

การประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV สำหรับคลื่นน้ำ
โดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมจำกัด

FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SOLUTION
APPROXIMATION TO THE KdV EQUATION
FOR WATER WAVE

ศุภชัย ราชอาจ
SUPACHAI RATCHA-ART

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2547

ISBN 974-9709-06-3

การประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV สำหรับคลื่นน้ำ
โดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมจำกัด

**FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SOLUTION
APPROXIMATION TO THE KdV EQUATION
FOR WATER WAVE**

ศุภชัย ราชอาจ
SUPACHAI RATCHA-ART

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2547

ISBN 974-9709-06-3

**FINITE DIFFERENCE METHODS FOR SOLUTION
APPROXIMATION TO THE KdV EQUATION
FOR WATER WAVE**

SUPACHAI RATCHA-ART

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2004

ISBN 974-9709-06-3

COPYRIGHT 2004

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV สำหรับคลื่นน้ำ โดยใช้ผลต่างสี่บเนื่องจำกัด
นักศึกษา	นายศุภชัย ราชอาจ
รหัสประจำตัว	42065310
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2547
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ภักคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV ในกรณีคลื่นเชิงเดี่ยวที่เกิดขึ้นบนผิวน้ำ ซึ่งกล่าวใน [3] มีสมการอยู่ในรูป

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

เมื่อ g แทน ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
 h_0 แทน ความสูงของผิวน้ำ เมื่อไม่ถูกรบกวน
 $\eta(x,t)$ แทน แอมพลิจูดของคลื่น

โดยใช้ผลต่างสี่บเนื่องจำกัด ที่พัฒนาจากสูตรผลต่างพื้นฐานของนิวตัน เกาส์ และสเตอร์ลิงในการประมาณค่าผลเฉลย และนำผลมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีการหาผลเฉลยตรงซึ่งกล่าวใน [2] แล้วทำการแปลงให้มาอยู่ในรูปทางกายภาพได้ในรูป

$$\eta(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{\beta h_0}{3} 6^{2/3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \left(\frac{6^{1/3} \bar{x}}{h_0} - \beta \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} \bar{t} \right) \right) - \frac{2h_0}{3}$$

เมื่อ β เป็นค่าคงที่

ในการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นผู้วิจัยได้ศึกษาองค์ประกอบต่าง คือ ความสูงของคลื่นที่สูงที่สุด ตำแหน่งที่สูงสุดของคลื่น ตำแหน่งเริ่มต้น และตำแหน่งสิ้นสุดของคลื่น เมื่อค่าของ Δx , Δt และ h_0 มีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย ซึ่งผลการศึกษาพบว่ากระบวนการโดยใช้สูตรผลต่าง เกาส์ - ยอนหลัง จะให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการใช้สูตรผลต่างอื่น ๆ ซึ่งจากการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น พบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าของ Δx ให้น้อยลงมีผลต่อค่าคลาดเคลื่อนในลักษณะที่เพิ่มมากขึ้นในการประมาณค่าผลเฉลยในตำแหน่งถัดไปและมากที่สุดตำแหน่งสุดท้ายและส่งผลคลาดเคลื่อนไปยังการประมาณค่าที่ ช่วงเวลาและความสูงของผิวน้ำ เมื่อไม่ถูกรบกวน

Thesis Title	Finite Difference Method for Solution Approximation to the KdV Equation for Water Wave
Student	Mr.Supachai Ratcha-art
Student ID.	42065310
Degree	Master of Science
Programme	Applied Mathematics
Year	2547
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Pakkinee Chitsakul

ABSTRACT

This research presents the study of finite difference methods for solution approximation of the KdV equation for water wave. The proposed KdV equation is in the form :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

where g is the gravitational constant,

h_0 is the equilibrium water depth and

$\eta(x,t)$ is the surface elevation from the equilibrium hight.

The finite difference methods are develop from Newton , Gauss and Strling difference formulas. To approximate the solution of the KdV equation for water wave. Comparison of the approximation solutions with an analytic solution also presented and discused which is in the form :

$$\eta(x,t) = -\frac{\beta h_0}{3} 6^{2/3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \left(\frac{6^{1/3} x}{h_0} - \beta \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} t \right) \right) - \frac{2h_0}{3}$$

where β is a constant.

This research is interested in wave element parameters such as the maximum value of $\eta(x,t)$, its position, starting and ending positions of wave when Δx , Δt and h_0 are changed with a little of value. Results obtained have shown that the difference methods which is developed from Gauss formula has the minimum error than other formulas, where the large error occurs when the wider interval of x and large number of approximation points.

กิตติกรรมประกาศ

กราบขอบพระคุณ รศ.ภักคินี ชิตสกุล และอาจารย์กัมปนาท นามงาม ที่ให้คำปรึกษา และเสนอแนะในการทำวิทยานิพนธ์นี้ จนทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

กราบขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โปธิ์สุข ดร.ฉัฐไชย์ ถินาวงศ์ รศ.ดร.ปรีชา ยุพาพิน ที่ช่วยแนะนำและชี้ให้เห็นข้อผิดพลาดเคลื่อน จนทำให้วิทยานิพนธ์นี้ครบถ้วนสมบูรณ์และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยเป็นกำลังใจ

คุณความดีของวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบให้แก่ บิดา-มารดา ที่ให้กำเนิด และอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชา

ศุภชัย ราชอาจ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	III
กิตติกรรมประกาศ.....	V
สารบัญ.....	VI
สารบัญตาราง.....	VIII
สารบัญรูป.....	X
คำย่อและสัญลักษณ์.....	XI
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	3
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	3
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	16
3.1 การประมาณค่าผลเฉลย (2.27).....	16
3.1.1 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่าง – ข้างหน้า.....	16
3.1.2 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่าง – ข้างหลัง.....	19
3.1.3 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรของเกาส์ – ข้างหน้า.....	21
3.1.4 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรของเกาส์ – ย้อนหลัง.....	23
3.1.5 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่างของสเตอร์ลิง.....	26
3.1.6 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง.....	30
3.2 การเลือกตัวเลขในการศึกษา.....	34
บทที่ 4 ผลงานวิจัย.....	40

บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	58
เอกสารอ้างอิง.....	59
ภาคผนวก ก แสดงที่มาของสมการที่สำคัญ.....	60
ภาคผนวก ข ผลจากการประมาณค่าโดยใช้กระบวนการในบทที่ 3	72
ภาคผนวก ค แสดงกระบวนการ Leafrog method.....	95
ประวัติผู้เขียน.....	99

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2 และ $h_0=100$	36
3.2 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2 และ $h_0=200$	37
3.3 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2 และ $h_0=300$	38
3.4 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2 และ $h_0=400$	39
ข.1 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $h_0=100$	73
ข.2 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $h_0=200$	75
ข.3 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $h_0=300$	77
ข.4 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $h_0=400$	79
ข.5 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta x=0.2$	81
ข.6 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta x=0.3$	83
ข.7 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta x=0.4$	85
ข.8 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta x=0.5$	87
ข.9 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta t=0.0000005$	89
ข.10 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta t=0.0000006$	91
ข.11 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta t=0.0000007$	93

ข.12 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43)
 เมื่อ $\Delta t = 0.0000008$ 95

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 รายละเอียดของปัญหาคลื่นน้ำใน 2 มิติ (Two Dimension).....	4
2.2 แสดงภาพของโซลิตอนที่ได้จากกระบวนการ SAR บริเวณชายฝั่ง แองโกลา.....	15
2.3 แสดงการสร้างแบบจำลองและสังเกตคลื่นตามการจับบันทึกของ J.Scott Russel.....	15
3.1 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ชั้นตอน เมื่อใช้สูตรผลต่าง – ข้างหน้า.....	17
3.2 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ชั้นตอน เมื่อใช้สูตรผลต่าง – ข้างหลัง.....	20
3.3 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ชั้นตอน เมื่อใช้สูตรของเกาส์ – ข้างหน้า.....	22
3.4 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ชั้นตอน เมื่อใช้สูตรของเกาส์ – ย้อนหลัง.....	24
3.5 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ชั้นตอน เมื่อใช้สูตรของสเตอร์ลิง.....	27
3.6 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ชั้นตอน เมื่อใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง.....	31
4.1 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0=100$	41
4.2 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0=200$	42
4.3 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0=300$	43
4.4 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0=400$	44
4.5 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x=0.2$	47
4.6 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x=0.3$	48
4.7 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x=0.4$	49
4.8 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x=0.5$	50
4.9 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t=5 \times 10^{-7}$	53
4.10 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t=6 \times 10^{-7}$	54
4.11 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t=7 \times 10^{-7}$	55
4.12 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t=8 \times 10^{-7}$	56

คำย่อและสัญลักษณ์

g	แทน ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (เมตร/วินาที ²)
a	แทน ความเร่ง (เมตร/วินาที ²)
m	แทน มวล
F	แทน แรง (นิวตัน)
A	แทน พื้นที่ที่แรงกระทำ (เมตร ²)
t	แทน เวลา (วินาที)
x	แทน ระยะ ในแนวราบ (เมตร)
y	แทน ระยะ ในแนวตั้ง (เมตร)
$h(x,t)$	แทน ความสูงของผิวน้ำที่ถูกรบกวน (เมตร)
h_0	แทน ความสูงของผิวน้ำ เมื่อไม่ถูกรบกวน (เมตร)
$\eta(x,t)$	แทน แอมพลิจูดของคลื่น (เมตร)
ρ	แทน ความหนาแน่นของน้ำ (มวล / เมตร ³)
p	แทน ความดันของน้ำ (นิวตัน / เมตร ²)
$V(u,v)$	แทน ความเร็วในส่วนของน้ำ (เมตร/วินาที)
u	แทน ความเร็วในส่วนของน้ำ ในทิศทางของ x (เมตร/วินาที)
v	แทน ความเร็วในส่วนของน้ำ ในทิศทางของ y (เมตร/วินาที)
c	แทน ความเร็วกลุ่มของคลื่น (เมตร/วินาที)
c_0	แทน ความเร็วคลื่นเมื่อเริ่มพิจารณาเมื่อเวลา t_0
λ	แทน ความยาวคลื่น (เมตร)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

จากคำรายงานของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกรโยธา ชื่อ J.Scott Russel เมื่อปี ค.ศ.1934 ใน [2] ได้กล่าวถึงคลื่นที่เกิดในช่องแคบหลังจากที่เรือหยุดกระทันหัน ซึ่งมีลักษณะพอสรุปได้ คือ คลื่นเคลื่อนที่ในทิศทางเดียว รูปทรงของคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลงและความเร็วสม่ำเสมอ ความสูงของคลื่นลดลง จนหายไปในที่สุด ซึ่งเรียกคลื่นในลักษณะนี้ว่า “โซลิตอน” ต่อมาในปี ค.ศ. 1895 Korteweg และ de Vries ได้พัฒนาสมการไม่เชิงเส้นขึ้นเพื่ออธิบายการแพร่ของคลื่นเคลื่อนที่ในช่องแคบดังกล่าว ซึ่งเป็นที่รู้จักกันคือ สมการ KdV (Korteweg-de Vries Equation) จากการศึกษานี้ [3] ได้ทำการแสดงที่มาของสมการ KdV ในกรณีของคลื่นน้ำ ซึ่งมีสมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta - (gh_0)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{3\eta}{2h_0}\right)\frac{\partial}{\partial x}\eta + (gh_0)^{\frac{1}{2}}\frac{h_0^2}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\eta = 0 \quad (1.1)$$

เมื่อ x แทน ระยะทาง

t แทน เวลา

h_0 แทน ความสูงของผิวน้ำที่ไม่ถูกรบกวน

g แทน ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

$\eta = \eta(x, t)$ แทน การเปลี่ยนแปลงของผิวน้ำจากจุดสมดุล

ซึ่งเมื่อทำการแปลงโดยแทน

$$U = -6^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{3\eta}{2h_0}\right), \quad \bar{x} = 6^{\frac{1}{3}}\frac{x}{h_0}, \quad \bar{t} = \left(\frac{g}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}}t \quad (1.2)$$

และทำการจัดสมการใหม่จะได้

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}U + 6U\frac{\partial}{\partial \bar{x}}U + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3}U = 0 \quad (1.3)$$

ในการศึกษาหาผลเฉลยของ (1.3) [2] ได้ใช้วิธีการหาผลเฉลยลอง (Trial Solution) ในการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ซึ่งผลเฉลยที่ได้คือ

$$U(x,t) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} (x - \beta t) \right) \quad (1.4)$$

เมื่อ β แทน ค่าคงที่

เมื่อทำการแปลงกลับให้อยู่ในระนาบของ η, x, t จะได้ (1.4) เป็น

$$\eta(x,t) = -\frac{\beta h_0}{3} 6^{2/3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \left(\frac{6^{1/3} x}{h_0} - \beta \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} t \right) \right) - \frac{2h_0}{3} \quad (1.5)$$

ในการศึกษากระบวนการทางตัวเลขของสมการ KdV จาก [7] ได้กล่าวถึงกระบวนการ “Leapfrog Finite Defference” ของ Zabusky – Kruskal ซึ่งเป็นกระบวนการที่เป็นลักษณะเฉพาะกล่าวในหัวข้อ 2.4 Mahir Rasulov และ Erhan Coskun [5] ได้ทำการศึกษาตามกระบวนการของ Zabusky – Kruskal ถึงผลกระทบที่เกิดขึ้นในกรณีที่เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง Nikzad Toomarian และ Jacob Barhen [6] ได้ทำการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการ KdV โดยทำการแปลงจากระนาบทั่วไป ไปสู่ระนาบของฟูเรียร์ (Fourier Space) และใช้กระบวนการ “Leapfrog Finite Difference” ในการหาผลเฉลยอีกต่อหนึ่ง Hafedh Hajji, Stephane Sole, Alfred Ramamonjiarisoa, MeteoMer, Labo I.O.A. [3] ได้ทำการศึกษาแบบจำลองที่ไม่เชิงเส้น โดยใช้สมการ KdV และสมการขยายของสมการ KdV เป็นสมการค้นแบบของการศึกษา เปรียบเทียบกับภาพที่ได้จากกระบวนการที่เรียกว่า SAR (Synthetic Aperture Radar) ซึ่งสังเกตที่ ชายฝั่งแองโกลา (Angola Coast)

ในการศึกษานี้ผู้วิจัยได้ใช้กระบวนการทางตัวเลข ที่มีความซับซ้อนน้อยลง เพื่อความรวดเร็วในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV ที่อยู่ในรูป (1.1) ซึ่งในการวิจัยผู้วิจัยได้ใช้ผลต่าง – ข้างหน้า ผลต่าง – ข้างหลัง เกาส์ – ข้างหน้า เกาส์ – ข้อนหลัง สเตอริง และผลต่างสี่เหลี่ยม ส่วนกลาง ในการประมาณค่าผลเฉลย และเปรียบเทียบกับผลเฉลยของ (1.4) ซึ่งค่าในการเปรียบเทียบผู้วิจัยสนใจองค์ประกอบของคลื่น ได้แก่ ความสูงของคลื่นที่สูงที่สุด ตำแหน่งที่สูงสุดของคลื่น ตำแหน่งเริ่มต้น และตำแหน่งสิ้นสุดของคลื่น ในการพิจารณาตำแหน่งเริ่มต้นของคลื่นผู้วิจัยกำหนดให้เป็นตำแหน่งแรกที่ $\eta(x,t) \leq 10^{-5}$ และตำแหน่งสิ้นสุดของคลื่นผู้วิจัยกำหนด

ตำแหน่งแรกโดยกระบวนการย้อนหลังที่ $\eta(x,t) \geq 10^{-5}$ ซึ่งองค์ประกอบต่าง ๆ ผู้วิจัยคาดว่าน่าจะมีผลต่อค่าคลาดเคลื่อนในเวลาถัดไปของกระบวนการทางตัวเลขในการประมาณค่า โดยพิจารณาจากกระบวนการทางตัวเลขในบทที่ 3

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาการเกิดของสมการ KdV ในกรณีของคลื่นน้ำเชิงเดี่ยว

1.2.2 เพื่อศึกษาการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV โดยใช้ผลต่างสี่บ่งเนื่องข้างหน้าและศึกษาค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 ในการหาผลเฉลยของสมการ KdV จะศึกษาในกรณีของคลื่นเชิงเดี่ยว

1.3.2 ในการหาผลเฉลยของสมการ KdV ในกรณีของคลื่นน้ำจะกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ตาม [3] (ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 2.3)

1.3.3 ศึกษาตามกระบวนการทางตัวเลขโดยใช้ผลต่างสี่บ่งเนื่องจำกัดแล้วนำผลเฉลยที่ได้มาเทียบกับผลเฉลยจริง

1.3.4 พิจารณาผลเฉลยทางตัวเลขและค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้กระบวนการทางตัวเลขที่ลดขั้นตอนที่เป็นขั้นตอนเฉพาะลง เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจและนำไปใช้ในตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์ กรณีคลื่นเชิงเดี่ยว

1.4.2 ได้เงื่อนไขที่จะนำกระบวนการไปใช้เพื่อทราบข้อจำกัดของกระบวนการและค่าคลาดเคลื่อนทางตัวเลขที่จะเกิดขึ้นได้ ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.4.3 เพื่อเป็นตัวอย่างสำหรับการศึกษาสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

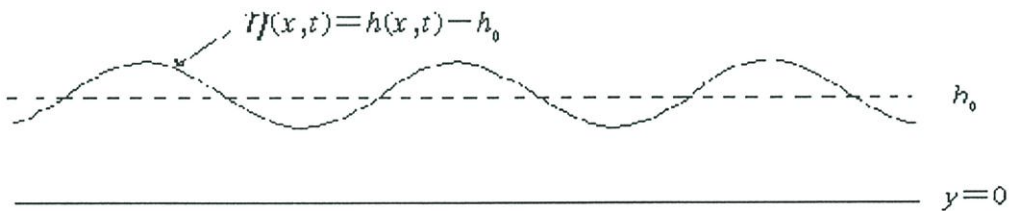
ในการศึกษาสมการ KdV ผู้วิจัยเริ่มต้นที่การศึกษาที่มาของสมการใน [3] ซึ่งกล่าวถึงการเกิดสมการบนคลื่นน้ำใน 2 มิติ (Two Dimension) ด้วยขอบล่างที่ราบเรียบ ดังนั้นสำหรับขอบล่างเราจะกำหนดโดย $y=0$ และความสูงของพื้นผิวน้ำที่ถูกรบกวนกำหนดโดย

$$y=h(x,t) \tag{2.1}$$

กำหนด h_0 ความสูงของพื้นผิวน้ำที่ไม่ถูกรบกวน และกำหนดการเปลี่ยนแปลงของคลื่นจากจุดสมดุลเป็น $\eta(x,t)$ โดยที่

$$\eta(x,t)=h(x,t)-h_0 \tag{2.2}$$

ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 รายละเอียดของปัญหาคลื่นน้ำใน 2 มิติ

กำหนด $V=(u,v)$ แทนฟังก์ชันความเร็วของคลื่น u , v แทนองค์ประกอบของความเร็วของคลื่นในทิศทาง x และ y ตามลำดับ ซึ่งสมการความต่อเนื่องของการเคลื่อนที่และสมการโมเมนตัมในทิศทาง x และ y สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v=0 \quad \text{สำหรับ } 0 < y < h(x,t) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}p \quad \text{สำหรับ } 0 < y < h(x,t) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + u \frac{\partial}{\partial x}v + v \frac{\partial}{\partial y}v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}p - g \quad \text{สำหรับ } 0 < y < h(x,t) \quad (2.5)$$

เมื่อ g แทน ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ρ แทน ความหนาแน่นของน้ำ

p แทน ความดันของน้ำ

ในการแสดงที่มาของสมการ KdV จะกำหนดเงื่อนไข โดยให้แรงดันบนพื้นผิวน้ำเป็นศูนย์ และจะไม่พิจารณาแรงตึงผิว ซึ่งกำหนดเป็นสมการเงื่อนไขต่าง ๆ เป็นดังนี้

$$v(x,0,t) = 0 \quad (2.6)$$

$$p(x,h,t) = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h + u(x,h,t) \frac{\partial}{\partial x}h - v(x,h,t) = 0 \quad (2.8)$$

พิจารณากรณีที่ h มีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับความยาวคลื่น λ ดังนั้นแอมพลิจูด η จะมีค่าน้อยตามไปด้วย ดังนั้นเราคาดหวังว่า $v(x,h,t)$ ที่มีค่าน้อยด้วย เมื่อ $v(x,0,t) = 0$ จาก (2.6) เราคาดหวังว่า $v(x,h,t)$ จะมีค่าน้อยโดยตลอด แล้ว (2.5) สามารถประมาณค่าได้โดย

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}p - g = 0 \quad (2.9)$$

อินทิเกรตเทียบกับ y และใช้ (2.7) จะได้ (2.9) เป็น

$$p = \rho gh(x,t) - \rho gy \quad (2.10)$$

ดังนั้น (2.4) สามารถเขียนใหม่ได้

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial y}u + g \frac{\partial}{\partial x}h = 0 \quad (2.11)$$

อินทิเกรต (2.3) เทียบกับ y จาก $y=0$ ถึง $y=h$ เราได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - u(x, h, t) \frac{\partial}{\partial x} h + v(x, h, t) - v(x, 0, t) = 0$$

แล้วเงื่อนไขใน (2.6) และ (2.8) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = 0 \quad (2.12)$$

ให้ $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ แล้วจะสามารถเขียน (2.11) ใหม่ได้

$$\frac{D}{Dt} u = -g \frac{\partial}{\partial x} h \quad (2.13)$$

ทางขวามือของสมการ (2.13) จะเห็นว่าเป็นอิสระจาก y ซึ่งจะพิจารณาในกรณีนี้เท่านั้น ดังนั้นสมการ (2.11) และ (2.12) จะกลายเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + g \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \quad (2.14)$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial t} h + u \frac{\partial}{\partial x} h + h \frac{\partial}{\partial x} u = 0 \quad (2.15)$$

จากการศึกษาชั้นพื้นฐานของคลื่นน้ำไม่เชิงเส้นในน้ำตื้น (Nonlinear Shallow Water Wave) จะเห็นว่าโครงสร้างของระบบสมการ (2.14) และ (2.15) เหมือนกับคลื่นเสียงที่ไม่เชิงเส้นใน 1 มิติ (Nonlinear One Dimensional Sound Wave) ซึ่งกล่าวใน [3] ดังนั้นจะได้

$$c^2 = gh \quad (2.16)$$

และ

$$h \frac{d}{dh} u = \pm c = \pm (gh)^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

ซึ่งนำด้วย

$$c = c_0 \pm \frac{u}{2} \quad (2.18)$$

หรือ

$$(gh)^{\frac{1}{2}} = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u}{2} \quad (2.19)$$

ดังนั้นสมการควบคุมคลื่นจะได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} h \pm \left[3(gh)^{\frac{1}{2}} - 2(gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \quad (2.20)$$

จากตอนต้นการพิจารณาเราทราบ $h = h_0 + \eta$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาอนุกรมของ $h^{\frac{1}{2}}$ จะได้

$$h^{\frac{1}{2}} = h_0^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{h_0} \right) + \dots \right]$$

เมื่อถ้า $\left(\frac{\eta}{h_0} \right)$ เป็นค่าที่น้อยมาก จะทำการตัดพจน์ที่ 2 ของอนุกรมทิ้งไป ดังนั้น (2.20) เมื่อพิจารณาเครื่องหมายลบ สามารถประมาณค่าได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \eta = 0 \quad (2.21)$$

ถ้าเราพิจารณาตามสายย่อยสายหนึ่งของคลื่น ในอันดับต่อไปของ $\left(\frac{\eta}{h_0} \right)$ ข้างต้นเราจะได้ (2.21) เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} h - \left[3(gh)^{\frac{1}{2}} - 2(gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \quad (2.22)$$

จาก (2.21) ซึ่งเป็นสมการสมการคลื่นเชิงเส้น (Linear Wave Equation) ในหนึ่งทิศทาง (One Direction) สำหรับคลื่นเชิงเดี่ยว (Monochromatic Wave) และการกระจายตัวของคลื่นเป็น

$$\omega = (gh_0)^{\frac{1}{2}} k \quad (2.23)$$

สำหรับคลื่นเชิงเส้นภายใต้แรงดึงดูดของโลก (Linear Gravity Wave) ทั่วไปจะมีกระจายตัวของคลื่นเป็น

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (2.24)$$

หรือเมื่อทำการกระจายให้อยู่ในรูปอนุกรม และ h ประมาณเป็น h_0 จะได้

$$\omega = (gh_0)^{\frac{1}{2}} k \left[1 - \frac{1}{2} (kh_0)^2 + \dots \right] \quad (2.25)$$

จาก (2.21) จัดให้อยู่ในคลื่นที่สั้น (Shorter Wave) จะมีสมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \eta + (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta = 0 \quad (2.26)$$

ซึ่งจะประมาณค่าการกระจายความสัมพันธ์ของสมการ (2.25) รวมกันแล้วแก้ไขการกระจายใน (2.26) และลักษณะที่ไม่เชิงเส้น (Nonlinearity) สมการ (2.22) เราได้สมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \eta + (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta = 0 \quad (2.27)$$

จาก (2.27) เป็นที่รู้จักกันใน Korteweg – de Vries Equation หรือ KdV Equation ซึ่งเป็นสมการที่ง่ายซึ่งครอบคลุมผลกระทบของลักษณะที่ไม่เชิงเส้นและการกระจายของคลื่น

จาก (2.27) เมื่อทำการแปลงโดย

$$U = -6^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right), \quad \bar{x} = 6^{\frac{1}{3}} \frac{x}{h_0}, \quad \bar{t} = \left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

ดังนั้น (2.27) สามารถเขียนใหม่ได้

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} U + 6U \frac{\partial}{\partial \bar{x}} U + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} U = 0 \quad (2.28)$$

ซึ่งจะเหมือนกันกับสมการที่กล่าวใน [2] และได้แสดงถึงวิธีการหาผลเฉลยไว้ โดยทำการแปลงจากระนาบ (x, t, u) ไปสู่ระนาบ (z, f) กำหนดดังนี้

$$z = \bar{x} - \beta \bar{t}, \quad U(\bar{x}, \bar{t}) = f(z) \quad (2.29)$$

ดังนั้น

$$U(\bar{x}, \bar{t}) = f(\bar{x} - \beta \bar{t}) = f(z)$$

จาก (2.29) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.30)$$

แทน (2.29) และ (2.30) ใน (2.28) ได้

$$-\beta \frac{d}{dz} f(z) + \frac{d^3}{dz^3} f(z) + 6f(z) \frac{d}{dz} f(z) = 0 \quad (2.31)$$

จะเห็นว่า (2.31) เป็นสมการอนุพันธ์สามัญ ทำการอินทิเกรต (2.33) เทียบกับตัวแปร z ได้

$$-\beta f(z) + \frac{d^2}{dz^2} f(z) + 3f^2(z) = a \quad (2.32)$$

เมื่อ a แทนค่าคงที่ของการอินทิเกรต นำ $2\frac{d}{dz}f(z)$ คูณทั้งสมการได้

$$-2\beta f(z)\frac{d}{dz}f(z) + 2\frac{d}{dz}f(z)\frac{d^2}{dz^2}f(z) + 6\left(\frac{d}{dz}f(z)\right)f^2(z) = 2a\frac{d}{dz}f(z) \quad (2.33)$$

ทำการอินทิเกรต (2.33) เทียบกับตัวแปร z อีกครั้งได้

$$-\beta f^2(z) + \left(\frac{d}{dz}f(z)\right)^2 + 2f^3(z) = 2af(z) + b \quad (2.34)$$

เมื่อ b แทนค่าคงที่ของการอินทิเกรต

ตามความหมายของรีตเชล เมื่อคลื่นเคลื่อนที่ห่างออกจากเรือแล้วความสูงของคลื่นจะลดลงเรื่อย ๆ นั้นหมายความว่า $f(z), \frac{d}{dz}f(z), \frac{d^2}{dz^2}f(z)$ เข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ $z \rightarrow \pm\infty$ ดังนั้นจาก (2.32) และ (2.34) จะได้ว่า $a, b = 0$ นั่นคือ (2.34) สามารถลดลงได้

$$-\beta f^2(z) + \left(\frac{d}{dz}f(z)\right)^2 + 2f^3(z) = 0$$

จัดสมการใหม่ได้

$$\frac{df(z)}{f(z)\sqrt{\beta - 2f(z)}} = dz \quad (2.35)$$

ให้ $w = f(z)$ ดังนั้นเขียนในเทอมของ w ได้

$$\frac{dw}{w\sqrt{\beta-2w}}=dz \quad (2.36)$$

เปลี่ยนตัวแปรเพื่อไม่ให้สับสนโดยให้ $w=w'$ และ $z=z'$ แล้วทำการอินทิเกรตทั้งสองสมการได้

$$\int_{w_0}^w \frac{dw'}{w'\sqrt{\beta-2w'}} = \int_{z_0}^z dz' \quad (2.37)$$

ทำการอินทิเกรตทางซ้ายมือโดยการแทน $w' = \frac{1}{2}\beta \operatorname{sech}^2 v$ ในเทอมของ v

พิจารณา $\beta - 2w'$

$$\beta - 2w' = \beta[1 - \operatorname{sech}^2 v] = \beta \tanh^2 v \quad (2.38)$$

พิจารณา dw'

$$dw' = -\beta \frac{\sinh v}{\cosh^3 v} dv \quad (2.39)$$

พิจารณาช่วงของการอินทิเกรตจาก w_0 ถึง w ในรูปของตัวแปร v

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\beta \operatorname{sech}^2 v & \text{ได้} & v = \sinh^{-1} \sqrt{2w/\beta} \\ w_0 &= \frac{1}{2}\beta \operatorname{sech}^2 v_0 & \text{ได้} & v_0 = \sinh^{-1} \sqrt{2w_0/\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

(2.40)

แทนค่า (2.38) (2.39) (2.40) และ w' ใน (2.37) ได้

$$\begin{aligned} z - z_0 &= -\frac{2}{\sqrt{\beta}} \int_{v_0}^v \frac{1}{\operatorname{sech}^2 v \tanh v \cosh^3 v} \sinh v \, dv \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\beta}} (v - v_0) \end{aligned} \quad (2.41)$$

แทนค่ากลับไปให้อยู่ในเทอมของ $U(\bar{x}, \bar{t}), \bar{x}, \bar{t}$ ดังนี้

$$z = \bar{x} - \beta \bar{t} \quad , \quad w = f(z) = U(\bar{x}, \bar{t}) \quad \text{และเลือก } v_0 = 0 \quad , \quad z_0 = 0$$

ดังนั้น (2.40) จะได้เป็น

$$U(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech}^2 \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\beta} (\bar{x} - \beta \bar{t}) \right]$$

เนื่องจาก $\operatorname{sech}(A) = \operatorname{sech}(-A)$ นั่นคือ

$$U(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\beta}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{\beta}}{2} (\bar{x} - \beta \bar{t}) \right] \quad (2.42)$$

เมื่อทำการแปลงผลเฉลยกลับไปจะได้

$$\eta(x, t) = -\frac{\beta h_0}{3} 6^{2/3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \left(\frac{6^{1/3} x}{h_0} - \beta \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} t \right) \right) - \frac{2h_0}{3} \quad (2.43)$$

จากการศึกษาเกี่ยวกับการศึกษาและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องของสมการ KdV นั้นผู้วิจัยได้ทำการศึกษาใน [3] ได้กล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการ KdV ที่อยู่ในฟอร์ม

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} U - 6U \frac{\partial}{\partial \bar{x}} U + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} U = 0 \quad (2.44)$$

ซึ่งได้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$U(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{\alpha^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\alpha}{2} (\bar{x} - \alpha^2 \bar{t}) \right] \quad (2.45)$$

เมื่อ α เป็นค่าคงที่

ในกระบวนการทางตัวเลข [5], [7] ได้กล่าวถึงกระบวนการ “Leapfrog Finite Defference” - ของ Zabusky – Kruskal เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการ KdV ที่อยู่ในฟอร์ม (2.44) และใช้เงื่อนไขในการจัดสมการ KdV ให้อยู่ในรูปผลต่างดังนี้

1. มวลของ $-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}U_l^n$ คงที่ และค่าขอบเขตของการเป็นคาบ (Periodic Boundary

Condition) $U_l^n = U_{l+n}^n$

2. จะไม่สนใจเทอมของ $\Delta\bar{t}^{-2}$ เพื่อการคงอยู่ของโมเมนตัม $\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}(U_l^n)^2$

3. เงื่อนไขการเป็นเชิงเส้น คือ

$$\frac{\Delta\bar{t}}{(\Delta\bar{x})^3} \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} \left| 2(\Delta\bar{x})^2 U_0 + 1 \right|^{-1}$$

เมื่อ U_0 แทนค่าของ U สูงสุดเมื่อ $\bar{t} = \bar{t}_0$

4. ในการคำนวณค่าเมื่อเวลาถัดไปจะเริ่มที่ $U(\bar{x}, 0)$ และคำนวณหาค่า $U(\bar{x}, \Delta\bar{t})$ เมื่อใช้เงื่อนไขข้างต้นจัดสมการ KdV จะอยู่ในรูปผลต่างคือ

$$U_l^{n+1} = U_l^{n-1} + 2\frac{\Delta\bar{t}}{\Delta\bar{x}}(U_{l+1}^n + U_l^n + U_{l-1}^n)(U_{l+1}^n - U_{l-1}^n) - \frac{\Delta\bar{t}}{(\Delta\bar{x})^3}(U_{l+2}^n - 2U_{l+1}^n + 2U_{l-1}^n - U_{l-2}^n)$$

เมื่อ $U_l^n = U(n\Delta\bar{t}, l\Delta\bar{x})$

จากการศึกษากระบวนการทางตัวเลขใน [6] ได้ทำการแปลงไปสู่ระนาบของฟูเรียร์ (Fourier Space) และใช้กระบวนการ Leapfrog Finite Difference ในการกระทำทางตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยของสมการ KdV ที่อยู่ในฟอร์ม (2.28) และผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytical Solution) คือ

$$U(\bar{x}, \bar{t}) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(k\bar{x} - 4k^3\bar{t} + \eta_0) \quad (2.46)$$

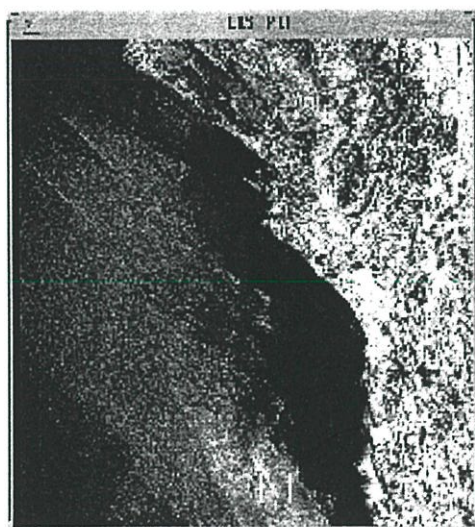
เมื่อ k และ η_0 เป็นค่าคงที่ ซึ่ง $k > 0$

การศึกษาใน [3] ได้ทำการศึกษาแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งได้ใช้สมการ KdV ในการศึกษาและเปรียบเทียบกับภาพโดยใช้เรดาร์ในกระบวนการที่เรียกว่า SAR (Synthetic Aperture Radar) และทำการศึกษาสมการ KdV ที่แก้ไขด้วยซึ่งเรียกว่า Rotate modified extended KdV equation ในการศึกษาของสมการ KdV ได้เปรียบเทียบผลเฉลยที่อยู่ในรูป

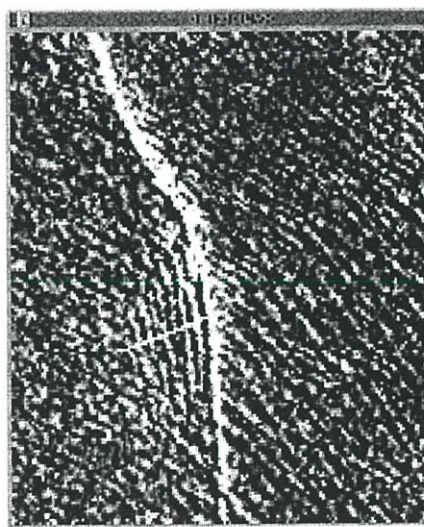
$$\eta(x,t) = \eta_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{(x-x_c) - c_1 t}{L}\right) \quad (2.47)$$

เมื่อ η_0	แทน	ค่าสูงสุดของคลื่นเมื่อเวลา $t=0$
x และ t	แทน	ตำแหน่งและเวลา
x_c	แทน	ตำแหน่งตรงกลางของโซลิตอน
c_1	แทน	ความเร็วเชิงมุม
และ L	แทน	ความยาวครึ่งหนึ่งของโซลิตอน

ในการสังเกตคลื่นจากภาพที่ได้จาก SAR บริเวณ ชายฝั่ง แองโกลา (Angola Coast) เมื่อ 23 กรกฎาคม 1994 ดังรูปที่ 2.2 (a) ขนาด 100 ตารางกิโลเมตร และภาพที่ 2.2 (b) แสดงภาพของโซลิตอนที่เกิดขึ้น ขนาด 6.4 ตารางกิโลเมตร



(a)

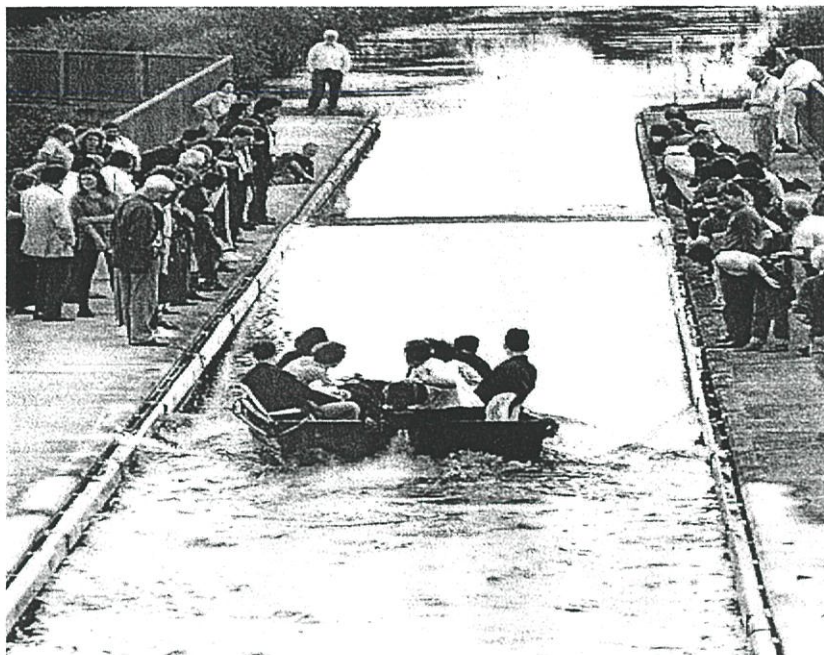


(b)

รูปที่ 2.2 แสดงภาพของโซลิตอนจาก SAR บริเวณ ชายฝั่ง แองโกลา

แหล่งที่มา : จากการศึกษาใน [3] โดย Hafedh HAJJI และคณะ

การศึกษาใน [9] ได้ทำการศึกษาลักษณะของโซลิตอน ในกรณีของโซลิตอนเชิงเดี่ยวและสองโซลิตอน ในการศึกษาได้แสดงภาพการจำลองโซลิตอนจากการสังเกตของ J.Scott Russell ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงการสังเกตคลื่นตามการจดบันทึกของ J.Scott Russell
แหล่งที่มา : Department of Mathematics, Heriot – Watt University.

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินงานวิจัยฉบับนี้ ผู้วิจัยเสนอการศึกษากระบวนการในการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยใช้ สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ย้อนหลัง เกาส์ - ข้างหน้า เกาส์ - ย้อนหลัง สเตอริง และผลต่างส่วนกลาง โดยเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับ (2.43) ตามลำดับ เพื่อพิจารณาหากระบวนการในการประมาณค่าผลเฉลยที่มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยสำหรับค่าสูงสุดของคลื่น ($\eta_{\max}(x,t)$) ตำแหน่งของ x ที่ทำให้ค่าของ $\eta(x,t)$ มีค่ามากที่สุด ตำแหน่งเริ่มต้นและสิ้นสุดของคลื่น โดยกำหนดของ $\eta(x,t) \geq 10^{-5}$ เป็นส่วนของคลื่นที่พิจารณา ซึ่งผลจากกระบวนการทางตัวเลขจะกล่าวต่อไปในบทที่ 4 ของวิทยานิพนธ์นี้

3.1 การประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27)

3.1.1 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า

ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV โดยกระบวนการนี้ผู้วิจัยได้ใช้รูปของสมการและเงื่อนไขดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t) - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0}\right) \frac{\partial}{\partial x}\eta(x,t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\eta(x,t) = 0 \quad (3.1)$$

เงื่อนไขค่าขอบเขตคือ

$$\eta(x,0) = -\frac{\beta h_0}{3} 6^{2/3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \left(\frac{6^{1/3} x}{h_0} \right) \right) - \frac{2h_0}{3} \quad (3.2)$$

ในการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 3 โดยวิธีผลต่าง - ข้างหน้าจะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t) = \frac{\eta(x,t+k) - \eta(x,t)}{k} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+h,t) - \eta(x,t)}{h} \quad (3.4)$$

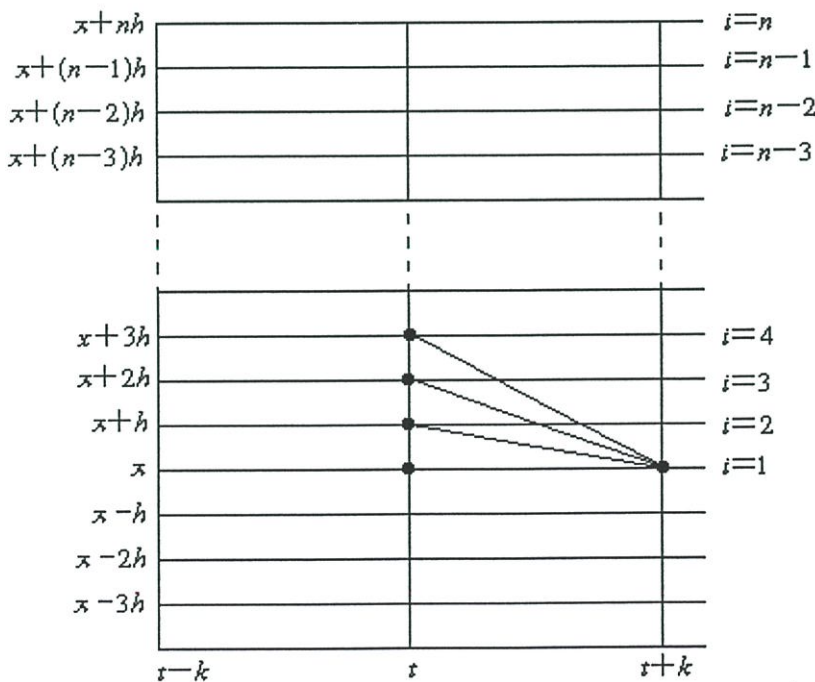
$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+3h,t) - 3\eta(x+2h,t) + 3\eta(x+h,t) - \eta(x,t)}{h^3} \quad (3.5)$$

แทนค่าใน (3.1) เพื่อให้อยู่ในรูปผลต่างจะได้

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t) + k(A-B) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+3h,t) - 3\eta(x+2h,t) + 3\eta(x+h,t) - \eta(x,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการประมาณค่า และเขียนโปรแกรมประมาณผลเฉลยของ (3.1) แสดงดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ขั้นตอน เมื่อใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการประมาณค่า และเขียนโปรแกรมประมาณผลเฉลยของ (3.1) นั้นจะต้องมีการกำหนด (3.6) ใหม่ ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดสำหรับการเขียนโปรแกรม เพื่อประมาณค่าผลเฉลยดังนี้ เมื่ออยู่ที่ขั้นตอนที่ $n-2$ กำหนด (3.6) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t) + k(A-B) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3\eta(x, t)}{2h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h, t) - \eta(x, t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{-3\eta(x+2h, t) + 3\eta(x+h, t) - \eta(x, t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในขั้นตอนที่ $n-1$ กำหนด (3.6) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t) + k(A-B) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3\eta(x, t)}{2h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h, t) - \eta(x, t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{3\eta(x+h, t) - \eta(x, t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

และในขั้นตอนที่ n ผู้วิจัยกำหนด (3.6) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t) + k(A-B) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3\eta(x, t)}{2h_0} \right) \left[\frac{-\eta(x, t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{-\eta(x, t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

3.1.2 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่างของผลต่าง - ย้อนหลัง

ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV โดยกระบวนการนี้ผู้วิจัยได้ใช้รูปของสมการใน (3.1) แต่เงื่อนไขทำการเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\eta(x, t_n) = -\frac{\beta h_0}{3} 6^{2/3} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \left(\frac{6^{1/3} x}{h_0} - \beta \left(\frac{g}{h_0} \right)^{1/2} t_n \right) \right) - \frac{2h_0}{3} \quad (3.10)$$

เมื่อ t_n แทน ช่วงเวลาท้ายสุดที่พิจารณา

ซึ่งในการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 3 โดยวิธีผลต่าง - ย้อนหลังจะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = \frac{\eta(x, t) - \eta(x, t-k)}{k} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x, t) = \frac{\eta(x, t) - \eta(x-h, t)}{h} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta(x, t) = \frac{\eta(x, t) - 3\eta(x-h, t) + 3\eta(x-2h, t) - \eta(x-3h, t)}{h^3} \quad (3.13)$$

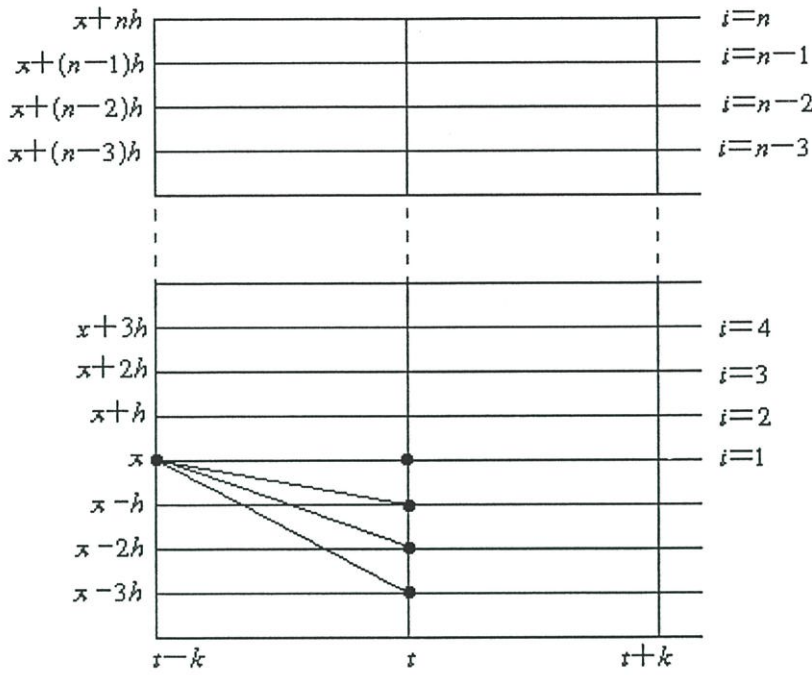
เมื่อแทนค่า (3.11), (3.12) และ (3.13) ใน (3.1) เพื่อให้อยู่ในรูปผลต่างจะได้

$$\eta(x, t-k) = \eta(x, t) - k(A-B) \quad (3.14)$$

$$\text{เมื่อ } A = (gh_0)^{1/2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x, t) - \eta(x-h, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^{1/2} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x, t) - 3\eta(x-h, t) + 3\eta(x-2h, t) - \eta(x-3h, t)}{h^3} \right]$$

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในในการประมาณค่า และเขียนโปรแกรมประมาณผลเฉลยของ (3.1) แสดงดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ชั้นตอน เมื่อใช้สูตรผลต่าง - ย้อนหลัง

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าต้องมีการกำหนด (3.14) ใหม่ในบางชั้นตอน ซึ่งในที่นี้ผู้วิจัยได้กำหนดสำหรับการเขียนโปรแกรม เพื่อประมาณค่าผลเฉลยดังนี้ เมื่ออยู่ที่ชั้นตอนที่ 1 กำหนด (3.14) ให้เป็น

$$\eta(x, t-k) = \eta(x, t) - k(A-B) \quad (3.15)$$

เมื่อ
$$A = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x, t)}{h^3} \right]$$

ในชั้นตอนที่ 2 กำหนด (3.14) ให้เป็น

$$\eta(x, t-k) = \eta(x, t) - k(A-B) \quad (3.16)$$

เมื่อ
$$A = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x, t) - \eta(x-h, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} h_0^2 \left[\frac{\eta(x,t) - 3\eta(x-h,t)}{h^3} \right]$$

และในขั้นตอนที่ 3 ผู้วิจัยกำหนด (3.14) ให้เป็น

$$\eta(x,t-k) = \eta(x,t) - k(A-B) \quad (3.17)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} h_0^2 \left[\frac{\eta(x,t) - 3\eta(x-h,t) + 3\eta(x-2h,t)}{h^3} \right]$$

3.1.3 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่างของเกาส์ - ข้างหน้า

ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV โดยกระบวนการนี้ผู้วิจัยได้ใช้รูปของ (3.1) แต่เงื่อนไขได้เปลี่ยนแปลง เนื่องจากจุดต่าง ๆ ในแต่ละขั้นตอนเหมาะสมกับการประมาณค่าย่อยหลังของแต่ละช่วงเวลา ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดให้เป็นตาม (3.10) และการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 3 โดยวิธีของเกาส์จะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x,t) = \frac{\eta(x,t) + \eta(x,t-k)}{k} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x,t) = \frac{\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+h,t) - 3\eta(x,t) + 3\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \quad (3.20)$$

เมื่อแทนค่า (3.18), (3.19) และ (3.20) ใน (3.1) เพื่อให้อยู่ในรูปผลต่างจะได้

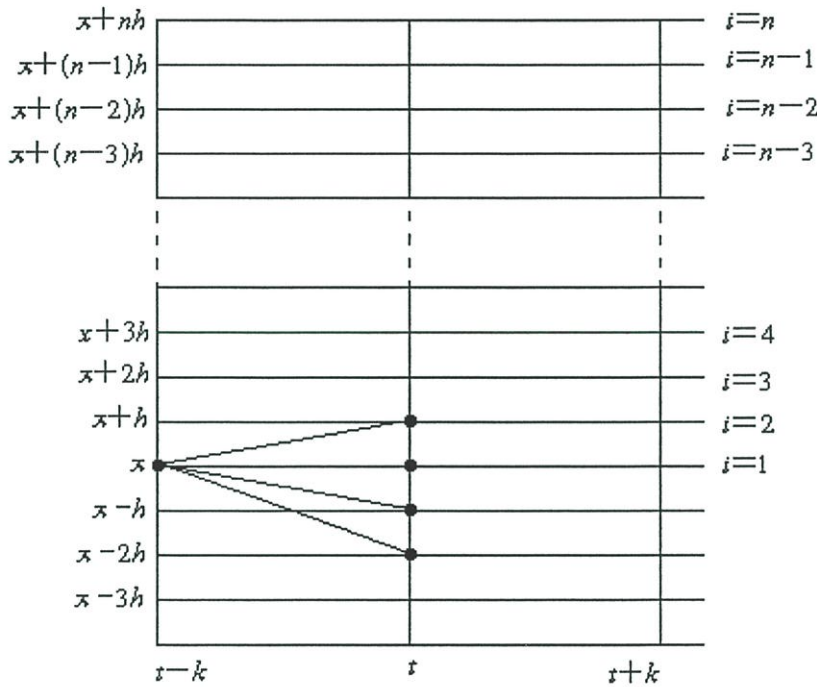
$$\eta(x,t-k) = \eta(x,t) - k(A-B) \quad (3.21)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} h_0^2 \left[\frac{\eta(x+h,t) - 3\eta(x,t) + 3\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right]$$

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการประมาณค่า และเขียนโปรแกรมประมาณผลเฉลยของ (3.1) แสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ขั้นตอน เมื่อใช้สูตรของแกาส์ - ช่างหน้า

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่าในกระบวนการในขั้นที่ 1, 2 และ n ของทุกช่วงเวลาจะต้องมีการกำหนด (3.21) ใหม่ ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดสำหรับการเขียนโปรแกรม เพื่อประมาณค่าผลเฉลย ดังนี้ เมื่ออยู่ที่ขั้นตอนที่ 1 กำหนด (3.21) ให้เป็นดังนี้ เมื่ออยู่ที่ขั้นตอนที่ 1 กำหนด (3.21) ให้เป็น

$$\eta(x, t-k) = \eta(x, t) - k(A-B) \quad (3.22)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} h_0^2 \left[\frac{\eta(x+h,t) - 3\eta(x,t)}{h^3} \right]$$

ในขั้นตอนที่ 2 กำหนด (3.21) ให้เป็น

$$\eta(x,t-k) = \eta(x,t) - k(A-B) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+h,t) - 3\eta(x,t) + 3\eta(x-h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

และในขั้นตอนที่ n ผู้วิจัยกำหนด (3.21) ให้เป็น

$$\eta(x,t-k) = \eta(x,t) - k(A-B) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{-3\eta(x,t) + 3\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

3.1.4 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่างของเกาส์ - ย้อนหลัง

ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV โดยกระบวนการนี้ผู้วิจัยได้ใช้รูปของ (3.1) และเงื่อนไขใน (3.2) ในการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 3 โดยวิธีของเกาส์จะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x,t) = \frac{\eta(x,t+k) - \eta(x,t)}{k} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+h,t) - \eta(x,t)}{h} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+2h,t) - 3\eta(x+h,t) + 3\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h^3} \quad (3.27)$$

เมื่อแทนค่า (3.25), (3.26) และ (3.27) ใน (3.1) เพื่อให้อยู่ในรูปผลต่างจะได้

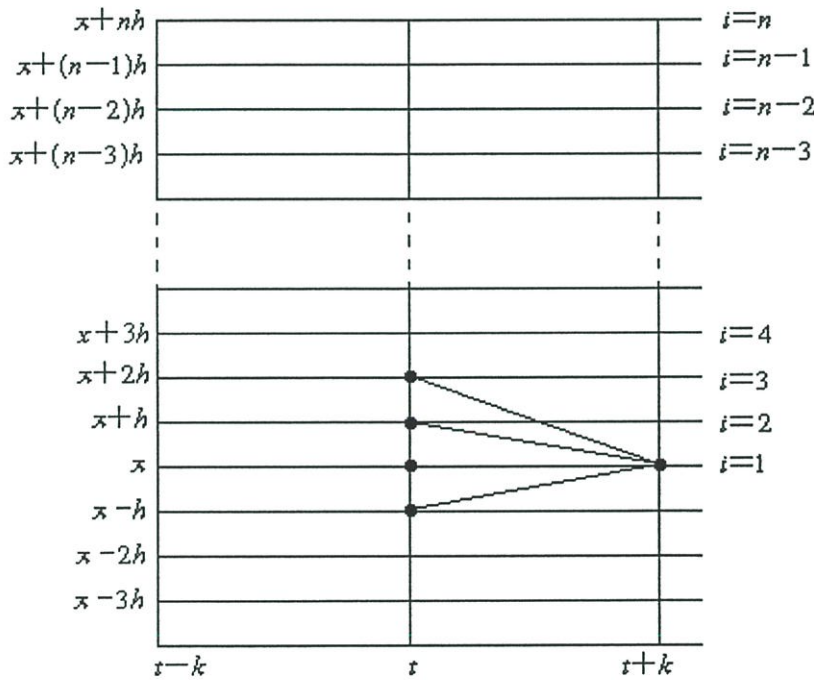
$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t) + k(A-B) \quad (3.28)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h, t) - \eta(x, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} \frac{h_0^2}{h^3} \left[\eta(x+2h, t) - 3\eta(x+h, t) + 3\eta(x, t) - \eta(x-h, t) \right]$$

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการประมาณค่า และเขียนโปรแกรมประมาณผลเฉลยของ (3.1) แสดงดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ขั้นตอน เมื่อใช้สูตรของแก๊ส - ย้อนหลัง

จากรูปที่ 3.4 จะเห็นว่าในกระบวนการในขั้นที่ 1, n และ n-1 ของทุกช่วงเวลาจะต้องมีการกำหนด (3.28) ใหม่ ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดสำหรับการเขียนโปรแกรม เพื่อประมาณค่าผลเฉลยดังนี้ เมื่ออยู่ที่ขั้นตอนที่ 1 กำหนด (3.28) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t) + k(A-B) \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta(x,t)}{2h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+2h,t) - 3\eta(x+h,t) + 3\eta(x,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในขั้นตอนที่ $n-1$ กำหนด (3.28) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t) + k(A-B) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta(x,t)}{2h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{-3\eta(x+h,t) + 3\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

และในขั้นตอนที่ n ผู้วิจัยกำหนด (3.28) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t) + k(A-B) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta(x,t)}{2h_0} \right) \left[\frac{-\eta(x,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{3\eta(x,t) - \eta(x-h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

3.1.5 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่างของสเตอร์ลิง

ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV โดยกระบวนการนี้ผู้วิจัยได้ใช้รูปของสมการและเงื่อนไขใน (3.1) และ (3.2) ซึ่งการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 3 โดยวิธีของสเตอร์ลิงจะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x,t) = \frac{\eta(x,t+k) - \eta(x,t-k)}{2k} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{2h} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+2h,t) - 2\eta(x+h,t) + 2\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{2h^3} \quad (3.34)$$

เมื่อแทนค่า (3.32), (3.33) และ (3.34) ใน (3.1) เพื่อให้อยู่ในรูปผลต่างจะได้

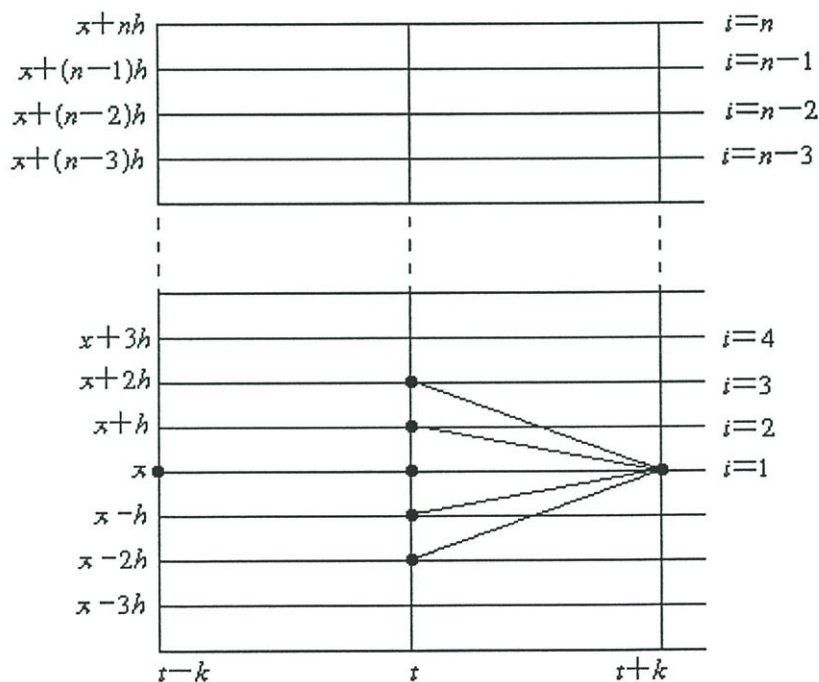
$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t-k) + k(A-B) \quad (3.35)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+2h,t) - 2\eta(x+h,t) + 2\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right]$$

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในในการประมาณค่า และเขียนโปรแกรมประมาณผลเฉลยของ (3.1) แสดงดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ขั้นตอน เมื่อใช้สูตรของสเตอร์ลิง

จากรูปที่ 3.5 จะเห็นว่าในกระบวนการในขั้นที่ 1, 2, $n-1$ และ n ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 และ เวลาขั้นที่ไม่เป็น 1 จะต้องมีการกำหนด (3.35) ใหม่ ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดสำหรับ

การเขียนโปรแกรม เพื่อประมาณค่าผลเฉลยดังนี้ เมื่ออยู่ที่ขั้นตอนที่ 1 ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 กำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = k(A-B) \quad (3.36)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3\eta(x,t)}{2h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+2h,t) - 2\eta(x+h,t)}{h^3} \right]$$

ในขั้นตอนที่ 2 ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 กำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = k(A-B) \quad (3.37)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3\eta(x,t)}{2h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+2h,t) - 2\eta(x+h,t) + 2\eta(x-h,t)}{h^3} \right]$$

ในขั้นตอนที่ $n-1$ ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = k(A-B) \quad (3.38)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3\eta(x,t)}{2h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{-2\eta(x+h,t) + 2\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right]$$

ในขั้นตอนที่ n ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = k(A-B) \quad (3.39)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{-\eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{2\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right]$$

ในขั้นตอนที่ไม่ใช่ขั้นตอน 1, 2, ..., n-1 และ n ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = k(A-B) \quad (3.40)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+2h,t) - 2\eta(x+h,t) + 2\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right]$$

ที่ขั้นตอนที่ 1 ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ขั้นที่ 1 กำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t-k) + k(A-B) \quad (3.41)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+2h,t) - 2\eta(x+h,t)}{h^3} \right]$$

ในขั้นตอนที่ 2 ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ขั้นที่ 1 กำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t-k) + k(A-B) \quad (3.42)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+2h,t) - 2\eta(x+h,t) + 2\eta(x-h,t)}{h^3} \right]$$

ในชั้นตอนที่ $n-1$ ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ชั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t-k) + k(A-B) \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{-2\eta(x+h,t) + 2\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในชั้นตอนที่ n ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ชั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.35) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t-k) + k(A-B) \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{-\eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{2\eta(x-h,t) - \eta(x-2h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

3.1.6 การประมาณค่าผลเฉลย โดยใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง

ในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV โดยกระบวนการนี้ผู้วิจัยได้ใช้รูปของสมการและเงื่อนไขใน (3.1) และ (3.2) ซึ่งการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 3 โดยวิธีของสเตอร์ลิงจะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x,t) = \frac{\eta(x,t+k) - \eta(x,t-k)}{2k} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{2h} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta(x,t) = \frac{\eta(x+3h,t) - \eta(x+h,t) + \eta(x-h,t) - \eta(x-3h,t)}{2h^3} \quad (3.47)$$

เมื่อแทนค่า (3.45), (3.46) และ (3.47) ใน (3.1) เพื่อให้อยู่ในรูปผลต่างจะได้

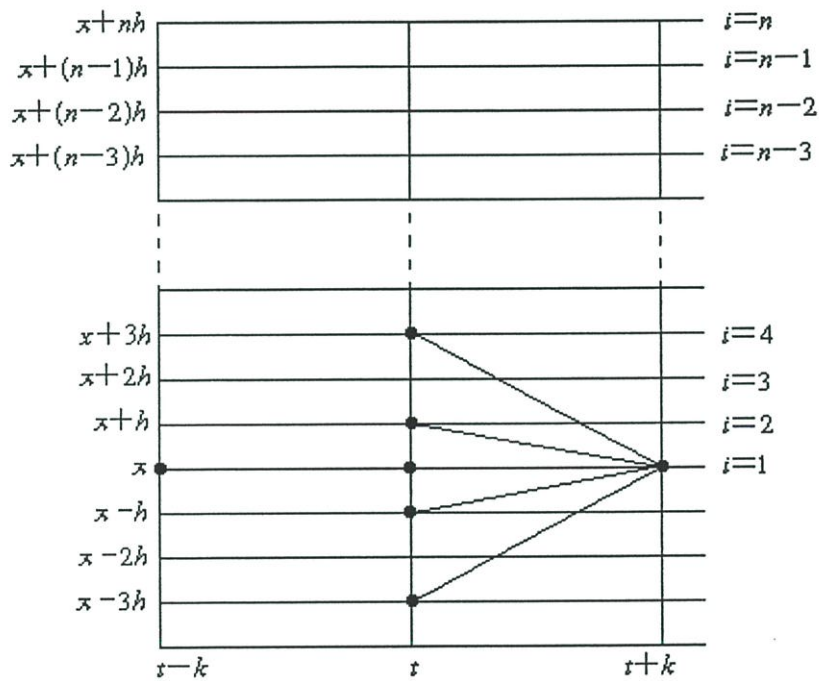
$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t-k) + k(A-B) \quad (3.48)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h, t) - \eta(x-h, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+3h, t) - \eta(x+h, t) + \eta(x-h, t) - \eta(x-3h, t)}{h^3} \right]$$

เมื่อพิจารณาจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในในการประมาณค่า และเขียนโปรแกรมประมาณผลเฉลยของ (3.1) แสดงดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 แสดงจุดต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่า 1 ขั้นตอน เมื่อใช้สูตรผลต่างสี่เหลี่ยมส่วนกลาง

จากรูปที่ 3.6 จะเห็นว่าในกระบวนการในขั้นที่ 1, 2, 3, $n-2$, $n-1$ และ n ของช่วงเวลาที่ขั้นที่ 1 และ เวลาขั้นที่ไม่เป็น 1 จะต้องมีการกำหนด (3.48) ใหม่ ซึ่งผู้วิจัยได้ กำหนดสำหรับการเขียนโปรแกรม เพื่อประมาณค่าผลเฉลยดังนี้ เมื่ออยู่ที่ขั้นตอนที่ 1 ของช่วง เวลาขั้นที่ 1 กำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = k(A-B) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+3h,t) - \eta(x+h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในขั้นตอนที่ 2 และ 3 ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 กำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = k(A-B) \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+3h,t) - \eta(x+h,t) + \eta(x-h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในขั้นตอนที่ $n-1$ และ $n-2$ ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = k(A-B) \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{-\eta(x+h,t) + \eta(x-h,t) - \eta(x-3h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในขั้นตอนที่ n ของช่วงเวลาขั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = k(A-B) \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{-\eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x-h,t) - \eta(x-3h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในชั้นตอนที่ไม่ใช่ชั้นตอน 1, 2, $n-1$ และ n ของช่วงเวลาชั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = k(A-B) \quad (3.53)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h, t) - \eta(x-h, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} \frac{h_0^2}{h^3} \left[\eta(x+3h, t) - \eta(x+h, t) + \eta(x-h, t) - \eta(x-3h, t) \right]$$

ที่ชั้นตอนที่ 1 ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ชั้นที่ 1 กำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t-k) + k(A-B) \quad (3.54)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} \frac{h_0^2}{h^3} \left[\eta(x+3h, t) - \eta(x+h, t) + \eta(x-h, t) \right]$$

ในชั้นตอนที่ 2 และ 3 ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ชั้นที่ 1 กำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t-k) + k(A-B) \quad (3.55)$$

เมื่อ

$$A = (gh_0)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x, t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h, t) - \eta(x-h, t)}{h} \right]$$

$$B = (gh_0)^2 \frac{1}{6} \frac{h_0^2}{h^3} \left[\eta(x+3h, t) - \eta(x+h, t) + \eta(x-h, t) \right]$$

ในชั้นตอนที่ $n-1$ และ $n-2$ ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ชั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x, t+k) = \eta(x, t-k) + k(A-B) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{\eta(x+h,t) - \eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x+h,t) + \eta(x-h,t) - \eta(x-3h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

ในขั้นตอนที่ n ของช่วงเวลาที่ไม่ใช่ขั้นที่ 1 ผู้วิจัยกำหนด (3.48) ให้เป็น

$$\eta(x,t+k) = \eta(x,t-k) + k(A-B) \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } A &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta(x,t)}{h_0} \right) \left[\frac{-\eta(x-h,t)}{h} \right] \\ B &= (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \left[\frac{\eta(x-h,t) - \eta(x-3h,t)}{h^3} \right] \end{aligned}$$

3.2 การเลือกตัวเลขในการการศึกษา

ในการเลือกตัวเลขที่จะทำการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนจำเป็นอย่างมากในการศึกษา ซึ่งถ้าเลือกค่าตัวเลขที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของสมการ KdV ในกรณีของคลื่นน้ำที่กล่าวในบทที่ 2 นั้นค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จะไม่ใช่ค่าคลาดเคลื่อนที่ต้องการศึกษา ในการศึกษาทางตัวเลขผู้วิจัยได้ทำการศึกษาดังข้อสังเกต ในการตัดพจน์ของตัวเลขในอนุกรม คือ

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{h_0} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\eta}{h_0} \right)^2 + \dots \right]$$

ดังนั้นค่าของ $\frac{1}{8} \left(\frac{\eta}{h_0} \right)^2$ จะต้องมีค่าน้อย จึงจะทำการตั้งทิ้งได้ และจากการแปลงจากระนาบของ $\eta(x,t)$ ไปยังระนาบ $U(\bar{x}, \bar{t})$ น่าจะช่วยในการหาตัวเลขในการศึกษาในงานวิจัยนี้ได้ จาก

$$U = -6 \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right), \quad \bar{x} = 6^{\frac{1}{3}} \frac{x}{h_0}, \quad \bar{t} = \left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

เมื่อพิจารณา $\eta(x,t)$ และ $U(\bar{x}, \bar{t})$

$$U = -6 \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right)$$

$$\frac{\eta}{h_0} = -\frac{2}{3} \left(6^{\frac{2}{3}} U + 1 \right)$$

$$\eta = -\frac{2h_0}{3} \left(6^{\frac{2}{3}} U + 1 \right) \quad (2.58)$$

จาก (2.58) ผู้วิจัยได้แสดงค่าของ η ที่ระดับความลึกของน้ำที่ต่างกัน เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2 แสดงดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2

และ $h_0 = 100$

h_0	U	η	η/h_0	h_0	U	η	η/h_0
100	2.0	-506.9236	-5.0692	100	-2.0	373.5903	3.7359
100	1.9	-484.9108	-4.8491	100	-1.9	351.5775	3.5158
100	1.8	-462.8979	-4.6290	100	-1.8	329.5646	3.2956
100	1.7	-440.8851	-4.4089	100	-1.7	307.5518	3.0755
100	1.6	-418.8722	-4.1887	100	-1.6	285.5389	2.8554
100	1.5	-396.8594	-3.9686	100	-1.5	263.5261	2.6353
100	1.4	-374.8465	-3.7485	100	-1.4	241.5132	2.4151
100	1.3	-352.8337	-3.5283	100	-1.3	219.5004	2.1950
100	1.2	-330.8208	-3.3082	100	-1.2	197.4875	1.9749
100	1.1	-308.8080	-3.0881	100	-1.1	175.4747	1.7547
100	1.0	-286.7951	-2.8680	100	-1.0	153.4618	1.5346
100	0.9	-264.7823	-2.6478	100	-0.9	131.4490	1.3145
100	0.8	-242.7695	-2.4277	100	-0.8	109.4361	1.0944
100	0.7	-220.7566	-2.2076	100	-0.7	87.4233	0.8742
100	0.6	-198.7438	-1.9874	100	-0.6	65.4104	0.6541
100	0.5	-176.7309	-1.7673	100	-0.5	43.3976	0.4340
100	0.4	-154.7181	-1.5472	100	-0.4	21.3847	0.2138
100	0.3	-132.7052	-1.3271	100	-0.3	-0.6281	-0.0063
100	0.2	-110.6924	-1.1069	100	-0.2	-22.6410	-0.2264
100	0.1	-88.6795	-0.8868	100	-0.1	-44.6538	-0.4465

จากตารางที่ 3.1 จะเห็นว่าที่ระดับความลึก $h_0 = 100$ ค่าของ $U = -0.3$, $\eta = -0.6281$

และ $\frac{\eta}{h_0} = -0.0063$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาว่า $\frac{1}{8} \left(\frac{\eta}{h_0} \right)^2$ จะให้ค่าน้อยตามไปด้วย

ตารางที่ 3.2 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2
และ $h_0 = 200$

h_0	U	η	η/h_0	h_0	U	η	η/h_0
200	2.0	-1013.8473	-5.0692	200	-2.0	747.1806	3.7359
200	1.9	-969.8216	-4.8491	200	-1.9	703.1549	3.5158
200	1.8	-925.7959	-4.6290	200	-1.8	659.1292	3.2956
200	1.7	-881.7702	-4.4089	200	-1.7	615.1035	3.0755
200	1.6	-837.7445	-4.1887	200	-1.6	571.0778	2.8554
200	1.5	-793.7188	-3.9686	200	-1.5	527.0521	2.6353
200	1.4	-749.6931	-3.7485	200	-1.4	483.0264	2.4151
200	1.3	-705.6674	-3.5283	200	-1.3	439.0007	2.1950
200	1.2	-661.6417	-3.3082	200	-1.2	394.9750	1.9749
200	1.1	-617.6160	-3.0881	200	-1.1	350.9493	1.7547
200	1.0	-573.5903	-2.8680	200	-1.0	306.9236	1.5346
200	0.9	-529.5646	-2.6478	200	-0.9	262.8979	1.3145
200	0.8	-485.5389	-2.4277	200	-0.8	218.8722	1.0944
200	0.7	-441.5132	-2.2076	200	-0.7	174.8465	0.8742
200	0.6	-397.4875	-1.9874	200	-0.6	130.8208	0.6541
200	0.5	-353.4618	-1.7673	200	-0.5	86.7951	0.4340
200	0.4	-309.4361	-1.5472	200	-0.4	42.7695	0.2138
200	0.3	-265.4104	-1.3271	200	-0.3	-1.2562	-0.0063
200	0.2	-221.3847	-1.1069	200	-0.2	-45.2819	-0.2264
200	0.1	-177.3590	-0.8868	200	-0.1	-89.3076	-0.4465

จากตารางที่ 3.2 จะเห็นว่าที่ระดับความลึก $h_0 = 200$ ค่าของ $U = -0.3$, $\eta = -1.2562$

และ $\frac{\eta}{h_0} = -0.0063$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาค่า $\frac{1}{8} \left(\frac{\eta}{h_0} \right)^2$ จะให้ค่าน้อย

ตารางที่ 3.3 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2
และ $h_0 = 300$

h_0	U	η	η/h_0	h_0	U	η	η/h_0
300	2.0	-1520.7709	-5.0692	300	-2.0	1120.7709	3.7359
300	1.9	-1454.7324	-4.8491	300	-1.9	1054.7324	3.5158
300	1.8	-1388.6938	-4.6290	300	-1.8	988.6938	3.2956
300	1.7	-1322.6553	-4.4089	300	-1.7	922.6553	3.0755
300	1.6	-1256.6167	-4.1887	300	-1.6	856.6167	2.8554
300	1.5	-1190.5782	-3.9686	300	-1.5	790.5782	2.6353
300	1.4	-1124.5396	-3.7485	300	-1.4	724.5396	2.4151
300	1.3	-1058.5011	-3.5283	300	-1.3	658.5011	2.1950
300	1.2	-992.4625	-3.3082	300	-1.2	592.4625	1.9749
300	1.1	-926.4240	-3.0881	300	-1.1	526.4240	1.7547
300	1.0	-860.3854	-2.8680	300	-1.0	460.3854	1.5346
300	0.9	-794.3469	-2.6478	300	-0.9	394.3469	1.3145
300	0.8	-728.3084	-2.4277	300	-0.8	328.3084	1.0944
300	0.7	-662.2698	-2.2076	300	-0.7	262.2698	0.8742
300	0.6	-596.2313	-1.9874	300	-0.6	196.2313	0.6541
300	0.5	-530.1927	-1.7673	300	-0.5	130.1927	0.4340
300	0.4	-464.1542	-1.5472	300	-0.4	64.1542	0.2138
300	0.3	-398.1156	-1.3271	300	-0.3	-1.8844	-0.0063
300	0.2	-332.0771	-1.1069	300	-0.2	-67.9229	-0.2264
300	0.1	-266.0385	-0.8868	300	-0.1	-133.9615	-0.4465

จากตารางที่ 3.3 จะเห็นว่าที่ระดับความลึก $h_0 = 300$ ค่าของ $U = -0.3$, $\eta = -1.8844$

และ $\frac{\eta}{h_0} = -0.0063$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาค่า $\frac{1}{8} \left(\frac{\eta}{h_0} \right)^2$ จะให้ค่าน้อย

ตารางที่ 3.4 แสดงค่าของ η เมื่อ U เป็นตัวแปรต้นที่อยู่ระหว่าง -2 ถึง 2
และ $h_0 = 400$

h_0	U	η	η/h_0	h_0	U	η	η/h_0
400	2.0	-2027.6945	-5.0692	400	-2.0	1494.3612	3.7359
400	1.9	-1939.6431	-4.8491	400	-1.9	1406.3098	3.5158
400	1.8	-1851.5917	-4.6290	400	-1.8	1318.2584	3.2956
400	1.7	-1763.5404	-4.4089	400	-1.7	1230.2070	3.0755
400	1.6	-1675.4890	-4.1887	400	-1.6	1142.1556	2.8554
400	1.5	-1587.4376	-3.9686	400	-1.5	1054.1042	2.6353
400	1.4	-1499.3862	-3.7485	400	-1.4	966.0528	2.4151
400	1.3	-1411.3348	-3.5283	400	-1.3	878.0014	2.1950
400	1.2	-1323.2834	-3.3082	400	-1.2	789.9501	1.9749
400	1.1	-1235.2320	-3.0881	400	-1.1	701.8987	1.7547
400	1.0	-1147.1806	-2.8680	400	-1.0	613.8473	1.5346
400	0.9	-1059.1292	-2.6478	400	-0.9	525.7959	1.3145
400	0.8	-971.0778	-2.4277	400	-0.8	437.7445	1.0944
400	0.7	-883.0264	-2.2076	400	-0.7	349.6931	0.8742
400	0.6	-794.9750	-1.9874	400	-0.6	261.6417	0.6541
400	0.5	-706.9236	-1.7673	400	-0.5	173.5903	0.4340
400	0.4	-618.8722	-1.5472	400	-0.4	85.5389	0.2138
400	0.3	-530.8208	-1.3271	400	-0.3	-2.5125	-0.0063
400	0.2	-442.7695	-1.1069	400	-0.2	-90.5639	-0.2264
400	0.1	-354.7181	-0.8868	400	-0.1	-178.6153	-0.4465

จากตารางที่ 3.4 จะเห็นว่าที่ระดับความลึก $h_0 = 400$ ค่าของ $U = -0.3$, $\eta = -2.5125$

และ $\frac{\eta}{h_0} = -0.0063$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาค่า $\frac{1}{8} \left(\frac{\eta}{h_0} \right)^2$ จะให้ค่าน้อยคล้ายกับที่ระดับความลึก

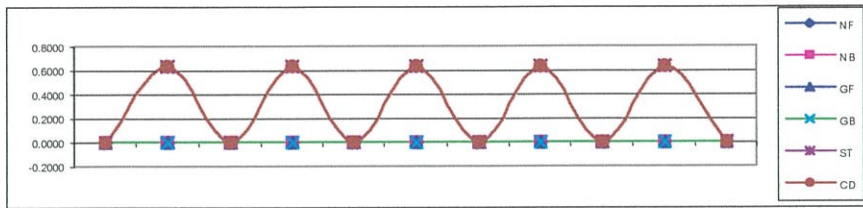
h_0 เป็น 100 , 200 , 300 ดังนั้นผู้วิจัยได้พยายามที่จะหาค่าของ β ซึ่งพบว่าค่า $\beta = 0.0057$

ที่ให้ค่าของ U และ η สอดคล้องกับตารางที่ 3.1 ถึง 3.4 ซึ่งให้ค่าของ $\frac{\eta}{h_0}$ มีค่าน้อย

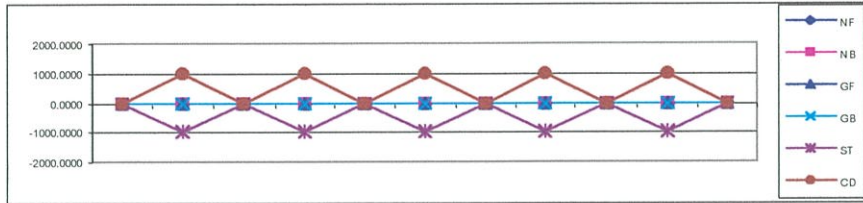
บทที่ 4

ผลงานวิจัย

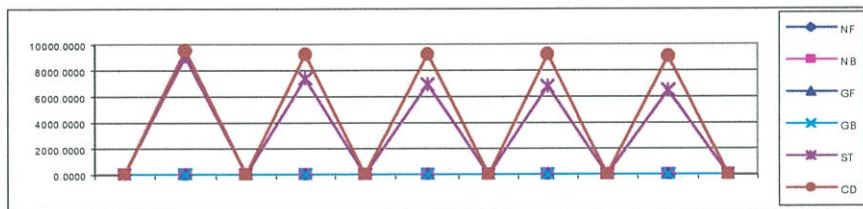
จากการศึกษาโดยใช้กระบวนการทางตัวเลขในบทที่ 3 นั้น ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน โดยกระบวนการในขั้นตอนที่ 3.1 ผู้วิจัยทำการศึกษาเกี่ยวกับผลที่เปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อยของความลึกของน้ำในระดับปกติ (h_0) ระยะห่างของระยะทาง (Δx) และระยะห่างของช่วงเวลา (Δt) ว่าจะมีผลอย่างไร ต่อผลเฉลยที่ได้จากการประมาณค่าโดยใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ย้อนหลัง เกาส์ - ข้างหน้า เกาส์ - ย้อนหลัง สเตอริง และสูตรผลต่างส่วนกลาง เปรียบเทียบกับผลเฉลยของ (2.43) ในการศึกษาผู้วิจัยสนใจส่วนประกอบของคลื่นเชิงเดี่ยวที่เกิดขึ้น ได้แก่ ค่าความสูงของคลื่น ตำแหน่งของคลื่นที่สูงที่สุด ระยะเริ่มต้นของคลื่น และระยะสิ้นสุดของคลื่น ตามลำดับ โดยในที่นี้ผู้วิจัยได้กำหนดค่าเริ่มต้นของคลื่นที่ตำแหน่ง $\eta(x,t) \geq 1 \times 10^{-5}$ และค่าสิ้นสุดของคลื่นที่ตำแหน่ง $\eta(x,t) \leq 1 \times 10^{-5}$ โดยแยกกรณีศึกษาออกทีละตัวแปร ในการศึกษาเกี่ยวกับค่า h_0 ที่เปลี่ยนไปเล็กน้อยจะมีผลอย่างไรกับกระบวนการทางตัวเลขเมื่อเทียบกับผลเฉลยใน (2.43) นั้นผู้วิจัยได้กำหนด h_0 ให้เป็น 100 , 200 , 300 และ 400 เมตร ซึ่งค่าคงที่อื่นไม่เปลี่ยนแปลง คือ $\Delta x = 0.5$ เมตร บนช่วง $[-65000, 65,000]$ และ $\Delta t = 5 \times 10^{-7}$ วินาที บนช่วง $[0, 5 \times 10^{-6}]$ ผลของค่าคลาดเคลื่อนจากกระบวนการทางตัวเลขแสดงในรูปที่ 4.1 ถึงรูปที่ 4.4 ในการศึกษาเกี่ยวกับระยะห่างของระยะทางที่เปลี่ยนไปเล็กน้อยจะมีผลอย่างไรกับกระบวนการทางตัวเลขเมื่อเทียบกับผลเฉลยใน (2.43) นั้นผู้วิจัยได้กำหนดค่า Δx ในการศึกษาให้เป็น 0.2 , 0.3 , 0.4 และ 0.5 เมตร บนช่วง $[-65000, 65,000]$ ซึ่งค่าคงที่อื่น ๆ นั้นผู้วิจัยกำหนดให้คงที่ดังนี้ คือ $\Delta t = 5 \times 10^{-7}$ วินาที บนช่วง $[0, 5 \times 10^{-6}]$ และ $h_0 = 400$ ผลของค่าคลาดเคลื่อนจากกระบวนการทางตัวเลขแสดงในรูปที่ 4.5 ถึงตารางที่ 4.8 ในการศึกษาเกี่ยวกับระยะห่างของเวลาที่เปลี่ยนไปเล็กน้อยจะมีผลอย่างไรกับกระบวนการทางตัวเลขเมื่อเทียบกับผลเฉลยใน (2.43) นั้นผู้วิจัยได้กำหนดค่า Δt ในการศึกษาให้เป็น 5×10^{-7} , 6×10^{-7} , 7×10^{-7} และ 8×10^{-7} วินาที บนช่วงเวลา $[0, 5 \times 10^{-6}]$, $[0, 6 \times 10^{-6}]$, $[0, 7 \times 10^{-6}]$ และ $[0, 8 \times 10^{-6}]$ ตามลำดับ เพื่อให้ได้ช่วงของเวลาในการเปรียบเทียบ 11 ช่วงเวลา ซึ่งค่าคงที่อื่น ๆ นั้นผู้วิจัยได้กำหนดให้เป็นค่าคงที่ คือ $\Delta x = 0.5$ เมตร บนช่วง $[-65000, 65,000]$ และ $h_0 = 400$ เมตร ผลของค่าคลาดเคลื่อนจากกระบวนการทางตัวเลขแสดงในรูปที่ 4.9 ถึงรูปที่ 4.12



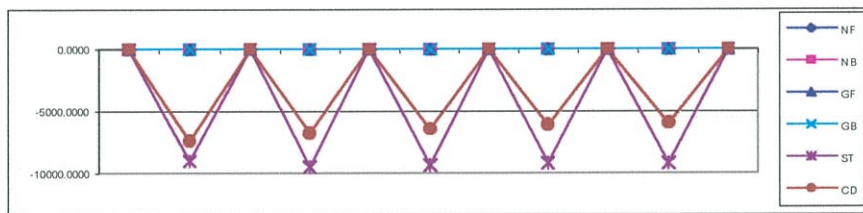
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 4.1 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0 = 100$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1

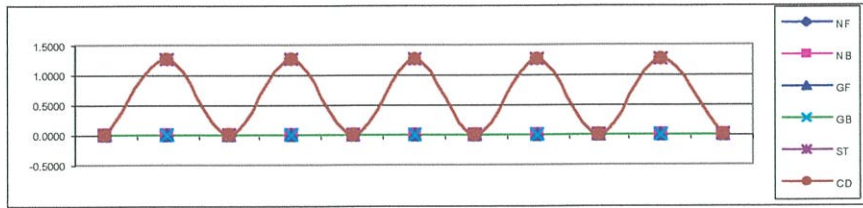
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2

GF แทนกระบวนการใน 3.1.3

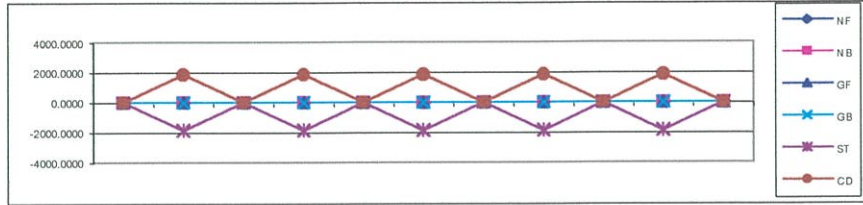
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4

ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

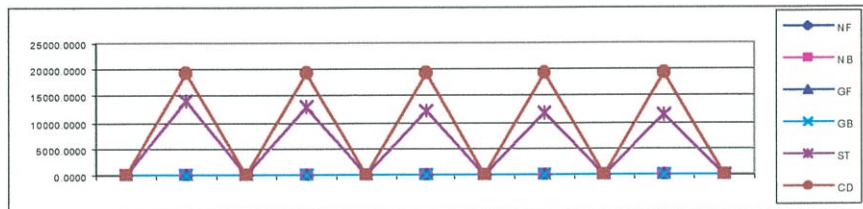
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



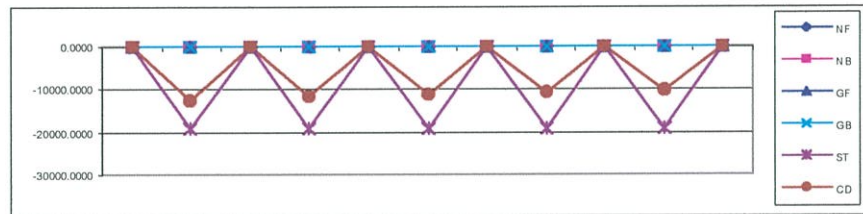
(ก)



(ข)



(ค)

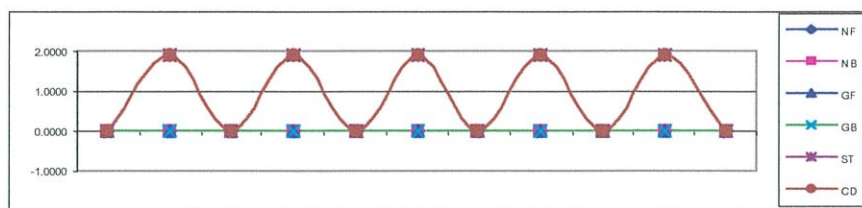


(ง)

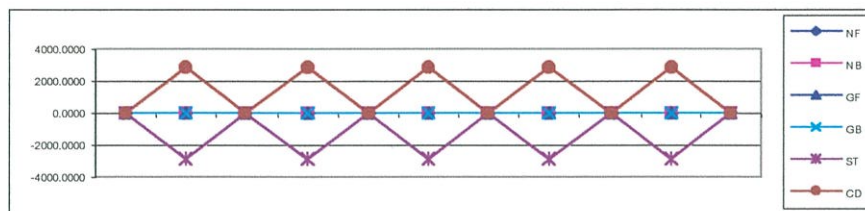
รูปที่ 4.2 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0 = 200$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

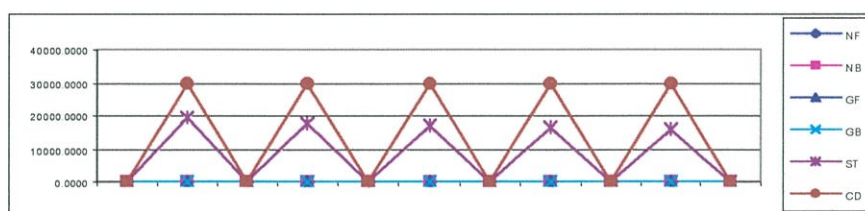
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



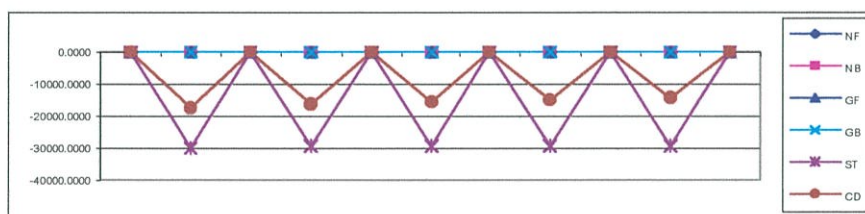
(ก)



(ข)



(ค)

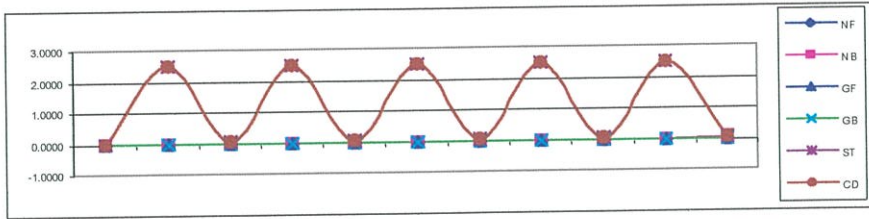


(ง)

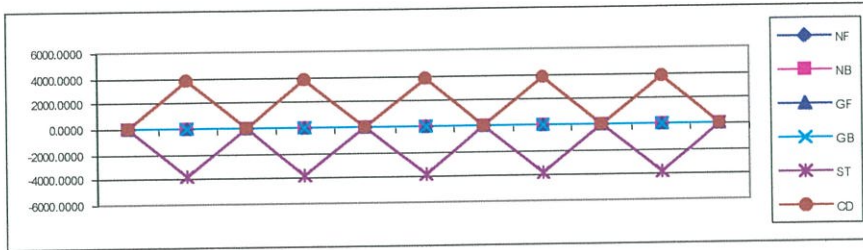
รูปที่ 4.3 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0 = 300$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

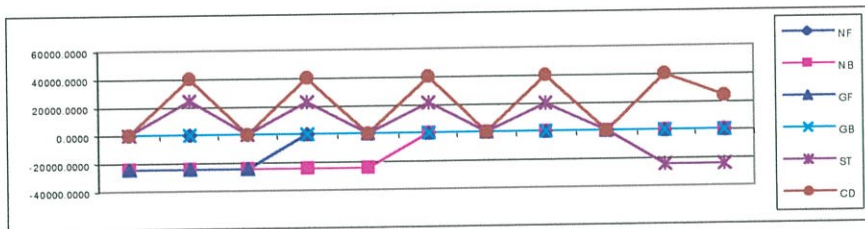
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



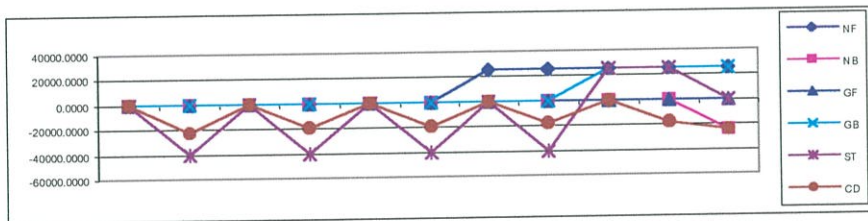
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 4.4 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $h_0 = 400$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
 GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
 ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
 GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
 CD แทนกระบวนการใน 3.1.6

ในการศึกษาเกี่ยวกับผลการเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อยของค่า h_0 จะมีผลอย่างไรต่อการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยเทียบกับผลเฉลยของ (2.43) ผู้วิจัยได้กำหนดค่าของ h_0 ในการศึกษาเป็น 100 , 200 , 300 และ 400 เมตร โดยที่ค่าอื่นคงที่ คือ ช่วงของระยะทางเป็น $[-65,000,65,000]$ ซึ่ง $\Delta x=0.5$ เมตร ช่วงของเวลาเป็น $[0,5 \times 10^{-6}]$ ซึ่ง $\Delta t=5 \times 10^{-7}$ วินาทีและค่าคงที่ $\beta=0.0057$

ซึ่งผลของการศึกษาพบว่าเมื่อผู้วิจัยใช้ค่าของ $h_0=100$ เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดของคลื่นคลาดเคลื่อนมากที่สุดของทั้ง 6 วิธี เป็น 0.6 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยคือกระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดอยู่ที่ 10^3 เมตรซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือกระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้นที่กำหนดเป็น $\eta(x,t) \leq 10^{-5}$ เมตร พบว่าค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 9×10^3 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุดที่กำหนดเป็น $\eta(x,t) \geq 10^{-5}$ เมตร พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดประมาณ -9×10^3 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง

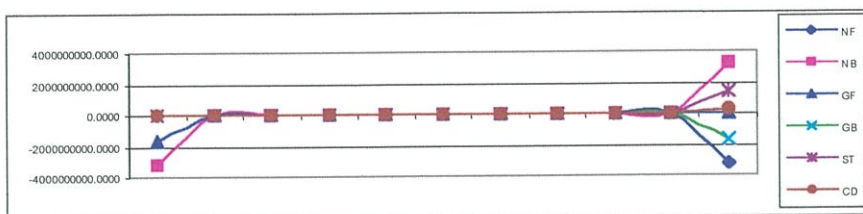
เมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนค่าของ $h_0=200$ เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 1.15 เมตรซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2×10^3 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้น พบว่าค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดประมาณ 2×10^4 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุด ประมาณ -2×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง

เมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนค่าของ h_0 เป็น 300 เมตร ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะคล้ายกับเมื่อ h_0 เป็น 100 และ 200 เมตร แต่ค่าคลาดเคลื่อนได้เพิ่มขึ้นจากเดิมคือ ค่าสูงสุดของคลื่นเพิ่มขึ้นประมาณ 2 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งค่าสูงสุดประมาณ 2×10^3 เมตร ค่าคลาดเคลื่อน

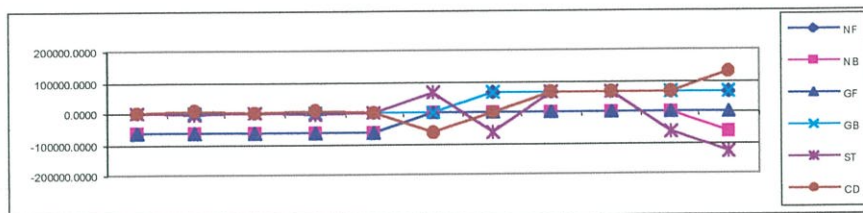
ของตำแหน่งเริ่มต้นเป็นประมาณ 3×10^4 เมตร และค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดของตำแหน่งสิ้นสุดเป็นประมาณ -3×10^4 เมตร

เมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนค่าของ h_0 เป็น 400 เมตร ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นของค่าสูงสุดและตำแหน่งของค่าสูงสุดจะคล้ายกับค่าเมื่อ h_0 เป็น 100 200 300 เมตร แต่จะมีค่าเพิ่มขึ้นเป็นประมาณ 2.5 และ 4×10^3 เมตร ตามลำดับ ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้นมีค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า และแก๊ส - ข้างหน้า ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุดพบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า และแก๊ส - ย้อนหลัง

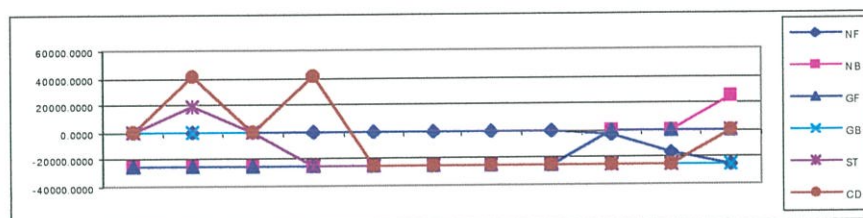
จากการพิจารณาผลทางตัวเลขในการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) เทียบกับ (2.43) พบว่า กระบวนการเมื่อใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง แก๊ส - ข้างหน้า และแก๊ส - ย้อนหลัง จะให้ผลในการประมาณค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของ (2.27) ที่ h_0 เป็น 100 200 300 และ 400 เมตร สำหรับการประมาณค่าของค่าสูงสุดและตำแหน่งของค่าสูงสุด แต่ในการประมาณค่าตำแหน่งเริ่มต้นและสิ้นสุดนั้น จะประมาณค่าใกล้เคียงที่ h_0 เป็น 100 200 และ 300 เมตร เท่านั้น



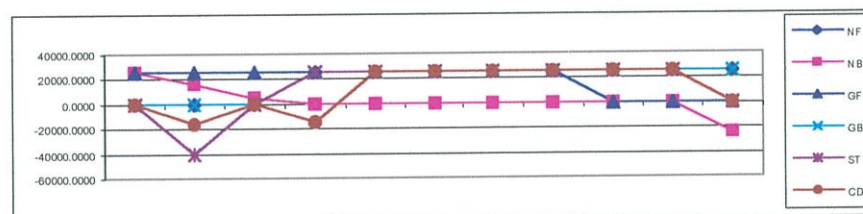
(ก)



(ข)



(ค)

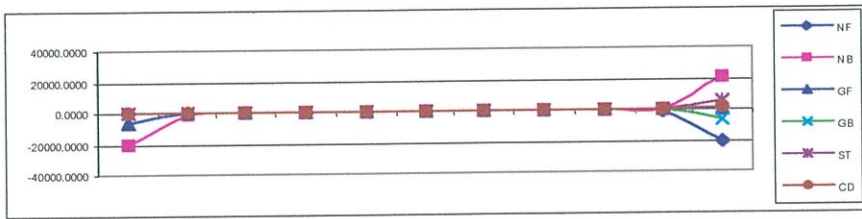


(ง)

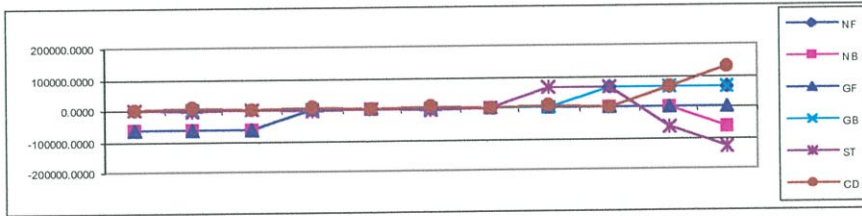
รูปที่ 4.5 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x = 0.2$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

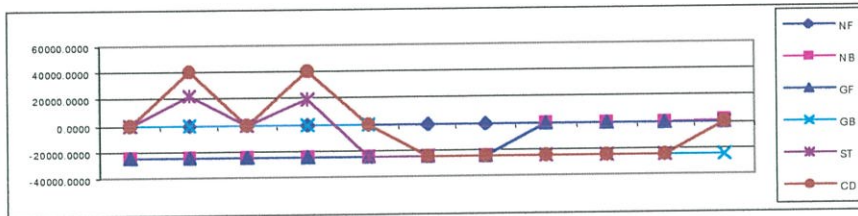
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



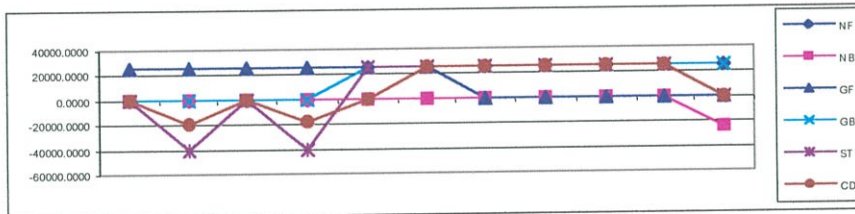
(ก)



(ข)



(ค)

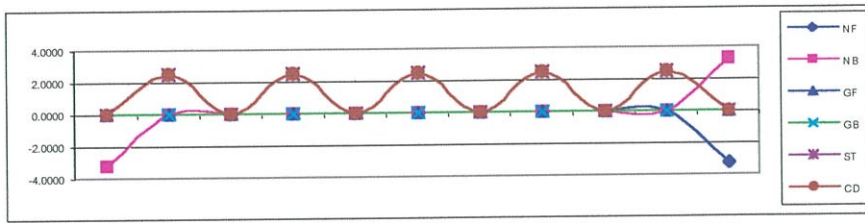


(ง)

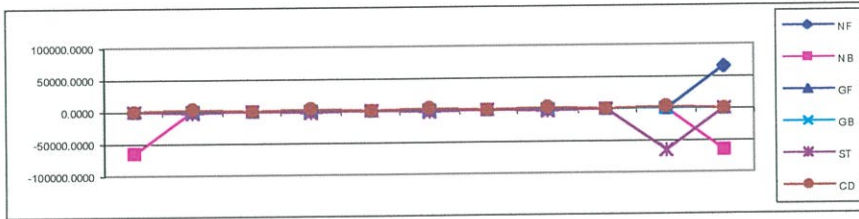
รูปที่ 4.6 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x = 0.3$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

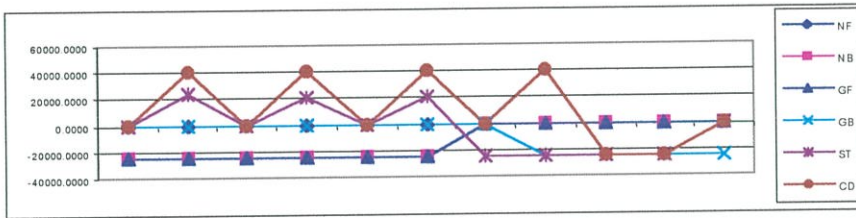
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



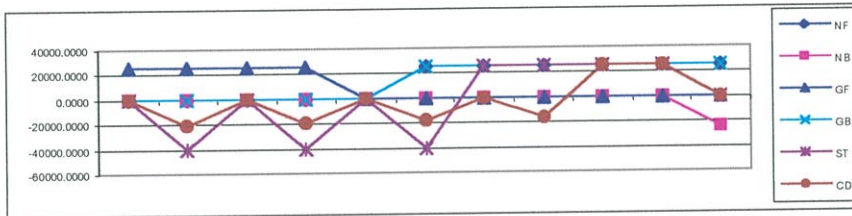
(ก)



(ข)



(ค)

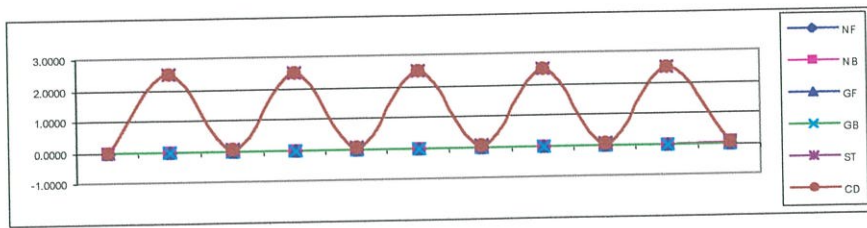


(ง)

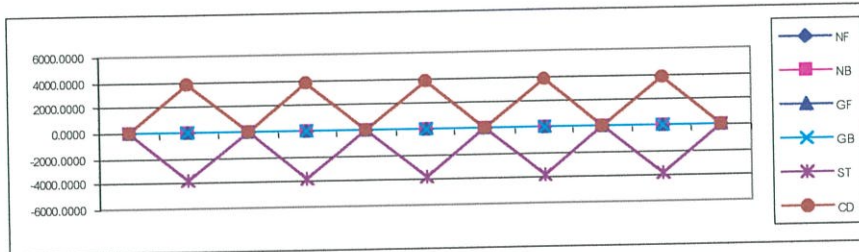
รูปที่ 4.7 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x = 0.4$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

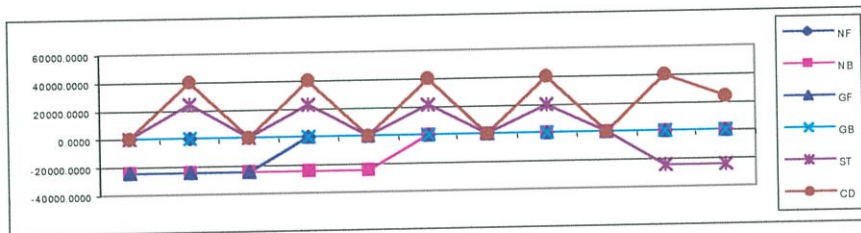
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



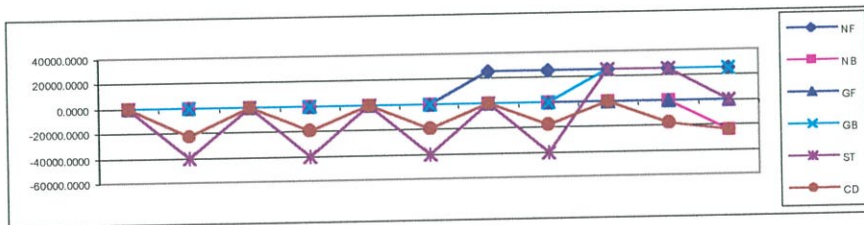
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 4.8 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta x = 0.5$ เมตร ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6

ในการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนของ (2.27) เทียบกับ (2.43) เมื่อค่าของช่วงห่างของระยะทางมีค่าเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยผู้วิจัยได้กำหนดค่าของ Δx เป็น 0.2 0.3 0.4 และ 0.5 เมตร บน ช่วง $[-65,000,65,000]$ ซึ่งค่าอื่น ๆ ลงที่ คือ ช่วงของเวลาเป็น $[0,5 \times 10^{-6}]$ โดยมีช่วงห่าง เป็น 5×10^{-7} วินาที ที่ระดับความลึกของน้ำที่ไม่ถูกลบกวอนเป็น 400 เมตร และค่าคงที่ $\beta = 0.0057$

เมื่อพิจารณาที่ Δx เป็น 0.2 เมตร พบว่าค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 3×10^9 เมตร โดยกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุดพบว่าค่าคลาดเคลื่อนอยู่ที่ประมาณ 1.5×10^5 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างของเกาส์-ข้างหน้า และเกาส์-ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้นพบว่าค่าคลาดเคลื่อนอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง-ข้างหน้าและผลต่าง-ข้างหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง-ข้างหลัง

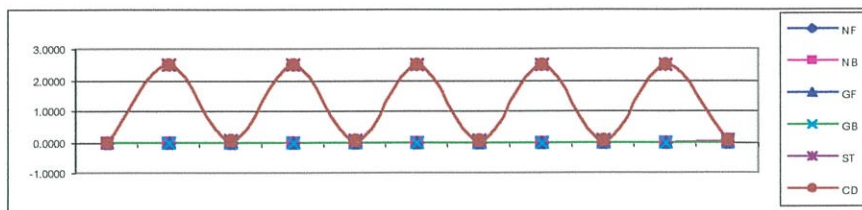
พิจารณาที่ Δx เป็น 0.3 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2×10^3 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างส่วนกลาง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 1.5×10^5 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้น พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร

พิจารณาที่ Δx เป็น 0.4 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 3 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างของเกาส์-ข้างหน้า และเกาส์-ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 1.5×10^5 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้น พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร

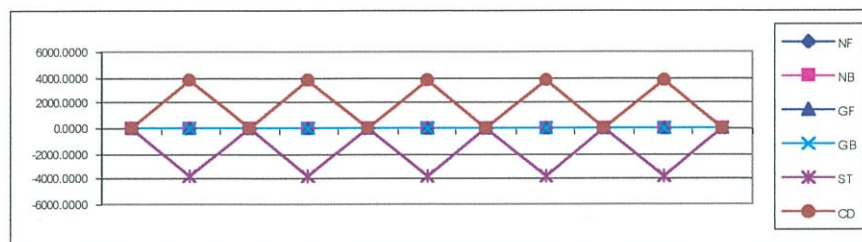
พิจารณาที่ Δx เป็น 0.5 เมตร ค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2.5 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง-ข้างหน้า ผลต่าง-ข้างหลัง เกาส์-ข้างหน้า และเกาส์-ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่ามากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^3 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง-ข้างหน้า ผลต่าง-ข้างหลัง เกาส์-ข้างหน้า และเกาส์-ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้น พบว่ามากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อน

น้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า และแก๊ส - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุด พบว่ามากที่สุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างของแก๊ส - ข้างหน้า

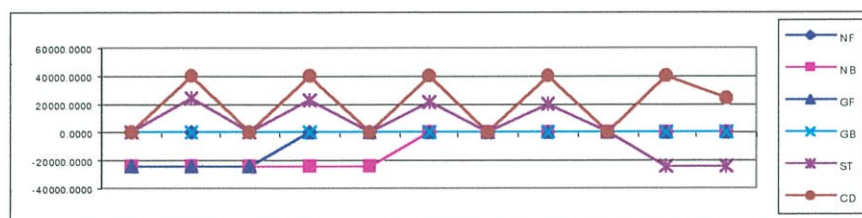
จากการพิจารณาข้างต้น จะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดของคลื่นและตำแหน่งของค่าสูงสุดของคลื่น จะมีค่าคลาดเคลื่อนลดลง เมื่อช่วงห่างของระยะทางเพิ่มขึ้น ส่วนตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสิ้นสุดยังคงใกล้เคียงกัน



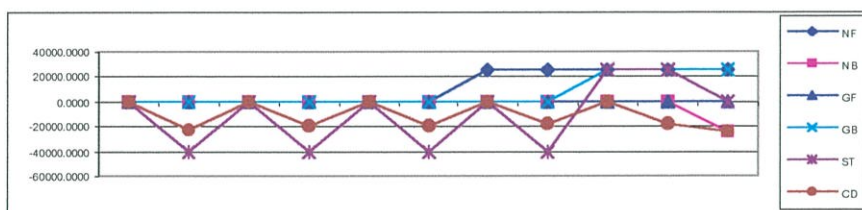
(ก)



(ข)



(ค)

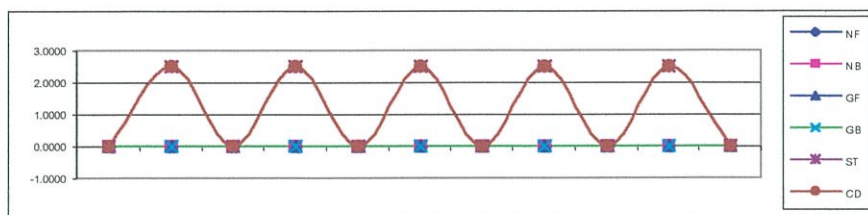


(ง)

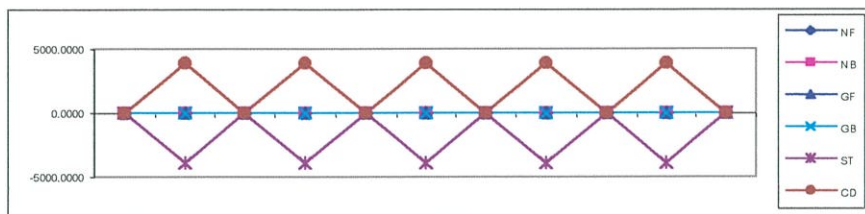
รูปที่ 4.9 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t = 5 \times 10^{-7}$ วินาทีของค่าสูงสุด(ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด(ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

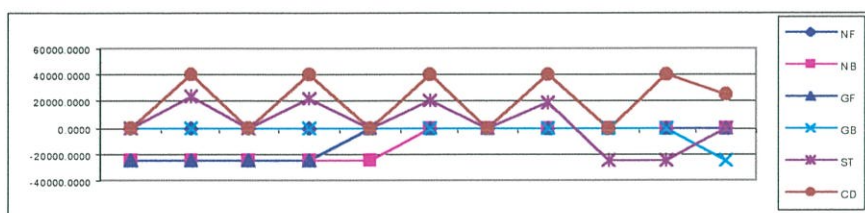
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



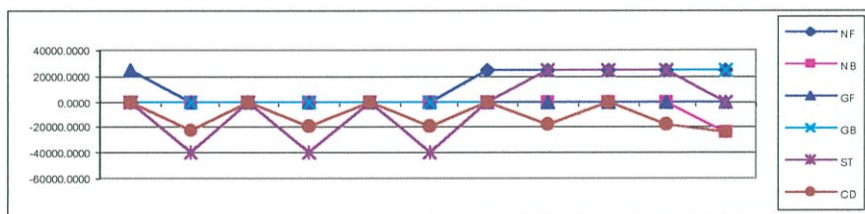
(ก)



(ข)



(ค)

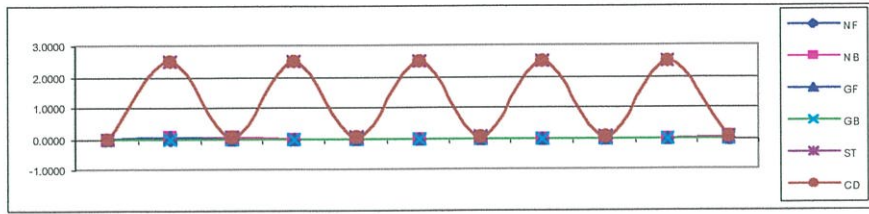


(ง)

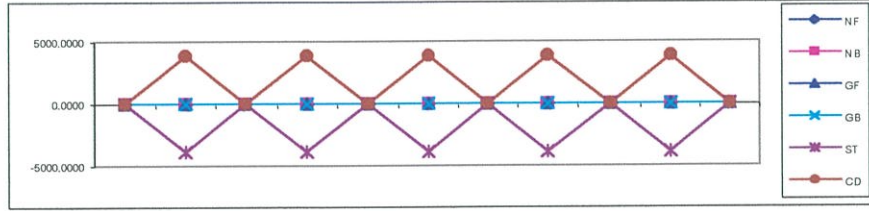
รูปที่ 4.10 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t = 6 \times 10^{-7}$ วินาทีของค่าสูงสุด(ก)ตำแหน่งค่าสูงสุด(ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

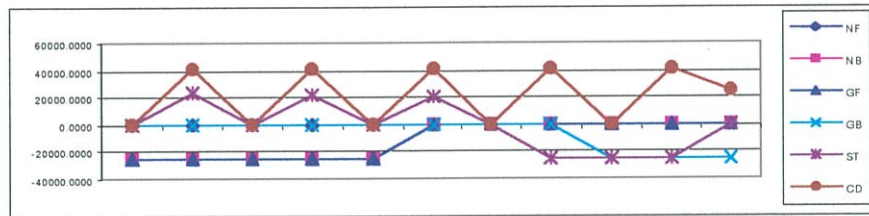
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



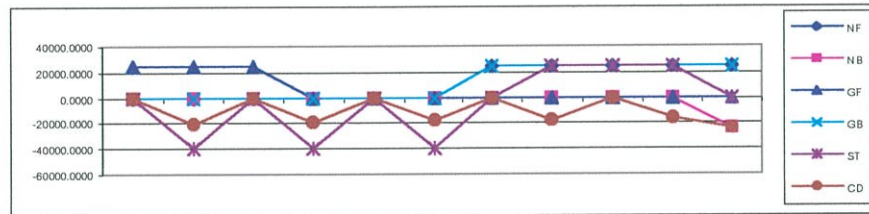
(ก)



(ข)



(ค)

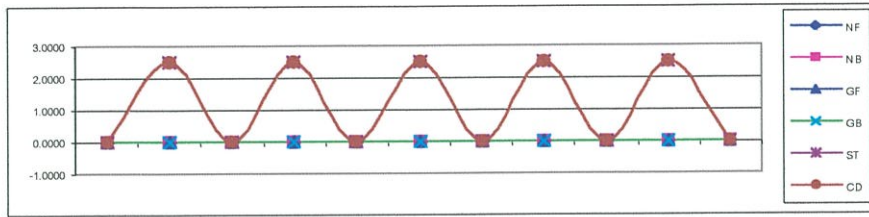


(ง)

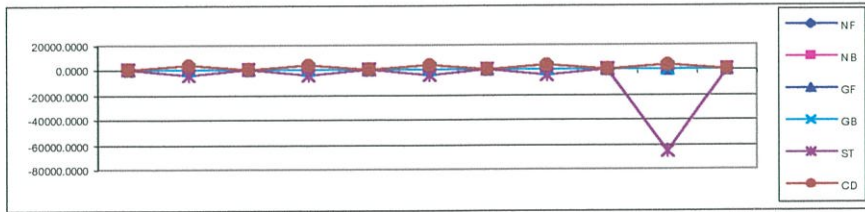
รูปที่ 4.11 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t = 7 \times 10^{-7}$ วินาที ของค่าสูงสุด (ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด (ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

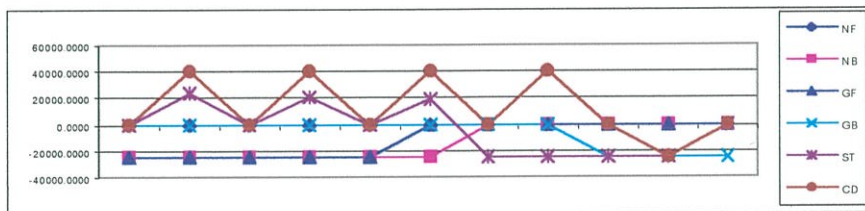
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



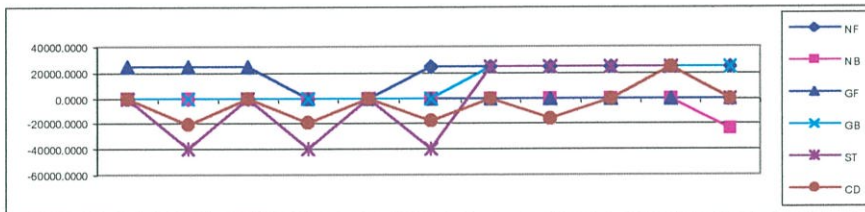
(ก)



(ข)



(ค)

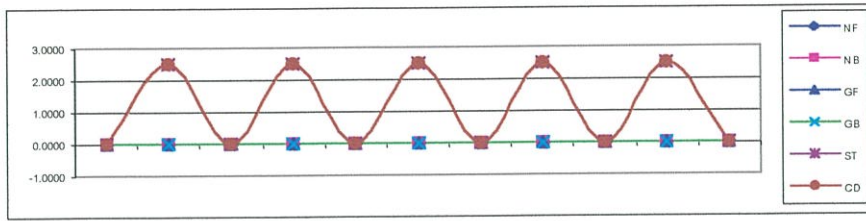


(ง)

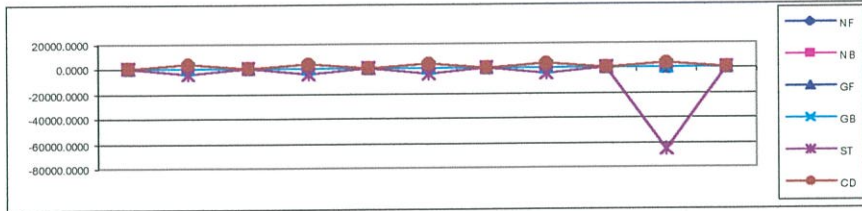
รูปที่ 4.12 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t = 8 \times 10^{-7}$ วินาทีของค่าสูงสุด(ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด(ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด (ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

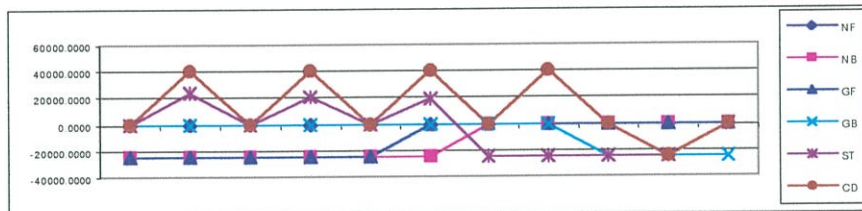
NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6



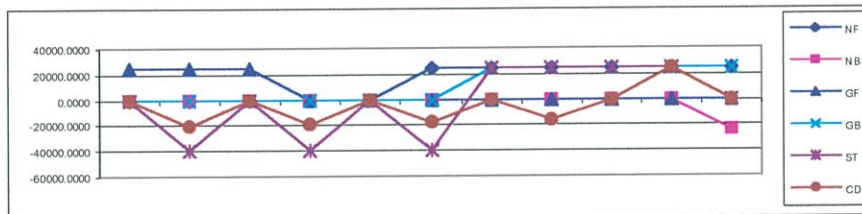
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 4.12 กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $\Delta t = 8 \times 10^{-7}$ วินาที ของค่าสูงสุด(ก) ตำแหน่งค่าสูงสุด(ข) ตำแหน่งเริ่มต้น (ค) และ ตำแหน่งสิ้นสุด(ง) ของคลื่นเทียบกับผลเฉลย (2.43)

เมื่อ NF แทนกระบวนการใน 3.1.1
GF แทนกระบวนการใน 3.1.3
ST แทนกระบวนการใน 3.1.5

NB แทนกระบวนการใน 3.1.2
GB แทนกระบวนการใน 3.1.4
CD แทนกระบวนการใน 3.1.6

ในการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนจากกระบวนการทางตัวเลขในการประมาณค่า (2.27) เปรียบเทียบกับ (2.43) โดยพิจารณาค่าช่วงห่างของเวลา (Δt) ที่เปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย โดยกำหนดค่าของ Δt เป็น 5×10^{-7} , 6×10^{-7} , 7×10^{-7} และ 8×10^{-7} วินาที บนช่วง $[0, 5 \times 10^{-6}]$, $[0, 6 \times 10^{-6}]$, $[0, 7 \times 10^{-6}]$ และ $[0, 8 \times 10^{-6}]$ ตามลำดับ โดยกำหนดค่าอื่น ๆ คงที่ดังนี้ $\Delta x = 0.5$ เมตร บนช่วง $[-65,000, 65,000]$ ที่ระดับความลึกของน้ำที่ไม่ถูกลบกวมนเป็น 400 เมตรและค่าคงที่ $\beta = 0.0057$

เมื่อพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนที่ $\Delta t = 5 \times 10^{-7}$ วินาที บนช่วง $[0, 5 \times 10^{-6}]$ พบว่าค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2.5 กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^3 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้น พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างของเกาส์ - ข้างหน้า

เมื่อพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนที่ $\Delta t = 6 \times 10^{-7}$ วินาที บนช่วง $[0, 6 \times 10^{-6}]$ พบว่าค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2.5 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^3 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้นอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างของเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่างของเกาส์ - ข้างหน้า

เมื่อพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนที่ $\Delta t = 7 \times 10^{-7}$ วินาที บนช่วง $[0, 7 \times 10^{-6}]$ เมตร พบว่าค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2.5 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ 4×10^3 เมตร กระบวนการที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง - ข้างหน้า ผลต่าง - ข้างหลัง เกาส์ - ข้างหน้า และเกาส์ - ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้นอยู่ที่ประมาณ

4×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง – ข้างหน้า ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุดของคลื่นอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร กระบวนการที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง – ข้างหลัง

เมื่อพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนที่ $\Delta t = 8 \times 10^{-7}$ วินาที บนช่วง $[0, 8 \times 10^{-6}]$ พบว่าค่าคลาดเคลื่อนของค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2.5 เมตร กระบวนการที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง – ข้างหน้า ผลต่าง – ข้างหลัง เกาส์ – ข้างหน้า และเกาส์ – ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งของค่าสูงสุด พบว่าค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร ซึ่งกระบวนการที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง – ข้างหน้า ผลต่าง – ข้างหลัง เกาส์ – ข้างหน้า และเกาส์ – ย้อนหลัง ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเริ่มต้นอยู่ที่ประมาณ 4×10^4 เมตร กระบวนการที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อย คือ กระบวนการที่ใช้สูตรผลต่าง – ข้างหน้า ค่าคลาดเคลื่อนของตำแหน่งสิ้นสุด มากสุดอยู่ที่ประมาณ -4×10^4 เมตร

บทที่ 5

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

จากการศึกษากระบวนการทางตัวเลขในบทที่ 3 และผลของค่าคลาดเคลื่อนจากกระบวนการทางตัวเลขในบทที่ 4 จะเห็นว่ากระบวนการทางตัวเลขโดยใช้สูตร ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า และผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังของเกาส์ จะให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่ากระบวนการอื่น ๆ แต่ในกระบวนการ ทดลองทางตัวเลขนั้นจะเห็นว่าในการกำหนดค่าขอบเขตนั้นแตกต่างกัน คือ ถ้าใช้สูตรผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าของเกาส์ จะกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขตให้กับ $\eta(x,0)$ แต่ถ้าใช้สูตรผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังของเกาส์ จะกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขตให้กับ $\eta(x,t_n)$ เมื่อ t_n เป็นช่วงเวลาสุดท้ายของการพิจารณา เมื่อพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะเห็นว่าในการประมาณค่าของ $\eta(x+h,t)$ นั้นจะต้องประมาณจากค่าที่มีอยู่ก่อนหน้า เมื่อจำนวนจุดของการประมาณค่ามากขึ้น (ช่วงห่างของระยะทางน้อยลง) ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากค่าคลาดเคลื่อนสะสมจากค่าที่ประมาณก่อนหน้า ซึ่งจะส่งผลให้การประมาณค่าในช่วงเวลาถัดไป และระดับความลึกในสภาพปกติของน้ำที่เพิ่มขึ้นเกิดค่าคลาดเคลื่อนตามไปด้วย

ในระหว่างการศึกษาที่ผู้วิจัยพบว่ากระบวนการในการประมาณค่าผลเฉลยจะให้ค่าคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก เมื่อมีการกำหนดช่วงของ x ที่แคบเกินไป ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้ จากการศึกษาที่มาของสมการ KdV และสมบัติของคลื่นที่มีสมการ KdV เป็นสมการควบคุม จะมีเงื่อนไขหนึ่งจากการจัดบันทึกของ J.Scott Russel เมื่อคลื่นเคลื่อนห่างออกจากเรือแล้วความสูงของคลื่นจะลดลงเรื่อย ๆ นั้นหมายความว่า $\eta(x,t)$ เข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ x มีค่ามาก ๆ ซึ่งในการกำหนดค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดของการประมาณค่าผู้วิจัยได้กำหนดให้ $\eta(x,t)=0$ ดังนั้นถ้ากำหนดช่วงของ x ที่แคบเกินไป จะทำให้การกำหนดค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดไม่เหมาะสมจึงทำให้ค่าคลาดเคลื่อนมีค่ามาก หรือบางครั้งมีค่าที่ผิดไปจากผลเฉลยที่นำมาเปรียบเทียบ

ดังนั้นในการใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมจำกัด ที่พัฒนาจากสูตรผลต่างในงานวิจัยนี้จะต้องกำหนดช่วงของ x ให้มากพอที่จะกำหนดค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดให้เป็นศูนย์ และต้องกำหนดค่าของระยะห่างของระยะทางที่เหมาะสม เพราะถ้าระยะทางในการพิจารณามีค่ามากจะต้องมีการกำหนดจำนวนจุดในการประมาณค่าจำนวนมาก ซึ่งจะให้ค่าคลาดเคลื่อนที่ตามมามาก และแปรผลทางตัวเลขกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นคลาดเคลื่อนมากหรือผิดพลาดได้ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษาต่อเกี่ยวกับเงื่อนไขและที่มาของโซลิตอนที่เกิดขึ้นในน้ำ ซึ่งสมการ KdV ที่ได้ศึกษาในงานวิจัยนี้ เป็นสมการที่ใช้ศึกษาปัญหาของโซลิตอนของคลื่นน้ำแบบหนึ่ง

เอกสารอ้างอิง

1. ประสาร ไชยณรงค์. 2542. ฟิสิกส์ของคลื่น. อุบลราชธานี : สถาบันราชภัฏอุบลราชธานี
2. ไพโรจน์ สัตยธรรม. 2541. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. D.Y. Hsieh และ S.P. Ho. 1994. **Wave and stability in fluids.** Hong Kong :
The Hong Kong University of Science and Technology และ Hong Kong Polytechnic.
4. Hafedh HAJJI , Stephane SOLE , Alfred RAMAMONJIARISOA , MeteoMer ,
Labo I.O.A. 1994. **Analysis and prediction of internal waves using SAR image and
Non – linear Model.** France.
5. Mahir Rasulov และ Erhan Coskun. 1999. **An efficient numerical method for solving
the kortevag – de vries equation in case of discontinuous functions.** Applied
Mathematics and Computation. 102 (1999) 139-154.
6. Nikzad Toomarian และ Jacob Barhen. 1992. **Fast neural solution of a nonlinear wave
equation”** Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology Pasadena .
CA 91109.
7. Vladimir V.Konotop และ Luis Vazquez. 1994. **Nonlinear random waves.**
Portugal และ Spain : University da Madeira and University Computense.
8. Department of Mathematics. Heriot – Watt University. 2001. **Solitons home page.** [Online].
Available : <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/>
- 9 Waterloo Maple Advancing Matematics. 2001. **Soliton of KdV equation.** [Online].
Available : <http://www.mapleapps.com/categories/science/physics/html/solkdv.html>

ภาคผนวก ก

สมการการไหลอย่างต่อเนื่องของของไหล (Continuity Equation)

สมการรูปทั่วไป

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

คำอธิบายในแต่ละมิติ

สมการใน 1 มิติ $\mathbf{v} = u\mathbf{i}$ และ $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}$

ในกรณีที่ของไหลเป็นของไหลที่สามารถอัดตัวได้

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} \right) \cdot (\rho u \mathbf{i}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial x} u + u \frac{\partial}{\partial x} \rho = 0$$

ในกรณีที่ของไหลเป็นของไหลที่ไม่สามารถอัดตัวได้ ρ เป็นค่าคงที่

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

สมการใน 2 มิติ $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ และ $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot (\rho(u\mathbf{i} + v\mathbf{j})) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial x} u + u \frac{\partial}{\partial x} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial y} v + v \frac{\partial}{\partial y} \rho = 0$$

ในกรณีที่ของเหลวเป็นของเหลวที่ไม่สามารถอัดตัวได้ ρ เป็นค่าคงที่

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (u\vec{i} + v\vec{j}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0$$

สมการของ Navier – Stokes หรือสมการโมเมนตัม (Navier – Stokes Equation Or Momentum Equation)

สมการรูปทั่วไป

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[\frac{4}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right] + \nu' \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + b$$

เมื่อ $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ และ $\nu' = \frac{\mu'}{\rho}$ (ทั้งสองค่านี้เรียก Kinematic Viscosity Coefficient)

ในกรณีที่ เป็นของเหลวที่ไม่สามารถอัดตัวได้ และคิดแรงดึงดูดของโลก

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g e_y$$

เมื่อ $g e_y$ เป็นแรงดึงดูดของโลกที่กระทำในทิศทางของแกน \vec{y}

คำอธิบายในแต่ละมิติ

สมการใน 1 มิติ $\mathbf{v} = u\vec{i}$ และ $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}$ และ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} u\vec{i} + u \frac{\partial}{\partial x} u\vec{i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\vec{i} + \nu \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\vec{i} + \nu' \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\vec{i} + b$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u\vec{i} + u \frac{\partial}{\partial x} u\vec{i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\vec{i} = \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\vec{i} + b$$

เมื่อไม่คิดแรงกระทำภายนอก $b=0$ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} u\vec{i} + u \frac{\partial}{\partial x} u\vec{i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\vec{i} = \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\vec{i}$$

และเมื่อไม่คิดทิศทางเพราะเป็นฟังก์ชันในทิศทางเดียวจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

ให้ $\bar{v} = \frac{4}{3} \nu + \nu'$ ซึ่งเท่ากับศูนย์ในของเหลวในอุดมคติ(ไม่สามารถอัดตัวได้) ได้

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = 0$$

(ไม่มีแรงในทิศทางของ \vec{y})

สมการใน 2 มิติ $\mathbf{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$ และ $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$ และ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u\vec{i} + \frac{\partial}{\partial t} v\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right) (u\vec{i} + v\vec{j}) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} p\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} p\vec{j} \right) \\ & + \nu \left(\frac{4}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right) \\ & + \nu' \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right) + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u\bar{i} + \frac{\partial}{\partial t} v\bar{j} + u \frac{\partial}{\partial x} u\bar{i} + u \frac{\partial}{\partial y} v\bar{i} + v \frac{\partial}{\partial x} u\bar{j} + v \frac{\partial}{\partial y} v\bar{j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\bar{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p\bar{j} \\ + \frac{4}{3} \nu &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u\bar{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v\bar{j} \right) \\ + \nu' &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u\bar{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v\bar{j} \right) + b \end{aligned}$$

เมื่อไม่คิดแรงกระทำภายนอก $b = -ge_y \bar{j}$ เนื่องจากแรงดึงดูดของโลกจะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u\bar{i} + \frac{\partial}{\partial t} v\bar{j} + u \frac{\partial}{\partial x} u\bar{i} + u \frac{\partial}{\partial y} v\bar{i} + v \frac{\partial}{\partial x} u\bar{j} + v \frac{\partial}{\partial y} v\bar{j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\bar{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p\bar{j} \\ + \frac{4}{3} \nu &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u\bar{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v\bar{j} \right) \\ + \nu' &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u\bar{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v\bar{j} \right) - ge_y \bar{j} \\ \frac{\partial}{\partial t} u\bar{i} + \frac{\partial}{\partial t} v\bar{j} + u \frac{\partial}{\partial x} u\bar{i} + u \frac{\partial}{\partial y} v\bar{i} + v \frac{\partial}{\partial x} u\bar{j} + v \frac{\partial}{\partial y} v\bar{j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\bar{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p\bar{j} \\ + \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u\bar{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v\bar{j} \right) - ge_y \bar{j} \end{aligned}$$

ให้ $\bar{v} = \frac{4}{3} \nu + \nu'$ ซึ่งเท่ากับศูนย์ในของเหลวในอุดมคติ (ที่ไม่สามารถอัดตัวได้) ได้

$$\frac{\partial}{\partial t} u\bar{i} + \frac{\partial}{\partial t} v\bar{j} + u \frac{\partial}{\partial x} u\bar{i} + u \frac{\partial}{\partial y} v\bar{i} + v \frac{\partial}{\partial x} u\bar{j} + v \frac{\partial}{\partial y} v\bar{j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\bar{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p\bar{j} - ge_y \bar{j}$$

เมื่อพิจารณาโดยแยกตามทิศทางจะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} u\bar{i} + u \frac{\partial}{\partial x} u\bar{i} + v \frac{\partial}{\partial y} u\bar{i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p\bar{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_j + u \frac{\partial}{\partial x} v_j + v \frac{\partial}{\partial y} v_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p_j - g e_{y,j}$$

หรือ

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p \quad \text{ในทิศทางตามแกน } x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p - g e_y \quad \text{ในทิศทางตามแกน } y$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง ความตึงผิว ความเร็ว และความดันของของไหลนิวโตเนียน

(Relation relating the rate of stress to fluid velocity and the pressure)

รูปทั่วไปใน 3 มิติ

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma'_{ik},$$

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial v_k} v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_l} v_l \right) + \mu' \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_l} v_l$$

คำอธิบายในแต่ละมิติ

สมการใน 1 มิติ $V = v_i = u \bar{i}$ และ $x_i = x$

$$\sigma_i = -p \delta_i + \frac{\partial}{\partial x} u \bar{i} \quad \text{หรือ} \quad \sigma_i = -p \delta_i + \frac{\partial}{\partial x} u$$

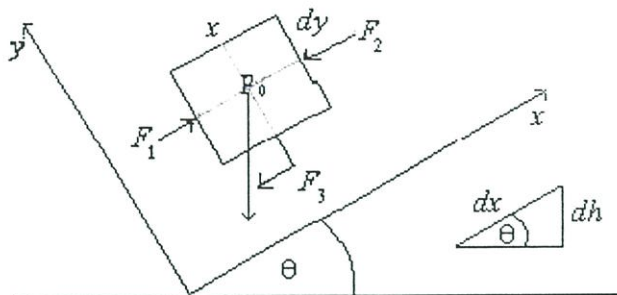
สมการใน 2 มิติ $V = u_i + v_j = u \bar{i} + v \bar{j}$ และ $x_i = x$ และ $x_j = y$

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial y} u \bar{i} + \frac{\partial}{\partial x} v \bar{j}$$

แสดงที่มาของ (2.5)

พิจารณาสมการ โมเมนตัมของคลื่นน้ำโดยพิจารณาทีละทิศทางจากพื้นที่สี่เหลี่ยมเล็ก ๆ เมื่อคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางของ y เริ่มด้วยการพิจารณาพื้นที่เล็ก ๆ ที่มีขนาดเป็น

dx และ dy และพื้นที่ที่ถูกแรงรบกวนกระทำทำให้เกิดมุมเอียงเป็น θ สูงเอียงเป็น dh และแรงดันที่จุดศูนย์กลางมวลที่พิจารณาเป็น p_0 เมื่อพิจารณาแรงต่าง ๆ จะได้ดังรูป



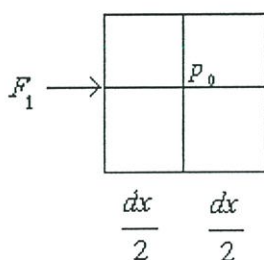
รูปที่ แสดงเมื่อพื้นที่ที่ถูกแรงรบกวนกระทำทำให้เกิดมุมเอียงเป็น θ

พิจารณาแรงรวมตามทิศของแกน x จะได้

$$\sum F_x = F_1 - F_2 - F_3$$

เมื่อ F_i แทน แรงในทิศทางที่พิจารณา

พิจารณาแรงดันที่ขอบด้านที่แรง F_1 กระทำกับขอบของพื้นที่สี่เหลี่ยมดังรูป

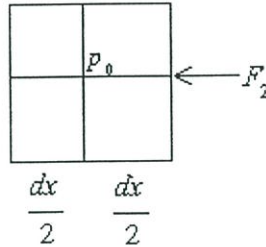


จาก $p = \frac{F}{A}$ เมื่อ A แทนพื้นที่ที่แรง F กระทำ ดังนั้นได้

$$\frac{\partial}{\partial x} p = \frac{p_0 - \frac{F_1}{dy}}{\frac{dx}{2}} \quad \text{เมื่อ } \frac{dx}{2} \text{ เข้าใกล้ศูนย์}$$

$$F_1 = \left(p_0 - \left(\frac{\partial}{\partial x} p \right) \frac{dx}{2} \right) dy$$

พิจารณาแรงดันที่ขอบด้านที่แรง F_2 กระทำกับขอบของพื้นที่สี่เหลี่ยมดังรูปได้



$$\frac{\partial}{\partial x} p = \frac{\frac{F_2}{dy} - p_0}{\frac{dx}{2}} \quad \text{เมื่อ } \frac{dx}{2} \text{ เข้าใกล้ศูนย์}$$

$$F_2 = \left(p_0 + \left(\frac{\partial}{\partial x} p \right) \frac{dx}{2} \right) dy$$

พิจารณาแรง F_3 ได้

$$F_3 = mg \sin \theta$$

เมื่อ m แทนมวลของน้ำในพื้นที่ dx และ dy

แทนค่า $m = \rho A = \rho dx dy$ เมื่อ A แทนพื้นที่ ที่แรง F_3 กระทำ จะได้

$$F_3 = \rho g \sin \theta dx dy$$

แทนค่าสมการ F_1 F_2 และ F_3 ในสมการผลรวมของแรงในทิศทางแกน \bar{x} ได้

$$\sum F_x = \left(p_0 - \left(\frac{\partial}{\partial x} p \right) \frac{dx}{2} \right) dy - \left(p_0 + \left(\frac{\partial}{\partial x} p \right) \frac{dx}{2} \right) dy - (\rho g \sin \theta dx dy)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x} p\right) dx dy - \rho g \sin \theta dx dy$$

จากกฎของนิวตัน

$$\sum F = ma$$

เมื่อ a แทนความเร่ง

เมื่อพิจารณาโดยกำหนดทิศทางจะได้

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x && \text{ในทิศทางตามแกน } x \\ \text{และ } \sum F_y &= ma_y && \text{ในทิศทางตามแกน } y \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$\sum F_x = ma_x = \rho a_x dx dy$$

แทนค่าในสมการของแรงรวมในทิศทางของ x และแทนค่า $\sin \theta = \frac{\partial}{\partial x} h$ จะได้

$$\begin{aligned} \rho a_x dx dy &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} p\right) dx dy - \rho g \left(\frac{\partial}{\partial x} h\right) dx dy \\ a_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p - g \frac{\partial}{\partial x} h \end{aligned}$$

จากเดิมเมื่อพิจารณาความเร่งใน 2 มิติคือ

$$a_x = \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u$$

$$a_y = \frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v$$

ดังนั้นสมการโมเมนตัมในทิศทางของ x จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p - g \frac{\partial}{\partial x} h$$

ในทำนองเดียวกันจะพิจารณาโมเมนตัมในทิศทางแกน y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p - g \frac{\partial}{\partial y} h$$

จากรูปที่ a1 จะเห็นว่า h เป็นตัวแปรในทิศทางของ y จะได้ $\frac{\partial}{\partial x} h = 0$ และให้ $\frac{\partial}{\partial y} h = e_y$

ดังนั้นสมการโมเมนตัมในทิศทางของ x และ y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p \quad \text{บน } 0 < y < h(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p - g e_y \quad \text{บน } 0 < y < h(x,t)$$

แสดงที่มาจาก (2.14) และ (2.15) ไปเป็น (2.20)

ในการแสดงจะเริ่มที่ระบบสมการ (2.14) และ (2.15) คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + g \frac{\partial}{\partial x} h = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + u \frac{\partial}{\partial x} h + h \frac{\partial}{\partial x} u = 0$$

จาก (2.16), (2.17), (2.18) และ (2.19) จัด u ให้อยู่ในรูปของ h จะได้

$$u = \pm 2 \left[(gh)^{\frac{1}{2}} - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \right]$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \pm \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} h \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial t} u = \pm \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} h$$

แทนค่าใน ระบบสมการของ (2.14) และ (2.15) จะได้สมการที่เหมือนกันดังนี้

$$\begin{aligned} & \pm \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} h + 2 \left[(gh)^{\frac{1}{2}} - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} h + g \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} h \pm 2 \left[(gh)^{\frac{1}{2}} - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h \pm (gh)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} h \pm \left[2(gh)^{\frac{1}{2}} - 2(gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h \pm (gh)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} h \pm \left[3(gh)^{\frac{1}{2}} - 2(gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} h \pm 2 \left[(gh)^{\frac{1}{2}} - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h \pm h \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} h \pm 2 \left[(gh)^{\frac{1}{2}} - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h \pm (gh)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} h \pm \left[2(gh)^{\frac{1}{2}} - 2(gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h \pm (gh)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} h = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h \pm \left[3(gh)^{\frac{1}{2}} - 2(gh_0)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial}{\partial x} h = 0$$

แสดงที่มาจาก (2.27) ไปเป็น (2.28)

จาก (2.27) มีรูปสมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} \eta + (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \eta = 0$$

และกำหนดตัวแปลงคือ

$$U = -6^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right), \quad \bar{x} = 6^{\frac{1}{3}} \frac{x}{h_0}, \quad \bar{t} = \left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{h_0}{6^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} = \frac{h_0^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{h_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}$$

แทนค่าใน (2.27) ได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\left(\frac{h_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{t}} \eta - (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \frac{h_0}{6^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \eta + (gh_0)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0^2}{6} \frac{h_0^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} \eta = 0 \\ \left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \eta - \left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \eta + \left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} \eta = 0 \end{aligned}$$

นำ $\left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ ทหารทั้งสมการได้

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta - 6^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \eta + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} \eta = 0$$

จาก $U = -6^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0} \right)$ จะได้

$$\eta = -\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} U - \frac{2h_0}{3}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta = -\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} U, \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta = -\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} \frac{\partial}{\partial t} U \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} \eta = -\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} U$$

แทนค่าจะได้

$$-\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} \frac{\partial}{\partial t} U + 6^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{3}{2h_0} \left(\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} U + \frac{2h_0}{3} \right) \right) \left(\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} U \right) - \frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} U = 0$$

นำ $-\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3}$ หารทั้งสมการได้

$$\frac{\partial}{\partial t} U - 6^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{3}{2h_0} \left(\frac{2h_0 6^{\frac{2}{3}}}{3} U + \frac{2h_0}{3} \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} U \right) + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} U = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U - 6^{\frac{1}{3}} \left(-6^{\frac{2}{3}} U \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} U \right) + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} U = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U + 6U \frac{\partial}{\partial \bar{x}} U + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3} U = 0$$

ภาคผนวก ข

ตารางที่ ข.1 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $h_0 = 100$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.0000000	0.0000005	0.0000010	0.0000015	0.0000020	0.0000025	0.0000030	0.0000035	0.0000040	0.0000045	0.0000050
ผลการประมาณ	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274	-0.6274
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000	-9062.5000
3.1.4	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000	9062.5000
ผลการประมาณ	-0.6274	0.0000	-0.6274	0.0000	-0.6274	0.0000	-0.6274	0.0000	-0.6274	0.0000	-0.6274
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-960.0000	0.0000	-960.0000	0.0000	-960.0000	0.0000	-960.0000	0.0000	-960.0000	0.0000
กระบวนการใน	-9062.5000	0.0000	-9062.5000	-1656.0000	-9062.5000	-2079.5000	-9062.5000	-2338.5000	-9062.5000	-2527.5000	-9062.5000
3.1.5	9062.5000	0.0000	9062.5000	-457.0000	9062.5000	-281.5000	9062.5000	-206.5000	9062.5000	-163.5000	9062.5000
ผลการประมาณ	-0.6274	0.0000	-0.6274	0.0000	-0.6274	0.0000	-0.6274	-0.0001	-0.6274	-0.0001	-0.6274
ค่า (2.27) โดย	0.0000	960.0000	0.0000	960.0000	0.0000	960.0000	0.0000	960.0000	0.0000	960.0000	0.0000
กระบวนการใน	-9062.5000	457.0000	-9062.5000	206.5000	-9062.5000	135.5000	-9062.5000	101.5000	-9062.5000	81.0000	-9062.5000
3.1.6	9062.5000	1656.0000	9062.5000	2338.0000	9062.5000	2677.0000	9062.5000	2906.5000	9062.5000	3080.5000	9062.5000

ตารางที่ ข.2 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนกรใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $h_0 = 200$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลการประมาณ	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547	-1.2547
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนกรใน	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500	-19135.500
3.1.4	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000	19135.5000
ผลการประมาณ	-1.2547	0.0000	-1.2547	-0.0001	-1.2547	-0.0001	-1.2547	-0.0002	-1.2547	-0.0002	-1.2547
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-1920.0000	0.0000	-1920.0000	0.0000	-1920.0000	0.0000	-1920.0000	0.0000	-1920.0000	0.0000
กระบวนกรใน	-19135.500	-5258.500	-19135.500	-6351.500	-19135.500	-6968.500	-19135.500	-7400.500	-19135.500	-7733.000	-19135.500
3.1.5	19135.5000	-288.0000	19135.5000	-142.5000	19135.5000	-95.0000	19135.5000	-71.5000	19135.5000	-57.0000	19135.5000
ผลการประมาณ	-1.2547	-0.0001	-1.2547	-0.0002	-1.2547	-0.0002	-1.2547	-0.0003	-1.2547	-0.0004	-1.2547
ค่า (2.27) โดย	0.0000	1920.0000	0.0000	1920.0000	0.0000	1920.0000	0.0000	1920.0000	0.0000	1920.0000	0.0000
กระบวนกรใน	-19135.500	142.500	-19135.500	71.500	-19135.500	47.500	-19135.500	36.000	-19135.500	28.500	-19135.500
3.1.6	19135.5000	6351.5000	19135.5000	7400.0000	19135.5000	8003.5000	19135.5000	8429.0000	19135.5000	8758.0000	19135.5000

ตารางที่ ข.3 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $h_0 = 300$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.0000000	0.0000005	0.0000010	0.0000015	0.0000020	0.0000025	0.0000030	0.0000035	0.0000040	0.0000045	0.0000050
ผลการประมาณ	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821	-1.8821
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000	-29590.000
3.1.4	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000	29590.0000
ผลการประมาณ	-1.8821	-0.0001	-1.8821	-0.0002	-1.8821	-0.0003	-1.8821	-0.0004	-1.8821	-0.0005	-1.8821
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-2880.0000	0.0000	-2880.0000	0.0000	-2880.0000	0.0000	-2880.0000	0.0000	-2880.0000	0.0000
กระบวนการใน	-29590.000	-10260.000	-29590.000	-11816.500	-29590.000	-12716.500	-29590.000	-13352.000	-29590.000	-13844.000	-29590.000
3.1.5	29590.0000	-155.0000	29590.0000	-77.5000	29590.0000	-52.0000	29590.0000	-39.0000	29590.0000	-31.0000	29590.0000
ผลการประมาณ	-1.8821	-0.0002	-1.8821	-0.0004	-1.8821	-0.0007	-1.8821	-0.0009	-1.8821	-0.0011	-1.8821
ค่า (2.27) โดย	0.0000	2880.0000	0.0000	2880.0000	0.0000	2880.0000	0.0000	2880.0000	0.0000	2880.0000	0.0000
กระบวนการใน	-29590.000	77.500	-29590.000	39.000	-29590.000	26.000	-29590.000	19.500	-29590.000	15.500	-29590.000
3.1.6	29590.0000	11816.5000	29590.0000	13352.0000	29590.0000	14245.0000	29590.0000	14877.5000	29590.0000	15367.5000	29590.0000

ตารางที่ ข.4 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $h_0 = 400$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
3.1.4	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64998.0000	64998.5000	64999.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0002	-2.5095	-0.0004	-2.5095	-0.0007	-2.5095	-0.0009	-2.5095	-0.0011	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3839.5000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-15833.000	-40292.500	-17879.500	-40292.500	-19070.000	-40292.500	-19913.000	-40292.500	-65000.000	-64999.000
3.1.5	40292.5000	-100.5000	40292.5000	-50.5000	40292.5000	-33.5000	40292.5000	-25.5000	64997.5000	64999.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0004	-2.5095	-0.0009	-2.5095	-0.0013	-2.5095	-0.0018	-2.5095	-0.0022	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	50.500	-40292.500	25.5000	-40292.500	17.000	-40292.500	13.000	-40292.500	10.500	-40292.500
3.1.6	40292.5000	17879.5000	40292.5000	19913.0000	40292.5000	21099.5000	40292.5000	21940.5000	40292.5000	22592.5000	40292.5000

ตารางที่ ข.5 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนกรใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta x = 0.2$ เมตร

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลเฉลย (2.43)	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400
40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400	40292.400
ผลการประมาณ ค่า (2.27) โดย กระบวนกรใน 3.1.1	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-74.5942	-5974.1220	-461250.87	-3643699	-322928716
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	64998.4000	64998.0000	64997.6000	64997.6000	64997.2000
	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.600	-40354.400	-44001.400	-56999.400	-64999.800
40292.400	40292.400	40292.400	64999.6000	65000.0000	65000.0000	65000.0000	65000.0000	65000.0000	65000.0000	65000.0000	65000.0000
ผลการประมาณ ค่า (2.27) โดย กระบวนกรใน 3.1.2	-32292871	-3643699	-461250.87	-5974.1220	-74.5942	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	-64997.200	-64997.600	-64997.600	-64998.000	-64998.400	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-64999.600	-40292.400	-40292.400	-40292.400
64999.8000	56902.0000	44023.4000	40357.0000	40292.6000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000
ผลการประมาณ ค่า (2.27) โดย กระบวนกรใน 3.1.3	-16545688	-21411971	-277573.80	-3465.4539	-42.8480	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	-64998.800	-64999.000	-64999.200	-64999.400	-64999.200	-0.600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	-65000.000	-64999.800	-65000.000	-64999.800	-65000.000	-64999.800	-65000.000	-64999.800	-40292.400	-40292.400	-40292.400
65000.0000	64999.8000	65000.0000	64999.8000	65000.0000	64999.8000	65000.0000	65000.0000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	

ตารางที่ ข.5 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta x = 0.2$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.0000000	0.0000005	0.0000010	0.0000015	0.0000020	0.0000025	0.0000030	0.0000035	0.0000040	0.0000045	0.0000050
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-42.8480	-3465.4539	-277573.80	-21411971	-16545688
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6000	64999.2000	64999.4000	64999.2000	64999.0000	64998.8000
กระบวนการใน	-40292.4000	-40292.4000	-40292.4000	-64999.8000	-65000.0000	-64999.8000	-65000.0000	-64999.8000	-65000.0000	-64999.8000	-65000.0000
3.1.4	40292.4000	40292.4000	40292.4000	64999.8000	65000.0000	64999.8000	65000.0000	64999.8000	65000.0000	64999.8000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0014	-2.5095	-0.0028	-2.5095	-0.2556	-16.3509	-1197.9146	-76405.187	-4508889	-27232485
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3839.8000	0.0000	-3840.2000	-0.2000	64999.4000	-64999.6000	64999.2000	64999.0000	-64999.4000	-64999.6000
กระบวนการใน	-40292.4000	-21219.2000	-40292.4000	-64999.8000	-65000.0000	-65000.0000	-64999.6000	-64999.8000	-65000.0000	-65000.0000	-64999.6000
3.1.5	40292.4000	-16.2000	40292.4000	64999.2000	64999.8000	64999.6000	65000.0000	64999.8000	64999.8000	65000.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0028	-2.5095	-0.0056	-2.5094	-0.0089	-2.5094	-11.4499	-420.5148	-15867.77	-592563.83
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3839.8000	0.0000	3839.8000	0.0000	-64999.2000	0.4000	64999.2000	64999.0000	64998.8000	64998.6000
กระบวนการใน	-40292.4000	8.2000	-40292.4000	4.2000	-65000.0000	-65000.0000	-64999.6000	-64999.8000	-65000.0000	-65000.0000	-64999.6000
3.1.6	40292.4000	23244.2000	40292.4000	25267.2000	65000.0000	64999.8000	64999.6000	65000.0000	65000.0000	64999.8000	64999.6000

ตารางที่ ข.6 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta x = 0.3$ เมตร

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลเฉลย (2.43)	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300
	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000
ผลการประมาณ ค่า (2.27) โดย กระบวนการใน 3.1.1	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-32.0023	-828.8136	-20730.253
	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	-0.2000	0.1000	-1.4000	64996.3000	64996.3000	64995.7000
	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40296.800	-40501.400
	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64999.3000	64999.3000	64999.9000	64999.9000	64999.9000	64999.9000	64999.9000
ผลการประมาณ ค่า (2.27) โดย กระบวนการใน 3.1.2	-20729.542	-828.7852	-32.0012	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	-64995.800	-64996.400	-64996.400	2.8000	-0.2000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-65000.000	-64999.400	-64999.400	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300
	40549.0000	40296.7000	40292.2000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000
ผลการประมาณ ค่า (2.27) โดย กระบวนการใน 3.1.3	-6340.9189	-288.9987	-12.8472	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	-64998.200	-64998.500	-64998.800	0.7000	0.4000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
	-65000.000	-64999.700	-65000.000	-64999.700	-65000.000	-64999.700	-65000.000	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300
	64999.9000	64999.6000	64999.9000	64999.6000	64999.9000	64999.6000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000

ตารางที่ ข.6 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta x = 0.3$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-12.8476	-289.0087	-6341.1364
ค่า (2.27) โดย	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	64998.7000	64998.4000	64998.1000
กระบวนการใน	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-40292.300	-64999.700	-65000.000	-64999.700	-65000.000	-64999.700	-65000.000
3.1.4	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64999.9000	64999.6000	64999.9000	64999.6000	64999.9000	64999.6000	64999.9000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0006	-2.5095	-0.0012	-2.5095	-0.0019	-2.5095	-0.2368	-4.4698	-77.8444	-1385.8956
ค่า (2.27) โดย	0.1000	-3839.9000	0.1000	-3839.9000	0.1000	-3839.3000	-0.5000	64998.7000	64998.4000	-64999.100	-64999.400
กระบวนการใน	-40292.300	-18844.700	-40292.300	-20874.800	-65000.000	-65000.000	-64999.400	-64999.700	-65000.000	-65000.000	-64999.400
3.1.5	40292.5000	-36.2000	40292.5000	-18.2000	64999.6000	64999.3000	64999.9000	64999.6000	64999.6000	64999.9000	64999.9000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0012	-2.5095	-0.0025	-2.5095	-0.0037	-2.5095	-0.0050	-2.5094	-0.2636	-2.9030
ค่า (2.27) โดย	0.1000	3839.8000	0.1000	3839.8000	0.1000	3839.8000	0.1000	3839.2000	-0.5000	64998.1000	64997.8000
กระบวนการใน	-40292.300	18.1000	-40292.300	9.100	-40292.300	-65000.000	-64999.400	-64999.700	-65000.000	-65000.000	-64999.400
3.1.6	40292.5000	20874.7000	40292.5000	22900.3000	40292.5000	64999.6000	64999.3000	64999.9000	64999.9000	64999.6000	64999.3000

ตารางที่ ข.7 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนกรใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta x = 0.4$ เมตร

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลเฉลย (2.43)	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400
	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-5.7342
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4000	-2.4000	64994.4000
กระบวนกรใน	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400
3.1.1	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	64998.4000	64999.2000	64999.2000	64999.2000	64999.2000	64999.2000
ผลการประมาณ	-5.7342	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	-64994.400	-0.4000	-0.4000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนกรใน	-64999.200	-64999.200	-64999.200	-64999.200	-64999.200	-64998.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400
3.1.2	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	1.6000	0.4000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนกรใน	-65000.000	-64999.600	-65000.000	-64999.600	-65000.000	-64998.800	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400
3.1.3	65000.0000	64999.6000	65000.0000	64999.6000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000

ตารางที่ ข.7 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta x = 0.4$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.4000	-0.8000
กระบวนการใน	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-40292.400	-64999.600	-65000.000	-64999.600	-65000.000
3.1.4	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	40292.4000	64998.8000	65000.0000	64999.6000	65000.0000	64999.6000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0003	-2.5095	-0.0007	-2.5095	-0.0010	-2.5095	-0.0014	-2.5095	-0.0298	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3839.6000	0.0000	-3838.0000	0.0000	-64998.800	-3.2000
กระบวนการใน	-40292.400	-17152.800	-40292.400	-19190.000	-40292.400	-20377.600	-64999.200	-64999.600	-65000.000	-65000.000	-64999.200
3.1.5	40292.4000	-64.4000	40292.4000	-32.4000	40292.4000	-21.6000	65000.0000	64999.6000	64999.6000	65000.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0007	-2.5095	-0.0014	-2.5095	-0.0021	-2.5095	-0.0028	-2.5095	-0.0035	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3839.6000	0.0000	3840.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.400	32.4000	-40292.400	16.4000	-40292.400	10.8000	-40292.400	8.4000	-64999.600	-65000.000	-64999.200
3.1.6	40292.4000	19190.0000	40292.4000	21219.2000	40292.4000	22404.0000	40292.4000	23244.0000	64999.6000	64999.6000	64999.2000

ตารางที่ ข.8 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนกรใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta x = 0.5$ เมตร (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนกรใน	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
3.1.4	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64998.0000	64998.5000	64999.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0002	-2.5095	-0.0004	-2.5095	-0.0007	-2.5095	-0.0009	-2.5095	-0.0011	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3839.5000	0.0000
กระบวนกรใน	-40292.500	-15833.000	-40292.500	-17879.500	-40292.500	-19070.000	-40292.500	-19913.000	-40292.500	-65000.000	-64999.000
3.1.5	40292.5000	-100.5000	40292.5000	-50.5000	40292.5000	-33.5000	40292.5000	-25.5000	64997.5000	64999.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0004	-2.5095	-0.0009	-2.5095	-0.0013	-2.5095	-0.0018	-2.5095	-0.0022	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000
กระบวนกรใน	-40292.500	50.500	-40292.500	25.500	-40292.500	17.000	-40292.500	13.000	-40292.500	10.500	-40292.500
3.1.6	40292.5000	17879.5000	40292.5000	19913.0000	40292.5000	21099.5000	40292.5000	21940.5000	40292.5000	22592.5000	40292.5000

ตารางที่ ข.9 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta r = 0.0000005$ วินาที

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000005	0.000010	0.000015	0.000020	0.000025	0.000030	0.000035	0.000040	0.000045	0.000050
ผลเฉลย (2.43)	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
3.1.1	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-64999.000	-64999.000	-64998.000	-64998.000	-64997.000	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
3.1.2	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-64999.000	-64998.500	-64998.000	-64998.000	-64998.000	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
3.1.3	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000

ตารางที่ ข.9 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลี่ยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลี่ย (2.43) เมื่อ $\Delta t = 0.0000005$ วินาที (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.0000000	0.0000005	0.0000010	0.0000015	0.0000020	0.0000025	0.0000030	0.0000035	0.0000040	0.0000045	0.0000050
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
3.1.4	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64998.0000	64998.5000	64999.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0002	-2.5095	-0.0004	-2.5095	-0.0007	-2.5095	-0.0009	-2.5095	-0.0011	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3839.5000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-15833.000	-40292.500	-17879.500	-40292.500	-19070.000	-40292.500	-19913.000	-40292.500	-65000.000	-64999.000
3.1.5	40292.5000	-100.5000	40292.5000	-50.5000	40292.5000	-33.5000	40292.5000	-25.5000	64997.5000	64999.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0004	-2.5095	-0.0009	-2.5095	-0.0013	-2.5095	-0.0018	-2.5095	-0.0022	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	50.500	-40292.500	25.500	-40292.500	17.000	-40292.500	13.000	-40292.500	10.500	-40292.500
3.1.6	40292.5000	17879.5000	40292.5000	19913.0000	40292.5000	21099.5000	40292.5000	21940.5000	40292.5000	22592.5000	40292.5000

ตารางที่ ข.10 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta t=0.0000006$ วินาที (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.000000	0.000006	0.000012	0.000018	0.000024	0.000030	0.000036	0.000042	0.000048	0.000054	0.000060
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-65000.000
3.1.4	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64998.5000	64999.0000	64999.5000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0003	-2.5095	-0.0005	-2.5095	-0.0008	-2.5095	-0.0011	-2.5095	-0.0013	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3838.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-16373.000	-40292.500	-18415.500	-40292.500	-19604.500	-40292.500	-20447.000	-65000.000	-65000.000	-64999.000
3.1.5	40292.5000	-84.0000	40292.5000	-42.0000	40292.5000	-28.0000	40292.5000	64998.0000	64999.5000	64999.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0005	-2.5095	-0.0011	-2.5095	-0.0016	-2.5095	-0.0021	-2.5095	-0.0027	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	42.0000	-40292.500	21.0000	-40292.500	14.0000	-40292.500	10.5000	-40292.500	8.5000	-40292.500
3.1.6	40292.5000	18415.5000	40292.5000	20447.0000	40292.5000	21632.5000	40292.5000	22473.0000	40292.5000	23125.0000	40292.5000

ตารางที่ ข.11 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta r = 0.0000007$ วินาที (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.0000000	0.0000007	0.0000014	0.0000021	0.0000028	0.0000035	0.0000042	0.0000049	0.0000056	0.0000063	0.0000070
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-65000.000	-64999.500	-65000.000
3.1.4	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64998.0000	64999.5000	65000.0000	64999.5000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0003	-2.5095	-0.0006	-2.5095	-0.0009	-2.5095	-0.0013	-2.5095	-0.0016	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3840.0000	0.0000	-3838.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-16828.500	-40292.500	-18868.000	-40292.500	-20056.000	-40292.500	-64999.500	-65000.000	-65000.000	-64999.000
3.1.5	40292.5000	-72.0000	40292.5000	-36.0000	40292.5000	-24.0000	40292.5000	64999.5000	64999.5000	65000.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0006	-2.5095	-0.0013	-2.5095	-0.0019	-2.5095	-0.0025	-2.5095	-0.0031	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	36.0000	-40292.500	18.0000	-40292.500	12.0000	-40292.500	9.0000	-40292.500	7.5000	-40292.500
3.1.6	40292.5000	18868.0000	40292.5000	20898.0000	40292.5000	22083.0000	40292.5000	22923.5000	40292.5000	23575.0000	40292.5000

ตารางที่ ข.12 แสดงผลการประมาณค่าผลเฉลยของ (2.27) โดยกระบวนการใน 3.1 และผลเฉลย (2.43) เมื่อ $\Delta t = 0.0000008$ วินาที (ต่อ)

เวลา (วินาที)	0.0000000	0.0000008	0.0000016	0.0000024	0.0000032	0.0000040	0.0000048	0.0000056	0.0000064	0.0000072	0.0000080
ผลการประมาณ	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500	-40292.500
3.1.4	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	40292.5000	64999.0000	64999.5000	65000.0000	64999.5000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0004	-2.5095	-0.0007	-2.5095	-0.0011	-2.5095	-0.0014	-2.5095	-0.0047	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	-3840.000	0.0000	-3840.000	0.0000	-3840.000	0.0000	-3838.500	0.0000	-64998.500	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	-17222.500	-40292.500	-19259.500	-40292.500	-20447.000	-64999.000	-64999.500	-65000.000	-65000.000	-64999.000
3.1.5	40292.5000	-63.0000	40292.5000	-31.5000	40292.5000	-21.0000	64998.5000	64999.5000	64999.5000	65000.0000	65000.0000
ผลการประมาณ	-2.5095	-0.0007	-2.5095	-0.0014	-2.5095	-0.0021	-2.5095	-0.0029	-2.5095	-0.0036	-2.5095
ค่า (2.27) โดย	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000	3840.0000	0.0000
กระบวนการใน	-40292.500	31.500	-40292.500	16.000	-40292.500	10.500	-40292.500	8.000	-40292.500	-64998.000	-64999.000
3.1.6	40292.5000	19259.5000	40292.5000	21288.5000	40292.5000	22473.0000	40292.5000	23313.0000	40292.5000	64997.0000	64999.0000

ภาคผนวก ก

The Leafrog Method

เป็นกระบวนการที่พัฒนาขึ้นจากสูตรผลต่างส่วนกลาง โดยมีการประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับที่สามดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U &= \frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t} \\ \frac{\partial}{\partial x}U &= \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3}U &= \frac{U_{i+2}^n - 2U_{i+1}^n + 2U_{i-1}^n - U_{i-2}^n}{(\Delta x)^3}\end{aligned}$$

จากการศึกษา [5], [6] ได้ใช้สมการ KdV ที่อยู่ในฟอร์ม

$$\frac{\partial}{\partial t}U - 6U \frac{\partial}{\partial x}U + \frac{\partial^3}{\partial x^3}U = 0$$

เมื่อจัดอยู่ในรูปผลต่างจะได้

$$\begin{aligned}U_i^{n+1} &= U_i^{n-1} + 6U_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} (U_{i+2}^n - 2U_{i+1}^n + 2U_{i-1}^n - U_{i-2}^n)\end{aligned}$$

ในกระบวนการ Leapfrog finite difference จะมีการกำหนดค่าของ U_{i+1}^n แทนที่ U_{i-1}^n และใช้เงื่อนไขที่กล่าวใน [5], [7] ซึ่งจะกำหนดในสมการนี้เป็น $3U_i^n = U_{i-1}^n + U_i^n + U_{i+1}^n$ ดังนั้นจัดสมการได้

$$\begin{aligned}U_i^{n+1} &= U_i^{n-1} + 2\frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i-1}^n + U_i^n + U_{i+1}^n)(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} (U_{i+2}^n - 2U_{i+1}^n + 2U_{i-1}^n - U_{i-2}^n)\end{aligned}$$

ประวัติผู้เขียน

นายสุภชัย ราชอาจ เกิดเมื่อวันที่ 28 สิงหาคม 2519 ที่จังหวัดเพชรบูรณ์ สำหรับการศึกษาคณะศึกษาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากสถาบันราชภัฏพระนคร ปีการศึกษา 2542