

การออกแบบตัวกรอง IIR แบบ Multiple Notch โดยวิธี
การจัดวางตำแหน่งโพล

IIR MULTIPLE NOTCH FILTER DESIGN USING
POLE POSITION DISPLACEMENT

สุรพันธ์ ยิมมัน
SURAPUN YIMMAN

๕๕๗
วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2550

KMITL-2007-EN-D-018-039

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

**การออกแบบตัวกรอง IIR แบบ Multiple Notch โดยวิธี
การจัดวางตำแหน่งโพล**

**IIR MULTIPLE NOTCH FILTER DESIGN USING
POLE POSITION DISPLACEMENT**

สุรพันธ์ ยิ้มมัน

SURAPUN YIMMAN

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... **76745**
วัน,เดือน,ปี..... **- 6 S.ท. 2550**

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2550

KMITL-2007-EN-D-018-039

**IIR MULTIPLE NOTCH FILTER DESIGN USING
POLE POSITION DISPLACEMENT**

SURAPUN YIMMAN

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2007

KMITL-2007-EN-D-018-039

COPYRIGHT 2007

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การออกแบบตัวกรอง IIR แบบ Multiple Notch โดยวิธีการ จัดวางตำแหน่งโพล
นักศึกษา	นายสุรพันธ์ ชิมมัน
รหัสนักศึกษา	42060025
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	2550
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.กอบชัย เศษหาญ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการออกแบบและสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch โดยใช้เทคนิคการหาตำแหน่งการวาง Pole ที่เหมาะสม การออกแบบเริ่มต้นจากออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกัน โดยจะทำการหาตำแหน่งการวาง Pole ที่เหมาะสมและสอดคล้องกันระหว่างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch เพื่อที่จะทำให้สามารถควบคุมอัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่านที่ความถี่ DC , π และที่ความถี่ใดๆอีกหนึ่งความถี่รวมทั้งสิ้น 3 ความถี่ ให้มีขนาดตามต้องการ จากนั้นก็จะนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกันมาต่อลำดับกัน ก็จะทำให้เกิดเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สามารถควบคุมอัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่านได้และโดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงระหว่าง Notch frequency

Thesis Title	IIR Multiple Notch Filter Design Using Pole Position Displacement
Student	Mr. Surapun Yimman
Student ID.	42060025
Degree	Doctor of Engineering
Program	Electrical Engineering
Year	2007
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Kobchai Dejhan

ABSTRACT

The thesis introduces a new design and implementation of IIR multiple notch filter by using the application of suitable pole placement technique. The initial step is to design the two IIR single notch filters with different notch frequency to obtain the suitable pole that can control the pass-band gain at 3 frequencies such as DC, π and frequency between the notch frequencies. After that, connect the IIR single notch filters with different notch frequency by cascading to create IIR multiple notch filters which can control the pass-band gain at DC and π frequency, especially the frequency between the notch frequencies.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ด้วยความกรุณาของ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่กรุณาแนะนำให้คำปรึกษา คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหา ตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดีในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ และให้ความเมตตาแก่ศิษย์ด้วยดีเสมอมา ผู้เขียนรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาเป็นอย่างยิ่งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณเพื่อน อาจารย์สุกัญญา แพรสมบูรณ์ อาจารย์พยุง เฉชอยู่ อาจารย์อนุสรณ์ ศรีสรवल และอาจารย์สาวิตรี กลั่นเอี่ยม ภาควิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรมและอุปกรณ์การแพทย์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ อาจารย์สิริภพ ผู้ประกาย และ อาจารย์สรวิวัฒน์ ชิวปรีชา ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และคุณวิสิทธิ์ ยิ้มมัน ที่ให้การดูแล ห่วงใย รวมทั้งเป็นกำลังใจอย่างหาที่เปรียบมิได้

สุรพันธ์ ยิ้มมัน

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ปัญหาและที่มาของการศึกษาวิจัย.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษาวิจัย.....	2
1.3 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในการศึกษาวิจัย.....	2
1.4 ขอบเขตการวิจัย.....	3
1.5 ขั้นตอนของการศึกษา.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข.....	4
2.1 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง.....	4
2.2 สมการผลต่างสี่บเนื่อง.....	7
2.3 การแปลงแซด.....	8
2.4 การแปลงแซดผกผัน.....	12
2.5 ผลตอบสนองความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา.....	14
2.6 การหาผลตอบสนองความถี่โดยวิธีทางเรขาคณิต.....	18
2.7 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z	22
2.8 โครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR.....	23
บทที่ 3 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Notch.....	29
3.1 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single Notch.....	29
3.2 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple Notch.....	34
3.3 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple Notch ด้วยหลักการที่นำเสนอ.....	37
3.4 ตัวอย่างการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple Notch.....	43

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ผลการทดลองและการประยุกต์.....	46
4.1 ผลการทดลองการเปรียบเทียบระหว่างหลักการเดิมกับหลักการที่นำเสนอ	46
4.2 การสร้างจริงด้วยตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข	48
4.3 การประยุกต์ในการลดทอนสัญญาณรบกวนที่ปะปน มากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ.....	49
บทที่ 5 สรุปผลการทดลอง.....	50
บรรณานุกรม.....	51
ภาคผนวก	53
ประวัติผู้เขียน	78

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 แสดงผลของการแปลงแซด	10
2.2 สัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z	23
3.1 อัตราการขยายที่ความถี่ DC, $\omega_1, \omega_2, \omega_c$ และ π ของ Notch filter 1, Notch filter 2 และ Multiple notch filter.....	38
4.1 ตำแหน่งของ Pole-zero และค่า b_1, r_1 ของ Notch filter 1	46
4.2 ตำแหน่งของ Pole-zero และค่า b_2, r_2 ของ Notch filter 2	46

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 แสดงการสุ่มตัวอย่างสัญญาณเชิงอุปมาน	4
2.2 แสดงสัญญาณสุ่มตัวอย่าง	5
2.3 แสดงสเปกตรัมของสัญญาณจากการสุ่มตัวอย่าง	6
2.4 แสดงตำแหน่งการวาง โพลและซีโรของสมการที่ 2.28	12
2.5 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{z+1}{z}$	16
2.6 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$	18
2.7 ตัวอย่างการหาผลตอบสนองความถี่โดยใช้วิธีทางเรขาคณิต	19
2.8 การหาผลตอบสนองความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{z+1}{z-0.7071}$ โดยใช้วิธีทางเรขาคณิต	21
2.9 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{z+1}{z-0.7071}$	22
2.10 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z	22
2.11 แสดงไดอะแกรมการทำงานของตัวกรองเชิงเลขพื้นฐาน	23
2.12 แสดงองค์ประกอบพื้นฐานทั้ง 3 ตัวที่ใช้เป็นส่วนประกอบของตัวกรองเชิงเลข	24
2.13 แสดงโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบตรง I	25
2.14 แสดงโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบตรง II	26
2.15 แสดงโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบขนาน	27
2.16 แสดงโครงสร้างย่อยของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบขนาน	28
2.17 แสดงโครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบลำดับ	28
2.18 แสดงโครงสร้างย่อยตัวกรองเชิงเลข IIR แบบลำดับ	28
3.1 ตำแหน่งการวาง Pole-zero ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลงการวางตำแหน่ง Pole	29
3.2 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลงการวางตำแหน่ง Pole	30
3.3 ตำแหน่งของ Pole ที่ถูกเปลี่ยนแปลง	31
3.4 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้เปลี่ยนแปลงตำแหน่ง Pole	32
3.5 ตำแหน่งการวาง Pole-zero ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole	34

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.6	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole34
3.7	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ Pole.....35
3.8	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch หลังทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ Pole36
3.9	ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 138
3.10	ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 238
3.11	ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ที่ค่า $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$43
3.12	ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ตามหลักการที่นำเสนอ.....44
3.13	ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 2 ตามหลักการที่นำเสนอ.....44
3.14	การวางตำแหน่ง Pole-zero ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ45
3.15	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ45
4.1	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการเดิมก่อนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole47
4.2	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการเดิมก่อนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole47
4.3	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ47
4.4	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่เสนอจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB48
4.5	ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่เสนอสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัลและวัดด้วยเครื่อง Dynamic signal analyzer.....48
4.6	บอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 และเครื่อง Dynamic signal analyzer ที่ใช้ขณะทำการทดลอง49

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.7	ผลลดทอนสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ49

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ปัญหาและที่มาของการศึกษาวิจัย

แต่เดิม Notch filter สามารถสร้างได้ด้วยวงจร Analog แต่เนื่องจากการสร้างด้วยวงจร Analog มีข้อจำกัดอยู่หลายประการ [1] โดยเฉพาะอย่างยิ่งในแง่ของความเที่ยงตรง ซึ่งต่อมา Notch filter จึงได้ถูกนำไปสร้างให้อยู่ในรูปของตัวกรองเชิงเลข (Digital filter) แบบ FIR หรือ IIR แต่ในการสร้างด้วยตัวกรองเชิงเลข FIR จะมีข้อจำกัดคือไม่สามารถสร้างให้มี Bandwidth แคบๆ ได้ ดังนั้นในการสร้าง Notch filter มักจะกระทำด้วยตัวกรองเชิงเลขแบบ IIR [6-8] ซึ่งการออกแบบสามารถกระทำได้หลายวิธีเช่น ออกแบบโดยการเปลี่ยนรูปมาจากตัวกรอง Analog [1] ออกแบบโดยอาศัยคุณสมบัติของตัวกรองเชิงเลขแบบ All-pass [2] และออกแบบโดยการกำหนดตำแหน่ง Pole-zero [12,13] ซึ่งการออกแบบด้วยวิธีหลังจะเป็นวิธีที่ง่าย แต่ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่บางประการเช่น จะมีอัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่านที่ไม่สมมาตรกัน และนอกจากนี้ยังไม่สามารถควบคุมให้มีขนาดตามที่ต้องการได้ ซึ่งข้อจำกัดดังกล่าวนี้สามารถแก้ไขได้โดยการเปลี่ยนตำแหน่งของ Pole ให้อยู่ในตำแหน่งที่เหมาะสมซึ่งจะทำให้ อัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่านมีความสมมาตรกัน และนอกจากนี้ยังมีการหาค่าคงที่สำหรับควบคุมอัตราขยายในช่วงความถี่ผ่านให้มีขนาดตามที่ต้องการได้อีกด้วย [3,4]

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน Notch filter ได้แก่การกำจัดสัญญาณรบกวนเฉพาะความถี่ แต่ในการประยุกต์ใช้งานบางประเภทอาจมีสัญญาณรบกวนมากกว่าหนึ่งความถี่ ดังนั้นในการที่จะกำจัดสัญญาณรบกวนที่มากกว่าหนึ่งความถี่ให้หมดไปจำเป็นต้องใช้ตัวกรองเชิงเลขที่มี Notch frequency มากกว่าหนึ่งความถี่ (Multiple notch filter) ซึ่งในการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch นั้นสามารถกระทำได้โดยการนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกันมาต่อลำดับกัน แต่ในการนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่ถูกออกแบบตามหลักการเดิมก่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole มาต่อลำดับกันเพื่อสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ผลตอบสนองทางขนาดที่ได้จะไม่สามารถควบคุมอัตราขยายให้มีขนาดตามที่ต้องการได้ แต่ถ้านำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่ถูกออกแบบตามหลักการเดิมโดยมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole ซึ่งอาจจะยังอยู่ในตำแหน่งที่ไม่เหมาะสม มาต่อลำดับกันเพื่อสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ผลตอบสนองทางขนาดที่ได้นั้นสามารถควบคุมอัตราขยายให้มีขนาดตามที่ต้องการได้เพียงบางความถี่เท่านั้น แต่บางความถี่โดยเฉพาะช่วงความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency อัตราการขยายจะไม่สามารถควบคุมได้ [5] ต่อมาได้มีผู้คิดค้นวิธีการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch [3] ที่ให้ค่าอัตราขยายในช่วงความถี่

ผ่านมีค่าใกล้เคียงกันรวมถึงความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency แต่ยังไม่กำหนดขนาดไม่ได้ และนอกจากนี้ในการหาตำแหน่ง Pole ที่เหมาะสมใช้การคำนวณแบบวนรอบ(Iteration) และก่อนการคำนวณจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งถ้ากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นไม่เหมาะสม จำนวนรอบของการคำนวณเพื่อหาตำแหน่ง Pole ที่เหมาะสมจะเพิ่มขึ้น ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณนาน หรือยิ่งไปกว่านั้นคำตอบที่เป็นตำแหน่งของ Pole อาจไม่ลู่เข้า (Divergence) นั่นก็หมายถึงหาคำตอบไม่ได้นั่นเอง

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงนำเสนอการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch โดยที่ผลตอบสนองทางขนาดระหว่าง Notch frequency สามารถควบคุมอัตราการขยายให้เป็นที่ต้องการได้ โดยการออกแบบจะหาตำแหน่งการวาง Pole ที่เหมาะสมและสอดคล้องกันระหว่างตัวกรองเชิงเลขแบบ Single Notch ทั้งสองที่นำมาต่อลำดับกัน

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษาวิจัย

- 1.2.1 เพื่อนำเสนอการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ด้วยวิธีกำหนดตำแหน่ง Pole-zero ที่เหมาะสมโดยใช้สมการความสัมพันธ์
- 1.2.2 ศึกษข้อจำกัดของการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ด้วยวิธีกำหนดตำแหน่ง Pole-zero
- 1.2.3 ต้องการสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ให้มีคุณสมบัติใกล้เคียงอุดมคติมากที่สุด
- 1.2.4 เพื่อนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ไปประยุกต์ใช้งานทางด้านการแพทย์

1.3 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการศึกษาวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้จึงนำเสนอวิธีการหาตำแหน่ง Pole ที่เหมาะสมสำหรับตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch โดยการสร้างสมการความสัมพันธ์และแก้สมการ เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับ อัตราขยายในช่วงแถบความถี่ผ่าน ที่ไม่สมมาตรกันและควบคุมไม่ได้ และโดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency ลำดับขั้นตอนการออกแบบเริ่มจาก การออกแบบเริ่มต้นจากออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกัน โดยจะทำการหาตำแหน่งการวาง Pole ที่เหมาะสมและสอดคล้องกันระหว่าง Single notch filter เพื่อที่จะทำให้สามารถควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band ที่ความถี่ DC , π และที่ความถี่ใดๆอีกหนึ่งความถี่ รวมทั้งสิ้น 3 ความถี่ให้มีขนาดตามต้องการ จากนั้นก็จะนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกันมาต่อลำดับกัน ก็จะทำให้เกิดเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สามารถควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band ได้และโดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงระหว่าง Notch frequency

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

- 1.4.1 นำเสนอการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch โดยการหาตำแหน่งการวาง Pole ที่เหมาะสม โดยการสร้างสมการความสัมพันธ์และแก้สมการ
- 1.4.2 หาตำแหน่งของ Pole ที่เหมาะสมเพื่อให้อัตราขยายในช่วงความถี่ผ่านของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch สามารถควบคุมได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency
- 1.4.3 เปรียบเทียบผลระหว่างหลักการเดิมกับหลักการที่นำเสนอ
- 1.4.4 นำตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่ได้รับการสร้างด้วยวิธีกำหนดตำแหน่ง Pole-zero หลังได้รับการปรับปรุงวิธีการออกแบบไปประยุกต์ใช้ในการกำจัดสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ

1.5 ขั้นตอนของการศึกษาวิจัย

ในการศึกษาวิจัยได้แบ่งออกเป็นขั้นตอนต่างๆดังต่อไปนี้

- 1.5.1 ศึกษาคุณสมบัติของตัวกรองเชิงเลขแบบ Signal notch
- 1.5.2 ศึกษาการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ด้วยวิธีต่างๆ
- 1.5.3 ศึกษาข้อจำกัดของการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ด้วยวิธีต่างๆ
- 1.5.4 ศึกษาคุณสมบัติและการสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ด้วยหลักการเดิม
- 1.5.5 นำเสนอการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch จากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch โดยการหาตำแหน่งการวาง Pole ที่เหมาะสม
- 1.5.6 ออกแบบและสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch โดยใช้หลักการเดิมและหลักการที่นำเสนอโดยใช้โปรแกรม MATLAB
- 1.5.7 สร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch โดยใช้หลักการเดิมและหลักการที่นำเสนอโดยใช้ตัวประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31
- 1.5.8 นำตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างขึ้นด้วยตัวประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 ไปกำจัดสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ
- 1.5.9 เปรียบเทียบผลการทดลองระหว่างหลักการเดิมกับหลักการที่นำเสนอ
- 1.5.10 สรุปผลการทดลอง

บทที่ 2

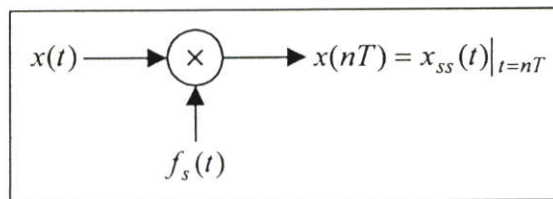
ทฤษฎีการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

2.1 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง

ในการเปลี่ยนสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog signal) ไปเป็นสัญญาณเชิงเลข (Discrete time signal) นั้น จำเป็นจะต้องมีการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง (Sampling frequency : f_s) โดยที่ไม่ทำให้สัญญาณสูญเสียข้อมูลที่สำคัญไปนั้นต้องเป็นไปตามทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง [12-15] (Sampling Theory) ของแชนนอน (Shannon) ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้าสัญญาณเชิงอุปมาน $x(t)$ ซึ่งมีแบนด์วิดท์เท่ากับ f_0 แล้ว จะสามารถทำการสุ่มตัวอย่างโดยสัญญาณที่ได้ไม่สูญเสียข้อมูลที่สำคัญก็ต่อเมื่อความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง f_s มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของความถี่ f_0

$$f_s \geq 2f_0 \quad (2.1)$$

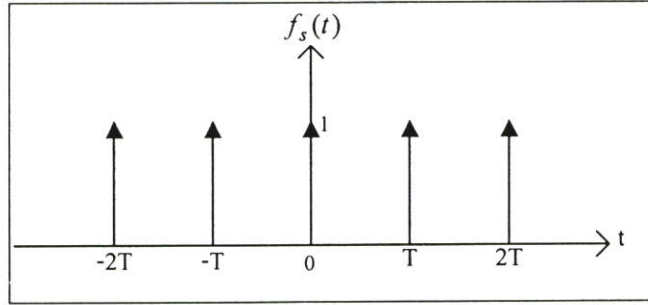
โดยทั่วไปอาจทำการสุ่มตัวอย่างด้วยความถี่ $f_{sn} = 2f_0$ พอดี ซึ่งค่าความถี่นี้เรียกว่า ความถี่ไนควิสต์ (Nyquist Frequency) และคาบเวลา $T_n = 1/2f_0$ นี้ เรียกว่า ช่วงเวลาสุ่มตัวอย่างไนควิสต์ (Nyquist Interval) แต่ในทางปฏิบัติเพื่อหลีกเลี่ยงผลของปรากฏการณ์ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity) ที่อาจเกิดจากการสุ่มตัวอย่างจึงมักใช้ความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง f_s มากกว่าค่าความถี่ไนควิสต์ f_{sn} ขึ้นไป ส่วนจะมีค่ามากกว่าเท่าใดนั้นขึ้นกับลักษณะงานไม่ได้มีการกำหนดค่าที่แน่นอน



รูปที่ 2.1 แสดงการสุ่มตัวอย่างสัญญาณเชิงอุปมาน

รูปที่ 2.1 แสดงการสุ่มตัวอย่างในโดเมนเวลาซึ่งก็คือการคูณสัญญาณเชิงอุปมาน $x(t)$ กับ ลำดับของอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $f_s(t)$ โดยที่อิมพัลส์แต่ละตัวสมมุติให้มีความห่างเท่ากับ T วินาที ซึ่ง สามารถแทนได้ด้วยสมการ

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.2)$$

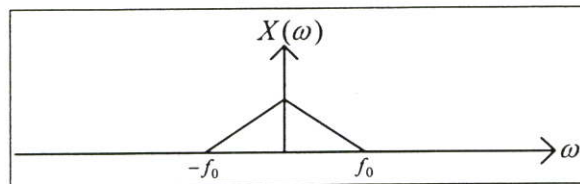


รูปที่ 2.2 แสดงสัญญาณสุ่มตัวอย่าง

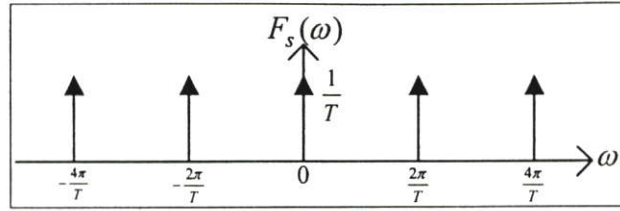
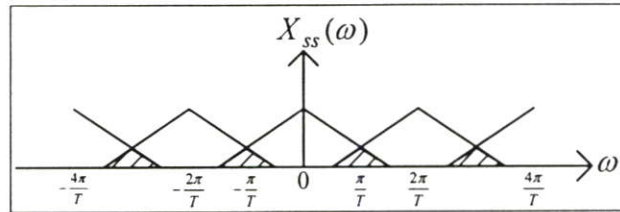
และเมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ เพื่อทำการหาค่าสเปกตรัมความถี่ของ $f_s(t)$ จะได้

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (2.3)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า เมื่อพิจารณาในโดเมนความถี่ สเปกตรัมความถี่ของสัญญาณ $f_s(t)$ เป็นอิมพัลส์ที่วางตัวห่างเท่าๆ กัน ไปบนแกนความถี่เช่นกัน ดังรูปที่ 2.3 (b)



(a) สเปกตรัมของสัญญาณเชิงอุปมาน $x(t)$

(b) สเปกตรัมของสัญญาณสุ่มตัวอย่าง $f_s(t)$ (c) สเปกตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง $x_{ss}(t)$

รูปที่ 2.3 แสดงสเปกตรัมของสัญญาณจากการสุ่มตัวอย่าง

ถ้าให้ $x_{ss}(t)$ เป็นสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง ดังนั้น

$$x_{ss}(t) = f_s(t) \cdot x(t) \quad (2.4)$$

และถ้าให้ $X(\omega)$ เป็นสเปกตรัมความถี่ของ $x(t)$ เนื่องจากในโดเมนเวลาสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างเป็นการคูณกันของสองสัญญาณ ดังนั้นในโดเมนความถี่จึงเป็นการทำคอนโวลูชัน (Convolution) ของสเปกตรัมของ $f_s(t)$ และ $x(t)$

$$X_{ss}(\omega) = F_s(\omega) * X(\omega) \quad (2.5)$$

การคอนโวลูชันนี้แสดงเป็นแผนภาพดังรูปที่ 2.3 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเห็นว่าสเปกตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง $X_{ss}(\omega)$ เป็นการนำสเปกตรัมของ $X(\omega)$ มาวางเรียงห่างเท่าๆ กันไปตลอดบนแกนความถี่ ω ซึ่งจากรูปที่ 2.3 (c) จะเห็นว่า ถ้าความถี่ของสัญญาณสุ่มตัวอย่าง $f_s(t)$ มีค่าน้อยกว่าความถี่ไนควิสต์จะทำให้ช่วงห่างของแต่ละกลุ่มของสเปกตรัมเข้ามาเกยทับกัน

ผลนี้ทำให้เกิดความผิดเพี้ยนไปของสเปกตรัมของสัญญาณเดิมซึ่งผลนี้มีชื่อเรียกว่า ผลการเอเลสซิง (Aliasing Effect) นอกจากนี้ รูปที่ 2.3 ยังแสดงให้เห็นว่าผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข จะมีผลตอบสนองความถี่ที่มีลักษณะเป็นคาบ คือ เริ่มซ้ำค่าเดิมที่จุดที่มีค่าความถี่เป็น $2\pi/T$ หรือ $f_s/2$ ซึ่งความถี่นี้เรียกว่า ความถี่พับ ซึ่งการที่ผลตอบสนองความถี่ที่มีลักษณะเป็นคาบก็เนื่องมาจากการสุ่มตัวอย่างสัญญาณนั่นเอง

2.2 สมการผลต่างสืบเนื่อง

ในการวิเคราะห์ระบบเชิงอุปมาน คุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลาจะสามารถเขียนอธิบายโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) [12-15] เช่นเดียวกันในระบบเชิงเลขก็จะมีสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference Equation) ไว้ใช้ในการอธิบายคุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา ซึ่งสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับที่ n สามารถเขียนได้ดังสมการที่ 2.6

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^m b_k y(n-k) \quad (2.6)$$

โดยที่ $x(n)$ เป็นลำดับสัญญาณขาเข้า $y(n)$ เป็นลำดับสัญญาณขาออกและ a_k, b_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์ สมการผลต่างสามารถแสดงในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้คุณสมบัติการหน่วงเวลาของการแปลงแซค ดังสมการที่ 2.7 และ 2.8

$$a_k x(n) \leftrightarrow a_k X(z) \quad (2.7)$$

$$a_k x(n-k) \leftrightarrow a_k X(z)z^{-k} \quad (2.8)$$

จากคุณสมบัติตามสมการที่ 2.7 และ 2.8 ทำให้จัดรูปสมการที่ 2.6 ได้ใหม่แสดงดังสมการที่ 2.9

$$Y(z) = \sum_{k=0}^n a_k X(z)z^{-k} - \sum_{k=1}^m b_k Y(z)z^{-k} \quad (2.9)$$

จัดรูปสมการเพื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังสมการที่ 2.10

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^m b_k z^{-k}\right)} \quad (2.10)$$

2.3 การแปลงแซด

การแปลงแซด (Z-Transform) [12-15] ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสามารถนิยามอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ (Power series) ดังสมการที่ 2.11 เรียกสมการที่ 2.11 นี้ว่า การแปลงแซดแบบตรง (Direct Z-Transform)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.11)$$

เมื่อ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable)

$x(n)$ เป็นลำดับสัญญาณ (Sequence signal)

แต่สำหรับระบบแบบคอซอล การแปลงแซดของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสามารถเขียนได้ดังสมการที่ 2.12 เรียกสมการที่ 2.12 นี้ว่า การแปลงแซดด้านเดียว (One-side Z-Transform)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.12)$$

การแปลงแซดของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องเขียนแทนได้อีกรูปแบบหนึ่ง ดังสมการที่ (2.13)

$$X(z) = Z\{x(n)\} \quad (2.13)$$

และจากสมการที่ 2.11 และ 2.12 จะเห็นได้ว่าผลการแปลงแซดก็คือ อนุกรมอนันต์ ดังนั้นจะมีกลุ่มค่าแซด ที่ทำให้ $X(z)$ หาคำตอบได้เรียกกลุ่มค่าแซดนี้ว่า ขอบเขตการลู่อเข้า (Region of convergence) โดยค่าแซดนี้จะมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน

2.3.1 คุณสมบัติของการแปลงแซด

2.3.1.1 คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น (Linearity property) ดังสมการที่ 2.14

$$Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (2.14)$$

2.3.1.2 คุณสมบัติการเลื่อน (Shift property)

$$\text{กำหนดให้ } y(n) = x(n-k) \quad k \geq 0$$

การแปลงแซดของ $y(n)=Y(z)$ เขียนแทนได้ ดังสมการที่ 2.15 และ 2.16

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \quad (2.15)$$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)z^{-n} \quad (2.16)$$

กำหนดให้ระบบที่กำลังพิจารณาเป็นระบบแบบคอซอล (Causal system) ดังนั้นสมการที่ 2.16 สามารถเขียนได้ใหม่ดังสมการที่ 2.17 - 2.20

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)z^{-n} \quad (2.17)$$

$$Y(z) = z^{-k} [x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(n)z^{-n}] \quad (2.18)$$

$$Y(z) = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.19)$$

$$Y(z) = z^{-k} X(z) \quad (2.20)$$

2.3.1.3. คุณสมบัติการประสาน (Convolution Property)

จากสมการผลการประสาน

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.21)$$

$$y(n) = h(n) \otimes x(n) \quad (2.22)$$

ทำการแปลงแซด $x(n), h(n)$ ให้เป็น $x(z), h(z)$ จะได้การประสาน ดังสมการที่ 2.23

$$Y(z) = H(z).X(z) \quad (2.23)$$

ซึ่งผลการแปลงแซดของฟังก์ชันสัญญาณไม่ต่อเนื่อง ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงผลของการแปลงแซด

Entry number	Discrete-time Sequence $x(n), n \geq 0$	z-transform $X(z)$	Region of convergence of $X(z)$
1	$k\delta(n)$	k	everywhere
2	k	$\frac{kz}{z-1}$	$ z > 1$
3	kn	$\frac{kz}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
4	kn^2	$\frac{kz(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z > 1$
5	$ke^{-\alpha n}$	$\frac{kz}{z-e^{-\alpha}}$	$ z > e^{-\alpha}$
6	$kne^{-\alpha n}$	$\frac{kze^{-\alpha}}{(z-e^{-\alpha})^2}$	$ z > e^{-\alpha}$
7	$1-e^{-\alpha n}$	$\frac{z(1-e^{-\alpha})}{z^2-z(1+e^{-\alpha})+e^{-\alpha}}$	$ z > e^{-\alpha}$
8	$\cos(\alpha n)$	$\frac{z^2-z \cosh \alpha}{z^2-2z \cosh \alpha+1}$	$ z > 1$
9	$\sin(\alpha n)$	$\frac{z \sin \alpha}{z^2-2z \cos \alpha+1}$	$ z > 1$
10	$e^{-\alpha n} \sin(\alpha n)$	$\frac{ze^{-\alpha} \sin \alpha}{z^2-2ze^{-\alpha} z \cos \alpha+e^{-2\alpha}}$	$ z > e^{-\alpha}$
11	$e^{-\alpha n} \cos(\alpha n)$	$\frac{ze^{-\alpha} (ze^{\alpha} - \cos \alpha)}{z^2-2ze^{-\alpha} \cos \alpha+e^{-2\alpha}}$	$ z > e^{-\alpha}$
12	$\cosh(\alpha n)$	$\frac{z^2-z \cosh \alpha}{z^2-2z \cosh \alpha+1}$	$ z > \cosh \alpha$
13	$\sinh(\alpha n)$	$\frac{z \sinh \alpha}{z^2-2z \cosh \alpha+1}$	$ z > \sinh \alpha$
14	$k\alpha^n$	$\frac{kz}{(z-\alpha)^2}$	$ z > \alpha$
15	$kn\alpha^n$	$\frac{k\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$ z > \alpha$
16	$2 c p ^n \cos(n\angle p + \angle c)$	$\frac{cz}{z-p} + \frac{c^* z}{z-p^*}$	

2.3.2 รูปเศษส่วนของการแปลงแซด

สัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง $x(n)$ หรือระบบแบบไม่ต่อเนื่อง $y(n)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $X(z)$ หรือ $Y(z)$ ได้โดยการแปลงแซดค่า $X(z)$ หรือ $Y(z)$ นี้เมื่อจัดให้อยู่ในรูปเศษส่วน สามารถบอกรายละเอียดคุณลักษณะของสัญญาณและระบบได้ เช่น ทราบถึงตำแหน่งของโพลและซีโรบนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซดโดยการนำค่า $X(z)$ หรือ $Y(z)$ ไปแก้สมการหาค่า z และนำคำตอบของ z ไปเขียนลงในระนาบแซดเชิงซ้อน (Complex Z-plane) ค่า z เป็นคำตอบของเศษ เรียกว่า ซีโร แทนด้วยสัญลักษณ์ \circ ค่า z ที่เป็นคำตอบของส่วน เรียกว่า โพล แทนด้วยสัญลักษณ์ \times ตัวอย่าง หาดำแหน่งโพลและซีโรของสัญญาณ

$$x(n) = \begin{cases} a^n & \text{for } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{for elsewhere} \end{cases}$$

จากที่โจทย์กำหนดพบว่า n เริ่มต้นจาก 0 ถึง $M-1$ จะได้สมการของการแปลงแซด ดังสมการที่ 2.24

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n} \quad (2.24)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n \quad (2.25)$$

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{z}\right)^{M-1} \quad (2.26)$$

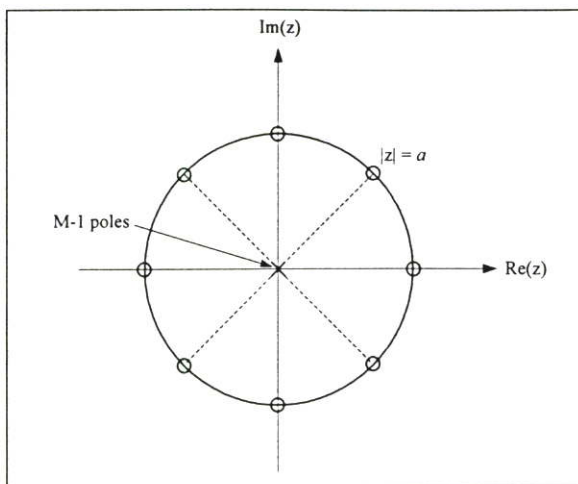
จัดสมการที่ 2.26 ได้ใหม่ ดังสมการที่ 2.27

$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^M}{1 - az^{-1}} \quad (2.27)$$

นำ z^M คูณตลอดทั้งเศษและส่วน

$$X(z) = \frac{z^M - a^M}{z^M - az^{M-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z - a)} \quad (2.28)$$

นำสมการที่ 2.28 เฉพาะเศษมาเขียนเป็นตำแหน่งซีโร และเฉพาะส่วนมาเขียนเป็นตำแหน่งโพลดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงตำแหน่งการวางโพลและซีโรดังสมการที่ 2.28

2.4 การแปลงแซดพคผัน

เป็นการแปลง $X(z)$ กลับเป็น $x(n)$ ทำได้ 3 วิธี สามารถหาศึกษาได้จาก [12-15] ใน การศึกษาวิจัยครั้งนี้นำเสนอการแปลงแซดพคผันด้วยวิธีแยกเศษส่วนย่อย (Partial Fraction Expansion) ซึ่งทำได้โดยจัดสมการ $X(z)$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อย จากนั้นนำสมการที่จัดรูปได้ แปลงให้เป็น $x(n)$ โดยใช้ตารางที่ 2.1 พิจารณาสมการที่ 2.29

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} \quad (2.29)$$

การจัดรูปสมการจะเป็นไปตามตำแหน่งของโพลในระนาบแซดซึ่งแบ่งออกได้ดังต่อไปนี้

1. กรณีโพลมีตำแหน่งไม่ซ้ำกัน สมการที่ 2.29 สามารถจัดรูปได้ดังสมการที่ 2.30

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{C_M}{1 - p_M z^{-1}} \quad (2.30)$$

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \frac{C_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{C_M z}{z - p_M} \quad (2.31)$$

$$X(z) = B_0 + \sum_{k=1}^M \frac{C_k z}{z - p_k} \quad (2.32)$$

2. กรณีโพลอยู่มากกว่าหนึ่งตัวอยู่ตำแหน่งซ้ำกัน สมการที่ 2.29 สามารถจัดรูปดังสมการที่ 2.33

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{D_i}{(z - p_k)^i} \quad (2.33)$$

และค่า D_i หาได้จากสมการที่ 2.34

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} [(z - p_k)^m X(z)]_{z=p_k} \quad (2.34)$$

แต่ถ้าระบบหรือลำดับสัญญาณมีโพลมากกว่า 1 ตัว และตำแหน่งของโพลอยู่ในตำแหน่งที่ซ้ำกันและไม่ซ้ำกัน ตัวอย่างเช่น ระบบมีโพลทั้งหมด 3 ตัว มีโพล 2 ตัวอยู่ตำแหน่งเดียวกันส่วนอีก 1 ตัวอยู่คนละตำแหน่งการจัดสมการในรูปเศษส่วนย่อยก็จะใช้สมการที่ 2.32 และ 2.33 รวมกัน ตัวอย่าง จงแปลงเซตผกผันของสัญญาณดังสมการที่ 2.35 โดยใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อย

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} - 0.375z^{-2}} \quad (2.35)$$

ทำกำลังของ z ในสมการที่ 2.35 ให้เป็นบวกโดยนำ z^2 คูณตลอด

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.25z - 0.375} \quad (2.36)$$

ทำการแยกเศษส่วนย่อยได้ดังสมการที่ 2.37

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z - 0.75)(z + 0.5)} = \frac{C_1}{z - 0.75} + \frac{C_2}{z + 0.5} \quad (2.37)$$

กำหนดให้สมการที่ 2.37 มีค่าเท่ากับ $F(z)$ ดังสมการที่ 2.38

$$F(z) = \frac{1}{(z - 0.75)(z + 0.5)} = \frac{C_1}{z - 0.75} + \frac{C_2}{z + 0.5} \quad (2.38)$$

หา C_1 นำ $(z - 0.75)$ คูณตลอดในสมการที่ 2.38 จะได้

$$\frac{1}{z+0.5} = C_1 + \frac{C_2(z-0.75)}{(z+0.5)} \quad (2.39)$$

แทนค่า z เท่ากับ 0.75 ลงในสมการที่ 2.39 ได้ค่า C_1 ดังสมการที่ 2.40

$$C_1 = \frac{1}{0.75+0.5} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad (2.40)$$

ส่วนค่า C_2 สามารถหาได้ด้วยวิธีเดียวกับการหาค่า C_1 ได้ค่า C_2 ดังสมการที่ 2.41

$$C_2 = \frac{1}{-0.5-0.75} = -\frac{4}{5} = -0.8 \quad (2.41)$$

แทนค่า C_1 และ C_2 ลงในสมการที่ 2.37 จะได้

$$X(z) = \frac{0.8z}{z-0.75} - \frac{0.8z}{z+0.5} \quad (2.42)$$

ใช้ตารางที่ 2.1 แปลง $X(z)$ ในสมการที่ 2.42 กลับเป็น $x(n)$ ได้ดังสมการที่ 2.43 และ 2.44

$$x(n) = Z^{-1} \left[\frac{0.8z}{z-0.75} - \frac{0.8z}{z+0.5} \right] \quad (2.43)$$

$$x(n) = 0.8((0.75)^n - (-0.5)^n) \quad \text{เมื่อ } n > 0 \quad (2.44)$$

2.5 ผลตอบสนองความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [12,13]

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z)$ ดังสมการที่ 2.45

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \quad (2.45)$$

ในการหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบแบบไม่ต่อเนื่องนั้นจะแทน $z = e^{j\omega}$ ลงใน $H(z)$ ดังสมการที่ 2.46

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-2j\omega} + \dots}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-2j\omega} + \dots}$$

$$H(\omega) = H_R(\omega) + H_I(\omega) \quad (2.46)$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ 2.46 จะประกอบด้วยค่าที่เป็นจำนวนจริงและค่าที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งในการหาผลตอบสนองทางความถี่จะแบ่งการคำนวณออกเป็น 2 ลักษณะคือ

2.5.1 ผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude response)

คำนวณได้โดยการหาค่าสัมบูรณ์ของสมการที่ 2.46 เขียนได้ดังสมการที่ 2.47

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \quad (2.47)$$

2.5.2 ผลตอบสนองทางเฟส (Phase response)

คำนวณได้จากสมการที่ 2.48 ซึ่งผลตอบสนองทางเฟสจะถูกแทนด้วย $\Theta(\omega)$ หรือ $\angle H(\omega)$

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \quad (2.48)$$

ตัวอย่าง จงหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องดังสมการที่ 2.49

$$H(z) = \frac{1+z}{z} \quad (2.49)$$

Sol กำหนดให้ $z = e^{j\omega}$

$$H(\omega) = \frac{1+e^{j\omega}}{e^{j\omega}} = \frac{1}{e^{j\omega}} + 1$$

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega} \quad (2.50)$$

และจากสมการ $re^{j\omega} = r \cos(\omega) + jr \sin(\omega)$ ดังนั้นสมการที่ 2.50 สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ 2.51

$$H(\omega) = 1 + (\cos(-\omega) + j \sin(-\omega))$$

$$H(\omega) = 1 + \cos(\omega) - j \sin(\omega) \quad (2.51)$$

จากสมการที่ 2.51 จะพบว่าส่วนที่เป็นจำนวนจริงคือ $H_R(\omega) = 1 + \cos(\omega)$ และส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $-\sin(\omega)$ ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาดจะมีค่าดังสมการที่ 2.52

$$|H(\omega)| = \sqrt{[1 + \cos(\omega)]^2 + [-\sin(\omega)]^2}$$

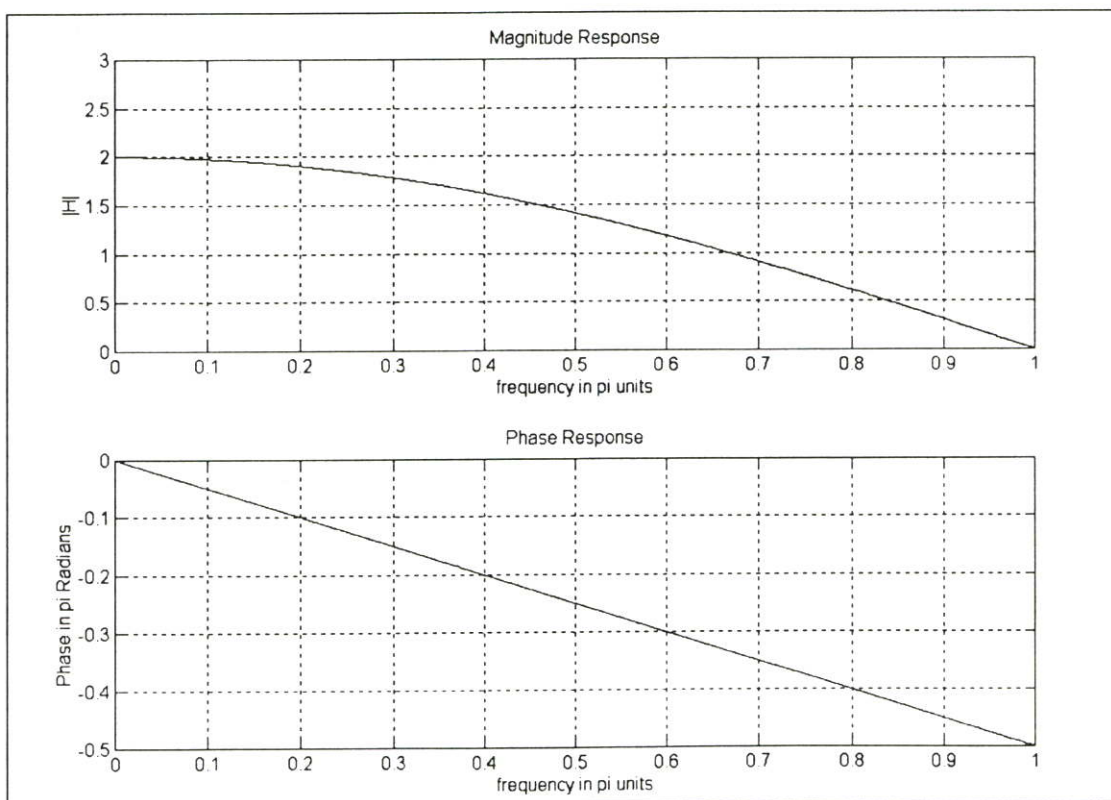
$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{2 + 2\cos(\omega)} \quad (2.52)$$

และผลตอบสนองทางเฟสเขียนได้จากสมการที่ 2.48 โดยนำค่าจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนจากสมการที่ 2.51 แสดงได้ดังสมการที่ 2.53

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{-\sin(\omega)}{1 + \cos(\omega)} \quad (2.53)$$

และจากสมการที่ 2.52 และ 2.53 เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า ω ในช่วง $0 - \pi$ ทำให้เขียนกราฟผลตอบสนองความถี่ได้ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{z+1}{z}$

ตัวอย่าง จงหาผลตอบสนองความถี่จากสมการผลต่าง

$$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) \quad (2.54)$$

Sol สมการที่ 2.54 สามารถแปลงให้เป็น $H(z)$ ได้ดังสมการที่ 2.55

$$Y(z) = 0.9Y(z)z^{-1} + X(z)$$

$$Y(z) - 0.9Y(z)z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)[1 - 0.9z^{-1}] = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \quad (2.55)$$

แทนค่า $z = e^{j\omega}$ ลงในสมการที่ 2.55

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$

พิจารณาเฉพาะส่วน

$$1 - 0.9e^{-j\omega} = (1 - 0.9\cos\omega) + j0.9\sin\omega$$

มีค่าสัมบูรณ์ดังสมการที่ 2.56 และมีมุมดังสมการที่ 2.57

$$|1 - 0.9e^{-j\omega}| = \sqrt{(1 - 0.9\cos\omega)^2 + (0.9\sin\omega)^2}$$

$$|1 - 0.9e^{-j\omega}| = \sqrt{1.81 - 1.8\cos\omega} \quad (2.56)$$

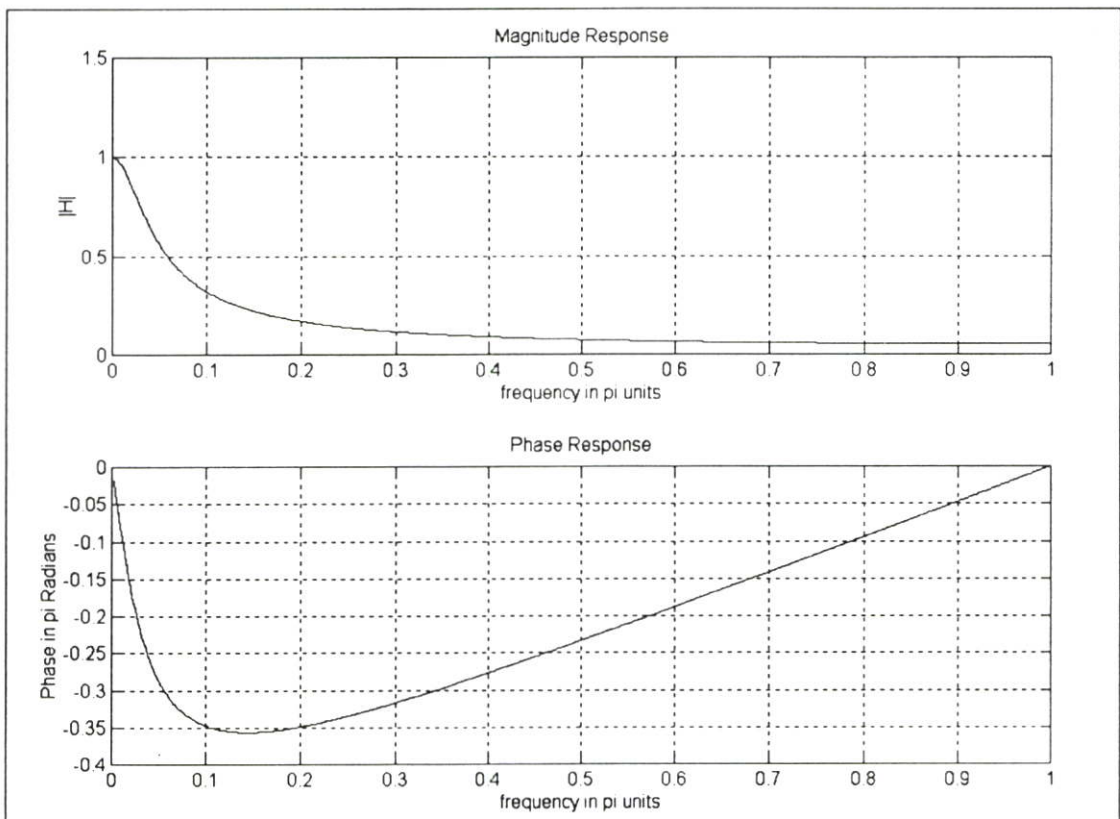
$$\angle(1 - 0.9e^{-j\omega}) = \tan^{-1} \frac{0.9\sin\omega}{1 - 0.9\cos\omega} \quad (2.57)$$

ดังนั้นสมการที่ 2.55 จะมีค่า Magnitude response ดังสมการที่ 2.58 และมี Phase response ดังสมการที่ 2.59

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1.81 - 1.8\cos\omega}} \quad (2.58)$$

$$\Theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{0.9\sin\omega}{1.81 - 1.8\cos\omega} \quad (2.59)$$

นำไปเขียนเป็นกราฟผลตอบสนองความถี่ได้ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$

2.6 การหาผลตอบสนองความถี่โดยวิธีทางเรขาคณิต [12,13]

ในการหาผลตอบสนองความถี่จะมีความยุ่งยากมากขึ้นตามการเพิ่มจำนวนของ Zero และ Pole ดังสมการที่ 2.60

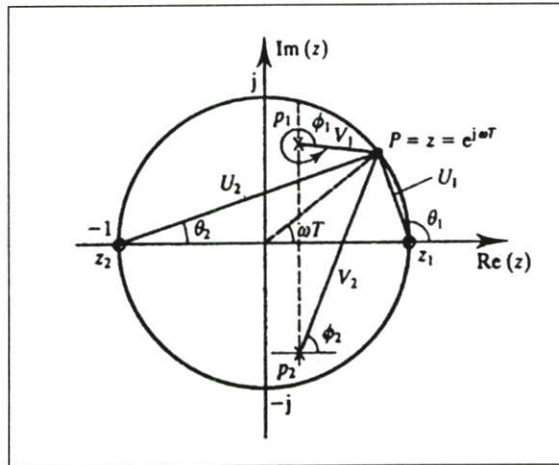
$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_N)}$$

$$H(z) = K \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} \quad (2.60)$$

แทนค่า $z = e^{j\omega}$ ลงในสมการที่ 2.60

$$H(\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^M (e^{j\omega} - z_i)}{\prod_{i=1}^N (e^{j\omega} - p_i)} \quad (2.61)$$

ในการหาผลตอบสนองความถี่จะต้องกำหนดความถี่ที่ต้องการหาโดยแทนเป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 1 อยู่ในช่วง $0 - \pi$ จากสมการที่ 2.61 กำหนดให้ระบบมี Zero และ Pole อย่างละ 2 ตัว ความถี่ที่ต้องการหาผลตอบสนองอยู่ที่จุด P ดังรูปที่ 2.7 ผลตอบสนองความถี่แสดงได้ดังสมการที่ 2.62



รูปที่ 2.7 ตัวอย่างการหาผลตอบสนองความถี่โดยใช้วิธีทางเรขาคณิต

$$H(\omega) = K \frac{(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2)} \quad (2.62)$$

$$H(\omega) = \frac{KU_1 \angle \theta_1 U_2 \angle \theta_2}{V_1 \angle \phi_1 V_2 \angle \phi_2} \quad (2.63)$$

พิจารณาสมการที่ 2.63 พบว่า U_1 และ U_2 ใช้แทนระยะระหว่าง Zero กับจุด P ส่วน V_1 และ V_2 แทนระยะห่างระหว่าง Pole กับจุด P ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาดสามารถเขียนแทนได้ดังสมการที่ 2.64

$$|H(\omega)| = \frac{U_1 U_2}{V_1 V_2} \quad \text{เมื่อ } K = 1 \quad (2.64)$$

สำหรับผลตอบสนองทางเฟสจะหาจากมุมที่ Zero และ Pole ทำกับจุด P ดังสมการที่ 2.65

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = (\theta_1 + \theta_2) - (\phi_1 + \phi_2) \quad (2.65)$$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีทางเรขาคณิตหาผลตอบสนองความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องดังสมการที่ 2.66 ที่ความถี่ dc, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π

$$H(z) = \frac{z+1}{z-0.7071} \quad (2.66)$$

Sol แทน $z = e^{j\omega}$ ลงในสมการที่ 2.66 และจัดรูปใหม่

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega} + 1}{e^{j\omega} - 0.7071} = \frac{1 + \cos\omega + j \sin\omega}{\cos\omega - 0.7071 + j \sin\omega} \quad (2.67)$$

ที่ความถี่เป็น dc $\omega = 0$ ดังนั้นจึงวาดจุด P บนเส้นรอบวงที่มุม 0 ดังรูปที่ 2.8a และแทนค่า ω ลงในสมการที่ 2.67 จะได้

$$|H(0)| = \frac{2}{0.2929} = 6.828 \angle 0^\circ \quad (2.68)$$

ที่ $\omega = \frac{\pi}{4}$ จุด P จะทุกวางบนเส้นรอบวงที่มุม $\frac{\pi}{4}$ ดังภาพที่ 2.8b และแทนค่า $\omega = \frac{\pi}{4}$ ลงในสมการที่ 2.67 ได้ดังสมการที่ 2.69

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - 0.7071 + j\sin\frac{\pi}{4}}$$

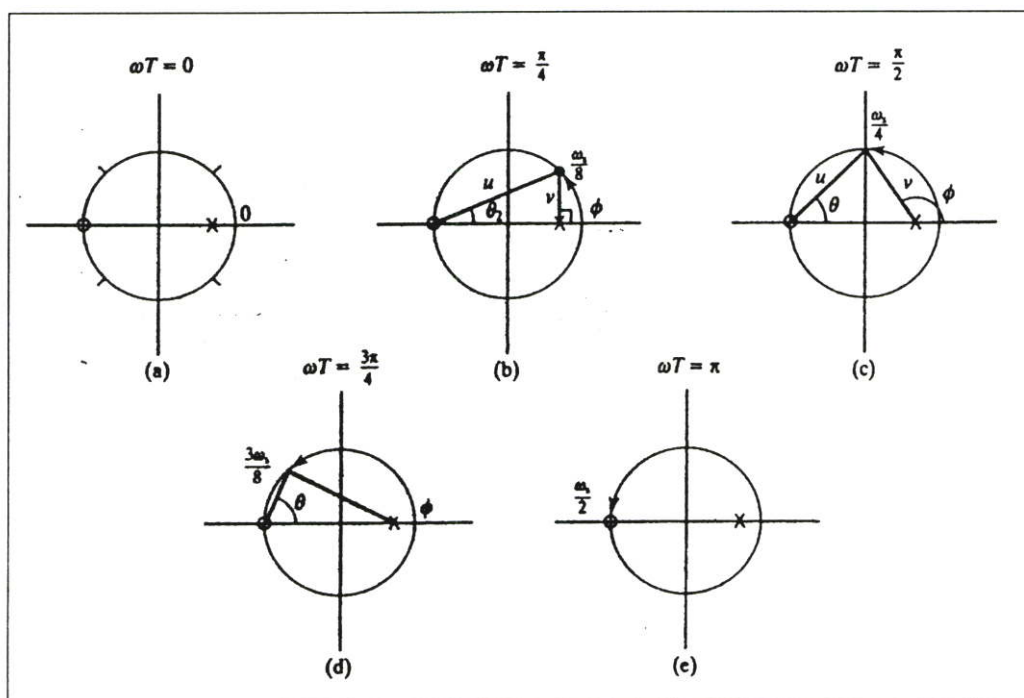
$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1.8477\angle 22.5^\circ}{0.7071\angle 90^\circ} = 2.6131\angle -67.5^\circ \quad (2.69)$$

สำหรับ ω ที่มุม $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ มุมของจุด P ที่วางบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 1 แสดงดังรูปที่ 2.8c - 2.8e ตามลำดับส่วนค่า $H(\omega)$ แสดงดังสมการที่ 2.70-2.72 และกราฟผลตอบสนองความถี่ในช่วง $0-\pi$ แสดงดังรูปที่ 2.9

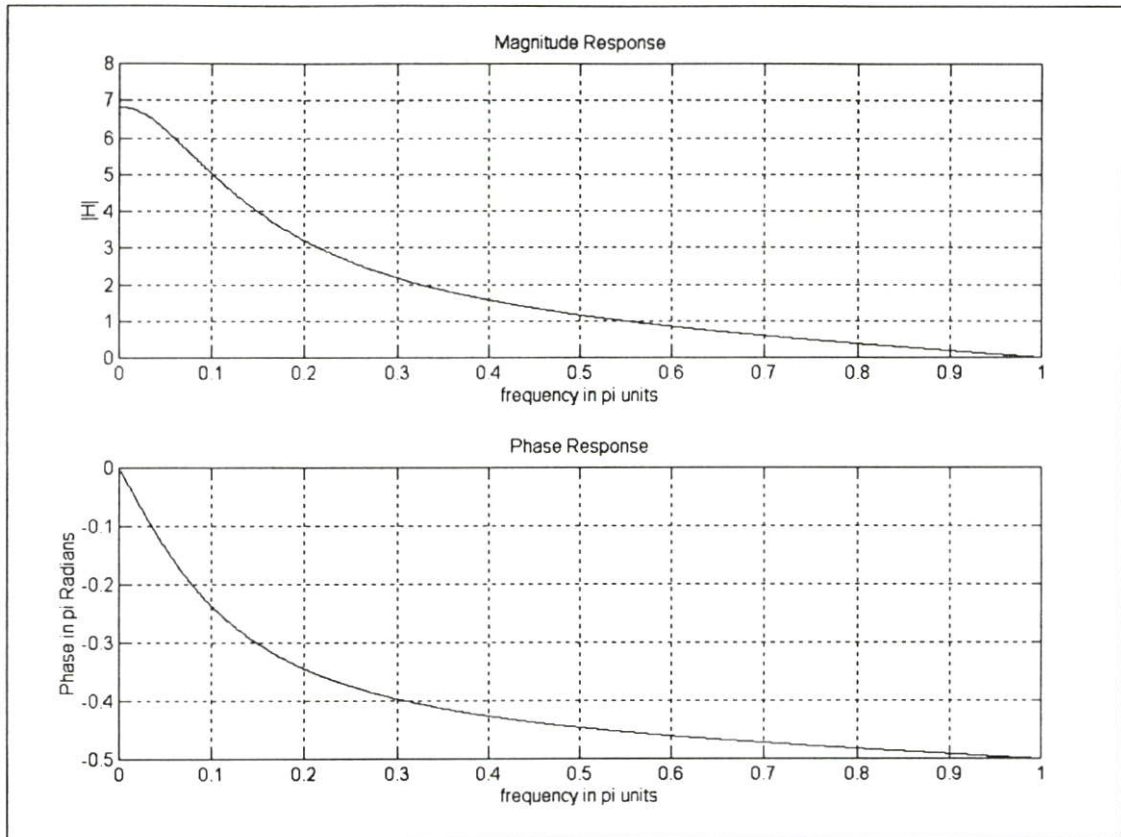
$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.1547\angle -80.26^\circ \quad (2.70)$$

$$H\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0.4840\angle -85.93^\circ \quad (2.71)$$

$$H(\pi) = 0\angle 0^\circ \quad (2.72)$$



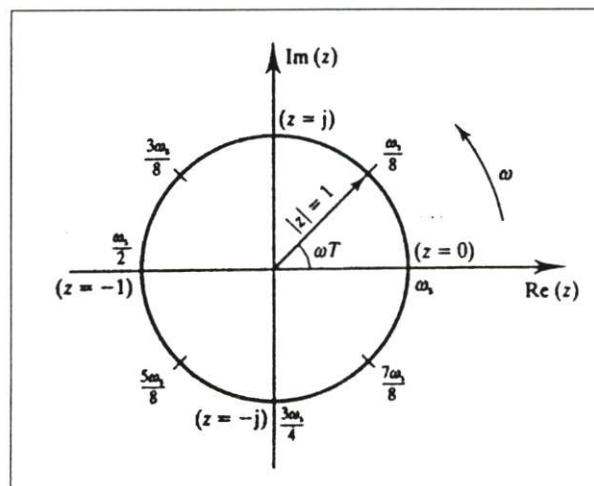
รูปที่ 2.8 การหาผลตอบสนองความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{z+1}{z-0.7071}$ โดยใช้วิธีทางเรขาคณิต



รูปที่ 2.9 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{z+1}{z-0.7071}$

2.7 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z [12-15]

ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z แสดงได้ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z

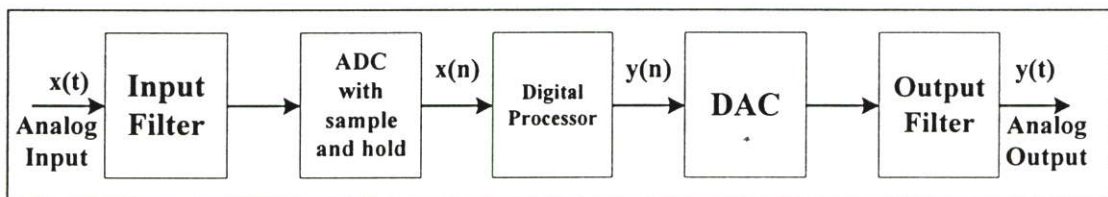
จากรูปที่ 2.10 จะเห็นได้ว่ามุม ω จะอยู่ในช่วง $0-2\pi$ และในระบบไม่ต่อเนื่องความถี่ ชุ่มของระบบจะมีค่าเท่ากับ ω_s แต่ความถี่ที่สามารถใช้งานได้จริงในระบบจะมีค่าเพียง $\frac{\omega_s}{2}$ เท่านั้น ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z จะอยู่ในช่วง $0-\pi$ เท่านั้น

ตารางที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบ z

Frequency (Hz)	$\omega(rad/s)$	มุม $\omega T(rad)$
0	0	0
$f_s/8$	$\omega_s/8$	$\pi/4$
$f_s/4$	$\omega_s/4$	$\pi/2$
$3f_s/8$	$3\omega_s/8$	$3\pi/4$
$f_s/2$	$\omega_s/2$	π

2.8 โครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR [12-15]

ตัวกรองสัญญาณเชิงเลข เป็นตัวกรองรูปแบบหนึ่งที่ถูกออกแบบและสร้างขึ้นโดยวงจร ดิจิตอลมีไดอะแกรมการทำงาน ดังรูปที่ 2.11 จากรูปสัญญาณเชิงอุปมาน $x(t)$ เป็นสัญญาณอินพุท ของตัวกรอง สัญญาณนี้จะถูกส่งผ่านวงจรแปลงสัญญาณเชิงอุปมานให้เป็นสัญญาณเชิงเลข $x(n)$ และสัญญาณเชิงเลขนี้จะถูกส่งเข้าไปคำนวณในหน่วยประมวลผล ผลที่ได้จากการคำนวณยังคงเป็น สัญญาณเชิงเลข $y(n)$ จากนั้นจะถูกส่งผ่านมายังวงจรแปลงสัญญาณเชิงเลขให้เป็นสัญญาณเชิง อุปมาน ได้สัญญาณเอาต์พุทของตัวกรองเป็นสัญญาณเชิงอุปมาน $y(t)$

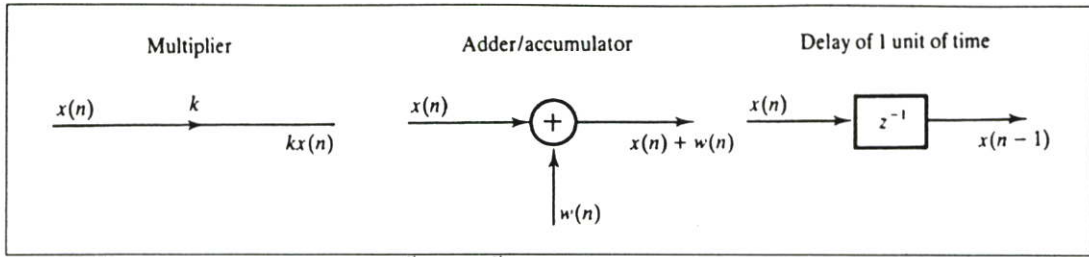


รูปที่ 2.11 แสดงไดอะแกรมการทำงานของตัวกรองเชิงเลขพื้นฐาน

ตัวกรองเชิงเลขจะประกอบด้วยองค์ประกอบพื้นฐาน (Basic elements) ดังต่อไปนี้

- ตัวบวก (Adder)
- ตัวคูณ (Multiplier)
- ตัวหน่วง (Delay)

สัญลักษณ์ขององค์ประกอบพื้นฐานทั้ง 3 ตัว ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 แสดงองค์ประกอบพื้นฐานทั้ง 3 ตัวที่ใช้เป็นส่วนประกอบของตัวกรองเชิงเลข

สมการฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของตัวกรองเชิงเลข IIR สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (2.73)$$

จากสมการที่ 2.73 สามารถนำไปเขียนใหม่ได้ ดังสมการที่ 2.74

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.74)$$

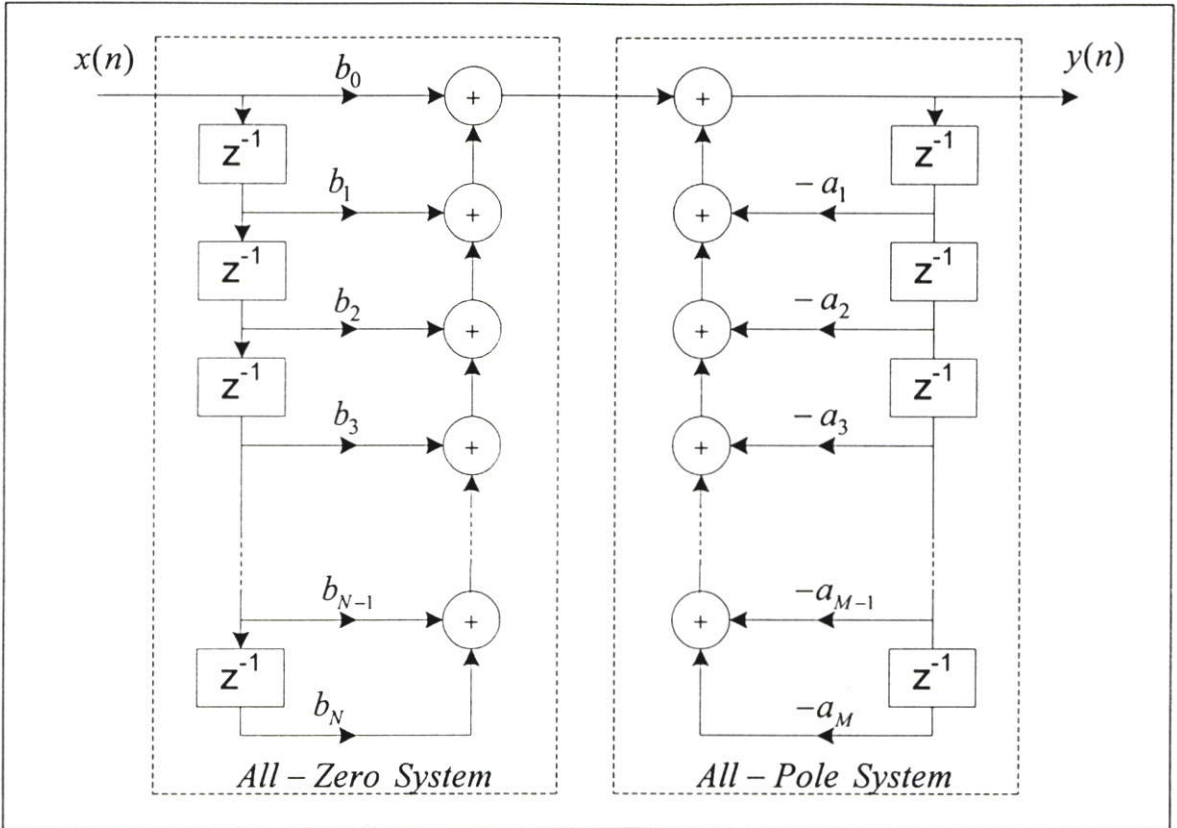
จากสมการที่ 2.74 นำไปจัดเทอมต่างๆ ใหม่และเขียนให้อยู่ในรูปของสมการผลต่างได้ ดังสมการที่ 2.77

$$Y(z) = \sum_{K=0}^N b_N X(z) z^{-K} - \sum_{K=1}^M a_M Y(z) z^{-K} \quad (2.75)$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + \dots + b_N X(z) z^{-N} - a_1 Y(z) z^{-1} - \dots - a_M Y(z) z^{-M} \quad (2.76)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (2.77)$$

จากสมการที่ 2.77 สามารถนำมาเขียนเป็นโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลข IIR ใหม่เรียกว่า โครงสร้างแบบตรง I (Direct form I) ดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แสดงโครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบตรง I

นำ $\frac{W(z)}{W(z)}$ คูณตลอดในสมการที่ 2.74 จะได้

$$H(z) = \frac{W(z)}{W(z)} \times \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.78)$$

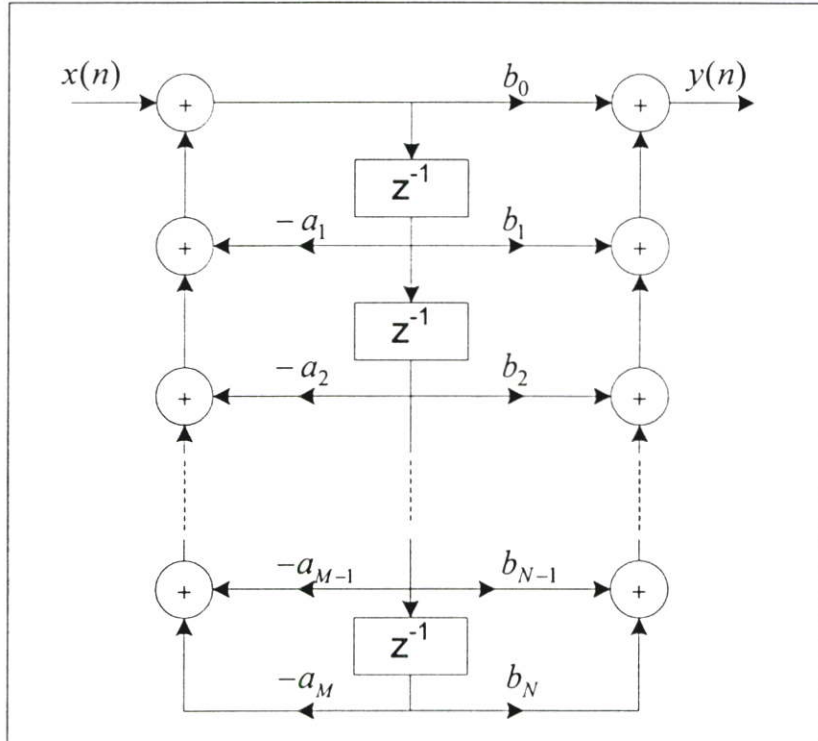
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W(z)}{W(z)} \times \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.79)$$

$$X(z) = W(z) + a_1 W(z) z^{-1} + \dots + a_M W(z) z^{-M} \quad (2.80)$$

$$W(z) = X(z) - a_1 W(z) z^{-1} - \dots - a_M W(z) z^{-M} \quad (2.81)$$

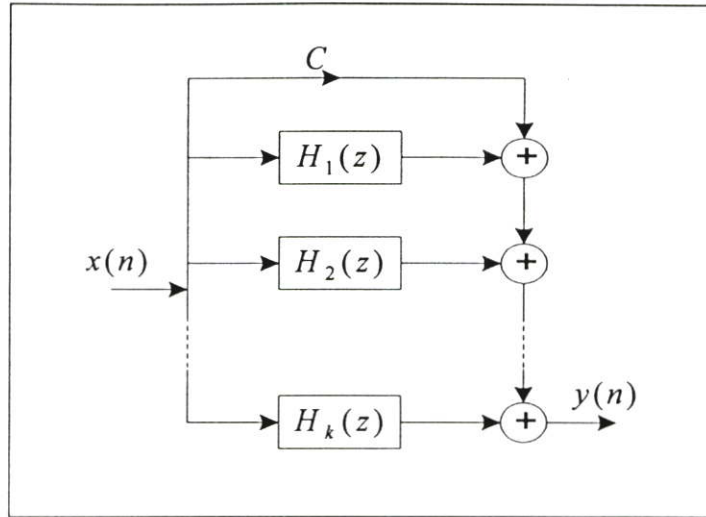
$$Y(z) = b_0 W(z) + b_1 W(z) z^{-1} + \dots + b_N W(z) z^{-N} \quad (2.82)$$

จากสมการที่ 2.81 และสมการที่ 2.82 สามารถนำไปเขียนเป็นโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลข IIR ได้ใหม่เรียกว่า โครงสร้างแบบตรง II (Direct form II) ดังรูปที่ 2.14 ซึ่งจากรูปที่ 2.14 จะเห็นได้ว่า จำนวนตัวหน่วงที่ใช้จะลดลงครึ่งหนึ่งเมื่อเทียบกับ โครงสร้างแบบตรง I



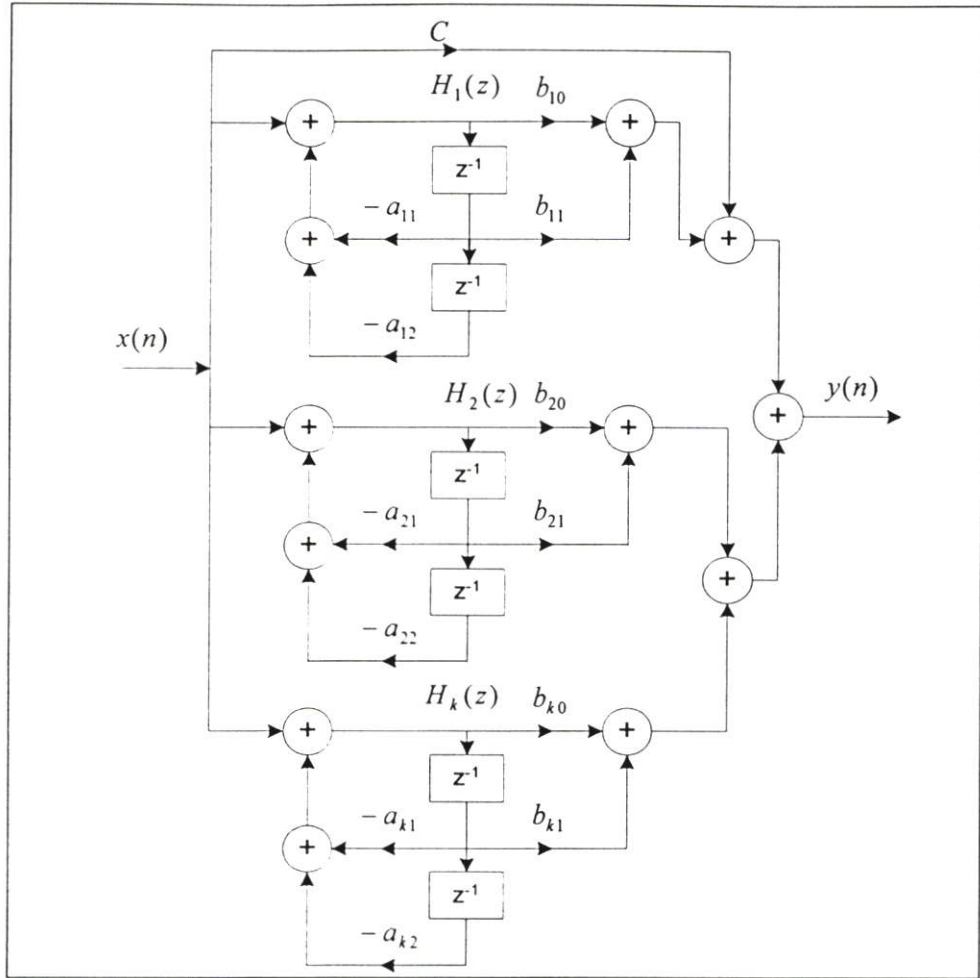
รูปที่ 2.14 แสดงโครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบตรง II

แต่เนื่องจากตัวกรองเชิงเลข IIR ที่มีโครงสร้างแบบตรง I หรือแบบตรง II เมื่อมีจำนวนลำดับเพิ่มขึ้นจะมีค่าย่านไดนามิก (Dynamic range) ของสัมประสิทธิ์มากขึ้น กล่าวคือ ค่าสัมประสิทธิ์ในเทอม a จะมีค่ามากและสัมประสิทธิ์ในเทอม b จะมีค่าน้อยทำให้เป็นปัญหาอย่างมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องของการประมวลผล ดังนั้นจึงได้มีการปรับโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลข IIR ใหม่โดยจัดให้มีโครงสร้างเป็นแบบขนาน ดังรูปที่ 2.15

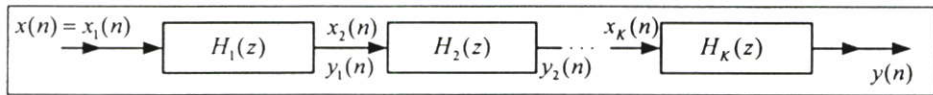


รูปที่ 2.15 แสดงโครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบขนาน

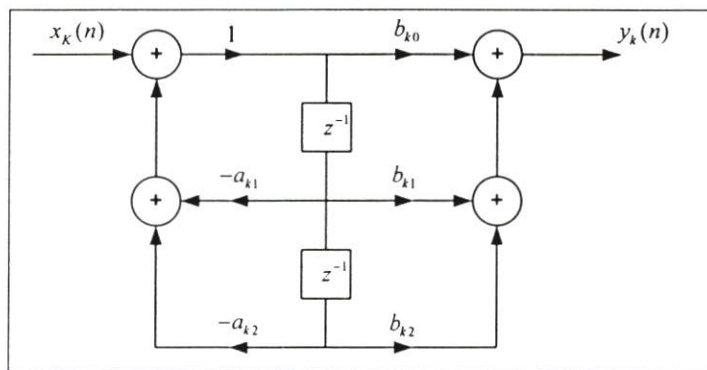
ในรูปที่ 2.15 จะเห็นได้ว่า ตัวกรองเชิงเลข IIR ที่มีโครงสร้างเป็นแบบขนานนี้จะประกอบด้วย $H_1(z), H_2(z), \dots, H_k(z)$ และภายใน $H_k(z)$ แต่ละตัวนี้จะมีโครงสร้างดังรูปที่ 2.16 ในการจัดโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลขให้มีโครงสร้างเป็นแบบขนานนี้จะให้ผลดี คือย่านไดนามิกของสัมประสิทธิ์มีค่าน้อยทำให้ไม่เกิดปัญหา เมื่อนำไปสร้างจริงด้วยตัวประมวลผลแบบจุดทศนิยมคงที่ (Fixed point processor) หรือแบบจุดทศนิยมลอย (Floating point processor) นอกจากนี้การจัดโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลข IIR เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าย่านไดนามิกยังสามารถกระทำได้อีก ลักษณะหนึ่งก็คือการจัดโครงสร้างให้อยู่ในลักษณะต่อลำดับกัน (Cascade form) ดังรูปที่ 2.17 และ 2.18



รูปที่ 2.16 แสดงโครงสร้างย่อยตัวกรองเชิงเลข IIR แบบขนาน



รูปที่ 2.17 แสดงโครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบลำดับ



รูปที่ 2.18 แสดงโครงสร้างย่อยตัวกรองเชิงเลข IIR แบบลำดับ

บทที่ 3

การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Notch

3.1 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch

ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch อธิบายได้โดย

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \quad \omega_0 \\ 1 & ; \quad otherwise \end{cases} \quad (3.1)$$

เมื่อ ω_0 คือ Notch frequency และรูปฟอร์มทั่วไปของ Transfer function ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole [12] แสดงได้ดังสมการที่ 3.2

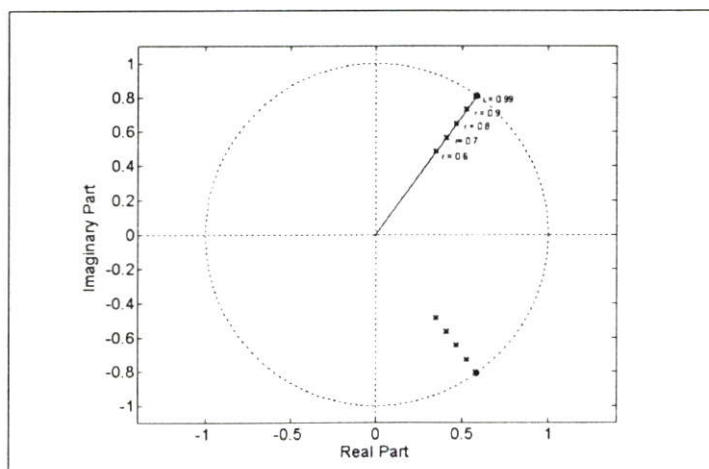
$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (3.2)$$

เมื่อ b_0 คือ อัตราขยายของตัวกรองและเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

ω_0 คือ มุมของ Pole บนระนาบ z หรือ Notch frequency

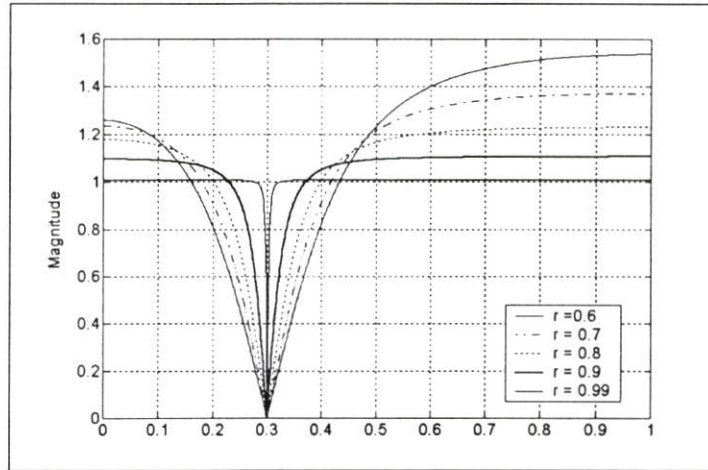
r คือ ระยะห่างระหว่าง Pole กับจุด Origin

จากสมการที่ 3.2 จะมีตำแหน่งการวาง Pole-zero บนระนาบ z ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ตำแหน่งการวาง Pole-zero ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลงการวางตำแหน่ง Pole

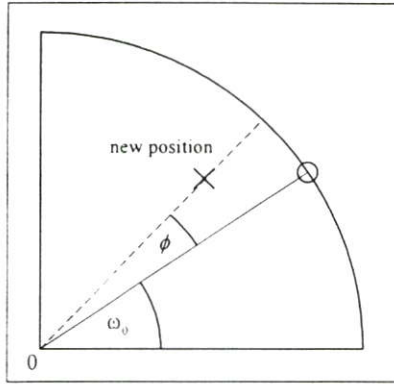
จากรูปที่ 3.1 จะเห็นได้ว่ามุมของ Pole และ Zero จะอยู่ตำแหน่งเดียวกัน ซึ่งการวางตำแหน่ง pole-zero ดังรูปที่ 3.1 ถ้ากำหนดให้ $\omega_0 = 0.3\pi$ และ $r = 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ จะได้การตอบสนองทางขนาด (Magnitude response) ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลงการวางตำแหน่ง Pole

จากรูปที่ 3.2 ความกว้างแถบความถี่ (Bandwidth) ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch จะถูกควบคุมด้วยตัวแปร r โดยถ้า r มีค่าเข้าใกล้เส้นรอบวงหรือมีค่าเข้าใกล้ 1 ความกว้างแถบความถี่ ก็จะแคบลง และในการหาค่า ความกว้างแถบความถี่ สามารถหาได้โดยใช้หลักการเรขาคณิต [2, 4] และจากรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่า Notch frequency จะอยู่ที่ความถี่ 0.3π พอดี แต่อัตราขยายในช่วงความถี่ผ่านจะไม่สมมาตรกัน โดยอัตราขยายที่ความถี่ 0 ไม่เท่ากับอัตราขยายที่ความถี่ π ซึ่งตัวแปร r จะมีผลโดยตรงต่อ อัตราขยาย ที่ไม่สมมาตรกัน โดยค่า r สามารถคำนวณได้จากตำแหน่งของ Pole นั่นก็หมายความว่าขณะนี้ Pole ถูกวางอยู่ในตำแหน่งที่ไม่เหมาะสม ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องหาดำแหน่งของ Pole ที่เหมาะสมขึ้นมาใหม่เพื่อให้อัตราขยายในช่วงความถี่ผ่านมีความสมมาตรกัน

จากการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ด้วยวิธีการวางตำแหน่ง Pole-zero ตามหลักการเดิมที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole จะเห็นได้ว่า Pole ถูกวางอยู่ในตำแหน่งที่ไม่เหมาะสม[4,9] ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole ส่วนตำแหน่งของ Zero นั้นจะไม่มีเปลี่ยนแปลงทั้งนี้เพราะว่า Notch frequency จะถูกกำหนดจากตำแหน่งของ Zero ในการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง Pole ให้เหมาะสมนั้นสามารถทำได้ดังรูปที่ 3.3 และเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ Pole ทำให้ Transfer Function ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ตามสมการที่ 3.1 เขียนใหม่ได้ดังสมการที่ 3.3 และ 3.4



รูปที่ 3.3 ตำแหน่งของ Pole ที่ถูกเปลี่ยนแปลง

$$\hat{H}(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos(\omega_0 + \phi) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (3.3)$$

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - 2r \cos(\omega_0 + \phi) e^{-j\omega} + r^2 e^{-2j\omega}} \quad (3.4)$$

เมื่อ $\hat{H}(z)$ คือ Transfer function ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch
ที่มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ Pole

ϕ คือ มุมที่เปลี่ยนไปของ Pole

เพื่อให้อัตราขยายในช่วงความถี่ผ่านมีความสมมาตรกันและสอดคล้องกับการตอบสนองความถี่ ตามสมการที่ 3.1 ดังนั้น อัตราขยายที่ความถี่ DC กับ อัตราขยายที่ความถี่ π จะต้องมีความเท่ากัน ดังสมการที่ 3.5 ถึงสมการที่ 3.9

$$\hat{H}(0) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos(\omega_0 + \phi) e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \quad (3.5)$$

$$\hat{H}(\pi) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos(\omega_0 + \phi) e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \quad (3.6)$$

$$\hat{H}(0) = \hat{H}(\pi) \quad (3.7)$$

$$b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos(\omega_0 + \phi) e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos(\omega_0 + \phi) e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \quad (3.8)$$

$$\frac{1 + \cos \omega_0}{1 + 2r \cos(\omega_0 + \phi) + r^2} = \frac{1 - \cos \omega_0}{1 - 2r \cos(\omega_0 + \phi) + r^2} \quad (3.9)$$

จากสมการที่ 3.9 สามารถแก้สมการหาค่า ϕ ได้ดังสมการที่ 3.10

$$2r \cos(\omega_0 + \phi) = \cos \omega_0 + r^2 \cos \omega_0$$

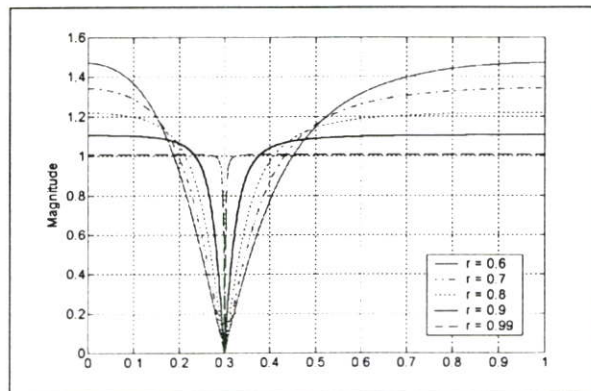
$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{1 + r^2}{2r} \cos \omega_0 \right) - \omega_0 \quad (3.10)$$

กำหนดให้ $\hat{\omega}_0 = \omega_0 + \phi$

เมื่อ $\hat{\omega}_0$ คือ มุมของ Pole ที่ได้เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้น Transfer function ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch เขียนได้ดังสมการที่ (3.11)

$$\hat{H}(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (3.11)$$

จากสมการที่ 3.11 กำหนดให้ $r = 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ และ $\omega_0 = 0.3$ และ $b_0 = 1$ จะได้ การตอบสนองทางขนาดดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้เปลี่ยนแปลงตำแหน่ง Pole

จากรูปที่ 3.4 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของการวาง Pole จะทำให้ ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ในช่วงความถี่ผ่านมีความสมมาตรกัน โดย อัตราขยายที่ความถี่ DC และ อัตราขยายที่ความถี่ π มีค่าเท่ากัน แต่ยังไม่สามารถควบคุมให้มีขนาดตามต้องการ

ได้ทำให้จำเป็นต้องหาค่าคงที่ b_0 เพื่อควบคุมอัตราขยายในช่วงความถี่ผ่านที่สมมาตรกันให้มีขนาดตามที่ต้องการ ในการหาค่า b_0 สามารถหาได้จากการกำหนดให้อัตราขยาย ที่ความถี่ 0 และ อัตราขยายที่ความถี่ π มีค่าเท่ากัน แทนค่าความถี่ DC และ π ลงในสมการที่ 3.11

$$\hat{H}(0) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \quad (3.12)$$

$$\hat{H}(e^{\pi}) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \quad (3.13)$$

กำหนดให้อัตราการขยายที่ความถี่ DC กับความถี่ π มีค่าเท่ากับ k แสดงได้ดังสมการที่ 3.14 และ 3.15

$$b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} = k \quad (3.14)$$

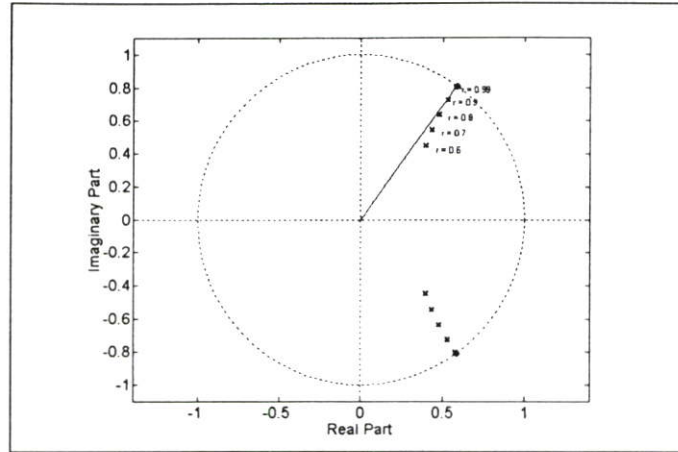
$$b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} = k \quad (3.15)$$

จากสมการที่ 3.14 และสมการที่ 3.15 นำมาจัดรูปใหม่เพื่อหาค่า b_0 ได้ดังสมการที่ 3.16 และ 3.17

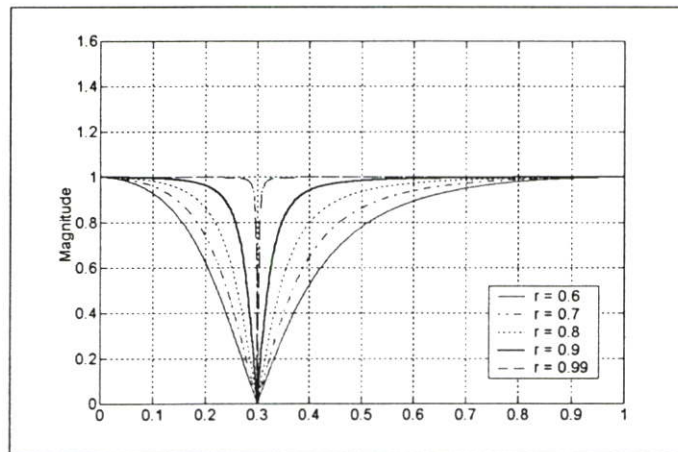
$$b_0 = k \frac{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}}{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}} \quad (3.16)$$

$$b_0 = k \frac{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}}{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}} \quad (3.17)$$

ตัวอย่างการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch หลังการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole โดยกำหนดให้ Notch frequency อยู่ที่ความถี่ 0.3π และค่า $r = 0.7, 0.8, 0.9$ และ 0.99 อัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่านเท่ากับ 1 หรือค่า $k = 1$ ในการออกแบบใช้สมการที่ 3.3 ถึงสมการที่ 3.17 ได้ตำแหน่งการวาง Pole ดังรูปที่ 3.5 และผลตอบสนองทางขนาดดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.5 ตำแหน่งการวาง Pole-zero ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole



รูปที่ 3.6 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole

จากรูปที่ 3.6 พบว่าขณะนี้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้เปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole พบว่าอัตราขยายที่ความถี่ DC และความถี่ π สามารถควบคุมให้มีขนาดตามต้องการได้

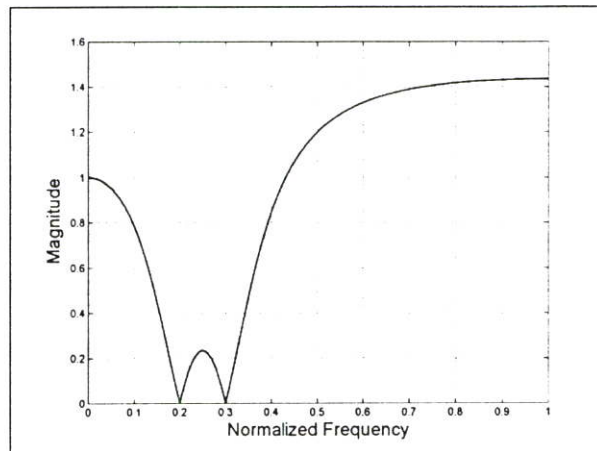
3.2 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple Notch

เกิดจากการนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch มาต่อลำดับกันผลตอบสนองทางความถี่ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch แสดงดังสมการที่ 3.18 และถ้านำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ก่อนที่จะเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ Pole มาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch จะได้ Transfer function ดังสมการที่ 3.19

$$\tilde{H}_M(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega_1, \omega_2 \\ 1 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$H_M(z) = \prod_{n=1}^k \left(b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right) \quad (3.19)$$

จากสมการที่ 3.19 ถ้ากำหนดให้ $\omega_1 = 0.2\pi$, $\omega_2 = 0.3\pi$ และ $r = 0.7$ จะได้ผลตอบสนองทางขนาด ดังรูปที่ 3.7

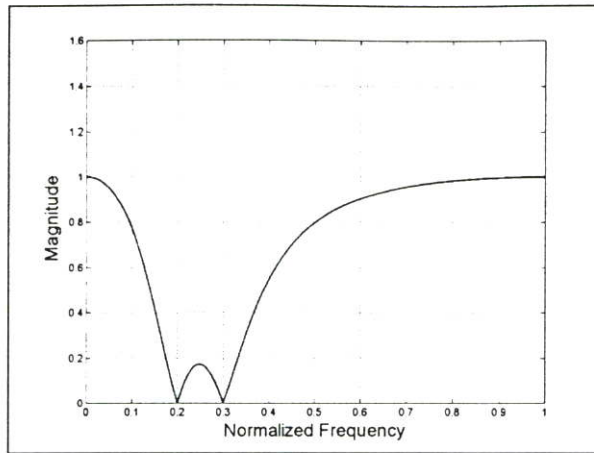


รูปที่ 3.7 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ pole

จากสมการที่ 3.3 ได้มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง Pole ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch และหาค่าคงที่ เพื่อใช้ควบคุมอัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่าน โดยใช้สมการที่ 3.16 และสมการที่ 3.17 และเมื่อนำมาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch จะได้ Transfer function ดังสมการที่ 3.20 [5]

$$\hat{H}(z) = \prod_{n=1}^k \left(b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right) \quad (3.20)$$

จากสมการที่ 3.20 ถ้ากำหนดให้ $\omega_1 = 0.2\pi$, $\omega_2 = 0.3\pi$ และ $r = 0.7$ จะได้ผลตอบสนองทางขนาดดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch หลังทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ Pole

จากรูปที่ 3.7 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ก่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง Pole อัตราการขยายที่ความถี่ DC, π และความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency จะไม่สามารถควบคุมได้ เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะว่า Pole ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ถูกวางอยู่ในตำแหน่งที่ไม่เหมาะสม อีกทั้งยังไม่รู้ค่าคงที่ b_n สำหรับควบคุมอัตราการขยายในช่วง ความถี่ผ่าน จึงเป็นผลให้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch จะมีผลตอบสนองทางขนาดที่เกิดขึ้นไม่สมมาตรกัน อีกทั้งไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ DC และ π ได้ แสดงดังรูปที่ 3.2 ดังนั้นเมื่อนำมาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ก็จะได้ผลตอบสนองทางขนาดที่ไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ต่างๆ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

ส่วนรูปที่ 3.4 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch หลังการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง Pole และมีการใช้ค่าคงที่ b_n เพื่อควบคุมอัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่าน ซึ่งจะพบว่าอัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่านที่ความถี่ DC, π สามารถควบคุมได้ให้เป็นไปตามต้องการได้ แต่อย่างไรก็ตาม ที่ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency ไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายให้เท่ากับที่ความถี่ DC และความถี่ π ได้ ถึงแม้ว่าตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่นำมาต่อลำดับกันจะมี ผลตอบสนองทางขนาดที่สมมาตรกัน และสามารถควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ DC และ π ได้แล้วก็ตาม เหตุที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากตำแหน่งของ Pole ที่เปลี่ยนแปลงไปและค่าคงที่ b_n ที่ใช้สำหรับควบคุมอัตราการขยายในช่วงความถี่ผ่าน ถูกหาจากความสัมพันธ์ของอัตราการขยายเฉพาะที่ความถี่ DC และ π [4] ซึ่งการทำการลักษณะนี้เหมาะสมต่อการออกแบบเฉพาะตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch เท่านั้น หรืออาจกล่าวได้ว่าตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่นำมาต่อลำดับกันเพื่อสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ตำแหน่งของ Pole ถูกออกแบบให้วางในลักษณะที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน จึง

เป็นผลให้ผลตอบสนองทางขนาดที่ได้ โดยเฉพาะความถี่ระหว่าง Notch frequency อัตราการขยายไม่สามารถควบคุมได้ [5]

3.3 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยหลักการที่นำเสนอ

ผลตอบสนองทางความถี่ (Frequency response) ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch แสดงได้ดังสมการที่ 3.21 และ Transfer function แสดงได้ดังสมการที่ 3.22

$$\tilde{H}_M(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega_1, \omega_2 \\ 1 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\tilde{H}_M(z) = \prod_{n=1}^2 \tilde{H}_n(z)$$

$$\tilde{H}(z) = \prod_{n=1}^2 \left(b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_n \cos \tilde{\omega}_n z^{-1} + r_n^2 z^{-2}} \right) \quad (3.22)$$

จากสมการที่ 3.22 จะเห็นได้ว่าตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch เกิดจากการนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch มาต่อลำดับกัน โดยในการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch เพื่อนำมาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch จะแตกต่างกับตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ทั่วไปคือ ที่ความถี่ DC และที่ความถี่ π จะมีอัตราการขยายไม่เท่ากัน นอกจากนี้จะต้องมีการควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency เพิ่มขึ้นอีกหนึ่งความถี่ ในขณะที่ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ทั่วไปจะมีการควบคุมอัตราการขยายเฉพาะที่ความถี่ DC และความถี่ π เท่านั้นและสิ่งสำคัญอีกประการหนึ่งคือตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่นำมาต่อลำดับกันนั้น อัตราการขยายที่ความถี่ DC ความถี่ π และที่ความถี่ระหว่าง Notch frequency จะต้องมีความสัมพันธ์กัน เพื่อที่จะทำให้อัตราการขยายที่ความถี่ DC ความถี่ π และที่ความถี่ระหว่าง Notch frequency (ω_c) ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch filter ควบคุมให้มีขนาดตามต้องการได้

ถ้ากำหนดให้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch มี Notch frequency ที่ความถี่ ω_1, ω_2 และความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency เป็น ω_c ดังนั้นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single Notch filter ที่จะนำมาต่อลำดับกันจะต้องมีด้วยกันสองส่วนคือ Notch filter 1 ซึ่งมี Notch frequency เท่ากับ ω_1 และ Notch filter 2 ซึ่งมี Notch frequency เท่ากับ ω_2 ดังนั้นอัตราการขยายที่ความถี่ต่างๆของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ทั้งสอง และ Multiple notch แสดงได้ดังตารางที่ 1 รูปที่ 3.9 และรูปที่ 3.10 ส่วนค่า ω_c แสดงได้ดังสมการที่ 3.23

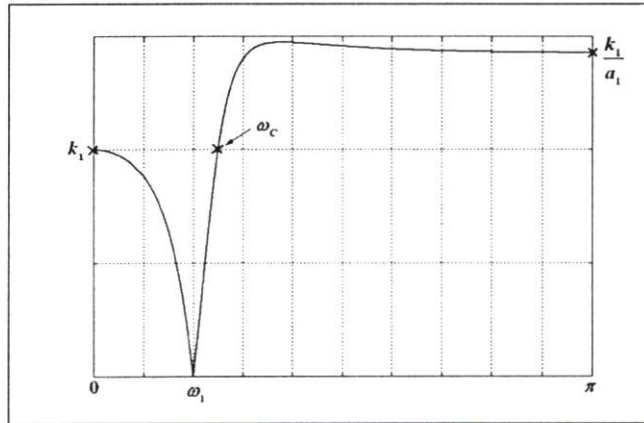
$$\omega_1 < \omega_c < \omega_2$$

(3.23)

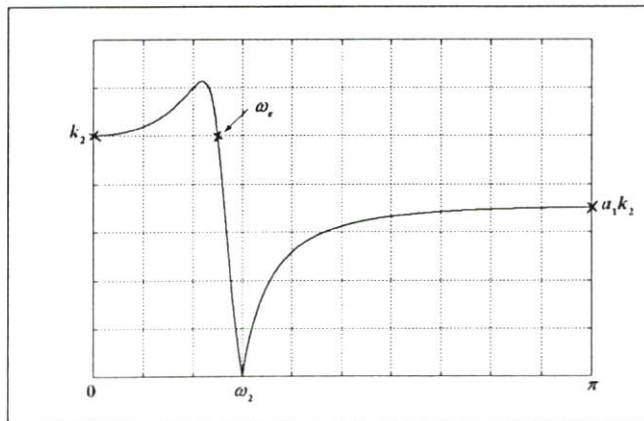
ตารางที่ 3.1 อัตราการขยายที่ความถี่ DC, ω_1 , ω_2 , ω_c และ π ของ Notch filter 1, Notch filter และ Multiple notch filter

	Gain at frequencies :				
	DC	ω_1	ω_c	ω_2	π
Notch filter 1	k_1	0	k_1	-	k_1/a_1
Notch filter 2	k_2	-	k_2	0	$a_1 k_2$
Multiple notch filter	$k_1 k_2$	0	$k_1 k_2$	0	$k_1 k_2$

เมื่อ a_1, k_1, k_2 เป็นค่าคงที่



รูปที่ 3.9 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1



รูปที่ 3.10 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 2

ดังนั้นการสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch จึงจำเป็นต้องสร้าง Notch filter 1 และ Notch filter 2 ให้มีคุณสมบัติดังที่ได้กล่าวมาแล้วมาต่อลำดับกัน การออกแบบจะเริ่มจาก Notch filter 1 โดยจะต้องทำการหาตำแหน่งการวาง Pole ที่เหมาะสมกับผลตอบสนองทางขนาดตามรูปที่ 3.9 ซึ่งในการหาตำแหน่งของ Pole นี้จะแบ่งการหาออกเป็นสองส่วนคือมุม $\tilde{\omega}_1$ และระยะห่างจากจุด Origin r_1 โดยการหามุม $\tilde{\omega}_1$ จะใช้สมการ Transfer function ดังสมการที่ 3.24 และใช้อัตราการขยายที่ความถี่ DC และความถี่ π ตามตารางที่ 1

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (3.24)$$

ที่ความถี่ DC แทนค่า $z = e^{j0}$ จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(e^{j0}) &= k_1 = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 + 1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ k_1 &= b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

ที่ความถี่ π แทนค่า $z = e^{j\pi}$ จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(e^{j\pi}) &= \frac{k_1}{a_1} = b_1 \frac{1 + 2 \cos \omega_1 + 1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ k_1 &= a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

จากสมการที่ 3.25 และสมการที่ 3.26 สามารถนำมาจัดรูปใหม่เพื่อหาค่า $\cos \tilde{\omega}_1$ และ $\tilde{\omega}_1$ ได้ ดังสมการที่ 3.27 ถึงสมการที่ 3.29

$$\begin{aligned} k_1 &= b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} = a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} &= a_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \end{aligned}$$

$$\cos \tilde{\omega}_1 = \frac{(r_1^2 + 1)(a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)}{2r_1(a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)} \quad (3.27)$$

กำหนดให้ $l_1 = \frac{a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}{a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}$ ดังนั้นค่า $\cos \tilde{\omega}_1$ สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ
ที่ 3.28

$$\cos \tilde{\omega}_1 = \frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \quad (3.28)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \cos^{-1} \left(\frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \right) \quad (3.29)$$

นำค่า $\cos \tilde{\omega}_1$ ตามสมการที่ 3.28 แทนค่าลงในสมการที่ 3.24 จะได้ Transfer function ของ Notch filter 1 ใหม่ตามสมการที่ 3.30

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - (r_1^2 + 1) l_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (3.30)$$

จากสมการที่ 3.30 แทนค่าความถี่เท่ากับ DC, π และ ω_c ได้ดังสมการที่ 3.31 ถึงสมการที่ 3.33 ตามลำดับ

$$k_1 = b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1) l_1 + r_1^2} \quad (3.31)$$

$$k_1 = a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + (r_1^2 + 1) l_1 + r_1^2} \quad (3.32)$$

$$k_1 = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1) l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \quad (3.33)$$

ลำดับต่อไปจะทำการหาค่า r_1 โดยในการหาจะใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ 3.31 หรือสมการที่ 3.32 สมการใดสมการหนึ่งกับสมการที่ 3.33 เลือกใช้สมการที่ 3.31 และจากสมการที่ 3.31 และสมการที่ 3.33 นำมาจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ (Absolute) ได้ดังสมการที่ 3.34 และ 3.35

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 \quad (3.34)$$

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (3.35)$$

จากสมการที่ 3.34 และ 3.35 นำมาเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ 3.36, 3.37 และ 3.38

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (3.36)$$

$$k_1^2 = b_1^2 \frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4 (1 - l_1)^2 + 2r_1^2 (1 - l_1)^2 + (1 + l_1)^2} = b_1^2 \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \quad (3.37)$$

$$\frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4 (1 - l_1)^2 + 2r_1^2 (1 - l_1)^2 + (1 + l_1)^2} = \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \quad (3.38)$$

เมื่อ

$$X_1 = X_4 \left((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \right)$$

$$X_2 = 2X_4 \left((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c) + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \right)$$

$$X_3 = X_4 \left((1 - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c)^2 \right)$$

$$X_4 = (1 - 2 \cos \omega_1 \cos \omega_c + \cos 2\omega_c)^2 + (2 \cos \omega_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2$$

$$Y_1 = (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^4 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^4 \\ + 2(\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2$$

$$Y_2 = (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^3 (1 - l_1 \cos \omega_c) + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^3 (l_1 \sin \omega_c) \\ + (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \\ + (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c)$$

$$\begin{aligned}
Y_3 = & 8((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c)) \\
& + 6((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2(1 - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2(l_1 \sin \omega_c)^2) \\
& + 2((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2(l_1 \cos \omega_c)^2 + (1 - l_1 \cos \omega_c)^2(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_4 = & (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)^3 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c)^3 \\
& + (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c)^2 \\
& + (1 - l_1 \cos \omega_c)^2(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c)
\end{aligned}$$

$$Y_5 = 2((1 - l_1 \cos \omega_c)^2(l_1 \sin \omega_c)^2) + (1 - l_1 \cos \omega_c)^4 + (l_1 \sin \omega_c)^4$$

จากสมการที่ 3.38 จัดรูปใหม่เพื่อหาค่า r_1 ได้ดังสมการที่ 3.39

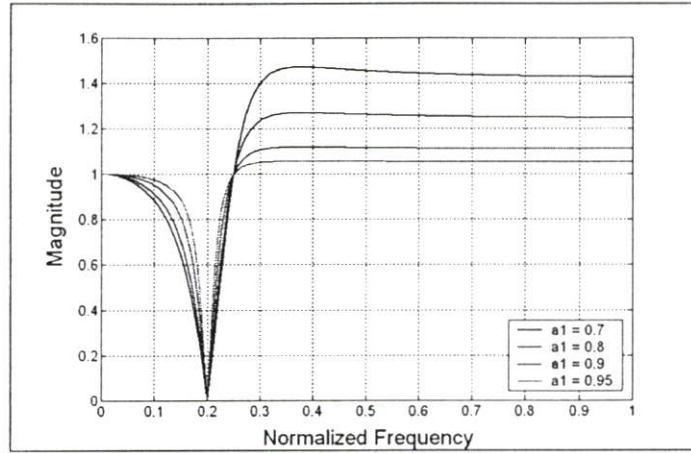
$$\begin{aligned}
& r_1^8 (X_1(1-l_1)^2 - Y_1(2-2\cos\omega_1)^2) + r_1^6 ((2X_1 + X_2)(1-l_1)^2 - 4Y_2(2-2\cos\omega_1)^2) + \\
& r_1^4 ((X_1 + 2X_2 + X_3)(1-l_1)^2 - Y_3(2-2\cos\omega_1)^2) + r_1^2 ((X_2 + 2X_3)(1-l_1)^2 - 4Y_4(2-2\cos\omega_1)^2) + \\
& (X_3(1-l_1)^2 - Y_5(2-2\cos\omega_1)^2) = 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

จากสมการที่ 3.39 พบว่าค่า r_1 ที่หาได้จากการแก้สมการจะพบว่ามีคำตอบมากกว่าหนึ่งค่า บางค่าเป็นจำนวนจริง (Real number) และบางค่าจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน (Complex number) แต่คำตอบที่แท้จริงของ r_1 นั้นจะต้องทำให้ระบบ Stable โดยตำแหน่งการวาง Pole จะต้องอยู่ในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย [12-15] ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเลือกค่า r_1 เฉพาะค่าที่เป็นจำนวนจริงและมีค่าน้อยกว่าหนึ่งเท่านั้น ลำดับสุดท้ายจะเป็นการหาค่าคงที่ b_1 ซึ่งจะทำโดยแทนค่า r_1 ลงในสมการที่ 3.25 หรือสมการที่ 3.26 และจัดรูปใหม่แสดงได้ดังสมการที่ 3.40 และสมการที่ 3.41

$$b_1 = k_1 \frac{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}{2 - 2\cos \omega_1} \tag{3.40}$$

$$b_1 = \frac{k_1}{a_1} \times \frac{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}{2 + 2\cos \omega_1} \tag{3.41}$$

ถ้ากำหนดให้ Notch filter 1 มีค่า Notch frequency $\omega_1 = 0.2\pi$, $\omega_c = 0.25\pi$, $k_1 = 1$ และ $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$ จะได้ผลตอบสนองทางขนาดดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ที่ค่า $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$

จากรูปที่ 3.11 จะเห็นได้ว่าที่ความถี่ ω_1 , ω_c และ π จะมีอัตราการขยายตรงตามที่กำหนด และในการเปลี่ยนแปลงค่า a_1 ให้มีค่ามากขึ้นโดยมีค่าเข้าใกล้หนึ่ง จะส่งผลให้ Bandwidth ของ Notch filter แคบลง นั้นหมายความว่าค่าคงที่ a_1 จะมีผลโดยตรงต่อ Bandwidth ของ Notch filter เรียกค่าคงที่ a_1 นี้ว่า Bandwidth factor : BWF และสำหรับการออกแบบ Notch filter 2 สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกับการออกแบบ Notch filter 1

3.4 ตัวอย่างการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

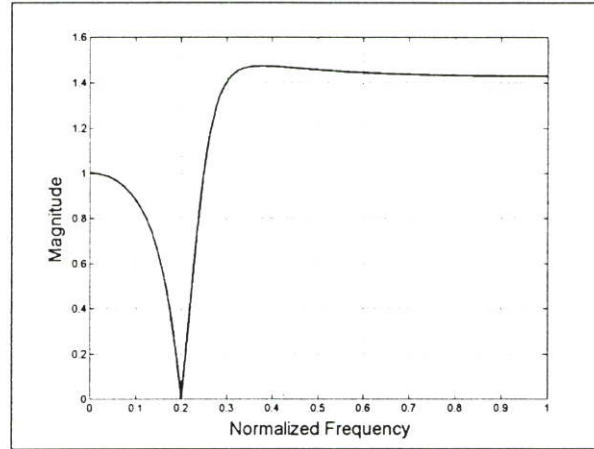
กำหนดให้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch มีผลตอบสนองทางความถี่ตามสมการที่ 30 และมีค่า $BWF = 0.7$

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega = 0.2\pi, 0.3\pi \\ 1 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.42)$$

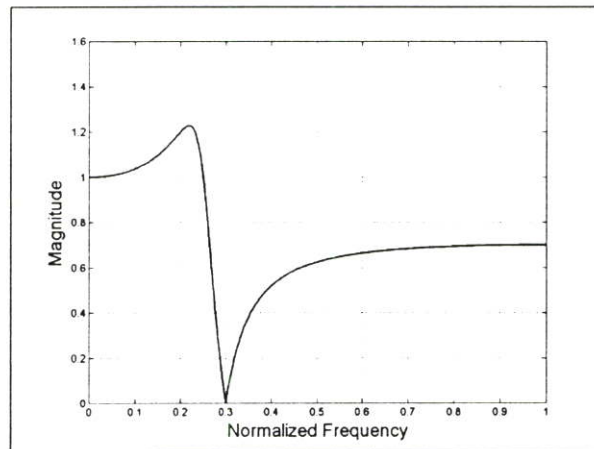
จากสมการที่ 3.23 เลือกค่า $\omega_c = 0.25\pi$ และจากตารางที่ 1 จะได้ค่า $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ และค่า $BFW = a_1 = 0.7$ Notch filter 1 จะมีค่า $\omega_1 = 0.2\pi$ ส่วน Notch filter 2 จะมีค่า $\omega_2 = 0.3\pi$ จากนั้นใช้สมการที่ 3.24-3.41 หา Transfer function ของ Notch filter 1 และ Notch filter 2 ได้ดังสมการที่ 3.43 และสมการที่ 3.44 ส่วนผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter ทั้งสองแสดงได้ดังรูปที่ 3.12 และ 3.13

$$\tilde{H}_1(z) = \frac{1.150437 - 1.861446z^{-1} + 1.150437z^{-2}}{1 - 1.237098z^{-1} - 0.676525z^{-2}} \quad (3.43)$$

$$\tilde{H}_2(z) = \frac{0.663712 - 0.780240z^{-1} + 0.663712z^{-2}}{1 - 1.231882z^{-1} + 0.779066z^{-2}} \quad (3.44)$$



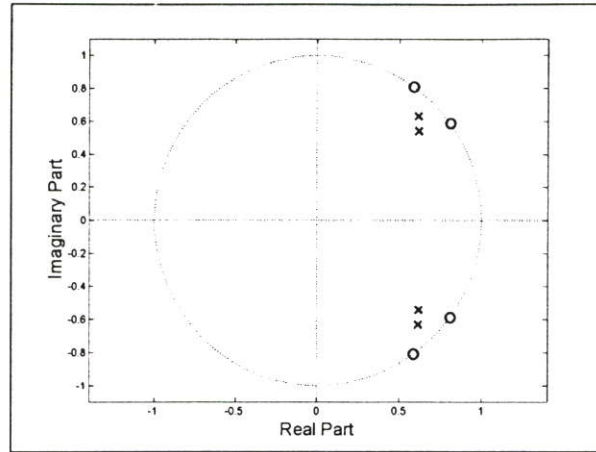
รูปที่ 3.12 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ตามหลักการที่นำเสนอ



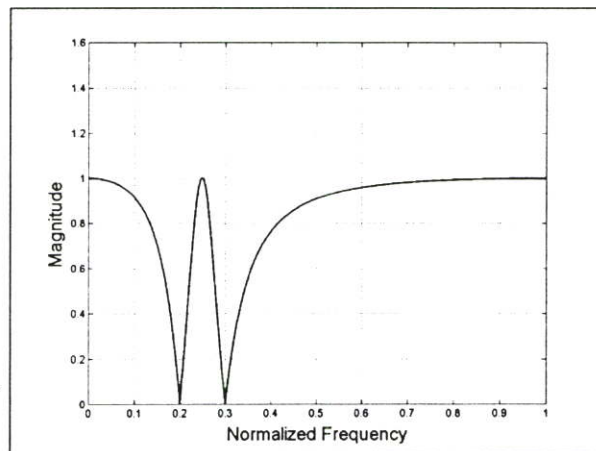
รูปที่ 3.13 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 2 ตามหลักการที่นำเสนอ

เมื่อนำ Notch filter ทั้งสองมาต่อลำดับกันจะได้สมการ Transfer function ของตัวกรองเชิงแบบ Multiple notch ดังสมการที่ 3.45 ส่วนการวางตำแหน่ง Pole-zero และผลตอบสนองทางขนาด แสดงได้ดังรูปที่ 3.14 และ 3.15

$$\tilde{H}(z) = \frac{0.763559 - 2.133080z^{-1} + 2.979492z^{-2} - 2.133080z^{-3} + 0.763559z^{-4}}{1 - 2.468980z^{-1} + 2.979551z^{-2} - 1.797181z^{-3} + 0.527058z^{-4}} \quad (3.45)$$



รูปที่ 3.14 การวางตำแหน่ง Pole-zero ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ



รูปที่ 3.15 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ

บทที่ 4

ผลการทดลองและการประยุกต์

4.1 ผลการทดลองการเปรียบเทียบระหว่างหลักการเดิมกับหลักการที่นำเสนอ

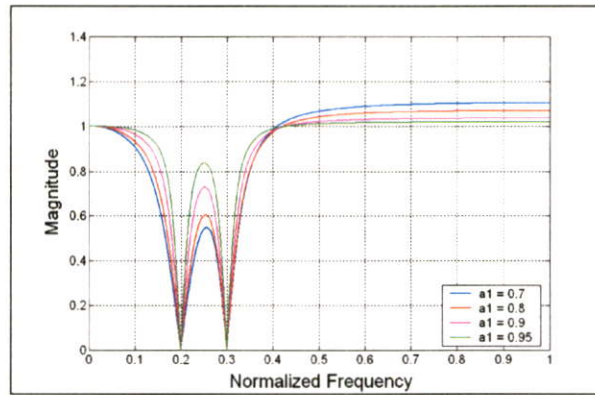
ในหัวข้อนี้จะโปรแกรม MATLAB สร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยหลักการที่นำเสนอ เปรียบเทียบผลกับการสร้างด้วยหลักการเดิม โดยตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch สร้างขึ้นจะมีคุณสมบัติตามสมการที่ 3.42 และกำหนดให้ค่า $\omega_c = 0.25\pi$, BWF=0.7,0.8,0.9 และ 0.95 จะได้ตำแหน่งการวาง Pole-zero และค่า r_1, r_2, b_1 และ b_2 ดังตารางที่ 4.1 และตารางที่ 4.2 จากนั้นจะทำการสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง Pole ตามสมการที่ 3.19 และ 3.20 และใช้ค่า r_1, r_2 จากตารางที่ 4.1 และตารางที่ 4.2 เช่นเดียวกันซึ่งผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างด้วยหลักการเดิมและหลักการที่นำเสนอแสดงได้ดังรูปที่ 4.1 ถึงรูปที่ 4.3

ตารางที่ 4.1 ตำแหน่งของ Pole-zero และค่า b_1, r_1 ของ Notch filter 1

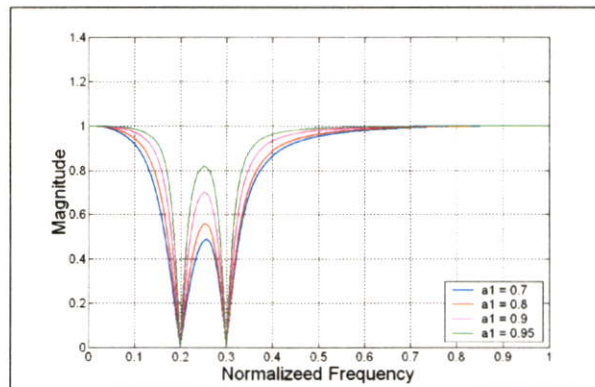
BWF	Notch filter 1 : $\omega_1 = 0.2\pi$			
	Pole	Zero	r_1	b_1
(a1)				
0.7	$0.619 \pm 0.542j$	$0.809 \pm 0.587j$	0.823	1.150
0.8	$0.664 \pm 0.540j$	$0.809 \pm 0.587j$	0.856	1.058
0.9	$0.714 \pm 0.546j$	$0.809 \pm 0.587j$	0.899	0.994
0.95	$0.745 \pm 0.554j$	$0.809 \pm 0.587j$	0.928	0.975

ตารางที่ 4.2 ตำแหน่งของ Pole-zero และค่า b_2, r_2 ของ Notch filter 2

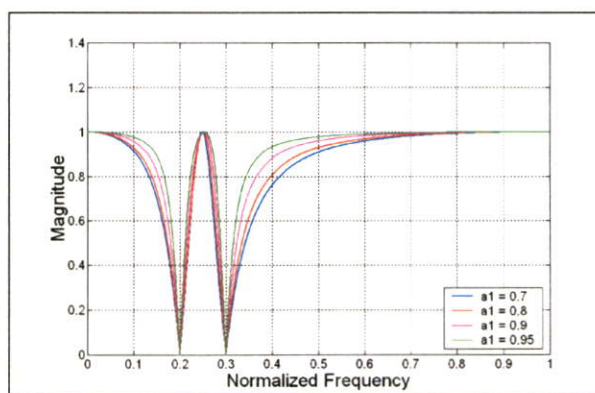
BWF	Notch filter 2 : $\omega_2 = 0.3\pi$			
	Pole	Zero	r_2	b_2
(a1)				
0.7	$0.616 \pm 0.632j$	$0.587 \pm 0.809j$	0.883	0.664
0.8	$0.585 \pm 0.665j$	$0.587 \pm 0.809j$	0.886	0.744
0.9	$0.567 \pm 0.709j$	$0.587 \pm 0.809j$	0.908	0.838
0.95	$0.564 \pm 0.741j$	$0.587 \pm 0.809j$	0.931	0.975



รูปที่ 4.1 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการเดิมก่อนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole



รูปที่ 4.2 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการเดิมก่อนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง Pole

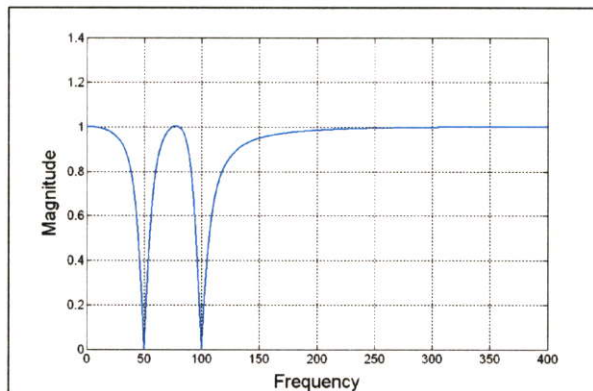


รูปที่ 4.3 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ

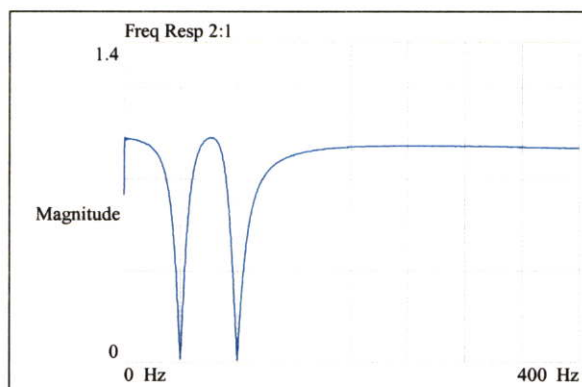
4.2 การสร้างจริงด้วยตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

ในหัวนี้จะทำการสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 [17-20] โดยกำหนดให้ $\omega_1 = 50\text{Hz}$ $\omega_2 = 100\text{Hz}$ $\omega_c = 75\text{Hz}$ $BWF = 0.95$ และ Sampling frequency $f_s = 800\text{Hz}$ ซึ่งจะได้ Transfer function ตามสมการที่ 4.1 ผลตอบสนองทางขนาดที่จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB แสดงดังรูปที่ 4.4 และสร้างจริงวัดด้วยเครื่อง Dynamic signal analyzer Agilent 35760A แสดงดังรูปที่ 4.5 ส่วนรูปที่ 4.6 แสดงบอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 และเครื่อง Dynamic signal analyzer ที่ใช้ขณะทำการทดลอง

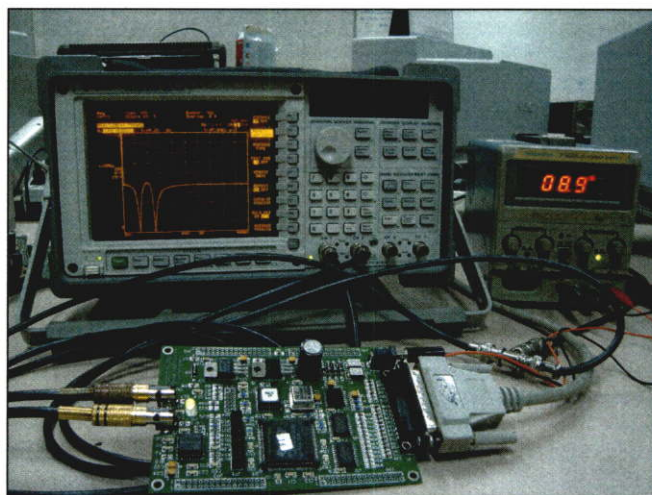
$$\tilde{H}(z) = \frac{0.873896 - 2.850625z^{-1} + 4.031936z^{-2} - 2.850625z^{-3} + 0.873896z^{-4}}{1 - 3.057892z^{-1} + 4.031558z^{-2} - 2.643359z^{-3} + 0.747627z^{-4}} \quad (4.1)$$



รูปที่ 4.4 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB



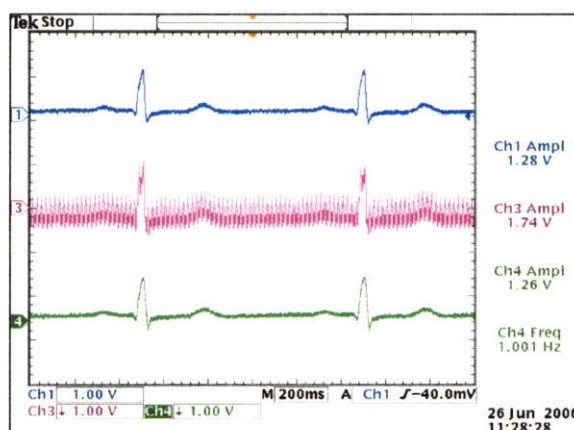
รูปที่ 4.5 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัลและวัดด้วยเครื่อง Dynamic signal analyzer



รูปที่ 4.6 บอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 และเครื่อง Dynamic signal analyzer ที่ใช้ขณะทำการทดลอง

4.3 การประยุกต์ในการลดทอนสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ

ในหัวนี้จะทดลองนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างขึ้นตามหลักการที่นำเสนอในหัวข้อที่ 4.2 มาลดทอนสัญญาณจาก Power line AC [10] ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (Electrocardiogram : EKG) โดยกำหนดให้สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจมีสัญญาณจาก Power line AC ความถี่ 50Hz และ 150Hz ปะปนอยู่ ผลการทดลองแสดงได้ดังรูปที่ 4.7 และจากรูปที่ 4.7 Upper trace แสดงสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจที่ไม่มีการปะปนของสัญญาณ Sine, Middle trace แสดงสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจที่มีสัญญาณ sine ความถี่ 50 Hz และ 100 Hz ขนาด $0.5 V_{p-p}$ ปะปน และ Lower trace แสดงผลการใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ ลดทอนสัญญาณ Sine ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ



รูปที่ 4.7 ผลลดทอนสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ

บทที่ 5

สรุปผลการทดลอง

จากการทดลองพบว่าตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่ถูกสร้างขึ้นตามหลักการที่นำเสนอ นั้น ผลตอบสนองทางขนาดสามารถควบคุมอัตราขยายที่ความถี่ DC ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency (ω_c) และความถี่ π ให้มีขนาดตามที่ต้องการได้ ซึ่งจะให้ผลที่ดีกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับหลักการเดิม นั่นก็หมายความว่าหลักการที่นำเสนอสามารถหาตำแหน่งการวาง Pole ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ได้อย่างแม่นยำและเหมาะสม แต่อย่างไรก็ตาม หลักการที่นำเสนอนี้ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่บางประการคือ ถ้ามีการเพิ่มจำนวน Notch frequency ก็จะทำให้ขั้นตอนการหาตำแหน่งการวาง Pole ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch filter มีความซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นแนวทางในการพัฒนาต่อก็คือ หาวิธีทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนน้อยและแม่นยำ มาใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งของ Pole ทั้งนี้เพื่อที่จะทำให้การเพิ่มจำนวน Notch frequency สามารถทำได้ง่ายขึ้น และแนวทางการพัฒนาอีกอย่างหนึ่งก็คือวิธีการชดเชยเฟสหรืออีกแง่หนึ่งก็คือวิธีการชดเชยค่าหน่วงกลุ่ม (Group delay) ซึ่งค่าหน่วงกลุ่มนี้จะแปรผกผันกับค่า Bandwidth ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch กล่าวคือเมื่อ Bandwidth มีค่าน้อย จะส่งผลให้ค่าหน่วงกลุ่มมาก ดังนั้นสัญญาณที่ผ่านกระบวนการกรองจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งรูปสัญญาณจึงเข้าสู่สภาวะราบเรียบ (Stable) ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ยังไม่ได้เสนอวิธีการชดเชยค่าดังกล่าว

สำหรับการสร้างจริงด้วยตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลขมีสิ่งที่จะต้องระวังคือถ้ามีการกำหนดให้ Bandwidth ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch มีค่าน้อย จะเป็นผลให้สัมประสิทธิ์ของตัวกรองมีค่าเข้าใกล้หนึ่งมากๆ ดังนั้นเมื่อนำไปสร้างด้วยตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลขแบบ Fixed point ผลตอบสนองทางขนาดอาจจะผิดพลาดไม่มีความแม่นยำ ทั้งนี้เนื่องจากการตัดค่าทศนิยมของตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลขแบบ Fixed point ซึ่งแนวทางแก้ไขกระทำได้สองวิธี [21] ดังนี้คือ วิธีที่หนึ่งใช้เทคนิคทางด้าน Software เข้าช่วย วิธีที่สองให้ปรับโครงสร้างของตัวกรองใหม่ แต่สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้ TMS320C31 ซึ่งเป็นตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลขแบบ Floating point ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาดที่ได้จึงมีความเที่ยงตรงและแม่นยำสูง

บรรณานุกรม

- [1] Craig Marven, Gillian Ewers, "A simple approach to digital signal processing" John Wiley & sons, 1996.
- [2] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "IIR Multiple Notch Filter Design Based on All-pass Filter," IEEE Trans. Circuit and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol.44 no.2, pp.133-136, February 1997.
- [3] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "Stable IIR Notch Filter Design with Optimal Pole Placement," IEEE Trans. Signal Processing, vol.49, no.11, pp. 2673-2681, November 2001.
- [4] S.Yimman, W.Hinjit, S.Sriboonsong, M.Puangpool, K.Dejhan "IIR Notch Filter Design with Modified Pole-zero Placement Algorithm," The IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT 2003), Darmstadt, Germany, December 2003.
- [5] S.Yimman, W.Hinjit, W.Ussawongaraya, P.Thoopluang, K.Dejhan "Design and Implementation of IIR Multiple Notch Filter with Modified Pole-zero Placement Algorithm" International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2003), Gyeongju, Korea, October 2003.
- [6] Hirano, K.; Nishimura, S.; Mitra, S, "Design of Digital Notch Filters," IEEE Trans Communications, vol.22, pp.964-970, Jul 1974.
- [7] Soo-Chang Pei; Chien-Cheng Tseng, "A technique for transient suppression of IIR notch filter," IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 3, pp 209-212, April 1994.
- [8] Chien-Cheng Tseng; Soo-Chang Pei;" Complex notch filter design using allpass filter," Electronics Letters, Vol.34, pp 966-967, May 1998.
- [9] Yimman, S.; Praesomboon, S.; Klunium, S.; Navarattara, S.; Dejhan, K.;" Two-Pole Band-pass Filter Based on All-pass Filter," The IEEE 2005 Fifth International Conference on Information Communications and Signal Processing, Dec 2005.
- [10] Casper, B.K.; Comer, D.J.; Comer, D.T.;" An integrable 60-Hz notch filter," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, Vol.46, pp 74-77, Jan 1999.

- [11] Jackson, L, "Roundoff-noise analysis for fixed-point digital filters realized in cascade or parallel form," IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol.18, pp 107-122, Jun 1970.
- [12] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, "Digital Signal Processing Principle, Algorithms, and Applications," Prentice Hall, 1996.
- [13] A.V.Oppenheim, R.W.Schafer, J.R.Buck, "Discrete Time Signal Processing," Prentice Hall, 1999.
- [14] S. K. Mitra, "Digital Signal Processing, A Computer-Based Approach," McGraw-Hill, 2001.
- [15] S. J. Orfanidis, "Introduction to Signal Processing," Prentice Hall, 1995.
- [16] R.Chassaing, "Digital Signal Processing Laboratory Experiments Using C and the TMS320C31 DSK," John Wiley & Sons Inc, 1999.
- [17] TMS320C3x User's Guide, Texas Instruments Inc., 1994.
- [18] TMS320C3x DSP Starter Kit User's Guide, Texas Instruments Inc., 1996.
- [19] TMS320C3x/4x Optimizing C Compiler User's Guide, Texas Instruments Inc., 1998.
- [20] Digital Signal Processing Applications With The TMS320 Family, Vol.1 Texas Instruments Inc., 1987.
- [21] สุรพันธ์ ชัยมั่ง. "การออกแบบและสร้างระบบประมวลผลสัญญาณดิจิทัลแบบขนาน." วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมพระนครเหนือ, 2541

ภาคผนวก

ผลงานที่ได้รับการเผยแพร่

1. K. Dejhan S. Yimmun A. Trirat F. Cheevasuvit “ **TMS320C31-Base Narrow-Band Noise Rejection Kalman Filter Implementation**” IEEE International Conference on Industrial Technology. 11-14 December 2002 Shangri-La Hotel, Bangkok, Thailand.
2. S. Yimmun, W. Hinjit, P. Komonchaisak, W. Bholsithi, P. Tosranon, P. Yoongsuntia “**Design and Construction of an ECG Monitor via Network System**” Conference on Internet Technology 2003 & Workshop on UniNet Network and Computer Application 10th 12 – 20 May 2003 Asian Institute of Technology, Thailand.
3. S. Yimmun, K. Dejhan, S. Soommart, W. Hinjit, C. Pradabpet “**Design and Implementation of symmetry Digital Notch Filter Using Least Square Approximate**” Third Asian Conference on Industrial Automation and Robotics May 8-9, 2003 Bangkok, Thailand.
4. S.Chivapreecha, K. Dejhan, F. Cheevasuvit, C. Pradabpet, S. Yimmun “ **An Optimal Multi-band Digital Filter Design-Based Spline Transition Function Technique**” International Technical Conference On Circuit/Systems, Computers And Communications 7-9 July 2003 Phoenix Park, Kang-Won Do, Korea.
5. K. Dejhan, S.Chivapreecha, S. Yimmun, W.Hinjit, C. Pradabpet “**Design and Implementation of Multi-Narrow Band Digital Filter**” International Technical Conference On Circuit/Systems, Computers And Communications 7-9 July 2003 Phoenix Park, Kang-Won Do, Korea.
6. C. Pradabpet, S. Yimmun, W.Hinjit, S.Chivapreecha, K. Dejhan “**Design and Implementation of Biquad Digital Filter**” The 9th Asia-Pacific Conference On Communications (IEEE) City Bayview Hotel, Penang, Malaysia 21-24 September 2003
7. K. Dejhan, P. Thoopluang, S.Yimmun , W.Hinjit, W.Ussawongaraya “ **Design and Implementation of IIR Multiple Notch Filter with Modified Pole Zero Placement Algorithm**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2003) 22-25 October 2003 Gyeongju TEMF Hotel, Gyeongju, Korea.
8. N. Eawsakul, N. Watjanathepin, A. Namahoot, M.Puangpool, S.Yimman “**Implementation of PI Controllers with the FPGA**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2003) 22-25 October 2003 Gyeongju TEMF Hotel, Gyeongju, Korea.
9. S.Yimman, W.Hinjit, S. Sriboonsong, M.Puangpool, K. Dejhan “ **IIR Notch Filter Design With Modified Pole Zero Placement Algorithm**” The 2003 IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology 14-17 December 2003. Darmstadt Germany.

10. N.Whamook,**S.Yimman**,M.Puangpool,S.Chivapreecha,K.Dejhan “**Speed Sensorless DC Motor Using Kalman Filter**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2004) 25-27 August 2004 The Shangri-La Hotel Bangkok Thailand.
11. S.Klunium,S.Praesomboon,W.Hinjit,**S.Yimman**,K.Dejhan “**Adjustable Phase, Discrete Time Sinewave Generator**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2004) 25-27 August 2004 The Shangri-La Hotel Bangkok Thailand.
12. S.Praesomboon,S.Klunium,S.Sriboonsong,**S.Yimman**,K.Dejhan “**Implementation of IIR Notch Filter on FPGA**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2004) 25-27 August 2004 The Shangri-La Hotel Bangkok Thailand.
13. W.Bholsithi,**S.Yimman**,W.Hinjit,K.Dejhan “**Real-Time QRS Detection Using Wavelet Packet Transform**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2004) 25-27 August 2004 The Shangri-La Hotel Bangkok Thailand.
14. P.Piriyawirut,K.Dejhan,**S.Yimman**,W.Rattanakoch “**Performance Analysis of CDMA System Integrated Voice**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2004) 25-27 August 2004 The Shangri-La Hotel Bangkok Thailand.
15. S.Chivapreecha,N.Ronnarongrit,**S.Yimman**,C.Pradabpet,K.Dejhan “**Multiplierless Digital PID Controller Using FPGA**” International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2004) 25-27 August 2004 The Shangri-La Hotel Bangkok Thailand.
16. N.Eawsakul,A.Thoopluang,M. Puangpool,S.Yimman “**A Modified Floating-Point Format for Implementation of FPGA**” The Embedded Signal Processing Solution Event 27-30 September 2004. Santa Clara Convention Center, Santa Clara ,CA USA.
17. K.Dejhan,P.Muangnual,P. Piriyawirut,**S.Yimman**,W.Rattanakoch “**Reverse Link Analysis of CDMA System Supporting Heterogeneous Traffic With Different Velocity Users**” The IEEE International Symposium on Communications and Information Technologies 2004 (ISCIT 2004) October 26-29, 2004 Sapporo Convention Center, Sapporo, Japan.
18. **S. Yimman**, W. Hinjit, P. Desyoo, W. Bholsithi and K. Dejhan, “**Wavelet packet transform applications on QRS detection,**” Proc. of the 4th IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, Jolly Hotel-Vittorio Veneto, Rome, Italy, December 18-21, 2004.

19. S.Klunium, P. Desyoo, **S. Yimman**, C.Pradabpet, K. Dejhan, "**The Implementation of an Adjustable Phase Digital Sine Wave Oscillator**," Proc of the 2005 RISP International Workshop on Nonlinear Circuits and Signal Processing, Waikiki Beach Marriott Resort Honolulu, Hawaii, USA, March 4-6, 2005.
20. S. Praesombool, P. Desyoo, **S. Yimman**, A.Thoopluang, K. Dejhan, "**Real Time Multiple Output FIR Filter Design**," Proc of the 2005 RISP International Workshop on Nonlinear Circuits and Signal Processing, Waikiki Beach Marriott Resort Honolulu, Hawaii, USA, March 4-6, 2005.
21. S.Jongsataporn, **S. Yimman**, C.Pradabpet, A.Thoopluang, F.Cheevasuvit, "**Real Time ECG Compression/Decompression System with Multirate Digital Signal Processing**," Proc of the 2005 RISP International Workshop on Nonlinear Circuits and Signal Processing, Waikiki Beach Marriott Resort Honolulu, Hawaii, USA, March 4-6, 2005.
22. S. Sriyapong, S. Junnapiya, **S. Yimman**, S. Chivapreecha and K. Dejhan, "**IIR notch filter design using quadratic programming for removal of ECG baseline wander**," Proc. The 2005 ECTI International Conference (ECTI-CON 2005), Pataya, Thailand, May 12-13, 2005.
23. **S. Yimman**, M.Deedom, J.Ittisariyanon, S.Junnapiya, K. Dejhan,"**An Implementation of Discrete Mathematical Model for ECG waveform**," Proc of the 2005 International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2005), KINTEX , Gyeonggi-Do, Korea, June 2-5 2005.
24. S.Chivapreecha, K. Dejhan, **S. Yimman**, "**Design of IIR Notch Filter for Removal of Baseline wander and Power Line Interference from ECG Signal**," Proc of the 2005 International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2005), KINTEX , Gyeonggi-Do, Korea, June 2-5 2005.
25. **S. Yimman**, P.Boonsompong, S. Praesombool, K. Dejhan, P.Srisangngam ,"**TMS320C31-Based Real-Time QRS Detection**," Proc of the 2005 International Conference on Robotics, Vision, Information and Signal Processing (ROVISP2005), School of Electrical & Electronic Engineering, Engineering Campus, Universiti Sains Malaysia, July 20-22 2005.

26. S. Yimman, S.Siramane, S.Klunium, K. Dejhan, P.Srisangngam, "**Constrained Bandwidth IIR Notch Filter Design With Improved Pole-zero Placement Techniques,**" Proc of the 2005 International Conference on Robotics, Vision, Information and Signal Processing (ROVISP2005), School of Electrical & Electronic Engineering, Engineering Campus, Universiti Sains Malaysia, July 20-22 2005.
27. S. Chivapreecha, S. Yimman, C. Pradabpet and K. Dejhan, "**FPGA implementation of multi-functional digital filter based on non-recursive scheme,**" Proc of the 2005 International Conference on Robotics, Vision, Information and Signal Processing (ROVISP2005), School of Electrical & Electronic Engineering, Engineering Campus, Universiti Sains Malaysia, July 20-22 2005.
28. C.Uakarn, N.Eawsakul, A.Thoopluang, S.Yimman and T.Rung-ruangkijkrai, "**Implementation Eighth Order IIR Filter using FPGA**" The Embedded Signal Processing Solution Event 24-27 October 2005. Santa Clara Convention Center, Santa Clara ,CA USA.
29. S. Yimman, S. Praesomboon, S. Klunium, S. Navarattara and K. Dejhan, "**Two-pole band-pass filter based on all-pass filter,**" Proc. The 5th IEEE International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS 2005), Bangkok, Thailand, December 6-9, 2005.
30. S.Anumas, S.Yimman, S.Klunium and K. Dejhan, "**The Implementation of Discrete Time Sweep Sine Oscillator**" The IEEE International Symposium on Communications and Information Technologies 2006 (ISCIT 2006) October 18-20, 2006 Grand Mercure Fortune Hotel, Bangkok, Thailand .
31. W.Kusathitsiriphan, S.Yimman, C.Suwancheewasiri and K.Dejhan, "**Automatic ECG Characteristic Analysis Using Wavelet Packet Transform**" The IEEE International Symposium on Communications and Information Technologies 2006 (ISCIT 2006) October 18-20, 2006 Grand Mercure Fortune Hotel, Bangkok, Thailand .
32. S. Yimman, K. Dejhan, "**IIR Multiple Notch Filters Design with Optimun Pole Position,**" **Journal of Signal Processing**, Research Institute of Signal Processing, Japan, vol. 12, no. 1, January 2008.

PAPER**IIR Multiple Notch Filter Design with Optimum Pole Position**

Surapun Yimman and Kobchai Dejhan

Faculty of Engineering and Research Center for Communications and Information Technology,

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

E-mail: sym@kmitnb.ac.th, kobchai@telecom.kmitl.ac.th

Tel: 66-232-4238, 66-2326-4242, Fax: 66-2326-4554

Abstract This paper presents a new design and implementation of IIR multiple notch filter by using the application of suitable pole placement technique. The initial step is to design the two IIR single notch filters with different notch frequency to obtain the suitable pole that can control the pass-band gain at 3 frequencies such as DC, π and frequency between the notch frequencies. After that, the IIR single notch filters with different notch frequencies are cascaded to create IIR multiple notch filter which can control the pass-band gain at DC and π frequencies, especially the frequency between the notch frequencies.

Keyword: Multiple notch filter, Optimum pole position, Electrocardiogram

1. Introduction

The implementation of notch filter in the past is in analog circuit form. However, the filters in analog circuits have several drawbacks especially accuracy. Later on, the notch filter has become either FIR or IIR digital filter. However, FIR notch filter cannot be a narrow band notch filter. Therefore, the digital notch filter is generally an IIR filter which can be done in several ways such as transforming from analog notch filter [1], implementing from all-pass filters [2], and the pole-zero placements, which is the easiest one. However, the pole-zero placements have the constraints on the asymmetric and uncontrollable gain. The rectification for this problem is to carry the proper pole positions to make symmetric and controllable gains [3, 4].

The application of notch filter is to remove some particular frequencies. It is necessary to utilize an IIR notch filter with multiple notches to remove frequencies along with harmonics. It can be done by cascading the IIR single notch filters. However, cascading IIR single notch filters may create uncontrollable pass-band gains. However, the change in the pole placement in the IIR single notch filter by cascading the notch filters to form multiple notch filters can create some controllable frequencies. Even so, the gain at some frequencies between notch frequencies cannot be controlled [5].

Recently, Tseng and Pei [3] proposed a method to design IIR multiple notch filter, which can be controlled the gains at various frequencies, especially the frequencies between notch frequencies. The proposed design method searched for pole placement using quadratic programming method, in which pole positions are iteratively calculated until the optimal ones are obtained.

However, the convergence of the pole positions depends on a suitable initial parameter. If the initial parameter is not suitable, the number of iterations for calculation will be increased.

The proposed design method creates the transfer function equations derived from relationship of gains of magnitude response at various frequencies. Then, the proposed method solves the transfer function equations for optimal pole positions.

2. Theory**2.1 Conventional Design**

The IIR multiple notch is derived by cascading IIR single notch filters. The frequency response of IIR multiple notch filter can be described as shown in Eq. (1). If one implement of an IIR multiple notch filter by cascading IIR single notch filters before changing the pole positions, the transfer function for IIR multiple notch filter will be shown in Eq. (2).

$$H_M(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n \\ 1 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$H_M(z) = \prod_{n=1}^k \left(b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right) \quad (2)$$

From Eq. (2), define $\omega_1 = 0.2\pi$, $\omega_2 = 0.3\pi$ and $r = 0.7$, the magnitude response will be shown in Fig. 1. After changing the pole positions of an IIR single notch filter and calculating the constant to control the pass-band gain by applying Eqs. (4) and (5) as in previous paper [4], the result will be a transfer function of the IIR multiple notch filter as shown in Eq. (3).

$$\hat{H}_M(z) = \prod_{n=1}^k \left(b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right) \quad (3)$$

$$\hat{\omega}_n = \cos^{-1} \left[\frac{1+r^2}{2r} \cos \omega_n \right] \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{k_{1n}} = \frac{1}{k_{2n}} \quad (5)$$

Define

$$k_{1n} = \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_n e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_n e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \right] \text{ and}$$

$$k_{2n} = \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_n e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_n e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right]$$

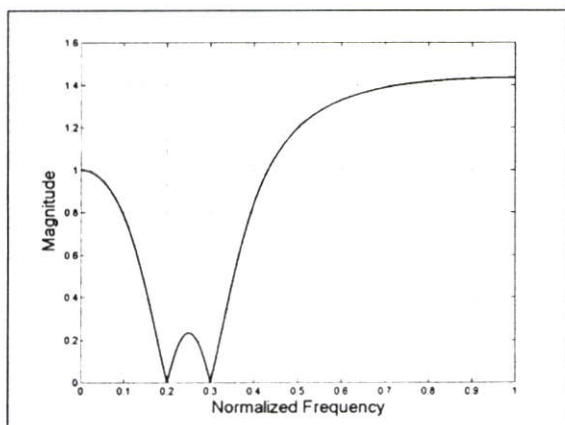


Fig. 1 Magnitude response of IIR multiple notch filter derived from cascading IIR single notch filters before changing the pole positions.

From Eq. (3), defines $\omega_1 = 0.2\pi$, $\omega_2 = 0.3\pi$ and $r = 0.7$, the magnitude response will be shown in Fig.2. The magnitude response of IIR multiple notch filter implemented from single notch filters before changing pole positions shown in Fig. 1 reveals the uncontrollable gain at frequency DC, π and frequency between the notch frequencies. The reason for this shortcoming is due to the fact that the pole positions of the IIR single notch filters are not at the appropriated positions. Furthermore, the constant for controlling pass-band gain rate b_n is unknown, causing the asymmetric and uncontrollable pass-band gain at DC and π frequencies [4]. Therefore, the IIR multiple notch filters from cascaded IIR single notch filter without changing the pole position and it has uncontrollable gain at the magnitude response.

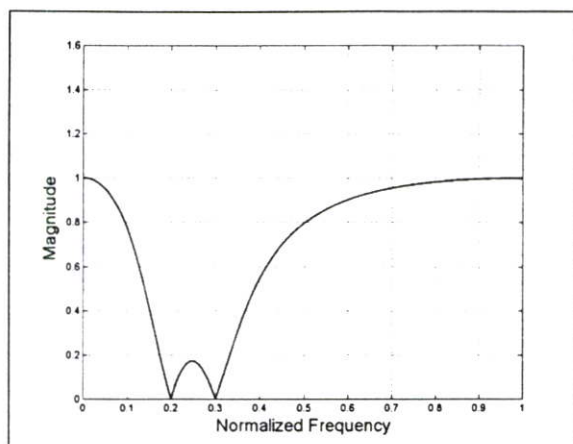


Fig. 2 Magnitude response of the IIR multiple notch filter derived from IIR single notch filters after modifying the pole positions.

Fig.2 shows magnitude response of IIR multiple notch filters implemented from IIR single notch filter after modifying pole positions and applying constant b_n to control pass-band gain.

The result has shown that the pass-band gain at DC and π frequencies become controllable while the frequency between the notch frequencies cannot be control at the same level for DC and π frequencies, even after cascading another single notch filter to make symmetric pass-band gain while control pass band gain at DC and π frequencies. However, this kind of IIR multiple notch filter still has uncontrollable gain between the notch frequencies due to the changing pole positions and gain controlling constant b_n at pass-band is derived from frequencies at DC and π which only works for IIR single notch filters.

In the other word, the pole positions within the IIR multiple notch filters derived from cascaded IIR single notch filters have no relationship with another, which causes the uncontrollable gain at the frequency between notch frequencies [5].

2.2 Proposed Design

The frequency response of IIR multiple notch filters are shown in Eq. (6) while the corresponding transfer function as shown in Eq. (7).

$$\tilde{H}_M(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega_1, \omega_2 \\ 1 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

$$\tilde{H}_M(z) = \prod_{n=1}^2 \tilde{H}_n(z)$$

$$\tilde{H}(z) = \prod_{n=1}^2 \left(b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_n \cos \tilde{\omega}_n z^{-1} + r_n^2 z^{-2}} \right) \quad (7)$$

Eq.(7) shows the transfer function of the IIR multiple notch filters implemented by cascading IIR single notch filters with special design that differs from the normal design. The IIR single notch filter with special design will have the different gains at DC and π frequency.

Furthermore, there will have gain control at other frequency or frequencies between the notch frequencies (ω_c) of multiple notch filter in addition to the gain control at DC and π frequencies, while each cascaded IIR single notch filters will have relating gain at DC frequency, π frequency and frequency between the notch frequencies. It causes the gain of the multiple notch filters can be controllable at DC frequency, π frequency and frequency between the notch frequencies to correspond the specifications.

Define a multiple notch filter with notch frequencies as ω_1, ω_2 while the frequency between notch frequencies as ω_c , the IIR single notch filters is cascaded and will be separated into two parts, IIR notch filter 1 with notch frequency at ω_1 and IIR notch filter 2 with notch frequency at ω_2 . Therefore, gain at several frequencies in two IIR single notch filters and IIR multiple notch filter can be shown in Table 1, Fig.3 and Fig.4 while ω_c is shown according to Eq. (8).

$$\omega_1 < \omega_c < \omega_2 \quad (8)$$

Therefore, IIR notch filter 1 and IIR notch filter 2 will meet the specifications before cascading to form an IIR multiple notch filter. The design starts at IIR notch filter 1 by appropriated pole-zero placements. The pole placement depends upon pole angle $\tilde{\omega}_1$ and distance from the origin r_1 . The calculation for pole angle $\tilde{\omega}_1$ will need transfer function shown in Eq. (9) while the gain at DC and π frequencies will be shown in Table 1.

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (9)$$

At DC frequency, let $z = e^{j0}$, transfer function and k_1 will become:

$$\tilde{H}_1(e^{j0}) = k_1 = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 + 1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}$$

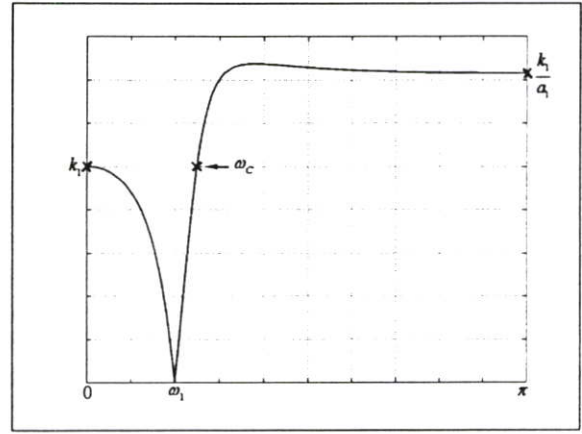


Fig.3 Magnitude response of IIR notch filter 1

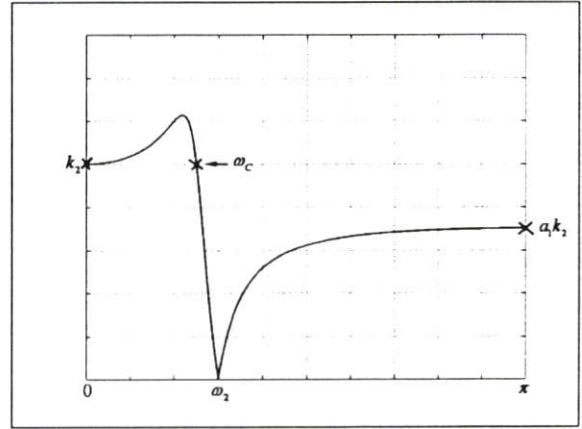


Fig.4 Magnitude response of IIR notch filter 2

Table 1 Gain at DC, ω_1 , ω_2 , ω_c and π frequency of IIR notch filter 1, IIR notch filter 2 and IIR multiple notch filter.

	Gain at frequencies :				
	DC	ω_1	ω_c	ω_2	π
IIR notch filter 1	k_1	0	k_1	-	k_1/a_1
IIR notch filter 2	k_2	-	k_2	0	$a_1 k_2$
IIR multiple notch filter	$k_1 k_2$	0	$k_1 k_2$	0	$k_1 k_2$

Where: a_1 , k_1 and k_2 are constant.

Interm of (-) is undefined.

$$k_1 = b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \quad (10)$$

At π frequency, define $z = e^{j\pi}$, transfer function and k_1 will become

$$\tilde{H}_1(e^{j\pi}) = \frac{k_1}{a_1} = b_1 \frac{1 + 2 \cos \omega_1 + 1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}$$

$$k_1 = a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \quad (11)$$

From Eqs. (10) and (11), the transfer functions can be rearranged to calculate for $\cos \tilde{\omega}_0$ and $\tilde{\omega}_0$ to get factors as shown in Eqs. (12) to (14).

$$k_1 = b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} = a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}$$

$$\frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} = a_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}$$

$$\cos \tilde{\omega}_1 = \frac{(r_1^2 + 1)(a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)}{2r_1(a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)} \quad (12)$$

Let $l_1 = \frac{a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}{a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}$, so $\cos \tilde{\omega}_1$ can be rewritten as shown in Eqs. (13) and (14).

$$\cos \tilde{\omega}_1 = \frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \quad (13)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \cos^{-1} \left(\frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \right) \quad (14)$$

Substitute $\cos \tilde{\omega}_1$ in Eq. (13) into Eq. (9) to get the new transfer function of single notch filter as shown in Eq. (15).

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (15)$$

Substitute DC, π and ω_c frequencies into Eq. (15) to get k_1 as shown from Eqs. (16) to (18) respectively.

$$k_1 = b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \quad (16)$$

$$k_1 = a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \quad (17)$$

$$k_1 = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \quad (18)$$

Next step is to calculate r_1 by applying the relationship between Eqs. (18) and Eq. (16) or Eq.

(17). Choose Eq. (16), Eqs. (16) and (18) can be rewritten in absolute form. The results will be shown in Eqs. (19) and (20).

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 \quad (19)$$

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (20)$$

Eqs. (19) and (20) can be rearranged as shown in Eqs. (21), (22) and (23).

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (21)$$

$$k_1^2 = b_1^2 \frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4(1-l_1)^2 + 2r_1^2(1-l_1)^2 + (1+l_1)^2} = b_1^2 \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \quad (22)$$

$$\frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4(1-l_1)^2 + 2r_1^2(1-l_1)^2 + (1+l_1)^2} = \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \quad (23)$$

From Eq. (23), the solution for r_1 can be obtained as in Eq. (24). The results r_1 in Eq. (24) can be more than one value, either real numbers or complex numbers. However, the actual r_1 must be real number with value less than one so the pole position must be within a unit circle to ensure the system stability [6, 7].

The last step is to calculate a constant b_1 by substituting r_1 in Eq. (10) or (11) and the results will be shown in Eqs. (25) and (26).

$$b_1 = k_1 \frac{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}{2 - 2 \cos \omega_1} \quad (25)$$

$$b_1 = \frac{k_1}{a_1} \times \frac{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}{2 + 2 \cos \omega_1} \quad (26)$$

Assume the factors of notch filter 1 equal to $\rho = 0.2\pi$, $\omega_c = 0.25\pi$, $k_1 = 1$ and $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$ the magnitude response will become as shown in Fig. 5.

$$\begin{aligned}
& r_1^4 \left(X_1(1-l_1)^2 - Y_1(2-2\cos\omega_1)^2 \right) + r_1^6 \left((2X_1 + X_2)(1-l_1)^2 - 4Y_2(2-2\cos\omega_1)^2 \right) + \\
& r_1^4 \left((X_1 + 2X_2 + X_3)(1-l_1)^2 - Y_3(2-2\cos\omega_1)^2 \right) + r_1^2 \left((X_2 + 2X_3)(1-l_1)^2 - 4Y_4(2-2\cos\omega_1)^2 \right) + \\
& \left(X_3(1-l_1)^2 - Y_5(2-2\cos\omega_1)^2 \right) = 0
\end{aligned} \tag{24}$$

Where:

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_4 \left((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \right) \\
X_2 &= 2X_4 \left((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c) + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \right) \\
X_3 &= X_4 \left((1 - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c)^2 \right) \\
X_4 &= (1 - 2\cos\omega_1 \cos\omega_c + \cos 2\omega_c)^2 + (2\cos\omega_1 \sin\omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \\
Y_1 &= (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^4 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^4 + 2(\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \\
Y_2 &= (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^3 (1 - l_1 \cos \omega_c) + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^3 (l_1 \sin \omega_c) + \\
& (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 + (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \\
Y_3 &= 8 \left((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \right) + \\
& 6 \left((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c)^2 \right) + \\
& 2 \left((\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c)^2 + (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \right) \\
Y_4 &= (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)^3 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c)^3 \\
& + (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c)^2 + (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \\
Y_5 &= 2 \left((1 - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c)^2 \right) + (1 - l_1 \cos \omega_c)^4 + (l_1 \sin \omega_c)^4
\end{aligned}$$

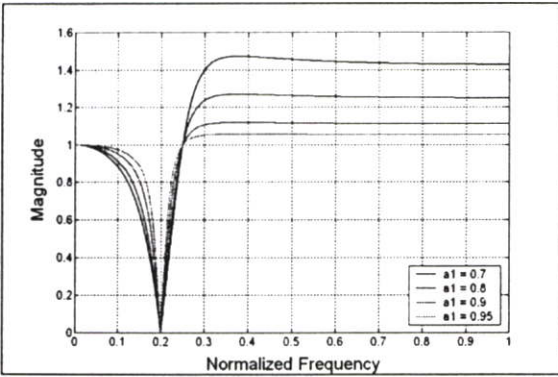


Fig. 5 Magnitude response of IIR notch filter 1 at $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$.

Fig. 5 shows that the gain at ω_1 , ω_c and π frequencies has gain according to specification. The increasing of a_1 approaches one it will have narrow notch filter bandwidth. It implies that a_1 has direct effect to notch filter bandwidth, thus a_1 is bandwidth factor (*BWF*). The design of IIR notch filter 2 will follow the example as shown in IIR notch filter 1.

3. Designed Example

Define the IIR multiple notch filter with frequency response as shown in Eq. (30) for $BWF = 0.7$.

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega = 0.2\pi, 0.3\pi \\ 1 & ; \text{otherwise} \end{cases} \tag{27}$$

From Eq. (8), select $\omega_c = 0.25\pi$ and results from Table 1 will be $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ and $BWF = a_1 = 0.7$. The IIR notch filter 1 will have $\omega_1 = 0.2\pi$ while IIR notch filter 2 will have $\omega_2 = 0.3\pi$. After that, the transfer function is derived by applying expression Eq. (9) to Eq. (26). The transfer function for IIR notch filter 1 and IIR notch filter 2 will be shown in Eqs. (28) and (29), respectively while magnitude response of each notch filter will be shown in Fig.6 and Fig. 7, respectively.

$$\tilde{H}_1(z) = \frac{1.150437 - 1.861446z^{-1} + 1.150437z^{-2}}{1 - 1.237098z^{-1} - 0.676525z^{-2}} \tag{28}$$

$$\tilde{H}_2(z) = \frac{0.663712 - 0.780240z^{-1} + 0.663712z^{-2}}{1 - 1.231882z^{-1} + 0.779066z^{-2}} \tag{29}$$

After cascading both IIR notch filters, the transfer function of IIR multiple notch filter will be shown in Eq. (30) while pole-zero plot will be shown in Fig.8 and the magnitude response will be shown in Fig. 9, respectively.

$$\tilde{H}(z) = \frac{0.763559 - 2.133080z^{-1} + 2.979492z^{-2} - 2.133080z^{-3} + 0.763559z^{-4}}{1 - 2.468980z^{-1} + 2.979551z^{-2} - 1.797181z^{-3} + 0.527058z^{-4}} \quad (30)$$

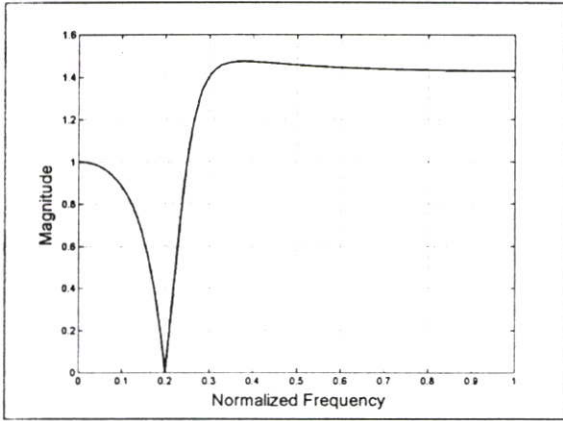


Fig. 6 Magnitude response of IIR notch filter 1 from the proposed design.

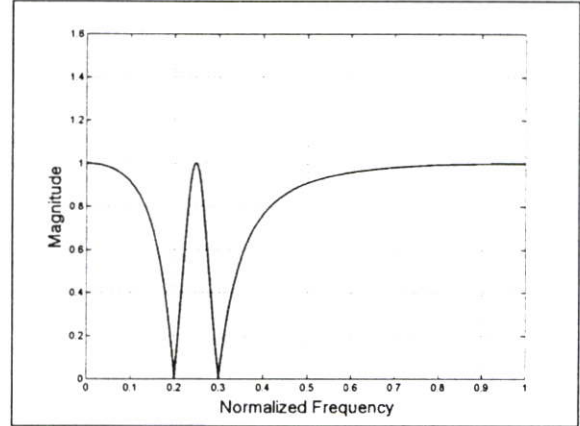


Fig. 9 Magnitude response of IIR multiple notch filter from the proposed design.

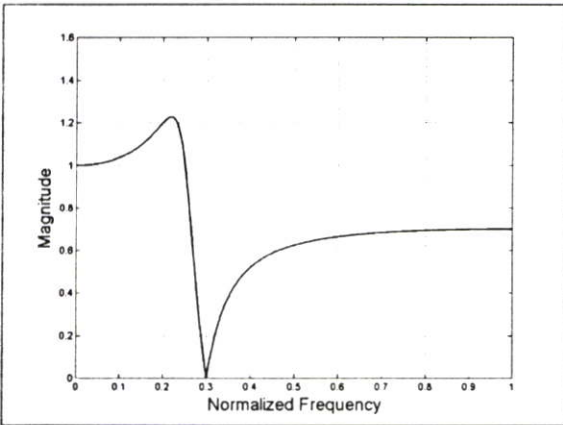


Fig. 7 Magnitude response of IIR notch filters 2 from the proposed design.

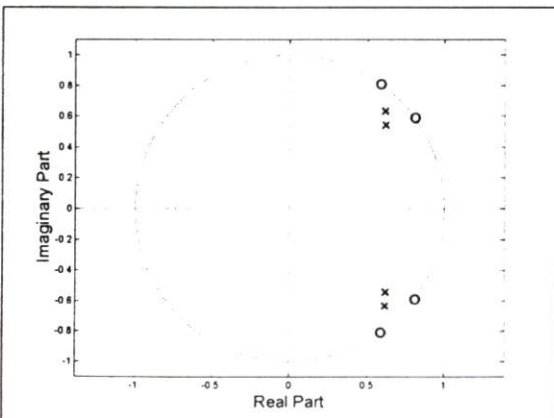


Fig. 8 Pole-zero plot of IIR multiple notch filter from the proposed design.

4. Results and Applications

4.1 Example I: Comparison with the conventional design.

In this example, there is an application of MATLAB to implementation multiple notch filters as following the proposed design compared the results from the conventional design. The proposed design uses Eq. (27) and define $\omega_c = 0.25\pi$ while $BWF = 0.7, 0.8, 0.9$ and 0.95 to calculate pole-zero positions along with r_1, r_2, b_1 and b_2 as shown in Table 2. After the calculation, it should apply the conventional design by using Eqs. (2) and (3) to implement IIR multiple notch filter before and after changing the pole positions by using r_1, r_2 as shown in Table 2. The magnitude response of IIR multiple notch filter from the conventional design and proposed design will be shown in Fig. 10 to Fig. 12.

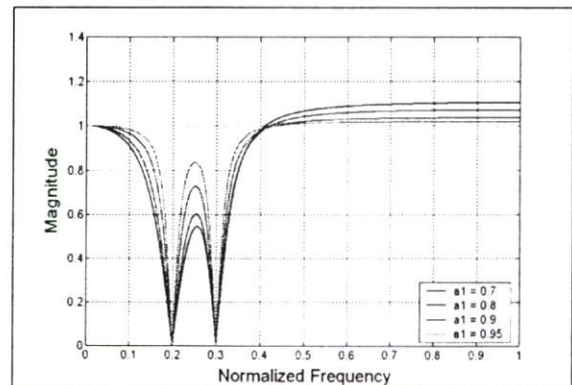


Fig. 10 Magnitude response of the IIR multiple notch filter before changing the pole positions.

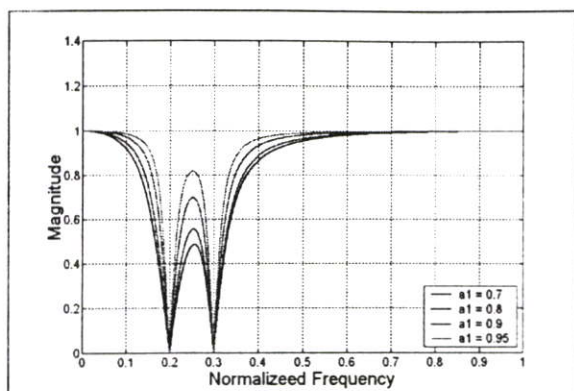


Fig. 11 Magnitude response of the IIR multiple notch filter after changing the pole positions

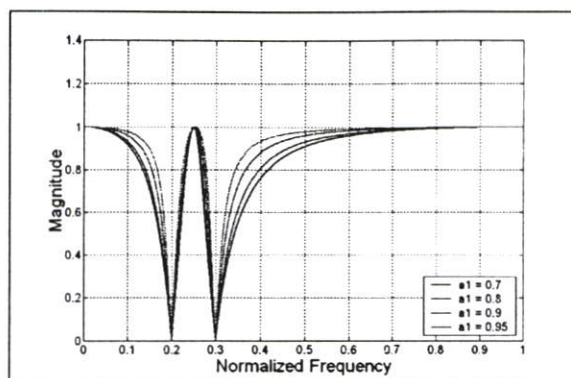


Fig. 12 Magnitude response of the IIR multiple notch filter from the proposed design.

Table 2 Pole positions with b_n, r_n of IIR notch filter 1 and IIR notch filter 2.

$BWF (a_1)$	Notch filter 1 : $\omega_1 = 0.2\pi$			Notch filter 2 : $\omega_2 = 0.3\pi$		
	Pole	r_1	b_1	Pole	r_2	b_2
0.7	$0.619 \pm j0.542$	0.823	1.150	$0.616 \pm j0.632$	0.883	0.664
0.8	$0.664 \pm j0.540$	0.856	1.058	$0.585 \pm j0.665$	0.886	0.744
0.9	$0.714 \pm j0.546$	0.899	0.994	$0.567 \pm j0.709$	0.908	0.838
0.95	$0.745 \pm j0.554$	0.928	0.975	$0.564 \pm j0.741$	0.931	0.975

4.2 Example II: Implementation.

The following example will show the construction of a IIR multiple notch filter according to the proposed design by using TMS320C31 DSP Board [9-11] by defining $\omega_1 = 50\text{Hz}$, $\omega_2 = 100\text{Hz}$, $\omega_c = 75\text{Hz}$, $BWF = 0.95$ and sampling frequency $f_s = 800\text{Hz}$ to get a transfer function as shown in Eq. (31) while the magnitude response simulated by MATLAB can be shown in Fig.13 and the actual results shown on dynamic signal analyzer Agilent 35760A can be shown in Fig. 14.

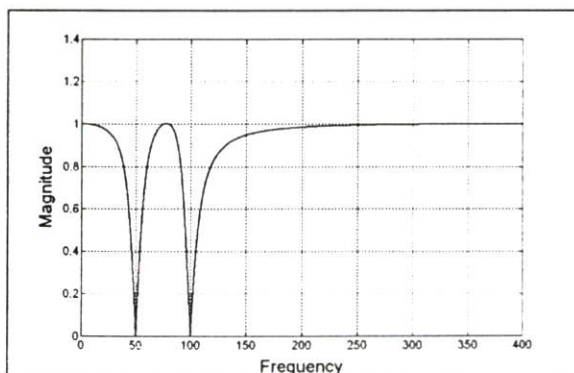


Fig. 13 Magnitude response of IIR multiple notch from the proposed design simulated on MATLAB.

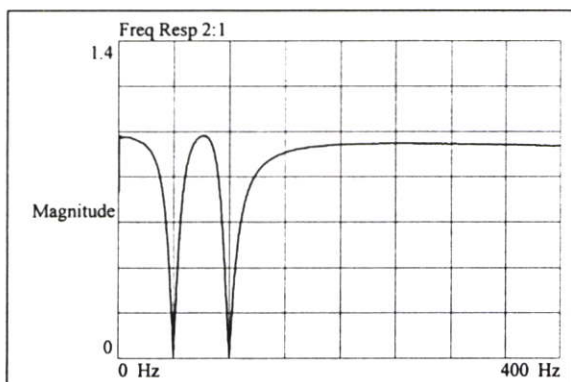


Fig. 14 Magnitude response of IIR multiple notch from the proposed design measured from a dynamic signal analyzer.

4.3 Example III: Power line interference canceling in Electrocardiogram (ECG) signal.

In this example, there is an application of IIR multiple notch filter constructed from the proposed design as shown in Example II to reduce sinusoidal signals of 50Hz and 100Hz with $0.5V_{p,p}$ amplitude interference from AC power line in ECG signal. The results from this experiment can be seen in Fig. 15. The upper trace shows ECG without sinusoidal signal interference, while the middle trace shows ECG with interference from sinusoidal signals of 50Hz and 100Hz with $0.5V_{p,p}$ amplitude, and lower trace shows the result after applying the IIR multiple notch filter by using the proposed design to reduce AC power line interference in ECG signal.

$$\tilde{H}(z) = \frac{0.873896 - 2.850625z^{-1} + 4.031936z^{-2} - 2.850625z^{-3} + 0.873896z^{-4}}{1 - 3.057892z^{-1} + 4.031558z^{-2} - 2.643359z^{-3} + 0.747627z^{-4}} \quad (31)$$

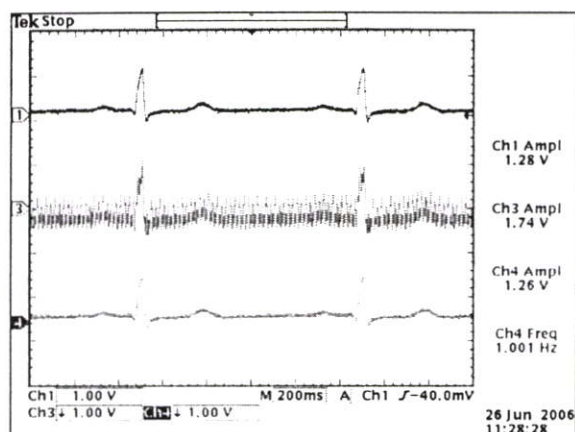


Fig. 15 Power line interference canceling in ECG signal.

5. Conclusions

The experiment results are shown that IIR multiple notch filter implemented from the proposed design could control the magnitude response at DC frequency as well as the frequencies between notch frequency ω_c and π frequency to meet the specifications, and accurate pole placement as well as a testify of superiority of the proposed design over the previous design. It implies that it is possible to find accurate pole placement for multiple notch filter.

However, this principle has some limitations. Complicated calculation for pole placements is needed if there are more than a few notch frequencies. Therefore, the further development is to find new algorithms to simplify the calculation for pole placement while retaining the high accuracy as increasing the number of notch frequencies.

Acknowledgement

The authors would like to express their sincere thanks to the reviewers, editor for their valuable comments.

References

- [1] C. Marven, G. Ewers, "A simple approach to digital signal processing," John Wiley & Sons, 1996.
- [2] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "IIR Multiple Notch Filter Design Based on All-pass Filter," IEEE Trans. Circuit and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol.44 no.2, pp.133-136, February 1997.
- [3] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "Stable IIR Notch Filter Design with Optimal Pole Placement," IEEE Trans. Signal Processing, vol.49, no.11, pp. 2673-2681, November 2001.
- [4] S. Yimman, W. Hinjit, S.Sriboonsong, M. Puangpool, K. Dejhan, "IIR Notch Filter Design with Modified Pole-zero Placement Algorithm," IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT2003), Darmstadt, Germany, December 2003.
- [5] S. Yimman, W. Hinjit, W. Ussawongaraya, P. Thoopluang, K. Dejhan, "Design and Implementation of IIR Multiple Notch Filter with Modified Pole-zero Placement Algorithm" International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2003), Gyeongju, Korea, October 2003.
- [6] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, "Digital Signal Processing Principle, Algorithms, and Applications," Prentice Hall, 1996.
- [7] S. K. Mitra, "Digital Signal Processing, A Computer-Based Approach," McGraw-Hill, 2001.
- [8] S. J. Orfanidis, "Introduction to Signal Processing," Prentice Hall, 1995.
- [9] TMS320C3x User's Guide, Texas Instruments Inc., 1994.
- [10] TMS320C3x DSP Starter Kit User's Guide, Texas Instruments Inc., 1996.
- [11] TMS320C3x/4x Optimizing C Compiler User's Guide, Texas Instruments Inc., 1998.



Surapun Yimman received the M.Eng. in electrical engineering from the King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok (KMITNB), Bangkok, Thailand, in 1999. He is currently studying Ph.D. program in electrical engineering at the King

Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL). His research interests are digital signal processing and applications.



Kobchai Dejhan received the B.Eng. and M.Eng. in electrical engineering from the King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL), Bangkok, Thailand, in 1978 and 1980, respectively and the Doctorate degree in telecommunications from Ecole

Nationale Superieure des Telecommunications (ENST) Paris, France (Telecom Paris) in 1989. Since 1980, he has been a member of the Department of Telecommunication at Faculty of Engineering, KMITL, where he is currently an associate professor of telecommunications. His research interests are analog circuit design, digital circuit design, communication system and communication circuit design. He is member of IEICE, ACM and senior member of IEEE.

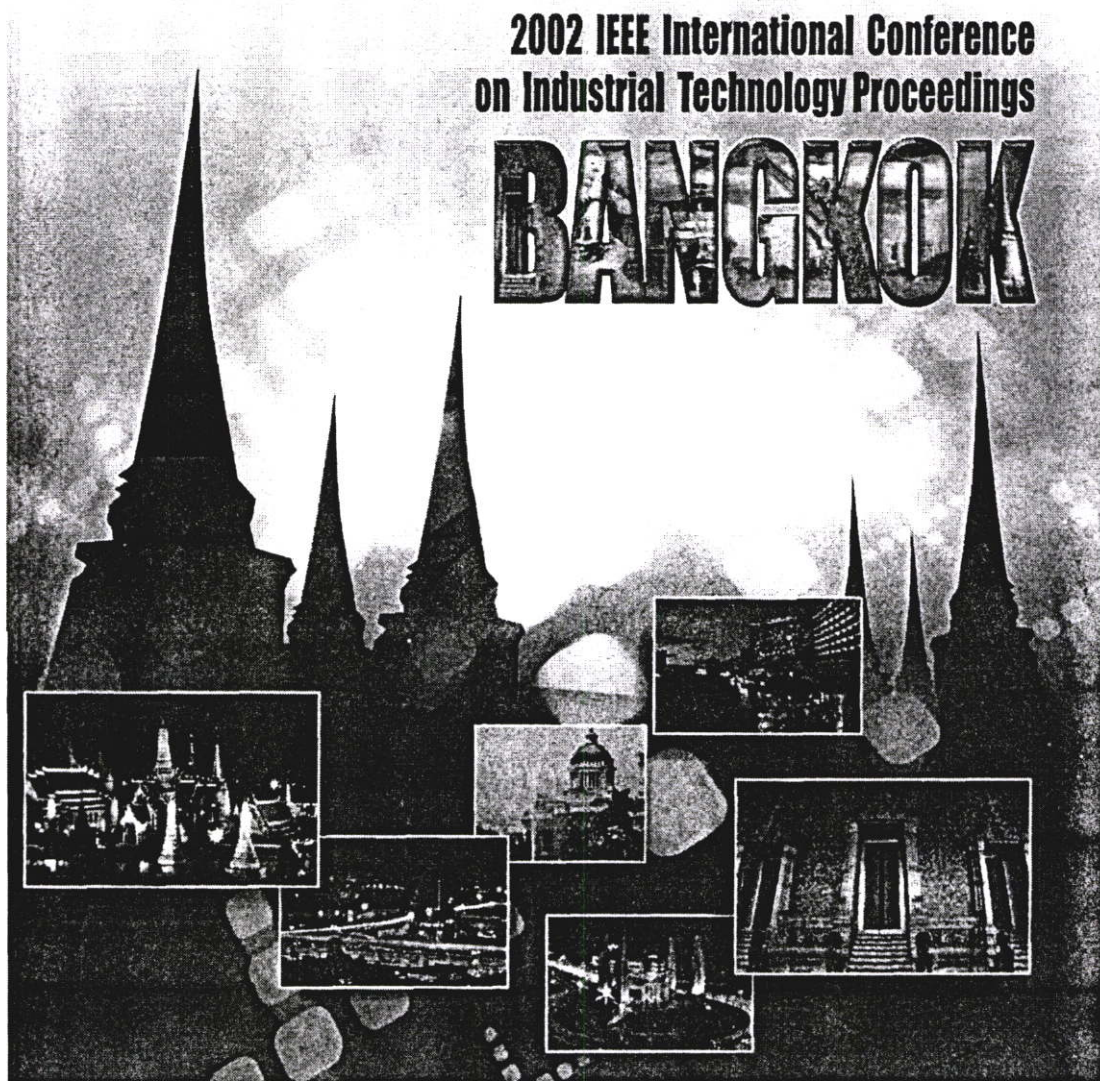
IEEE ICIT' 02 *Vol. I*

<http://www.lse.ait.ac.th/conferences/icit02.htm>

11-14 December 2002, Shangri-La Hotel, Bangkok, Thailand

2002 IEEE International Conference
on Industrial Technology Proceedings

BANGKOK



ics



ICTM
ISTDA



MTEC

Seagate.

TMS 320C31-Based Narrow-Band Noise Rejection Kalman Filter Implementation

K. Dejhan, S. Yimmun, A. Trirat and F. Cheevasuvit

Faculty of Engineering and Research Center of Communication and Information Technology

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

Tel: 66-2326-4238, 66-2326-4242, Fax: 66-2326-4554

Email: kobchai@telecom.kmitl.ac.th

Abstract

This paper proposes a design and development of narrow frequency band filter based on Kalman algorithm by using TMS 320C31 as processor. The center frequency of this filter is between 10 Hz to 1.5 kHz by changing the coefficient of sinusoidal model in normal form realization and the results have been carried out. It is used to reject the narrow-band noises.

Keywords: Kalman Filter, TMS 320XXX

1. Introduction

The narrow band implementations of analog, IIR and FIR digital filters are difficult because of the limitation of the design and accuracy of devices. The digital Kalman filter is able to be design in order to have the narrow band, but its algorithm is quite complicated. The processor has to be high accuracy, high resolution. This paper proposes to design the narrow-band Kalman filter with TMS 320C31 as processor with algorithm of Kalman incorporatry with the sinuoidal model. The sinusoidal frequency is equal to the center frequency of Kalman filter. The narrow band filter is widely used to eliminate some noises, especially the noise from the motor in mechanical movement of robot, radar controlling, navigation and etc.

2. Theory

The Kalman filter uses the continuous state-space and can be classified into 3 types [1], continuous Kalman filter (CKF), continuous discrete Kalman filter (CDKF) and discrete Kalman filter (DKF). DKF has the error covariance less than CKF when compared the average value if DKF is better than CDKF [1]. This paper proposes the design by using the DKF type, the equation form is divided into two types, consists of the time update period. It is assigned as shown in equations (1) and (2).

$$P_1(K) = A * P(K-1) * A' + BQB' \quad (1)$$

$$\hat{X}_p(K) = A * \hat{X}(K-1) \quad (2)$$

where $K = 1, 2, 3, \dots$

$P_1(K)$ and $P(K)$ are the error covariance, Q is covariance matrix, $\hat{X}_p(K)$ and $X(K-1)$ are state-vector,

A is matrix variable. The measurements during the variation period are shown in equations (3)-(5) [2, 5, 6].

$$K(K) = P_1(K) * C' * [C * P_1(K) * C' + R]^{-1} \quad (3)$$

$$\hat{X}(K) = \hat{X}_p(K) + K(K) * [y(K) - C * \hat{X}_p(K)] \quad (4)$$

$$P(K) = P_1(K) - K(K) * C * P_1(K) \quad (5)$$

Where $K(K)$ is Kalman gain

$y(K)$ is measurement of $y(1), y(2), \dots, y(k)$

The dynamic state variable system is in equation (6) [7].

$$X(K+1) = A(K) * X(K) + B(K) * W(K) \quad (6)$$

The measurement system is assigned as in equation (7).

$$y(K+1) = C(K+1) * X(K+1) + v(K+1) \quad (7)$$

$W(K)$ is noise in the dynamic system and $V(K+1)$ is the measured signal.

3. Proposed design

The Kalman filter is designed for narrow band, the center frequency of pass-band is assigned by the sine model with direct form structure as shown in Fig.1. It is necessary to arrange to be state space form as in equations (8) until (16).

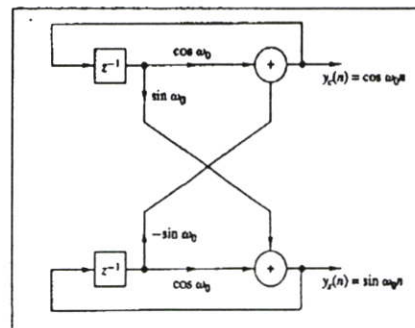


Fig. 1 Structure of sine model with direct form type

$$[a_1x_1(K) + a_2x_2(K) + W(K)]Z^{-1} = X_1(K) \quad (8)$$

$$[a_1x_1(K-1) + a_2x_2(K) + W(K-1)] = X_1(K) \quad (9)$$

$$[-a_2x_1(K) + a_1x_2(K) + W(K)]Z^{-1} = X_2(K) \quad (10)$$

$$[-a_2x_1(K-1) + a_1x_2(K-1) + W(K-1)] = X_2(K) \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} X(K-1) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} X_1(K) \\ X_2(K) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$y(K) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} X_1(K) \\ X_2(K) \end{bmatrix} + R(K) \quad (13)$$

Let

$$a_1 = \cos \omega_0 \quad (14)$$

$$a_2 = \sin \omega_0 \quad (15)$$

where $\omega_0 = 2\pi \frac{f_N}{f_s} = 2\pi f$

f = normalized frequency
 f_s = sampling frequency
 f_N = desired frequency

The variance from the noise depends on the number of bits of A/D converter and number of bits of the processor by using the equation (16) [3].

$$Q, R = \frac{\left(\frac{1}{2^{b-1}}\right)^2}{12} \quad (16)$$

where R = covariance of signal while measuring
 Q = covariance of system
 b = number of bits

4. Hardware and Software design

The hardware in this paper is based on DSP TMS 320C31 starter kit board, the diagram of this board is shown in Fig. 3. Kalman filter has complicated algorithm, it needs more memory. The memory on board is not enough, the memory is extended from 8 kbytes to be 256 kbytes by connecting as shown in Fig. 5.

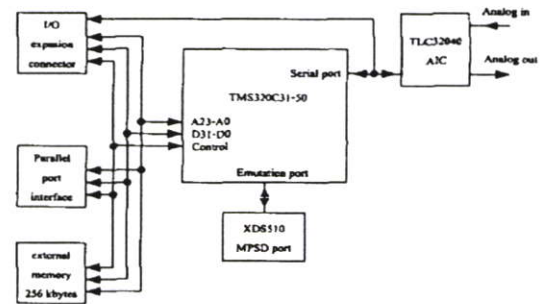


Fig. 3 Diagram of TMS 320C31 with extending memory

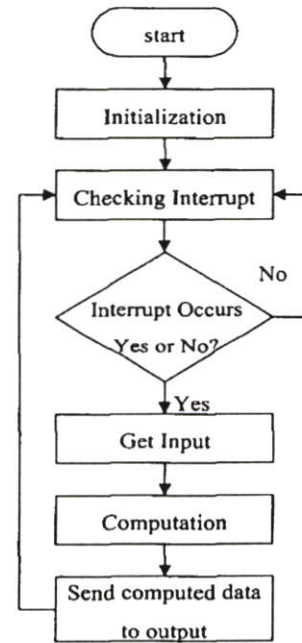


Fig. 4 Flowchart of program on TMS 320C31

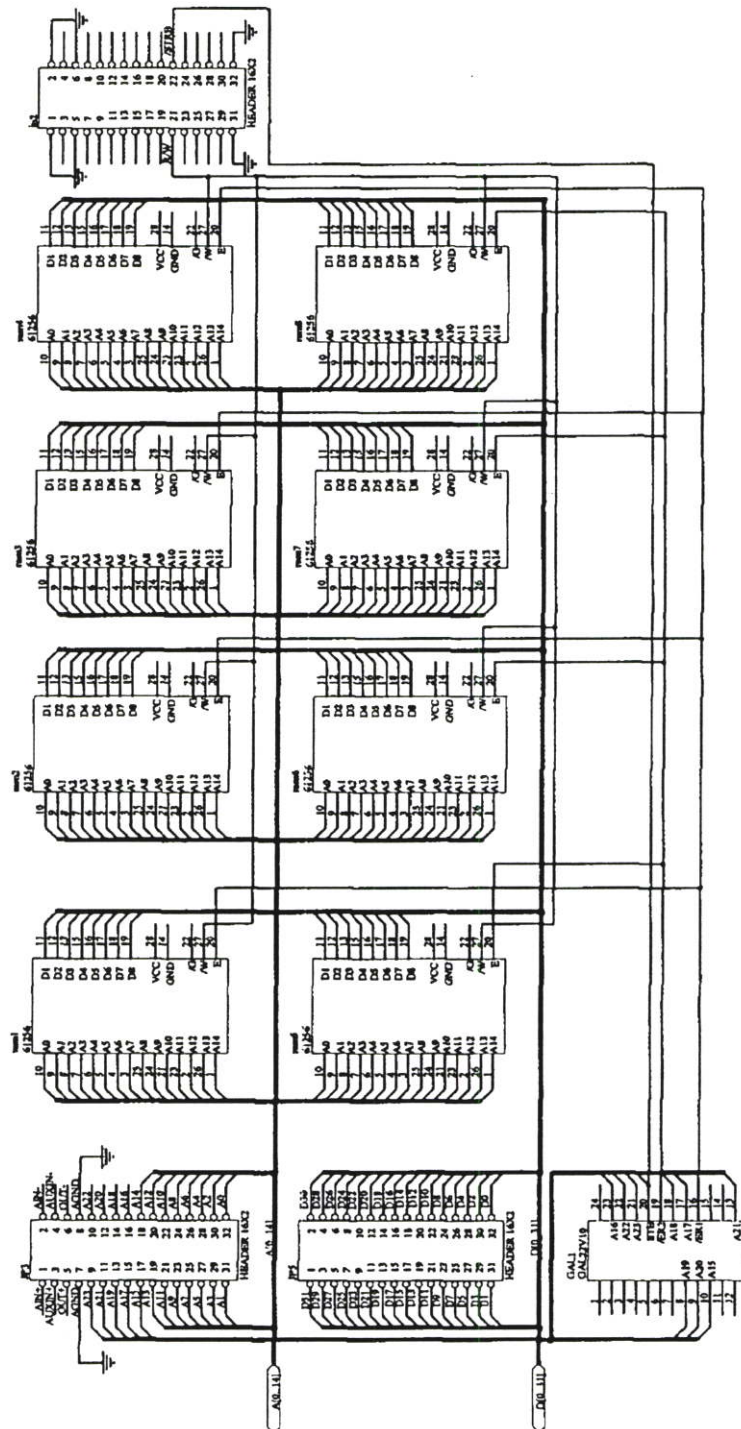


Fig. 5 Interfacing circuit with external memory

5. Result

All results have been carried out by doing the experiment as diagram shown in Fig. 6. The equipment set up uses the dynamic signal analyzer 35665A. The center frequency test of passband is 1 kHz and the frequency response can be shown in Fig. 7.

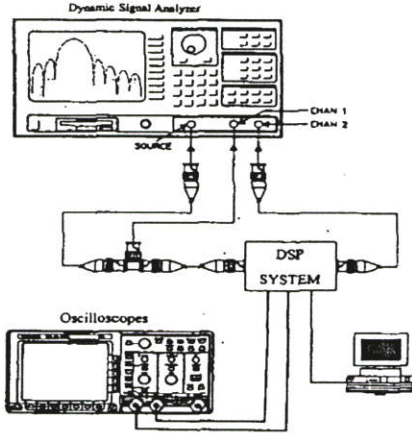


Fig. 6 Frequency response equipment set up

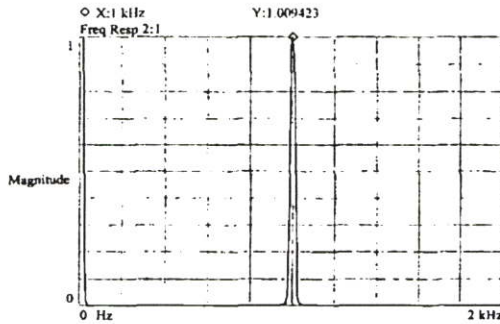


Fig. 7 Frequency response of experimental result

The signal attenuation test is also carried out by adding White noise with the sinusoidal input signal by using the diagram as shown in Fig. 8 and the result is obtained as shown in Fig. 9. The sinusoidal signal is 1 kHz, 1 Vp-p is added with random noise (upper trace). The output signal of narrow band Kalman filter (lower trace). Fig. 10, 11, 12 and 13 shows the results in frequency domain. Fig. 10 shows the spectrum of the sinusoidal signal adding with White noise. Fig. 11 shows the signal attenuation ability.

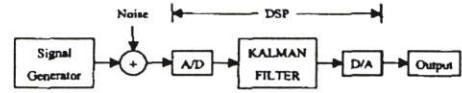


Fig. 8 Diagram of signal attenuation test

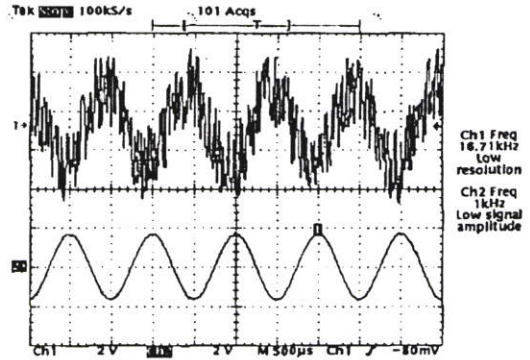


Fig. 9 Result of Fig.8 in time domain

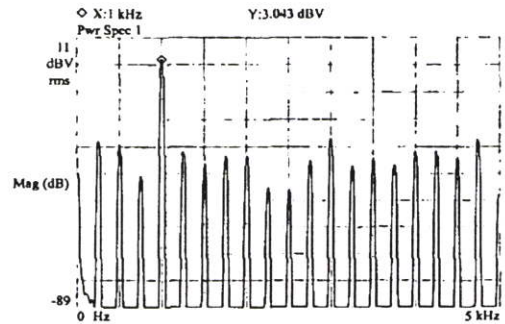


Fig. 10 Spectrum of signal and noise

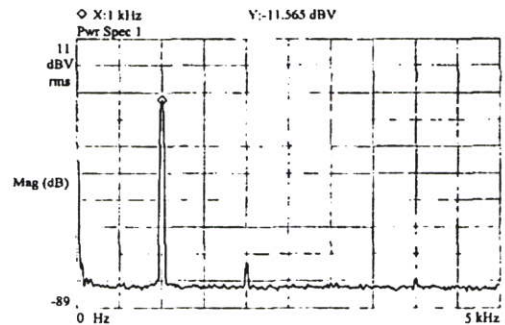


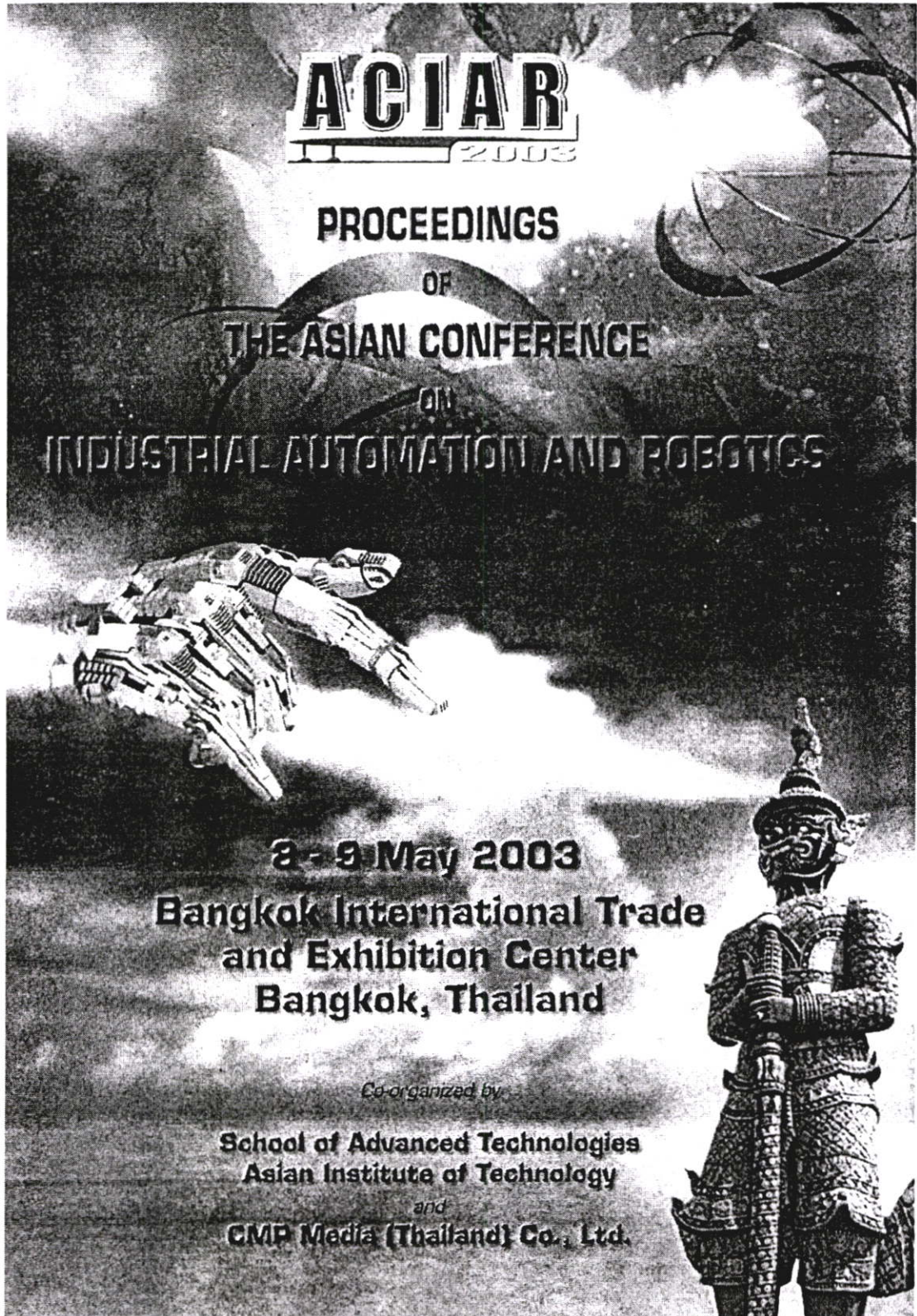
Fig. 11 Signal attenuation

6. Conclusion

This paper presents an implementation of narrow-band Kalman filter which is able to eliminate the noise, especially from some kinds of motors in mechanical movement of robots. The band-stop is 1 Hz, the operating range is between 10 Hz-1.5 kHz. It eliminates the White noise, the noise attenuation is -40 dB.

References

- [1] C. M. Kwan, "A Note on Kalman Filtering," IEEE Trans. Education, Vol.42, No.3, August 1999.
- [2] R. G. Brown, P. Y. C. Hwang, "Introduction to Random Signals and Applied Kalman filter," 1997.
- [3] Texas Instruments, "Minimizing Quantization Effects Using the TMS320 Digital Signal Processor Family," 1994.
- [4] Texas Instruments, "TMS320C3x DSP Starter Kit," 1996.
- [5] F. L. Lewis, "Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory," School of Electrical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, U.S.A.
- [6] J. V. Candy, "Signal Processing the Model-Based Approach," Lawrence Livermore National Laboratory and University of Santa Clara, U.S.A..
- [7] V. Strejc, "State Space Theory of Discrete Linear Control," 1981.



Third Asian Conference on Industrial Automation and Robotics
 Bangkok, Thailand
 May 8-9, 2003

DESIGN AND IMPLEMENTATION OF SYMMETRY DIGITAL NOTCH FILTER USING LEAST SQUARE APPROXIMATE

S. Yimman, K. Dejhan, S. Soommart*, W. Hinjit*, C. Pradabpet**,
 Faculty of Engineering and Research Center of Communication and Information Technology
 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand
 Email: kobchai@telecom.kmitl.ac.th

Tel : 66-2326-4238, 66-2326-4242, Fax : 66-2326-4554

* Department of Industrial Physics & Medical Instrumentation, Faculty of Applied Science
 King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Bangkok 10800, Thailand

** Faculty of Science and Technology, Rajabhat, Institute Phranakhon Si Ayutthaya,
 Phranakhon Si Ayutthaya 13000, Thailand

Abstract: This paper proposes a design and application of the narrow band Notch filter using least square technique to establish the appropriate position(s) of the pole(s) on the unit circle in z-plane in order to achieve the symmetry of the filtered frequency. In the implementation, the digital signal processing circuit board, TMS320C31 was chosen to apply the narrow band Notch filter in cascade manner to eliminate the harmonic due to electrical noise from robot's sensor.

Key words: Notch filter, Least square

1. INTRODUCTION

Digital Notch Filter can be constructed by applying the following methods such as all-pass filters, transformation of analog filters, and pole-zero placement method. However, these methods of digital notch filter construction have problems about asymmetric magnitude response in the filter pass-band and the control of filter gain. This paper will introduce a solution for digital notch filter design by applying the Pole-Zero Placement with Least Square Approximation Technique to find suitable positions for the poles in Z-plane to correct asymmetric magnitude response problems in the filter and control the pass-band gain according to filter specifications.

2. THEORIES

2.1 Old Design

Digital Notch filters have the transfer function according to Equation (1).

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (1)$$

b_0 is a filter gain

ω_0 is a pole angle on the Z-plane or the central frequency of the filter

r is the distance from the origin to the pole or radius

The pole-zero plot for the transfer function in (1) can be shown in figure (1)

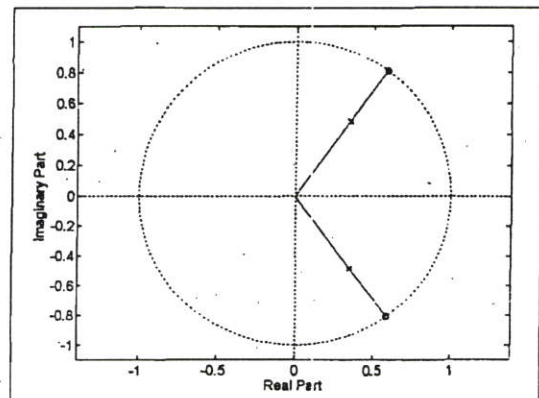


Fig. 1. Pole-zero plot for digital notch filter according to the old design.

According to Figure 1, the angle of poles and zeros are at the same position while the bandwidth of the stop band ($\Delta\omega$) can be found in Equation 2.

$$\Delta\omega = 2(1-r) \quad (2)$$

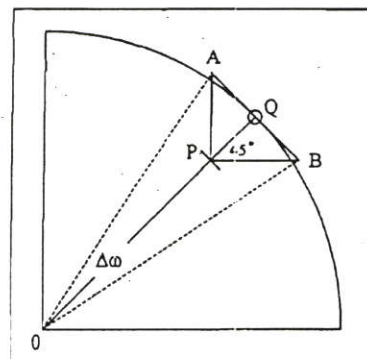


Fig. 2. Pole-Zero position to calculate the Bandwidth Value.

If the Center Frequency = 0.3π , and $r = 0.7, 0.8$ the magnitude response of the notch filter will become Figure 2. Even though the center frequency of the notch filter is exactly at 0.2π , the pass-band gain for the filter is asymmetric.

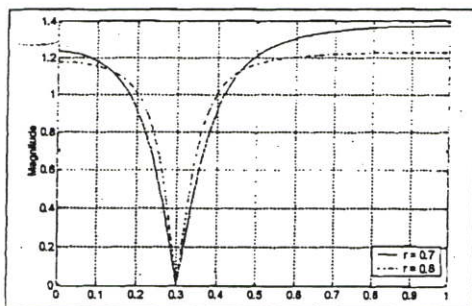


Fig. 3. Magnitude response of the notch filter accord according to the old design Center Frequency = 0.2π , and $r = 0.8$

2.2 Proposed Design

The cause of asymmetric pass-band gain is asymmetric pole-zero placement between 0 to π interval as shown in Figure 1. Asymmetric pole-zero placement will result in asymmetric pass-band gain in every center frequency except the pole-zero placement. The solution to set a symmetric pass-band gain in every center frequency can be found by finding new position for pole placement while keeping zero placement at the same places on Z-plane which can be shown in Figure 4. Therefore, the modified transfer function for digital notch filter will become Equation (3) and (4).

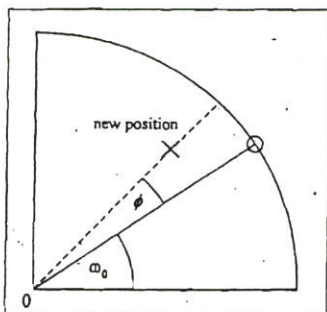


Fig. 4. the Change of Pole Angle according to the Proposed Design.

$$\hat{H}(z) = b_0 \left[\frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right] \quad (3)$$

$$\hat{H}(\omega) = b_0 \left[\frac{1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)e^{-j\omega} + r^2 e^{-2j\omega}} \right] \quad (4)$$

$\hat{H}(z)$, $\hat{H}(\omega)$ = Notch filter transfer function after the readjustment of pole position.

ϕ = the difference between old and new angle of pole.

Gain must be readjusted to ensure the symmetric pass-band gain in frequency between 0 and π , which can be shown in equation 5 to 8.

$$\hat{H}(0) = b_0 \left[\frac{1 - 2\cos\omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \right] \quad (5)$$

$$\hat{H}(\pi) = b_0 \left[\frac{1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right] \quad (6)$$

$$\hat{H}(0) = \hat{H}(\pi) \quad (7)$$

$$b_0 \left[\frac{1 - 2\cos\omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \right] = b_0 \left[\frac{1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right] \quad (8)$$

Substitute $e^{j\omega}$ with $\cos\omega + j\sin\omega$ into (8) to get equation (9)

$$\frac{1 + \cos\omega_0}{1 + 2r\cos(\omega_0 + \phi) + r^2} = \frac{1 - \cos\omega_0}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi) + r^2} \quad (9)$$

From (9), the value of ϕ can be found by using equation (10)

$$2r\cos(\omega_0 + \phi) = \cos\omega_0 + r^2\cos\omega_0$$

$$\phi = \cos^{-1} \left[\frac{1 + r^2}{2r} \cos\omega_0 \right] - \omega_0 \quad (10)$$

Define $\hat{\omega}_0 = \omega_0 + \phi$, $\hat{\omega}_0$ is a new pole angle after refine the equations. Therefore, the transfer function of the digital notch filter can be written according to equation (11)

$$\hat{H}(z) = b_0 \left[\frac{1 - 2\cos\hat{\omega}_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\hat{\omega}_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right] \quad (11)$$

The research group had applied (11) to simulate MATLAB program to find magnitude response of the digital notch filter by defining $r = 0.7, 0.8$ while $\omega_0 = 0.3$ and $b_0 = 1$. The simulation result can be shown in figure 5.

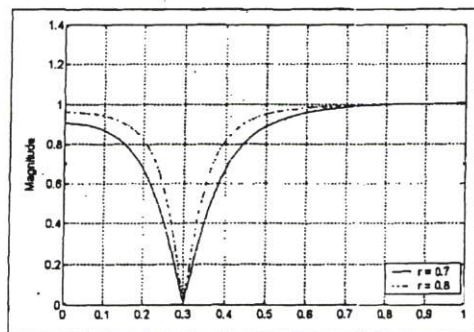


Fig. 5. Magnitude Response after Readjusting the Pole Positions.

From Figure 5, the magnitude response of the notch filter becomes symmetrical. However, changing r and ω_0 cannot change the filter gain. Therefore, the readjustment of b_0 value becomes necessary to control the gain within the pass-band to

meet the specifications. In this paper, the research group has applied least square technique to estimate value to b_0 since the magnitude response of the digital notch filter at frequency from 0 to π must have the same gain. Substituting frequency 0 and π into (11) to get equation (12) and (13)

$$\hat{H}(0) = b_0 \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \right] \quad (12)$$

$$\hat{H}(\pi) = b_0 \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right] \quad (13)$$

Define gain at frequency 0 and $\pi = k$

$$b_0 \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \right] = k \quad (14)$$

$$b_0 \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right] = k \quad (15)$$

Equation (14) and (15) have a characteristic of over-determine system which define a_1 and a_2 according to equation (16)

$$a_1 = \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \right]$$

$$a_2 = \left[\frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right]$$

which results in

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_0 &= k \\ a_2 b_0 &= k \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Define $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$ and b_0 can be found from equation (17)

$$b_0 = [A^T A]^{-1} A^T K \quad (17)$$

3. DESIGN EXAMPLES

The specifications for the old design and proposed design example are as follows:

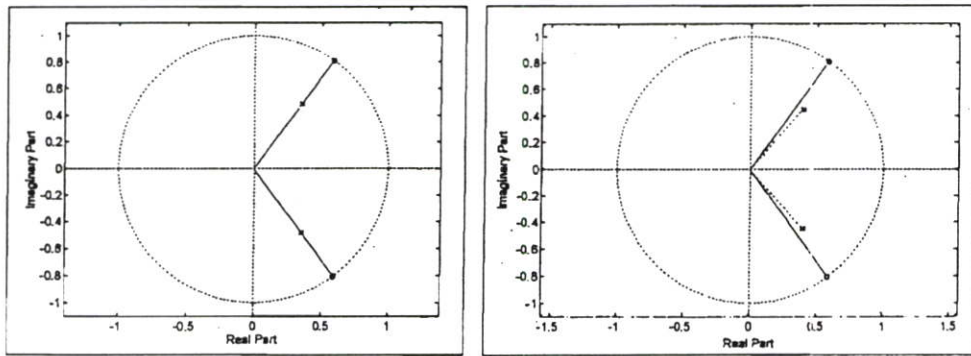
Center Frequency at 0.3π , $r = 0.6$. However, the old design will follow (11) while the proposed design will follow (17). The calculated values of pole-zero position and the gain b_0 can be shown in Table 1 and pole-zero plot on z-plane can be shown in Figure 6.

Table 1. The calculated values of pole-zero position and the gain b_0

	Old design	Proposed Design
Zero	$0.58779 \pm 0.80917j$	$0.58779 \pm 0.809017j$
Pole	$0.35267 \pm 0.485411j$	$0.39969 \pm 0.445748j$
b_0	1	0.69546

4. RESULTS FROM EXPERIMENTS

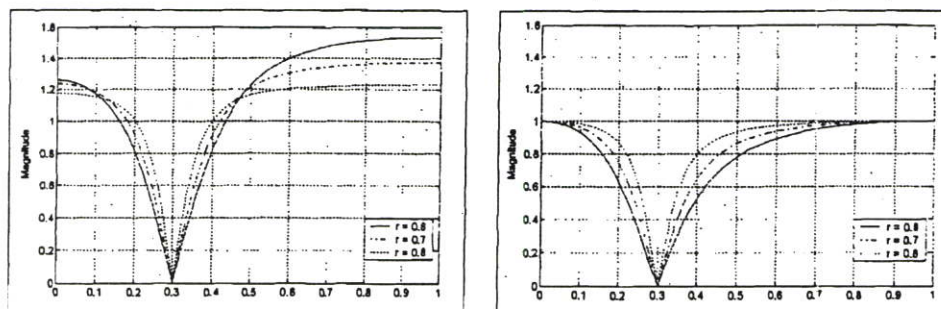
In the experiment, the research group has designed digital notch filter with the center frequency at 0.2π , 0.5π and 0.7π and radius r at 0.6, 0.7, and 0.8. After the experiment, the research group has made a comparison between the results from the old design and the results from the proposed design.



a) Old Design

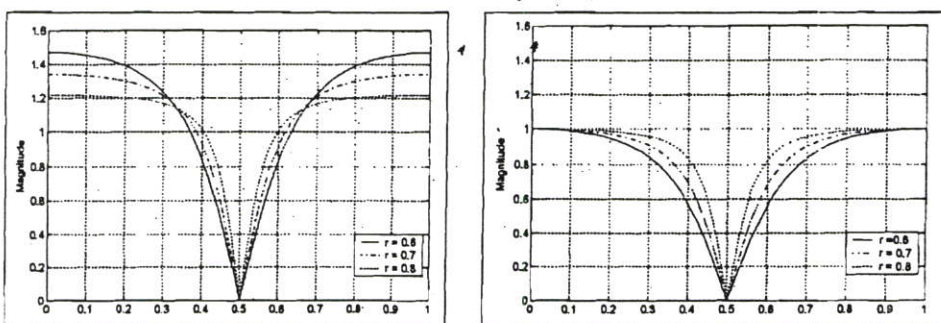
b) Proposed Design

Fig. 6. Pole-zero position at $\omega_0 = 0.3\pi$ and $r = 0.6$



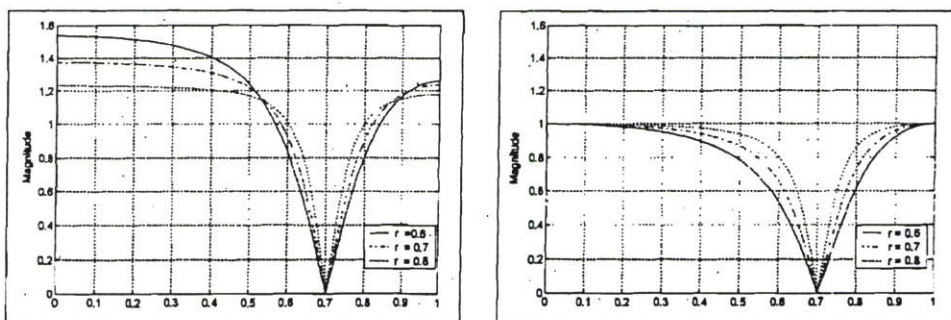
a) Old Design

b) Proposed Design

Fig. 7. $\omega_0 = 0.2\pi$ 

a) Old Design

b) Proposed Design

Fig. 8. $\omega_0 = 0.5\pi$ 

a) Old Design

b) Proposed Design

Fig. 9. $\omega_0 = 0.7\pi$

5. CONCLUSION

The digital notch filters derived from the proposed design have shown that they work according to the specifications with symmetric pass-band. The proposed design of the digital notch filter can be applied to eliminate noises at some specific frequencies that contaminate the instrumentation system, especially as in the case of noises in the robot system, without detrimental side effects to the signal in other frequencies.

6. REFERENCES

- Manolakis, D. G. & Proakis, J. G. (1996). *Digital Signal Processing: principles, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, ISBN 0-13-373762-4, USA
- Pei, S. C. & Tseng, C. C. (2001). Stable IIR Notch Filter Design with Optimal Pole Placement, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 11, pp. 2673-2681, November 2001
- William, W. H. (1988). *Applied Numerical Linear Algebra*, Prentice-Hall, ISBN 0-13-041369-0, USA

ประวัติผู้เขียน

นายสุรพันธ์ ยิ้มมัน เกิดเมื่อวันที่ 26 สิงหาคม พ.ศ. 2510 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร

- ปี 2529 สำเร็จการศึกษาจากโรงเรียนช่างฝีมือทหาร เป็นนักเรียนช่างฝีมือทหารรุ่นที่ 24
- ปี 2532 ปวส. วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
- ปี 2534 อสบ.เทคโนโลยีไฟฟ้าอุตสาหกรรม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
- ปี 2541 วศม.วิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
- ปัจจุบัน ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า
ภาควิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรมและอุปกรณ์การแพทย์ และตำแหน่งรองคณบดี
คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ