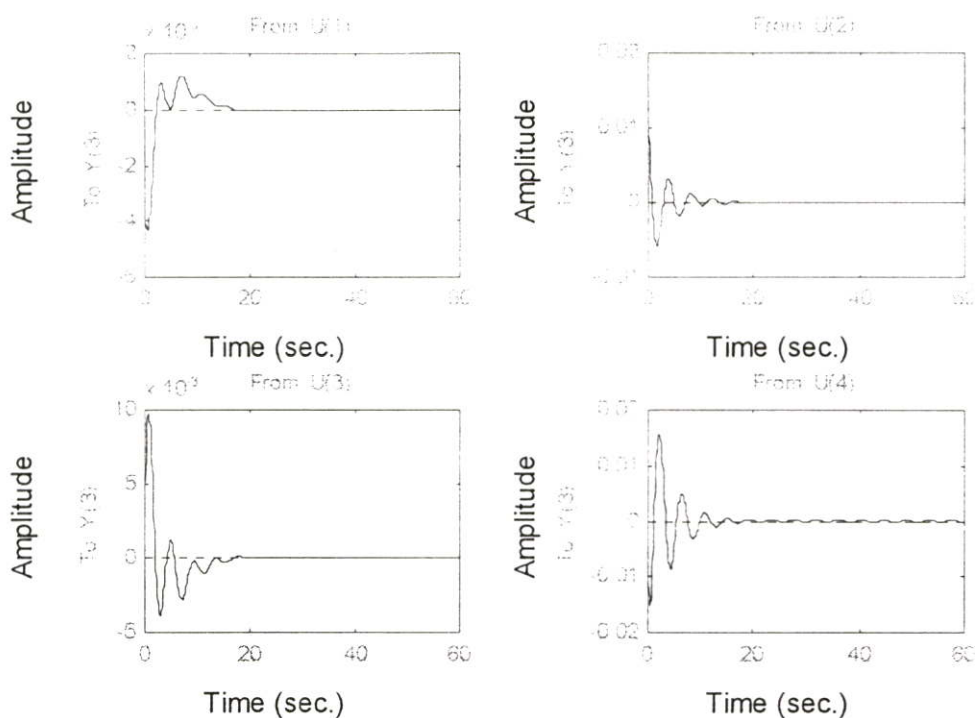
ภาพที่ 18 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าเอาต์พุตเป็น y_3
(สอดคล้องกับภาพที่ 17)



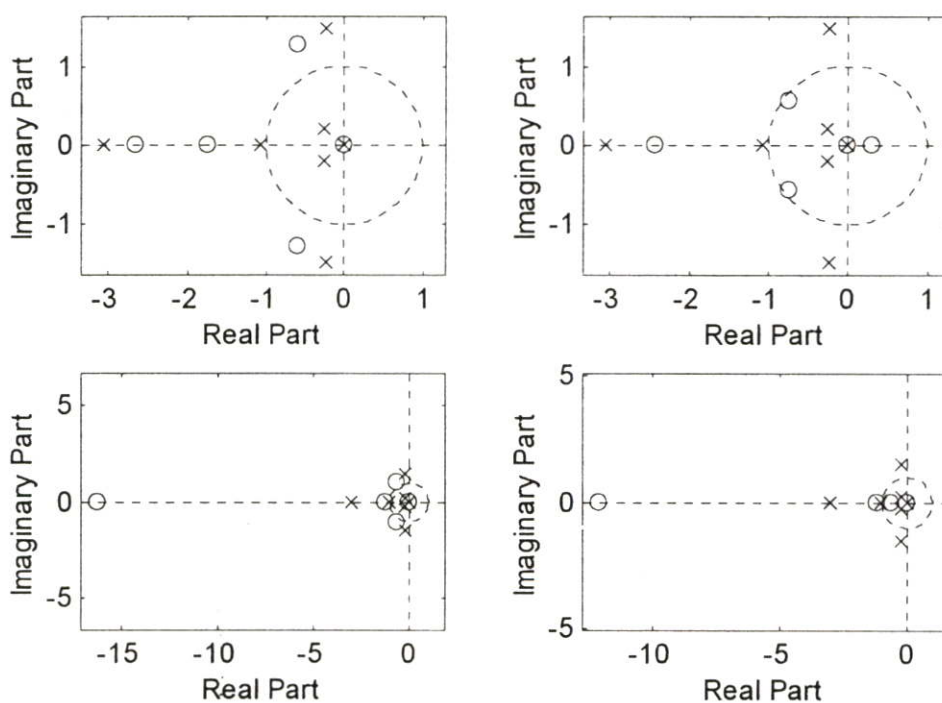
ภาพที่ 19 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$



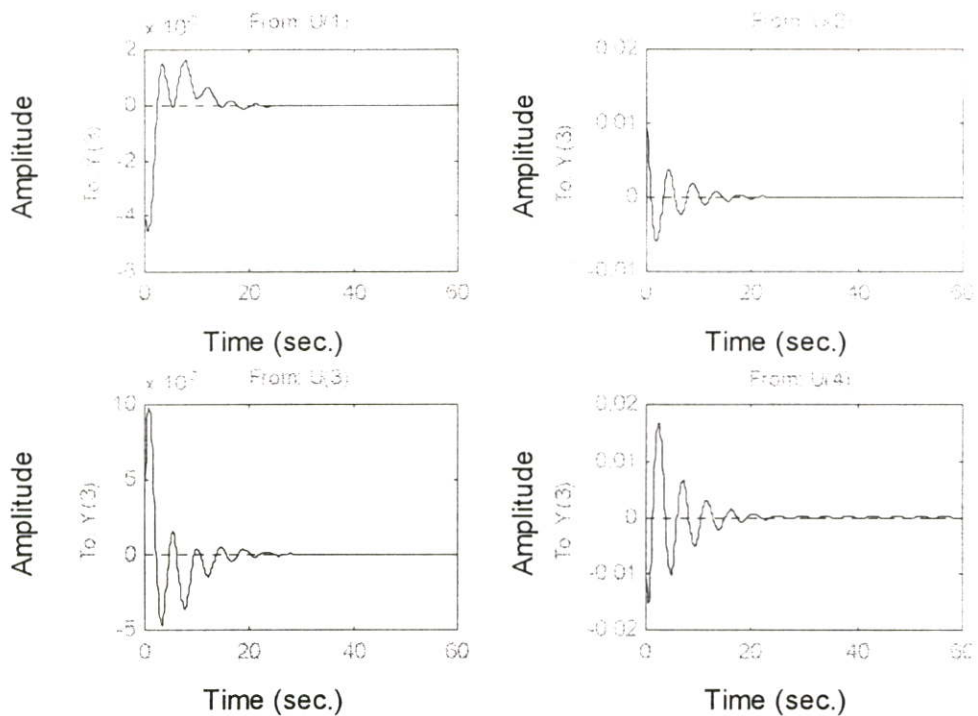
ภาพที่ 20 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าเอาต์พุต เป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 19)



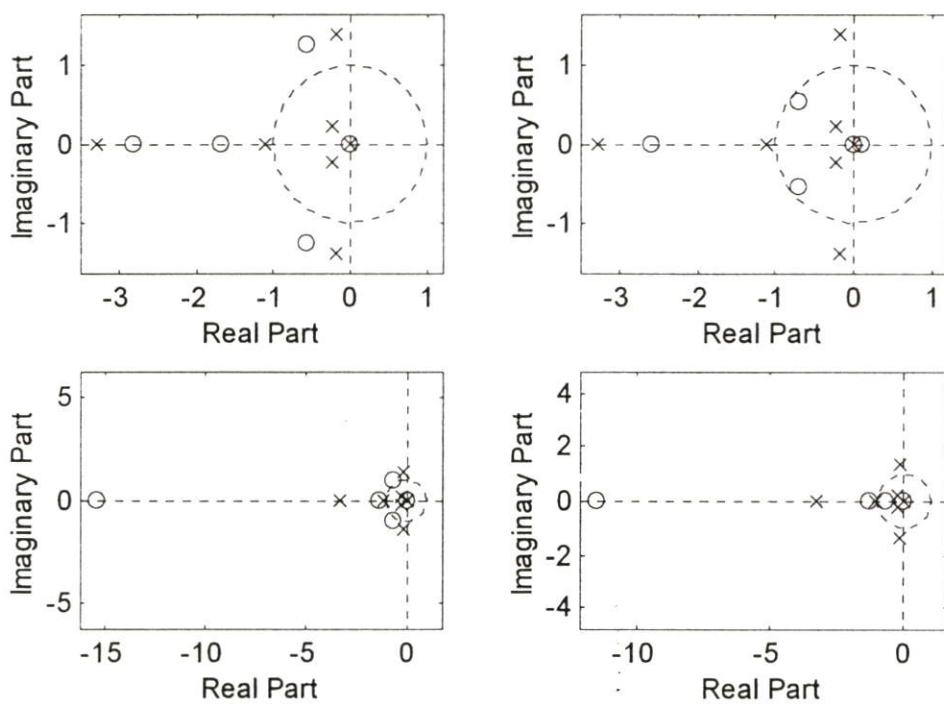
ภาพที่ 21 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$



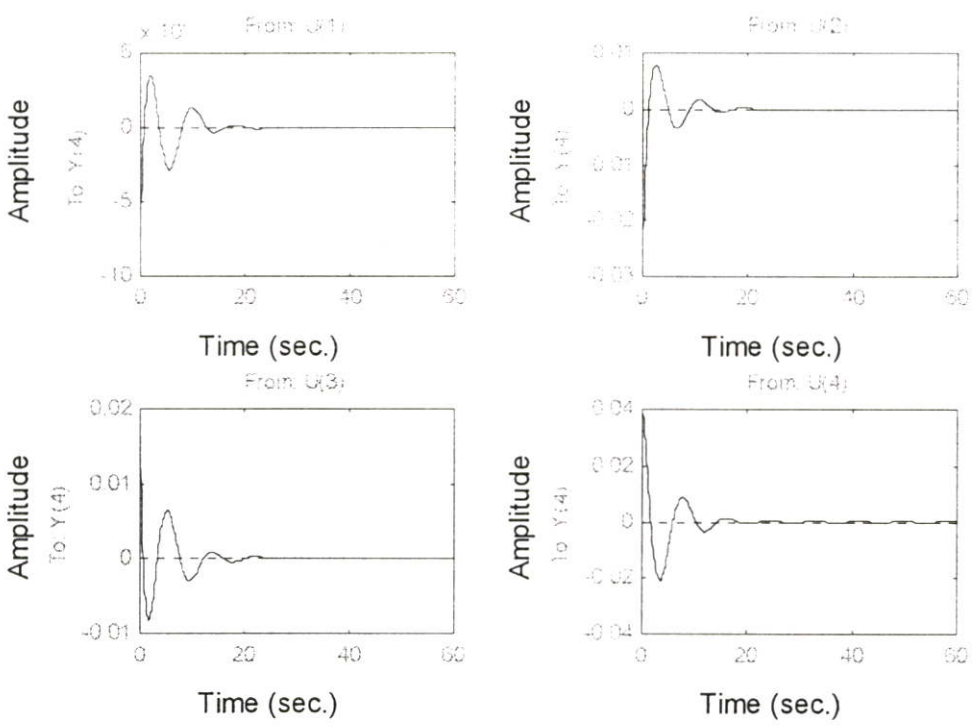
ภาพที่ 22 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าเอาต์พุต เป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 21)



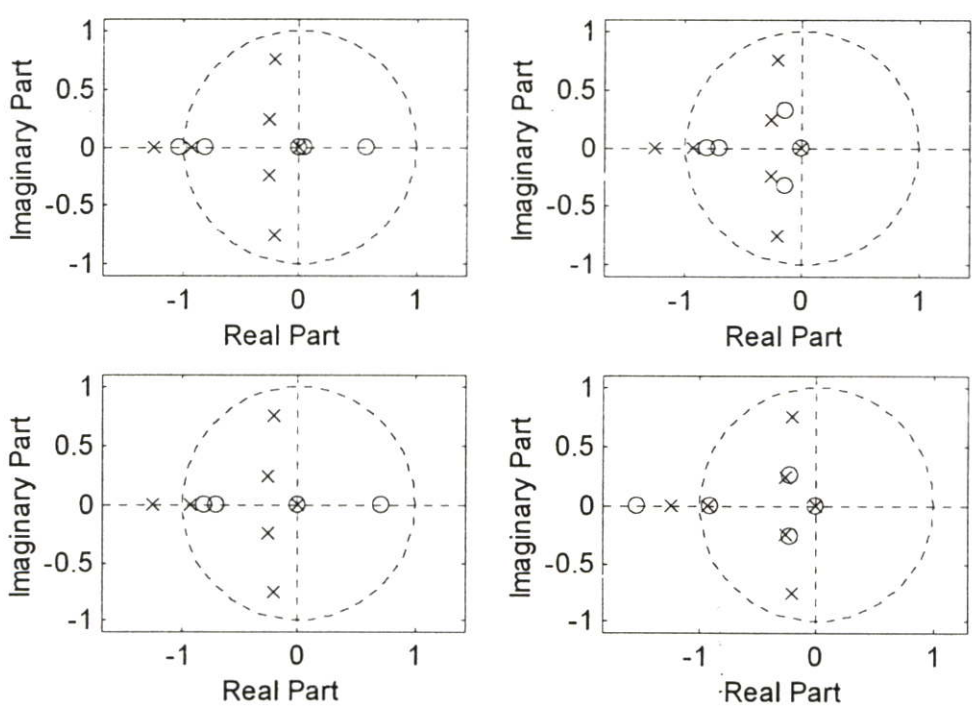
ภาพที่ 23 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$



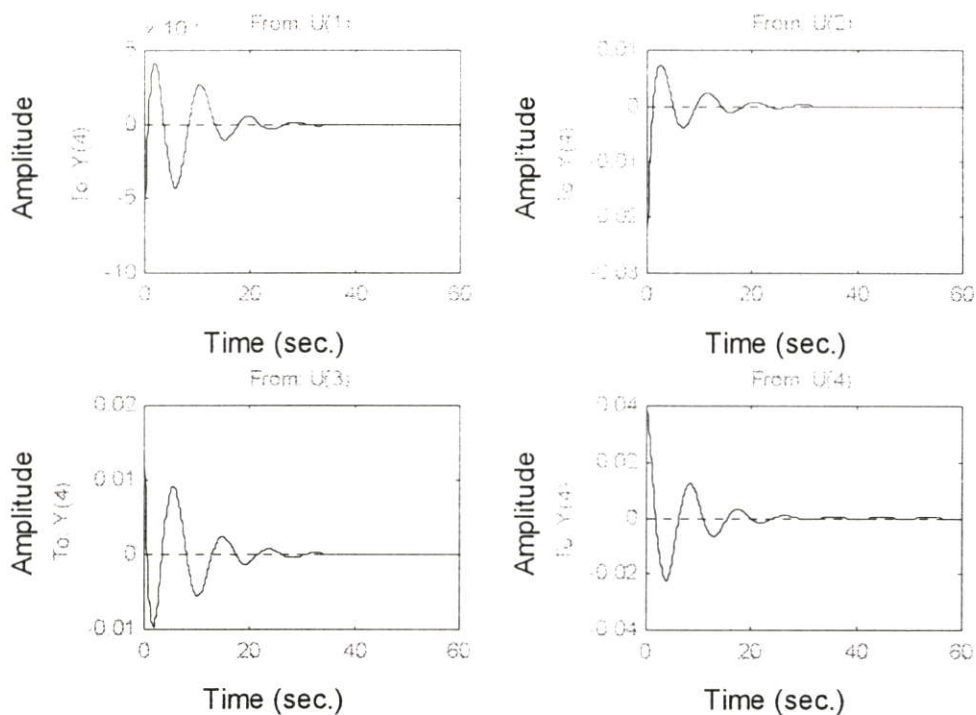
ภาพที่ 24 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าเอทพุทเป็น y_3 (สอดคล้องกับภาพที่ 23)



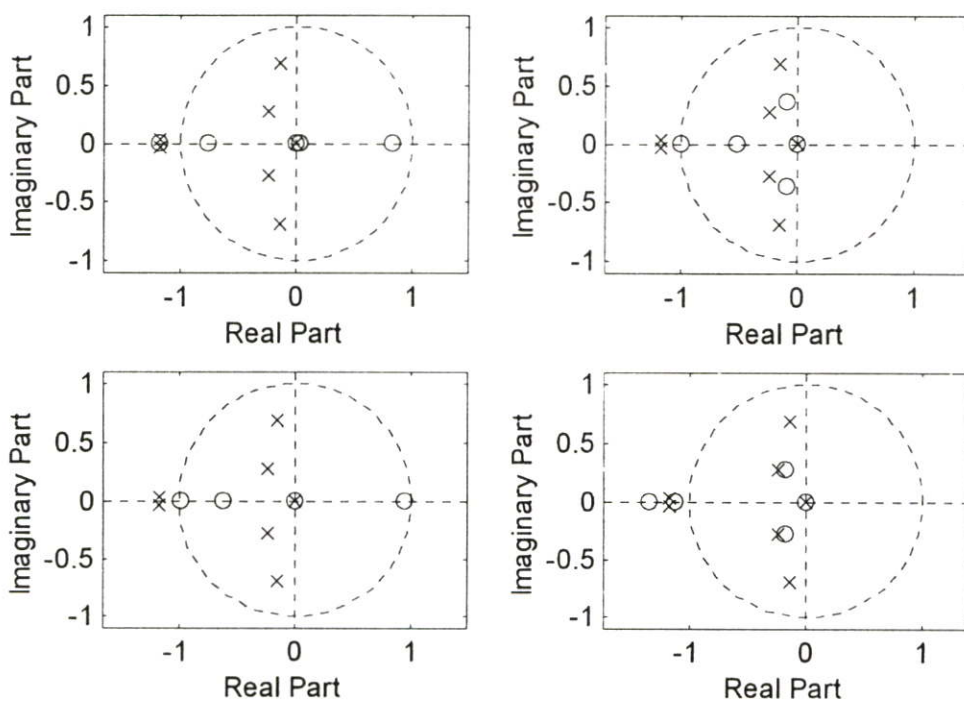
ภาพที่ 25 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$



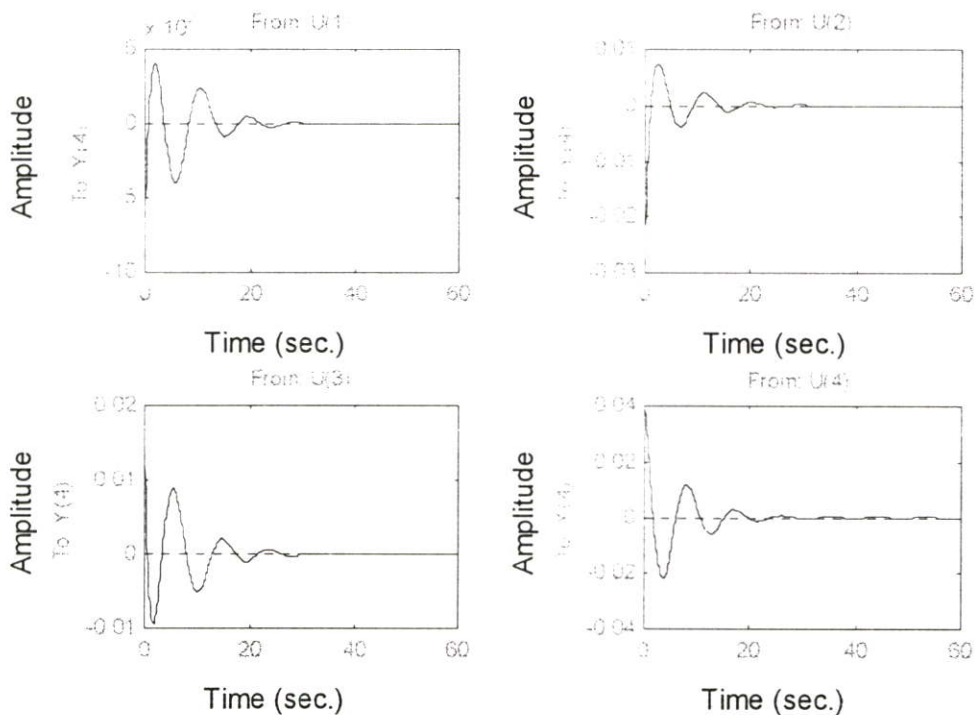
ภาพที่ 26 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าเอาต์พุตเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 25)



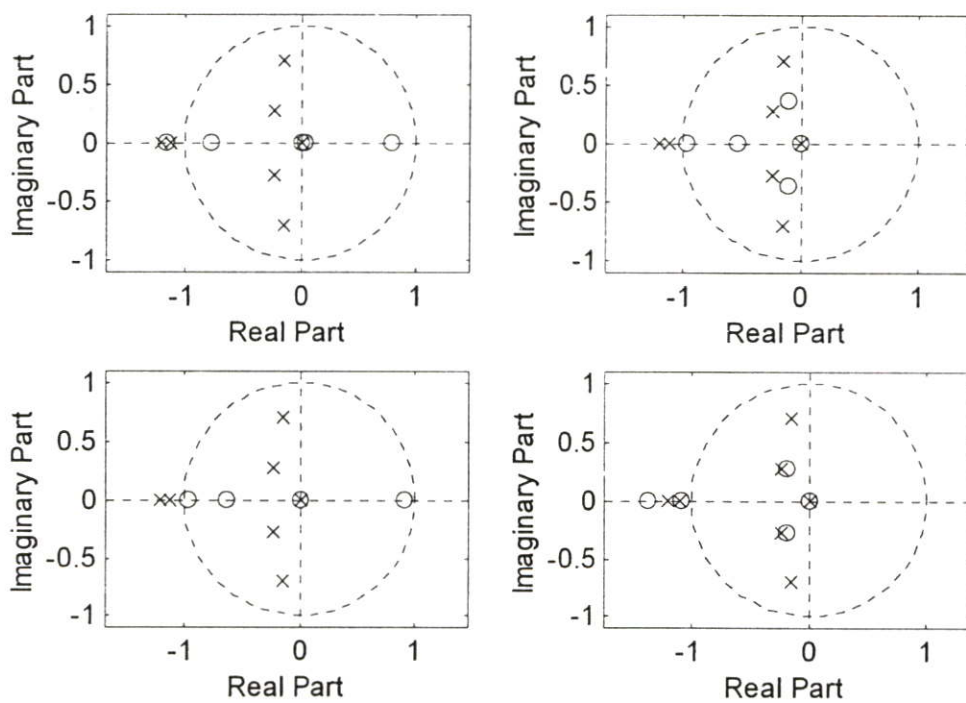
ภาพที่ 27 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$



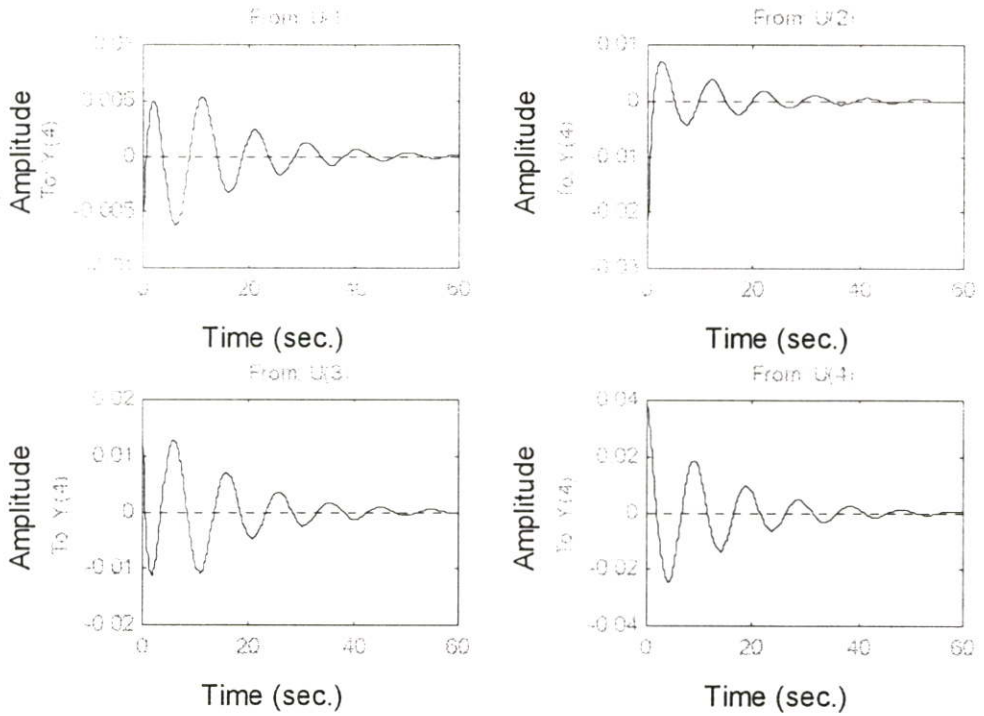
ภาพที่ 28 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าเอทพุท เป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 27)



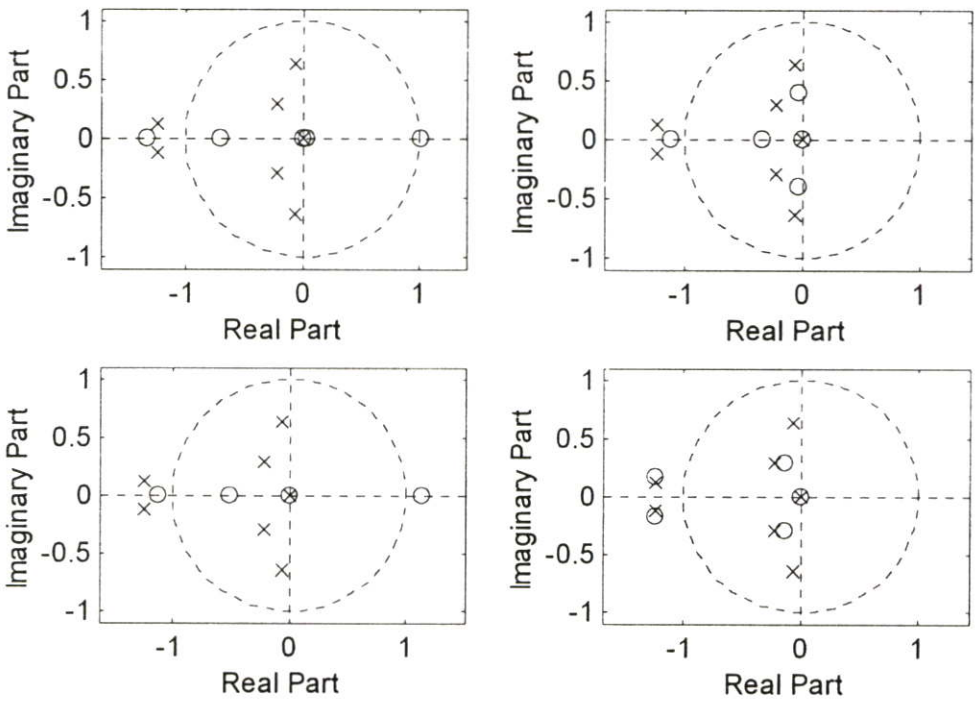
ภาพที่ 29 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$



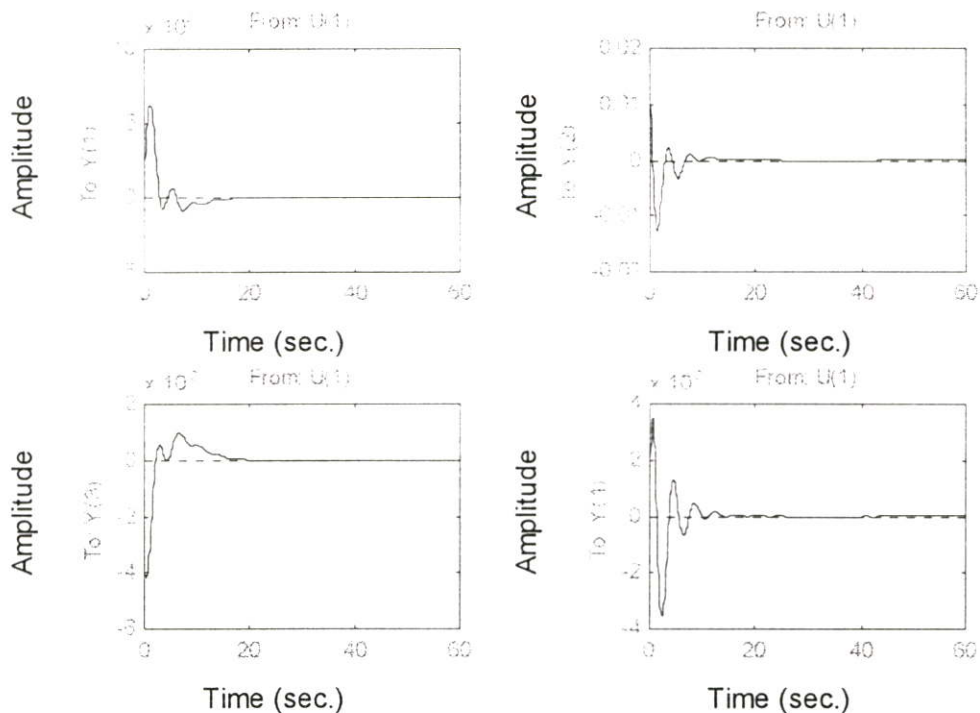
ภาพที่ 30 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าเอาต์พุต เป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 29)



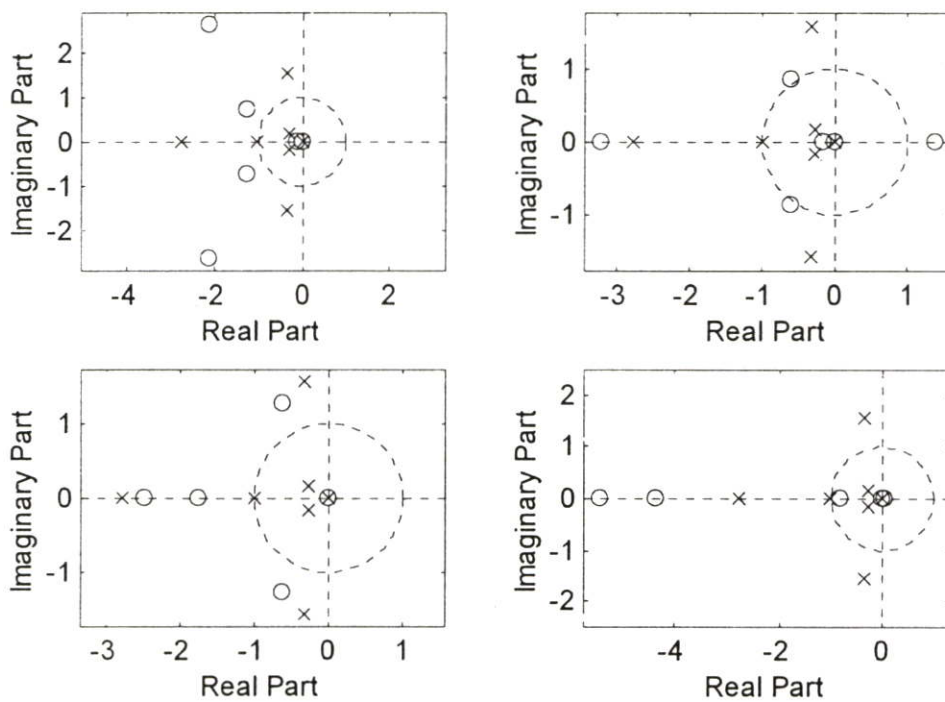
ภาพที่ 31 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$



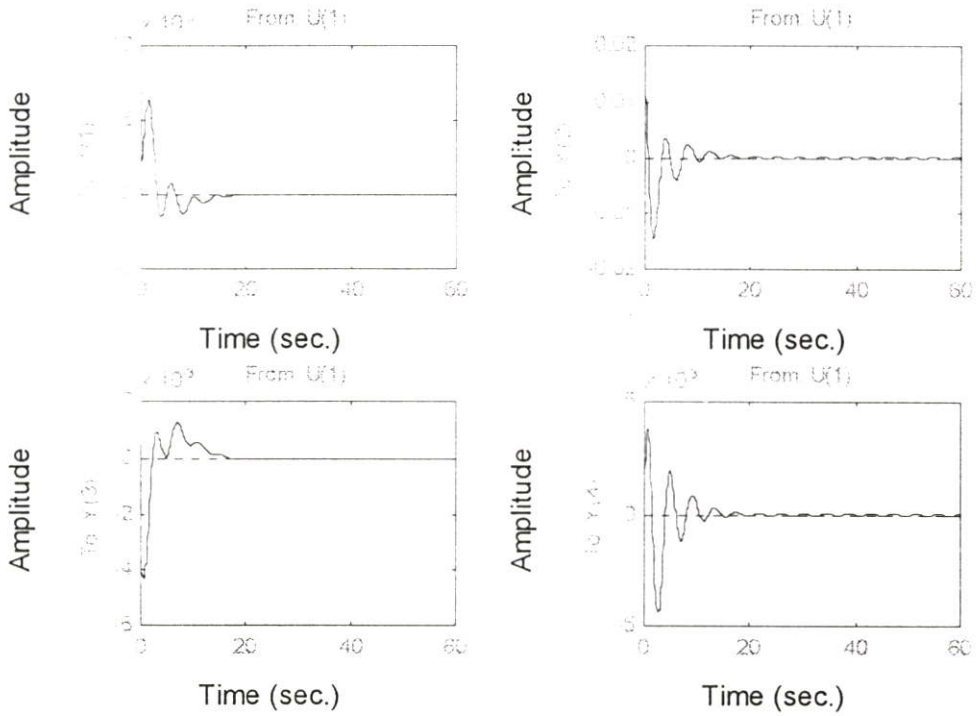
ภาพที่ 32 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าเอาท์พุทเป็น y_4 (สอดคล้องกับภาพที่ 31)



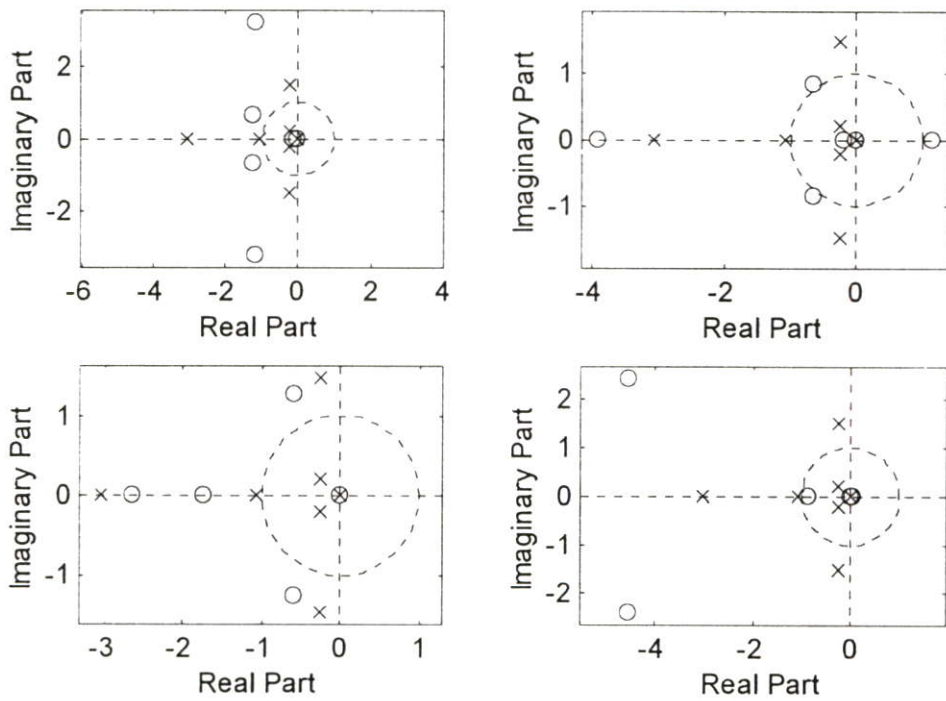
ภาพที่ 33 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$



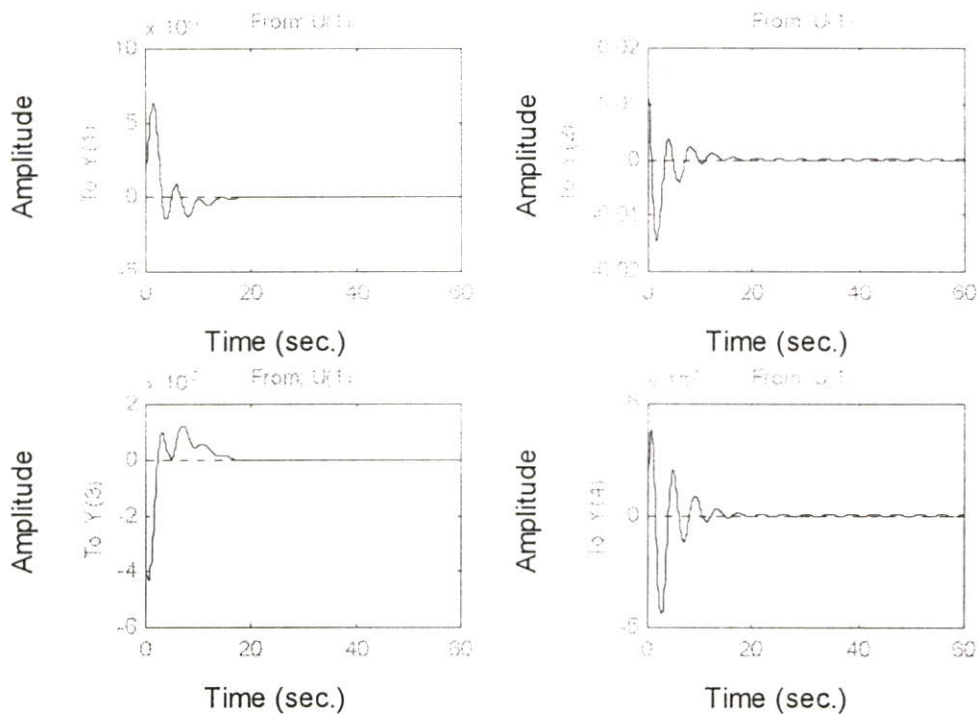
ภาพที่ 34 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุตเป็น u_1
(สอดคล้องกับภาพที่ 33)



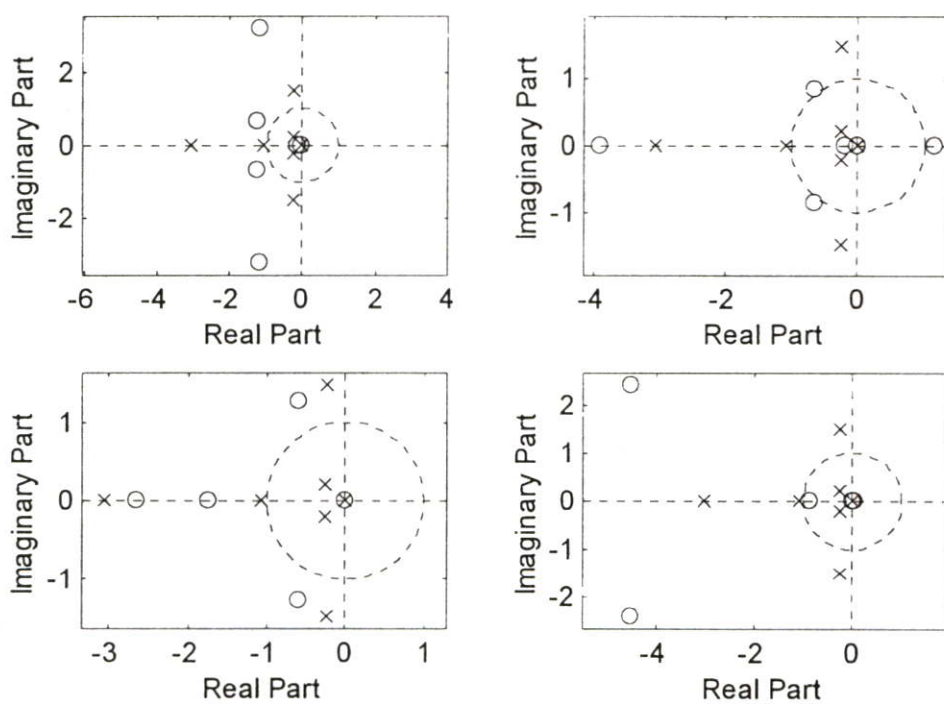
ภาพที่ 35 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$



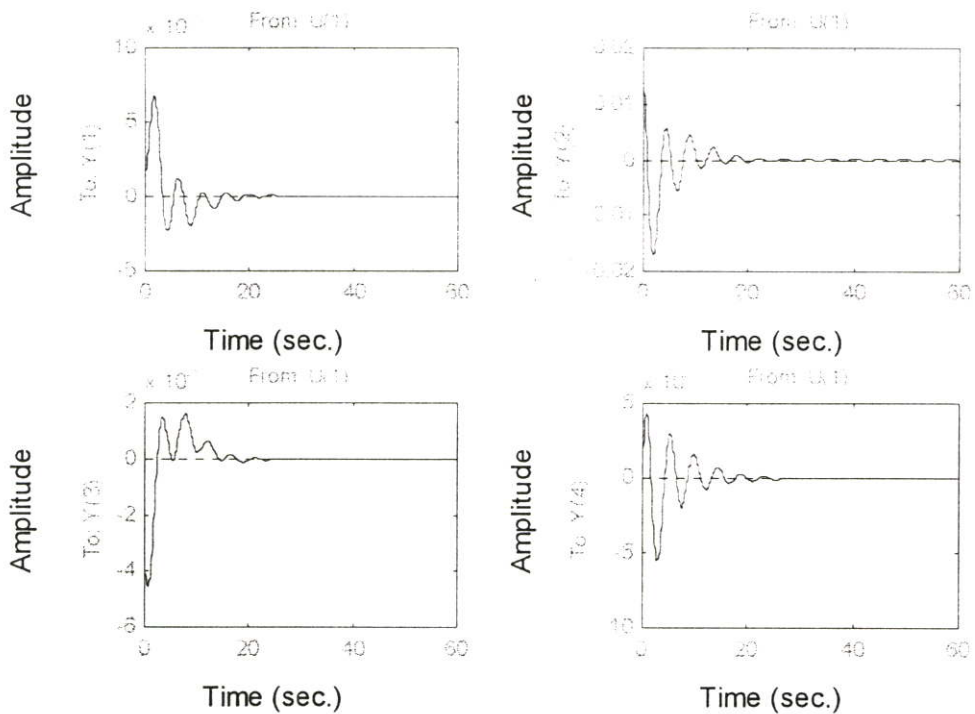
ภาพที่ 36 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุต เป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 35)



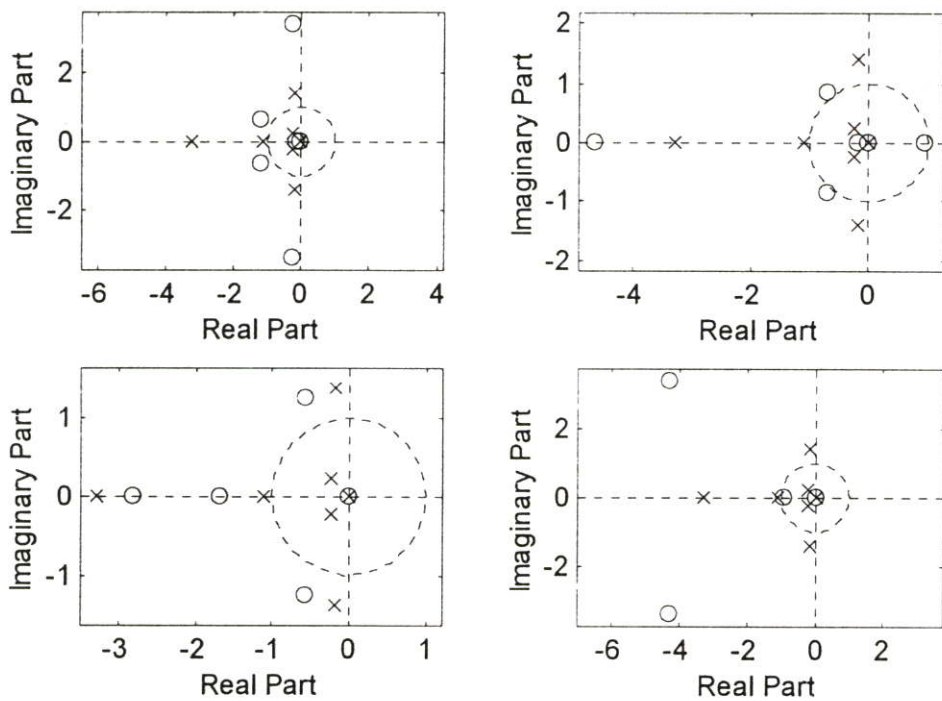
ภาพที่ 37 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$



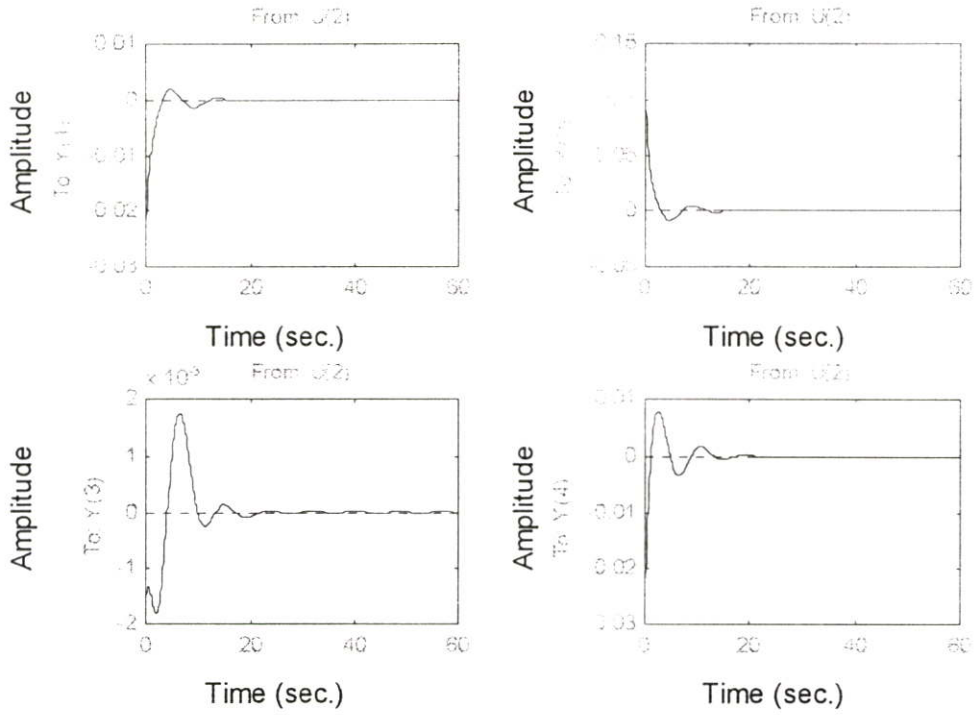
ภาพที่ 38 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุต เป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 37)



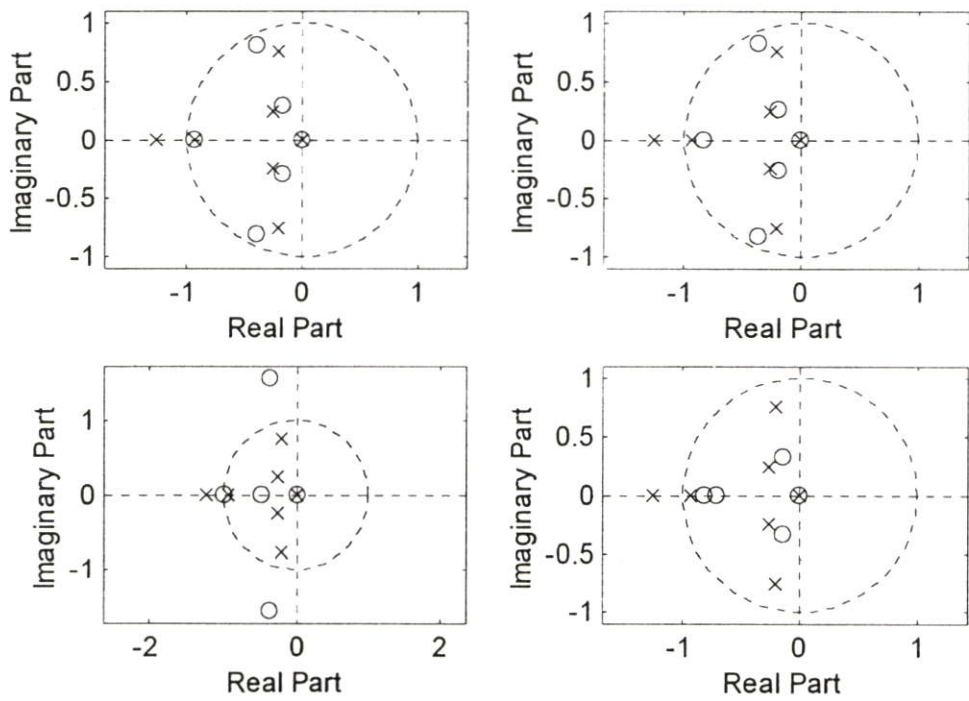
ภาพที่ 39 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$



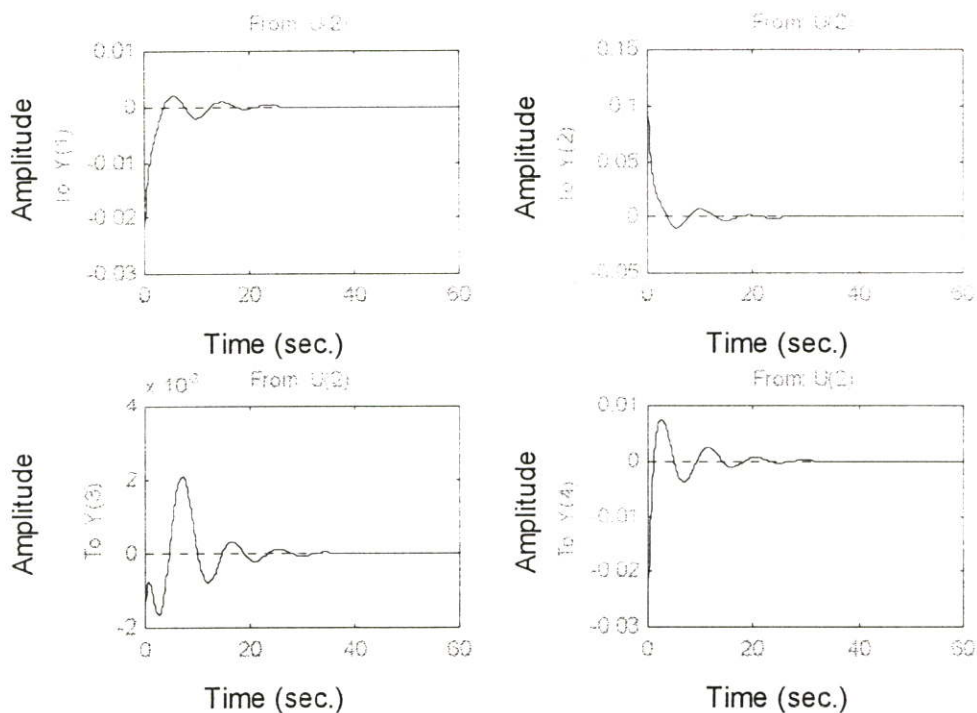
ภาพที่ 40 $L_1=0.5, L_2=0.4, m_1=0.3, m_2=0.1, d_1=0.2, d_2=0.05, d_3=0.05, d_4=0.3$ โดยค่าอินพุท เป็น u_1 (สอดคล้องกับภาพที่ 39)



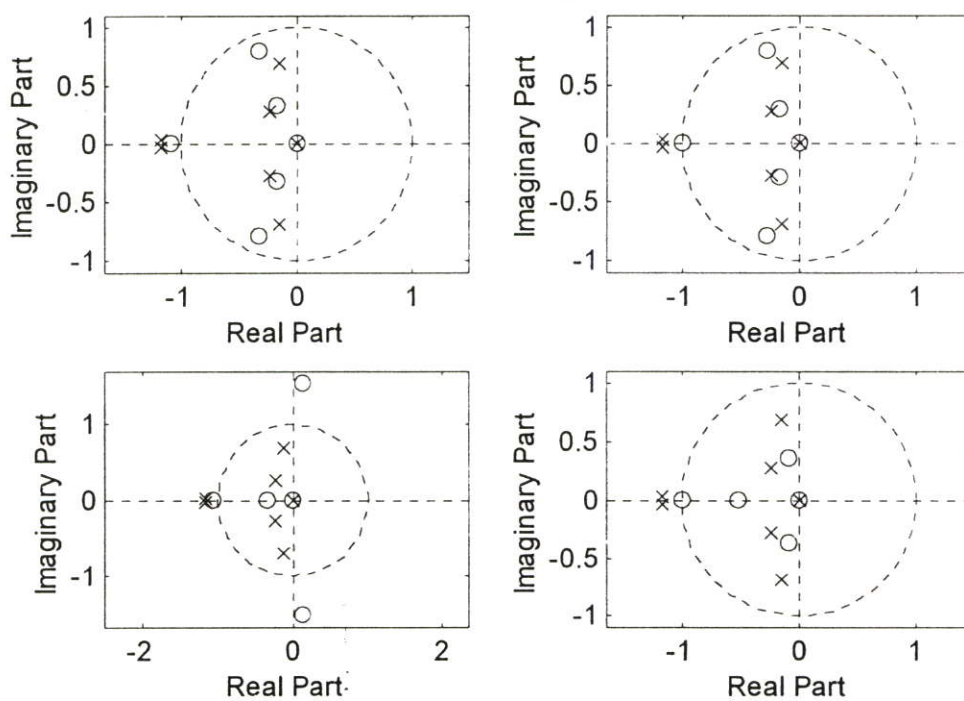
ภาพที่ 41 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$



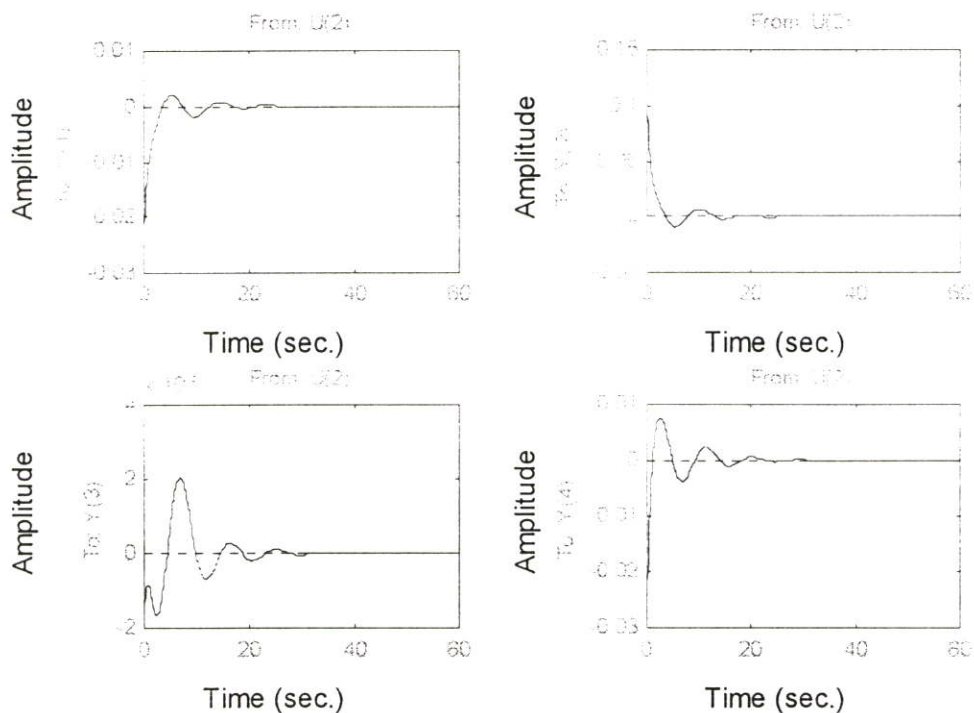
ภาพที่ 42 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าอินพุตเป็น u_2
(สอดคล้องกับภาพที่ 41)



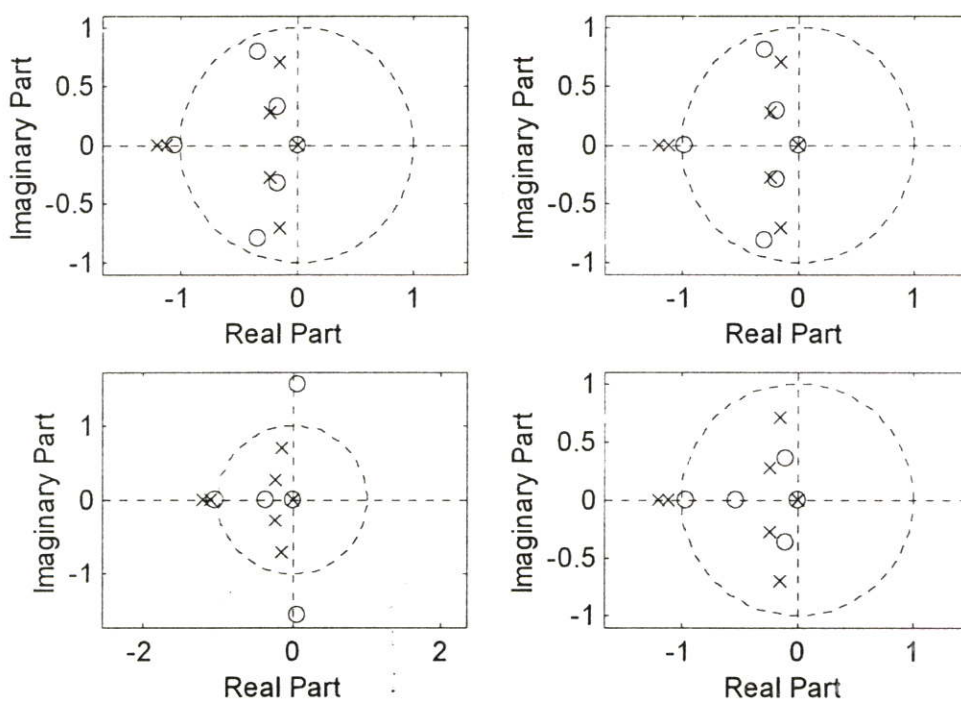
ภาพที่ 43 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$



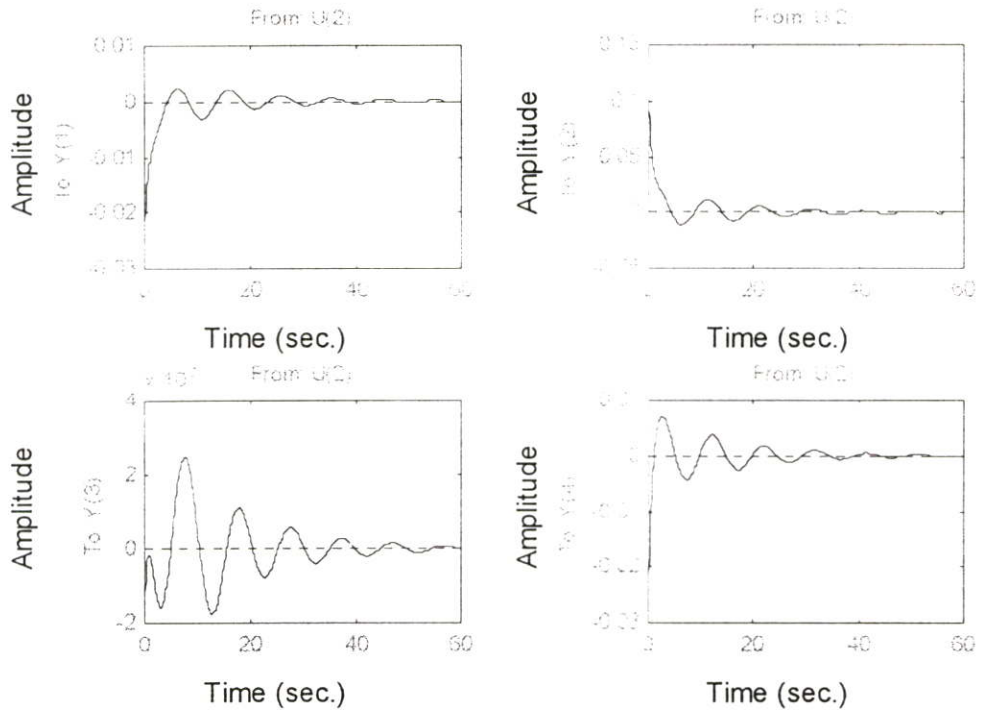
ภาพที่ 44 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0, d_4=0.2$ โดยค่าอินพุท เป็น u_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 43)



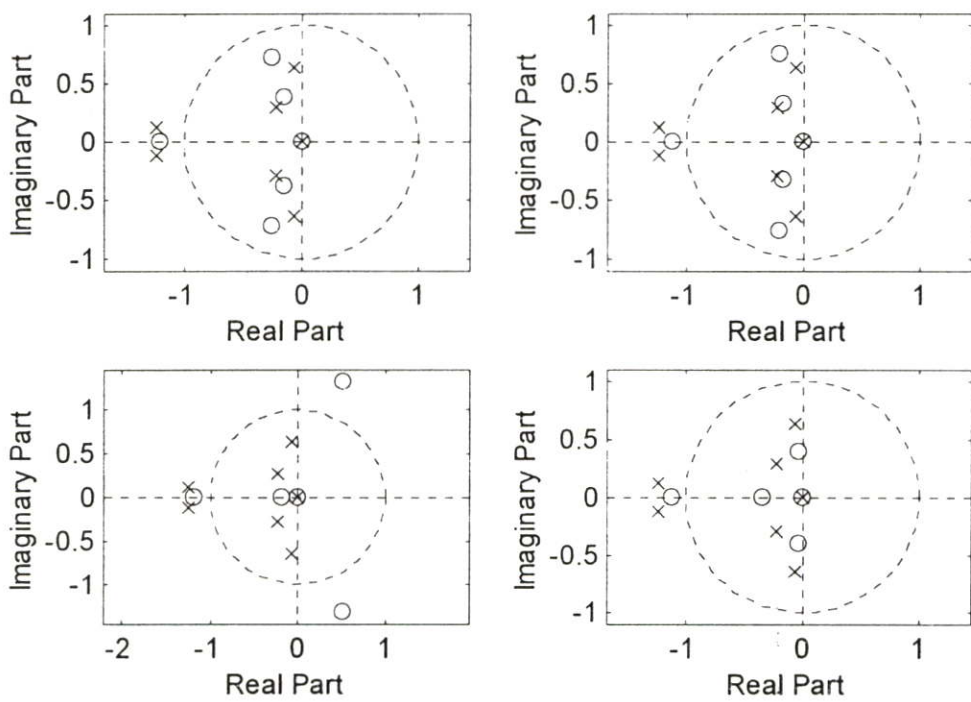
ภาพที่ 45 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$



ภาพที่ 46 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าอินพุท เป็น u_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 45)



ภาพที่ 47 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$



ภาพที่ 48 $L_1=0.5, L_2=0.5, m_1=0.4, m_2=0.1, d_1=0.05, d_2=0.07, d_3=0.06, d_4=0.2$ โดยค่าอื่น
ทุกเป็น u_2 (สอดคล้องกับภาพที่ 47)

4. แบบจำลองการแปลงของเวลาแบบต่อเนื่องเป็นเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง

แบบจำลองการแปลงของเวลาแบบต่อเนื่องเป็นเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง (conversion of continuous-time models to discrete time) ซึ่งใช้ข้อกำหนดตามการกำหนดค่าเบื้องต้นของงานวิจัยของลูคา จากรูปแบบของเวลาแบบต่อเนื่อง

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

เปลี่ยนเป็นรูปแบบของเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง

$$\dot{x}(k, t) = Gx(k) + Hu(k)$$

ตัวอย่างที่ 1 จากกรณีที่ไม่พิจารณาการหน่วง $L_1=0.2$, $L_2=0.2$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=d_2=d_3=d_4=0$ เมื่อ

1. เวลาสุ่มสัญญาณ=0.1

G =

1	0	0.0039	-0.0049	0.1	0	0.0045	-0.0001
0	1	0.2205	0.0953	0	0.1	0.2699	0.046
0	0	0.9086	0.0959	0	0	-0.007	-0.0002
0	0	0.0229	0.2172	0	0	0	-0.0056
0	0	-1.0501	1.0408	1	0	0.0039	-0.0049
0	0	-60.2878	-22.4323	0	1	0.2205	0.0953
0	0	24.7283	-20.1835	0	0	0.9086	0.0959
0	0	-4.8145	170.2243	0	0	0.0229	0.2172

H =

0.0001	-0.0002	0	0
-0.0002	0.0009	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.0015	-0.0031	0	0
-0.0033	0.0168	0.0003	0.0001
0.0001	0	-0.0001	0.0001
0	0.0004	0	-0.0009

2. เวลาสุ่มสัญญาณ=0.01

G =

1	0	0.0073	-0.0072	0.01	0	0	0
0	1	0.418	0.1549	0	0.01	0.0014	0.0006
0	0	0.8286	0.139	0	0	0.0094	0.0005
0	0	0.0331	-0.1731	0	0	0.0001	0.0056
0	0	1.4011	-1.0012	1	0	0.0073	-0.0072
0	0	81.3511	25.4459	0	1	0.418	0.1549
0	0	-33.0409	19.2112	0	0	0.8286	0.139
0	0	4.5826	-171.528	0	0	0.0331	-0.1731

H =

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.0002	-0.0003	0	0
-0.0001	0.002	-0.0004	-0.0001
-0.0001	-0.0001	0.0002	-0.0001
0	-0.0004	0	0.0009

3. เวลาสุ่มสัญญาณ=0.001

G =

1	0	0.0001	-0.0001	0.001	0	0	0
0	1	0.0043	0.0019	0	0.001	0	0
0	0	0.9982	0.0019	0	0	0.001	0
0	0	0.0004	0.9848	0	0	0	0.001
0	0	0.1512	-0.1904	1	0	0.0001	-0.0001
0	0	8.5821	3.6988	0	1	0.0043	0.0019
0	0	-3.5544	3.714	0	0	0.9982	0.0019
0	0	0.8859	-30.3276	0	0	0.0004	0.9848

H =

0	0	0	0
0	0.0000001	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0.0000001
0.0000158	-0.0000312	-0.0000008	0.000001
-	0.0002035	-0.0000462	-
0.0000125			0.0000199
-	-0.0000017	0.0000191	-0.00002
0.0000078			
0.0000021	-0.0000678	-0.0000048	0.0001633

ตัวอย่างที่ 2 จากกรณีที่พิจารณากาหนดวง $L_1=0.2$, $L_2=0.2$, $m_1=1.2$, $m_2=0.1$, $d_1=0.1$, $d_2=d_3=0.002$, $d_4=0.1$ เมื่อ

1. เวลาสุ่มสัญญาณ=0.1

G =

1	0	0.0168	-0.0045	0.0991	0	0.0046	-0.0001
0	1	0.1696	0.0939	-0.0011	0.0983	0.2655	0.0452
0	0	0.9019	0.0954	0	0	-0.007	-0.0002
0	0	0.0227	0.2142	0	0	-0.0001	-0.0055
0	0	-1.0338	1.0193	0.9814	0.0007	0.0059	-0.0045
0	0	-59.9204	-22.215	-0.0225	0.967	0.1463	0.0827
0	0	24.5513	-19.9293	0.0004	0.0001	0.9028	0.0954
0	0	-4.7293	168.3085	-0.0004	-0.0003	0.0237	0.2156

H =

0.0001	-0.0002	0	0
-0.0002	0.0008	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.0015	-0.0031	0	0
-0.0032	0.0165	0.0003	0.0001
0.0001	0	-0.0001	0.0001
0	0.0004	0	-0.0009

2. เวลาสุ่มสัญญาณ=0.01

G =

1	0	0.0073	-0.0072	0.01	0	0	0
0	1	0.4175	0.1548	0	0.01	0.0014	0.0006
0	0	0.8286	0.1389	0	0	0.0094	0.0005
0	0	0.0333	-0.1723	0	0	0.0001	0.0056
0	0	1.4207	-1.0131	0.9982	0.0001	0.0063	-0.0072
0	0	81.1845	25.4212	-0.0011	0.9967	0.4189	0.1548
0	0	-33.0239	19.2046	-0.0005	-0.0001	0.8274	0.1388
0	0	4.6167	-171.3273	0.0004	0.0003	0.0322	-0.1737

H =

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.0002	-0.0003	0	0
-0.0001	0.002	-0.0004	-0.0001
-0.0001	-0.0001	0.0002	-0.0001
0	-0.0004	0	0.0009

3. เวลาสุ่มสัญญาณ=0.001

G =

1	0	0.0001	-0.0001	0.001	0	0	0
0	1	0.0043	0.0019	0	0.001	0	0
0	0	0.9982	0.0019	0	0	0.001	0
0	0	0.0004	0.9848	0	0	0	0.001
0	0	0.1514	-0.1906	0.9998	0	0	-0.0001
0	0	8.5803	3.6984	-0.0001	0.9997	0.0045	0.0019
0	0	-3.5542	3.7138	-0.0001	0	0.9981	0.0019
0	0	0.8864	-30.3241	0.0001	0	0.0003	0.9846

H =

0	0	0	0
0	0.0000001	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0.0000001
0.0000158	-0.0000312	-0.0000008	0.000001
-0.0000125	0.0002035	-0.0000462	-0.0000199
-0.0000078	-0.0000017	0.0000191	-0.00002
0.0000021	-0.0000678	-0.0000048	0.0001633

ประวัติผู้เขียน

นางสาวกุลวিতรี พรำรุ่ง เกิดเมื่อวันที่ 17 มกราคม พ.ศ. 2517 ที่จังหวัด กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาจากคณะวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาสถิติประยุกต์ จากสถาบัน ราชภัฏธนบุรี ปีการศึกษา 2538