

การวิเคราะห์สายอากาศแบบร่องบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม  
โดยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก

ANALYSIS OF A SLOT ANTENNA ON SPHERICAL CONDUCTING SURFACE  
USING DYADIC GREEN FUNCTION APPROACH

ดำรง บุญรอด  
DAMRONG BOONROD

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2547

ISBN 974-0709-90-X

การวิเคราะห์สายอากาศแบบร่องบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม  
โดยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก

ANALYSIS OF A SLOT ANTENNA ON SPHERICAL CONDUCTING SURFACE  
USING DYADIC GREEN FUNCTION APPROACH

ดำรง บุญรอด  
DAMRONG BOONROD

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม  
บัณฑิตวิทยาลัย  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2547

ISBN 974-9709-90-X

ANALYSIS OF A SLOT ANTENNA ON SPHERICAL CONDUCTING SURFACE  
USING DYADIC GREEN FUNCTION APPROACH

DAMRONG BOONROD

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATION ENGINEERING  
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2004

ISBN 974-9709-90-X

COPYRIGHT 2004

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์สายอากาศแบบร่องบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม โดยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก
นักศึกษา	นายดำรง บุญรอด
รหัสประจำตัว	45061067
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2547
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	ดร.ชวงค์ พงศ์เจริญพานิชย์

### บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการวิเคราะห์คุณสมบัติการแพร่กระจายคลื่น ค่าความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง และการโพลาไรซ์ของสายอากาศแบบร่องสี่เหลี่ยมมุมฉากประกอบเดี่ยวบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม ซึ่งจะเป็นการเปรียบเทียบระหว่างลักษณะการวางของร่องเดี่ยวในแนวนอนและแนวมุมเอียงใด ๆ โดยใช้การแปลงระบบพิกัดในการแปลงจากกรณีของการจัดวางร่องเดี่ยวในแนวนอนไปยังการจัดวางร่องเดี่ยวทำมุมใด ๆ และยังสามารถเลือกขนาดของร่องเดี่ยวและรัศมีของทรงกลมอย่างเหมาะสม ซึ่งผลการวิเคราะห์ใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเปรียบเทียบกับวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ที่มีผู้ทำการศึกษามาแล้ว โดยสายอากาศชนิดนี้เหมาะสำหรับการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สายระหว่างจุดต่อจุด

Thesis Title	Analysis of a Slot Antenna on Spherical Conducting Surface using Dyadic Green Function Approach
Student	Mr. Damrong Boonrod
Student ID	45061067
Degree	Master of Engineering
Programme	Telecommunication Engineering
Year	2004
Thesis Advisor	Dr. Chuwong Phongcharoenpanich

## ABSTRACT

This thesis presents the analysis of the characteristics such as radiation pattern, half-power beamwidth, front-to-back ratio, directivity and polarization of a rectangular slot antenna on spherical conducting surface. The comparison between horizontal slot and arbitrary inclined slot are illustrated. Then, the coordinate transformation can be applied to transform a horizontal slot to an arbitrary inclined slot. The dimension of slot and the spherical radius are appropriately chosen to achieve the optimum condition. The results of the analysis using dyadic Green function approach are compared with the conventional vector potential approach. This antenna is suitable for applying to be the antenna for point to point wireless LAN communication.



# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2.ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	1
1.3 ขอบเขตการศึกษา.....	2
1.4 ขั้นตอนของการศึกษา.....	2
1.5 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์.....	2
บทที่ 2 สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์.....	4
2.1 บทนำ.....	4
2.2 ทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้างตัวนำทรงกลม.....	4
2.2.1 สมการคลื่น.....	4
2.2.2 สมการเวกเตอร์ของคลื่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลา แบบฮาร์มอนิกส์.....	7
2.2.3 ระบบพิกัดทรงกลม(Spherical Coordinate System).....	8
2.2.4 โหมดของคลื่นทรงกลม.....	13
2.2.5 โครงสร้างและสมการของสายอากาศแบบช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม.....	15
2.2.6 สมการของสายอากาศร่องเดี่ยวรอบผิวตัวนำทรงกลม.....	20
2.3 สมการของสายอากาศแบบร่องบนผิวตัวนำทรงกลม.....	23
2.3.1 สายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอน.....	23
2.3.2 ร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนตัวนำทรงกลม.....	26
2.3.3 สายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนผิวตัวนำทรงกลม.....	31
2.4 สรุป.....	33

## สารบัญ(ต่อ)

บทที่ 3 สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอติก.....	34
3.1 บทนำ.....	34
3.2 สมการและฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอติก.....	34
3.2.1 พีชคณิตไดแอติก.....	34
3.2.2 ทรานสโพส.....	35
3.2.3 ไดแอติกสมมาตรและอสมมาตร.....	36
3.2.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์และไดแอติก.....	37
3.2.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์และไดแอติก.....	38
3.2.6 ผลคูณสามชั้น.....	39
3.2.7 ไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ลของฟังก์ชันไดแอติกและเกรเดียนต์ ของฟังก์ชันเวกเตอร์.....	40
3.2.8 สมการแมกซ์เวลล์ในรูปไดแอติกและฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้า และแบบแม่เหล็ก.....	41
3.2.9 ชนิดของฟังก์ชันกรีนไดแอติก.....	45
3.2.10 ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ของตัวนำทรงกลม.....	47
3.3 ฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอติกในช่องว่างอิสระของโครงสร้างตัวนำทรงกลม.....	48
3.3.1 การกระจายฟังก์ชันเจาะจงของฟังก์ชันกรีนไดแอติกในช่องว่างอิสระ.....	49
3.3.2 ฟังก์ชันกรีนไดแอติกสำหรับตัวนำทรงกลม.....	53
3.3.3 การหาสนามไฟฟ้าของช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม.....	54
3.4 สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของสายอากาศแบบร่องบนผิวตัวนำทรงกลม.....	59
3.4.1 ร่องเดี่ยวที่วางตามแนวอนบนผิวตัวนำทรงกลม.....	59
3.4.2 ร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนผิวตัวนำทรงกลม.....	63
3.5 สรุป.....	65
บทที่ 4 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ.....	66
4.1 บทนำ.....	66
4.2 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยว.....	66
4.2.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น(Radiation Pattern).....	66
4.2.2 จำนวนของผลการรวมในพจน์องค์ประกอบของคลื่น.....	71

## สารบัญ(ต่อ)

4.2.3 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง (Half Power Beamwidth).....	71
4.2.4 อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง (Front to Back Ratio).....	73
4.2.5 ระดับของลำคลื่นย่อยแรก(First Side Lobe Level : FSLL).....	74
4.2.6 ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรก(First Null Beamwidth).....	76
4.2.7 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด (Maximum Directivity).....	77
4.3 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงใด ๆ บนผิวตัวนำทรงกลม.....	79
4.3.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น.....	79
4.4 การโพลาไรซ์ของสายอากาศ.....	88
4.4.1 คุณลักษณะการโพลาไรซ์.....	89
4.4.2 คุณลักษณะการโพลาไรซ์ของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม.....	90
4.5 สรุป.....	93
บทที่ 5 การทดสอบสายอากาศ.....	94
5.1 บทนำ.....	94
5.2 การสร้างและการทดสอบสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม.....	94
5.3 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ.....	96
5.4 สรุป.....	100
บทที่ 6 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	101
6.1 บทนำ.....	101
6.2 สรุปเนื้อหาโดยรวม.....	101
6.3 ข้อเสนอแนะและแนวทางในการพัฒนา.....	102
เอกสารอ้างอิง.....	103
ภาคผนวก.....	105
ประวัติผู้เขียน.....	113

# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ระบบพิกัดทรงกลมและความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย.....	8
2.2 โครงสร้างของสายอากาศแบบทรงกลม.....	13
2.3 โครงสร้างของสายอากาศแบบช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม.....	15
2.4 โครงสร้างของสายอากาศร่องเดี่ยวรอบผิวทรงกลม.....	20
2.5 โครงสร้างของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอน.....	23
2.6 การแปลงพิกัดโดยหมุนรอบแกน $z$ เป็นมุม $\beta$ .....	26
2.7 การแปลงพิกัดโดยหมุนรอบแกน $y$ เป็นมุม $\alpha$ .....	27
2.8 การแปลงพิกัดโดยหมุนรอบแกน $x$ เป็นมุม $\gamma$ .....	27
2.9 ระบบพิกัดเมื่อพิจารณาโดยหมุนทั้ง 3 แกน.....	28
2.10 สายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนตัวนำทรงกลม.....	31
3.1 แสดงสนามไฟฟ้าอันเนื่องจากแหล่งกำเนิดไดโพลจิวสามตำแหน่งที่วางอยู่ที่ $\bar{R}'$ ในทิศทาง $x, y$ และ $z$ .....	45
3.2 โครงสร้างตัวนำทรงกลม.....	53
3.3 โครงสร้างของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอนบนผิวตัวนำทรงกลม.....	59
3.4 โครงสร้างของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนผิวตัวนำทรงกลม.....	63
4.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศเมื่อเปลี่ยนแปลงรัศมีทรงกลม.....	70
4.2 จำนวนพจน์ในการรวมเทอมองค์ประกอบของคลื่น.....	71
4.3 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ $xy$ .....	72
4.4 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ $xz$ .....	72
4.5 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ $yz$ .....	73
4.6 อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง.....	74
4.7 อัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นรองในระนาบ $xy$ .....	74
4.8 อัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นรองในระนาบ $xz$ .....	75
4.9 อัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นรองในระนาบ $yz$ .....	75
4.10 ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรกในระนาบ $xy$ .....	76
4.11 ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรกในระนาบ $xz$ .....	76
4.12 ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรกในระนาบ $yz$ .....	77
4.13 การประมาณค่าอินทิเกรตออกเป็นช่วง.....	78
4.14 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศ.....	79

## สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.15 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ $xy$ เมื่อเปลี่ยนมุมเอียงของสายอากาศ.....	82
4.16 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ $xz$ เมื่อเปลี่ยนมุมเอียงของสายอากาศ.....	84
4.17 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ $yz$ เมื่อเปลี่ยนมุมเอียงของสายอากาศ.....	87
4.18 กรณีทั่วไปของการโพลารไรซ์.....	89
4.19 อัตราส่วนแกนโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันศักร์เวกเตอร์ $ka = 10$ .....	91
4.20 อัตราส่วนแกนโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก $ka = 10$ .....	91
4.21 ค่ามุมเอียงโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันศักร์เวกเตอร์ $ka = 10$ .....	92
4.22 ค่ามุมเอียงโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก $ka = 10$ .....	92
5.1 สายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม.....	94
5.2 สายอากาศส่งแบบไดโพล.....	94
5.3 จุดป้อนกำลังงานของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม.....	95
5.4 การจัดเตรียมเครื่องมือในการทดสอบสายอากาศ.....	95
5.5 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวอน บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ $xy$ .....	97
5.6 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวอน บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ $xz$ .....	97
5.7 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง $45^\circ$ บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ $xy$ .....	98
5.8 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง $45^\circ$ บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ $xz$ .....	98
5.9 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้ง บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ $xy$ .....	99
5.10 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้ง บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ $xz$ .....	99

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สายอากาศเป็นที่ยอมรับว่าเป็นส่วนประกอบสำคัญของระบบการสื่อสารที่ใช้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic Wave) ส่งผ่านบรรยากาศโดยสายอากาศทำหน้าที่ในการรับ-ส่งสัญญาณที่ถูกมอดูเลตด้วยกรรมวิธีต่าง ๆ โดยทั่วไปจะเปลี่ยนสัญญาณไฟฟ้าให้อยู่ในรูปคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีเหนี่ยวนำกระแสให้กลายเป็นคลื่นวิทยุ(Radio Wave) ส่งผ่านตัวกลางอากาศไปยังเครื่องรับและสายอากาศทางด้านรับก็จะรับสัญญาณที่เข้ามาเปลี่ยนจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นสัญญาณไฟฟ้าและนำส่งไปยังระบบอื่น ๆ ต่อไปซึ่งเป็นเหตุผลให้สายอากาศได้รับการพัฒนาให้ตอบสนองความต้องการของการใช้งานโดยเสมอมา ประกอบกับในปัจจุบันนี้เทคโนโลยีการสื่อสารแบบไร้สายและการสื่อสารแบบเคลื่อนที่ไม่ว่าจะเป็นระบบเซลลูลาร์ ระบบทรังก์ (Trunk) และการสื่อสารดาวเทียมได้รับความสนใจเป็นอย่างมากจึงได้มีการศึกษาค้นคว้าวิจัย และพัฒนาสายอากาศเพื่อที่จะประยุกต์ใช้กับระบบเหล่านี้

ในช่วงเวลาที่ผ่านมาได้มีการศึกษาค้นคว้าและวิจัยเกี่ยวกับสายอากาศเป็นจำนวนมาก ซึ่งสายอากาศมีอยู่ด้วยกันหลายชนิดโดยแบ่งตามลักษณะโครงสร้าง คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นและการโพลาไรซ์ดังนั้นสิ่งสำคัญที่ต้องคำนึงถึงในการเลือกใช้สายอากาศ คือ การนำสายอากาศไปประยุกต์ใช้กับระบบใดเนื่องจากว่าสายอากาศแต่ละชนิดมีคุณสมบัติเฉพาะตัวแตกต่างกันออกไปเช่นสายอากาศสถานีฐานนิยมใช้สายอากาศแบบรอบทิศทาง หรือต้องการใช้ติดต่อสื่อสารระหว่างจุดต่อจุดก็จะใช้สายอากาศแบบมีทิศทาง ดังนั้นผู้วิจัยมีความสนใจที่จะออกแบบสายอากาศสำหรับการสื่อสารระหว่างจุดต่อจุดโดยที่ให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบทิศทางเดียว ซึ่งเลือกใช้สายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม

### 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการวิเคราะห์สายอากาศแบบร่องมุมฉากบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม [1]-[3]ซึ่งเป็นสายอากาศที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนและออกแบบได้ง่ายโดยข้อดีของสายอากาศแบบทรงกลม คือ สายอากาศมีความสมมาตรดังนั้นจึงทำให้คุณสมบัติต่าง ๆ ของสายอากาศไม่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อมุมลวดคลื่นหลักของสายอากาศมีการเปลี่ยนแปลงโดยได้มีการศึกษาสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางในแนวนอนเพื่อหาสนามไฟฟ้าอันเกิดจากโหมดของคลื่นไฟฟ้าตามขวาง และโหมดของคลื่นแม่เหล็กตามขวางเพื่อหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมอันได้แก่ รัศมีของทรงกลม ขนาด

ของร่องมุมฉาก หลังจากนั้นก็พิจารณาสนามที่ร่องมุมฉากเพื่อหาคุณลักษณะของการแพร่กระจายคลื่น อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง ความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง และการโพลาไรซ์ของสายอากาศเปรียบเทียบกับคุณสมบัติของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมใด ๆ บนโครงสร้างตัวนำทรงกลม [4]-[7] ซึ่งจากผลของการศึกษานี้จะนำไปสู่การออกแบบ การสร้าง และทดสอบสายอากาศเพื่อเปรียบเทียบกับผลของการคำนวณในย่านความถี่ใช้งานของการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย (Wireless LAN Communications)

### 1.3 ขอบเขตการวิจัย

ขอบเขตงานวิจัยในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์สายอากาศแบบร่องมุมฉากบนโครงสร้างตัวนำทรงกลมโดยใช้วิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ [12],[13] ที่มีมาก่อนและวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกซึ่งได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้[15]-[17]และเป็นวิธีการคำนวณที่มีความละเอียดและแม่นยำสูงกว่ามาใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติของการแพร่กระจายคลื่น อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง ความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง และการโพลาไรซ์ของสายอากาศโดยในที่นี้จะทำการวิเคราะห์ทั้งสองวิธีและนำมาเปรียบเทียบกัน

### 1.4 ขั้นตอนของการศึกษา

ขั้นตอนของการศึกษาจะเริ่มจากการพิจารณาสมการคลื่นของโครงสร้างตัวนำทรงกลมที่อธิบายด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเบสเซล ฟังก์ชันแองเกิล และฟังก์ชันเลอจองด์ สำหรับคลื่นนิ่งและคลื่นที่เดินทางจากนั้นพิจารณาในโหมดของคลื่นรวมซึ่งเป็นโหมดที่เกิดจากคลื่นไฟฟ้าตามขวาง และคลื่นแม่เหล็กตามขวาง เพื่อหาสมการสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก โดยจะมีการสมมติแรงดันที่ปากร่องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันลักษณะไซน์จากนั้นพิจารณาหาสนามระยะไกลของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวนอนบนโครงสร้างตัวนำทรงกลมโดยการเปรียบเทียบทั้งสองวิธีคือวิธีของฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ และวิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอดิก และพิจารณาร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงใด ๆ บนโครงสร้างตัวนำทรงกลมโดยใช้เทคนิคของการหมุนแกนสายอากาศ และสุดท้ายเป็นการหาคุณสมบัติที่สำคัญของสายอากาศร่องเดี่ยวบนโครงสร้างตัวนำทรงกลมนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดสอบ

### 1.5 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นการนำเสนอการวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม โดยมีเนื้อหาทั้งหมด 6 บท ซึ่งในแต่ละบทจะมีรายละเอียดโดยสรุปดังนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ ขอบเขตการวิจัย ขั้นตอนการศึกษาและเนื้อหาโดยสรุปของวิทยานิพนธ์แต่ละบท

บทที่ 2 จะอธิบายถึงการพิสูจน์หาสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ โดยเริ่มจากสมการของแมกซ์เวลล์จากนั้นพิจารณาอยู่ในรูปของสมการคลื่นและใช้เงื่อนไขขอบเขตและทฤษฎีของลอเรนต์ ในการหาสมการสนามระยะไกลของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวครึ่งความยาวคลื่นบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม

บทที่ 3 เสนอการพิสูจน์สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีของฟังก์ชันกรีนโดแอติกซึ่งจะเริ่มจากการพิจารณาสมการแมกซ์เวลล์ในรูปของโดแอติกแบบไฟฟ้าและแบบแม่เหล็ก ชนิดของฟังก์ชันกรีนโดแอติก และฟังก์ชันกรีนโดแอติกในช่องว่างอิสระของโครงสร้างตัวนำทรงกลม และสุดท้ายจะได้ฟังก์ชันกรีนโดแอติกแบบไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็ก เพื่อที่จะนำไปหาสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนตัวนำทรงกลม

บทที่ 4 แสดงผลการวิเคราะห์คุณสมบัติของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวเช่น แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น ความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง และการโพลาไรซ์ โดยใช้สมการสนามไฟฟ้าระยะไกลที่ได้จากวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ซึ่งแสดงในบทที่ 2 และวิธีฟังก์ชันกรีนโดแอติกซึ่งแสดงในบทที่ 3 มาเปรียบเทียบกัน

บทที่ 5 ขั้นตอนการสร้าง การทดสอบ และการเปรียบเทียบผลระหว่างทฤษฎีที่ได้จากการคำนวณ และการทดสอบสายอากาศที่สร้างขึ้นมา

บทที่ 6 เป็นการกล่าวถึงสรุปผลการวิจัยทั้งหมด และข้อเสนอแนะแนวทางในการพัฒนาสายอากาศแบบร่องบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม

## บทที่ 2

# สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์

### 2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ (Vector Potential) ซึ่งเป็นเทคนิคเชิงวิเคราะห์ (Analytical Technique) ที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายและง่ายสำหรับการหาคำตอบของสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยเริ่มจากสมการแมกซ์เวลล์ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มสนามไฟฟ้ากับความเข้มสนามแม่เหล็ก จากนั้นนำไปสู่ผลเฉลยของสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกลม โดยในการวิเคราะห์จะพิจารณาบนพื้นฐานของสนามในโหมดรวมซึ่งได้จากผลรวมของสนามในโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางและโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวาง

### 2.2 ทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้างตัวนำทรงกลม

ในหัวข้อนี้จะเริ่มพิจารณาจากสมการแมกซ์เวลล์ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในการหาคำตอบของสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าเพื่อนำไปอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า[12] ดังนั้นเราจำเป็นต้องแปลงสมการแมกซ์เวลล์นี้เป็นสมการคลื่นที่มีอันดับของอนุพันธ์ที่สูงกว่าเพื่อที่จะให้มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเพียงตัวแปรเดียว ( $\bar{E}$  หรือ  $\bar{H}$ ) จากนั้นทำการพิสูจน์หาคำตอบของสมการคลื่นซึ่งพิจารณาในระบบพิกัดทรงกลมแสดงดังในรูปที่ 2.1 โดยในที่นี้จะพิจารณาในกรณีที่ปราศจากแหล่งกำเนิดและไม่เกิดการสูญเสียอันเนื่องมาจากตัวนำ เพื่อหาสนามไฟฟ้าและแม่เหล็กตามขวาง

#### 2.2.1 สมการคลื่น

สมการพื้นฐานของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของค่าปัญหาขอบเขต ได้รับผลเฉลยจากสมการแมกซ์เวลล์ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง อย่างไรก็ตามสมการแมกซ์เวลล์จะมีความเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งลักษณะดังกล่าวสมการจะมีสนามที่ไม่ทราบค่ามากกว่าหนึ่งค่า ดังนั้นในการใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งจึงไม่สามารถที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ โดยในการหาค่าสนามที่ไม่ทราบค่าจำเป็นต้องพิจารณาสมการให้อยู่ในรูปของสมการที่มีอันดับที่สูงขึ้นคือจะทำการพิจารณาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง จากนั้นก็พิจารณาสมการให้อยู่ในรูปของสมการคลื่น ดังนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสำหรับการกำหนดค่าขอบเขตของปัญหาสามารถใช้ผลเฉลยจากสมการแมกซ์เวลล์หรือสมการคลื่น ซึ่งในการเลือกใช้สมการนั้นจะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของแต่ละปัญหา

สมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation) ในรูปของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าแสดงดังนี้

$$\nabla \times \bar{E} = -\bar{M}_i - \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_i + \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

โดยที่

$\bar{E}$  = ความเข้มสนามไฟฟ้า (volts/meter)

$\bar{H}$  = ความเข้มสนามแม่เหล็ก (amperes/meter)

$\bar{J}_i$  = ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (amperes/square meter)

$\bar{M}_i$  = ความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก (volts/ square meter)

$\mu$  = ค่าความซึมซาบแม่เหล็ก (henries/meter)

$\epsilon$  = ค่าสภาพยอมไฟฟ้า (farads/meter)

$\sigma$  = ค่าความนำไฟฟ้า (siemens/meter)

จากสองสมการแรกของแมกซ์เวลล์ จะเห็นได้ว่าทั้งสองสมการมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า คือสนามของ  $\bar{E}$  และ  $\bar{H}$  ซึ่งอยู่ในแต่ละสมการและเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการแก้ปัญหาเราจึงพิจารณาสมการทั้งสองให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองดังนั้นจาก (2.1) และ (2.2) ทำการเคิร์ลทั้งสองข้างของสมการและกำหนดให้เป็นตัวกลางสารเนื้อเดียว (Homogeneous Medium) สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = -\nabla \times \bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{H}) \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \nabla \times \bar{J}_i + \sigma \nabla \times \bar{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{E}) \quad (2.4)$$

นำสมการ(2.1) และ (2.2) แทนลงในสมการ(2.3) และ(2.4) ตามลำดับโดยใช้คุณสมบัติของลาปลาเซียนของเวกเตอร์ (Laplacian of vector)

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} \quad (2.5)$$

ดังนั้นสมการ (2.3) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} &= -\nabla \times \bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} (\bar{J}_i + \sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}) \\ \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} &= -\nabla \times \bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{J}_i - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E}\end{aligned}\quad (2.6)$$

จากสมการแมกซ์เวลล์สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า (Electric Flux Density) ดังสมการ

$$\nabla \cdot \bar{D} = \varepsilon \nabla \cdot \bar{E} = q_{ev} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{E} = q_{ev} / \varepsilon \quad (2.7)$$

แทนสมการ (2.7) ลงใน (2.6) แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$\nabla^2 \bar{E} = \nabla \times \bar{M}_i + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q_{ev} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{J}_i + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E} \quad (2.8)$$

สำหรับสมการ (2.4) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} &= -\nabla \times \bar{J}_i + \sigma (-\bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\bar{M}_i - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}) \\ \nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} &= -\nabla \times \bar{J}_i - \sigma \bar{M}_i - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{H} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_i - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{H}\end{aligned}\quad (2.9)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็กและความเข้มสนามแม่เหล็ก

$$\nabla \cdot \bar{B} = \mu \nabla \cdot \bar{H} = q_{mv} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{H} = q_{mv} / \mu \quad (2.10)$$

แทนสมการ (2.10) ลงใน (2.9) แล้วจัดรูปสมการจะได้

$$\nabla^2 \bar{H} = -\nabla \times \bar{J}_i + \sigma \bar{M}_i + \frac{1}{\mu} \nabla q_{mv} + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{H} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \bar{M}_i + \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{H} \quad (2.11)$$

จากสมการ (2.8) และ (2.11) บอกถึงสมการคลื่นเวกเตอร์สำหรับ  $\bar{E}$  และ  $\bar{H}$  และพิจารณากรณีที่ปราศจากแหล่งจ่าย  $\bar{J}_i = q_{ev} = 0$  และ  $\bar{M}_i = q_{mv} = 0$  และไม่เกิดการสูญเสียอันเนื่องมาจากตัวกลาง  $\sigma = 0$  ดังนั้นสามารถลดรูปสมการได้เป็น

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{E} \quad (2.12)$$

และ

$$\nabla^2 \bar{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{H} \quad (2.13)$$

### 2.2.2 สมการเวกเตอร์ของคลื่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลาแบบฮาร์มอนิกส์

เมื่อพิจารณาสนามที่แปรผันกับเวลาแบบฮาร์มอนิกส์ [8] หมายถึงเวลาที่มีการผันแปรในรูปแบบของฟังก์ชัน  $e^{j\omega t}$  ดังนั้นสมการที่จะได้สมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเช่นเดียวกับกรณีของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลา โดยกำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \quad (2.14ก)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Leftrightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2 \quad (2.14ข)$$

ดังนั้น จากสมการที่ (2.8), (2.11), (2.12) และ (2.13) สามารถเขียนได้

$$\nabla^2 \bar{E} = \nabla \times \bar{M}_i + j\omega\mu\bar{J}_i + \frac{1}{\epsilon} \nabla q_{ev} + j\omega\mu\sigma\bar{E} - \omega^2\mu\epsilon\bar{E} \quad (2.15)$$

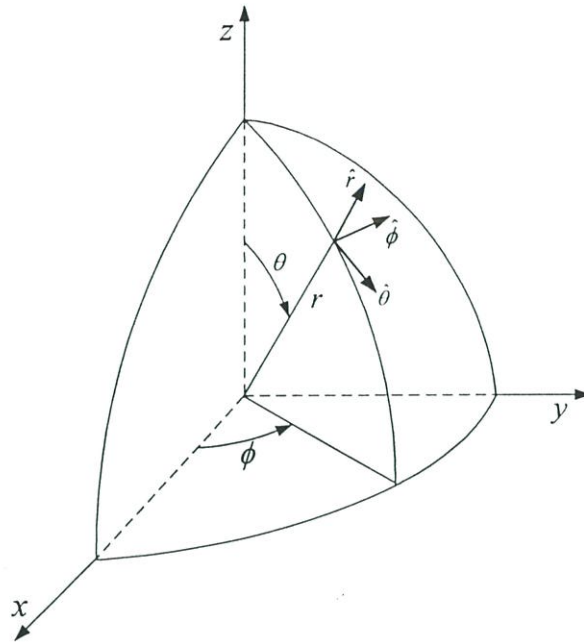
$$\nabla^2 \bar{H} = -\nabla \times \bar{J}_i + \sigma\bar{M}_i + j\omega\epsilon\bar{M}_i + \frac{1}{\mu} \nabla q_{mv} + j\omega\mu\sigma\bar{H} - \omega^2\mu\epsilon\bar{H} \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \bar{E} = -\omega^2\mu\epsilon\bar{E} = -k^2\bar{E} \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = -\omega^2\mu\epsilon\bar{H} = -k^2\bar{H} \quad (2.18)$$

เมื่อ  $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$  โดยที่  $k$  คือค่าคงที่ทางเฟส (Phase Constant)

### 2.2.3 ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate System)



รูปที่ 2.1 ระบบพิกัดทรงกลมและความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เนื่องจากรูปทรงที่พิจารณาเป็นโครงสร้างทรงกลม ดังนั้นการอธิบายถึงปัญหาขอบเขตสำหรับสนาม  $\vec{E}$  และ  $\vec{H}$  จึงจำเป็นที่จะต้องเลือกใช้ระบบพิกัดทรงกลมซึ่งเมื่อพิจารณาสมการคลื่นในภาวะที่เป็นอิสระจากแหล่งจ่าย และไม่สูญเสียอันเนื่องมาจากตัวกลาง ดังนั้นสมการสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกลมกำหนดได้เป็น

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, \phi)\hat{\theta} + E_\phi(r, \theta, \phi)\hat{\phi} \quad (2.19)$$

เมื่อ  $(r, \theta, \phi)$  คือค่าตัวแปรในระบบพิกัดทรงกลมดังแสดงในรูปที่ 2.1 เมื่อแทนสมการ (2.19) ลงในสมการ(2.17) จะได้

$$\nabla^2(E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_\phi\hat{\phi}) = -k^2(E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta} + E_\phi\hat{\phi}) \quad (2.20)$$

จากสมการ (2.20) แทนค่าสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกลมจะรู้รูปแบบคำตอบดังนี้

$$\nabla^2 E_r - \frac{2}{r^2} \left( E_r + E_\theta \cot \theta + \csc \theta \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) = -k^2 E_r \quad (2.21ก)$$

$$\nabla^2 E_\theta - \frac{1}{r^2} \left( E_\theta \csc^2 \theta - 2 \frac{\partial E_r}{\partial \theta} + 2 \cot \theta \csc \theta \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right) = -k^2 E_\theta \quad (2.21ข)$$

$$\nabla^2 E_\phi - \frac{1}{r^2} \left( E_\phi \csc^2 \theta - 2 \csc \theta \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - 2 \cot \theta \csc \theta \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right) = -k^2 E_\phi \quad (2.21ค)$$

จากสมการ (2.21ก) ถึง (2.21ค) จะมีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้ามากกว่าหนึ่งองค์ประกอบซึ่งยากต่อการหาคำตอบดังนั้นเราจึงใช้วิธีการแก้สมการโดยแยกตัวแปรซึ่งสอดคล้องกับ

$$\nabla^2 \Pi(r, \theta, \phi) = -k^2 \Pi(r, \theta, \phi) \quad (2.22)$$

โดยกำหนดให้  $\Pi(r, \theta, \phi)$  คือฟังก์ชันสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกลมสมมติให้มีคำตอบอยู่ในรูป

$$\Pi(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi) \quad (2.23)$$

จากสมการ (2.22) เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดทรงกลมสามารถกระจายรูปสมการได้

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi^2} = -k^2 \Pi \quad (2.24)$$

เมื่อแทนสมการ (2.23) ลงใน (2.24) จะได้

$$gh \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + fh \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + fg \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} = -k^2 fgh \quad (2.25)$$

จากสมการ (2.25) คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย  $(r^2 \sin^2 \theta / fgh)$  เพื่อให้พจน์ท้ายของสมการทางด้านซ้ายอยู่ในรูปของฟังก์ชัน  $\phi$  เพียงอย่างเดียวแล้วเปลี่ยน  $\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}$  จะได้

$$\frac{\sin^2 \theta}{f} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{g} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{d\phi^2} = -(kr \sin \theta)^2 \quad (2.26)$$

จะเห็นว่าพจน์ท้ายสุดของสมการทางด้านซ้ายอยู่ในรูปของฟังก์ชัน  $\phi$  เท่านั้นจึงกำหนดใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{d\phi^2} = -m^2 \Rightarrow \frac{d^2 h}{d\phi^2} = -m^2 h \quad (2.27)$$

โดยที่  $m$  เป็นค่าคงที่ จากนั้นแทนสมการ (2.27) ลงใน (2.26) แล้วหารทั้งสองข้างด้วย  $(\sin^2 \theta)$

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + (kr)^2 + \frac{1}{g \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) - \left( \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 = 0 \quad (2.28)$$

จากสมการ (2.28) สองพจน์หลังจะอยู่ในรูปของฟังก์ชัน  $\theta$  ดังนั้นสองพจน์สุดท้ายสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{g \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) - \left( \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 = -n(n+1) \quad (2.29)$$

รูปแบบของสมการ (2.29) เราจะเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ (Legendre Differential Equation) หลังจากนั้นแทน (2.29) ลงใน (2.28) จะสามารถลดรูปได้

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + (kr)^2 - n(n+1) = 0 \quad (2.30)$$

คำตอบจากการแก้สมการ (2.22) โดยวิธีการแยกตัวแปรสามารถจัดรูปให้อยู่ในฟังก์ชันที่เป็นอิสระต่อกันได้ดังนี้

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + [(kr)^2 - n(n+1)] f = 0 \quad (2.31ก)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) \left( \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 \right] g = 0 \quad (2.31ข)$$

$$\frac{d^2 h}{d\phi^2} = -m^2 h \quad (2.31ค)$$

จากสมการที่ผ่านมา  $m, n$  เป็นค่าคงที่ (โดยทั่วไปคือจำนวนเต็ม) ดังนั้นคำตอบโดยทั่วไปที่ได้จากการแก้สมการ (2.31ก), (2.31ข), และ(2.31ค) คือ

$$f_1(r) = A_1 j_n(kr) + B_1 y_n(kr) \quad (2.32ก)$$

หรือ

$$f_2(r) = C_1 h_n^{(1)}(kr) + D_1 h_n^{(2)}(kr) \quad (2.32ข)$$

และ

$$g_1(\theta) = A_2 P_n^m(\cos\theta) + B_2 P_n^m(-\cos\theta) \quad n \neq \text{จำนวนเต็ม} \quad (2.33ก)$$

หรือ

$$g_2(\theta) = C_2 P_n^m(\cos\theta) + D_2 Q_n^m(\cos\theta) \quad n = \text{จำนวนเต็ม} \quad (2.33ข)$$

และ

$$h_1(\phi) = A_3 e^{-jm\phi} + B_3 e^{+jm\phi} \quad (2.34ก)$$

หรือ

$$h_2(\phi) = C_3 \cos(m\phi) + D_3 \sin(m\phi) \quad (2.34ข)$$

โดยที่

$j_n(kr)$  คือ ฟังก์ชันเบสเซลของทรงกลมชนิดที่ 1

$y_n(kr)$  คือ ฟังก์ชันเบสเซลของทรงกลมชนิดที่ 2

มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเบสเซลของทรงกระบอกดังสมการ

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) \quad (2.35ก)$$

$$y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Y_{n+1/2}(kr) \quad (2.35ข)$$

$h_n^{(1)}(kr)$  คือ ฟังก์ชันแองเกิลของทรงกลมชนิดที่ 1

$h_n^{(2)}(kr)$  คือ ฟังก์ชันแองเกิลของทรงกลมชนิดที่ 2

มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันแองเกิลของทรงกระบอกดังสมการ

$$h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(1)}(kr) \quad (2.36ก)$$

$$h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) \quad (2.36ข)$$

และ

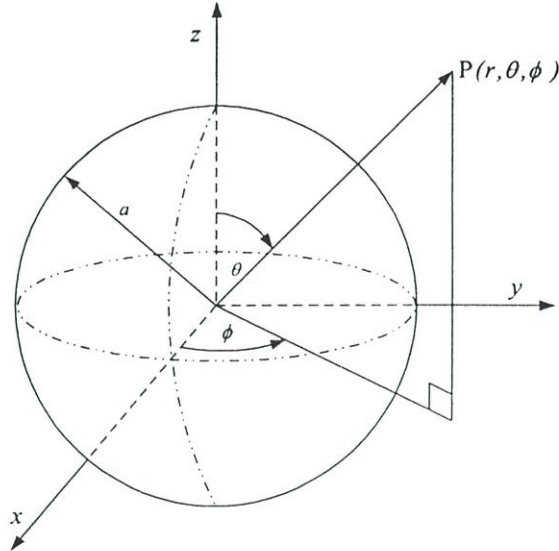
$$P_n^m(\cos\theta) \quad \text{คือ ฟังก์ชันเลขจอร์ดชนิดที่ 1}$$

$$Q_n^m(\cos\theta) \quad \text{คือ ฟังก์ชันเลขจอร์ดชนิดที่ 2}$$

โดยทั่วไปแล้วสำหรับโครงสร้างสายอากาศแบบตัวนำทรงกลม แสดงดังรูปที่ 2.2 ผลเฉลยของสมการคลื่นที่เหมาะสมแสดงให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\Pi_r = \gamma_n(kr) \zeta_n^m(\cos\theta) [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi] \quad (2.37)$$

ซึ่งในที่นี้เรากำหนดให้  $\cos m\phi$  และ  $\sin m\phi$  เป็นผลเฉลยของสนามในทิศ  $\phi$  และ  $\zeta_n^m(\cos\theta)$  เป็นคำตอบโดยทั่วไปของ Associated Legendre Functions ซึ่งเป็นผลเฉลยของสนามในทิศ  $\theta$  ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น  $AP_n^m(\cos\theta) + BQ_n^m(\cos\theta)$  โดยที่  $A$  และ  $B$  เป็นค่าคงที่ นอกจากนั้น  $\gamma_n(kr)$  เป็นคำตอบโดยทั่วไปของ Spherical Hankel Functions ซึ่งเป็นผลเฉลยของสนามในทิศ  $r$  และมีรูปทั่วไปเป็น  $Ch_n^{(1)}(kr) + Dh_n^{(2)}(kr)$  โดยที่  $C$  และ  $D$  เป็นค่าคงที่ ดังนั้นสนามรวมทั้งหมดก็จะเกิดจากการรวมกันของสนามในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางและโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวาง โดยในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะคลื่นที่เดินทางออกมาสู่ภายนอกดังนั้นเราจะแทน  $\gamma_n(kr)$  ด้วย Spherical Hankel Functions ชนิดที่ 2  $h_n^{(2)}(kr)$  ทั้งในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางและโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวาง และสำหรับ  $\zeta_n^m(\cos\theta)$  จะแทนด้วย Associated Legendre Functions ชนิดที่ 1  $P_n^m(\cos\theta)$  ทั้งในโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวางและโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางเพื่อที่จะให้ฟังก์ชันหาค่าได้ที่  $\theta = 0$  และ  $\theta = \pi$  โดยที่ค่า  $m = 0, 1, 2, \dots$  และ  $n = m, m+1, m+2, \dots$



รูปที่ 2.2 โครงสร้างของสายอากาศแบบทรงกลม

#### 2.2.4 โหมดของคลื่นทรงกลม

เนื่องจากรูปทรงของสายอากาศมีโครงสร้างเป็นทรงกลมดังนั้นในการพิจารณาถึงปัญหาค่าขอบเขตสำหรับสนาม  $\bar{E}$  และ  $\bar{H}$  จึงจำเป็นต้องเลือกพิจารณาในระบบพิกัดทรงกลมซึ่งประกอบไปด้วยตัวแปร  $r, \theta, \phi$  โดยที่  $r$  คือรัศมีของทรงกลม  $\theta$  คือมุมในระนาบมุมยก  $\phi$  คือมุมในระนาบมุมกวาดซึ่งผลเฉลยโดยทั่วไปของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของสายอากาศทรงกลมบริเวณนอกแหล่งกำเนิดสามารถที่จะแสดงได้ด้วยผลรวมของโหมดพื้นฐานในทุกๆโหมดของคลื่นในระบบพิกัดทรงกลม ดังนั้นเราสามารถที่จะแสดงโหมดของคลื่นทรงกลมได้ 2 ประเภทดังนี้

##### 1.) โหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวาง (Transverse Magnetic Mode: $TM^r$ )

$$\bar{E}_{\Pi} = \nabla \times \nabla \times (r \bar{\Pi}) \quad \bar{H}_{\Pi} = j\omega\epsilon \nabla \times (r \bar{\Pi}) \quad (2.38ก)$$

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Pi_r) + k^2 (r \Pi_r) \quad H_r = 0 \quad (2.38ข)$$

$$E_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \Pi_r) \quad H_{\theta} = \frac{j\omega\epsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r \Pi_r) \quad (2.38ค)$$

$$E_{\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} (r \Pi_r) \quad H_{\phi} = \frac{-j\omega\epsilon}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \Pi_r) \quad (2.38ง)$$

2.) โหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (Transverse Electric Mode:  $TE'$ )

$$\bar{E}_{\Pi^*} = -j\omega\mu\nabla \times (r\bar{\Pi}^*) \quad \bar{H}_{\Pi^*} = \nabla \times \nabla \times (r\bar{\Pi}^*) \quad (2.39n)$$

$$E_r = 0 \quad H_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Pi_r^*) + k^2 (r\Pi_r^*) \quad (2.39ข)$$

$$E_\theta = \frac{-j\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r\Pi_r^*) \quad H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\Pi_r^*) \quad (2.39ค)$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\Pi_r^*) \quad H_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} (r\Pi_r^*) \quad (2.39ง)$$

ดังนั้นผลรวมของสนามที่เกิดจากโหมดของคลื่นแม่เหล็กตามขวางและไฟฟ้าตามขวางแสดงดัง

$$E_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{r} h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi] \quad (2.40n)$$

$$E_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r h_n^{(2)}(kr)] \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi] \\ + j\omega\mu \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{\sin \theta} h_{n'}^{(2)}(kr) P_{n'}^m(\cos \theta) [C_{n'm} \sin m\phi - D_{n'm} \cos m\phi] \quad (2.40ข)$$

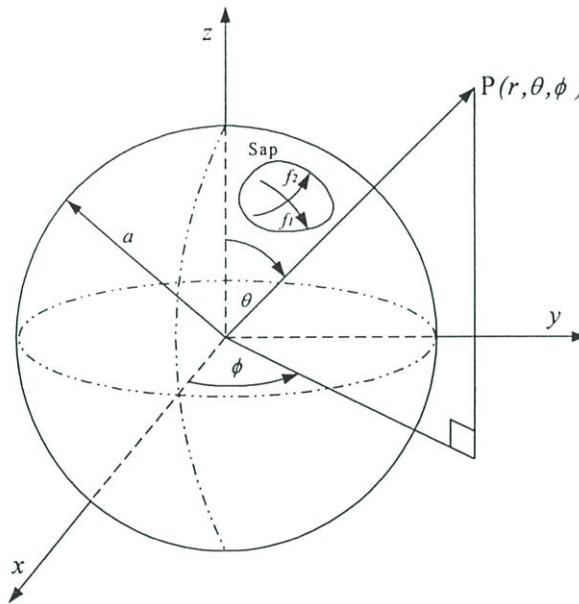
$$E_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} [r h_n^{(2)}(kr)] P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \sin m\phi - B_{nm} \cos m\phi] \\ + j\omega\mu \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{n'}^{(2)}(kr) \frac{d}{d\theta} P_{n'}^m(\cos \theta) [C_{n'm} \cos m\phi + D_{n'm} \sin m\phi] \quad (2.40ค)$$

$$H_r = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n'(n'+1)}{r} h_{n'}^{(2)}(kr) P_{n'}^m(\cos \theta) [C_{n'm} \cos m\phi + D_{n'm} \sin m\phi] \quad (2.40ง)$$

$$H_\theta = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r h_{n'}^{(2)}(kr)] \frac{d}{d\theta} P_{n'}^m(\cos \theta) [C_{n'm} \cos m\phi + D_{n'm} \sin m\phi] \\ - j\omega\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{\sin \theta} h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \sin m\phi - B_{nm} \cos m\phi] \quad (2.40จ)$$

$$\begin{aligned}
 H_\phi = & \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} [r h_{n'}^{(2)}(kr)] P_n^m(\cos \theta) [C_{n'm} \sin m\phi - D_{n'm} \cos m\phi] \\
 & - j\omega \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_n^{(2)}(kr) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi]
 \end{aligned}
 \tag{2.40b}$$

## 2.2.5 โครงสร้างและสมการของสายอากาศแบบช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม



รูปที่ 2.3 โครงสร้างของสายอากาศแบบช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม

ซึ่งเราจะพิจารณาสายอากาศทรงกลมที่มีพื้นที่ช่องเปิดเท่ากับ  $S_{ap}$  ดังในรูปที่ (2.3) โดยสายอากาศทรงกลมมีรัศมี  $a$  ซึ่งเราจะสมมติให้สนามที่ช่องเปิดของสายอากาศทรงกลมแสดงดังสมการ

$$E_\theta(a, \theta, \phi) = f_1(\theta, \phi) \quad \text{และ} \quad E_\phi(a, \theta, \phi) = f_2(\theta, \phi)
 \tag{2.41}$$

ดังนั้นในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของ  $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$  ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าเราจึงประยุกต์ใช้ทฤษฎีของ Lorentz reciprocity theorem ดังแสดงในสมการ

$$\int_{S_{ap}} \int (\bar{E}_1 \times \bar{H}_2) \cdot \hat{n} ds = \int_{S_{ap}} \int (\bar{E}_2 \times \bar{H}_1) \cdot \hat{n} ds \quad (2.42)$$

โดยเราให้สนาม  $\bar{E}_1, \bar{H}_1$  เป็นค่าสนามที่ผิวของสายอากาศทรงกลมและสำหรับ  $\bar{E}_2, \bar{H}_2$  แทนสนามที่โหนดใด ๆ โดยที่  $\hat{n}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางในแนวรัศมี ดังนั้นจาก (2.42) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\int_{S_{ap}} \int (E_{\theta 1} H_{\phi 2} - E_{\phi 1} H_{\theta 2}) ds = \int_{S_{ap}} \int (E_{\theta 2} H_{\phi 1} - E_{\phi 2} H_{\theta 1}) ds \quad (2.43)$$

จากสมการ (2.43) เรากำหนดให้  $\bar{E}_{\theta 1}$  และ  $\bar{E}_{\phi 1}$  เป็นค่าสนามที่ขอบเขต  $f_1(\theta, \phi)$  และ  $f_2(\theta, \phi)$  และแทน  $\bar{E}_2$  และ  $\bar{H}_2$  ด้วยสมการ (2.40ก) ถึง (2.40ข) ซึ่งเป็นสมการของสนามแม่เหล็กตามขวางและสนามไฟฟ้าตามขวาง ดังนั้นเราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ โดยอาศัยคุณสมบัติออร์โธโกนัล [10] (orthogonal property) ของฟังก์ชันเลอจองด์และฟังก์ชันตรีโกณมิติดังแสดงในสมการ (2.44) และ (2.45)

$$\int_0^{\pi} \left\{ \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \frac{d}{d\theta} P_{n'}^m(\cos\theta) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_n^m(\cos\theta) P_{n'}^m(\cos\theta) \right\} \sin\theta d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & , n \neq n' \\ \frac{2n(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & , n = n' \end{cases} \quad (2.44)$$

และ

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\}^2 m\phi d\phi = \pi(1 \pm \delta_m) \quad \text{โดยที่} \quad \delta_m = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

สามารถแบ่งวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์ออกเป็น 2 กรณีคือ

—กรณีที่ 1  $\bar{E}_2$  และ  $\bar{H}_2$  เป็นคลื่นแม่เหล็กตามขวาง ดังนั้นจากสมการ (2.40ก) ถึง (2.40ข)

$$E_{r_2} = \frac{n(n+1)}{r'} h_n^{(2)}(kr') P_n^m(\cos \theta') \begin{cases} A_{nm} \cos m\phi' \\ B_{nm} \sin m\phi' \end{cases} \quad (2.46\text{ง})$$

$$E_{\theta_2} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')] \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') \begin{cases} A_{nm} \cos m\phi' \\ B_{nm} \sin m\phi' \end{cases} \quad (2.46\text{ข})$$

$$E_{\phi_2} = -\frac{m}{r' \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')] P_n^m(\cos \theta') \begin{cases} A_{nm} \sin m\phi' \\ -B_{nm} \cos m\phi' \end{cases} \quad (2.46\text{ค})$$

$$H_{r_2} = 0 \quad (2.46\text{ง})$$

$$H_{\theta_2} = -\frac{j\omega\epsilon m}{\sin \theta'} h_n^{(2)}(kr') P_n^m(\cos \theta') \begin{cases} A_{nm} \sin m\phi' \\ -B_{nm} \cos m\phi' \end{cases} \quad (2.46\text{จ})$$

$$H_{\phi_2} = -j\omega\epsilon h_n^{(2)}(kr') \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') \begin{cases} A_{nm} \cos m\phi' \\ B_{nm} \sin m\phi' \end{cases} \quad (2.46\text{ฉ})$$

โดยเครื่องหมายไพรม์ (') บอกถึงตำแหน่งของแหล่งกำเนิดที่พิจารณาซึ่งในที่นี้พิจารณาที่  $r = a$  จากนั้นแทน(2.46ข), (2.46ค), (2.46จ) และ (2.46ฉ) ที่เป็นฟังก์ชันคู่ลงในสมการ (2.43) จะได้

$$\iint_{S_{ap}} \begin{bmatrix} f_1(\theta, \phi) \times -j\omega\epsilon h_n^{(2)}(ka) \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') A_{nm} \cos m\phi' \\ -f_2(\theta, \phi) \times -\frac{j\omega\epsilon m}{\sin \theta'} h_n^{(2)}(ka) P_n^m(\cos \theta') A_{nm} \sin m\phi' \end{bmatrix} a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' =$$

$$\iint_{S_{ap}} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')] \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') A_{nm} \cos m\phi' \times -j\omega\epsilon h_n^{(2)}(ka) \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') A_{nm} \cos m\phi' \\ \frac{m}{a \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')] P_n^m(\cos \theta') A_{nm} \sin m\phi' \times -\frac{j\omega\epsilon m}{\sin \theta'} h_n^{(2)}(ka) P_n^m(\cos \theta') A_{nm} \sin m\phi' \end{bmatrix}$$

$$\times a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (2.47)$$

เมื่อจัดรูปสมการ (2.47) จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \iint_{Sap} \left[ f_1(\theta, \phi) \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi' - \frac{m}{\sin \theta'} f_2(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi' \right] \sin \theta' d\theta' d\phi' = \\ & \int_0^\pi \left[ \left( \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') \right)^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi' d\phi' + \frac{m^2}{\sin^2 \theta'} (P_n^m(\cos \theta'))^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 m\phi' d\phi' \right] \sin \theta' d\theta' \\ & \times A_{nm} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')] \end{aligned} \quad (2.48)$$

จากคุณสมบัติของ (2.44) และ (2.45) เมื่อนำไปแทนลงในสมการ (2.48) เมื่อจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} A_{nm} = & \iint_{Sap} \left[ f_1(\theta, \phi) \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi' - \frac{m}{\sin \theta'} f_2(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi' \right] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ & \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \frac{a}{\pi} \left( 1 / \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')]_{r'=a} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

โดยวิธีการเดียวกันนี้พิจารณาเทอมที่เป็นฟังก์ชันคี่แล้วแทนค่าลงใน (2.43) จะได้

$$\begin{aligned} B_{nm} = & \iint_{Sap} \left[ f_1(\theta, \phi) \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi' + \frac{m}{\sin \theta'} f_2(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi' \right] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ & \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \frac{a}{\pi} \left( 1 / \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')]_{r'=a} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

—กรณีที 2  $\bar{E}_2$  และ  $\bar{H}_2$  เป็นคลื่นไฟฟ้าตามขวางดังนั้นจากสมการ (2.40ก) ถึง (2.40ข) จะเขียนได้เป็น

$$E_{r2} = 0 \quad (2.51ก)$$

$$E_{\theta 2} = \frac{j\omega\mu m}{\sin \theta'} h_n^{(2)}(kr') P_n^m(\cos \theta') \begin{Bmatrix} C_{nm} \sin m\phi' \\ -D_{nm} \cos m\phi' \end{Bmatrix} \quad (2.51ข)$$

$$E_{\phi 2} = j\omega\mu h_n^{(2)}(kr') \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos\theta') \begin{Bmatrix} C_{nm} \cos m\phi' \\ D_{nm} \sin m\phi' \end{Bmatrix} \quad (2.51ค)$$

$$H_{r2} = \frac{n(n+1)}{r'} h_n^{(2)}(kr') P_n^m(\cos\theta') \begin{Bmatrix} C_{nm} \cos m\phi' \\ D_{nm} \sin m\phi' \end{Bmatrix} \quad (2.51ง)$$

$$H_{\theta 2} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')] \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos\theta') \begin{Bmatrix} C_{nm} \cos m\phi' \\ D_{nm} \sin m\phi' \end{Bmatrix} \quad (2.51จ)$$

$$H_{\phi 2} = \frac{-m}{r' \sin\theta'} \frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')] P_n^m(\cos\theta') \begin{Bmatrix} C_{nm} \sin m\phi' \\ -D_{nm} \cos m\phi' \end{Bmatrix} \quad (2.51ฉ)$$

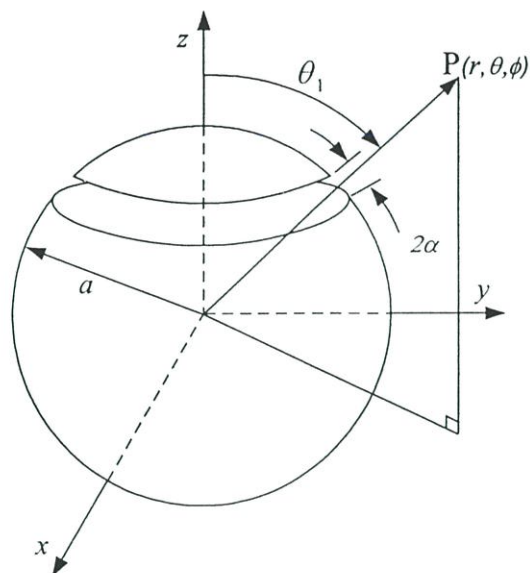
ด้วยวิธีเดียวกันที่ใช้หาสัมประสิทธิ์ของ  $A_{nm}$  และ  $B_{nm}$  เมื่อพิจารณาพจน์ของฟังก์ชันคู่แล้วแทนสมการ (2.51ข), (2.51ค), (2.51จ) และ (2.51ฉ) ลงใน (2.43) จะได้

$$C_{nm} = \iint_{Sap} \left[ \frac{m}{\sin\theta'} f_1(\theta, \phi) P_n^m(\cos\theta') \sin m\phi' + f_2(\theta, \phi) \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos\theta') \cos m\phi' \right] \sin\theta' d\theta' d\phi' \\ \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \frac{1}{j\pi\omega\mu h_n^{(2)}(ka)} \quad (2.52)$$

พิจารณาพจน์ของฟังก์ชันคี่แล้วแทนสมการ (2.51ข), (2.51ค), (2.51จ) และ (2.51ฉ) ลงใน (2.43) จะได้

$$D_{nm} = - \iint_{Sap} \left[ \frac{m}{\sin\theta'} f_1(\theta, \phi) P_n^m(\cos\theta') \cos m\phi' + f_2(\theta, \phi) \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos\theta') \sin m\phi' \right] \sin\theta' d\theta' d\phi' \\ \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \frac{1}{j\pi\omega\mu h_n^{(2)}(ka)} \quad (2.53)$$

### 2.2.6 สมการของสายอากาศร่องเดี่ยวรอบผิวตัวนำทรงกลม



รูปที่ 2.4 โครงสร้างของสายอากาศร่องเดี่ยวรอบผิวทรงกลม

เมื่อพิจารณาถึงคุณลักษณะของสายอากาศร่องเดี่ยวรอบผิวตัวนำทรงกลมโดยสายอากาศมีรัศมีเท่ากับ  $a$  และมีตำแหน่งของปากร่องอยู่ที่  $\theta' = \theta_1$  ความกว้างของปากร่องมีขนาดเท่ากับ  $2\alpha$  ตามมุม  $\theta$  ดังแสดงในรูปที่ 2.4 โดยในขั้นแรกเราจะทำการสมมติให้ค่าของสนามที่กระจายอยู่บนผิวของสายอากาศเป็นไปตามฟังก์ชัน

$$E_{m\theta}(r', \theta', \phi') = \begin{cases} E_m \cos m\phi', & \theta_1 - \alpha < \theta' < \theta_1 + \alpha \\ 0, & 0 \leq \theta' < \theta_1 - \alpha, \theta_1 + \alpha < \theta' \leq \pi \end{cases} \quad (2.54)$$

และ

$$E_{m\phi}(r', \theta', \phi') = 0 \quad (\text{ตลอดผิวทรงกลม}) \quad (2.55)$$

โดยกำหนดให้  $E_m$  เป็นค่าคงที่และด้วยเงื่อนไขนี้เราสามารถที่จะหาสัมประสิทธิ์ของ  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$  และ  $D_{nm}$  ได้โดยการแทนสมการที่ (2.54) และ (2.55) ลงในสมการ (2.49), (2.50) และสมการ (2.52), (2.53) ดังนั้นในการหาค่าสัมประสิทธิ์จะแสดงได้ดังสมการ

$$A_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \frac{aE_m}{\frac{\partial}{\partial r'} [r' h_n^{(2)}(kr')]_{r'=a}} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' \quad (2.56ก)$$

$$B_{nm} = 0 \quad (2.56ข)$$

$$C_{nm} = 0 \quad (2.56ค)$$

$$D_{nm} = -\frac{(2n+1)(n-m)!}{2n(n+1)(n+m)!} \frac{mE_m}{j\omega\mu h_n^{(2)}(ka)} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} P_n^m(\cos\theta') d\theta' \quad (2.56ง)$$

นำสัมประสิทธิ์ทั้งหมดที่ได้จากสมการ (2.56ก) ถึง (2.56ง) แทนลงในสมการ (2.40ก) ถึง (2.40ข) แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้ผลรวมของสนามทั้งหมดดังนี้

$$E_{mr}(r, \theta, \phi) = -E_m \sum_{n=m}^{\infty} L_{mn}^{TM} \frac{n(n+1)}{kr} \frac{ka h_n^{(2)}(kr)}{[ka h_n^{(2)}(ka)]'} P_n^m(\cos\theta) \cos m\phi$$

$$E_{m\theta}(r, \theta, \phi) = -E_m \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ L_{mn}^{TE} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)}(ka)} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} + L_{mn}^{TM} \frac{a [kr h_n^{(2)}(kr)]'}{r [ka h_n^{(2)}(ka)]'} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \right\} \cos m\phi$$

$$E_{m\phi}(r, \theta, \phi) = E_m \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ L_{mn}^{TE} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)}(ka)} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + L_{mn}^{TM} \frac{a [kr h_n^{(2)}(kr)]'}{r [ka h_n^{(2)}(ka)]'} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right\} \sin m\phi$$

$$H_{mr}(r, \theta, \phi) = -j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m \sum_{n=m}^{\infty} L_{mn}^{TE} \frac{n(n+1)}{kr} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)}(ka)} P_n^m(\cos\theta) \sin m\phi$$

$$H_{m\theta}(r, \theta, \phi) = -j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ L_{mn}^{TE} \frac{[kr h_n^{(2)}(kr)]'}{[kr h_n^{(2)}(ka)]'} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} - L_{mn}^{TM} \frac{a [kr h_n^{(2)}(kr)]'}{r [ka h_n^{(2)}(ka)]'} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right\} \sin m\phi$$

$$H_{m\phi}(r, \theta, \phi) = -j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ L_{mn}^{TE} \frac{[kr h_n^{(2)}(kr)]'}{[kr h_n^{(2)}(ka)]'} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} - L_{mn}^{TM} \frac{[ka h_n^{(2)}(kr)]'}{[ka h_n^{(2)}(ka)]'} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \right\} \cos m\phi$$

(2.57)

โดยที่

$$[krh_n^{(2)}(kr)]' = \frac{\partial}{\partial(kr)}[krh_n^{(2)}(kr)] \quad (2.58)$$

$$L_{mn}^{TE} = -\frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} mP_n^m(\cos\theta') d\theta' \quad (2.59)$$

$$L_{mn}^{TM} = -\frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m(\cos\theta') \sin\theta' d\theta' \quad (2.60)$$

และเราสมมติให้แรงดันระหว่างปากร่องแสดงได้ดังสมการ

$$V_m = \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} E_m a d\theta = 2a\alpha E_m \quad (2.61)$$

ดังนั้นเมื่อพิจารณาการแพร่กระจายคลื่นที่บริเวณสนามระยะไกลของสายอากาศ สามารถหาได้ โดยการใช้นิพจน์เชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Expression) ซึ่งเป็นการประมาณค่าของฟังก์ชันเมื่อ  $r \rightarrow \infty$  แสดงดังสมการ

$$h_n^{(2)}(kr) \approx \frac{j^{n+1}}{kr} e^{-jkr} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial(kr)}[krh_n^{(2)}(kr)] \approx j^{n+1} \left[ \frac{(n+1)}{kr} - j \right] e^{-jkr} \quad (2.63)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.57) จะได้สนามระยะไกล

$$E_{mr}(r, \theta, \phi) \approx 0$$

$$E_{m\theta}(r, \theta, \phi) \approx -\frac{e^{-jkr}}{r} \frac{V_m}{ka} \sum_{n=m}^{\infty} (j^n) \left\{ j \frac{L_{mn}^{TE}}{2\alpha} \frac{1}{h_n^{(2)}(ka)} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} + \frac{L_{mn}^{TM}}{2\alpha} \frac{ka}{[kah_n^{(2)}(ka)]'} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \right\} \cos m\phi$$

$$E_{m\phi}(r, \theta, \phi) \approx \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{V_m}{ka} \sum_{n=m}^{\infty} (j^n) \left\{ j \frac{L_{mn}^{TE}}{2\alpha} \frac{1}{h_n^{(2)}(ka)} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + \frac{L_{mn}^{TM}}{2\alpha} \frac{ka}{[kah_n^{(2)}(ka)]'} \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \right\} \sin m\phi$$

$$H_{mr}(r, \theta, \phi) \approx 0$$

$$H_{m\theta}(r, \theta, \phi) \approx -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{m\phi}(r, \theta, \phi)$$

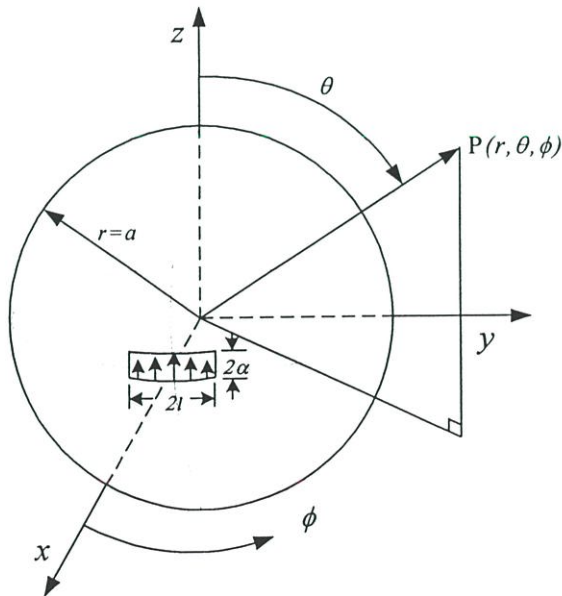
$$H_{m\phi}(r, \theta, \phi) \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{m\theta}(r, \theta, \phi)$$

(2.64)

### 2.3 สมการของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม

จากหัวข้อที่ผ่านมาแสดงถึงการพิสูจน์หาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของสายอากาศแบบร่องรอบผิวตัวนำทรงกลม ซึ่งเมื่อเปลี่ยนมาพิจารณาเป็นสายอากาศแบบร่องที่เป็นช่องเปิดสามารถหาสมการสนามไฟฟ้าได้ดังนี้

#### 2.3.1 สายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอน



รูปที่ 2.5 โครงสร้างของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอน

ในที่นี้จะทำการวิเคราะห์สายอากาศร่องเดี่ยวขนาดความยาว  $0.5\lambda$  และความกว้างพิจารณาให้มีค่าแคบมากดังแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งสายอากาศชนิดนี้มีตำแหน่งกึ่งกลางของร่องอยู่ที่มุม  $\theta = \pi/2$  และมุม  $\phi = 0$  รัศมีของตัวนำทรงกลมเท่ากับ  $a$  และมีขนาดความกว้างและความยาวของปากร่องเท่ากับ  $2a$  และ  $2l$  ตามลำดับซึ่งในการคำนวณหาสนามโดยทั่วไปเป็นเรื่องที่ยากมากแต่อย่างไรก็ตามถ้าเราสมมติสนามที่บริเวณปากร่องขึ้นมากการคำนวณก็จะง่ายขึ้น โดยการประยุกต์ทฤษฎีของสายอากาศร่องเดี่ยวรอบผิวทรงกลมดังที่ได้แสดงมาแล้ว ซึ่งในที่นี้เราสมมติให้สนามที่บริเวณปากร่องมีการกระจายแรงดันอยู่ในรูปฟังก์ชันลักษณะไซน์ รูปแบบของสมการที่เหมาะสมแสดงได้ดังสมการที่ (2.65)

$$V(\phi') = \begin{cases} V \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - a|\phi'|)\right] & |a\phi'| \leq l \\ 0 & |a\phi'| > l \end{cases} \quad (2.65)$$

และ  $V(\phi')$  สามารถกระจายให้อยู่ในรูปผลรวมของโหมดแรงดันดังสมการ

$$V(\phi') = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos m\phi' \quad (2.66)$$

เพื่อที่จะหาค่าแรงดันแต่ละโหมดสามารถประยุกต์ใช้คุณสมบัติออร์โธโกนัลแสดงได้ดังนี้

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos n\phi d\phi = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

จากนั้นคูณสมการ (2.65) และ (2.66) ด้วยฟังก์ชันโคไซน์แล้วอินทิเกรตทั้งสองสมการจะได้

$$\sum_{m=0}^{\infty} V_m \int_0^{2\pi} \cos m\phi' \cos n\phi' d\phi' = V \int_{-l/a}^{l/a} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - a|\phi'|)\right] \cos n\phi' d\phi' \quad (2.68)$$

เมื่ออินทิเกรตแล้วจัดรูปสมการก็จะได้ดังนี้

$$V_m = \frac{2V}{(1 + \delta_m)\pi} \int_0^{l/a} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - a\phi')\right] \cos m\phi' d\phi' \quad (2.69)$$

$$V_m = \frac{2V}{(1 + \delta_m)\pi} \left[ \begin{array}{l} \sin kl \left( \frac{\sin \frac{(ka+m)l}{a}}{ka+m} + \frac{\sin \frac{(ka-m)l}{a}}{ka-m} \right) + \\ \cos kl \left( \frac{\cos \frac{(ka+m)l}{a} - 1}{ka+m} + \frac{\cos \frac{(ka-m)l}{a} - 1}{ka-m} \right) \end{array} \right] \quad (2.70)$$

$$V_m = \begin{cases} \frac{V}{\pi ka} (1 - \cos kl) & m = 0 \\ \frac{V}{\pi} \frac{2ka}{(ka)^2 - m^2} \left[ \cos\left(m\frac{l}{a}\right) - \cos kl \right] & m \neq ka, m \neq 0 \\ \frac{V}{\pi} \frac{l}{a} \sin kl & m = ka \end{cases} \quad (2.71)$$

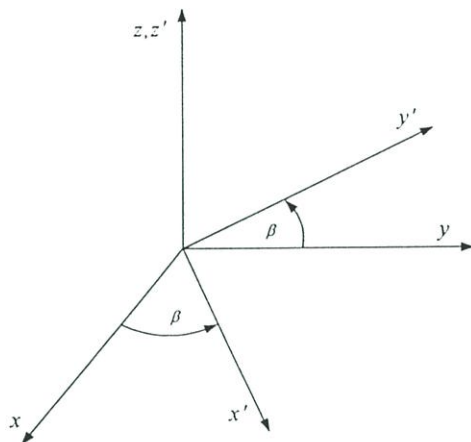
จากนั้นแทน  $V_m$  ลงในสมการ (2.64) จะได้สมการสนามไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศทรงเดี่ยวยาวที่วางตามแนวอนดิ่งสมการ

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi\alpha r} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{V_m}{ka} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (j^n) \cos m\phi \left\{ \begin{array}{l} + (j) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{1}{h_n^{(2)}(ka)} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' \\ + \frac{d}{d\theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{ka}{\frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)]} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{array} \right. \quad (2.72)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi\alpha r} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{V_m}{ka} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (j^n) \sin m\phi \left\{ \begin{array}{l} + (j) \frac{d}{d\theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{1}{h_n^{(2)}(ka)} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' \\ + \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{ka}{\frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)]} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{array} \right. \quad (2.73)$$

### 2.3.2 ร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนผิวตัวนำทรงกลม

การแปลงพิกัดของร่องเดี่ยวจะต้องพิจารณาเป็นสองส่วนคือ ในส่วนแรกจะทำการหมุนแกนของสายอากาศโดยใช้ทฤษฎี Euler rotation angle ซึ่งจะพิจารณาในระบบพิกัดมุมฉากและส่วนที่สองจะทำการแปลงเวกเตอร์ [11],[14] ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกลม โดยในส่วนของ การหมุนแกน เป็นการเปลี่ยนแปลงพิกัดของตำแหน่งแกนแสดงดังรูปที่ 2.6 ถึงรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.6 การแปลงพิกัดโดยหมุนรอบแกน z เป็นมุม  $\beta$

จากรูปที่ 2.6 เมื่อหมุนพิกัดของสายอากาศรอบแกน z สามารถแตกองค์ประกอบได้ดังนี้

$$\hat{x}' = \hat{x} \cos \beta + \hat{y} \sin \beta + \hat{z} \cos(\pi/2)$$

$$\hat{y}' = -\hat{x} \sin \beta + \hat{y} \cos \beta + \hat{z} \cos(\pi/2)$$

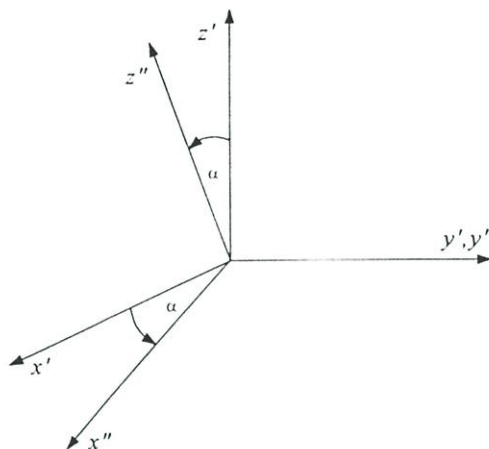
$$\hat{z}' = \hat{x} \cos(\frac{\pi}{2}) + \hat{y} \cos(\frac{\pi}{2}) + \hat{z} \cos(0)$$

และเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[\hat{c}'] = [{}^c T^c][\hat{c}] \quad (2.74ก)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (2.74ข)$$

เมื่อหมุนพิกัดรอบแกน  $y$  แสดงได้ดังรูปที่ 2.7



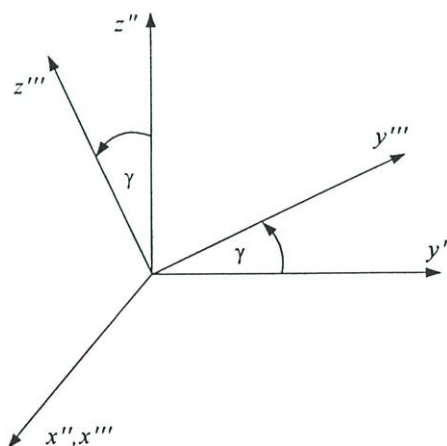
รูปที่ 2.7 การแปลงพิกัดโดยหมุนรอบแกน  $y$  เป็นมุม  $\alpha$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[\hat{c}''] = [{}^c T^c'] [\hat{c}'] \quad (2.75n)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}'' \\ \hat{y}'' \\ \hat{z}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} \quad (2.75ข)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อหมุนพิกัดรอบแกน  $x$  แสดงได้ดังรูปที่ 2.8



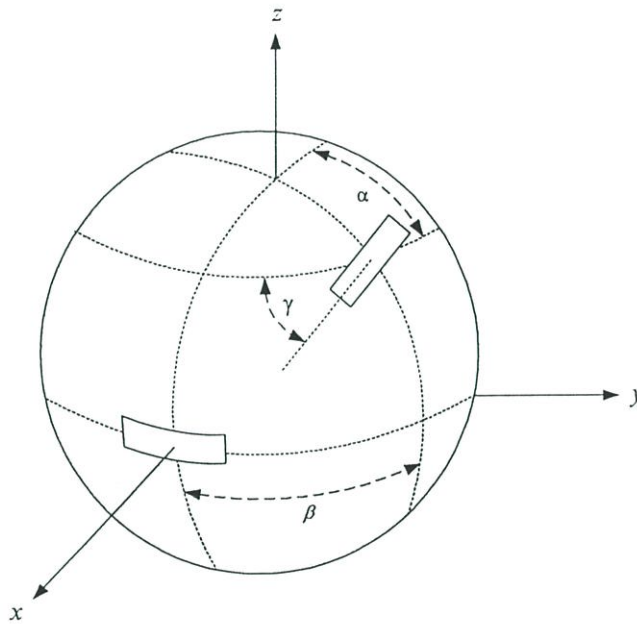
รูปที่ 2.8 การแปลงพิกัดโดยหมุนรอบแกน  $x$  เป็นมุม  $\gamma$

เขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$$[\hat{c}'''] = [{}^c T^{c''}] [\hat{c}''] \quad (2.76n)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}''' \\ \hat{y}''' \\ \hat{z}''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}'' \\ \hat{y}'' \\ \hat{z}'' \end{bmatrix} \quad (2.76ข)$$

เมื่อพิจารณาหมุนพิภักครอบแกนทั้ง 3 แสดในรูปที่ 2.9 จะเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการ



รูปที่ 2.9 ระบบพิภักเมื่อพิจารณาโดยหมุนทั้ง 3 แกน

เขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[\hat{c}'''] = [{}^c T^{c''}] [{}^{c''} T^{c'}] [{}^{c'} T^c] [\hat{c}] \quad (2.77n)$$

$$[\hat{c}'''] = [{}^c T^c] [\hat{c}] \quad (2.77ข)$$

เพื่อความสะดวกในที่นี้จะแทนสัญลักษณ์ (\*) ด้วย (\*) ดังนั้นจาก (2.77ก) สามารถกระจายได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^* \\ \hat{y}^* \\ \hat{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

จากสมการ (2.78) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} c^* T^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \alpha \\ \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

พิจารณาตัวแปรให้อยู่ในพิกัดทรงกลมดังนั้นทำการแปลง  $(x^*, y^*, z^*)$  ให้อยู่ในพจน์  $(r^*, \theta^*, \phi^*)$

$$\begin{bmatrix} r^* \sin \theta^* \cos \phi^* \\ r^* \sin \theta^* \sin \phi^* \\ r^* \cos \phi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \alpha \\ \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

จากการแก้สมการ (2.80) จะได้

$$\cos \phi^* = \frac{\cos \alpha \sin \theta \cos(\phi - \beta) - \sin \alpha \cos \theta}{\sin \theta^*} \quad (2.81ก)$$

$$\sin \phi^* = \frac{\sin \gamma \sin \alpha \sin \theta \cos(\phi - \beta) + \cos \gamma \sin \theta \sin(\phi - \beta) + \sin \gamma \cos \alpha \cos \theta}{\sin \theta^*} \quad (2.81ข)$$

$$\cos \theta^* = \cos \gamma \sin \alpha \sin \theta \cos(\phi - \beta) - \sin \gamma \sin \theta \sin(\phi - \beta) + \cos \gamma \cos \alpha \cos \theta \quad (2.81ค)$$

เมื่อพิจารณาที่บริเวณสนามระยะไกล  $r = r^* \rightarrow \infty$  ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  และ  $(r^*, \theta^*, \phi^*)$  เขียนได้ดังสมการ

$$[\hat{s}^*] = [{}^s T^c] [{}^c T^s] [\hat{s}] \quad (2.82ก)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{r}^* \\ \hat{\theta}^* \\ \hat{\phi}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \theta^* \cos \phi^* & \sin \theta^* \sin \phi^* & \cos \theta^* \\ \cos \theta^* \cos \phi^* & \cos \theta^* \sin \phi^* & -\sin \theta^* \\ -\sin \phi^* & \cos \phi^* & 0 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \alpha \\ \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.82ข)$$

จากการแก้สมการ (2.82ข) จะได้

$$\hat{r}^* = \hat{r} \quad (2.83ก)$$

$$\hat{\theta}^* = \zeta \hat{\theta} - \xi \hat{\phi} \quad (2.83ข)$$

$$\hat{\phi}^* = \xi \hat{\theta} + \zeta \hat{\phi} \quad (2.83ค)$$

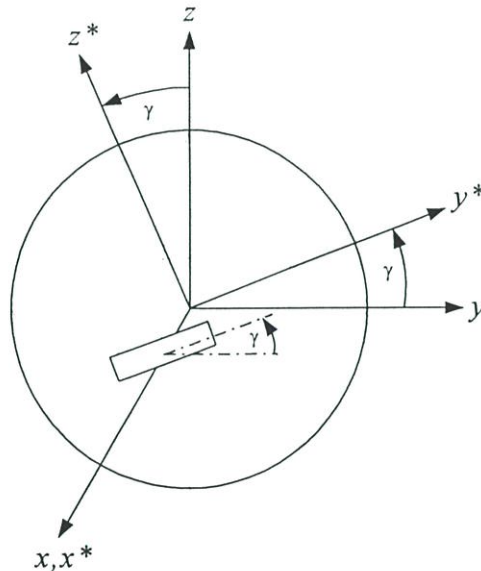
โดยที่

$$\zeta = \frac{1}{\sin \theta^*} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{4} \sin \gamma \sin 2\alpha \sin 2(\phi - \beta) \sin \theta + \cos \gamma \cos \alpha \sin \theta \right) - \\ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\phi - \frac{\pi}{4}) \sin \gamma \sin 2\alpha \sin \beta \sin \theta \cos(\phi - \beta) \right) - \\ \left( \cos \gamma \sin \alpha \cos \theta \cos(\phi - \beta) - \sin \gamma \cos^2 \alpha \cos \theta \sin(\phi - \beta) \right) \end{array} \right\} \quad (2.83ง)$$

$$\xi = -\frac{1}{\sin \theta^*} \left\{ \begin{aligned} &+ \left( \frac{1}{4} \sin \gamma \sin 2\alpha \sin 2\theta \cos^2(\theta - \beta) + \sin \gamma \cos^2 \alpha \cos^2 \theta \cos(\phi - \beta) \right) \\ &+ \left( \frac{1}{4} \sin \gamma \sin 2\alpha \sin \beta \sin 2\theta \cos(\phi - \beta) - \sin \gamma \sin^2 \alpha \sin \beta \cos^2 \theta \right) \\ &\times \left( \sqrt{2} \cos(\phi - \frac{\pi}{4}) \right) + \left( \cos \gamma \sin \alpha \sin(\phi - \beta) + \sin \gamma \sin^2 \theta \cos(\phi - \beta) \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.83\text{จ})$$

### 2.3.3 สายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนผิวตัวนำทรงกลม

ในการคำนวณจะพิจารณาโดยนำสมการของสายอากาศร่องเดี่ยวครั้งความยาวคลื่นที่วางแบบแนวอนบนตัวนำทรงกลมมาประยุกต์ [24] โดยใช้หลักการของการหมุนแกนของสายอากาศเป็นมุมใด ๆ ซึ่งในกรณีนี้จะทำการหมุนรอบแกน  $x$  เป็นมุม  $\gamma$  แสดงดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 สายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนตัวนำทรงกลม

จากรูปที่ 2.10 พิจารณาโดยหมุนสายอากาศรอบแกน  $x$  ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^* \\ \hat{y}^* \\ \hat{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

เพื่อที่จะหาฟังก์ชันในระบบพิกัดทรงกลมทำการแปลง  $(x^*, y^*, z^*)$  ให้อยู่ในพจน์  $(r^*, \theta^*, \phi^*)$  เขียนได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} r^* \sin \theta^* \cos \phi^* \\ r^* \sin \theta^* \sin \phi^* \\ r^* \cos \theta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

จากการแก้สมการ (2.85) จะได้

$$\cos \phi^* = \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \theta^*} \quad (2.86ก)$$

$$\sin \phi^* = \frac{\sin \theta \sin \phi \cos \gamma + \cos \theta \sin \gamma}{\sin \theta^*} \quad (2.86ข)$$

$$\cos \theta^* = -\sin \theta \sin \phi \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \quad (2.86ค)$$

พิจารณว่าเป็นสนามระยะไกล  $r \approx r^* \rightarrow \infty$  ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ  $(\hat{r}^*, \hat{\theta}^*, \hat{\phi}^*)$  และ  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  เขียนได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \hat{r}^* \\ \hat{\theta}^* \\ \hat{\phi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta^* \cos \phi^* & \sin \theta^* \sin \phi^* & \cos \theta^* \\ \cos \theta^* \cos \phi^* & \cos \theta^* \sin \phi^* & -\sin \theta^* \\ -\sin \phi^* & \cos \phi^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

เมื่อแก้สมการที่ (2.87) แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\hat{\theta}^* = \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} \hat{\theta} + \frac{\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} \hat{\phi} \quad (2.88ก)$$

$$\hat{\phi}^* = \frac{-\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} \hat{\theta} + \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} \hat{\phi} \quad (2.88ข)$$

ผลรวมของสนามไฟฟ้าที่เกิดจากวงสายอากาศทำมุมเอียงใด ๆ บนตัวนำทรงกลมเขียนได้เป็น

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} E_\theta^*(r^*, \theta^*, \phi^*) - \frac{\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} E_\phi^*(r^*, \theta^*, \phi^*) \quad (2.89n)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} E_\phi^*(r^*, \theta^*, \phi^*) + \frac{\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} E_\theta^*(r^*, \theta^*, \phi^*) \quad (2.89ข)$$

โดยที่

$$E_\theta^*(r^*, \theta^*, \phi^*) = \frac{e^{-jkr}}{4\alpha r} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{V_m}{ka} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (j^n) \cos m\phi^* \times \left\{ \begin{aligned} &+(j) \frac{m}{\sin \theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) \frac{1}{h_n^{(2)}(ka)} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' \\ &+ \frac{d}{d\theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) \frac{ka}{\frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)]} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{aligned} \right. \quad (2.90n)$$

$$E_\phi^*(r^*, \theta^*, \phi^*) = -\frac{e^{-jkr}}{4\alpha r} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{V_m}{ka} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (j^n) \sin m\phi^* \times \left\{ \begin{aligned} &+(j) \frac{d}{d\theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) \frac{1}{h_n^{(2)}(ka)} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' \\ &+ \frac{m}{\sin \theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) \frac{ka}{\frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)]} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{aligned} \right. \quad (2.90ข)$$

## 2.4 สรุป

บทนี้ นำเสนอการพิสูจน์สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายคลื่นออกมาสู่ภายนอกของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม โดยจะเริ่มต้นด้วยโครงสร้างของสายอากาศที่เป็นช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลมก่อนจากนั้นพิจารณาสนามในพื้นที่ฐานของโหนดสนามรวม คือโหนดของคลื่นไฟฟ้าตามขวาง และโหนดคลื่นแม่เหล็กตามขวางแล้วเปลี่ยนมาพิจารณาเป็นสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม โดยจะสมมติให้แรงดันบริเวณปากร่องของสายอากาศมีการเปลี่ยนแปลงในรูปของฟังก์ชันลักษณะไซน์

## บทที่ 3

# สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก

### 3.1 บทนำ

จากบทที่ 2 ได้แสดงการพิสูจน์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระจายออกจากร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมโดยใช้วิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ และในบทนี้จะใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก (Dyadic Green Function) ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์อีกวิธีที่คาดว่าจะให้ผลการคำนวณที่แม่นยำกว่าวิธีที่ใช้ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์เนื่องจากได้คิดรวมผลของการกระจัดกระจายเข้าไปด้วยเรียกว่าการทับซ้อนการกระจาย (Scattering Superposition) [15], [16] การหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระจายออกจากร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมจะใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอติกในช่องว่างอิสระ และในส่วนของกระแสแม่เหล็กสมมูลจะสมมติให้กระแสมีการเปลี่ยนแปลงในรูปของฟังก์ชันลักษณะไซน์

### 3.2 สมการและฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอติก

ฟังก์ชันกรีนไดแอติกถือเป็นฟังก์ชันที่ตอบสนองอิมพัลส์หรือฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่มีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ กล่าวได้ว่าฟังก์ชันกรีนไดแอติกคือสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดจากไดโพลจิวน์เอง ในปัญหาที่แตกต่างกันจะมีเงื่อนไขขอบเขตที่ต่างกันทำให้ได้ฟังก์ชันกรีนไดแอติกที่ต่างกันตามขอบเขตของเงื่อนไขนั้น ๆ ดังนั้นหากรู้ฟังก์ชันกรีนไดแอติกของปัญหานั้น ๆ ซึ่งมีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ เราสามารถที่จะหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอันเนื่องมาจากการกระจายกระแสรูปแบบใด ๆ ได้โดยการอินทิเกรตตลอดปริมาตรของแหล่งกำเนิดของผลคูณระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอติกและการกระจายความหนาแน่นของกระแสที่แหล่งกำเนิดนั้น และจะพิจารณาที่สนามมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นฮาร์มอนิกซึ่งแสดงด้วยฟังก์ชัน  $e^{j\omega t}$

#### 3.2.1 พีชคณิตไดแอติก

J. W. Gibbs ซึ่งเป็นนักฟิสิกส์ชาวอเมริกันที่มีชื่อเสียงในด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์และเทอร์โมไดนามิกส์เป็นบุคคลแรกที่ตั้งสัญลักษณ์สมัยใหม่ของการวิเคราะห์เวกเตอร์ ซึ่งฟังก์ชันเวกเตอร์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน นิยามไว้ว่า

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \hat{x}_i \quad (3.1)$$

ตัวอักษร "  $i$  " เป็นดัชนีบอกจำนวนครั้งในการบวกของฟังก์ชันโดยปกติจะมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 3 จากสมการ(3.1) J.W. Gibbs ได้นิยามฟังก์ชันไดแอดิก (Dyadic function) หรือเรียกสั้น ๆ ว่าไดแอดิก (Dyadic) ซึ่งแสดงได้คือ

$$\bar{\bar{F}} = \sum_{j=1}^3 \bar{F}_j \hat{x}_j \quad (3.2)$$

เมื่อ

$$\bar{F}_j = \sum_{i=1}^3 F_{ij} \hat{x}_i \quad i=1,2,3 \quad (3.3)$$

ดังนั้นฟังก์ชันเวกเตอร์ที่ต่างหรือเป็นอิสระกันสามฟังก์ชันซึ่ง ตำแหน่งของ  $\bar{F}_j$  และ  $\hat{x}_j$  จะต้องเรียงลำดับตามนี้และไม่สามารถสลับตำแหน่งสองเวกเตอร์นี้ได้ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือกฎแห่งการสลับที่ไม่สามารถนำมาใช้กับสมการ (3.2) เมื่อแทนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.2) จะได้

$$\bar{\bar{F}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (3.4)$$

อาศัยกฎแห่งการกระจายในการเปลี่ยนสมการ (3.2) ให้เป็นสมการ (3.4) กล่าวได้ว่าสมการ (3.2) ถึง (3.4) เป็นสมการที่แสดงนิยามของไดแอดิกในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจะเห็นว่า  $\bar{\bar{F}}$  มีทั้งหมด 9 องค์ประกอบสเกลาร์ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยคู่ (Double unit vectors) ซึ่งเป็นการนำเอาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสองตัวมาวางติดกันนั่นคือ  $\hat{x}_i$  กับ  $\hat{x}_j$  ซึ่ง  $i, j = (1,2,3)$  เราเรียกว่าไดแอดส์(Dyads) ซึ่งจะมีได้ทั้งหมด 9 องค์ประกอบเช่นกัน ตัวอย่างองค์ประกอบไดแอดิกเช่น  $F_{23} \hat{x}_2 \hat{x}_3$  ซึ่งไดแอดส์จะทำการสลับตำแหน่งไม่ได้ นั่นคือ

$$\hat{x}_i \hat{x}_j \neq \hat{x}_j \hat{x}_i \quad (3.5)$$

### 3.2.2 ทรานสโพส

ทรานสโพสของไดแอดิก  $\bar{\bar{F}}$  กำหนดเป็น  $[\bar{\bar{F}}]^T$  นิยามโดย

$$[\bar{\bar{F}}]^T = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j \bar{F}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} \hat{x}_j \hat{x}_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 F_{ji} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (3.6)$$

พิจารณาเปรียบเทียบสมการ (3.6) และ (3.4) เห็นได้ว่าตำแหน่งของ  $\hat{x}_i$  และ  $\hat{x}_j$  ในพจน์ที่สามของสมการ (3.6) สลับตำแหน่งกันอยู่ หรือฟังก์ชันของ  $F_{ij}$  ในสมการ (3.4) ถูกแทนที่ด้วย  $F_{ji}$  ในพจน์สุดท้ายของสมการ (3.6)

### 3.2.3 ไดแอติกสมมาตรและอสมมาตร

ไดแอติกสมมาตร  $\bar{\bar{F}}_s$  มีคุณลักษณะคือ

$$[\bar{\bar{F}}_s]^T = \bar{\bar{F}}_s \quad (3.7)$$

นั่นคือ ไดแอติกสมมาตรจะมีแค่ 6 องค์ประกอบสเกลาร์ที่แตกต่างกันเพราะ  $F_{ij} = F_{ji}$  ส่วนไดแอติกอสมมาตร  $\bar{\bar{F}}_a$  กำหนดเป็น

$$[\bar{\bar{F}}_a]^T = -\bar{\bar{F}}_a \quad (3.8)$$

ดังนั้น

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad (3.9)$$

สมการ (3.9) บอกเป็นนัยว่า

$$F_{ii} = 0, \quad i=1,2,3 \quad (3.10)$$

ดังนั้น  $\bar{\bar{F}}_a$  จะมีองค์ประกอบสเกลาร์ที่แตกต่างกันเพียง 3 องค์ประกอบเท่านั้นถ้าหากไม่พิจารณาเครื่องหมายลบในสมการ (3.9) กรณีพิเศษหนึ่งของไดแอติกสมมาตรคือเมื่อ  $F_{ij} = 0$  สำหรับ  $i \neq j$  และ  $F_{ij} = 1$  สำหรับ  $i=(1,2,3)$  คุณสมบัติสองอย่างนี้สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$F_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.11)$$

โดย  $\delta_{ij}$  คือฟังก์ชันเดลตาโครเนคเคอร์ (Kronecker delta function) และเราเรียกไดแอติกนี้ว่าตัวประกอบไอดีม (Idem factor) หรือไดแอตไอดีม (Idem-dyad) ซึ่งแทนด้วย  $\bar{\bar{I}}$  แสดงได้เป็น

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \hat{x}_i \quad (3.12)$$

### 3.2.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์และไดแอติก

ผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์และไดแอติกมีอยู่สองแบบคือผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหน้า (Anterior scalar product) และผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหลัง (Posterior scalar product) ผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหน้า ( $\bar{b} \cdot \bar{F}$ ) นิยามโดย

$$\begin{aligned} \bar{b} \cdot \bar{F} &= \sum_{j=1}^3 (\bar{b} \cdot \bar{F}_j) \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\bar{b} \cdot F_{ij} \hat{x}_i) \hat{x}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (b_i F_{ij}) \hat{x}_j \end{aligned} \quad (3.13)$$

ผลลัพธ์จากการคูณจะเป็นเวกเตอร์ ถ้าแทนผลคูณนี้ด้วยเวกเตอร์  $\bar{c}$  จะได้

$$c_j = \sum_{i=1}^3 b_i F_{ij} \quad ; j = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

ส่วนผลคูณเชิงสเกลาร์ข้างหลังของเวกเตอร์และไดแอติก ( $\bar{F} \cdot \bar{b}$ ) แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{F} \cdot \bar{b} &= \sum_{j=1}^3 \bar{F}_j (\hat{x}_j \cdot \bar{b}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} \hat{x}_i (\hat{x}_j \cdot \bar{b}) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (b_j F_{ij} \hat{x}_i) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ผลที่ได้จะเป็นเวกเตอร์เช่นกัน ถ้าแทนผลคูณที่ได้ด้วยเวกเตอร์  $\bar{d}$  จะได้

$$d_i = \sum_{j=1}^3 b_j F_{ij} \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

เปรียบเทียบสมการ (3.14) ถึง (3.16) จะพบว่าในกรณีทั่วไป  $c_j \neq d_j$  ยกเว้นในกรณีของไดแอติกสมมาตร นั่นคือ

$$\bar{b} \cdot \bar{F}_s = \bar{F}_s \cdot \bar{b} \quad (3.17)$$

และ

$$\bar{b} \cdot \bar{I} = \bar{I} \cdot \bar{b} = \bar{b} \quad (3.18)$$

สมการ (3.18) เป็นคุณลักษณะสำคัญของตัวประกอบไอเดมสี่บเนื่องจากการทรานสโพสของไดแอดิกที่แสดงในสมการ (3.6) และพิจารณาสมการ (3.13) จะทำให้ได้ว่า

$$\bar{b} \cdot \bar{F} = [\bar{F}]^t \cdot \bar{b} \quad (3.19)$$

หรือ

$$\bar{F} \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot [\bar{F}]^t \quad (3.20)$$

ความสัมพันธ์นี้สำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์ไดแอดิก

### 3.2.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์และไดแอดิก

สามารถแบ่งผลคูณเชิงเวกเตอร์ระหว่างเวกเตอร์และไดแอดิกได้สองแบบอีกเช่นกันนั่นคือ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ข้างหน้า (Anterior vector product) และผลคูณเชิงเวกเตอร์ข้างหลัง (Posterior vector product) แสดงได้ในสมการ (3.21) และ (3.22) ตามลำดับ

$$\bar{b} \times \bar{F} = \sum_{j=1}^3 (\bar{b} \times F_j) \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} (\bar{b} \times \hat{x}_i) \hat{x}_j \quad (3.21)$$

และ

$$\bar{F} \times \bar{b} = \sum_{j=1}^3 F_j (\hat{x}_j \times \bar{b}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} \hat{x}_i (\hat{x}_j \times \bar{b}) \quad (3.22)$$

จากสมการ (3.21) และ (3.22) จะเห็นว่าผลคูณทั้งคู่จะเป็นไดแอดิก โดยทั่วไปแล้วจะได้

$$\bar{b} \times \bar{F} \neq -\bar{F} \times \bar{b} \quad (3.23)$$

และ

$$\bar{b} \times \bar{F} \neq [\bar{F}]^t \times \bar{b} \quad (3.24)$$

แต่จะเป็น

$$\bar{b} \times \bar{F} \neq -\{[\bar{F}]^T \times \bar{b}\}^T \quad (3.25)$$

ในกรณีพิเศษของตัวประกอบไอเดมจะได้

$$\bar{b} \times \bar{I} = -[\bar{I} \times \bar{b}]^T$$

### 3.2.6 ผลคูณสามชั้น

ในพีชคณิตเวกเตอร์ จะมีเอกลักษณ์หนึ่งที่ว่า

$$\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{d} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{c} \cdot (\bar{d} \times \bar{b}) \quad (3.26)$$

สามารถสร้างเอกลักษณ์ที่คล้ายกันนี้สำหรับไดแอดิกโดยอ้างอิงจากสมการ (3.26) เริ่มพิจารณาเอกลักษณ์สามชุดซึ่งเกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ที่แตกต่างกันสามเวกเตอร์  $\bar{d}_j$  เมื่อ  $j = (1, 2, 3)$  นั่นคือ

$$\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}_j) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{d}_j = -\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{d}_j) \quad (3.27)$$

จากนั้นวางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\hat{x}_j$  ติดกับตำแหน่งหลังสุดของแต่ละพจน์ในสมการ (3.27) และรวมองค์ประกอบทั้งหมดของไดแอดิกทั้งสามพจน์ จะได้เป็น

$$\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{d} = -\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{d}) \quad (3.28)$$

แต่ละพจน์ในสมการ (3.28) เป็นเวกเตอร์เพราะว่าเป็นผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์กับไดแอดิก ดังนั้นสรุปได้ว่าผลคูณสามชั้นของเวกเตอร์สามารถเปลี่ยนรูปเป็นหนึ่งไดแอดิก ( $\bar{c} \times \bar{d}$ ,  $\bar{d}$ , หรือ  $\bar{b} \times \bar{d}$ ) กับหนึ่งเวกเตอร์ ( $\bar{b}$ ,  $\bar{b} \times \bar{c}$  หรือ  $-\bar{c}$ ) ตามสมการ (3.28) นั่นเอง อย่างไรก็ตาม สมการ (3.28) ก็ยังเป็นเวกเตอร์เราสามารถทำให้  $\bar{c}$  อยู่ในรูปไดแอดิกได้โดยพิจารณาสองพจน์สุดท้ายในสมการ (3.28) และใช้คุณสมบัติของสมการ (3.19) และ (3.20) ตามลำดับจะได้

$$[\bar{d}]^T \cdot (\bar{b} \times \bar{c}_j) = -[\bar{b} \times \bar{d}]^T \cdot \bar{c}_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.29)$$

เมื่อรวมองค์ประกอบทั้งหมดของไดแอดิก  $\bar{c}$  หลังจากนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\hat{x}_j$  ไปวางติดข้างหลัง  $\bar{c}$ , สุดท้ายจะได้เอกลักษณ์ไดแอดิก คือ

$$[\bar{d}]^T \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = -[\bar{b} \times \bar{d}]^T \cdot \bar{c} \quad (3.30)$$

ซึ่งแต่ละพจน์ในสมการ (3.30) ล้วนเป็นไดแอดิก

### 3.2.7 ไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ลของฟังก์ชันไดแอดิก เกรเดียนต์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

ไดเวอร์เจนซ์ของฟังก์ชันไดแอดิก  $\bar{F}$  ซึ่งแสดงโดยสมการ (3.1) ถึง (3.4) ในหัวข้อก่อนหน้า นี้แทนด้วย  $\nabla \cdot \bar{F}$  ถูกนิยามได้โดย

$$\nabla \cdot \bar{F} = \sum_{j=1}^3 (\nabla \cdot \bar{F}_j) \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} \hat{x}_j \quad (3.31)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์สำหรับเคิร์ลของฟังก์ชันไดแอดิก  $\bar{F}$  แสดงโดย  $\nabla \times \bar{F}$  และนิยามได้เป็น

$$\nabla \times \bar{F} = \sum_{j=1}^3 (\nabla \times \bar{F}_j) \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\nabla F_{ij} \times \hat{x}_i) \hat{x}_j \quad (3.32)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันไดแอดิกเช่นกันในการพิสูจน์สมการ (3.32) เราจะใช้สัญลักษณ์เวกเตอร์

$$\nabla \times (F_j \hat{x}_j) = \nabla F_j \times \hat{x}_j \quad (3.33)$$

ต่อมาพิจารณาเกรเดียนต์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ แสดงโดย  $\nabla \bar{F}$  ซึ่งสามารถนิยาม ดังนี้

$$\nabla \bar{F} = \sum_{j=1}^3 (\nabla F_j) \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{x}_j \quad (3.34)$$

ซึ่งผลที่ได้ยังคงเป็นไดแอดิก เมื่อฟังก์ชันไดแอดิก  $\bar{F}$  ประกอบด้วยตัวประกอบไอเดม  $\bar{I}$  และ ฟังก์ชันสเกลาร์  $f$  ในรูปของ

$$\bar{F} = f\bar{I}$$

เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \bar{\bar{F}} &= \nabla \cdot (f\bar{\bar{I}}) = \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot (f\hat{x}_i)\hat{x}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{x}_i \\ &= \nabla f\end{aligned}\tag{3.35}$$

และ

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{\bar{F}} &= \nabla \times (f\bar{\bar{I}}) = \sum_{i=1}^3 \nabla \times (f\hat{x}_i)\hat{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (\nabla f \times \hat{x}_i)\hat{x}_i = \nabla f \times \bar{\bar{I}}\end{aligned}\tag{3.36}$$

ซึ่งทั้งสองจะให้ฟังก์ชันไดแอดิก

### 3.2.8 สมการแมกซ์เวลล์ในรูปของไดแอดิกและฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบไฟฟ้าและแบบแม่เหล็ก

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมการแมกซ์เวลล์และฟังก์ชันไดแอดิกนั่นก็คือ การเขียนสมการแมกซ์เวลล์ในรูปแบบของไดแอดิก โดยพิจารณาจากสนามสามชุดที่เกิดขึ้นอย่าง สอดคล้องกันด้วยความถี่และในเงื่อนไขแวดล้อมเดียวกันและใช้ฟังก์ชันเวลา คือ  $e^{j\omega t}$  โดยสนาม แต่ละชุดจะเกิดจากการกระจายของกระแสที่แตกต่างกัน นั่นคือ  $\bar{J}_j$  เมื่อ  $j=(1,2,3)$  สมการแมกซ์เวลล์สำหรับสนามเหล่านี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \bar{E}_j = -j\omega\mu_0\bar{H}_j\tag{3.37ก}$$

$$\nabla \times \bar{H}_j = \bar{J}_j + j\omega\varepsilon_0\bar{E}_j\tag{3.37ข}$$

$$\nabla \cdot \bar{J}_j = -j\omega\rho_j\tag{3.37ค}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0\bar{E}_j) = \rho_j\tag{3.37ง}$$

$$\nabla \cdot (\mu_0\bar{H}_j) = 0\tag{3.37จ}$$

โดยสมมติให้ตัวกลางภายใต้เงื่อนไขที่พิจารณาคืออากาศ และสำหรับตัวกลางเนื้อเดียวกัน ๆ เราสามารถแทนค่าคงที่  $\mu_0$  และ  $\epsilon_0$  ด้วย  $\mu$  และ  $\epsilon$  ก่อนอื่นจะขอเปลี่ยน  $(x, y, z)$  เป็น  $(x_1, x_2, x_3)$  เพื่อความสะดวกและง่ายต่อความเข้าใจจากนั้นนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\hat{x}_j$  วางติดข้างหลัง(Juxtapose) ของสมการ (3.37ก) ถึง (3.37จ) และรวมสมการแมกซ์เวลล์ทั้งสามชุดเข้าด้วยกันจะทำให้ได้สมการแมกซ์เวลล์ในรูปแบบของไดแอดิก แสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \bar{\bar{E}} = -j\omega\mu_0\bar{H} \quad (3.38\text{น})$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega\epsilon_0\bar{E} \quad (3.38\text{ข})$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = -j\omega\bar{\rho} \quad (3.38\text{ค})$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0\bar{E}) = \bar{\rho} \quad (3.38\text{ง})$$

$$\nabla \cdot (\mu_0\bar{H}) = 0 \quad (3.38\text{จ})$$

โดยที่

$$\bar{\bar{E}} = \sum_{j=1}^3 \bar{E}_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 E_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (3.39\text{ก})$$

$$\bar{H} = \sum_{j=1}^3 \bar{H}_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 H_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (3.39\text{ข})$$

$$\bar{E} = \sum_{j=1}^3 \bar{J}_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (3.39\text{ค})$$

$$\bar{\rho} = \sum_{j=1}^3 \rho_j \hat{x}_j \quad (3.39\text{ง})$$

จากการนิยามของไดแอดิกในหัวข้อ 3.2.1 สามารถอธิบายฟังก์ชันไดแอดิก  $\bar{\bar{E}}$  ได้ว่า ประกอบด้วยสามองค์ประกอบเวกเตอร์คือ  $\bar{E}_j$  ซึ่ง  $j=(1,2,3)$  และฟังก์ชันเวกเตอร์ความหนาแน่นประจุ ( $\bar{\rho}$ ) ประกอบด้วยการกระจายประจุเชิงสเกลาร์ที่แตกต่างกันสามชุด พิจารณาการกระจายกระแสสามชุดที่สอดคล้องกับไดโพลไฟฟ้าจิวสามตัว ณ ตำแหน่ง  $\bar{R} = \bar{R}'$  และวางในทิศทาง  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  หรือ  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$  ดังนี้

$$\bar{J}_j = c_j \delta(\bar{R} - \bar{R}') \hat{x}_j \quad ; j = (1,2,3) \quad (3.40)$$

ซึ่ง  $c_j$  คือโมเมนต์กระแสของไดโพล (Current moment of dipole) นั่นคือ

$$\iiint \bar{J}_j dv = c_j \hat{x}_j \quad (3.41)$$

เราจะนอร์มัลไลซ์โมเมนต์กระแสให้เป็น

$$-j\omega\mu_0 c_j = 1 \quad (3.42)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} -j\omega\mu_0 \bar{J}_j &= -j\omega\mu_0 c_j \delta(\bar{R} - \bar{R}') \hat{x}_j \\ &= \delta(\bar{R} - \bar{R}') \hat{x}_j \end{aligned} \quad (3.43)$$

ภายใต้เงื่อนไขนี้ เราจะกำหนดตัวแปรใหม่ สำหรับฟังก์ชันไดแอดิกต่างๆ นั่นคือ

$$\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{G}}_e \quad (3.44ก)$$

$$-j\omega\mu_0 \bar{\bar{H}} = \bar{\bar{G}}_m \quad (3.44ข)$$

$$-j\omega\mu_0 \bar{\bar{J}} = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (3.44ค)$$

จากสมการ (3.38ค) จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{1}{-j\omega} \nabla \cdot \bar{\bar{J}} = \frac{-1}{\omega^2 \mu_0} \nabla \cdot [\bar{\bar{I}} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] \\ &= \frac{-\epsilon_0}{k^2} \nabla \delta(\bar{R} - \bar{R}') \end{aligned} \quad (3.44ง)$$

ซึ่ง  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$ ,  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} =$  ความเร็วของแสงในอากาศ

เมื่อแทนตัวแปรใหม่เหล่านี้ลงในสมการ (3.38ก), (3.38ข), (3.38ง) และ (3.38จ) จะได้ว่า

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_e = \bar{\bar{G}}_m \quad (3.45ก)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_m = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_e \quad (3.45ข)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_e = -\frac{1}{k^2} \nabla \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (3.45ค)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_m = 0 \quad (3.45ง)$$

กำหนดให้  $\bar{\bar{G}}_e$  คือฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้า (Electric Dyadic Green function) และ  $\bar{\bar{G}}_m$  คือฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบแม่เหล็ก (Magnetic Dyadic Green function) ซึ่งจะเขียนตามนิยามของไดแอติก จะได้ดังนี้

$$\bar{\bar{G}}_e = \sum_{j=1}^3 \bar{G}_{ej} \hat{x}_j \quad (3.46ก)$$

$$\bar{\bar{G}}_m = \sum_{j=1}^3 \bar{G}_{mj} \hat{x}_j \quad (3.46ข)$$

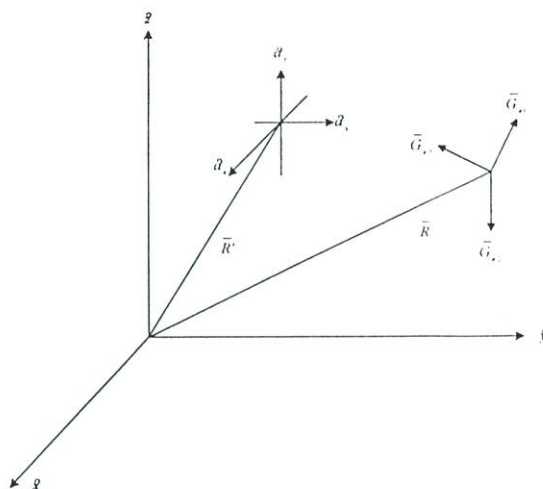
ดังนั้น  $\bar{G}_{ej}$  และ  $\bar{G}_{mj}$  คือ ฟังก์ชันกรีนเวกเตอร์แบบไฟฟ้า (Vector Green function of electric type) และฟังก์ชันกรีนเวกเตอร์ชนิดแม่เหล็ก (Vector Green function of magnetic type) ตามลำดับซึ่งเราสามารถมองทางกายภาพได้ว่า  $\bar{G}_{ej}$  แสดงถึงสนามไฟฟ้าอันเกิดจากไดโพลไฟฟ้าจิวซึ่งวางอยู่ในทิศ  $\hat{x}_j$  และอยู่ที่ตำแหน่ง  $\bar{R} = \bar{R}'$  นั่นคือ

$$\bar{\bar{G}}_e = \bar{\bar{G}}_e(\bar{R}, \bar{R}') \quad (3.47ก)$$

$$\bar{\bar{G}}_m = \bar{\bar{G}}_m(\bar{R}, \bar{R}') \quad (3.47ข)$$

โดยที่  $\bar{R}$  คือตำแหน่งเวกเตอร์ของจุดสังเกตและ  $\bar{R}'$  คือตำแหน่งเวกเตอร์ของจุดกำเนิด ถ้าหากรู้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดจากไดโพลไฟฟ้าจิวที่ตั้งจากกันนั่นคือรู้  $\bar{\bar{G}}_e$  และ  $\bar{\bar{G}}_m$  เราสามารถที่จะ

หาสนามอื่นเนื่องจากการกระจายกระแสรูปแบบใด ๆ ได้ และในรูปที่ 3.1 แสดงความหมายทางกายภาพของเวกเตอร์ฟังก์ชันกรีนทั้งสาม  $\bar{G}_{e_j}$



รูปที่ 3.1 แสดงสนามไฟฟ้าอันเนื่องมาจากแหล่งกำเนิดไดโพลไฟฟ้าจุดสามตำแหน่งที่วางอยู่ที่  $\bar{R}'$  ในทิศทาง  $x, y$  และ  $z$

### 3.2.9 ชนิดของฟังก์ชันกรีนไดแอติก

เราสามารถจำแนกฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าซึ่งแบ่งตามเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับฟังก์ชันได้สองชนิด คือฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าชนิดที่หนึ่ง  $\bar{G}_{e1}$  โดยจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดิริคท์ (Dirichlet boundary condition) นั่นคือ

$$\hat{n} \times \bar{G}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (3.48)$$

และฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าชนิดที่สอง  $\bar{G}_{e2}$  จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์ (Neumann boundary condition) นั่นคือ

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{G}_{e2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (3.49)$$

จากสมการ (3.48) จะเห็นว่าส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอติกชนิดที่หนึ่งในแนวสัมผัสกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการ (3.49) ส่วนประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอติกชนิดที่สองในแนวตั้งฉากกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์

สำหรับฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบแม่เหล็กใช้เงื่อนไขขอบเขตดิริคท์ และเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์ แบ่งฟังก์ชันเป็นสองชนิดเช่นเดียวกับฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้า จะได้

$$\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m1}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (3.50)$$

และ

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (3.51)$$

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{\bar{G}}_e$  และ  $\bar{\bar{G}}_m$  ในสมการ (3.45ก) และ (3.45ข) เราจะได้ว่า

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{\bar{G}}_{m1}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (3.52)$$

และ

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (3.53)$$

สมการ (3.52) และ (3.53) ถือว่าเป็นความสัมพันธ์ที่สำคัญสำหรับใช้หา  $\bar{\bar{G}}_{m1}$  เมื่อทราบ  $\bar{\bar{G}}_{e2}$  และ  $\bar{\bar{G}}_{e1}$  เมื่อทราบ  $\bar{\bar{G}}_{m2}$

สำหรับกรณีโครงสร้างที่กระจัดกระจายคลื่น (Scattering body) ซึ่งมีบางส่วนที่เป็นตัวนำ อย่างเช่น โครงสร้างของทรงกระบอกตัวนำที่มีช่องเปิดซึ่งไม่มีแหล่งกำเนิดกระแสอยู่ภายนอกทรงกระบอก เราสามารถหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปมาตรฐานดังแสดงในสมการข้างล่าง

$$\bar{E}(\bar{R}) = -j\omega\mu_0 \iiint_V \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot \bar{J}(\bar{R}') dV' \quad (3.54ก)$$

$$\bar{E}(\bar{R}) = - \iint_{S_a} [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}, \bar{R}')] \cdot [\hat{n}' \times \bar{E}(\bar{R}')] dS' \quad (3.54ข)$$

$$\bar{H}(\bar{R}) = \iiint_V [\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}')] \cdot \bar{J}(\bar{R}') dV' \quad (3.54ค)$$

$$\bar{H}(\bar{R}) = j\omega\varepsilon_0 \iint_{S_a} \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot [\hat{n}' \times \bar{E}(\bar{R}')] dS' \quad (3.54ง)$$

โดยที่  $\bar{R}$  คือเวกเตอร์ตำแหน่งสำหรับสนาม และ  $\bar{R}'$  คือเวกเตอร์ตำแหน่งสำหรับแหล่งกำเนิด

### 3.2.10 ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ของตัวนำทรงกลม

ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์(Vector wave function) คือฟังก์ชันเจาะจง(Eigenfunction) หรือฟังก์ชันคุณลักษณะ (Characteristic function) ที่เป็นผลเฉลยของสมการคลื่นเวกเตอร์ชนิดเอกพันธ์ (Homogeneous vector wave equation)

$$\nabla \times \nabla \times \bar{F} - \kappa^2 \bar{F} = 0 \quad (3.55)$$

สมการ (3.55) เป็นสมการคลื่นเวกเตอร์เอกพันธ์โดยที่  $\kappa$  เป็นค่าใดๆ เราจะได้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในระบบคาร์ทีเซียนดังต่อไปนี้

$$\bar{F} = \nabla \times (\psi_1 \hat{c}) \quad (3.56)$$

โดยที่  $\psi_1$  คือ ฟังก์ชันเจาะจงซึ่งสอดคล้องกับสมการคลื่นสเกลาร์

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0 \quad (3.57)$$

และ  $\hat{c}$  เป็นค่าคงที่เวกเตอร์ (Constant vector) ได้แก่  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  หรือ  $\hat{z}$  เพื่อความสะดวกเราจะเรียก  $\hat{c}$  ว่าเวกเตอร์นำร่อง (Piloting vector) และ  $\psi$  ว่าฟังก์ชันกำเนิด (Generating function) หาก  $\psi_1$  เป็นผลเฉลยสำหรับสมการ (3.57) จะได้ (3.56) เป็นผลเฉลยของสมการ (3.55) ด้วยเช่นกัน ซึ่งเราจะกำหนดให้  $\bar{M}$  เป็นฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ นั่นคือ

$$\bar{M}_1 = \nabla \times (\psi_1 \hat{c}) \quad (3.58)$$

ส่วนฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์อีกชุดหนึ่งซึ่งแทนด้วย  $\bar{N}$  จะได้ว่า

$$\bar{N}_2 = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times (\psi_2 \hat{c}) \quad (3.59)$$

โดยที่  $\psi_2$  คือฟังก์ชันเจาะจงที่สอดคล้องกับสมการ (3.57) และ  $\bar{N}_2$  คือผลเฉลยสำหรับสมการ (3.55) ในกรณีที่ใช้ ฟังก์ชันกำเนิด  $\psi$  เหมือนกันทั้ง  $\bar{M}$  และ  $\bar{N}$  เราจะได้ความสัมพันธ์ที่สมมาตรกันระหว่างฟังก์ชันทั้งสองชนิดคือ

$$\bar{N} = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \bar{M} \quad (3.60)$$

$$\bar{M} = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \bar{N} \quad (3.61)$$

### 3.3 ฟังก์ชันกรีนชนิดไดโอดิกในช่องว่างอิสระของโครงสร้างตัวนำทรงกลม

เมื่อพิจารณาปัญหาของการแพร่กระจายคลื่นของตัวนำทรงกลมที่มีขนาดใดๆ และเป็นโครงสร้างที่กระจัดกระจายคลื่น [21]-[22] โดยวิธีการแยกตัวแปรและพิจารณาในระบบพิกัดทรงกลม เราจะได้ฟังก์ชันกำเนิดสำหรับตัวนำทรงกลมดังนี้

$$\psi_{e, mn}(\kappa) = j_n(\kappa r) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\phi}{\sin} \quad (3.62)$$

โดยที่  $j_n(\kappa r)$  คือฟังก์ชันเบสเซลทรงกลม (Spherical Bessel Function) ลำดับที่  $n$  ซึ่งแสดงได้ดังรูปสมการอนุพันธ์

$$\frac{d^2}{d(\kappa r)^2} [\kappa r j_n(\kappa r)] + \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{(\kappa r)^2} \right] \kappa r j_n(\kappa r) = 0 \quad (3.63)$$

และมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเบสเซลของทรงกระบอก (Cylindrical Bessel Function) ดังสมการ

$$j_n(\kappa r) = \left( \frac{\pi}{2\kappa r} \right)^{\frac{1}{2}} J_{n+1/2}(\kappa r) \quad (3.64)$$

ฟังก์ชัน  $P_n^m(\cos \theta)$  คือฟังก์ชันเลอจองด์ (Associated Legendre Functions) ลำดับ  $(n, m)$  ซึ่งมีรูปแบบดังสมการ

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0 \quad (3.65)$$

จากสมการฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์สำหรับทรงกลมซึ่งได้จากการแก้สมการ (3.55) นิยามได้คือ

$$\bar{M}_{e_{mn}}(\kappa) = \nabla \times (\psi_{e_{mn}} \bar{R}) \quad (3.66)$$

$$\bar{N}_{e_{mn}}(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times (\psi_{e_{mn}} \bar{R}) \quad (3.67)$$

เมื่อทำการแก้สมการ (3.66) และ (3.67) โดยพิจารณาคลื่นเดินทางในแนวรัศมีจะได้

$$\bar{M}_{e_{mn}}(\kappa) = \mp \frac{m}{\sin \theta} j_n(\kappa r) P_n^m(\cos \theta) \frac{\sin m\phi \hat{\theta} - j_n(\kappa r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\phi \hat{\phi}}{\sin \theta}}{\cos m\phi \hat{\theta} - j_n(\kappa r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\phi \hat{\phi}}{\sin \theta}} \quad (3.68)$$

$$\bar{N}_{e_{mn}}(\kappa) = \frac{n(n+1)}{\kappa r} j_n(\kappa r) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\phi \hat{r}}{\sin m\phi \hat{r}} + \frac{1}{\kappa r} \frac{\partial}{\partial r} [r j_n(\kappa r)] \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\phi \hat{\theta}}{\sin m\phi \hat{\theta}} \mp \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{\sin m\phi \hat{\phi}}{\cos m\phi \hat{\phi}} \right] \quad (3.69)$$

### 3.3.1 การกระจายฟังก์ชันเจาะจงของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในช่องว่างอิสระ

สำหรับฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในช่องว่างอิสระของตัวนำทรงกลมจะมีวิธีการคล้ายกับการหาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในท่อนำคลื่น โดยก่อนอื่นเราจะหาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กในช่องว่างอิสระซึ่งสอดคล้องกับสมการดังต่อไปนี้

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_{m0}(\bar{R}, \bar{R}') - k^2 \bar{G}_{m0}(\bar{R}, \bar{R}') = \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] \quad (3.70)$$

จากวิธีการ Ohm-Rayleigh เราจะต้องหาฟังก์ชันเจาะจงสำหรับแหล่งกำเนิด  $\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')]$  โดยใช้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์โซลินอยด์ (Solenoidal vector wave function) ซึ่งจะได้ฟังก์ชันที่เหมาะสมคือ  $\bar{M}_{e_{mn}}(\kappa)$  และ  $\bar{N}_{e_{mn}}(\kappa)$  เนื่องจากเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตดิริคท์ เราจะได้

$$\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] = \int_0^\infty d\kappa \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty [\bar{N}_{e_{mn}}(\kappa) \bar{A}_{e_{mn}}(\kappa) + \bar{M}_{e_{mn}}(\kappa) \bar{B}_{e_{mn}}(\kappa)] \quad (3.71)$$

โดยที่  $m, n$  เป็นจำนวนเต็มบวกหลังจากนั้นหาสัมประสิทธิ์เวกเตอร์ (Vector coefficient) ซึ่งทำได้โดยการอินทิเกรตตลอดปริมาตรในสมการ (3.71) หลังจากที่ถูกคูณเชิงสเกลาร์ข้างหน้า (Anterior scalar product) ด้วย  $\bar{M}'_{o'm'n'}(\kappa')$  และ  $\bar{N}'_{o'm'n'}(\kappa')$  แสดงดังสมการ (3.72)

$$\iiint_V \bar{N}'_{o'm'n'}(\kappa') \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] dV = \iiint_V \int_0^\infty d\kappa \bar{N}'_{o'mn}(\kappa) \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty [\bar{N}'_{o'mn}(\kappa) \bar{A}'_{o'mn}(\kappa) + \bar{M}'_{o'mn}(\kappa) \bar{B}'_{o'mn}(\kappa)] dV \quad (3.72)$$

จากความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\iiint_V \bar{N}'_{o'm'n'}(\kappa') \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] dV = \nabla' \times \bar{N}'_{o'm'n'}(\kappa') \quad (3.73)$$

และอาศัยคุณสมบัติความสัมพันธ์ออร์โธโกนัล (Orthogonal relation) ของฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์สำหรับทรงกลม ซึ่งดูรายละเอียดได้ใน [16] จะได้

$$\begin{aligned} \nabla' \times \bar{N}'_{o'm'n'}(\kappa') &= \iiint_V \int_0^\infty \bar{N}'_{o'm'n'}(\kappa') \bar{N}'_{o'mn}(\kappa) \bar{A}'_{o'mn}(\kappa) d\kappa dV \\ &= \int_0^\infty \frac{(1 + \delta_0) \pi^2 n(n+1)(n+m)!}{\kappa^2 (2n+1)(n-m)!} \delta(\kappa - \kappa') \bar{A}'_{o'mn}(\kappa) d\kappa \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\text{จาก } \int_0^\infty \delta(\kappa - \kappa') d\kappa = 1 \quad \text{และ} \quad \delta_0 = \begin{cases} 1, m=0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}$$

จากสมการ (3.74) จะได้สัมประสิทธิ์เวกเตอร์  $\bar{A}'_{o'mn}(\kappa)$  ดังสมการ

$$\begin{aligned} \bar{A}'_{o'mn}(\kappa) &= \frac{C_{mn}}{2\pi^2} \kappa^2 \nabla' \times \bar{N}'_{o'mn}(\kappa) \\ &= \frac{C_{mn}}{2\pi^2} \kappa^3 \bar{M}'_{o'mn}(\kappa) \end{aligned} \quad (3.75)$$

และด้วยวิธีเดียวกันนี้จะได้สัมประสิทธิ์เวกเตอร์  $\bar{B}_{e_{mn}}(\kappa)$  ดังสมการ

$$\begin{aligned}\bar{B}_{e_{mn}}(\kappa) &= \frac{C_{mn}}{2\pi^2} \kappa^2 \nabla' \times \bar{M}'_{e_{mn}}(\kappa) \\ &= \frac{C_{mn}}{2\pi^2} \kappa^3 \bar{N}'_{e_{mn}}(\kappa)\end{aligned}\quad (3.76)$$

โดยที่  $C_{mn} = (2 - \delta_0) \frac{2n+1(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!}$

เครื่องหมายไพรม์ (') ของฟังก์ชัน  $\bar{M}'$  และ  $\bar{N}'$  จะนิยามใน  $(r', \theta', \phi')$  ซึ่งแสดงถึงเวกเตอร์ของแหล่งกำเนิด  $\bar{R}'$  ดังนั้นเราจะได้การแผ่ขยายฟังก์ชันเจาะจงที่ต่อเนื่องของ  $\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')]$  ดังนี้

$$\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\kappa \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty C_{mn} \kappa^3 [\bar{N}'_{e_{mn}}(\kappa) \bar{M}'_{e_{mn}}(\kappa) + \bar{M}'_{e_{mn}}(\kappa) \bar{N}'_{e_{mn}}(\kappa)] \quad (3.77)$$

จากสมการ (3.70) และ (3.77) จะได้  $\bar{G}_{m0}(\bar{R}, \bar{R}')$  คือ

$$\bar{G}_{m0}(\bar{R}, \bar{R}') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\kappa \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{C_{mn} \kappa^3}{\kappa^2 - k^2} [\bar{N}'_{e_{mn}}(\kappa) \bar{M}'_{e_{mn}}(\kappa) + \bar{M}'_{e_{mn}}(\kappa) \bar{N}'_{e_{mn}}(\kappa)] \quad (3.78)$$

ด้วยโครงสร้างที่เราพิจารณาเป็นทรงกลมดังนั้นเราจะแทน

$$\bar{N}'_{e_{mn}}(\kappa) \bar{M}'_{e_{mn}}(\kappa) = \bar{T}'_{e_{mn}} [j_n(\kappa r) j_n(\kappa r')] \quad (3.79)$$

โดยที่  $\bar{T}'$  คือ Dyadic Spatial Generator เพื่อความสะดวกในที่นี้จะแทนตัวแปรด้วยสัญลักษณ์ใหม่  $\bar{N}'_{e_{mn}}(\kappa) = \bar{N}(\kappa)$ ,  $\bar{M}'_{e_{mn}}(\kappa) = \bar{M}(\kappa)$  และ  $\bar{T}'_{e_{mn}}(\kappa) = \bar{T}(\kappa)$  จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{\kappa^3}{\kappa^2 - k^2} \bar{N}(\kappa) \bar{M}(\kappa) d\kappa = \int_0^\infty \frac{\kappa^3}{\kappa^2 - k^2} \bar{T} [j_n(\kappa r) j_n(\kappa r')] d\kappa \quad (3.80)$$

$$\int_0^\infty \frac{\kappa^3}{\kappa^2 - k^2} \bar{T} [j_n(\kappa r) j_n(\kappa r')] = \frac{-j\pi k^2}{2} \begin{cases} \bar{N}^{(2)}(k) \bar{M}'(k), & r > r' \\ \bar{N}(k) \bar{M}'^{(2)}(k), & r < r' \end{cases} \quad (3.81)$$

โดยที่ฟังก์ชัน  $\bar{N}^{(2)}(k)$  และ  $\bar{M}'^{(2)}(k)$  จะบ่งบอกว่าฟังก์ชันนี้จะถูกนิยามตามฟังก์ชันแองเกิลของทรงกลมชนิดที่สอง ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\bar{N}^{(2)}(k) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \left[ h_n^{(2)}(\kappa r) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\phi}{\sin} \hat{r} \right] \quad (3.82)$$

$$\bar{M}'^{(2)}(k) = \nabla' \times \left[ h_n^{(2)}(\kappa r') P_n^m(\cos \theta') \frac{\cos m\phi'}{\sin} \hat{r}' \right] \quad (3.83)$$

ท้ายสุดเมื่อแทนสมการ (3.81) ลงใน (3.78) จะได้

$$\bar{G}_{m0}^\pm(\bar{R}, \bar{R}') = \frac{-jk^2}{4\pi} \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty C_{mn} \begin{cases} \bar{N}^{(2)}(k) \bar{M}'(k) + \bar{M}^{(2)}(k) \bar{N}'(k), & r > r' \\ \bar{N}(k) \bar{M}'^{(2)}(k) + \bar{M}(k) \bar{N}'^{(2)}(k), & r < r' \end{cases} \quad (3.84)$$

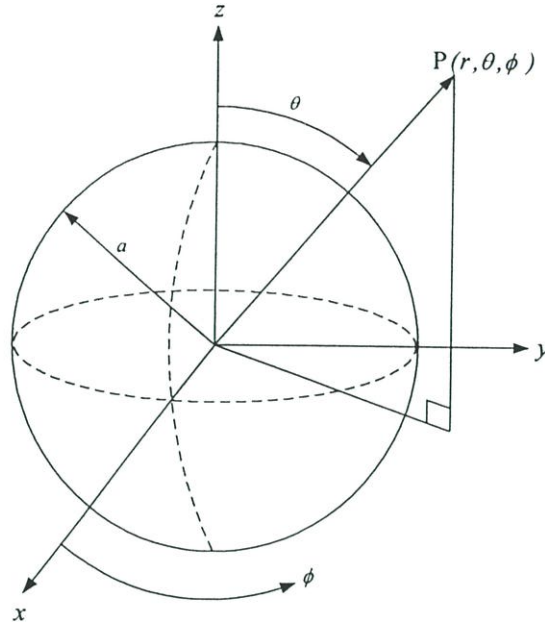
เราสามารถหาฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าในช่องว่างอิสระ  $\bar{G}_{e0}$  จาก  $\bar{G}_{m0}$  ซึ่งจากสมการ (3.84) โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการ (3.70) และที่  $r = r'$  ฟังก์ชัน  $\bar{G}_{m0}$  จะไม่มีความต่อเนื่องดังนั้นเราจะแสดง  $\bar{G}_{e0}$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{G}_{e0}(\bar{R}, \bar{R}') &= \frac{-1}{k^2} \hat{r} \hat{r}' \delta(\bar{R} - \bar{R}') \\ &+ \frac{-jk}{4\pi} \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty C_{mn} \begin{cases} \bar{M}^{(2)}(k) \bar{M}'(k) + \bar{N}^{(2)}(k) \bar{N}'(k), & r > r' \\ \bar{M}(k) \bar{M}'^{(2)}(k) + \bar{N}(k) \bar{N}'^{(2)}(k), & r < r' \end{cases} \end{aligned} \quad (3.85)$$

จากสมการทฤษฎีดังกล่าวข้างต้นเราสามารถแตกองค์ประกอบของไดโอดิกได้ทั้งหมด 9 องค์ประกอบด้วยกันคือ  $G_{e0}^{rr}$   $G_{e0}^{r\theta}$   $G_{e0}^{r\phi}$   $G_{e0}^{\theta r}$   $G_{e0}^{\theta\theta}$   $G_{e0}^{\theta\phi}$   $G_{e0}^{\phi r}$   $G_{e0}^{\phi\theta}$   $G_{e0}^{\phi\phi}$  โดยความหมายของไดโอดิกขององค์ประกอบต่าง ๆ คือ  $G_{e0}^{rr}$  จะแสดงฟังก์ชันกรีนไดโอดิกในทิศทาง  $r$  ที่สังเกตที่ตำแหน่ง  $(r, \theta, \phi)$  เกิดจากแหล่งกำเนิดที่อยู่ในทิศทางของ  $r$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $(r', \theta', \phi')$

### 3.3.2 ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกสำหรับตัวนำทรงกลม

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าชนิดที่หนึ่งสำหรับตัวนำทรงกลมที่มีรัศมีของตัวนำเท่ากับ  $a$  แสดงดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 โครงสร้างตัวนำทรงกลม

จากวิธีการทับซ้อนกระจายเรากำหนดให้

$$\bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{\bar{G}}_{e0}(\bar{R}, \bar{R}') + \bar{\bar{G}}_{1s}(\bar{R}, \bar{R}') \quad (3.86)$$

โดยที่  $\bar{\bar{G}}_{e0}(\bar{R}, \bar{R}')$  คือฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าในช่องว่างอิสระ และ  $\bar{\bar{G}}_{1s}(\bar{R}, \bar{R}')$  คือฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าของสนามที่ถูกกระจายซึ่งแสดงได้ดังสมการ

$$\bar{\bar{G}}_{e0}(\bar{R}, \bar{R}') = \frac{-jk}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} [\bar{M}^{(2)}(k) \bar{M}'(k) + \bar{N}^{(2)}(k) \bar{N}'(k)] \quad (3.87)$$

$$\bar{\bar{G}}_{1s}(\bar{R}, \bar{R}') = \frac{-jk}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} [a_n \bar{M}^{(2)}(k) \bar{M}'^{(2)}(k) + b_n \bar{N}^{(2)}(k) \bar{N}'^{(2)}(k)] \quad (3.88)$$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันสนามจะคิดในเงื่อนไขสนามที่กระจายพุ่งออกจากตัวนำ ( $r > r'$ ) คือ  $\bar{M}^{(2)}(k)$  และ  $\bar{N}^{(2)}(k)$  ของฟังก์ชันแหล่งกำเนิดจะกำหนดตาม  $\bar{G}_{e_0}$  และที่รัศมี  $r = a$  ฟังก์ชันไดโอดิก  $\bar{G}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}')$  จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดิริคเลย์  $\hat{n} \times \bar{G}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}') = 0$  ซึ่งจะเป็นจริงได้ในกรณีเดียวกันเท่านั้น ถ้าฟังก์ชันแหล่งกำเนิดเหมือนกับกรณีของ  $\bar{G}_{e_0}$  เมื่อ ( $r < r'$ ) ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันแหล่งกำเนิดหรือฟังก์ชันกระตุ้น คือ  $\bar{M}'^{(2)}(k)$  และ  $\bar{N}'^{(2)}(k)$  ซึ่งจากสมการ (3.88) จะมีสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าสองตัวนั้นคือ  $a_n$  และ  $b_n$  โดยพิจารณาที่รัศมี  $r = a$

$$\hat{r} \times [\bar{M}(k) + a_n \bar{M}'^{(2)}(k)] = 0 \quad (3.89)$$

และ

$$\hat{r} \times [\bar{N}(k) + b_n \bar{N}'^{(2)}(k)] = 0 \quad (3.90)$$

จากสมการ (3.89) และ (3.90) เราจะได้ค่า  $a_n$  และ  $b_n$  ดังนี้

$$a_n = -\frac{[j_n(x)]}{[h_n^{(2)}(x)]}, \quad x = ka \quad (3.91)$$

$$b_n = -\frac{(d/dx)[xj_n(x)]}{(d/dx)[xh_n^{(2)}(x)]}, \quad x = ka \quad (3.92)$$

### 3.3.3 การหาสนามไฟฟ้าของช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม

เราสามารถหาสนามไฟฟ้าที่แพร่กระจายออกจากช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลมได้จากสมการของสนามไฟฟ้างดังนี้

$$\bar{E}(\bar{R}) = - \iint_{S_A} [\nabla \times \bar{G}_{e_2}(\bar{R}, \bar{R}')] \cdot [\hat{n} \times \bar{E}(\bar{R}')] dS' \quad (3.93)$$

หรือ

$$\bar{E}(\bar{R}) = \iint_{S_A} \bar{G}_{m_1}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot \bar{M}(\bar{R}') dS' \quad (3.94)$$

โดยที่  $\hat{n}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากพุ่งออกจากผิวตัวนำทรงกลมและ  $\bar{M}(\bar{R}')$  คือการกระจายกระแสแม่เหล็กตลอดบริเวณช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม จากฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าชนิด

ที่หนึ่งของตัวนำทรงกลม  $\bar{G}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}')$  โดยใช้คุณสมบัติของการสมมาตรระหว่าง  $\bar{G}_{e_1}(\bar{R}, \bar{R}')$  และ  $\bar{G}_{e_2}(\bar{R}, \bar{R}')$  สามารถหาฟังก์ชัน  $\bar{G}_{e_2}(\bar{R}, \bar{R}')$  ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \bar{G}_{e_2}(\bar{R}, \bar{R}') &= \frac{-jk}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \left[ \bar{N}^{(2)}(k) \bar{N}'(k) + \bar{M}^{(2)}(k) \bar{M}'(k) \right. \\ &\quad \left. + a_n \bar{N}^{(2)}(k) \bar{N}'^{(2)}(k) + b_n \bar{M}^{(2)}(k) \bar{M}'^{(2)}(k) \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

จากความสัมพันธ์  $\nabla \times \bar{G}_{e_2} = \bar{G}_{m_1}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \bar{G}_{m_1}(\bar{R}, \bar{R}') &= \frac{-jk^2}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \left[ \bar{M}^{(2)}(k) \bar{N}'(k) + \bar{N}^{(2)}(k) \bar{M}'(k) \right. \\ &\quad \left. + a_n \bar{M}^{(2)}(k) \bar{N}'^{(2)}(k) + b_n \bar{N}^{(2)}(k) \bar{M}'^{(2)}(k) \right] \end{aligned} \quad (3.96)$$

และเมื่อพิจารณากรณีที่เป็นสนามระยะไกลที่มีแหล่งกำเนิดเป็นช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลมเรา จะสมมติให้  $kr$  มีค่ามาก ๆ ดังนั้นเราจะประมาณฟังก์ชันแองเกิลชนิดที่สองของทรงกลมได้เป็น

$$h_n^{(2)}(kr) \approx \frac{j^{n+1}}{kr} e^{-jkr} \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial(kr)} [kr h_n^{(2)}(kr)] \approx j^{n+1} \left[ \frac{(n+1)}{kr} - j \right] e^{-jkr} \quad (3.98)$$

จากนั้นแทนลงในฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ใน  $\bar{M}^{(2)}(k)$  และ  $\bar{N}^{(2)}(k)$  จะได้

$$\bar{M}^{(2)}(k) = -\frac{e^{-jkr}}{kr} j^{n+1} \left( \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\sin m\phi \hat{\theta}}{\cos} - \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\cos m\phi \hat{\phi}}{\sin} \right) \quad (3.99)$$

$$\bar{N}^{(2)}(k) = \frac{e^{-jkr}}{kr} j^{n+1} \left[ \frac{(n+1)}{kr} - j \right] \left( \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\cos m\phi \hat{\theta}}{\sin} \mp \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\sin m\phi \hat{\phi}}{\cos} \right) \quad (3.100)$$

แทนสมการ (3.99) และ (3.100) ลงใน (3.96) ทำให้เขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{G}_{m1}(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = & -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) \\ & \left\{ j(\bar{N}'(k) + a_n \bar{N}'^{(2)}(k)) \left( \mp \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\sin m\phi \hat{\theta}}{\cos} - \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\cos m\phi \hat{\phi}}{\sin} \right) \right. \\ & \left. + (\bar{M}'(k) + b_n \bar{M}'^{(2)}(k)) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\cos m\phi \hat{\theta}}{\sin} \mp \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \frac{\sin m\phi \hat{\phi}}{\cos} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.101)$$

เมื่อฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์คือ

$$\begin{aligned} \bar{M}'(k) &= \left[ \mp \frac{m}{\sin \theta'} j_n(kr') P_n^m \cos(\theta') \frac{\sin m\phi' \hat{\theta}}{\cos} - j_n(kr') \frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\cos m\phi' \hat{\phi}}{\sin} \right] \\ \bar{M}'^{(2)}(k) &= \left[ \mp \frac{m}{\sin \theta'} h_n^{(2)}(kr') P_n^m \cos(\theta') \frac{\sin m\phi' \hat{\theta}}{\cos} - h_n^{(2)}(kr') \frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\cos m\phi' \hat{\phi}}{\sin} \right] \\ \bar{N}'(k) &= \left[ \frac{n(n+1)}{kr'} j_n(kr') P_n^m \cos(\theta') \frac{\cos m\phi' \hat{r}}{\sin} + \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial (kr')} [kr' j_n(kr')] \right] \\ & \quad \times \left( \frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\cos m\phi' \hat{\theta}}{\sin} \mp \frac{m}{\sin \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\sin m\phi' \hat{\phi}}{\cos} \right) \\ \bar{N}'^{(2)}(k) &= \left[ \frac{n(n+1)}{kr'} h_n^{(2)}(kr') P_n^m \cos(\theta') \frac{\cos m\phi' \hat{r}}{\sin} + \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial (kr')} [kr' h_n^{(2)}(kr')] \right] \\ & \quad \times \left( \frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\cos m\phi' \hat{\theta}}{\sin} \mp \frac{m}{\sin \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\sin m\phi' \hat{\phi}}{\cos} \right) \end{aligned} \quad (3.102)$$

และสัมประสิทธิ์สเกลาร์คือ

$$a_n = -\frac{[j_n(ka)]}{[h_n^{(2)}(ka)]} \quad (3.103n)$$

$$b_n = -\frac{(d/dx)[xj_n(x)]}{(d/dx)[xh_n^{(2)}(x)]}, \quad x = ka \quad (3.103n)$$

$$C_{mn} = (2 - \delta_0) \frac{2n+1(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!} \quad (3.103ค)$$

จากสมการ (3.101) สามารถแยกองค์ประกอบของไดแอดิกได้ดังนี้

$$G_{m1}^{\theta r} = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) [\cos m\phi \sin m\phi' - \sin m\phi \cos m\phi'] \quad (3.104)$$

$$\left( (j) \frac{m}{\sin \theta} \frac{n(n+1)}{kr'} P_n^m \cos(\theta') P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + a_n h_n^{(2)}(kr')] \right)$$

$$G_{m1}^{\phi r} = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) [\cos m\phi \cos m\phi' + \sin m\phi \sin m\phi'] \quad (3.105)$$

$$\left( -(j) \frac{n(n+1)}{kr'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + a_n h_n^{(2)}(kr')] \right)$$

$$G_{m1}^{\theta\theta} = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) [\cos m\phi \sin m\phi' - \sin m\phi \cos m\phi'] \quad (3.106)$$

$$\left\{ -\frac{m}{\sin \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \right.$$

$$+ (j) \frac{m}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' j_n(kr')] \right.$$

$$\left. \left. + a_n \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' h_n^{(2)}(kr')] \right] \right\}$$

$$G_{m1}^{\phi\phi} = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) [\cos m\phi \cos m\phi' + \sin m\phi \sin m\phi'] \quad (3.107)$$

$$\left\{ \frac{m}{\sin \theta'} \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta') P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \right.$$

$$- (j) \frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' j_n(kr')] \right.$$

$$\left. \left. + a_n \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' h_n^{(2)}(kr')] \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
G_{m1}^{\theta\phi} = & -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) [\cos m\phi \cos m\phi' + \sin m\phi \sin m\phi'] \\
& \left\{ -\frac{\partial}{\partial\theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \right. \\
& + (j) \frac{m}{\sin\theta'} \frac{m}{\sin\theta} P_n^m \cos(\theta') P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' j_n(kr')] \right. \\
& \left. \left. + a_n \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' h_n^{(2)}(kr')] \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
G_{m1}^{\phi\phi} = & -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) [\cos m\phi \sin m\phi' - \sin m\phi \cos m\phi'] \\
& \left\{ -\frac{m}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta'} P_n^m \cos(\theta') P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \right. \\
& + (j) \frac{m}{\sin\theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' j_n(kr')] \right. \\
& \left. \left. + a_n \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' h_n^{(2)}(kr')] \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.109}$$

การใช้สัญลักษณ์ของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบต่าง ๆ เมื่อเทียบกับตำราบางเล่มซึ่งนิยามไว้เพื่อสื่อความหมายว่าเป็นฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดใด เกิดจากแหล่งกำเนิดแบบใด ได้ดังนี้

$$\bar{\bar{G}}_{e1} = \bar{\bar{G}}_{EJ}$$

$$\bar{\bar{G}}_{m1} = \bar{\bar{G}}_{EM}$$

$$\bar{\bar{G}}_{e2} = \bar{\bar{G}}_{HM}$$

$$\bar{\bar{G}}_{m2} = \bar{\bar{G}}_{HJ}$$

เมื่อ

$\bar{\bar{G}}_{EJ}$  คือ ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า

$\bar{\bar{G}}_{EM}$  คือ ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก

$\bar{\bar{G}}_{HM}$  คือ ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบแม่เหล็กที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก

$\bar{\bar{G}}_{HJ}$  คือ ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบแม่เหล็กที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า

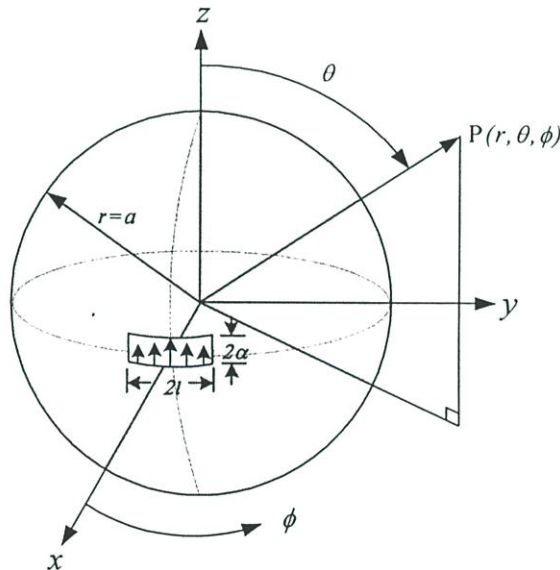
### 3.4 สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของสายอากาศแบบร่องบนผิวตัวนำทรงกลม

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็ก จะมีความสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าของแหล่งกำเนิดดังสมการ (3.110)

$$\vec{M}(\vec{R}') = -\hat{n} \times \vec{E}(\vec{R}') \quad (3.110)$$

โดยที่  $\hat{n}$  คือเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวของปัญหาและ  $\vec{E}(\vec{R}')$  คือการกระจายแรงดันที่บริเวณปากร่องของตัวนำทรงกลมโดยจะสมมติให้มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ในรูปฟังก์ชันลักษณะไซน์

#### 3.4.1 ร่องเดี่ยวที่วางตามแนวอนบนผิวตัวนำทรงกลม



รูปที่ 3.3 โครงสร้างของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวอนบนผิวตัวนำทรงกลม

สายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางตามแนวอนบนผิวตัวนำทรงกลม โดยที่นี้พิจารณาให้ความกว้างของร่องเดี่ยวมีขนาดแคบมาก ( $2\alpha \rightarrow 0$ ) และความยาวของร่อง  $2l = 0.5\lambda$  และที่ตั้งของร่องวางอยู่ที่ตำแหน่ง ( $r = a, \theta = \pi/2, \phi = 0$ ) ดังนั้นการหาสนามระยะไกลโดยใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิกทำได้โดยการหาความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กซึ่งสัมพันธ์กับสมการ(2.65) และจากคุณสมบัติของ(3.110) จะได้ความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กดังสมการ

$$\bar{M}(\bar{R}') = -V \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (l - a\phi') \right], \quad \begin{cases} -l/a < \phi' < l/a \\ \theta_1 - \alpha < \theta' < \theta_1 + \alpha \end{cases} \quad (3.111)$$

นำสมการ (3.111) แทนลงใน (3.94) และลดรูปสมการจะได้

$$\bar{E}(\bar{R}) = \iint_{S_A} \left\{ G_{EM}^{\theta\phi}(\bar{R}, \bar{R}') \hat{\theta} \hat{\phi} + G_{EM}^{\phi\phi}(\bar{R}, \bar{R}') \hat{\phi} \hat{\phi} \right\} \cdot M(\bar{R}') \hat{\phi} dS' \quad (3.112)$$

โดยที่

$$dS' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

ดังนั้นสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวเส้นรอบวงบนผิวตัวนำทรงกลมขององค์ประกอบต่าง ๆ จะได้

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \int_{-l/a}^{l/a} \int_{\theta_1 - \alpha}^{\theta_1 + \alpha} G_{EM}^{\theta\phi}(\bar{R}, \bar{R}') \hat{\theta} \hat{\phi} \cdot M(\bar{R}') \hat{\phi} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (3.113\text{ก})$$

โดยที่

$$\begin{aligned} G_{EM}^{\theta\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = & -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k(j^{n+1}) [\cos m\phi \cos m\phi' + \sin m\phi \sin m\phi'] \\ & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \right. \\ & + (j) \frac{m}{\sin \theta'} \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta') P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial (kr')} [kr' j_n(kr')] \right. \\ & \left. \left. + a_n \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial (kr')} [kr' h_n^{(2)}(kr')] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.113\text{ข})$$

เมื่อพิจารณาแหล่งกำเนิดที่  $r' = a$

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k a^2 (j^{n+1}) \cos m\phi \int_{-l/a}^{l/a} V \sin \frac{2\pi}{\lambda} (l - a\phi') \cos m\phi' d\phi'$$

$$\left\{ \begin{aligned} & + (j) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kaj_n(ka)] + a_n \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)] \right] \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' - \frac{d}{d\theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(ka) + b_n h_n^{(2)}(ka)] \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{aligned} \right.$$

(3.113ค)

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=m}^{\infty} V_m (2 - \delta_0) \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} k a^2 (j^{n+1}) \cos m\phi$$

$$\left\{ \begin{aligned} & + (j) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kaj_n(ka)] + a_n \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)] \right] \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' - \frac{d}{d\theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{aligned} \right.$$

(3.113ง)

องค์ประกอบของ  $\bar{E}_\phi(r, \theta, \phi)$  จะได้

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = \int_{-l/a}^{l/a} \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} G_{EM}^{\phi\phi}(\bar{R}, \bar{R}') \hat{\phi} \hat{\phi}' \cdot M(\bar{R}') \hat{\phi} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

(3.114น)

โดยที่

$$G_{EM}^{\phi\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} k (j^{n+1}) [\cos m\phi \sin m\phi' - \sin m\phi \cos m\phi']$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - \frac{m}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta'} P_n^m \cos(\theta') P_n^m \cos(\theta) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \\ & + (j) \frac{m}{\sin \theta'} P_n^m \cos(\theta') \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' j_n(kr')] \right. \\ & \left. + a_n \frac{1}{kr'} \frac{\partial}{\partial(kr')} [kr' h_n^{(2)}(kr')] \right] \end{aligned} \right\}$$

(3.114ด)

$$\begin{aligned}
 E_\phi(r, \theta, \phi) = & -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} ka^2 (j^{n+1}) \sin m\phi \int_{-l/a}^{l/a} V \sin \frac{2\pi}{\lambda} (l - a\phi') \cos m\phi' d\phi' \\
 & \left[ + (j) \frac{d}{d\theta} P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kaj_n(ka)] + a_n \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)] \right] \right. \\
 & \times \int_{\theta_1 - \alpha}^{\theta_1 + \alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' - \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(ka) + b_n h_n^{(2)}(ka)] \\
 & \left. \times \int_{\theta_1 - \alpha}^{\theta_1 + \alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \right]
 \end{aligned} \tag{3.114ค}$$

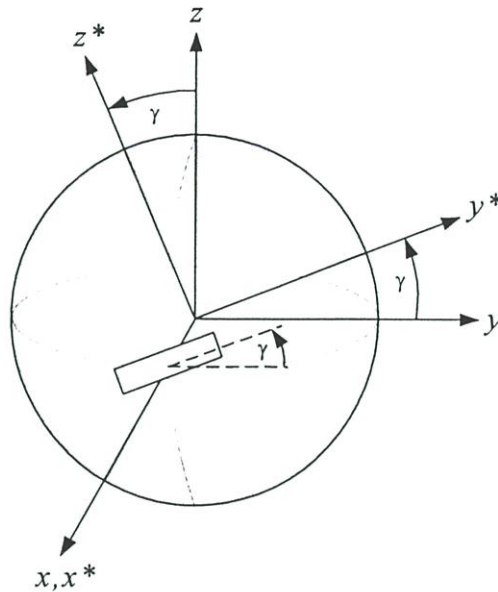
$$\begin{aligned}
 E_\phi(r, \theta, \phi) = & -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=m}^{\infty} V_m (2 - \delta_0) \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} ka^2 (j^{n+1}) \sin m\phi \\
 & \left[ + (j) \frac{d}{d\theta} P_n^m \cos(\theta) \left[ \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kaj_n(ka)] + a_n \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)] \right] \right. \\
 & \times \int_{\theta_1 - \alpha}^{\theta_1 + \alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' - \frac{m}{\sin \theta} P_n^m \cos(\theta) [j_n(ka) + b_n h_n^{(2)}(ka)] \\
 & \left. \times \int_{\theta_1 - \alpha}^{\theta_1 + \alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \right]
 \end{aligned} \tag{3.114ง}$$

จากสมการ (3.113ง) และ (3.114ง) กำหนดให้

$$V_m = V \int_{-l/a}^{l/a} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (l - a\phi') \cos m\phi' d\phi' \tag{3.115ก}$$

$$V_m = \begin{cases} V \frac{1}{ka} (1 - \cos kl) & m = 0 \\ 2V \frac{ka}{(ka)^2 - m^2} \left( \cos\left(\frac{ml}{a}\right) - \cos kl \right) & m \neq 0, m \neq ka \\ V \frac{l}{a} \sin kl & m = ka \end{cases} \tag{3.115ข}$$

### 3.4.2 ร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนผิวตัวนำทรงกลม



รูปที่ 3.4 โครงสร้างของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงบนผิวตัวนำทรงกลม

กรณีนี้จะพิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงใด ๆ บนโครงสร้างตัวนำทรงกลม ซึ่งจะนำสมการของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวอนบนผิวตัวนำทรงกลมมาประยุกต์ใช้ ซึ่งจากรูปที่ 3.4 พิจารณาสายอากาศหมุนรอบแกน  $x$  เป็นมุม  $\gamma$  โดยใช้ทฤษฎีของการหมุนแกนและการแปลงระบบพิกัด [ 14] ซึ่งรายละเอียดได้แสดงไว้ในหัวข้อที่ 2.3.2 ดังนั้นเมื่อหมุนสายอากาศรอบแกน  $x$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^* \\ \hat{y}^* \\ \hat{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

เพื่อที่จะหาฟังก์ชันในระบบพิกัดทรงกลมทำการแปลง  $(x^*, y^*, z^*)$  ให้อยู่ในพจน์  $(r^*, \theta^*, \phi^*)$  เขียนได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} r^* \sin \theta^* \cos \phi^* \\ r^* \sin \theta^* \sin \phi^* \\ r^* \cos \theta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

เมื่อแก้สมการ (3.117) จะได้

$$\begin{aligned}\cos \phi^* &= \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \theta^*}, & \sin \phi^* &= \frac{\sin \theta \sin \phi \cos \gamma + \cos \theta \sin \gamma}{\sin \theta^*} \\ \cos \theta^* &= -\sin \theta \sin \phi \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma, & \sin \theta^* &= \frac{\sin \theta \cos \phi}{\cos \phi^*}\end{aligned}\quad (3.118)$$

จากสมการ (3.117) เมื่อพิจารณาเป็นสนามระยะไกล  $r \approx r' \rightarrow \infty$  ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ [20] หนึ่งหน่วยของ  $(\hat{r}^*, \hat{\theta}^*, \hat{\phi}^*)$  และ  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  เขียนได้ดังสมการ

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{r}^* \\ \hat{\theta}^* \\ \hat{\phi}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \theta^* \cos \phi^* & \sin \theta^* \sin \phi^* & \cos \theta^* \\ \cos \theta^* \cos \phi^* & \cos \theta^* \sin \phi^* & -\sin \theta^* \\ -\sin \phi^* & \cos \phi^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.119)$$

เมื่อแก้สมการที่ (3.119) แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\hat{\theta}^* = \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} \hat{\theta} + \frac{\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} \hat{\phi} \quad (3.120\text{ก})$$

$$\hat{\phi}^* = \frac{-\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} \hat{\theta} + \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} \hat{\phi} \quad (3.120\text{ข})$$

ดังนั้นผลรวมของสนามไฟฟ้าสามารถเขียนดังสมการ

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} E_\theta^*(r^*, \theta^*, \phi^*) - \frac{\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} E_\phi^*(r^*, \theta^*, \phi^*) \quad (3.121\text{ก})$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta^*} E_\phi^*(r^*, \theta^*, \phi^*) + \frac{\sin \gamma \cos \phi}{\sin \theta^*} E_\theta^*(r^*, \theta^*, \phi^*) \quad (3.121\text{ข})$$

โดยที่

$$E_{\theta}^*(r^*, \theta^*, \phi^*) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=m}^{\infty} V_{m1} (2 - \delta_0) \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} ka^2 (j^{n+1}) \cos m\phi^* \left\{ \begin{aligned} & \left( j \frac{m}{\sin \theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) \left[ \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kaj_n(ka)] + a_n \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)] \right] \right) \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' - \frac{d}{d\theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) [j_n(kr') + b_n h_n^{(2)}(kr')] \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{aligned} \right.$$

(3.122n)

$$E_{\phi}^*(r^*, \theta^*, \phi^*) = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=m}^{\infty} V_{m1} (2 - \delta_0) \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} ka^2 (j^{n+1}) \sin m\phi^* \left\{ \begin{aligned} & \left( j \frac{d}{d\theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) \left[ \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kaj_n(ka)] + a_n \frac{1}{ka} \frac{\partial}{\partial(ka)} [kah_n^{(2)}(ka)] \right] \right) \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} m P_n^m \cos(\theta') d\theta' - \frac{m}{\sin \theta^*} P_n^m \cos(\theta^*) [j_n(ka) + b_n h_n^{(2)}(ka)] \\ & \times \int_{\theta_1-\alpha}^{\theta_1+\alpha} \frac{d}{d\theta'} P_n^m \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \end{aligned} \right.$$

(3.122ข)

### 3.5 สรุป

บทนี้นำเสนอการพิสูจน์สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของสายอากาศร่องเดี่ยวบนโครงสร้างตัวนำทรงกลมโดยวิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอติก ซึ่งจะเริ่มพิจารณาจากสมการแมกซ์เวลล์ในรูปของไดแอติกจากนั้นพิสูจน์หาฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กเพื่อที่จะนำไปหาสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวในกรณีต่าง ๆ โดยที่แหล่งกำเนิดความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กบริเวณปากร่องจะสมมติให้อยู่ในรูปฟังก์ชันลักษณะไซน์ ซึ่งผลลัพธ์ของสนามระยะไกลที่ได้จากการพิสูจน์สมการจะคล้ายกับวิธีของฟังก์ชันคีย์เวกเตอร์ แต่จะแตกต่างตรงวิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอติกคิดผลของการกระจายเข้าไปด้วย

## บทที่ 4

# คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

### 4.1 บทนำ

บทนี้นำเสนอคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวบนตัวนำทรงกลม โดยการคำนวณ ซึ่งจะใช้สมการสนามไฟฟ้าระยะไกลที่ได้จากการพิสูจน์ในบทที่ 2 และบทที่ 3 คือวิธีฟังก์ชันคylinder และวิธีฟังก์ชันกรีนไดเอดิกมาเปรียบเทียบกัน ซึ่งจะพิจารณาโดยเปลี่ยนแปลงรัศมีของทรงกลม และนอกจากนั้นยังพิจารณาการโพลาไรซ์ของสายอากาศ

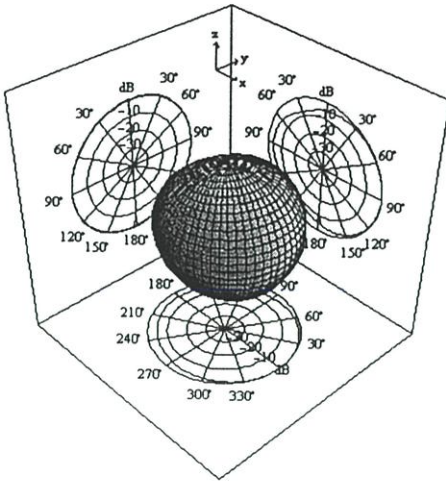
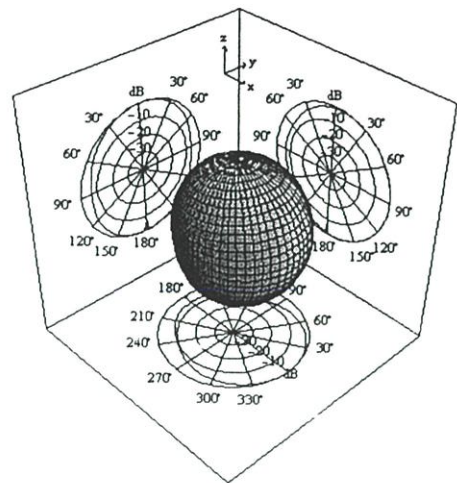
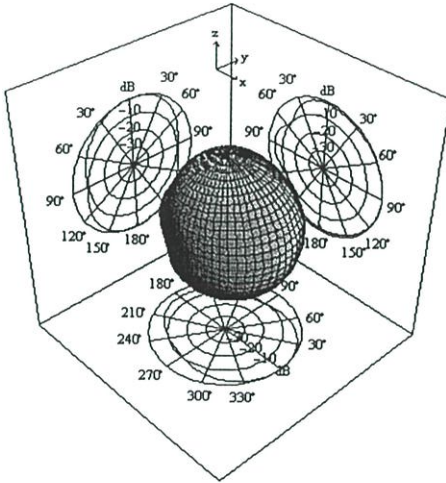
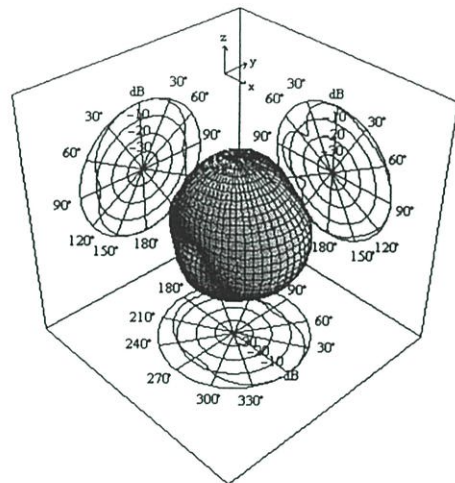
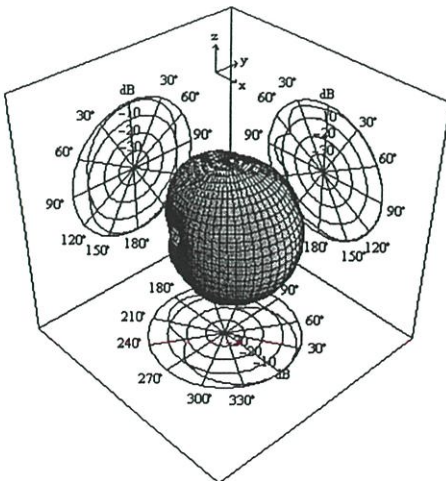
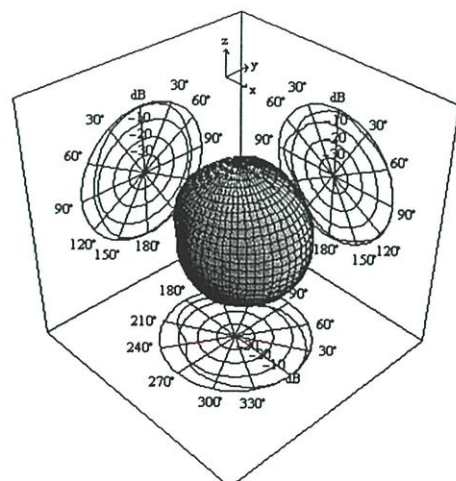
### 4.2 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยว

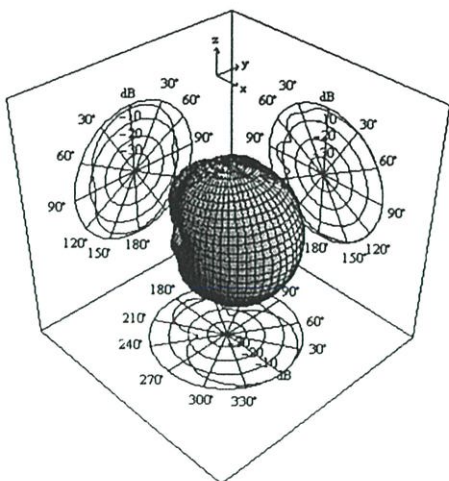
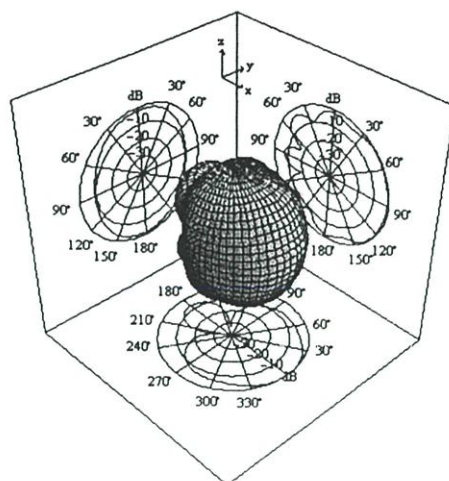
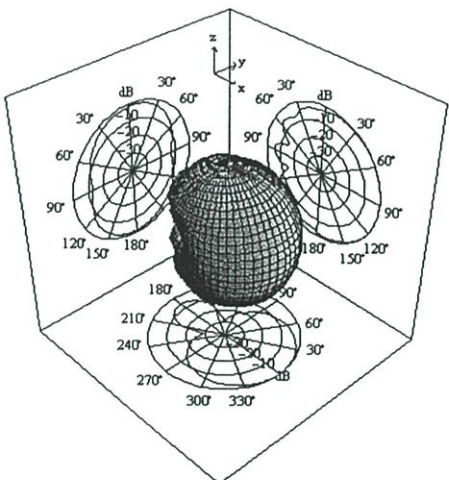
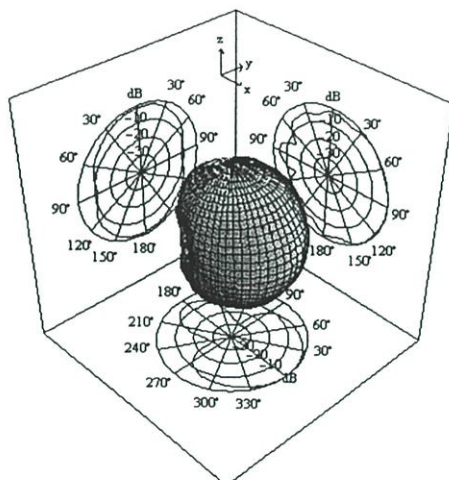
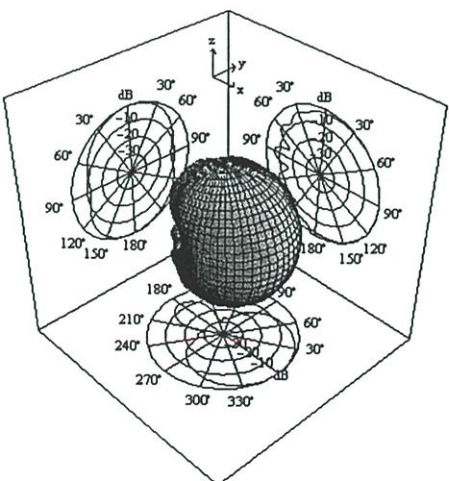
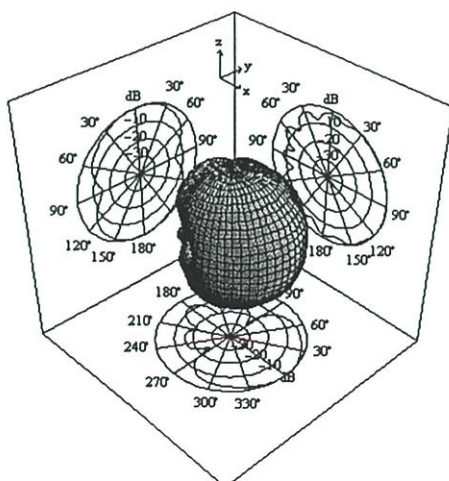
จากสมการสนามระยะไกลที่ได้จะทำการวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่น[9], [18] ของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม เพื่อหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมโดยจะพิจารณาจากแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ( Radiation Pattern ) ความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง( Half Power Beamwidth : HPBW ) อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง(Front to Back Ratio) ระดับของลำคลื่นย่อยแรก(First Side Lobe Level : FSLL) ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรก (First Null Beamwidth) และค่าสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity)

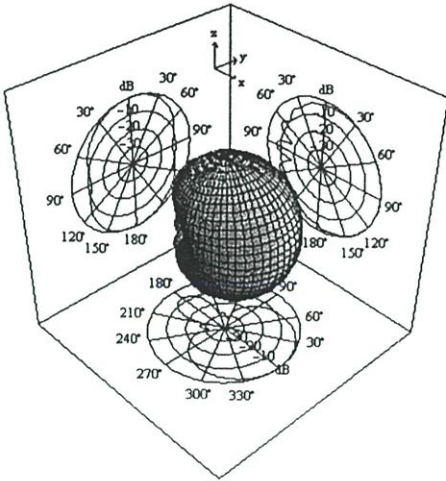
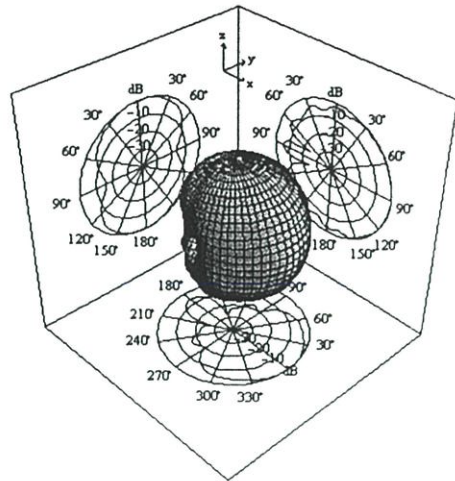
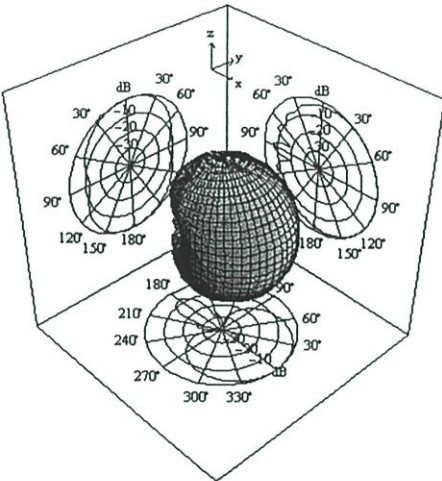
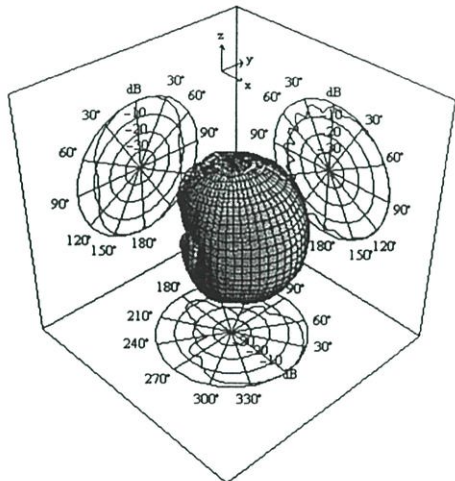
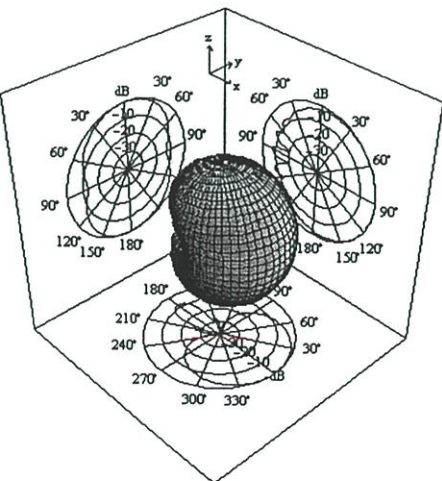
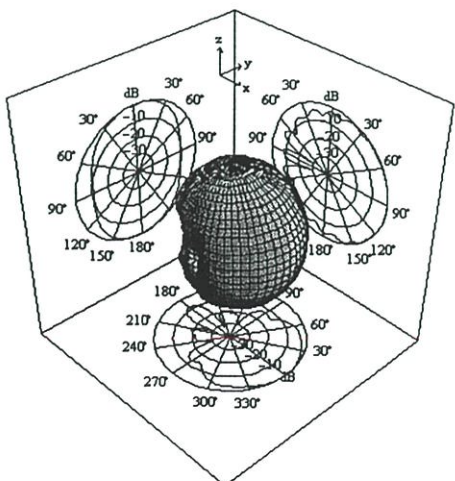
#### 4.2.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น (Radiation Pattern)

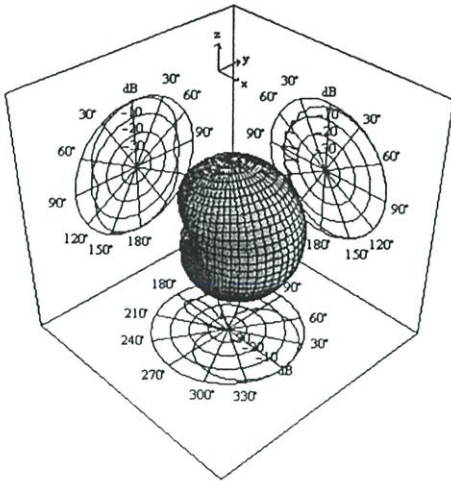
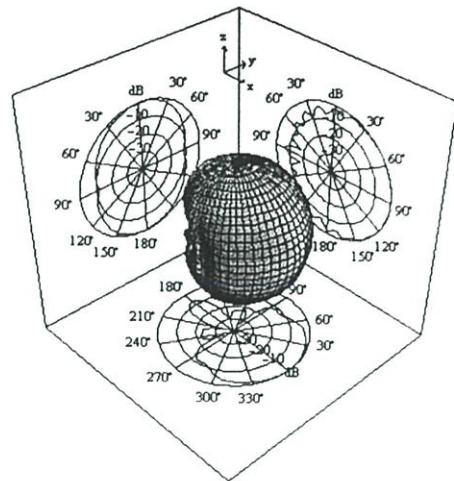
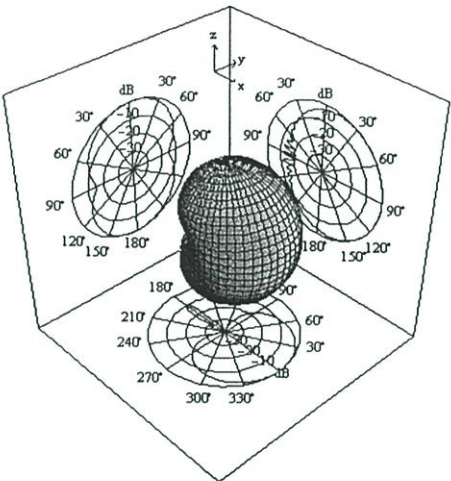
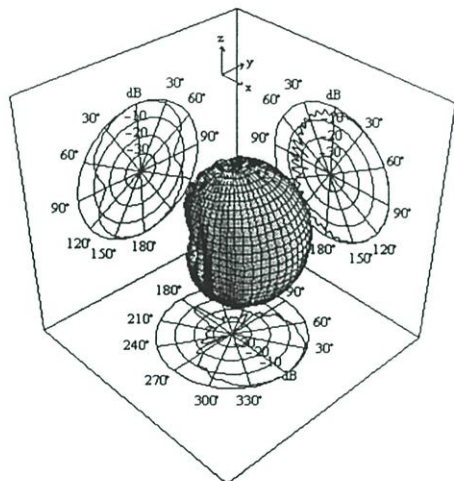
แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น คือรูปภาพหรือฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่เป็นตัวบ่งบอกว่าทิศทางต่าง ๆ รอบตัวของสายอากาศมีขนาดความเข้มหรือกำลังงานที่แพร่กระจายเป็นอย่างใด ซึ่งแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแอมพลิจูดของสนามหรือกำลังงานกับทิศทางการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศซึ่งแสดงอยู่ในรูปของมุมในหน่วยองศาหรือเรเดียน โดยจะคิดในบริเวณที่เป็นสนามระยะไกล (Far Field)

ผลการคำนวณแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวขนานบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม โดยใช้ความยาวของร่องมีขนาดเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นและพิจารณาความกว้างของร่องมีลักษณะแคบโดยแสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ 3 มิติ ในระนาบ  $xy$ ,  $xz$  และ  $yz$  แสดงดังในรูปที่ 4.1 ซึ่งจะพิจารณาที่บริเวณสนามระยะไกลและเปลี่ยนแปลงขนาดรัศมีประสิทธิผล ( $ka$ ) ของทรงกลมเป็นค่าต่าง ๆ โดยที่  $a$  คือรัศมีของสายอากาศและ  $k$  คือเลขคลื่นมีค่าเท่ากับ  $2\pi/\lambda$

(1ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 1$ (1ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $ka = 1$ (2ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 2$ (2ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $ka = 2$ (3ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 3$ (3ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $ka = 3$

(4ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 4$ (4ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 4$ (5ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 5$ (5ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 5$ (6ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 6$ (6ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 6$

(7ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $ka = 7$ (7ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 7$ (8ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $ka = 8$ (8ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 8$ (9ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $ka = 9$ (9ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 9$

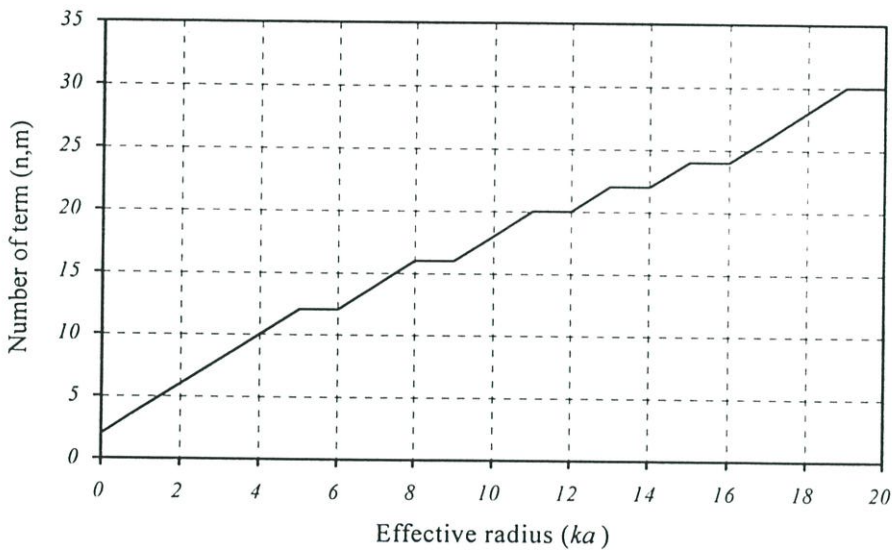
(10ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 10$ (10ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $ka = 10$ (11ก) ฟังก์ชันค้ำยเวกเตอร์  $ka = 20$ (11ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $ka = 20$ 

#### รูปที่ 4.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศเมื่อเปลี่ยนแปลงรัศมีทรงกลม

จากรูปที่ 4.1 เมื่อรัศมีของทรงกลมมีค่าน้อย ๆ ระดับลาคลื่นย่อยทางด้านหลังจะมีค่ามาก โดยแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะใกล้เคียงกับการแพร่กระจายคลื่นแบบรอบตัว แต่เมื่อขนาดรัศมีของทรงกลมมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ลาคลื่นย่อยทางด้านหลังของสายอากาศมีค่าลดลงและแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศจะเข้าสู่ลักษณะการแพร่กระจายคลื่น แบบทิศทางเดียว และเมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณทั้งสองวิธี จะพบว่ามิลักษณะที่แตกต่างกันบ้างเล็กน้อยเนื่องมาจากวิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอติกจะรวมผลของสนามในส่วนของการจัดกระจายเข้าไปด้วย

#### 4.2.2 จำนวนของผลการรวมในพจน์องค์ประกอบของคลื่น

จากสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวจะเห็นว่าเกิดจากการรวมเทอมของ  $m, n$  จนถึงค่าอนันต์ ซึ่งในทางปฏิบัติไม่สามารถทำได้ดังนั้นจึงต้องมีการเลือกจำนวนครั้งของการ Summation ให้เหมาะสมเพื่อความสะดวกในการคำนวณและประหยัดเวลาที่ใช้โดยที่ผลของการคำนวณยังคงแม่นยำซึ่งจำนวนครั้งของการ Summation ที่เหมาะสมแสดงดังรูปที่ 4.2 โดยพิจารณาจากแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น และค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศที่ให้ค่าเสถียรภาพในแต่ละ  $ka$  ซึ่งรายละเอียดดูจากภาคผนวก ข



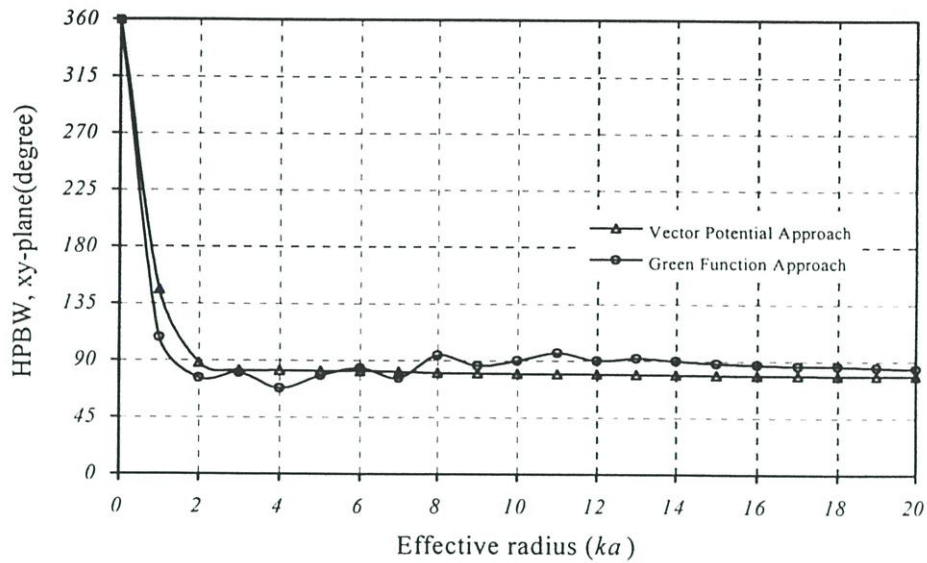
รูปที่ 4.2 จำนวนพจน์ในการรวมเทอมองค์ประกอบของคลื่น

#### 4.2.3 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง (Half Power Beamwidth)

ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง เป็นคุณลักษณะหนึ่งที่สำคัญของสายอากาศ ทั้งนี้เพราะว่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งเป็นสิ่งที่ใช้บอกคุณสมบัติของสายอากาศ โดยค่าความกว้างลำคลื่นเป็นมุมที่วัดระหว่างจุดที่ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นในลำคลื่นหลักมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดหรือถ้าเทียบเป็นอัตราส่วนเดซิเบล คือกำลังงานที่ลดลงมา 3 dB จากค่ากำลังงานสูงสุด สำหรับกรณีที่ลำคลื่นสมมาตร แสดงได้เป็น

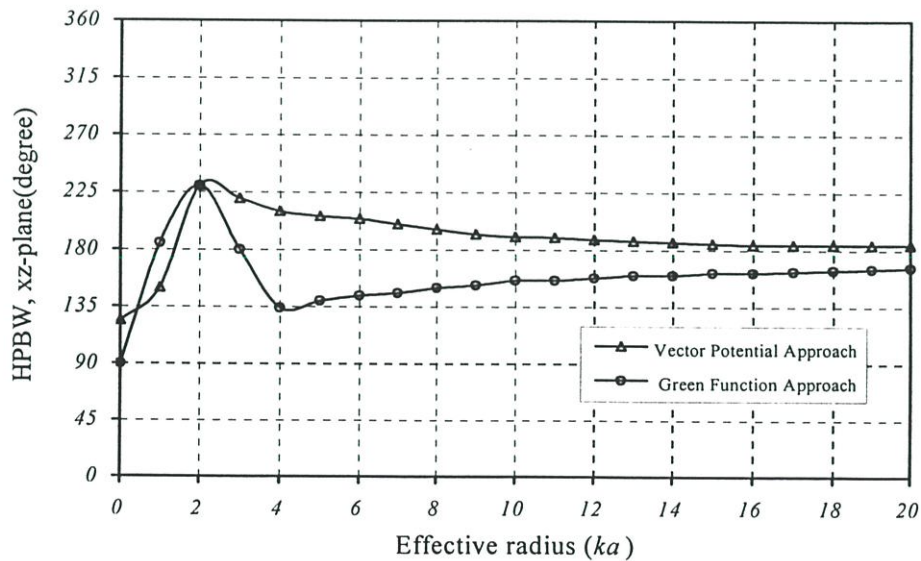
$$HPBW=2|\theta_{U=0dB} - \theta_{U=-3dB}| \quad (4.1)$$

ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ  $xy, xz, yz$  แสดงดังรูปที่ 4.3 ถึงรูปที่ 4.5



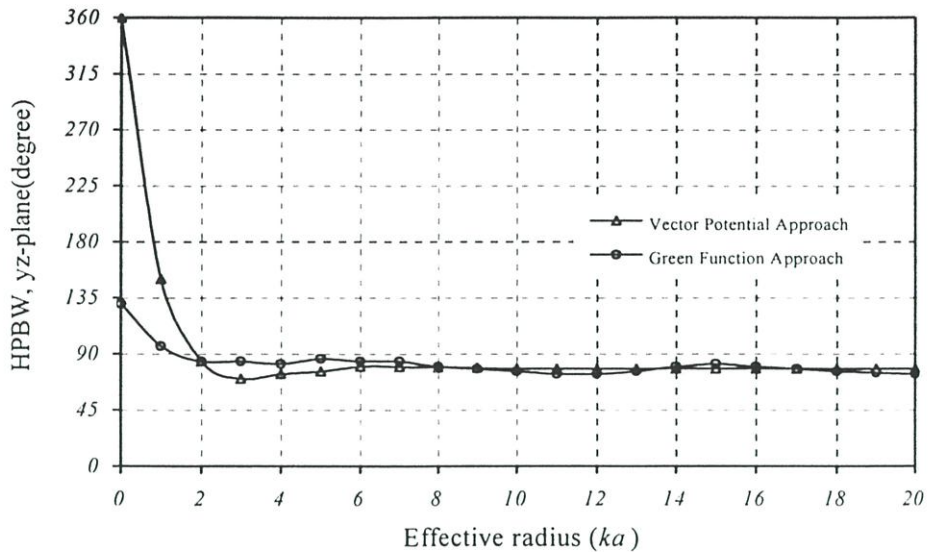
รูปที่ 4.3 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ  $xy$

จากรูปที่ 4.3 พบว่าเมื่อรัศมีของสายอากาศเพิ่มขึ้นความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ  $xy$  จะมีค่าลดลง และเมื่อเปรียบเทียบทั้งสองวิธีจะมีแนวโน้มใกล้เคียงกันโดยจะมีค่าเท่ากับ 78 องศา เมื่อรัศมีของสายอากาศเข้าสู่อนันต์



รูปที่ 4.4 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ  $xz$

จากรูปที่ 4.4 พบว่าเมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่าน้อยจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วแต่เมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่าเพิ่มขึ้นการเปลี่ยนแปลงความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งจะมีค่าน้อยลงและมีค่าเท่ากับ 184 องศา เมื่อรัศมีของสายอากาศเข้าสู่อนันต์

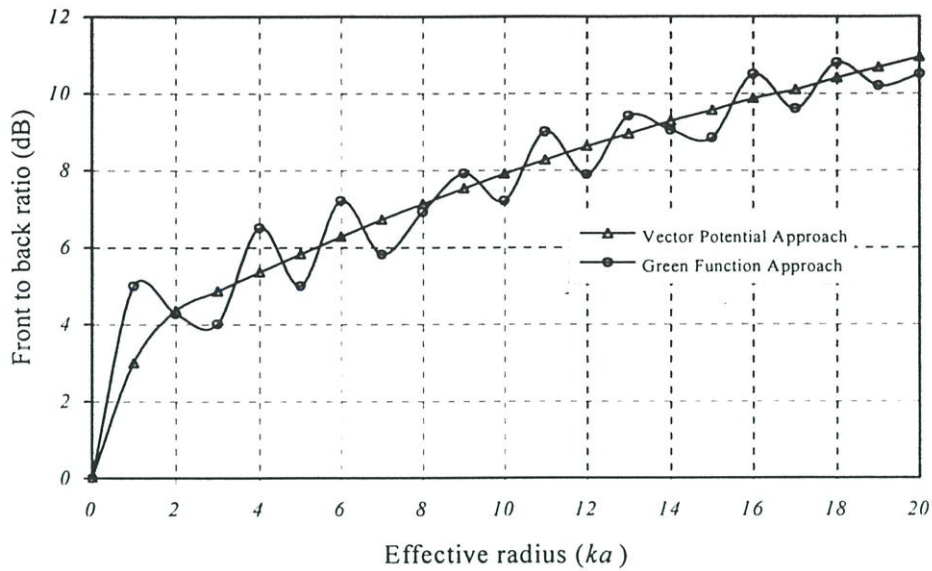


รูปที่ 4.5 ความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ  $yz$

จากรูปที่ 4.5 พบว่าเมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่าเพิ่มขึ้นความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบ  $yz$  จะมีค่าลดลงและมีค่าคงที่เมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่ามาก ๆ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบทั้งสองวิธีจะมีแนวโน้มใกล้เคียงกันเมื่อพิจารณาที่รัศมีของสายอากาศมีค่ามาก ๆ และจะให้ผลที่แตกต่างเมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่าน้อย ๆ อันเนื่องมาจากผลที่เกิดจากการกระจาย

#### 4.2.4 อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง (Front to Back Ratio)

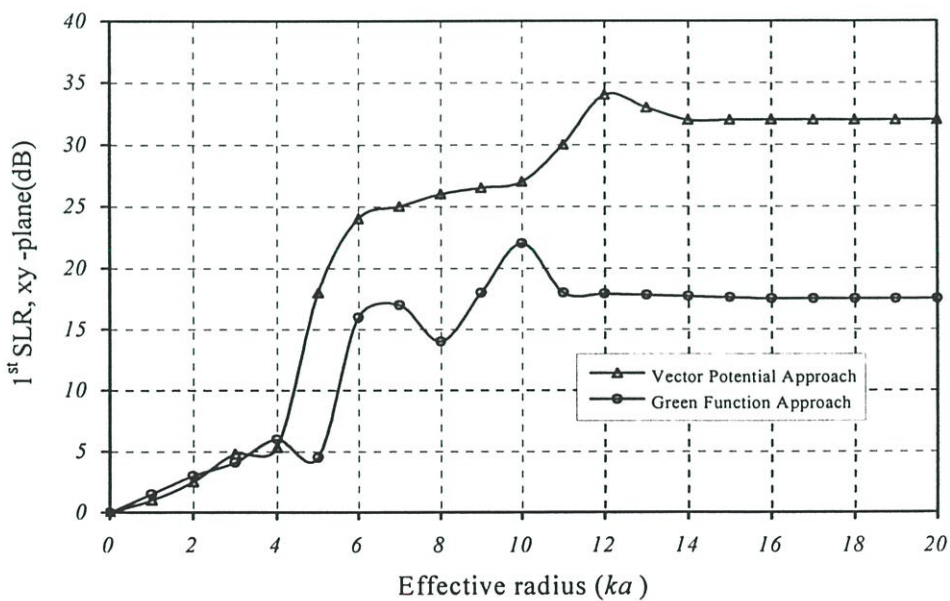
อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลังของสายอากาศ หมายถึงการเปรียบเทียบระดับของลำคลื่นด้านหน้าต่อระดับของลำคลื่นด้านหลังซึ่งจะวัดเป็นอัตราส่วนในหน่วยเดซิเบล โดยอัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อลำคลื่นด้านหลัง ของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมแสดงดังรูปที่ 4.6 ซึ่งจากผลการคำนวณจะเห็นว่าเมื่อรัศมีของทรงกลมมีค่าน้อย ๆ ระดับของลำคลื่นด้านหลังจะมีค่ามาก เมื่อรัศมีของทรงกลมมีค่าเพิ่มขึ้นระดับของลำคลื่นทางด้านหลังจะลดลงซึ่งเมื่อเปรียบเทียบทั้งสองวิธี คือวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกจะพบว่าอัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลังของสายอากาศจะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อรัศมีของสายอากาศเพิ่มมากขึ้น แต่วิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกจะมีแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงมากกว่าวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์เนื่องจากได้รวมผลของการกระจายคลื่นเข้าไปด้วย



รูปที่ 4.6 อัตราส่วนของลำคลื่นด้านหน้าต่อด้านหลัง

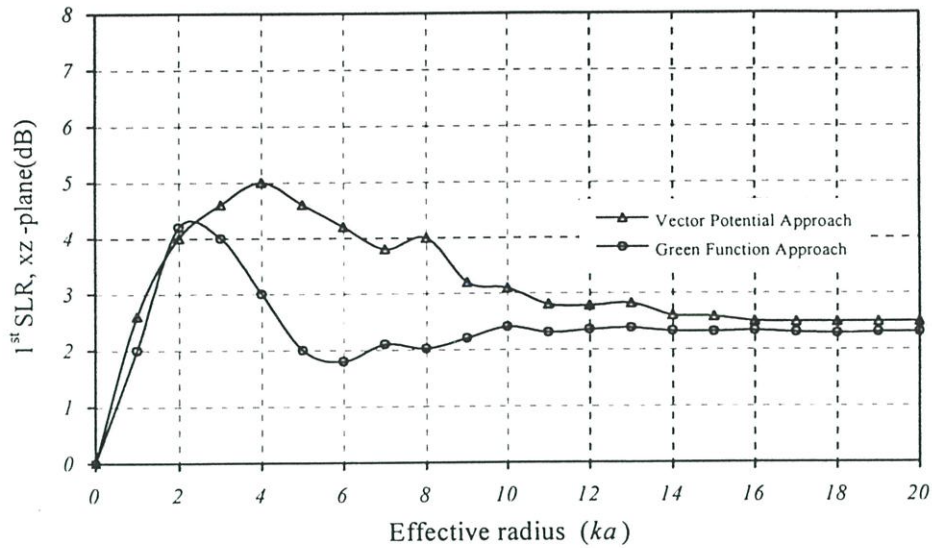
#### 4.2.5 ระดับของลำคลื่นย่อยแรก ( First Side Lobe Level : FSLL)

ระดับของลำคลื่นย่อยแรก คือ อัตราส่วนระหว่างระดับลำคลื่นย่อยแรกต่อระดับลำคลื่นหลัก โดยแสดงอยู่ในหน่วยเดซิเบล



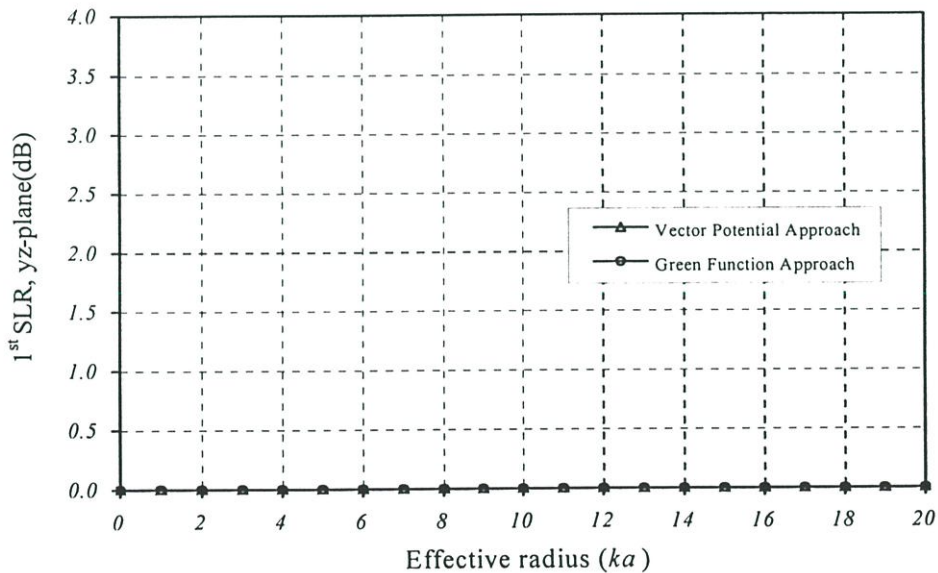
รูปที่ 4.7 อัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นย่อยแรกในระนาบ xy

จากรูปที่ 4.7 พบว่าเมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่าน้อยอัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นย่อยแรกจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเมื่อรัศมีเพิ่มขึ้นการเปลี่ยนแปลงจะเริ่มคงที่



รูปที่ 4.8 อัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นย่อยแรกในระนาบ  $xz$

จากรูปที่ 4.8 พบว่าเมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่าเพิ่มขึ้นอัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นย่อยแรกทั้งสองวิธีจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในทางเดียวกันและมีค่าใกล้เคียงกัน

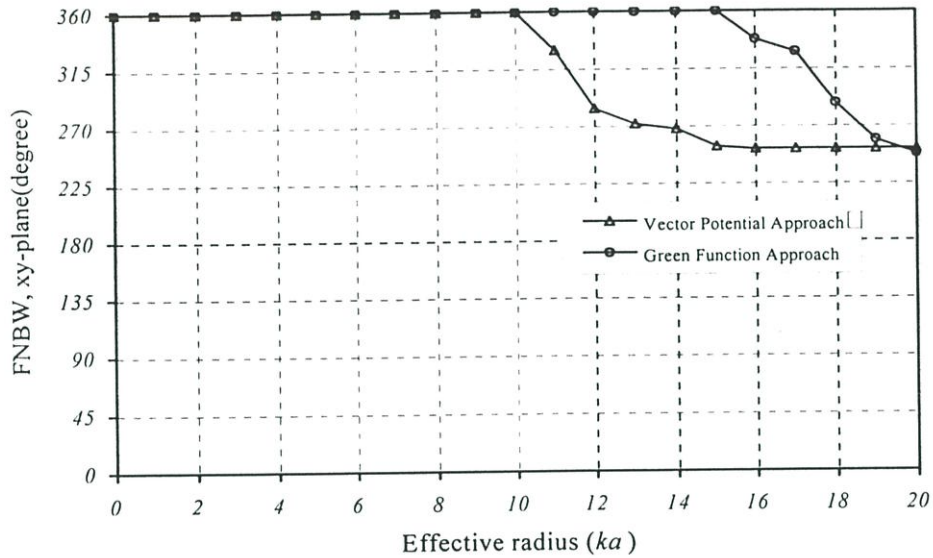


รูปที่ 4.9 อัตราส่วนของลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นย่อยแรกในระนาบ  $yz$

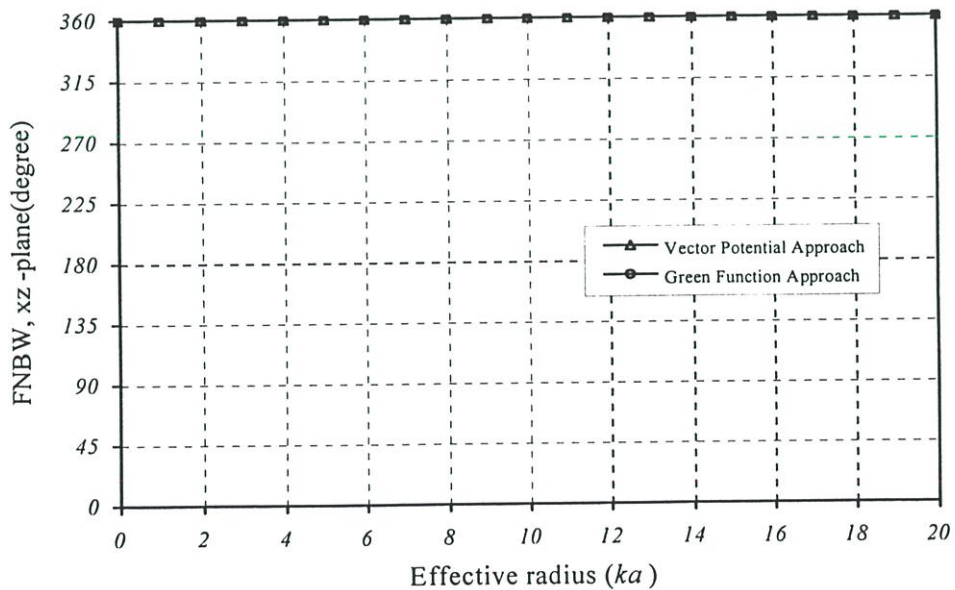
จากรูปที่ 4.9 พบว่าวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกจะไม่เกิดอัตราส่วนระหว่างลำคลื่นหลักต่อลำคลื่นย่อยแรก

#### 4.2.6 ค่าความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรก (First Null Beamwidth)

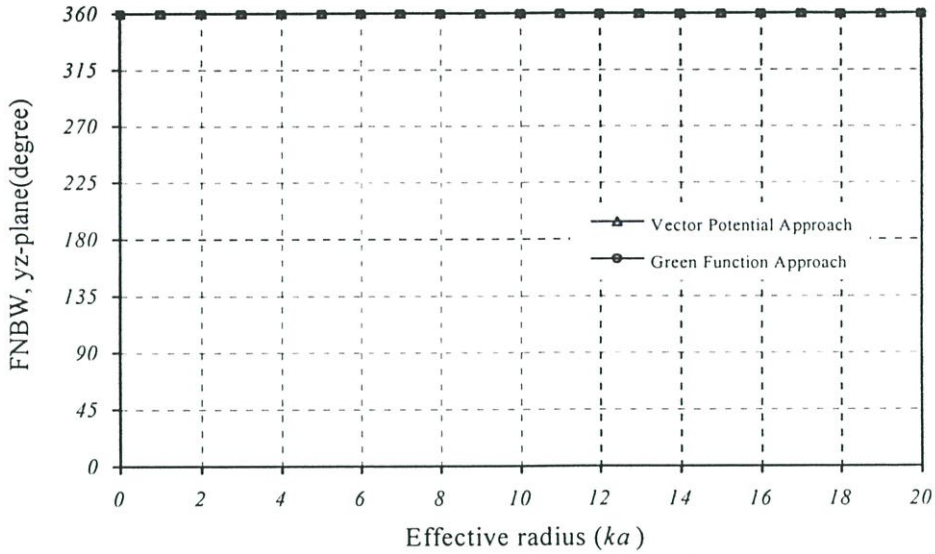
ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรก คือมุมที่วัดระหว่างจุดที่ความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นในลำคลื่นหลักมีค่าลดลงเป็นศูนย์ โดยจะวัดในหน่วยองศา (Degree) ซึ่งค่าความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรกในระนาบ  $xy$ ,  $xz$  และ  $yz$  แสดงดังรูปที่ 4.10 ถึงรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.10 ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรกในระนาบ  $xy$



รูปที่ 4.11 ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรกในระนาบ  $xz$



รูปที่ 4.12 ความกว้างลำคลื่นจุดศูนย์คู่แรกในระนาบ yz

#### 4.2.7 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด (Maximum Directivity)

เป็นคุณสมบัติสำคัญที่ต้องพิจารณา โดยค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศคืออัตราส่วนของความเข้มการแผ่กระจายคลื่นที่มากที่สุดของสายอากาศที่พิจารณาต่อความเข้มการแผ่กระจายคลื่นของสายอากาศไอโซทรอปิกแสดงได้ดังสมการ

$$D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}} \quad (4.2)$$

โดยที่

$D$  = ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง

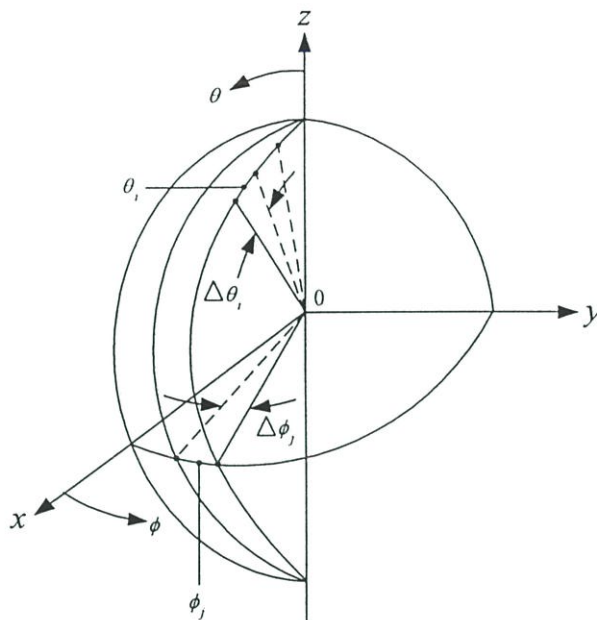
$U_{\max}$  = ค่าสูงสุดของความเข้มของการแผ่กระจายคลื่น ( W/หน่วยมุมตัน)

$P_{\text{rad}}$  = กำลังงานที่แผ่กระจายทั้งหมด(W)

$$U(\theta, \phi) = \frac{1}{2\eta} \left[ |E_{\theta}(\theta, \phi)|^2 + |E_{\phi}(\theta, \phi)|^2 \right] \quad (4.3)$$

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.4)$$

แต่กำลังงานที่แพร่กระจายทั้งหมดของสายอากาศร่อนเดี่ยวครึ่งความยาวคลื่นบนผิวทรงกลมไม่สามารถที่จะอินทิเกรตหาค่าได้โดยตรงดังนั้นจึงใช้วิธีเชิงตัวเลข [13] (Numerical Method) ในการประมาณค่าคำตอบของกำลังงานที่แพร่กระจายดูรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 การประมาณค่าอินทิเกรตออกเป็นช่วง

ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

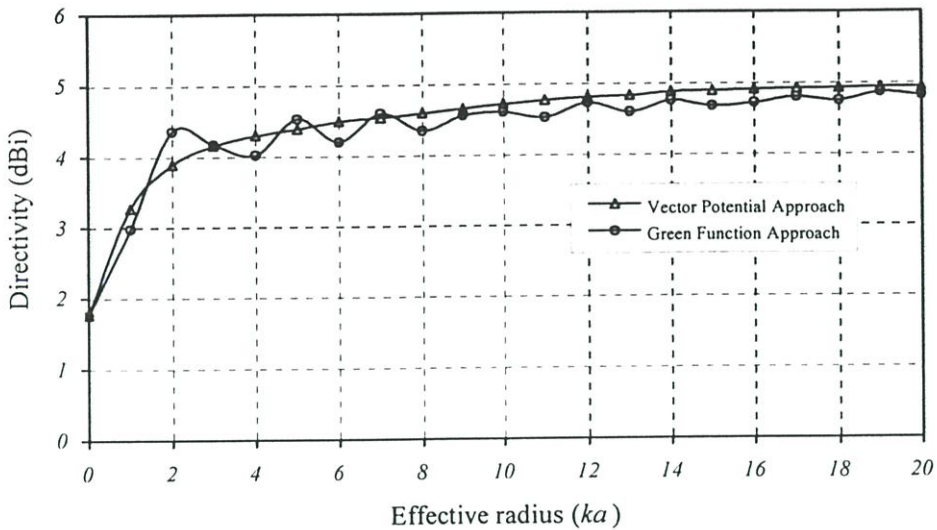
$$P_{rad} = \left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{2\pi}{m}\right) \sum_{j=1}^M \left[ \sum_{i=1}^N F(\theta_i, \phi_j) \sin \theta_i \right] \quad (4.5)$$

โดยที่

$$\theta_i = \frac{\pi}{2N} + (i-1) \frac{\pi}{N}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.6a)$$

$$\phi_j = \frac{2\pi}{2M} + (j-1) \frac{2\pi}{M}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (4.6b)$$

ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศเมื่อเปลี่ยนแปลงรัศมีของสายอากาศแสดงดังรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศ

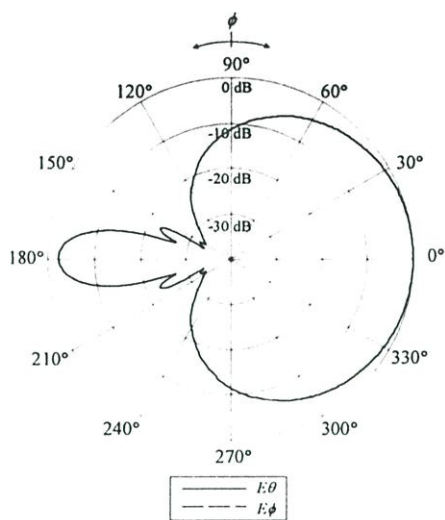
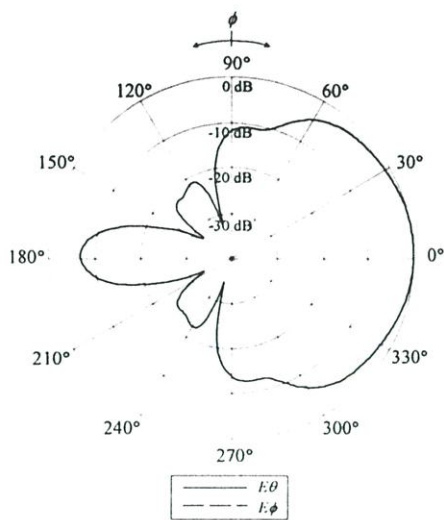
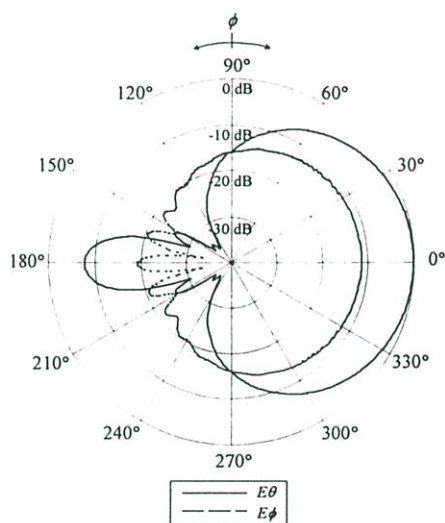
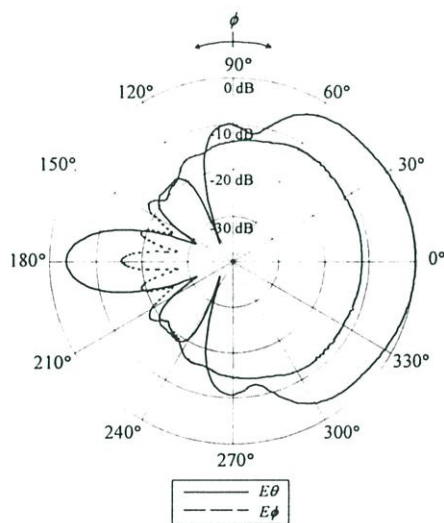
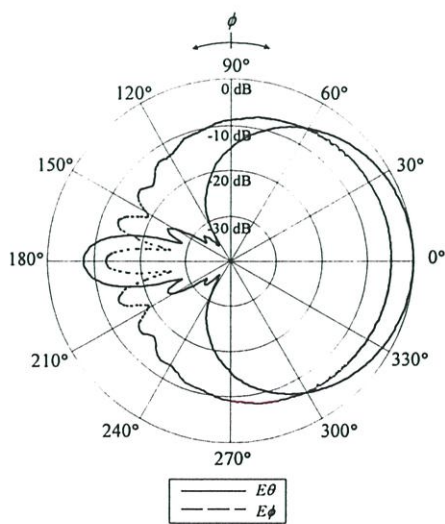
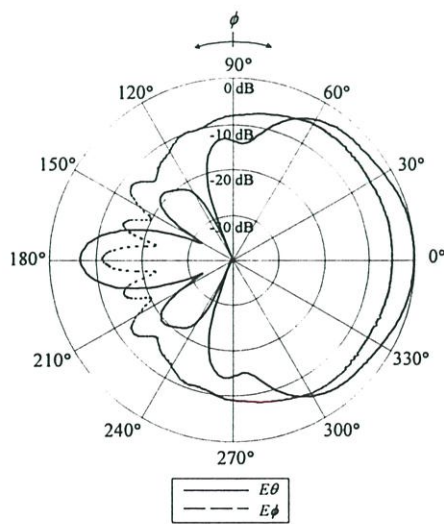
จากรูปที่ 4.14 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศจากการคำนวณพบว่าเมื่อรัศมีของทรงกลมมีค่าน้อย ๆ ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศจะมีการเปลี่ยนแปลงมากและมีแนวโน้มไม่คงที่ เมื่อรัศมีของสายอากาศเพิ่มขึ้นค่าสภาพเจาะจงทิศทางจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงลดลง จากการคำนวณทั้งสองวิธีจะพบว่าวิธีของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกจะมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่าวิธีของฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์เนื่องจากได้คิดผลของการกระจายคลื่นเข้าไปด้วย

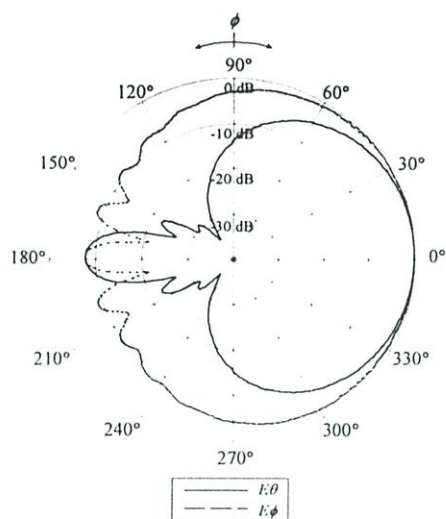
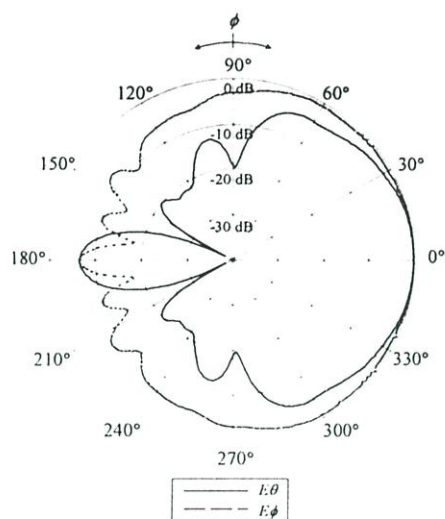
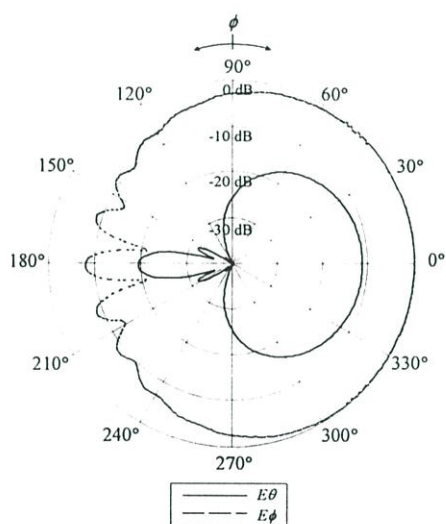
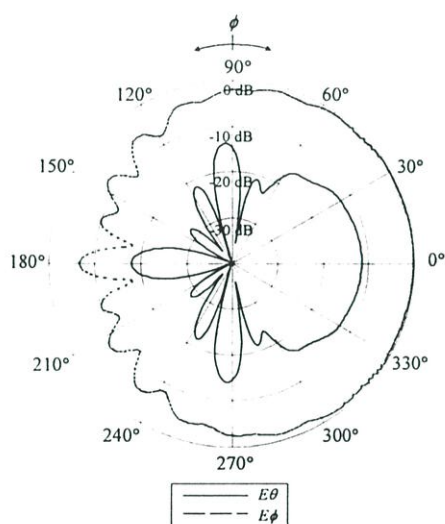
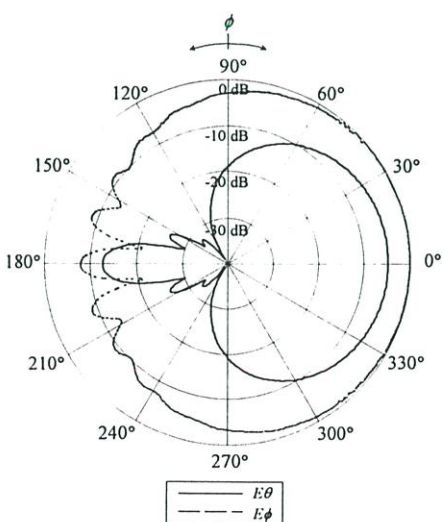
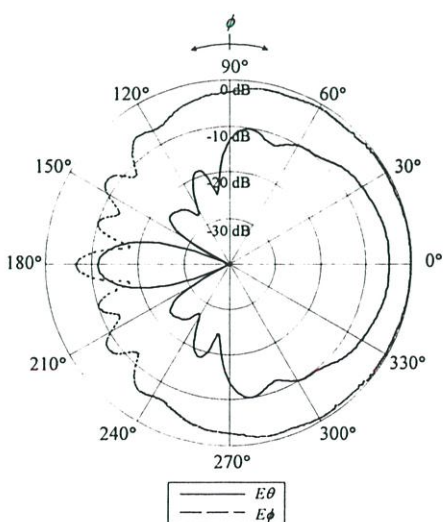
#### 4.3 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงใด ๆ บนผิวตัวนำทรงกลม

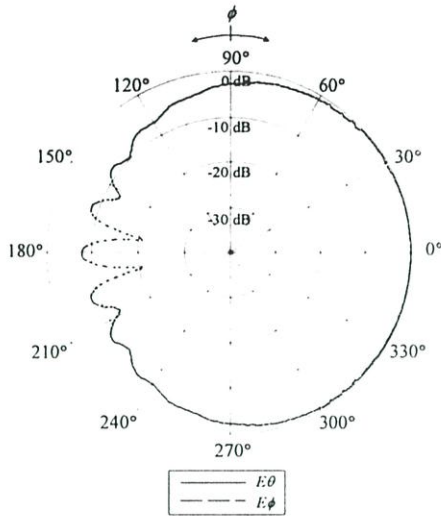
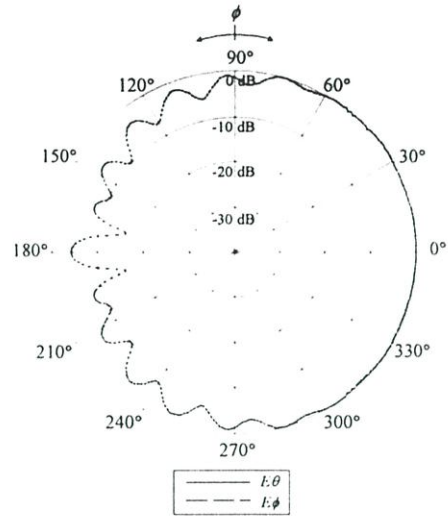
จากสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลทำการวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงใด ๆ บนโครงสร้างตัวนำทรงกลม โดยในการวิเคราะห์จะพิจารณาจากสมการของสายอากาศร่องเดี่ยวที่มีความยาวของร่องเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นวางแบบแนวนอนบนตัวนำทรงกลมมาประยุกต์ โดยทำการหมุนร่องของสายอากาศรอบแกน  $x$  เป็นมุมใด ๆ

##### 4.3.1 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น

แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะแสดงในระนาบ  $xy$ ,  $xz$  และ  $yz$  โดยจะแยกให้เห็นทั้งองค์ประกอบ  $E_\theta$  และองค์ประกอบ  $E_\phi$  จากนั้นจะพิจารณามุมเอียงของร่องเป็นมุมต่าง ๆ แสดงดังรูปที่ 4.15 ถึงรูปที่ 4.16 ซึ่งจะทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณทั้งสองวิธีคือวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิก

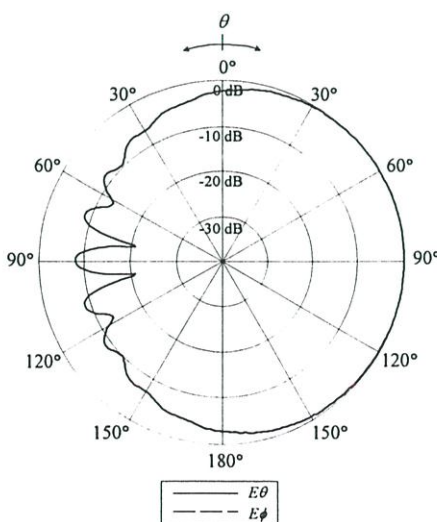
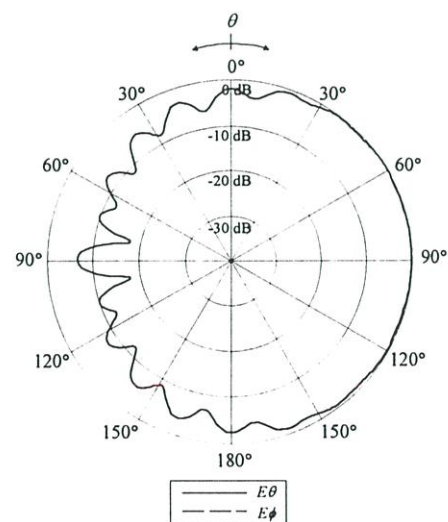
(1ก) ฟังก์ชันคัตยกวเดออร์  $\gamma = 0^\circ$ (1ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 0^\circ$ (2ก) ฟังก์ชันคัตยกวเดออร์  $\gamma = 15^\circ$ (2ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 15^\circ$ (3ก) ฟังก์ชันคัตยกวเดออร์  $\gamma = 30^\circ$ (3ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 30^\circ$

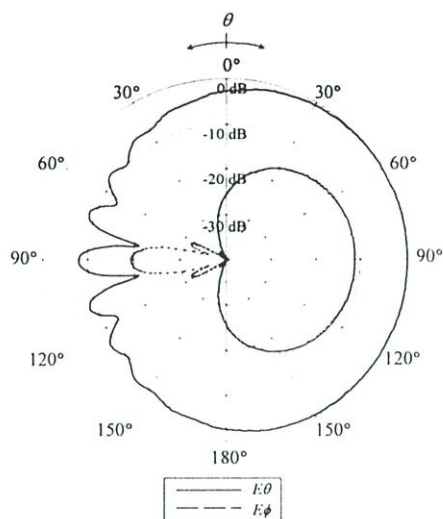
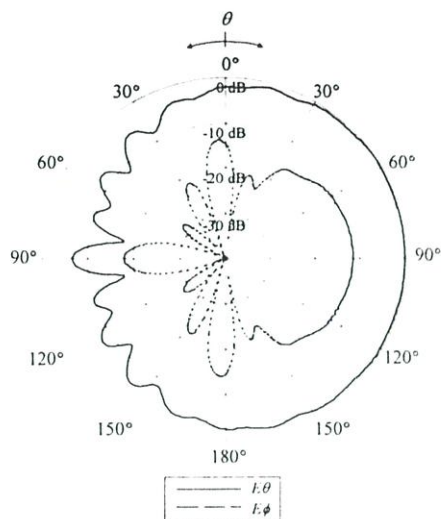
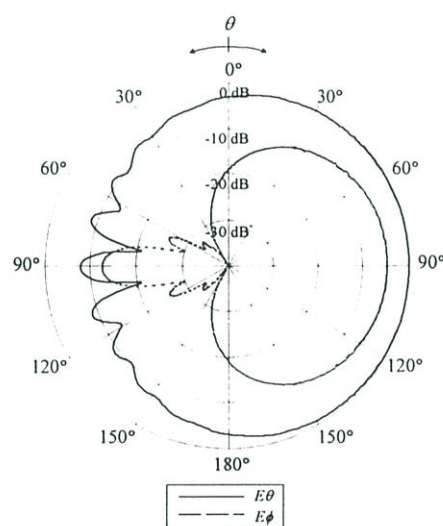
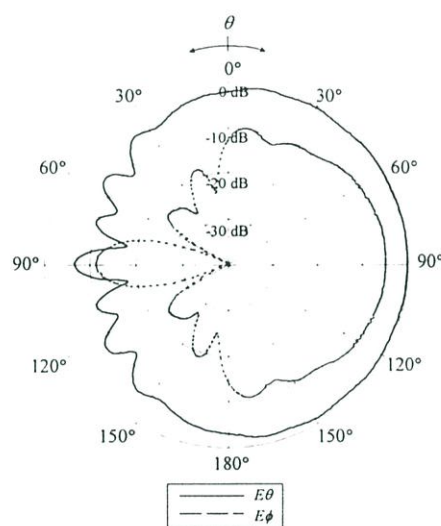
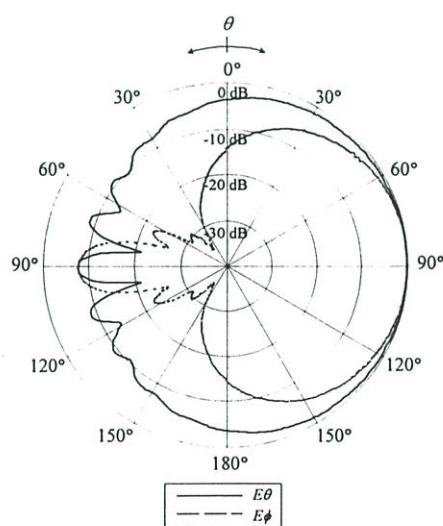
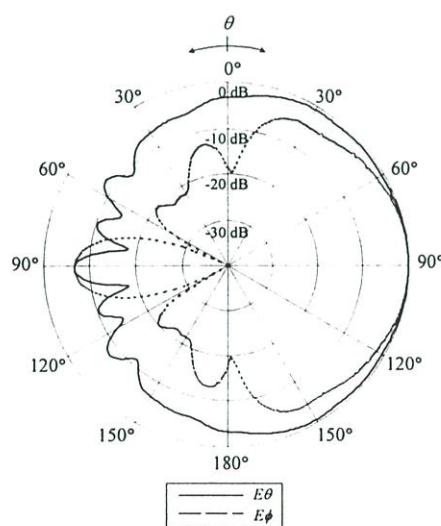
(4ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 45^\circ$ (4ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดติก  $\gamma = 45^\circ$ (5ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 60^\circ$ (5ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดติก  $\gamma = 60^\circ$ (6ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 75^\circ$ (6ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดติก  $\gamma = 75^\circ$

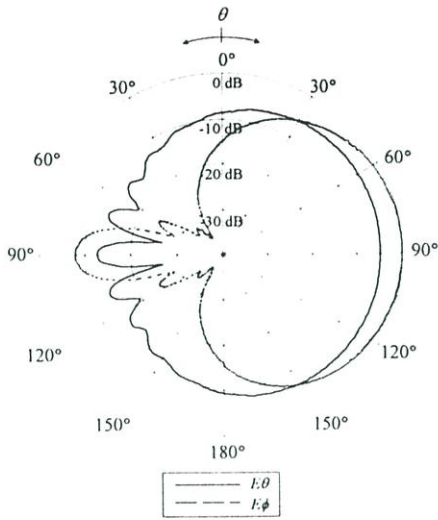
(7ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 90^\circ$ (7ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 90^\circ$ 

#### รูปที่ 4.15 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ $xy$ เมื่อเปลี่ยนมุมเอียงของสายอากาศ

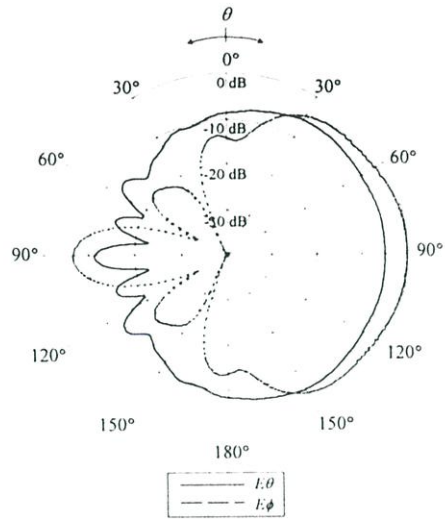
จากรูปที่ 4.15 เป็นการพิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ  $xy$  โดยเป็นการแยกพิจารณาแต่ละองค์ประกอบของสนามคือ  $E_\theta$  และ  $E_\phi$  ซึ่งผลการคำนวณจะทำการเปลี่ยนมุมเอียงสายอากาศระหว่าง  $0^\circ$  ถึง  $90^\circ$  จะเห็นว่าที่มุมเอียงสายอากาศเท่ากับ  $0^\circ$  หรือตำแหน่งช่องเปิดของสายอากาศวางแบบแนวนอนจะมีเฉพาะองค์ประกอบ  $E_\theta$  เท่านั้น เมื่อมุมเอียงของสายอากาศเพิ่มขึ้นจะมีทั้งองค์ประกอบ  $E_\theta$  และองค์ประกอบ  $E_\phi$  โดยที่ขนาดจะเท่ากันเมื่อมุมเอียงสายอากาศเท่ากับ  $45^\circ$  และมีเฉพาะองค์ประกอบ  $E_\phi$  เท่านั้นเมื่อมุมเอียงเท่ากับ  $90^\circ$  หรือร่องวางแบบแนวตั้ง ส่วนรูปที่ 4.16 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ  $xz$

(1ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 0^\circ$ (1ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 0^\circ$

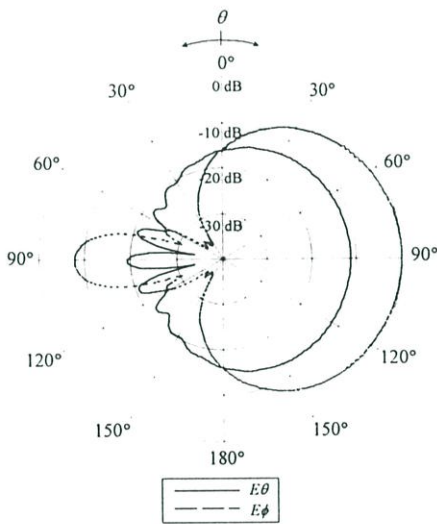
(2ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 15^\circ$ (2ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 15^\circ$ (3ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 30^\circ$ (3ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 30^\circ$ (4ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 45^\circ$ (4ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 45^\circ$



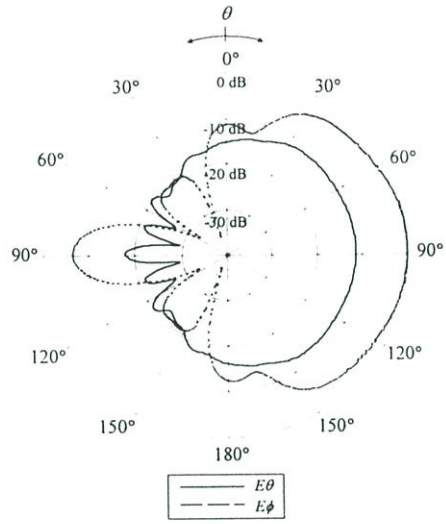
(5ก) ฟังก์ชันคัตยกวเดออร์  $\gamma = 60^\circ$



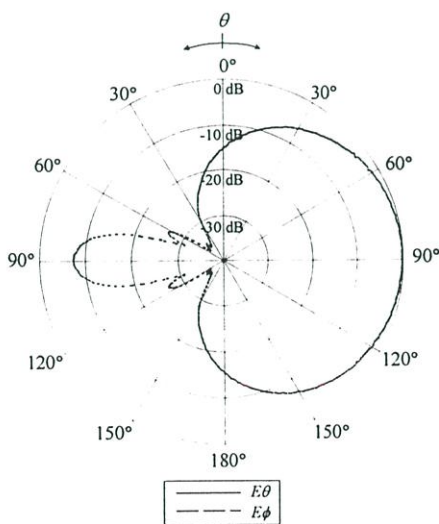
(5ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 60^\circ$



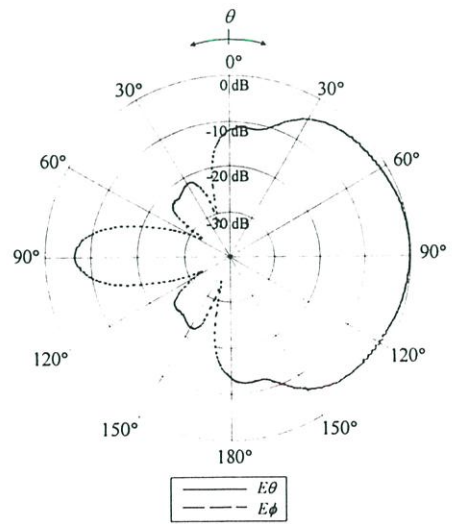
(6ก) ฟังก์ชันคัตยกวเดออร์  $\gamma = 75^\circ$



(6ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 75^\circ$



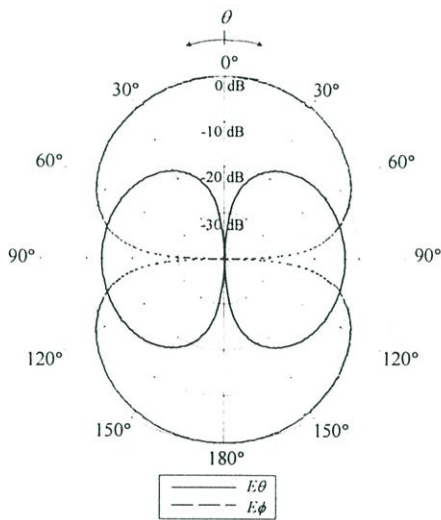
(6ก) ฟังก์ชันคัตยกวเดออร์  $\gamma = 90^\circ$



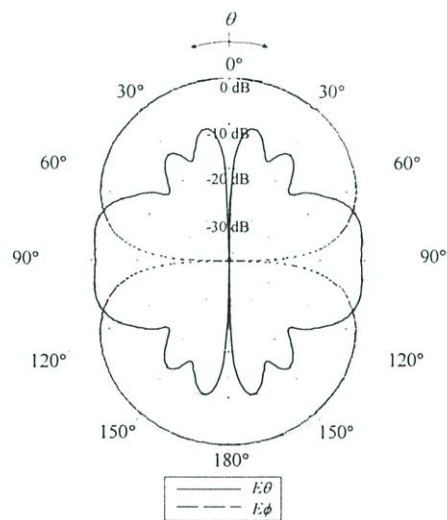
(6ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 90^\circ$

รูปที่ 4.16 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ  $xz$  เมื่อเปลี่ยนมุมเอียงของสายอากาศ

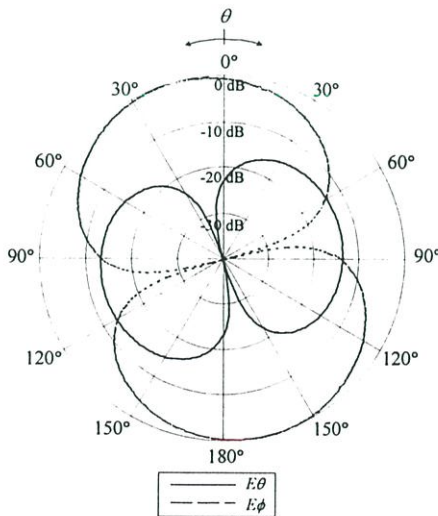
จากรูปที่ 4.16 พิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ  $xz$  โดยพิจารณาแต่ละองค์ประกอบของสนามคือ  $E_\theta$  และ  $E_\phi$  ซึ่งผลการคำนวณจะเห็นว่ามุมเอียงของสายอากาศเท่ากับ  $0^\circ$  จะมีเฉพาะองค์ประกอบ  $E_\theta$  เท่านั้นเมื่อมุมเอียงของสายอากาศเพิ่มขึ้นจะมีทั้งสององค์ประกอบ โดยถ้ามุมเอียงน้อยกว่า  $45^\circ$  ขนาด  $E_\theta$  จะมากกว่า  $E_\phi$  และมีขนาดเท่ากันเมื่อมุมเอียงของสายอากาศเท่ากับ  $45^\circ$  แต่เมื่อมุมเอียงมากกว่า  $45^\circ$  ขนาด  $E_\phi$  จะมากกว่าขนาด  $E_\theta$  และจะมีเฉพาะองค์ประกอบ  $E_\phi$  เท่านั้นเมื่อร่องวางแบบแนวตั้ง และในรูปที่ 4.17 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ  $yz$



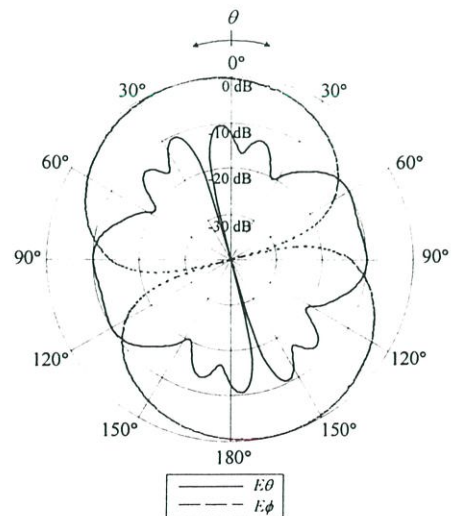
(1ก) ฟังก์ชันคิกซ์เวกเตอร์  $\gamma = 0^\circ$



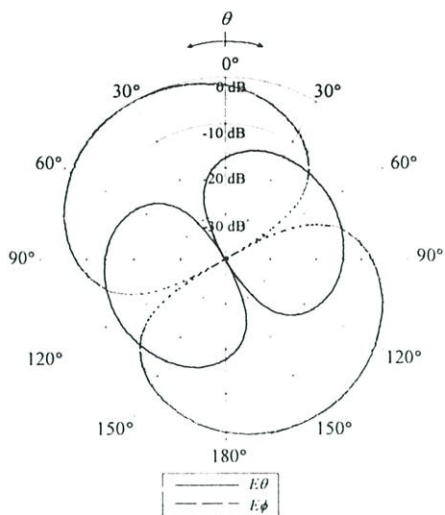
(1ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 0^\circ$



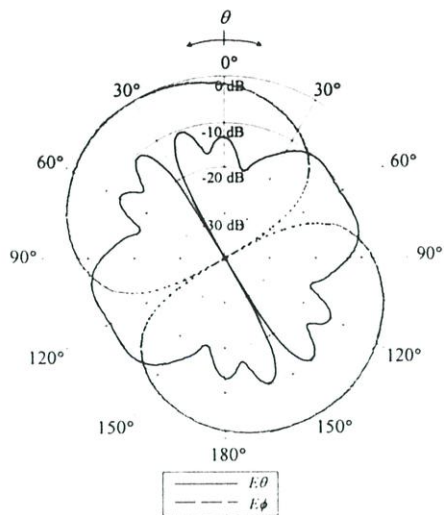
(2ก) ฟังก์ชันคิกซ์เวกเตอร์  $\gamma = 15^\circ$



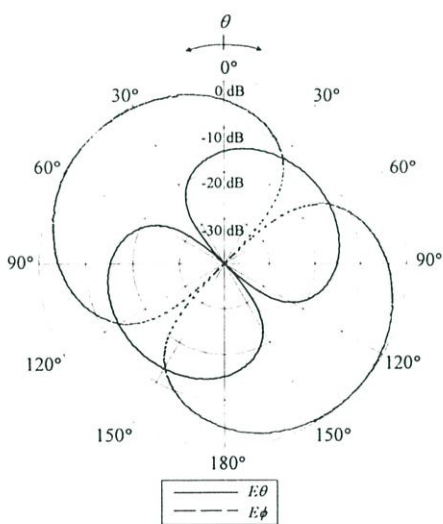
(2ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 15^\circ$



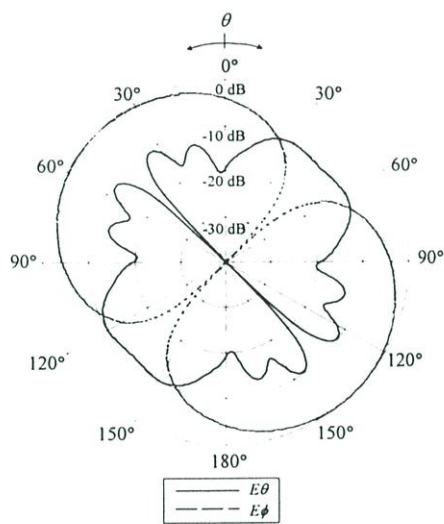
(3ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 30^\circ$



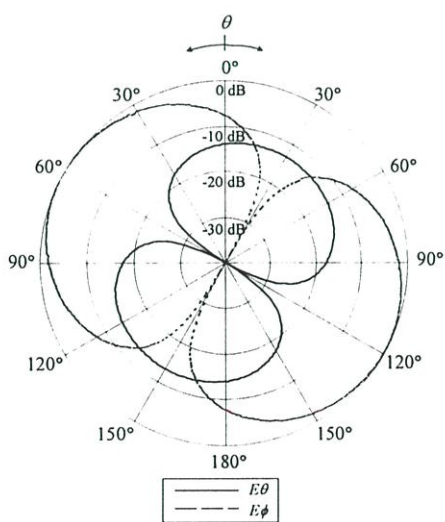
(3ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 30^\circ$



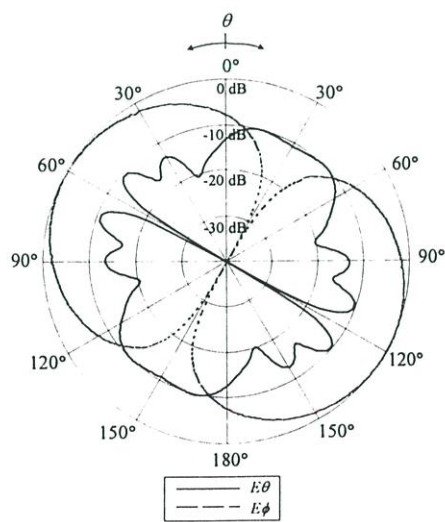
(4ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 45^\circ$



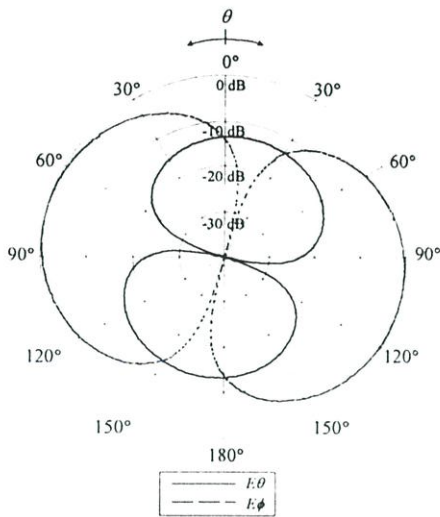
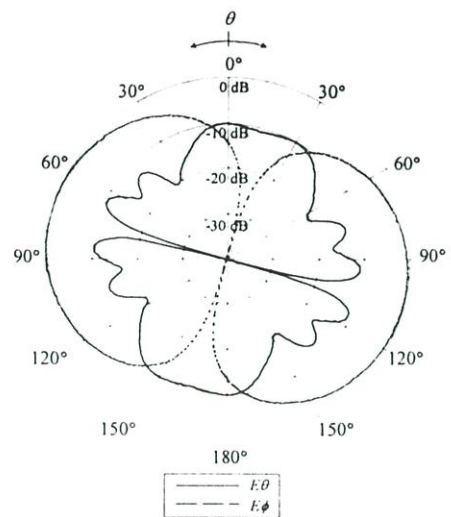
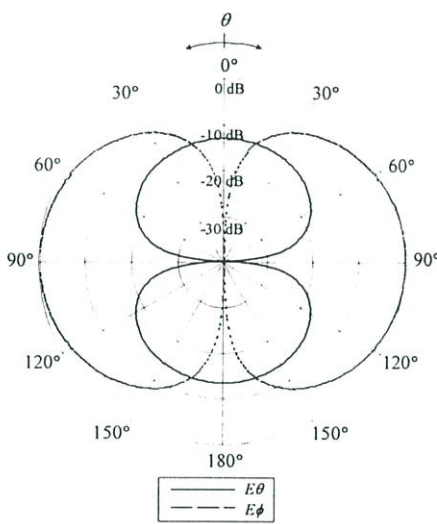
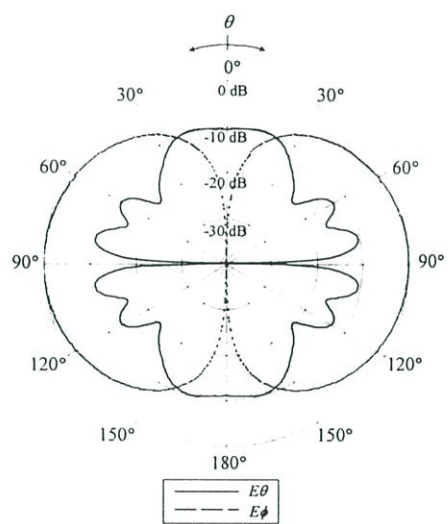
(4ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 45^\circ$



(5ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 60^\circ$



(5ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอติก  $\gamma = 60^\circ$

(6ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 75^\circ$ (6ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 75^\circ$ (7ก) ฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์  $\gamma = 90^\circ$ (7ข) ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $\gamma = 90^\circ$ รูปที่ 4.17 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ  $yz$  เมื่อเปลี่ยนมุมเอียงของสายอากาศ

จากรูปที่ 4.17 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบ  $yz$  พิจารณาที่  $ka = 10$  โดยเปรียบเทียบทั้งวิธีของฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเห็นว่าเมื่อมุมเอียงของสายอากาศมีการเปลี่ยนแปลงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะมีการเปลี่ยนแปลงตามมุมเอียงโดยที่ลักษณะของลำคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลง และจากการคำนวณวิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่าวิธีของฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์เนื่องจากคิดผลของเทอมการจัดกระจายเข้าไปด้วย

#### 4.4 การโพลาไรซ์ของสายอากาศ

การโพลาไรซ์ของการแพร่กระจายคลื่นคือ คุณสมบัติของการแพร่กระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งสามารถจะอธิบายได้โดยการพิจารณาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาโดยสังเกตที่ตำแหน่งใดๆ ซึ่งโดยที่ทั่วไปจะทำการพิจารณาขนาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ถ้าลักษณะการกวาดหรือการหมุนของเวกเตอร์สนามไฟฟ้ามีลักษณะเป็นอย่างไรแล้วก็จะกล่าวได้ว่าสนามไฟฟ้านั้นมีการโพลาไรซ์ แบบนั้น ซึ่งการกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ลักษณะ ซึ่งได้แก่การกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นวงกลมซึ่งจะเรียกลักษณะแบบนี้ว่าสนามไฟฟ้ามีการโพลาไรซ์ แบบวงกลม (Circular Polarization) การกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นวงรีเราจะเรียกว่าสนามไฟฟ้ามีลักษณะการโพลาไรซ์แบบวงรี (Elliptical Polarization) และการกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นก็จะเรียกว่าสนามไฟฟ้ามีลักษณะการโพลาไรซ์แบบเชิงเส้น (Linear Polarization) ในกรณีของการโพลาไรซ์แบบวงกลมและแบบวงรีนั้นการกวาดหรือหมุนไปของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะมีอยู่ด้วยกัน 2 ลักษณะคือการกวาดหรือการหมุนของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าไปทางขวามือหรือเรียกว่าเป็นการหมุนตามเข็มนาฬิกา และการกวาดหรือการหมุนของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าไปทางซ้ายมือหรือ เรียกว่าเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา

การโพลาไรซ์สามารถพิจารณาได้จากคลื่นหรือสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาโดยกำหนดให้แกน  $\theta, \phi$  คือแกนองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าชั่วขณะของ  $\epsilon_\theta, \epsilon_\phi$  ตามลำดับและคลื่นเดินทางในทิศ  $r$  ซึ่งมีทิศทางเป็นบวกดังรูปที่ 4.18 และพิจารณาที่เวลา  $e^{j\omega t}$  ดังนั้นสนามไฟฟ้าชั่วขณะสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 \bar{\epsilon}(r, \theta, \phi; t) &= \text{Re} \left[ \bar{E}(r, \theta, \phi) e^{j\omega t} \right] \\
 &= \text{Re} \left[ \bar{E}(\theta, \phi) e^{-jkr} e^{j\omega t} \right] \\
 &= \text{Re} \left[ \hat{a}_\theta \bar{E}(\theta, \phi) e^{-jkr} e^{j\omega t} + \hat{a}_\phi \bar{E}(\theta, \phi) e^{-jkr} e^{j\omega t} \right] \\
 &= \text{Re} \left[ \hat{a}_\theta E_\theta^+ e^{j(\omega t - kr)} + \hat{a}_\phi E_\phi^+ e^{j(\omega t - kr)} \right] \\
 &= \hat{a}_\theta E_{\theta 0}^+ \cos(\omega t - kr + \beta_\theta) + \hat{a}_\phi E_{\phi 0}^+ \cos(\omega t - kr + \beta_\phi) \\
 &= \hat{a}_\theta E_\theta + \hat{a}_\phi E_\phi
 \end{aligned} \tag{4.7}$$



$$OB = \left[ \frac{1}{2} \left\{ (E_{\theta 0}^+)^2 + (E_{\phi 0}^+)^2 - \left[ (E_{\theta 0}^+)^4 + (E_{\phi 0}^+)^4 + 2(E_{\theta 0}^+)^2 (E_{\phi 0}^+)^2 \cos(2\Delta\beta) \right]^{1/2} \right\} \right]^2 \quad (4.10)$$

และ

$$\Delta\beta = \beta_{\theta} - \beta_{\phi} \quad (4.11)$$

โดยที่ความต่างเฟส (Phase Difference) จะพิจารณาอยู่ที่  $-180^\circ < \Delta\beta < 180^\circ$  ซึ่งในที่นี้  $\Delta\beta$  คือค่าความต่างเฟส เมื่อ  $\Delta\beta$  มีค่าเป็นลบแสดงว่าเป็นการโพลาริซ์แบบหมุนซ้าย เมื่อมีค่าเป็นบวกแสดงว่าเป็นการโพลาริซ์แบบหมุนขวา และเมื่อ  $\Delta\beta = 0^\circ$  และ  $\Delta\beta = \pm 180^\circ$  จะแสดงว่าเป็นการโพลาริซ์แบบเชิงเส้น

มุมเอียงของวงรีเมื่อเทียบกับแกนขององค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนว  $\theta$  ซึ่งเราใช้เป็นแกนอ้างอิง ดังนั้นมุมของการเอียง (Tilt Angle) จะกำหนดได้โดย

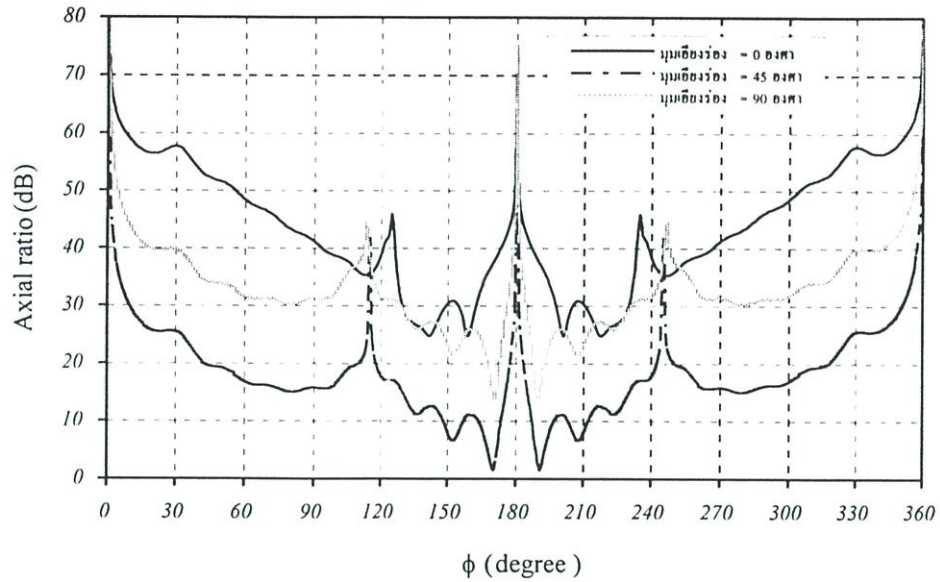
$$\tau = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{2E_{\theta 0}^+ E_{\phi 0}^+}{(E_{\theta 0}^+)^2 - (E_{\phi 0}^+)^2} \cos(\beta_{\theta} - \beta_{\phi}) \right] \text{ เมื่อ } E_{\theta 0}^+ \geq E_{\phi 0}^+ \quad (4.12)$$

$$\tau = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{2E_{\theta 0}^+ E_{\phi 0}^+}{(E_{\theta 0}^+)^2 - (E_{\phi 0}^+)^2} \cos(\beta_{\theta} - \beta_{\phi}) \right] \text{ เมื่อ } E_{\theta 0}^+ < E_{\phi 0}^+ \quad (4.13)$$

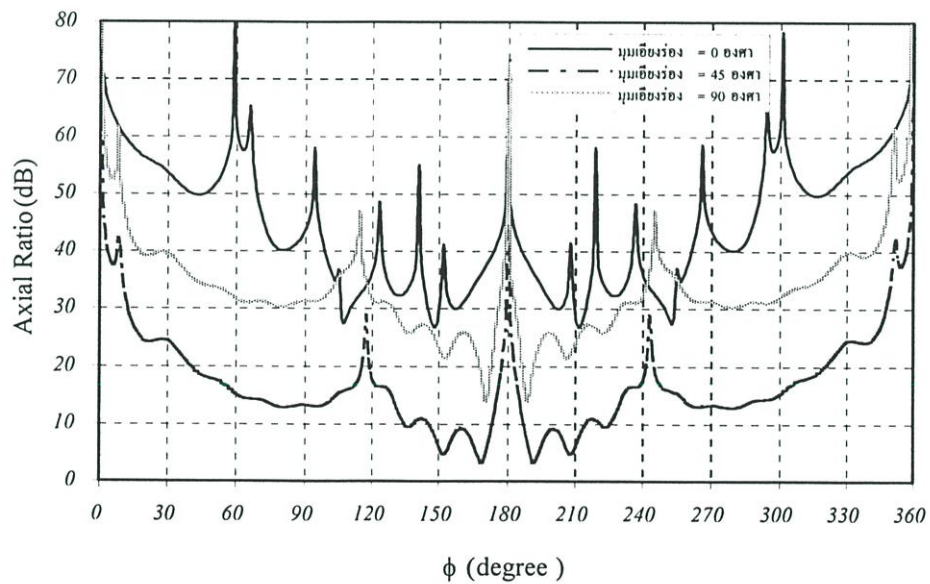
โดยที่  $-90^\circ \leq \tau \leq 90^\circ$

#### 4.4.2 คุณลักษณะการโพลาริซ์ของสายอากาศร่องเดี่ยวบนตัวนำทรงกลม

การโพลาริซ์ของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม พิจารณาจากคุณสมบัติทิศทางของสนามไฟฟ้าที่แพร่กระจายออกไป โดยที่ชนิดของการโพลาริซ์จะพิจารณาจากมุมเอียงของแกน และ อัตราส่วนแกนของสนามไฟฟ้าที่แปรผันตามเวลา ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาการโพลาริซ์ของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวนอนและวางทำมุมเอียงใด ๆ บนตัวนำทรงกลมโดยจะทำการเปรียบเทียบระหว่างวิธีของฟังก์ชันคิกซ์เวกเตอร์และวิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอติก จากผลการคำนวณเห็นว่าเมื่อร่องวางในแนวนอนการโพลาริซ์เป็นแบบเชิงเส้นในแนวตั้ง และร่องวางในแนวตั้งให้การโพลาริซ์เป็นแบบเชิงเส้นในแนวนอนแสดงดังในรูปที่ 4.19 ถึงรูปที่ 4.22

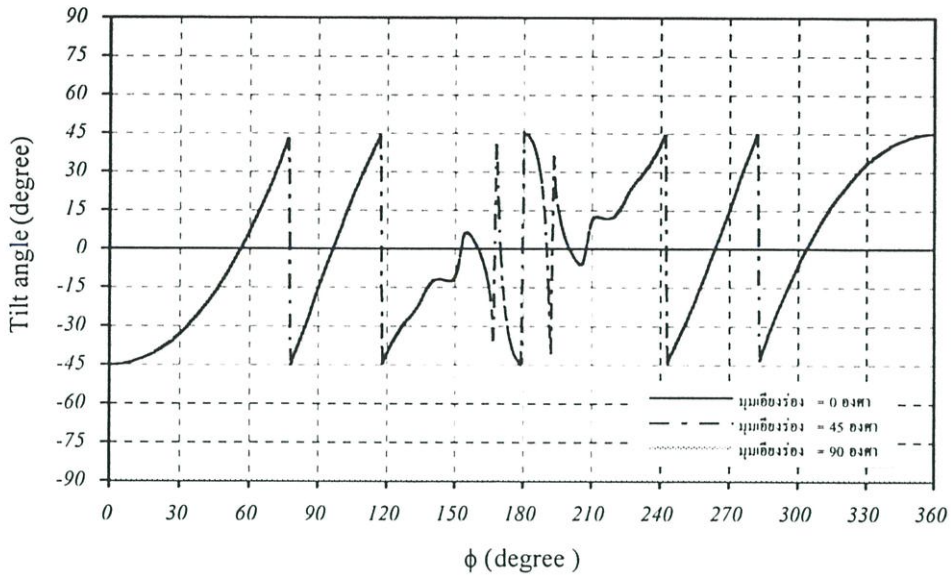


รูปที่ 4.19 อัตราส่วนแกนโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันคิกซ์เวกเตอร์  $ka = 10$

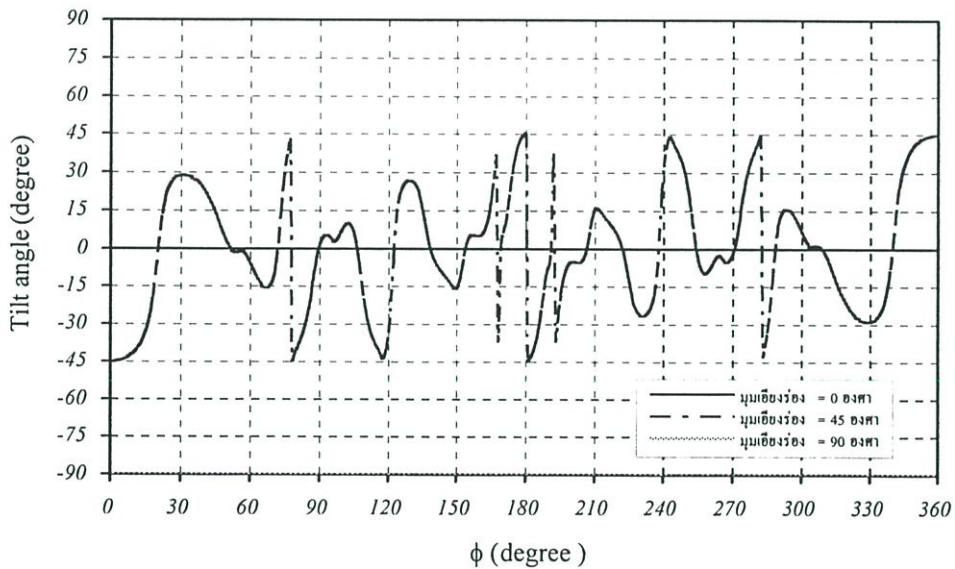


รูปที่ 4.20 อัตราส่วนแกนโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 10$

รูปที่ 4.19 และรูปที่ 4.20 เปรียบเทียบอัตราส่วนแกนของสนามไฟฟ้าระหว่างวิธีฟังก์ชันคิกซ์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเห็นว่าตำแหน่งของปากช่องพิจารณาที่  $\phi = 0^\circ$  อัตราส่วนแกนของสนามไฟฟ้าทั้งสองวิธีเมื่อพิจารณาร่องเอียงทำมุมใด ๆ มีค่าเข้าสู่นันต์ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าร่องเอียงบนโครงสร้างตัวนำทรงกลมจะให้การโพลาไรซ์ แบบเชิงเส้น



รูปที่ 4.21 ค่ามุมเอียงโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันคิกซ์เวกเตอร์  $ka = 10$



รูปที่ 4.22 ค่ามุมเอียงโดยการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก  $ka = 10$

รูปที่ 4.21 และรูปที่ 4.22 เปรียบเทียบค่ามุมเอียงของสนามไฟฟ้าระหว่างวิธีฟังก์ชันคิกซ์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเห็นว่าเมื่อร่องวางแบบแนวอนมุมเอียงสนามไฟฟ้าเท่ากับ  $0^\circ$  ซึ่งเป็นการโพลาไรซ์แบบแนวตั้งและเมื่อร่องวางแบบแนวตั้งมุมเอียงสนามไฟฟ้าเท่ากับ  $-90^\circ$  ซึ่งให้การโพลาไรซ์แบบแนวอน

#### 4.5 สรุป

บทนี้เป็นการคำนวณ และวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศจากสมการสนามไฟฟ้า ระยะไกลในบทที่ 2 และบทที่ 3 โดยคุณลักษณะที่ได้ทำการวิเคราะห์คือคุณลักษณะการแผ่กระจายคลื่นและคุณลักษณะการโพลาไรซ์ของสายอากาศ โดยการวิเคราะห์จะเริ่มจากสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวนอนบนโครงสร้างตัวนำทรงกลม ซึ่งจะทำการเปลี่ยนรัศมีของสายอากาศเป็นค่าต่าง ๆ เพื่อเลือกพารามิเตอร์ที่เหมาะสมจากการคำนวณโดยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกพบว่าเมื่อรัศมีของสายอากาศมีค่าน้อยๆ ทั้งสองวิธีจะให้ผลการคำนวณที่แตกต่างกันเนื่องจากวิธีของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกคิดผลของเทอมกระจายกระจายเข้าไปด้วย แต่เมื่อรัศมีของทรงกลมมีขนาดเพิ่มมากขึ้นผลการคำนวณทั้งสองวิธีมีแนวโน้มใกล้เคียงกันหลังจากนั้นทำการพิจารณาสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงใดๆ บนโครงสร้างตัวนำทรงกลมพบว่าเมื่อร่องเดี่ยววางแบบแนวนอนจะมีเฉพาะองค์ประกอบ  $E_\theta$  เท่านั้น และมีเฉพาะองค์ประกอบ  $E_\phi$  เมื่อร่องเดี่ยววางในแนวตั้งและมีทั้งสององค์ประกอบเมื่อร่องเดี่ยววางทำมุมเอียงใด ๆ และสุดท้ายทำการวิเคราะห์คุณลักษณะการโพลาไรซ์ของสายอากาศ ซึ่งการคำนวณทั้งสองวิธีให้ผลที่สอดคล้องกันคือสายอากาศร่องเดี่ยววางแบบแนวนอนให้การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นในแนวตั้ง และเมื่อร่องเดี่ยววางในแนวตั้งให้การโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นในแนวนอน

## บทที่ 5

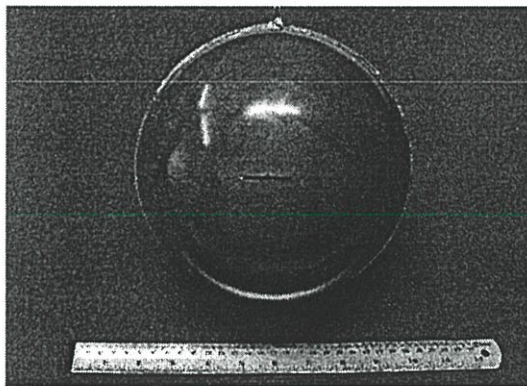
### การทดสอบสายอากาศ

#### 5.1 บทนำ

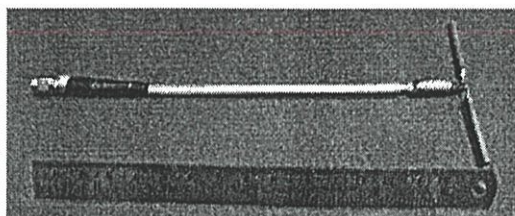
จากบทที่ 4 เป็นผลการวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศโดยวิธีฟังก์ชันศักร์เวกเตอร์ และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติกด้วยวิธีการคำนวณ และในบทนี้จะเป็นการทดสอบคุณลักษณะของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมเพื่อเปรียบเทียบและยืนยันผลที่ได้จากการคำนวณว่ามีความแม่นยำถูกต้องมากน้อยเพียงใด โดยคุณลักษณะที่ทำการเปรียบเทียบคือแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

#### 5.2 การสร้างและการทดสอบสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม

การทดสอบสายอากาศได้ออกแบบสร้างที่ความถี่ 5.25 GHz ซึ่งเป็นความถี่ที่ใช้งานของระบบการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สาย (Wireless LAN) โดยการทดสอบจะทำการสร้างสายอากาศต้นแบบในบางกรณี โดยเริ่มจากสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางตามแนวขนาน ร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง 45 องศาและร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้งบนผิวตัวนำทรงกลม โดยรัศมีของทรงกลมเท่ากับ 10 เซนติเมตร ( $ka = 11$ ) แสดงในรูปที่ 5.1 และสายอากาศส่งแบบไดโพลแสดงในรูปที่ 5.2

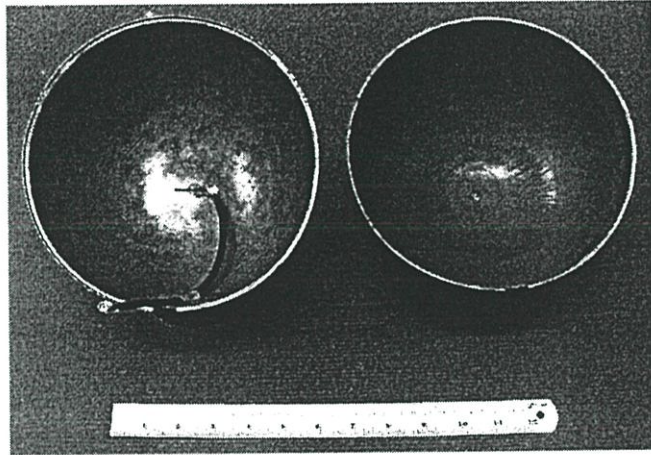


รูปที่ 5.1 สายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม

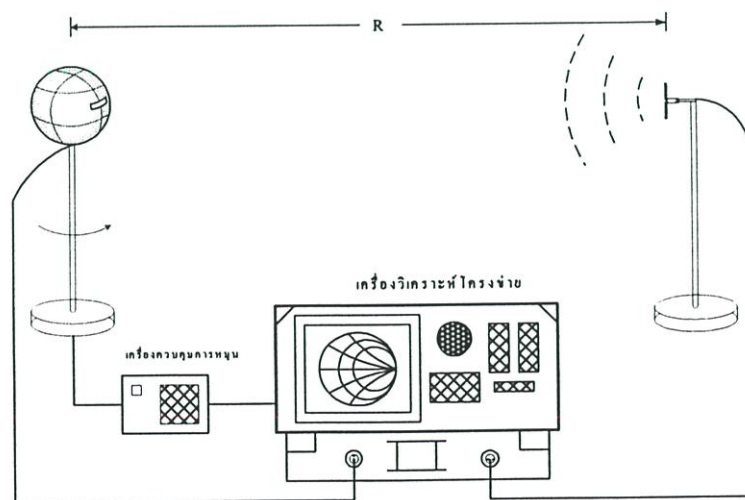


รูปที่ 5.2 สายอากาศส่งแบบไดโพล

การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศจะต้องมีจุดสำหรับป้อนกำลังงานให้สายอากาศ ซึ่งลักษณะการป้อนกำลังงานของสายอากาศที่ออกแบบแสดงดังรูปที่ 5.3 และการจัดเตรียมเครื่องมือในการทดสอบดังแสดงในรูปที่ 5.4 โดยระยะห่างระหว่างสายอากาศส่งกับสายอากาศรับที่ทดสอบต้องมากกว่า  $2D^2/\lambda$  โดยที่  $D$  คือเส้นผ่านศูนย์กลางของสายอากาศ และ  $\lambda$  คือความยาวคลื่นของสายอากาศที่ออกแบบ โดยเครื่องมือที่ใช้ในการทดสอบคือเครื่องวิเคราะห์โครงข่าย ( Network Analyzer ) รุ่น 8720C และใช้สายอากาศไดโพลเป็นสายอากาศทางด้านส่ง



รูปที่ 5.3 จุดป้อนกำลังงานของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม



รูปที่ 5.4 การจัดเตรียมเครื่องมือในการทดสอบสายอากาศ

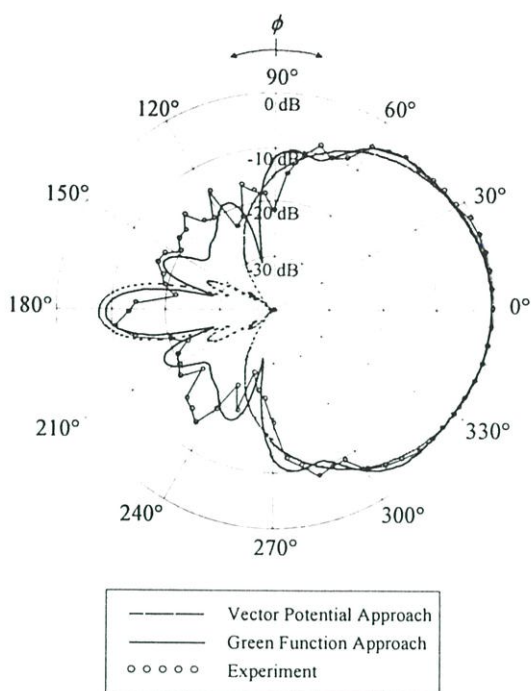
### 5.3 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมจะทำการทดสอบ 3 กรณี คือสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวนอน สายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง 45 องศา และสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้ง ซึ่งแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะพิจารณาในระนาบ  $xy$  หรือระนาบมุมกวาด (Azimuth Plane) และระนาบ  $xz$  หรือระนาบมุมยก (Elevation Plane) ดังนี้

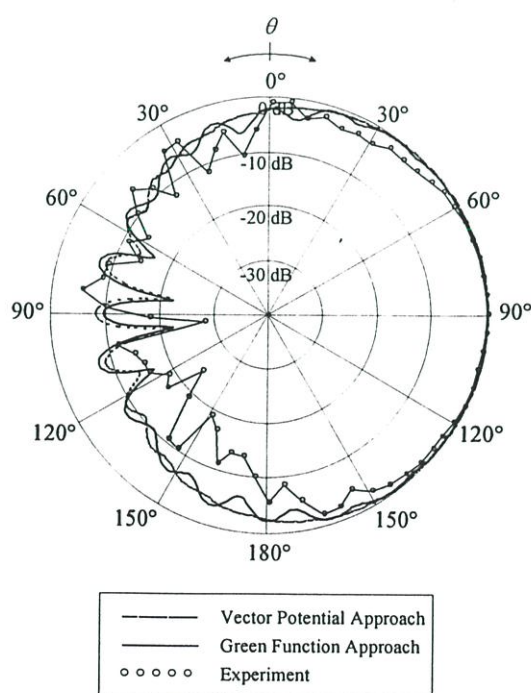
รูปที่ 5.5 และรูปที่ 5.6 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวนอนบนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ  $xy$  และระนาบ  $xz$  โดยทำการเปรียบเทียบทั้งการวิเคราะห์ด้วยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก และการทดสอบสายอากาศที่สร้างขึ้นมาจริง ซึ่งผลที่ได้เมื่อพิจารณาบริเวณลำคลื่นด้านหน้าของสายอากาศพบว่ามีแนวโน้มในลักษณะใกล้เคียงกับผลการทดสอบทั้งวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก ส่วนลำคลื่นทางด้านหลังของสายอากาศวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติกจะให้ผลที่ใกล้เคียงกับการทดสอบมากกว่าวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์

รูปที่ 5.7 และรูปที่ 5.8 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง 45° บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ  $xy$  และระนาบ  $xz$  โดยทำการเปรียบเทียบทั้งการวิเคราะห์ด้วยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก และการทดสอบสายอากาศที่สร้างขึ้นมาจริง ซึ่งผลที่ได้เมื่อพิจารณาบริเวณลำคลื่นด้านหน้าของสายอากาศพบว่ามีแนวโน้มในลักษณะใกล้เคียงกับผลการทดสอบทั้งวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก ส่วนลำคลื่นทางด้านหลังของสายอากาศทั้งวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติกและวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์จะให้ผลที่แตกต่างจากการทดสอบ

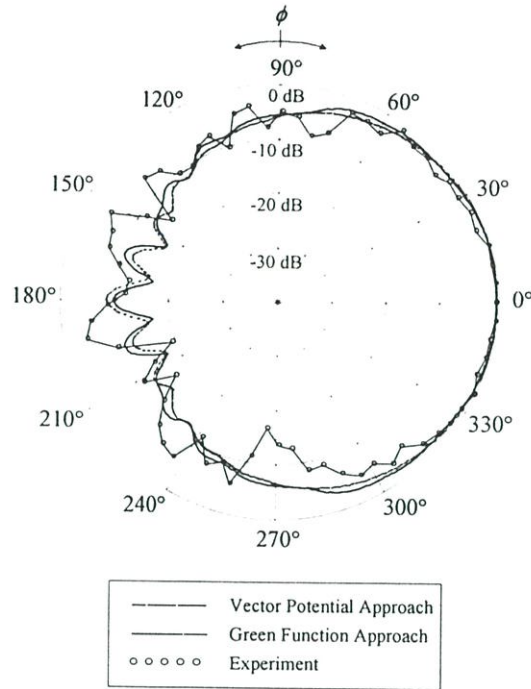
รูปที่ 5.9 และรูปที่ 5.10 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้งบนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ  $xy$  และระนาบ  $xz$  โดยทำการเปรียบเทียบทั้งการวิเคราะห์ด้วยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก และการทดสอบสายอากาศที่สร้างขึ้นมาจริง ซึ่งผลที่ได้เมื่อพิจารณาบริเวณลำคลื่นด้านหน้าของสายอากาศพบว่ามีแนวโน้มในลักษณะใกล้เคียงกับผลการทดสอบทั้งวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก ส่วนลำคลื่นทางด้านหลังของสายอากาศวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติกจะให้ผลที่ใกล้เคียงกับการทดสอบมากกว่าวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์



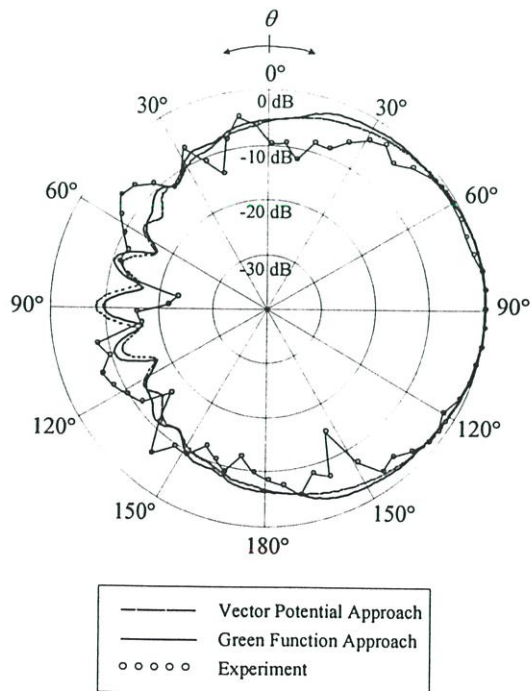
รูปที่ 5.5 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอนบนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ  $xy$



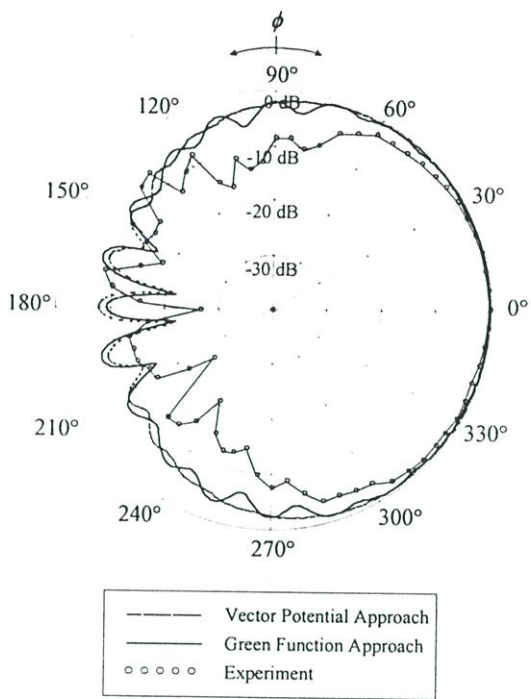
รูปที่ 5.6 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอนบนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ  $xz$



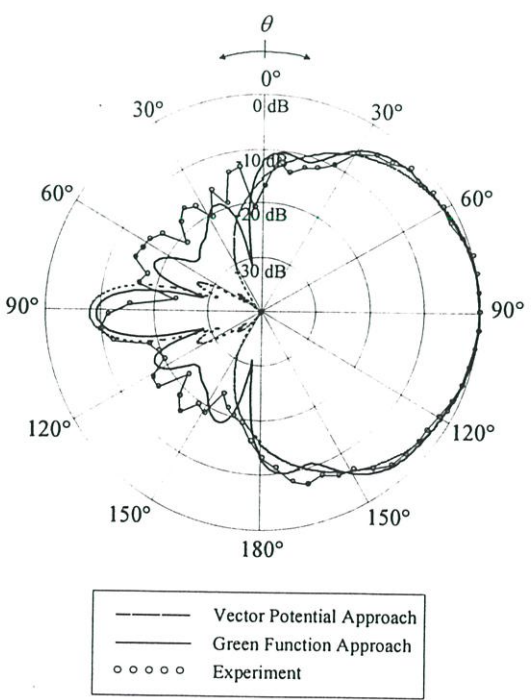
รูปที่ 5.7 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง 45° บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ xy



รูปที่ 5.8 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง 45° บนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ xz



รูปที่ 5.9 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้งบนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ  $xy$



รูปที่ 5.10 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้งบนผิวตัวนำทรงกลมในระนาบ  $xz$

## 5.4 สรุป

บทนี้เป็นการสร้างและการทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ โดยการทดสอบนั้นจะทำในกรณีสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางตามแนวนอน ร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง  $45^\circ$  และร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้งบนผิวตัวนำทรงกลม โดยใช้ขนาดรัศมีของทรงกลมเท่ากับ 10 เซนติเมตร ( $ka = 11$ ) และออกแบบที่ความถี่ 5.25 GHz ซึ่งเป็นความถี่ใช้งานของระบบการสื่อสารโคจรข่ายท้องถิ่นไร้สาย จากผลการทดสอบพบว่าแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศมีแนวโน้มที่สอดคล้องกับการคำนวณทั้ง 2 วิธีโดยเฉพาะลำคลื่นทางด้านหน้าของสายอากาศ ส่วนลำคลื่นทางด้านหลังจะให้ผลที่แตกต่างกันบ้าง และพบว่าวิธีของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกมีความแม่นยำมากกว่าวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์เมื่อพิจารณาร่องเดี่ยวในกรณีต่าง ๆ

## บทที่ 6

# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

### 6.1 บทนำ

บทนี้จะกล่าวถึงการสรุปเนื้อหาโดยรวม ข้อเสนอแนะ และแนวทางในการพัฒนาสายอากาศแบบร่องบนผิวตัวนำทรงกลม โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษา การวิเคราะห์ การสร้าง และการทดสอบสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม แต่โดยรวมของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเน้นเนื้อหาในทางทฤษฎีเป็นส่วนหลักโดยในการวิเคราะห์นั้นจะพิจารณาเฉพาะสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายนอกของทรงกลมเท่านั้นโดยทฤษฎีที่นำมาใช้ คือ วิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิกสำหรับโครงสร้างของสายอากาศทรงกลมแบบร่อง ซึ่งวิธีนี้จะให้ผลการคำนวณที่แม่นยำมากยิ่งขึ้นเนื่องจากได้คิดผลรวมการกระจายกระจายของสนามเข้าไปด้วย ดังนั้นจึงทำการสร้างและทดสอบสายอากาศเพื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณว่าให้ความแม่นยำมากน้อยเพียงใด ซึ่งในการคำนวณได้ใช้วิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ซึ่งมีผู้ที่ทำการศึกษามาแล้ว และวิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิกมาใช้ในการเปรียบเทียบกับผลการทดสอบสายอากาศ

### 6.2 สรุปเนื้อหาโดยรวม

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ ขอบเขตการวิจัย ขั้นตอนการศึกษา และเนื้อหาวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 กล่าวถึงการพิสูจน์สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ ซึ่งจะเริ่มต้นด้วยสมการคลื่น และพิจารณาโหมดพื้นฐานของสนามในโหมดรวมของตัวนำทรงกลม คือ โหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวางและโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวาง จากนั้นพิจารณาโครงสร้างของสายอากาศที่เป็นช่องเปิดบนผิวตัวนำทรงกลม สมการของสายอากาศแบบร่องเดี่ยวรอบผิวตัวนำทรงกลม และสมการของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม โดยจะสมมติการกระจายแรงดันบริเวณปากร่องให้มีการเปลี่ยนแปลงในรูปฟังก์ชันลักษณะไซน์ และสุดท้ายพิจารณาร่องเดี่ยววงทำมุมเอียงใด ๆ บนผิวตัวนำทรงกลม

บทที่ 3 กล่าวถึงการพิสูจน์สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระจายออกจากร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมโดยวิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิกซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์อีกวิธีหนึ่งที่ได้รับการยอมรับและให้การทำนายผลที่แม่นยำกว่าวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์เนื่องจากได้รวมผลการกระจายเข้าไปด้วย การพิสูจน์จะเริ่มจากสมการแมกซ์เวลล์ในรูปไดโอดิกและฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าและแบบแม่เหล็ก ชนิดของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกในช่องว่างอิสระของโครงสร้างตัวนำทรงกลม และ

ขั้นตอนสุดท้ายจะได้ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแบบไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กเพื่อนำไปหาสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมในกรณีต่าง ๆ โดยที่แหล่งกำเนิดความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กบริเวณปากร่องจะได้จากการกระจายแรงดันบริเวณปากร่องมีการเปลี่ยนแปลงในรูปฟังก์ชันลักษณะไซน์

บทที่ 4 กล่าวถึงการนำสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลที่ได้จากบทที่ 2 และบทที่ 3 มาคำนวณคุณลักษณะของสายอากาศ โดยคุณลักษณะของสายอากาศที่ทำการวิเคราะห์คือ คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นและคุณลักษณะการโพลาไรซ์ของสายอากาศ โดยการวิเคราะห์จะเริ่มจากสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวนอนและสายอากาศร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียงใดๆ บนผิวตัวนำทรงกลมโดยทำการเปลี่ยนแปลงรัศมีของทรงกลมที่ค่าต่าง ๆ ซึ่งจากการคำนวณทั้งสองวิธีพบว่าคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศให้ผลที่แตกต่างกันเมื่อรัศมีทรงกลมมีขนาดน้อย อันเนื่องมาจากผลการระจัดกระจายของสนาม และเมื่อรัศมีของทรงกลมมีขนาดใหญ่ขึ้นคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกัน

บทที่ 5 เป็นการสร้างและการทดสอบสายอากาศแบบร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลม ซึ่งกรณีที่ทำทดสอบคือ ร่องเดี่ยวที่วางแบบแนวนอน ร่องเดี่ยวที่วางทำมุมเอียง  $45^\circ$  และร่องเดี่ยวที่วางในแนวตั้งบนผิวตัวนำทรงกลมโดยใช้รัศมีของทรงกลมเท่ากับ 10 เซนติเมตร ( $ka = 11$ ) และออกแบบที่ความถี่ 5.25 GHz ซึ่งเป็นความถี่ใช้งานของระบบการสื่อสารโครงข่ายท้องถิ่นไร้สาย จากผลการทดสอบพบว่าแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศมีแนวโน้มที่สอดคล้องกับการคำนวณทั้ง 2 วิธีโดยเฉพาะลำคลื่นทางด้านหน้าของสายอากาศ ส่วนลำคลื่นทางด้านหลังจะแตกต่างกันบ้าง และพบว่าวิธีของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกมีความแม่นยำมากกว่าวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์เมื่อพิจารณาร่องเดี่ยวในกรณีต่าง ๆ

### 6.3 ข้อเสนอแนะและแนวทางในการพัฒนา

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงไว้แล้วในบทที่ผ่านมา การคำนวณจะให้ผลที่ยอมรับได้ แต่ถ้าต้องการพิจารณาคุณลักษณะของสายอากาศให้ละเอียดมากขึ้นต้องพิจารณาผลภายในโครงสร้างของทรงกลมด้วย โดยการพิสูจน์ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกภายในทรงกลมและใช้วิธีโมเมนต์ร่วมด้วยจะทำให้สามารถอธิบายคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศได้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Y. Mushiake, and R.E. Webster., "Radiation Characteristics with Power Gain for Slots on a Sphere" *IRE Trans. Antennas Propagat*, vol.AP-5, no.1, pp.47-55, Jan. 1957.
- [2] S. Horiguchi, Y. Ishozone, and Y. Mushiake., "Improvement on Polarization Property of Turnstile Spherical Array Antenna" *IECE Trans*, vol.E67, no.8, pp.451-453, Aug. 1984.
- [3] K.K. Mei, and M. Meyer., "Solution on Spherical Anisotropic Antennas" *IEEE Trans. Antennas and Propagation. Mag*, July. 1964.
- [4] Y. Rahma-Samii., "Useful Coordinate Transformation for Antenna Applications" *IEEE Trans. Antennas and Propagation. Mag*, vol. AP-24, pp. 571-574, July. 1979.
- [5] F.C. Chang., "Novel Coordinate Transformations for Antenna Applications" *IEEE Trans. Antenna and Propagation. Mag*, vol. AP-32, pp.1292-1297, Dec. 1984.
- [6] H. Burger., "Use of Euler rotation Angles for Generating Antenna Patterns" *IEEE Antennas and Propagation. Mag*, vol.37, pp.56-63, April. 1995.
- [7] T. Miligan., "More Applications of Euler Rotation Angles" *IEEE Antennas and Propagation. Mag*. vol.41, pp.78-83, Aug. 1999.
- [8] R.F. Harrington., *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, New York, McGraw-Hill, 1961.
- [9] R.C. Johnson, and H. Jasik., *Antenna Engineering Handbook*, McGraw-Hill, INC. 1984.
- [10] J.A. Stratton., *Electromagnetic Theory*, New York and London, McGraw-Hill, 1941.
- [11] K. Erwin., *Advance Engineering Mathematics*, 8<sup>th</sup> ed, John Wiley & Sons, INC.1999.
- [12] C.A. Balanis., *Advanced Engineeing Electromagnetic*, John Wiley & Sons, INC. 1989.
- [13] C.A. Balanis., *Antenna Theory Analysis and Design*, 2<sup>nd</sup> ed, John Wiley & Sons, INC. 1997.
- [14] G.B. Arfken, and H.I. Weber., *Mathematical Methods for Physicistes*, 4<sup>th</sup>ed, Sandiego, CA, Academic Press. 1995.
- [15] C.T. Tai., *Dyadic Green Function in Electromagnetic Theory*, 1<sup>st</sup> ed, New York, IEEE Press, 1971.
- [16] C.T. Tai., *Dyadic Green Function in Electromagnetic Theory*, 2<sup>nd</sup> ed, New York, IEEE Press, 1993.
- [17] C. Phongcharoenpanich., "A Spherical Slot Array Antenna" Doctor Thesis, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, 2001.

- [18] J.D. Kraus., *Antennas*, 2<sup>nd</sup> ed, New York, McGraw-Hill, 1998.
- [19] R.E. Collin., *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, 1985.
- [20] E.C. Young., *Vector and Tensor Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed, New Yoke , Dekker. 1993.
- [21] K.W. Leung., “Theory and Experiment of A Rectangular Slot on A Sphere” *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol.46, pp.2117-2123, December. 1998.
- [22] K.W. Leung., “Analysis of The Zonal and Rectangular Slots on A Conducting Spherical Cavity” *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol.49, pp.1739-1745, December. 2001.
- [23] C. Phongcharoenpanich, P. Wounchoum, S. Kosulvit, R. Wongsan, and M. Krairiksh., “Characteristics of an Omnidirectional Antenna using Circular Array of Slot on Cylinder for TV Broadcasting System” *ISCIT*, pp.207-210, 2001.
- [24] D.Boonrod, C.Phongcharoenpanich, and M.Krairiksh., “Theoretical Analysis of Arbitrary Inclination of a Rectangular Slot Antenna on Spherical Conducting Surface” *Proceedings of the 2003 International Conference on Information and Communication Technologies (ICT 2003)*, pp.283-291, April. 2003.

## ภาคผนวก ก

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{ก.1})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{ก.2})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{ก.3})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{ก.4})$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (\text{ก.5})$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad (\text{ก.6})$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (\text{ก.7})$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \quad (\text{ก.8})$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (\text{ก.9})$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (\text{ก.10})$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (\text{ก.11})$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (\text{ก.12})$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{n.13})$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{n.14})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad (\text{n.15})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad (\text{n.16})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad (\text{n.17})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad (\text{n.18})$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad (\text{n.19})$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad (\text{n.20})$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{n.21})$$

$$\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1 \quad (\text{n.22})$$

$$\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1 \quad (\text{n.23})$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (\text{n.24})$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{n.25})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (\text{n.26})$$

### ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (\text{ก.27})$$

$$e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha \quad (\text{ก.28})$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \quad (\text{ก.29})$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad (\text{ก.30})$$

$$\tan \alpha = -j \left( \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}} \right) \quad (\text{ก.31})$$

$$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad (\text{ก.32})$$

$$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad (\text{ก.33})$$

$$\tanh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \quad (\text{ก.34})$$

$$\sinh(j\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2} \quad (\text{ก.35})$$

$$\cosh(j\alpha) = \cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad (\text{ก.36})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ก.37})$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \dots, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{ก.38})$$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเบสเซลและฟังก์ชันแฮงเกิล

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{ก.39})$$

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{ก.40})$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (\text{ก.41})$$

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (\text{ก.42})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^n J_{n+1}(x) \quad (\text{ก.43})$$

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + jY_n(x) \quad (\text{ก.44})$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - jY_n(x) \quad (\text{ก.45})$$

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) \quad (\text{ก.46})$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) \quad (\text{ก.47})$$

$$j_n(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{n\pi}{2} - x\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{ก.48})$$

$$y_n(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{n\pi}{2} - x\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{ก.49})$$

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + jy_n(x) \quad (\text{ก.50})$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - jy_n(x) \quad (\text{ก.51})$$

$$h_n^{(1)}(x) = \frac{1}{x} j^{-(n+1)} e^{jx}, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{ก.52})$$

$$h_n^{(2)}(x) = \frac{1}{x} j^{(n+1)} e^{-jx}, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{ก.53})$$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเลอจองด์

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (\text{ก.54})$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x) \quad (\text{ก.55})$$

$$P_n^m(x) = 0, \quad m > n \quad (\text{ก.56})$$

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n-m} P_n^m(x) \quad (\text{ก.57})$$

$$P_n^m(x) = P_{-n-1}^m(x) \quad (\text{ก.58})$$

$$\frac{d}{dx} P_n^m(x) = \frac{(n+m)P_{n-1}^m(x) - nxP_n^m(x)}{1-x^2} \quad (\text{ก.59})$$

$$\frac{d}{d\theta} P_n^m(x) = \frac{1}{2} [(n-m+1)(n+m)P_n^{m-1}(x) - P_n^{m+1}(x)] \quad (\text{ก.60})$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (\text{ก.61})$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (\text{ก.62})$$

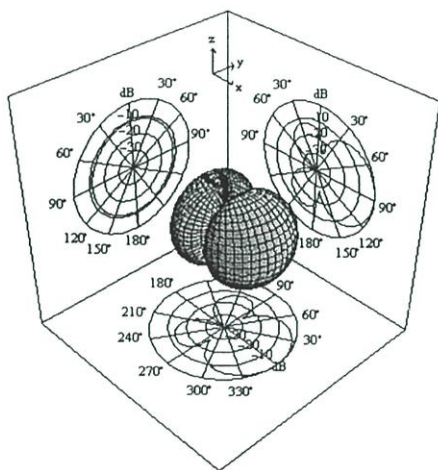
$$\int_0^\pi [P_n^m(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (\text{ก.64})$$

$$\int_0^\pi \left[ \left( \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{nP_n^m}{\sin\theta} \right)^2 \right] \sin\theta d\theta = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (\text{ก.65})$$

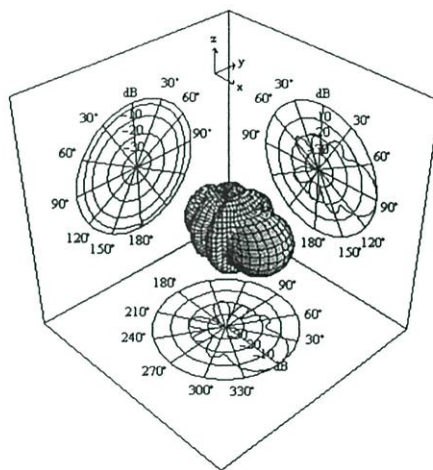
## ภาคผนวก ข

### จำนวนผลการรวมพจน์องค์ประกอบของคลื่น

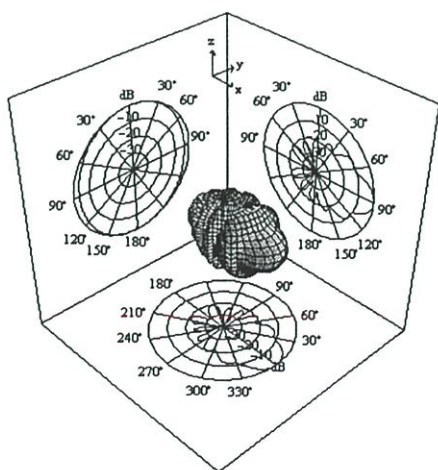
จากสมการสนามไฟฟ้าระยะไกลของสายอากาศร่องเดี่ยวบนผิวตัวนำทรงกลมโดยวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ และวิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิกจะเกิดจากการรวมเทอม  $m, n$  จนถึงอนันต์แต่ในทางปฏิบัติไม่สามารถทำได้ ดังนั้นจึงต้องเลือกจำนวนครั้งของการ Summation ให้เหมาะสมและยังสามารถให้ผลการคำนวณที่แม่นยำโดยพิจารณาจากเทอม  $m, n$  ที่ให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นและค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศ Converge เมื่อพิจารณาแต่ละขนาดรัศมีของตัวนำ เช่นเมื่อพิจารณารัศมีของตัวนำทรงกลม  $ka = 11$



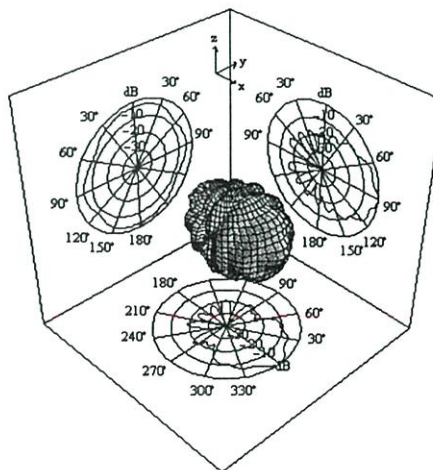
$(m, n = 2)$



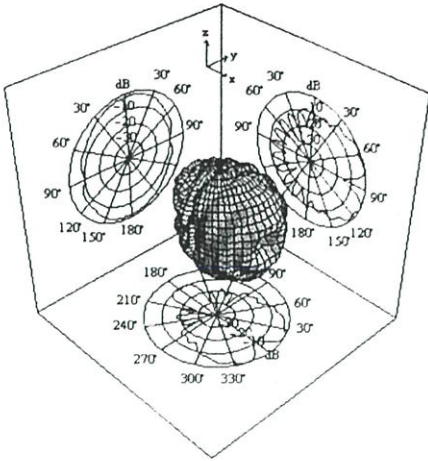
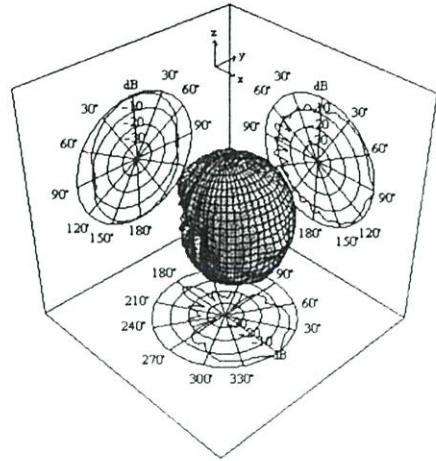
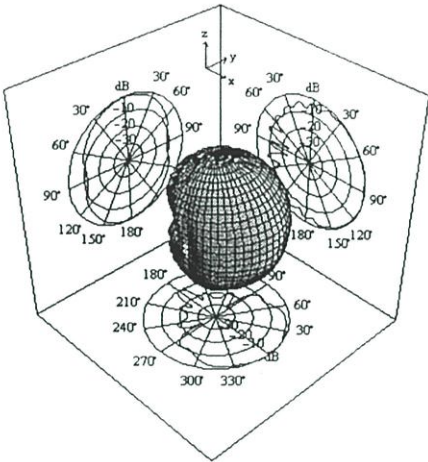
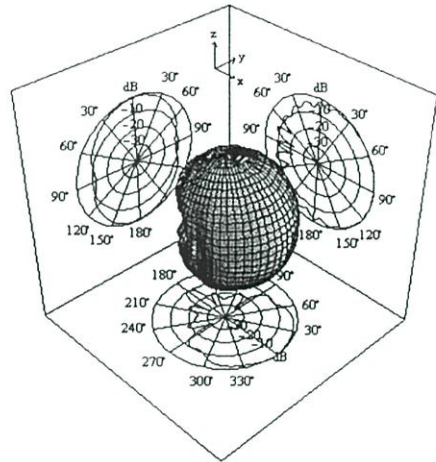
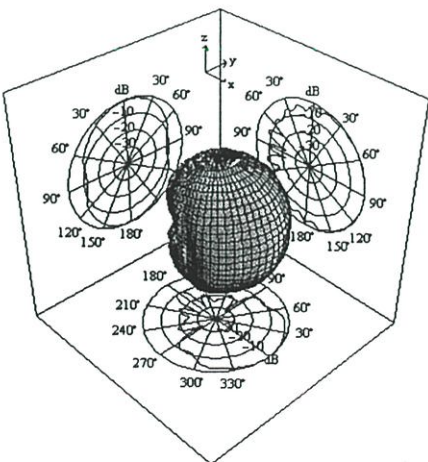
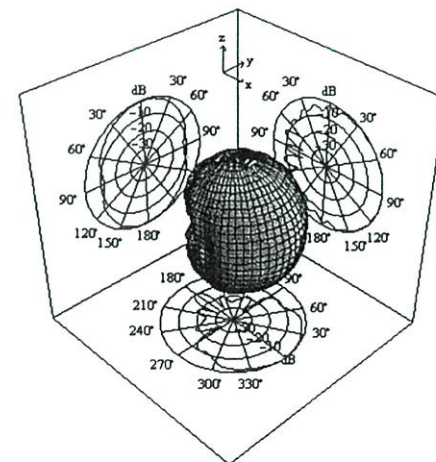
$(m, n = 4)$



$(m, n = 6)$



$(m, n = 8)$

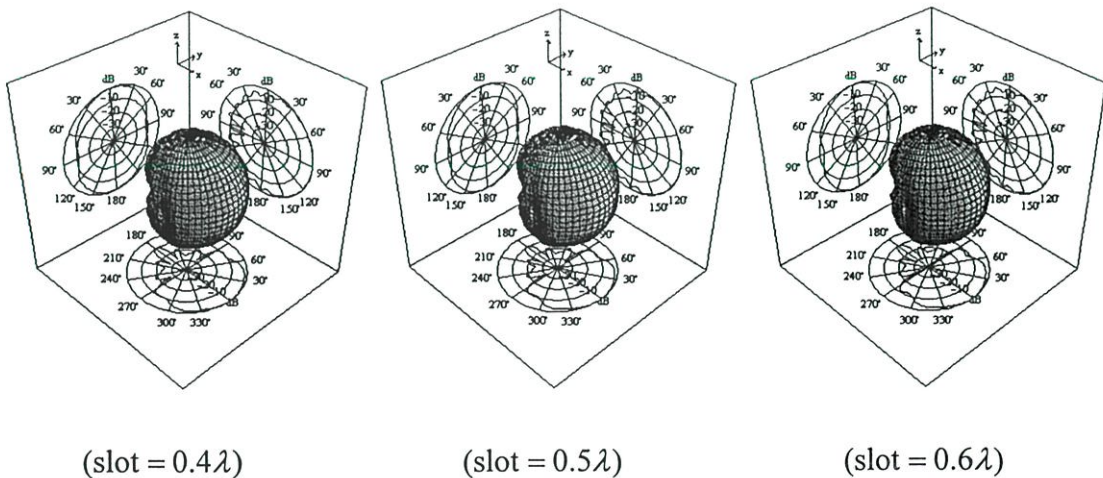
 $(m, n = 10)$  $(m, n = 12)$  $(m, n = 14)$  $(m, n = 16)$  $(m, n = 18)$  $(m, n = 20)$ 

รูปที่ ข.1 พิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเพื่อเลือก Summation  $m, n$  เมื่อ  $ka = 11$

ตารางที่ ข.1 พิจารณาค่าสภาพเจาะจงทิศทางเพื่อเลือก Summation  $m, n$  เมื่อ  $ka = 11$

เทอม ( $m, n$ )	Directivity (dBi)	เทอม ( $m, n$ )	Directivity (dBi)
2	4.2189	14	4.0526
4	8.8050	16	4.6100
6	14.8605	18	4.5339
8	12.6151	20	4.5419
10	8.2515	22	4.5413
12	6.8337	24	4.5413

จากรูปที่ ข.1 และตารางที่ ข.1 เมื่อพิจารณาขนาดรัศมีของตัวนำทรงกลม  $ka = 11$  จำนวนเทอมของการ Summation ที่เหมาะสมคือ ( $m, n = 20$ ) เนื่องจากให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นและค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศ Converge ซึ่งการเลือกจำนวน Summation ของ  $m, n$  เมื่อ  $ka$  มีค่าต่าง ๆ พิจารณาได้จากรูปที่ 4.2 และถ้าพิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเมื่อเปลี่ยนขนาดความยาวของร่องเดี่ยวแสดงได้ดังรูปที่ ข.2 จะเห็นว่าเมื่อขนาดของร่องเปลี่ยนแปลงจะทำให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศเปลี่ยนแปลง โดยเมื่อขนาดความยาวของร่องเพิ่มขึ้นจะทำให้ความกว้างของลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งมีค่าลดลง



รูปที่ ข.2 พิจารณาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเมื่อเปลี่ยนความยาวของร่อง

## ประวัติผู้เขียน

นายดำรง บุญรอด เกิดเมื่อวันที่ 13 กุมภาพันธ์ พ.ศ.2522 ที่อำเภอท่าม่วง จังหวัดลพบุรี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปีการศึกษา 2544 และในปีการศึกษา 2545 ได้ศึกษาต่อระดับปริญญาโท วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม