สื่อมัลติมีเดียคณิตศาสตร์สำหรับเยาวชนรุ่นใหม่

MULTIMEDIA MATH FOR YOUNGSTERS

ณัฐศนันท์ เพชระบูรณิน

ทิพย์สุดา เทพสุภรณ์กุล

ศศินพร ศรีสมมาตรวานิช

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

สื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์สำหรับเยาวชนรุ่นใหม่
MULTIMEDIA MATH FOR YOUNGSTERS

ณัฐสนันท์ เพชระบูรณิน
ทิพย์สุดา เทพสุภรณ์กุล
ศศินพร ศรีสมมาตรวนิช

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2556

Multimedia Math for Youngsters

NATSANAN PETCHARATBURANIN
TIPSUDA TAPSUPORNKUL
SASINPORN SRISOMMATWANIT

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อโครงงานพิเศษ สื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์สำหรับเยาวชนรุ่นใหม่
Multimedia Math for Youngsters

ชื่อนักศึกษา นายณัฐสนันท์ เพชระบูรณิน 53050036
นางสาวทิพย์สุดา เทพสุภรณ์กุล 53050041
นางสาวศศินพร ศรีสมมาตรวนิช 53050113

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา อ.พรชัย ชัยสนิท

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม อ.จินดา ไชยช่วย

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.ภัคคินี ชิตสกุล ประธานกรรมการ	
อ.พุทธพร วานิชกร กรรมการ	
อ.จินดา ไชยช่วย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อโครงงานพิเศษ	สื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์สำหรับเยาวชนรุ่นใหม่ Multimedia Math for Youngsters
ชื่อนักศึกษา	นายณัฐสนันท์ เพชระบูรณิน 53050036 นางสาวทิพย์สุดา เทพสุภรณ์กุล 53050041 นางสาวศศินพร ศรีสมมาตรวนิช 53050113
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อ.พรชัย ชัยสนิท
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อ.จินดา ไชยช่วย

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนในทางวิชาคณิตศาสตร์ ให้อยู่ในรูปแบบของสื่อมัลติมิเดียบนคอมพิวเตอร์ โดยได้กล่าวถึงการทำสื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์เรื่องตรีโกณมิติ (Trigonometry) โดยใช้โปรแกรม Adobe Captivate 6.0 เป็นหลัก ภายในสื่อจะประกอบไปด้วยตำนานตรีโกณมิติ,สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส,อัตราส่วนตรีโกณมิติ, อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $30°, 45°, 60°$ และ โจทย์แบบทดสอบ ซึ่งในแต่ละหัวข้อจะมีวิดิโอและเนื้อหาประกอบเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจ

คำสำคัญ : ตรีโกณมิติ, สื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์

Title	**Multimedia Math for Youngsters**
Students	Mr. Natsanan Petcharaburanin 53050036
	Miss Tipsuda Tapsupornkul 53050041
	Miss Sasinporn Srisommatwanit 53500113
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2013
Advisor	Mr. Pornchai Chaisanit
Co-Advisor	Mr. Chinda Chaichuay

ABSTRACT

In this special Problem, education media for learning Mathematics is developed as a multimedia program. The making process is carried out on the subjects of Trigonometry using Adobe Captivate 6.0 as a main development tool. The contents included in the media are the trigonometry legend, properties of triangles and the Pythagorean Theorem , trigonometric ratios , trigonometric ratios of angles $30°, 45°, 60°$, as well as the self - test problems. Each selected topic contains both videos and detailed contents for better understanding.

Keyword : Trigonometry, Multimedia Math

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง “สื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์สำหรับเยาวชนรุ่นใหม่” ได้ประสบกับปัญหาและอุปสรรคต่างๆมากมาย และการแก้ไขปัญหาเหล่านี้ไม่สามารถแก้ไขปัญหาและอุปสรรคดังกล่าวได้หากขาดบุคคลเหล่านี้ อาจารย์จินดา ไชยช่วย และ อาจารย์พรชัย ชัยสนิท ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้และได้ให้ความรู้ คำแนะนำและแนวทางในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้อีกทั้งยังเป็นกำลังใจในการทำงาน

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณท่าน รศ.ภัคคินี ชิตสกุลประธานกรรมการสอบและท่าน อ.พุทธพร วานิชกร กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนในการทำปัญหาพิเศษและเป็นกำลังใจให้มาโดยตลอด เพื่อนๆสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่คอยแลกเปลี่ยนความคิดเห็น และให้กำลังใจในการทำงานครั้งนี้ เจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่อำนวยความสะดวกในการทำงานต่างๆ

นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์ในด้านต่างๆจากผู้ที่เกี่ยวข้องที่ไม่สามารถเอ่ยนามได้หมดในที่นี้ ผู้จัดทำขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

ผู้จัดทำ
กุมภาพันธ์ 2557

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

สารบัญรูป(ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย

ในปัจจุบันเทคโนโลยีสื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ได้มีการนำเสนอในรูปแบบที่หลากหลายมากขึ้นเพื่อที่จะให้เยาวชนได้สามารถประยุกต์ใช้ควบคู่ไปกับการเรียนในตำราเทคโนโลยีสื่อการเรียนการสอนที่ผู้จัดทำคิดค้นขึ้นนี้จะสามารถทำให้เยาวชนหันมาสนใจที่จะศึกษามากขึ้นได้ เนื่องจากผู้จัดทำ จะพัฒนาให้สื่อการเรียนการสอนมีเทคนิคในการนำเสนอที่เป็นขั้นเป็นตอน มีสีสันที่สวยงาม เนื้อหากะทัดรัด เข้าใจง่าย และสามารถศึกษาได้ทุกที่โดยผ่านการนำเสนอออกมาในรูปแบบของโปรแกรม

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ปัญหาพิเศษนี้ต้องการสร้างสื่อการสอนแนวใหม่เพื่อจูงใจเยาวชนให้มาสนใจการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์และสามารถทำความเข้าใจเองได้อย่างถ่องแท้ และถูกต้องตามหลักวิชา โดยใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่มาเป็นอุปกรณ์ในการเรียนรู้

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1. เป็นโปรแกรมช่วยพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ สำหรับเยาวชนที่อยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นเรื่องตรีโกณมิติ

2. เป็นโปรแกรมที่สามารถทำให้เข้าใจได้โดยง่าย ไม่มีความยุ่งยากซับซ้อนเหมาะสมกับวัยในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

3. รูปแบบของโปรแกรมจะเน้นให้มีกราฟฟิกที่น่าใช้ สีสันสดใส เพื่อให้เยาวชนสนใจมากขึ้นและใช้เวลาในการศึกษาเรียนรู้ได้เป็นเวลานานขึ้น

4. เป็นโปรแกรมช่วยพัฒนาที่สามารถโต้ตอบเพื่อทดสอบความรู้ของเยาวชนได้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เพื่อให้เยาวชนมีทักษะทางด้านคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์มากขึ้น

2. เพื่อใช้เป็นสื่อการเรียนการสอนระหว่างครูกับผู้เรียน ให้มีประสิทธิภาพทางการศึกษามากขึ้น

3. เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจ และมีทัศนะคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์มากขึ้น

สำหรับผู้ใช้สื่อมัลติมิเดีย

1. ได้รับความรู้จากที่ผู้จัดทำได้พัฒนาสื่อการเรียนการสอน ทำให้ง่ายต่อการเข้าถึงการศึกษา ค้นคว้า

2. ได้รู้เท่าทันเทคโนโลยีสมัยใหม่ สามารถปรับตัวเรียนรู้กับเทคโนโลยีใหม่ๆได้

3. ทำให้ผู้ใช้งานได้ใช้เวลาว่างให้เกิดประโยชน์ และไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการศึกษา

1.5 ขั้นตอนการทำงาน

1. ศึกษาและทำความเข้าใจในปัญหาและวัตถุประสงค์ ความต้องการต่างๆ และจำกัดไว้ซึ่งของเขตของปัญหา

2. ศึกษาเนื้อหาของหลักสูตรของการเรียนการสอนทางคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น เรื่องตรีโกณมิติ เพื่อใช้เป็นหลักการใน การสร้างโปรแกรม โดยยึดหลักของเนื้อหาที่มีความใกล้เคียงกันให้มากที่สุด

3. ศึกษาโปรแกรม Adobe Illustrator CS3 เพื่อนำไปใช้การออกแบบและตกแต่งรูปภาพต่างๆที่ใช้ในโปรแกรมนี้

4. ศึกษาโปรแกรม Macromedia Authoware 7.0 เพื่อใช้ในการสร้างสื่อที่โต้ตอบกับผู้ใช้ (Interative) ได้โดยตรง

5. ออกแบบแผนผังการทำงาน ออกแบบส่วนที่ติดต่อกับผู้ใช้ (User Interface) ต่างๆให้มีลูกเล่นที่รองรับกับเหตุการณ์ต่างๆได้

6. เริ่มพัฒนาโปรแกรมโดยเริ่มจากการสร้างส่วนที่ผู้ติดต่อกับผู้ใช้ (User Interface) ให้มีความสวยงาม มีสีสันที่สดใส สอดคล้องกับที่ได้ออกแบบมา

7. เขียนภาษาโปรแกรม (Code) ให้สอดคล้องกับเหตุการณ์ต่างๆ จากผู้ใช้เพื่อให้เกิดการโต้ตอบในสื่อการเรียนการสอน

8. ทอสอบโปรแกรมและแก้ไขโปรแกรมให้มีความสมบูรณ์ที่สุด

9. จัดทำเอกสารประกอบโปรแกรม

บทที่ 2

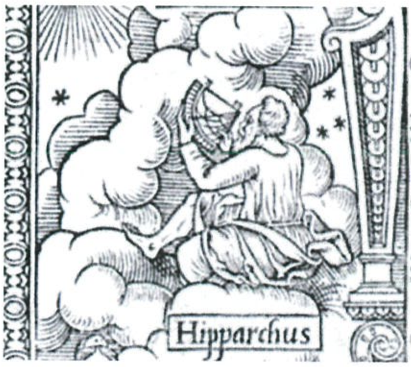
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 เนื้อหาทางคณิตศาสตร์

2.1.1 ประวัติความเป็นมาของตรีโกณมิติ

ตรีโกณมิติ (Trigonometry)พบบันทึกที่อยู่ในRhind papyrus (กระดาษกกที่พบณเมือง Rhind) ที่เขียนไว้เกี่ยวกับ cotangent ของมุมที่ฐานของพีระมิดและพบตารางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนแผ่นดินเหนียวของชาวบาบิโลน(Plimpton 322) ในตารางเมื่อกำหนดด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะบอกความยาวของด้านที่สามถ้าได้ศึกษาคณิตศาสตร์สมัยเมโสโปเตเมียโบราณพบว่ามีการใช้ตรีโกณมิติ

ฮิปปาร์ชัส(Hipparchus of Nicaea :180 – 125 BC) เป็นนักดาราศาสตร์ชาวกรีกจากบันทึกในตำราของโตเลมี

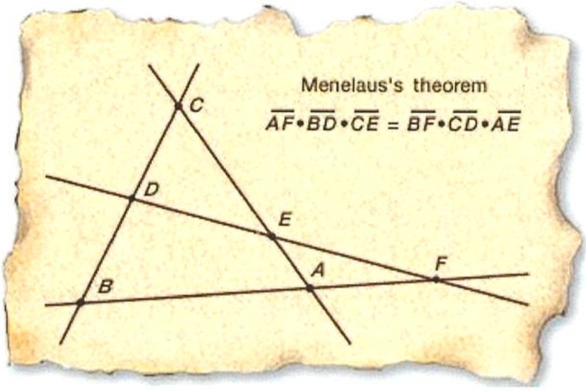


โตเลมี(Claudius Ptolemy of Alexandria : A.D. 150) นักดาราศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกได้เขียนตำราชื่อ “Syntaxismathematica” หรือ “Mathematical collection”

1.)กล่าวถึงคำจำกัดความของรูปสามเหลี่ยมบนทรงกลมและได้รวบรวมทฤษฎีของรูปสามเหลี่ยมบนทรงกลมในแบบเดียวกับทฤษฎีของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบของยุคลิดเช่นทฤษฎีเกี่ยวกับผลรวมของ

มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมบนทรงกลมมากกว่า 180 องศาและการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมบนทรงกลมเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสามมุมมุมต่อมุมซึ่งรูปสามเหลี่ยมบนระนาบที่มีมุมเท่ากันสามมุมอาจไม่เท่ากันทุกประการ 2.)เรื่องดาราศาสตร์ 3.)เป็นทฤษฎีบทที่เมเนเลาส์ได้คิดขึ้นเกี่ยวกับเรขาคณิตบนระนาบและบนทรงกลม และมีทฤษฎีที่สำคัญและได้รับการยกย่องคือ ทฤษฎีบทเมเนเลาส์(Menelaus' theorem)ซึ่งกล่าวว่า

"ในรูปสามเหลี่ยม ABC บนระนาบลากเส้นตรงผ่านให้ตัดด้าน (หรือส่วนต่อ) BC, CA, AB ที่จุดD, E, F ตามลำดับดังนั้น $\left(\frac{BD}{DC}\right)\left(\frac{CE}{EA}\right)\left(\frac{AF}{FB}\right)=-1$ "

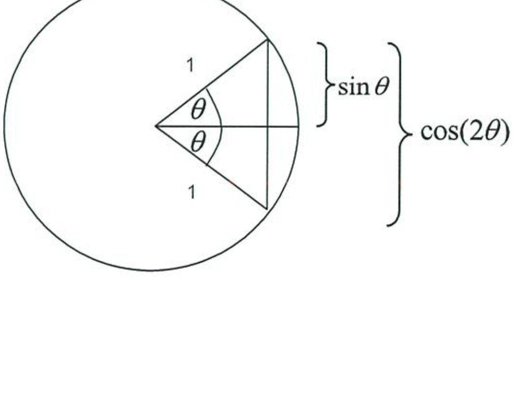


ที่มา : http://cache.eb.com/eb/image?id=67397&rendTypeId=4

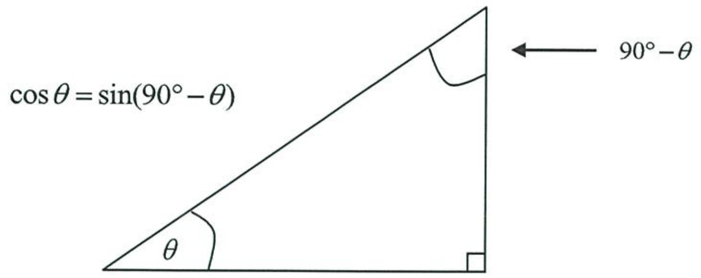
และ "รูปสามเหลี่ยม ABC บนทรงกลมลากเส้นตรงผ่านให้ตัดส่วนโค้ง (หรือส่วนต่อ) BC, CA, AB ที่จุด L, M, N ตามลำดับดังนั้น $\left(\frac{\sin AN}{\sin NB}\right)\left(\frac{\sin BL}{\sin LC}\right)\left(\frac{\sin CM}{\sin MA}\right)=-1$ "

ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีอื่นบนทรงกลม

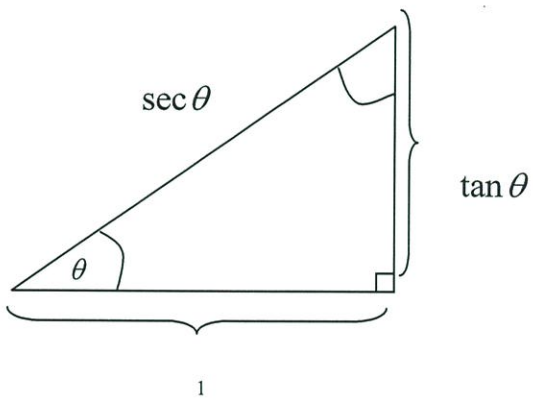
ค่า chord หรือ cd คือความยาวของ chord ของวงกลมหนึ่งหน่วยเมื่อมีมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ θ และแบ่งรัศมีวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นส่วนย่อยที่เท่ากันแล้วให้ค่าของ cd เป็นจำนวนเท่าของส่วนย่อยนี้ยกตัวอย่างเช่นถ้าแบ่งรัศมีของวงกลมหนึ่งหน่วยเป็น 60 ส่วนเท่ากันแล้ว $\text{cd } 60^\circ = 60$ และ $\text{cd } 180^\circ = 120$ เป็นต้นที่จริงแล้ว $\text{cd } 60^\circ = \frac{60}{60} = 1$ และ $\text{cd } 180^\circ = \frac{120}{60} = 2$ ดังรูป



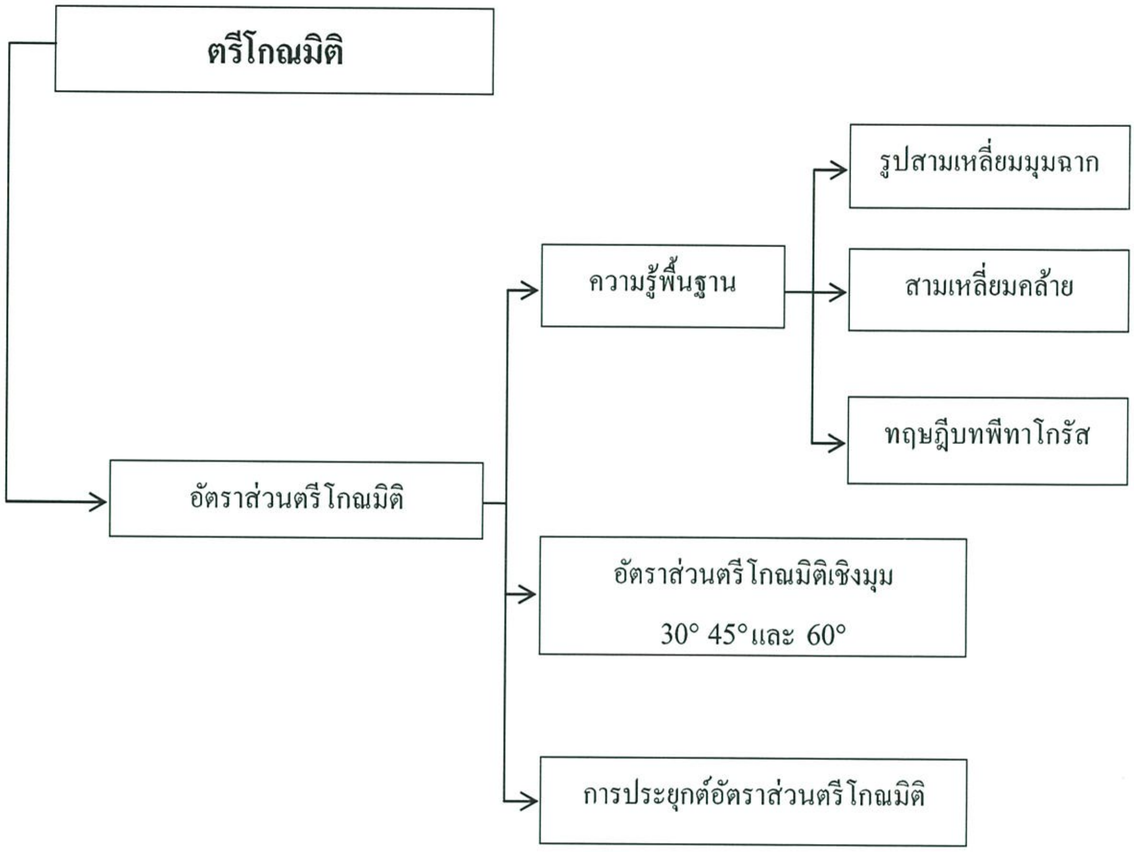
เมื่อพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมแหลมมุมแหลมอีกมุมหนึ่งได้ดังนี้



แม้ในปัจจุบันฟังก์ชัน tangent มีนิยามว่าเป็นอัตราส่วนของฟังก์ชัน sin กับฟังก์ชัน cosine แรกเริ่มนั้น tan θ คืออัตราส่วนระหว่างความสูงของวัตถุและความยาวของเงาของวัตถุนั้นโดย θ คือมุมเงยของยอดของวัตถุเมื่อวัดจากจุดปลายของเงาของวัตถุชื่อ tangent ได้มาจากข้อสังเกตในงานเขียนของFinck (ค.ศ.1583) ว่า tan θ คือความยาวของด้านตรงข้ามมุมθ ของสามเหลี่ยมมุมฉากโดยด้านตรงข้ามมุมθ นี้สัมผัส (tangent) กับวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดยอดของมุมθดังรูป



แผนภาพแสดงความสัมพันธ์



2.1.2 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส

1. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

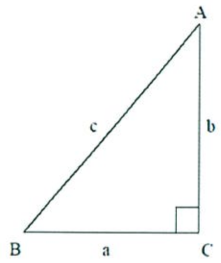
ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี C เป็นมุมฉาก

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ และ $\hat{C}=90^\circ$

$\hat{A}+\hat{B}=90^\circ$

$\hat{A}<90^\circ$ และ $\hat{B}<90^\circ$

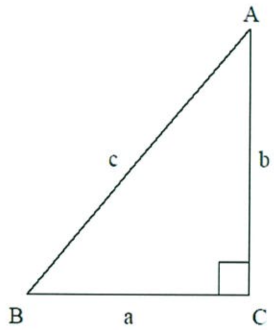
$\hat{A}$ และ $\hat{B}$ เป็นมุมแหลม



อธิบายเพิ่มเติมจากรูปภาพว่า

ด้านตรงข้ามมุมที่ใหญ่กว่าของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อม**<u>ยาวกว่า</u>** ด้านตรงข้ามมุมที่เล็กกว่า เสมอ ดังนั้น ด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ย่อม**<u>ยาวกว่า</u>** ด้านที่เหลือ

กล่าวคือ สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี C เป็นมุมฉาก



$c>a$ และ $c>b$

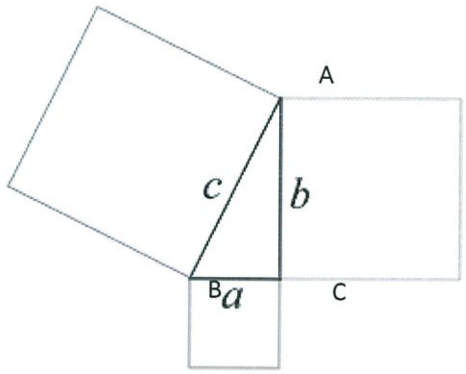
ต่อไปเราจะศึกษา ความสัมพันธ์ของความยาวด้านต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี c เป็นมุมฉาก

c แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวด้านประกอบมุมฉาก

$$a^2+b^2=c^2$$

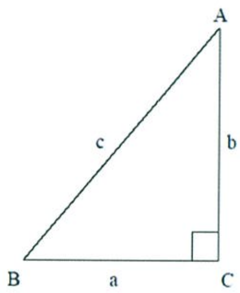


ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี c เป็นมุมฉาก

c แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวด้านประกอบมุมฉาก

$a^2 + b^2 = c^2$



ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านประกอบมุมฉากเท่ากับกำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส อาจกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมใด เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วกำลังสองของความยาวด้านที่ยาวสุด **<u>จะเท่ากับ</u>** ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านที่เหลือ

และบทแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งก็คือ

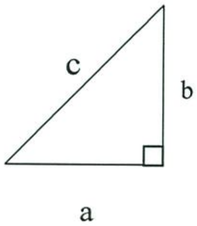
สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆถ้ากำลังสองของความยาวด้านที่ยาวสุด **<u>ไม่เท่ากับ</u>** ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านที่เหลือแล้ว รูปสามเหลี่ยมนั้น ย่อมไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะเป็นจริงตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส ด้วย

ในตอนแรก จะนำทฤษฎีบทพีทาโกรัส ไปใช้กับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และหาความยาวด้านใดด้านหนึ่ง เมื่อกำหนดความยาวอีก 2 ด้านมาให้

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$a^2 + b^2 = c^2$$

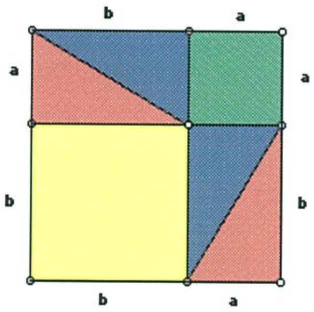


เมื่อกำหนดความยาวด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เราสามารถหาความยาวของด้านที่เหลือได้เสมอโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

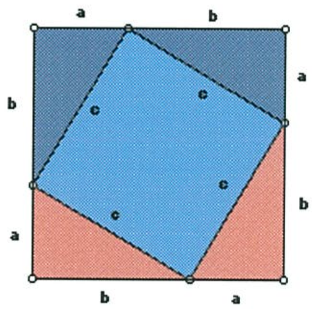
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

พิสูจน์ แสดงให้เห็นจริงว่าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่ากับผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



รูปที่ 1



รูปที่ 2

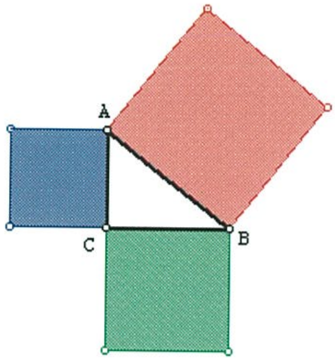
จากรูป จะเห็นว่า

1. รูปสี่เหลี่ยมรูปที่ 2 มีความยาวด้านละ $a + b$ และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสีฟ้า มีความยาวด้านละ c ซึ่งมีพื้นที่ เท่ากับ c^2

2. เมื่อนำรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้ง 4 รูปมารวมกัน จะเหลือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ที่มีพื้นที่เท่ากับ $a^2 + b^2$

3. แสดงว่า พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมสีฟ้าของรูปที่ 2 เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมสี่เหลืองและสีเขียวของรูปที่ 1

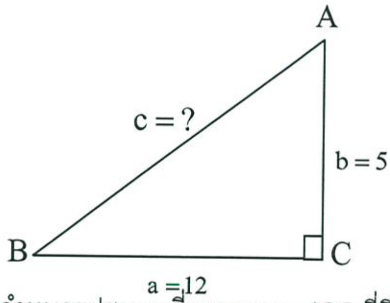
4. นั่นคือ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่ากับผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



$$c^2 = a^2 + b^2$$

ตัวอย่างการประยุกต์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

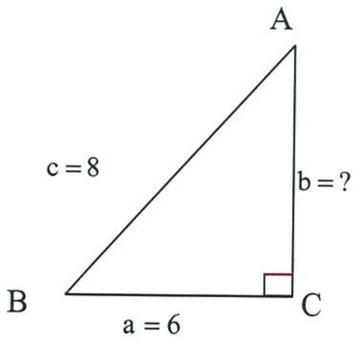
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งเท่ากับ 12 และ 5 หน่วย จงหาความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก



$$c^2 = a^2 + b^2$$

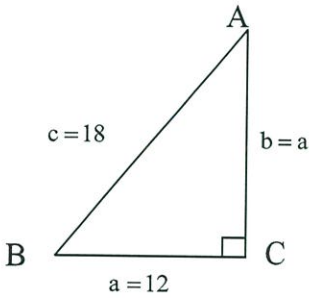
$$\begin{aligned} c^2 &= 12^2 + 5^2 \\ &= 169 \\ c^2 &= 13 \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง</u>กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีC เป็นมุมฉาก ถ้า a = 6 และc = 8 จงหาค่า



$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ b^2 &= 8^2 - 6^2 \\ &= 28 \\ b &= \sqrt{28} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

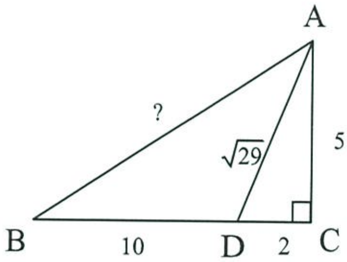
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก จงหาความยาวด้านประกอบมุมฉากเมื่อด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 18 หน่วย



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$18^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$a^2 = \frac{18^2}{2} = 9\times 18$$
$$a = \sqrt{9\times 18} = \sqrt{9\times 9\times 2}$$
$$= 9\sqrt{2}$$
$$b = 9\sqrt{2}$$

ความยาวด้านประกอบมุมฉาก $= 9\sqrt{2}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $\Delta ABC, \Delta ADC$ ดังรูป จงหาความยาว AB

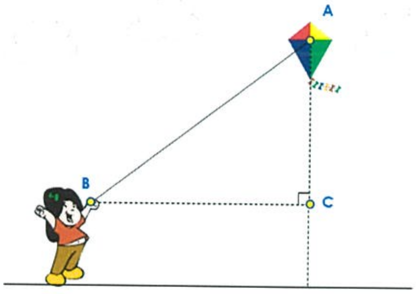


$$\Delta ABC,\ AB^2 = BC^2 + AC^2$$
$$\Delta ADC,\ DC^2 = AD^2 + AC^2$$
$$= (\sqrt{29})^2 - 5^2 = 4$$
$$DC = 2$$
$$BC = BD + DC$$
$$= 10 + 2 = 12$$
$$\Delta ABC,\ AB^2 = BC^2 + AC^2$$
$$= 12^2 + 5^2 = 169$$
$$AB = 13$$

หลังจากที่ได้เห็นตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 4 ตัวอย่างแล้ว ต่อไปจะเป็นการแสดงให้เห็นถึงตัวอย่างในโลกแห่งความจริง

ตัวอย่างการแก้ปัญหาในโลกจริง

<u>ตัวอย่าง</u> ในการเล่นว่าวนั้น ถ้าต้องการหาว่าว่าวลอยอยู่สูงจากพื้นดินเท่าไหร่ เราสามารถหาตอบจากการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ดังนี้



กำหนด

A เป็นตำแหน่งของว่าวบนท้องฟ้า

B เป็นตำแหน่งของปลายสายป่านที่มือผู้เล่น

C เป็นตำแหน่งเหนือพื้นดินแนวเดียวกับที่ว่าวลอยอยู่

แล้ว $AB^2 = AC^2 + BC^2$ จะได้ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

เราจะได้ความสูงของว่าวมีค่าประมาณ (AC + ความสูงของผู้เล่น)

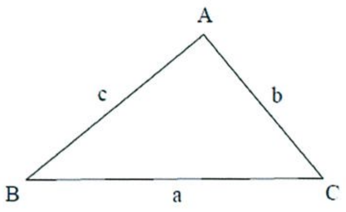
จากที่กล่าวมาแล้วว่า บทแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นจริง กล่าวคือ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงนั่นเอง

สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวด้านที่ยาวที่สุด ไม่เท่ากับ ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านที่เหลือแล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นจะไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ซึ่งต่อไป เราจะนำไปใช้ในการตรวจสอบว่า

รูปสามเหลี่ยมใด ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กล่าวคือ สำหรับรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ

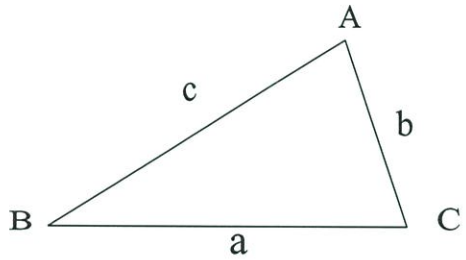


ถ้า a มีค่ามากสุด และ $a^2 \neq b^2 + c^2$ แล้ว ΔABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

แต่ถ้าaมีค่ามากสุด และ $a^2 = b^2 + c^2$ แล้ว ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ?

หรือกล่าวง่าย ๆ ว่า บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นจริงหรือไม่นั่นเอง

บทกลับทฤษฎีบทพีทาโกรัส



ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดมีสมบัติว่า กำลังของความยาวด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านที่เหลือรูปสามเหลี่ยมนั้นย่อยเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ต่อไปเราจะใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการตรวจสอบว่า

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาวด้านทั้งสามมาให้ จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

โดยคำนวณว่า กำลังสองของความยาวด้านยาวที่สุด =ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านที่เหลือ

ถ้าเท่ากัน สรุปได้ว่า เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

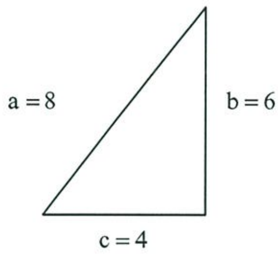
ถ้าไม่เท่ากัน สรุปได้ว่า ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่ตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาวด้าน 3 ด้านมาให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณา ΔABC ซึ่งกำหนดด้าน a, b, c ต่อไปนี้ ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

ก. $a = 8$, $b = 6$, $c = 4$

วิธีทำ $a^2 = b^2 + c^2$



$a^2 = 8^2 = 64$

$b^2 + c^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

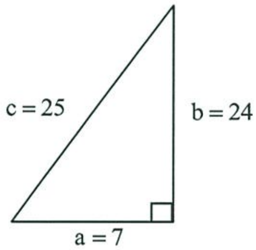
จะเห็นว่า $a^2 \neq b^2 + c^2$

$\therefore \Delta ABC$ นี้ ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

<u>ตัวอย่าง</u>จงพิจารณา ΔABC ซึ่งกำหนดด้าน a, b, c ต่อไปนี้ ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

ข. $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$

วิธีทำ $c^2 = a^2 + b^2$



$c^2 = 25^2 = 625$

$a^2 + b^2 = 7^2 + 24^2 = 625$

จะเห็นว่า $c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore \Delta ABC$ นี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เหตุผลที่ต้องมีการตรวจสอบก่อนว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ เนื่องจาก ต่อไปจะมีการนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น ถ้ารูปสามเหลี่ยมใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก(ตรวจสอบได้) ก็จะต้องสร้างความสัมพันธ์กับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้เสียก่อน แล้วค่อยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกันต่อไป

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

เรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส

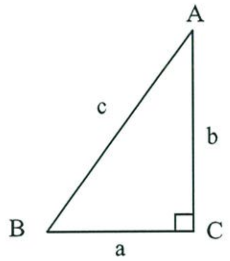
1. สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี C เป็นมุมฉาก

ถ้ากำหนดความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมดังนี้ จงหาความยาวด้านที่เหลือ

1.1 $a = 7$, $b = 11$, $c = ?$

1.2 $a = 5.5$, $c = 14.3$, $b = ?$

1.3 $b = 4\sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$, $a = ?$



2. กำหนดความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC มาให้ดังนี้

จงตรวจสอบว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

2.1 $a = 1.5$, $b = 12$, $c = 2.5$

2.2 $a = 6$, $b = 19$, $c = 12$

2.3 $a = 7$, $b = 10$, $c = 13$

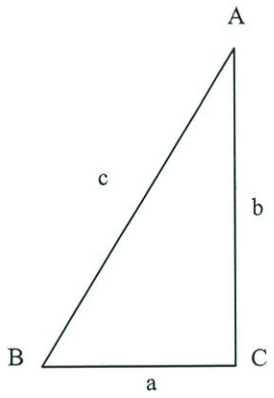
2.4 $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{5}$

2.5 $a = 3.5$, $b = 8.4$, $c = 9.1$

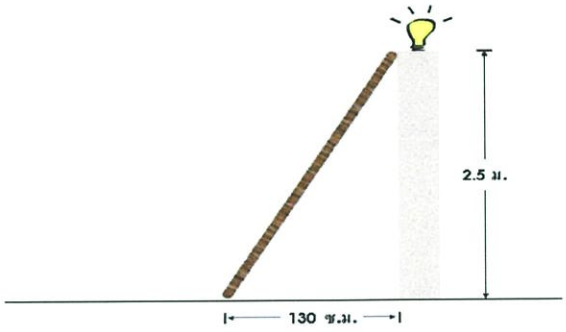
2.6 $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = 3$

2.7 $a = \sqrt{5}$, $b = 7$, $c = 3\sqrt{6}$

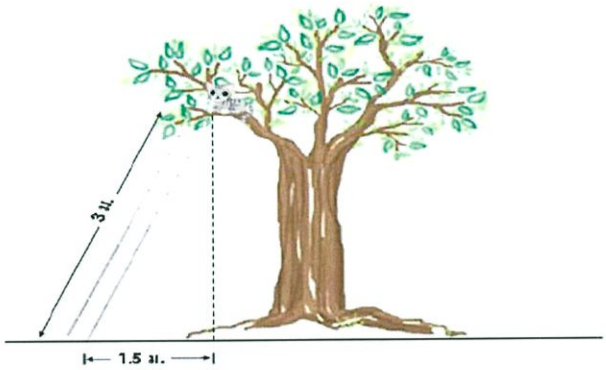
2.8 $a = 3$, $b = \sqrt{6}$, $c = 5$



3. อะตอมอยากปีนกำแพงซึ่งสูง 2 เมตรครึ่ง เพื่อเปลี่ยนหลอดไฟแต่ฐานของกำแพงมีรางปลูกต้นไม้ขวางอยู่ โดยรางมีความกว้าง 120 เซนติเมตร ดังนั้นเขาจึงต้องใช้บันไดพาดกับกำแพง โดยปลายล่างของบันไดห่างจากกำแพง 130 เซนติเมตร อยากทราบว่าเขาต้องหาบันไดยาวอย่างน้อยเท่าใด



4. แมวตัวหนึ่งขึ้นไปติดอยู่บนต้นไม้ มันลงเองไม่ได้ อัลฟ่าอยากช่วยแมว แต่ก่อนจะปีนขึ้นไปช่วยมันเธออยากรู้ว่ามันสูงจากพื้นดินเท่าไร เธอจึงนำบันไดซึ่งยาว 3 เมตร มาพาดกับต้นไม้ โดยปลายบนของบันไดอยู่ที่แมวพอดี ปลายล่างของบันไดห่างจากโคนต้นไม้ในแนวเดียวกับที่แมวอยู่เท่ากับ 1.5 เมตร จงหาว่าแมวสูงจากพื้นดินเท่าไร



2.1.3 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

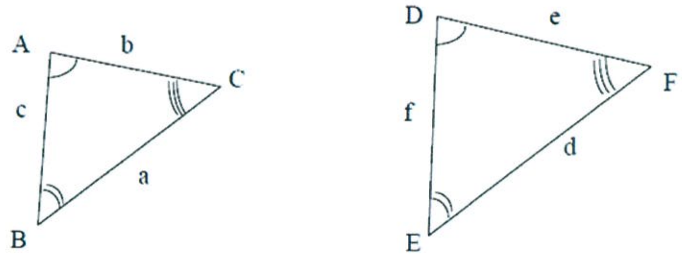
ในหัวข้อนี้จะนิยามอัตราส่วนของด้านต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และก่อนที่จะมีการนิยาม

จะทบทวนเรื่อง ความคล้ายของรูปสามเหลี่ยมกันก่อน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมคู่ใด ๆ มีมุมเท่ากันทุกมุม จะกล่าวว่า รูปสามเหลี่ยมคู่นั้น **คล้ายกัน**

สมบัติของความคล้าย

ถ้ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป ΔABC และ ΔDEF คล้ายกัน



กล่าวคือ

$A\hat{B}C = D\hat{E}F$, $B\hat{C}A = E\hat{F}D$ และ $C\hat{A}B = F\hat{D}E$

แล้วจะได้ $\boxed{\frac{c}{f} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e}}$

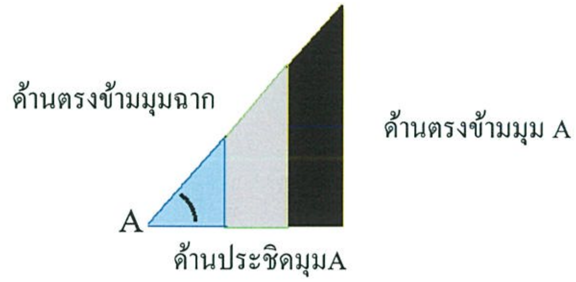
หรือกล่าวว่า อัตราส่วนของด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากัน ย่อมมีค่าเท่ากัน นั่นเอง

หมายเหตุ ถ้าทราบว่ารูปสามเหลี่ยมคู่ใดมีมุมเท่ากัน 2 มุม จะได้ว่ามุมที่เหลือย่อมเท่ากันด้วยนั่นคือ มุมเท่ากันทุกมุม ฉะนั้นรูปสามเหลี่ยมคู่นั้นย่อมคล้ายกัน

ต่อไปเราจะพิจารณาเฉพาะรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกันก่อนพร้อมทั้งใช้สมบัติคล้ายกันของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

<u>อัตราส่วนตรีโกณมิติ</u>

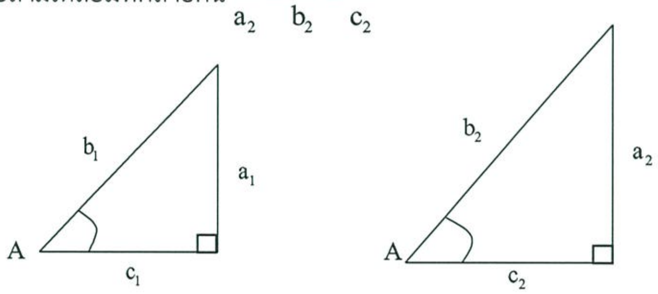
พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ที่มีอีกมุมหนึ่งเท่ากันจะเห็นว่ามุมที่เหลือย่อมเท่ากันด้วย



เมื่อนำรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งหลายมาซ้อนกันโดยให้A เป็นมุมร่วมจะเห็นว่าซ้อนกันได้พอดี

จะนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งขึ้นอยู่กับมุมแหลมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังนี้ และในสื่อการสอน มุมมุมนั้นคือ มุม A

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$



$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ = ไซน์(sine)ของมุม A = $\sin A$

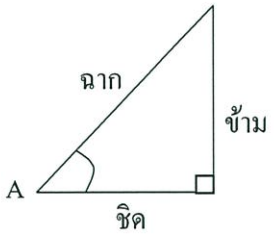
$\frac{c_2}{b_2} = \frac{c_1}{b_1} = \frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ = โคไซน์(cosine)ของมุม A = $\cos A$

$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}}$ = แทนเจนต์(tangent)ของมุม A = $\tan A$

เนื่องจาก ด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาวกว่าด้านตรงข้ามมุม A ดังนั้น $0 \le \sin A \le 1$

และ เนื่องจาก ด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาวกว่าด้านประชิดมุมA ดังนั้น $0 \le \cos A \le 1$

$$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$ = ไซน์ (sine) ของมุม A = $\sin A$



$$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}} = \text{โคซีแคนซ์ (cosecant) ของมุม } A = \operatorname{cosec} A$$

$$\frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \text{โคไซน์ (cosine) ของมุม } A = \cos A$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม A}} = \text{ซีแคนซ์ (secant) ของมุม } A = \sec A$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}} = \text{แทนเจนต์ (tangent) ของมุม } A = \tan A$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}} = \text{โคแทนเจนต์ (cotangent) ของมุม } A = \cot A$$

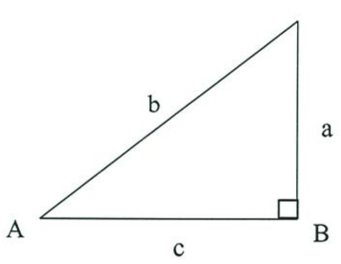
เนื่องจาก $0 < \sin A < 1$ ดังนั้น $\operatorname{cosec} A > 1$

และ เนื่องจาก $0 < \cos A < 1$ ดังนั้น $\sec A > 1$

หลังจากการนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 แบบไปแล้ว จะหาความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยเริ่มจากการหาความสัมพันธ์ของไซน์กับโคไซน์กันก่อน

ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี B เป็นมุมฉาก

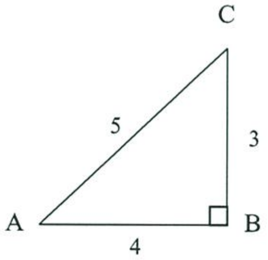


$$\sin A = \cos(90° - A)$$
$$\cos A = \sin(90° - A)$$
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด Δ มุมฉาก ABC ดังรูป จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทั้ง 6 แบบ

วิธีทำ



$\sin A = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{3}$

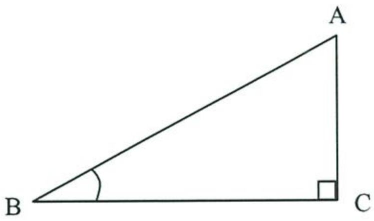
$\cos A = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\sec A = \frac{5}{4}$

$\tan A = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\cot A = \frac{4}{3}$

ตัวอย่างการหาความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดอัตราส่วนตรีโกณมาให้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี C เป็นมุมฉาก

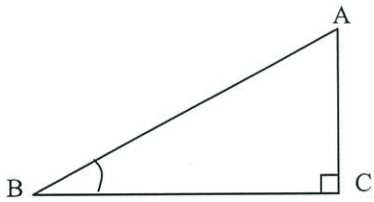
1.ถ้าด้าน AC ยาว 5 หน่วย และ $\sin B = \frac{1}{3}$ จงหาความยาวด้าน AB



เรามี $\sin B = \frac{AC}{AB}$

ดังนั้น $AB = \frac{AC}{\sin B} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15$ หน่วย

2. ถ้าด้าน AB ยาว 5 หน่วย และ $\cos B = \frac{2}{5}$ จงหาความยาวด้าน AC และ BC



เรามี $\cos B = \frac{BC}{AB}$

ดังนั้น $BC = AB\cos B = 5 \times \frac{2}{5} = 2$ หน่วย

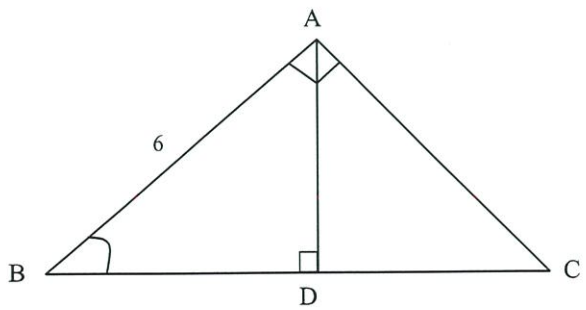
และ

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$ หน่วย

ตัวอย่างต่อไปจะใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส และความสัมพันธ์ของไซน์กับโคไซน์

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี A เป็นมุมฉาก และ AD ตั้งฉากกับ BC ถ้า AB ยาว 6 หน่วย และ $\sin B = \frac{2}{3}$ จงหาความยาวของ BD, AC, DC

วิธีทำ เขียนรูป ΔABC อย่างคร่าวๆ



เนื่องจาก AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก และ $\sin B = \frac{AD}{AB}$ ดังนั้นเราจะหาความยาวของ AD

ได้ $AD = AB\sin B = 6 \times \frac{2}{3} = 4$ หน่วย

หา BD จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ หน่วย จากความสัมพันธ์ของไซน์กับโคไซน์ $\sin C = \cos(90° - C) = \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

แต่ $\sin C = \frac{AD}{AC}$ เราได้ $AC = \frac{AD}{\sin C} = \frac{4}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} = \frac{12}{\sqrt{5}}$ หน่วย

หา DC จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส, $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{144}{5} - 16} = \frac{8}{\sqrt{5}}$ หน่วย

<u>หมายเหตุ</u> เราสามารถใช้สมบัติคล้ายของรูปสามเหลี่ยมหาคำตอบได้เช่นกัน

โดยหา $AD = 4$ หน่วย และ $BD = 2\sqrt{5}$ หน่วย ได้ก่อน แล้วหาความยาว AC และ DC ดังนี้

พิจารณา ΔABC กับ ΔABD , $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB}$ แทนค่าได้ $\frac{4}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{6}$

แล้ว $AC = \frac{24}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$ หน่วย

พิจารณา ΔADC กับ ΔABD , $C\hat{A}D = A\hat{B}D$ ได้ $\frac{DC}{AD} = \frac{AC}{AB}$

ฉะนั้น $\frac{DC}{4} = \frac{12}{\sqrt{5} \times 6}$ ได้ $DC = \frac{48}{\sqrt{5} \times 6} = \frac{8}{\sqrt{5}}$ หน่วย

ที่ผ่านมาจะเห็นว่า เราหาอัตราส่วนตรีโกณมิติจากการกำหนดความยาวของด้านมาให้อย่างน้อย 2 ด้าน

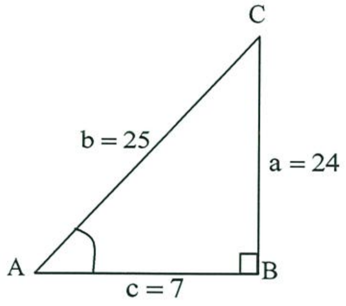
1.) ถ้ากำหนดความยาวของด้าน 3 ด้าน เราหาอัตราส่วนตรีโกณมิติได้เลย

2.) ถ้ากำหนดความยาวของด้าน 2 ด้าน เราใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ช่วยก่อนแต่ถ้าไม่กำหนดความยาวด้านมาให้เพียงกำหนดอัตราส่วนตรีโกณมิติบางค่ามาให้แล้วเราจะสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหลือได้หรือไม่ เช่น

กำหนด $\sin A$ หรือ $\cos A$ หรือ $\tan A$ แล้วให้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหลือ

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด Δ มุมฉาก ABC ซึ่ง $\sin A = \dfrac{24}{25}$ จงหา $\cos A$ และ $\tan A$

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin A = \dfrac{24}{25}$



$$c^2 = b^2 - a^2$$
$$= 25^2 - 24^2 = 49$$
$$c = 7$$

ดังนั้น $\cos A = \dfrac{7}{25}$

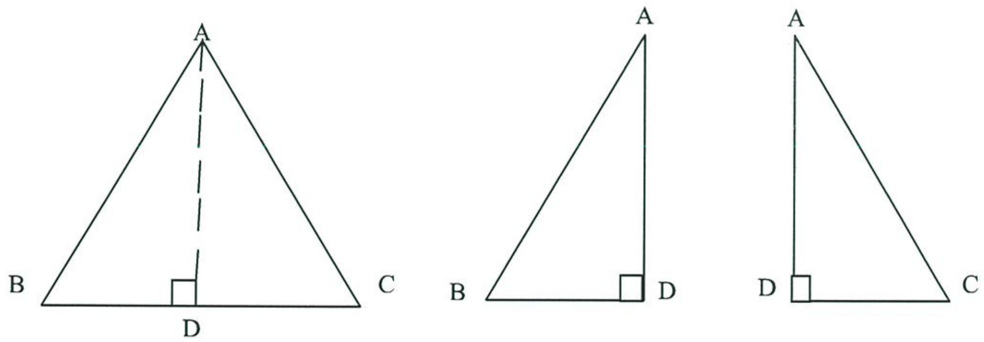
$\tan A = \dfrac{24}{7}$

ถ้ากำหนดความยาวด้านต่างๆของรูปสามเหลี่ยมมาให้ โดยรูปสามเหลี่ยมนั้นไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เราจะหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมต่างๆของรูปสามเหลี่ยมเหล่านั้นอย่างไร?

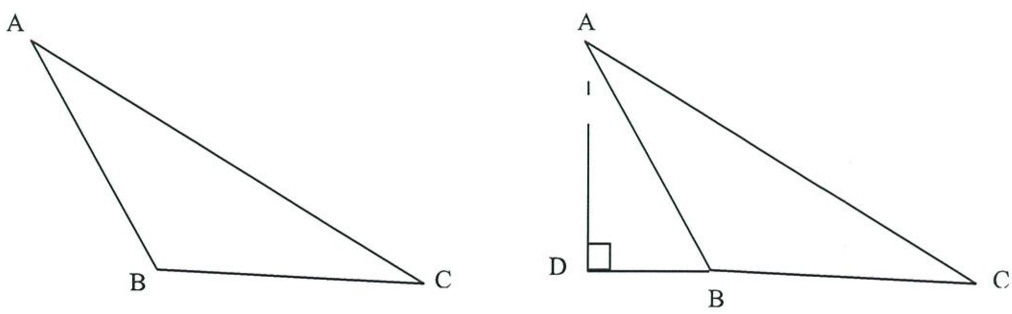
จากบทนิยามของอัตราส่วนตรีโกณมิติ มุมที่พิจารณาต้องเป็นมุมแหลม (เพราะมุมที่นอกจากมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ต้องเป็นมุมแหลมเท่านั้น)เราจึงต้องหาความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเสียก่อน

พิจารณารูปสามเหลี่ยมใดๆที่ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากเราสามารถสร้างความสัมพันธ์กับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้เสมอ

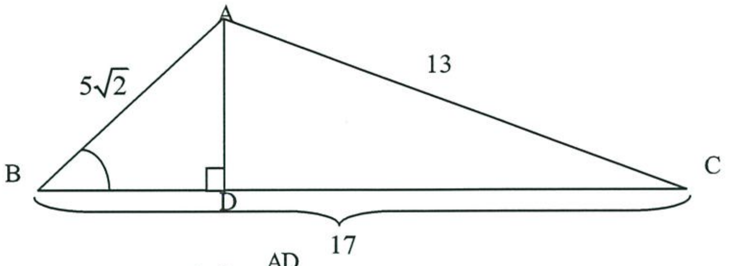
<u>กรณีที่รูปสามเหลี่ยมมีมุมทุกมุมเป็นมุมแหลม</u>



<u>กรณีที่รูปสามเหลี่ยมมีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน</u>



<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด ΔABC ดังรูป จงหา $\sin B$



$$\sin B = \frac{AD}{AB}$$

$$BD + DC = 17$$

$$BD = 17 - DC$$

$$BD^2 = (17 - DC)^2$$

$$= 289 - 34DC + DC^2$$

$$289 - 34DC + DC^2 = 50 - AD^2$$

$$289 - 34DC + 169 - AD^2 = 50 - AD^2$$

$$34\,DC = 50 - 289 - 169$$

$$DC = 12$$

จงพิจารณา ΔABC $BD^2 = (5\sqrt{2})^2 - AD^2$

$$= 50 - AD^2$$

จงพิจารณา ΔADC $DC^2 = 13^2 - AD^2$

$$= 169 - AD^2$$

จงพิจารณา ΔADC $AD^2 = 13^2 - 12^2$

$$= 169 - 144 = 25$$

$$AD = 5$$

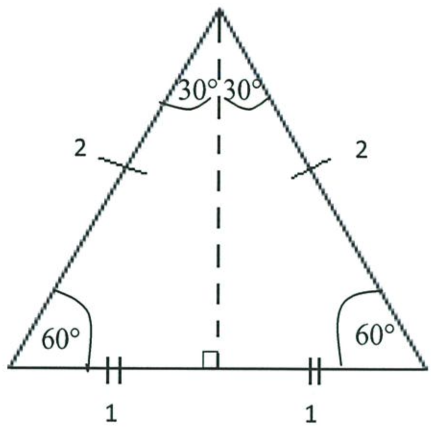
$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ #

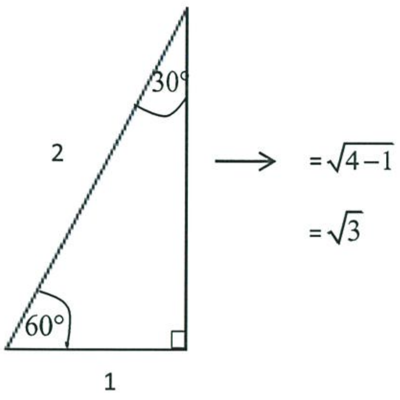
2.1.4 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $30° \ 45° \ 60°$

ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $30°$ จะเลือกใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ $30°$ จะเห็นว่ามุมที่เหลือมีขนาด $180° - 90° - 30° = 60°$ ดังนั้นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เลือกใช้ จะมีมุมแหลมเท่ากับ $30°$ และ $60°$ แต่เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีมุมเท่ากันทุกมุม ดังนั้นมุมหนึ่งมีขนาด $\frac{180°}{3} = 60°$ ถ้าเราแบ่งครึ่งมุม $60°$ จะได้มุม $30°$ ดังนั้นเราจึงพิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และลากเส้นแบ่งครึ่งมุมนั้นย่อมตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้านตรงข้ามด้วย จึงได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูป ซึ่งมีมุมแหลมเท่ากับ $30°$ และ $60°$ ตามต้องการ ต่อไปเรากำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้นด้วยค่าที่เป็นจำนวนเต็มน้อย ๆ โดยเลือกเป็น 2 หน่วยจะได้อีกด้านยาว 1 หน่วย (ดังรูป) และใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเพื่อหาความยาวด้านที่เหลือและเมื่อได้ความยาวด้านครบทั้ง 3 ด้าน ทำให้เราหาอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 แบบได้

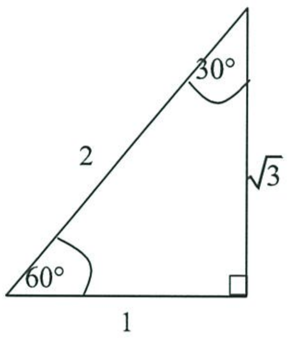
อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° 45° 60°

การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 60° และ 30° โดยใช้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า





เขียนตารางแสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60° ดังนี้

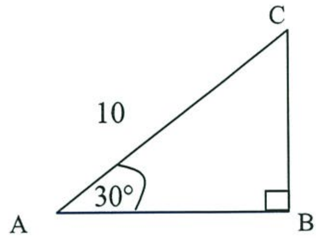


A	30°	60°
sin(A)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos(A)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan(A)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
cosec(A)	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
sec(A)	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
cot(A)	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

รูปที่ 2.1 ตารางแสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60°

<u>หมายเหตุ</u> เราสามารถจำขนาดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ไปใช้ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 แบบ ของมุม 30° และ 60° ได้โดยง่าย

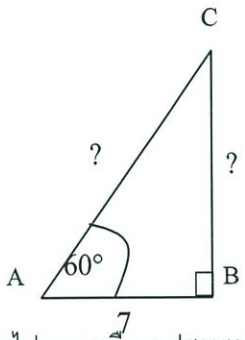
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังรูป จงหาความยาวด้านตรงข้ามมุม A



วิธีทำ เนื่องจาก $\sin 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{10}$

ดังนั้น $BC = 10\ \sin 30° = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ หน่วย

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังรูป จงหาความยาวด้าน AC และ BC



วิธีทำ จากรูป $\tan 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{7}$

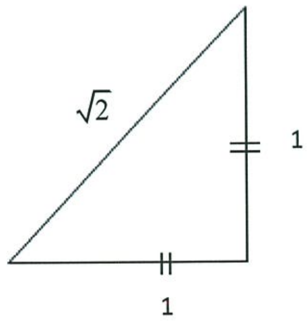
ดังนั้น $BC = 7\ \tan 60° = 7\sqrt{3}$ หน่วย

และเนื่องจาก $\cos 60° = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{AC}$

ดังนั้น $AC = 7\ \sec 60° = 7 \times 2 = 14$ หน่วย

ต่อไปเราจะเลือกรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมแหลมมุมหนึ่งมีขนาด 45° จะเห็นว่ามุมที่เหลือมีขนาด 180° − 90° − 45° = 45° ดังนั้นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เลือกใช้จะมีมุมเท่ากัน 2 มุม นั่นคือรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั่นเอง และเนื่องจากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะมีด้านเท่ากัน 2 ด้านด้วย ดังนั้นเราจะกำหนดความยาวด้านที่เท่ากันนี้ด้วยค่าที่เป็นจำนวนเต็มน้อย ๆ โดยเลือกเป็น 1 หน่วย ดังนั้นเราสามารถหาความยาวด้านที่เหลือได้จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส แล้วจึงค่อยหาอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 แบบสรุปเป็นตารางต่อไปนี้

การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 45° โดยใช้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



A	45°
sin A	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
cos A	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
tan A	1
cosec A	$\sqrt{2}$
sec A	$\sqrt{2}$
cot A	1

สรุปเป็นตารางแสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6แบบของมุม 30° 45°และ 60° ดังนี้

A	30°	45°	60°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cosec A	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
sec A	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
cot A	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

2.1.5 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ คือการเท่ากันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต่างกัน และเป็นจริงสำหรับ ทุก ๆ ค่าของขนาดของมุม

เมื่อกำหนด A เป็นขนาดของมุมใดๆ $0 \leq A \leq 2\pi$ จะได้

$$\sin A \cdot \csc A = 1$$
$$\cos A \cdot \sec A = 1$$
$$\tan A \cdot \cot A = 1$$
$$\cos A \cdot \tan A = \sin A$$
$$\sin A \cdot \cot A = \cos A$$
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$
$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

เมื่อกำหนด x และ y เป็นขนาดของมุมใดๆ $0 \le x, y \le 2\pi$ จะได้

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

2.2 เนื้อหาทางคอมพิวเตอร์

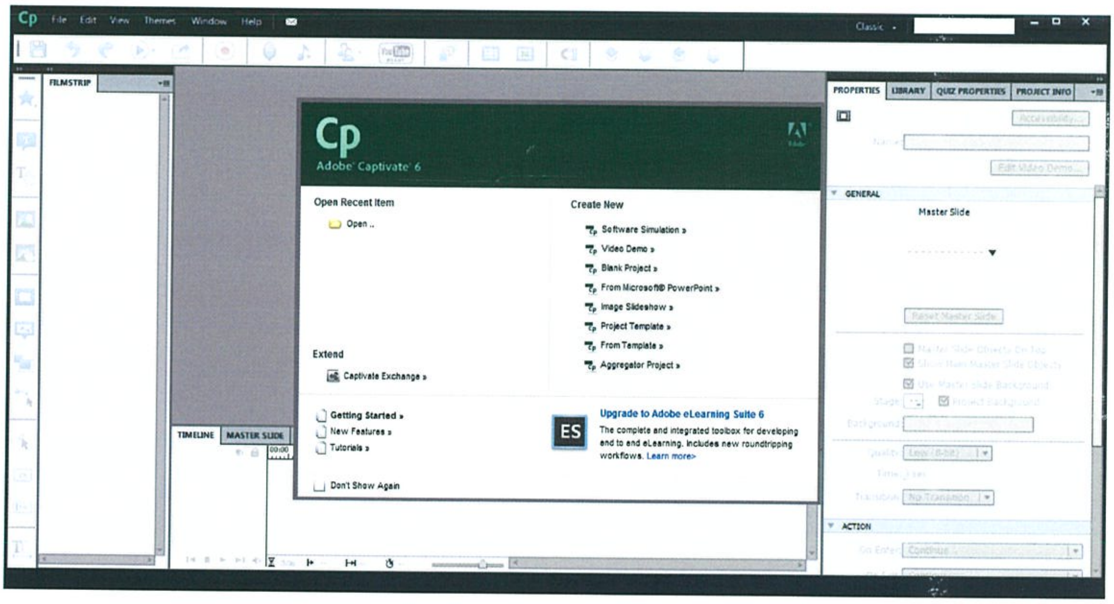
รู้จักกับ Adobe Captivate 6

ถ้าพูดถึงโปรแกรมสำหรับการผลิตบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนหรือที่เรียกกันว่า CAI (Computer - Assisted Instruction)ซึ่งโปรแกรมนี้จัดเป็นโปรแกรมสำหรับการนำเสนอข้อมูล (Presentation)มีลักษณะการใช้งานใกล้เคียงกันกับโปรแกรม Microsolf PowerPoint แต่จะมีหลายๆส่วนที่ Adobe Captivate สามารถสนับสนุนได้มากกว่า เช่น สามารถนำเสนอสื่อได้หลายรูปแบบ โปรแกรมมีความยืดหยุ่นสูง สามารถใช้งานร่วมกับโปรแกรมอื่นๆได้เป็นอย่างดี รองรับไฟล์มัลติมิเดียได้หลายรูปแบบ และยังสามารถจับภาพหน้าจอแบบเคลื่อนไหวได้อย่างสมบูรณ์

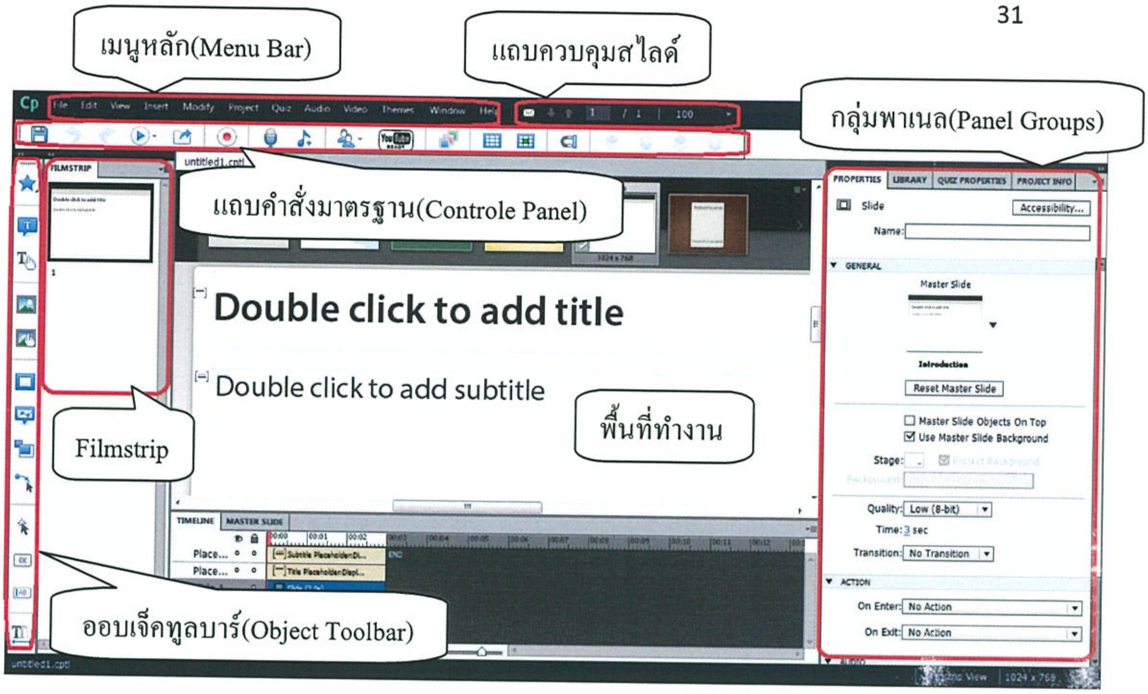
จุดเด่นที่สำคัญที่สุดของโปรแกรมนี้ คือ เน้นการปฏิสัมพันธ์(Interaction)กับผู้ใช้และสามารถสร้างแบบทดสอบได้หลากหลายรูปแบบ โดยประมวลผลคะแนนได้ทันทีหลังจากทำแบบทดสอบเสร็จ

ส่วนประกอบของโปรแกรมAdobe Captivate 6

เมื่อเข้าสู่โปรแกรม Adobe Captivate 6 เราจะพบว่าโปรแกรมนี้มีรูปร่างหน้าตาแบบนี้



รูปที่ 2.1 หน้าต่างเริ่มต้นในAdobe Captivate 6



รูปที่ 2.2 ส่วนประกอบของหน้าจอโปรแกรม

เมนูหลัก(Menu Bar)เป็นแถบรวบรวมคำสั่งทั้งหมดของโปรแกรม โดยแยกเป็นกลุ่มๆตามการใช้งาน

แถบควบคุมสไลด์เป็นที่เก็บปุ่มคำสั่งในการควบคุมการทำงานของสไลด์

แถบคำสั่งมาตรฐาน(Controle Panel) เป็นที่รวบรวมปุ่มคำสั่งที่ใช้บ่อยครั้ง ซึ่งสามารถเรียกใช้จากเมนูบาร์ได้เช่นเดียวกัน

Filmstrip เป็นพาเนลแสดงสไลด์ขนาดย่อเรียงต่อกันเป็นลำดับ

ออบเจ็คทูลบาร์(Object Toolbar)เป็นแถบรวบรวมเครื่องมือต่างๆในการสร้างเนื้อหาของโปรเจ็ค

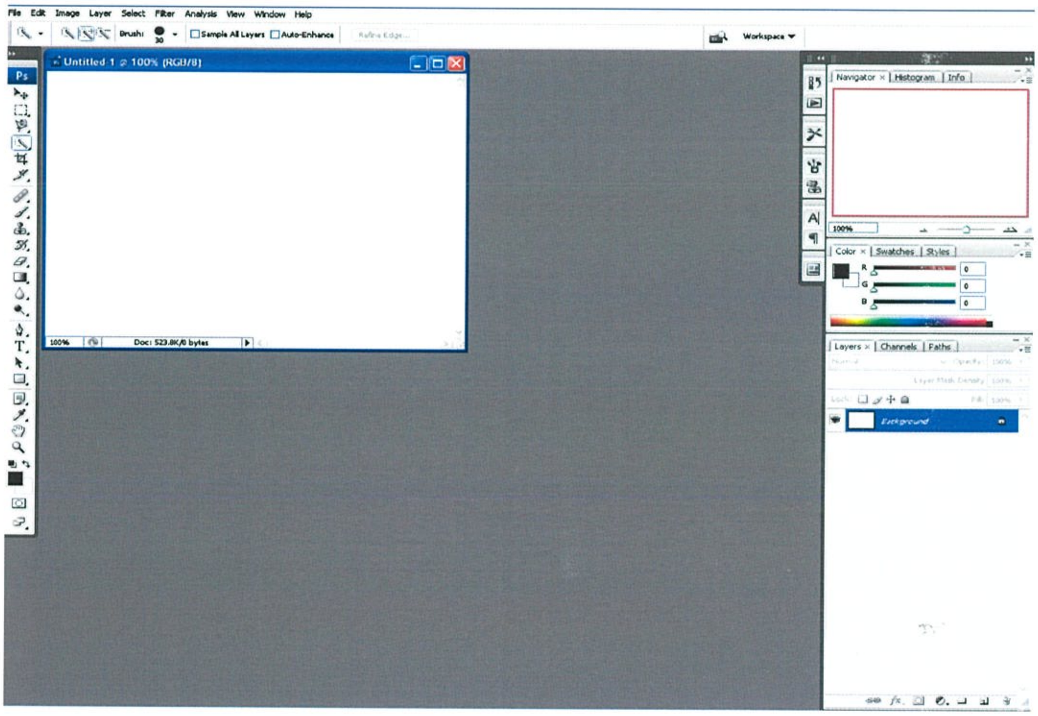
กลุ่มพาเนล (Panel Groups)ประกอบด้วยพาเนลต่างๆสำหรับปรับแต่งคุณสมบัติต่างๆของโปรเจ็ค

รู้จักกับ Adobe Photoshop CS5

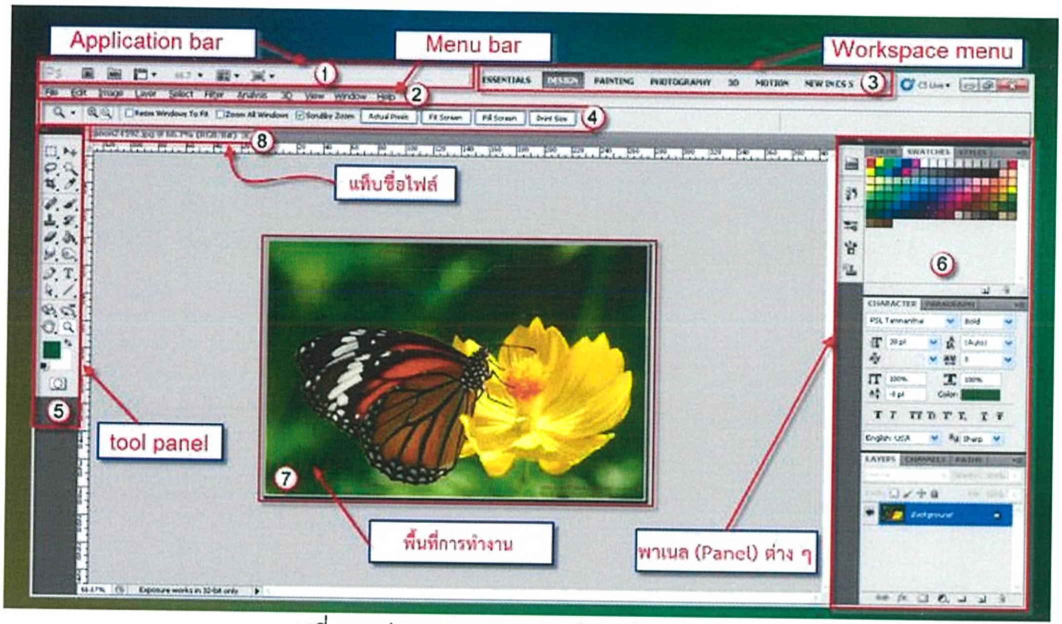
เป็นโปรแกรมที่ใช้ทำงานกราฟิกโดยเน้นการสร้างชิ้นงานจากการวาดเป็นหลัก เป็นงานกราฟิกที่มีทั้งภาพเป็นเส้นคมชัดและมีเอฟเฟกต์สีสันสวยงาม ซึ่งเป็นที่นิยมสำหรับนักออกแบบเพื่อนำไปใช้งานด้านต่างๆไม่ว่าจะเป็นงานสิ่งพิมพ์, งานโฆษณา, งานออกแบบผลิตภัณฑ์หรือโลโก้, ไอคอน, การ์ตูนและภาพประกอบ เป็นต้น ภาพที่ได้จากโปรแกรม Adobe Photoshop CS5จะเป็นภาพประเภทเวคเตอร์ ซึ่งเป็นภาพที่ประกอบไปด้วยเส้นตรง เส้นโค้งและรูปทรงเรขาคณิต โดยสามารถกำหนดคุณสมบัติเกี่ยวกับเส้นและสีพื้นได้ และไฟล์ของโปรแกรม เช่น .ai .pdfและ .eps สามารถใช้งานร่วมกับโปรแกรมกราฟิกอื่นๆได้ เช่น illustator, Flash เป็นต้น

ส่วนประกอบของโปรแกรม Adobe Photoshop CS5

เมื่อเข้าสู่โปรแกรม Adobe Photoshop CS5 เราจะพบว่าโปรแกรมนี้มีรูปร่างหน้าตาแบบนี้



รูปที่ 2.3 หน้าต่างเริ่มต้นใน Adobe Photoshop CS5



รูปที่ 2.4 ส่วนประกอบของหน้าจอโปรแกรม

1. **Application Bar** (แอพพลิเคชั่นบาร์) จะเป็นแถบเครื่องมือที่เก็บปุ่มคาสั่งที่ใช้งานบ่อย ๆ เอาไว้ เช่น เปิดโปรแกรม Bridge หมุนพื้นที่ทางาน ย่อ-ขยายภาพ , จัดเรียงวินโดว์ภาพ และจัดองค์ประกอบของเครื่องมือตามพื้นที่ใช้งาน (Workspace)

2. **Menu Bar** (เมนูบาร์) ประกอบด้วยกลุ่มคาสั่งต่างๆ ที่ใช้จัดการกับไฟล์ , ทางานกับรูปภาพ และใช้การปรับแต่งการทางานของโปรแกรม โดยแบ่งเมนูตามลักษณะงาน นอกจากนี้บางเมนูหลัก จะ มีเมนูย่อยซ้อนอยู่ โดยสังเกตจากเครื่องหมาย ซึ่งคุณต้องเปิดเข้าไปเพื่อเลือกคาสั่งภายในอีกที

3. **Workspace Menu** (เวิร์คสเปซ เมนู) หรือ พื้นที่การทางาน เป็นการกาหนดรูปแบบการแสดงเครื่องมือและพาเนลที่มีความเกี่ยวข้องกับงานที่ทา การเลือก Workspace ที่เหมาะสมจะทาให้สามารถเลือกใช้เครื่องมือได้อย่างรวดเร็ว ใน Photoshop CS5 มี Workspace ให้เลือกใช้ 7 แบบ คือ - Essentials เป็น Workspace พื้นฐานที่เหมาะกับการทางานทุกรูปแบบ เนื่องจากมีพาเนลที่ครอบคลุมงานทั่วไปให้ใช้งาน - Design เป็น Workspace ที่เหมาะกับการออกแบบงานกราฟิก โดยมีพาเนลSwatches และ Character เพิ่มเข้ามาเพื่อใช้ในการออกแบบ - Painting เป็น Workspace สำหรับการทางานด้านวาดภาพ และระบาย ซึ่งสามารถใช้ร่วมกับ Tablet ได้เป็นอย่างดี
- Photography เป็น Workspace สาหรับด้านภาพถ่ายโดยเฉพาะ แต่จะเน้นด้านโทนความสว่างแสงเงา และสีสันของภาพเป็นหลัก - 3 D และ Motion เป็น Workspace ที่มีอยู่เฉพาะในเวอร์ชัน Extended ซึ่งเน้นการทางาน 3 D และการสร้างภาพเคลื่อนไหว (Animation) - New in CS5 เป็น Workspace ที่แสดงเฉพาะเครื่องมือและคาสั่งใหม่ ๆ ในเวอร์ชัน CS5 เหมาะแก่การศึกษาฟีเจอร์ใหม่ของโปรแกรม

4. **Option Bar** (ออปชันบาร์) เป็นส่วนที่ใช้ปรับแต่งค่าการทางานของเครื่องมือต่าง ๆ โดยรายละเอียดในออปชันบาร์จะเปลี่ยนไปตามเครื่องมือที่เราเลือกจากทูลบ็อกซ์ ในขณะนั้น เช่น เมื่อเราเลือกเครื่องมือ Brush (พู่กัน) บนออปชันบาร์จะปรากฏออปชันที่ใช้ในการกาหนดขนาด และลักษณะ หัวแปรง , โหมดในการระบายความโปร่งใสของสี และอัตราการไหลของสี เป็นต้น

5. Tool Panel (ทูลพาเนล) หรือ กล่องเครื่องมือ จะประกอบไปด้วยเครื่องมือต่าง ๆ ที่ใช้ในการวาด ตกแต่ง และแก้ไขภาพ เครื่องมือเหล่านี้มีจานวนมาก ดังนั้นจึงมีการรวมเครื่องมือที่ทาหน้าที่คล้าย ๆ กันไว้ในปุ่มเดียวกัน โดยจะมีลักษณะรูปสามเหลี่ยมอยู่บริเวณมุมด้านล่างดังภาพ เพื่อบอกให้รู้ว่าในปุ่มนี้ยังมีเครื่องมืออื่นอยู่ด้วย

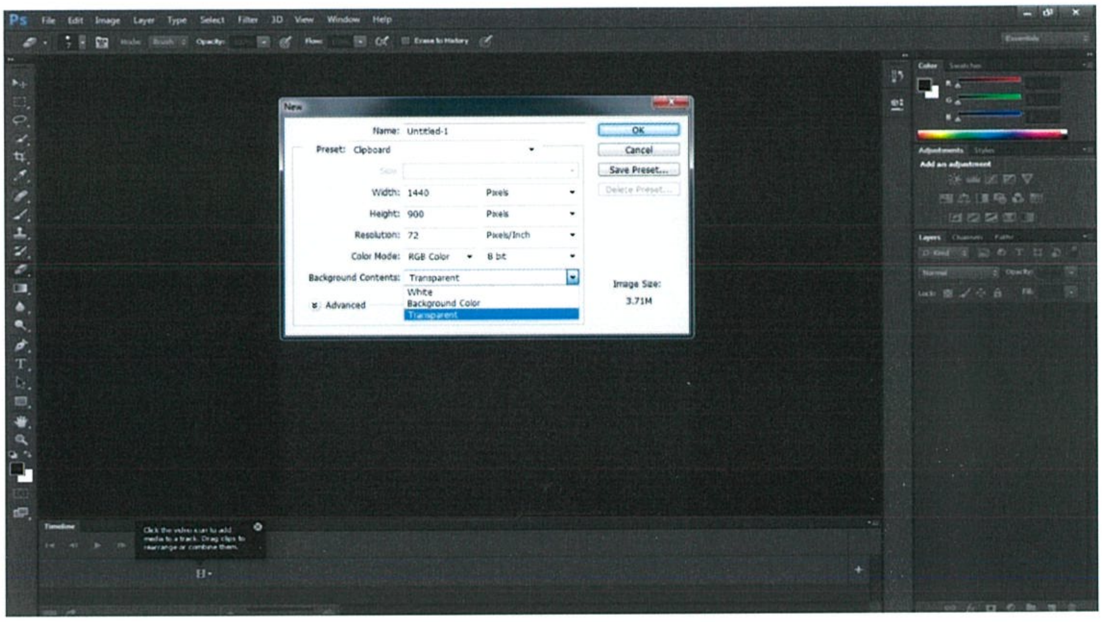
6. Panel (พาเนล) เป็นวินโดว์ย่อยๆ ที่ใช้เลือกรายละเอียด หรือคาสั่งควบคุมการทางานต่างๆ ของโปรแกรม ใน Photoshop มีพาเนลอยู่เป็นจานวนมาก เช่น พาเนลColor ใช้สาหรับเลือกสี , พาเนล Info ใช้แสดงค่าสีตรงตาแหน่งที่ชี้เมาส์ รวมถึงขนาด/ตาแหน่งของพื้นที่ที่เลือกไว้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 โปรแกรมที่ใช้ในการสร้างตัวละครและฉาก

ในการวาดภาพตัวละครในสื่อ และฉากต่างๆ ที่ใช้ภายในสื่อการสอนนั้น จะใช้โปรแกรมหลักในการวาดตัวละคร คือ Adobe Photoshop CS5



รูปที่ 3.1ลักษณะโปรแกรมการใช้งานของ Adobe Photoshop CS

3.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวาดภาพของโปรแกรมที่ใช้งาน

ขั้นแรกจะทำการตัดต่อรูปภาพผ่านทางโปรแกรม AdobePhotoshop CS5

รูปที่ 3.2 ภาพบุคคลที่จะใช้แสดงในสื่อ

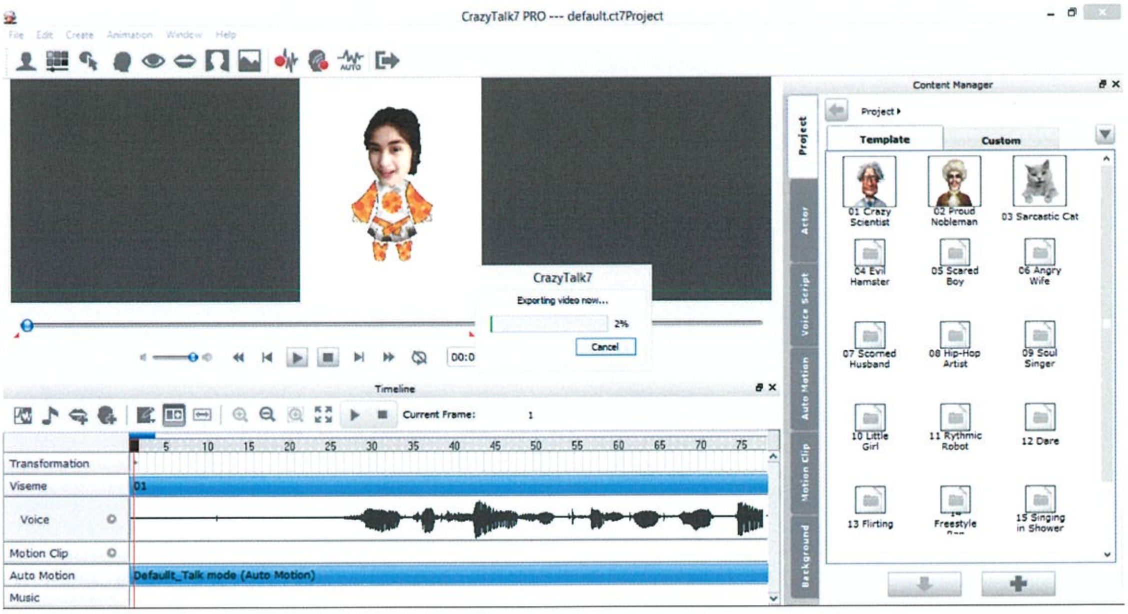
รูปที่ 3.3 ตัดบริเวณใบหน้าของรูปภาพ

รูปที่ 3.4 ย้ายรูปที่ตัดเสร็จแล้วไปในเฟรมข้างๆ

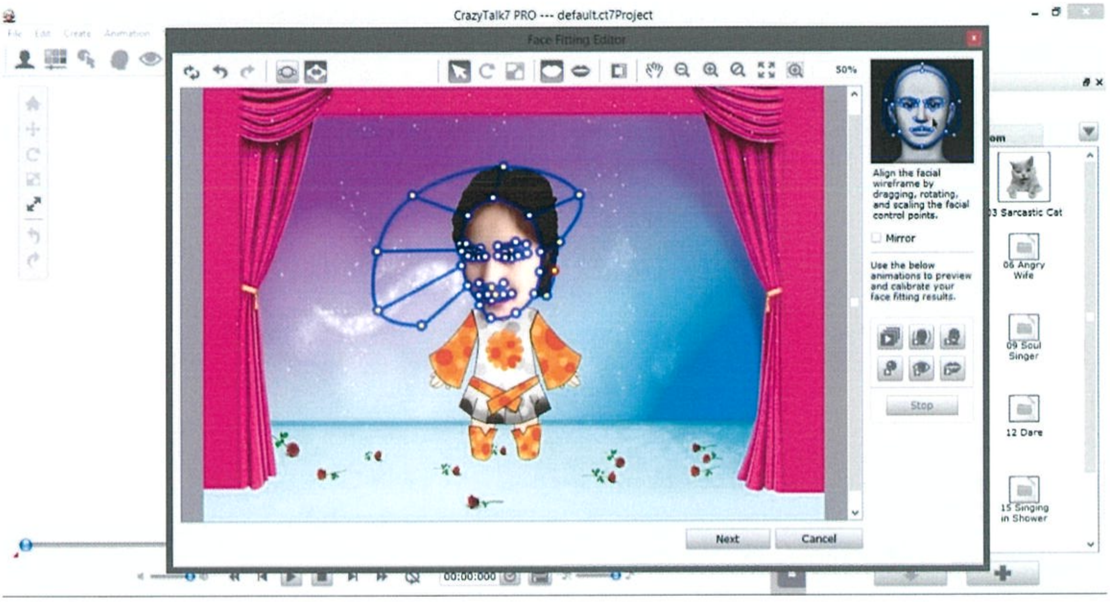
จากขั้นตอนนี้ให้เราเลือกยางลบทางด้านซ้ายมือลบส่วนที่ไม่ต้องการทิ้งจะได้ดังรูป

รูปที่ 3.5 ภาพใบหน้าที่จะใช้เป็นตัวละครในสื่อ

ตอนนี้เป็นการใส่ Effect ทำให้ตัวละครของเราขยับหน้าขยับปากได้ และใส่เสียงพากย์ลงไป โดยใช้โปรแกรม CrazyTalk Pro

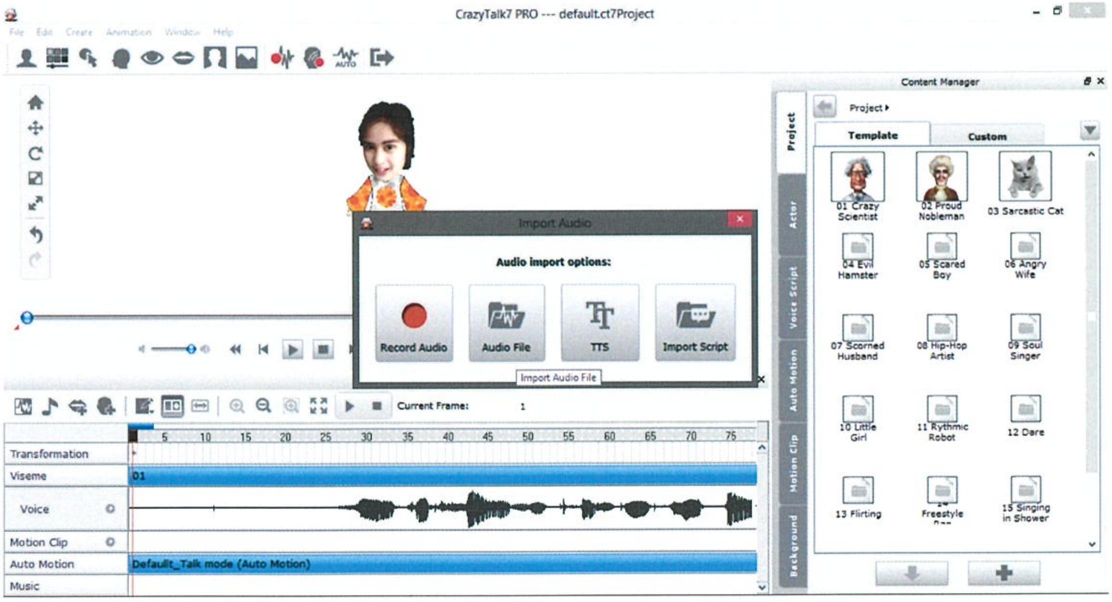


รูปที่ 3.6 เตรียมรูปภาพและใส่ท่าทาง



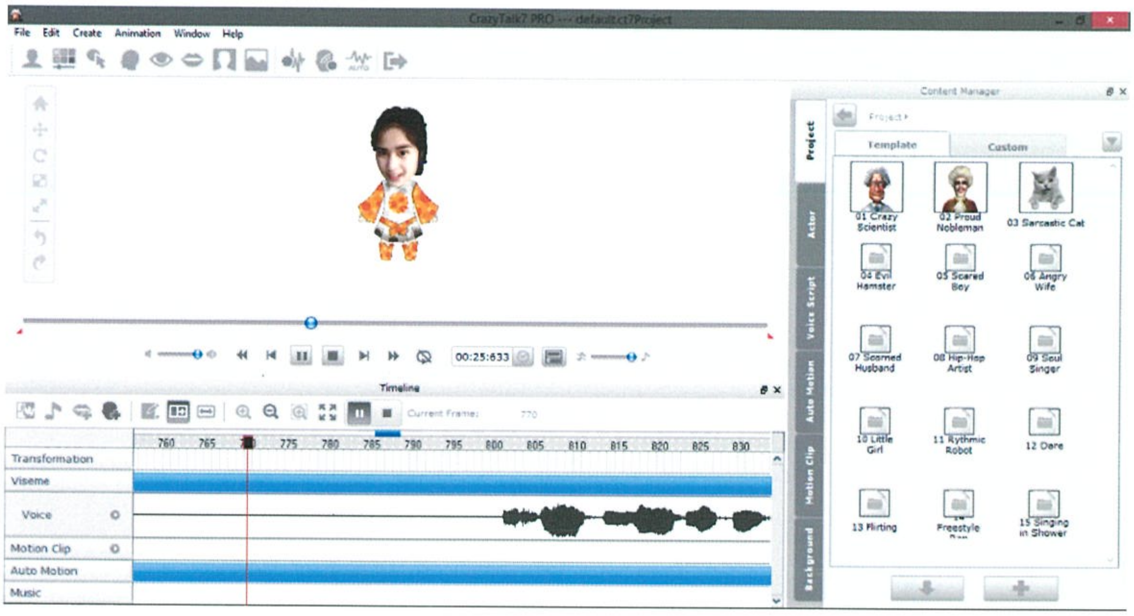
รูปที่ 3.7 จัดหน้าและปาก เพื่อแสดงท่าทางของตัวละคร

ขั้นตอนนี้เป็นการใส่เสียงลงไปในตัวละคร เราอาจเลือกอัดตอนนั้นเลย หรือเลือกไฟล์ที่เราได้อัดไว้แล้วก็ได้



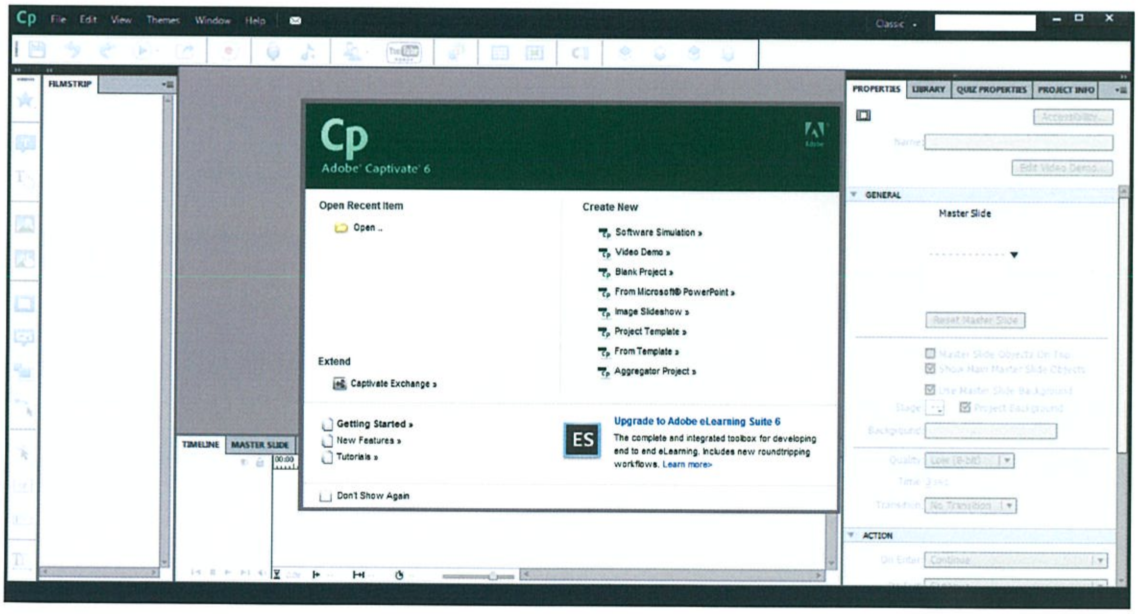
รูปที่ 3.8 การใส่เสียงลงไปในตัวละคร

เมื่อเราใส่เสียงลงไปแล้ว เราก็ลองทดลองเล่นดูว่าจะให้เสียงเราอยู่ช่วงไหนอย่างไรบ้าง สามารถจัดเองได้ที่ timeline ได้เลย



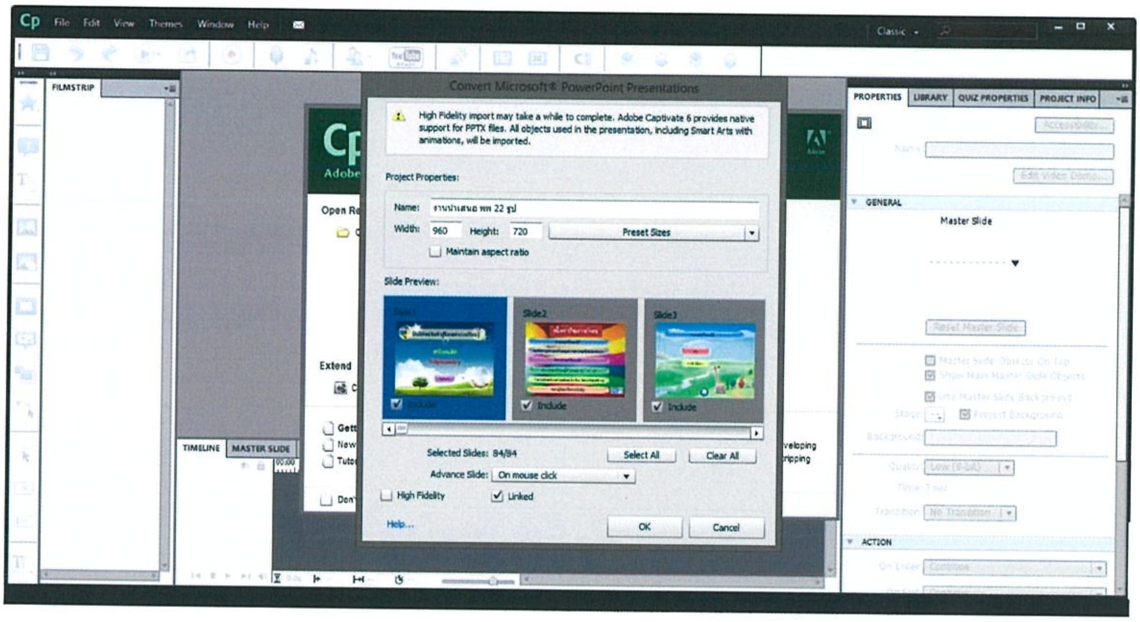
รูปที่ 3.9 เสร็จสิ้นการทำตัวละครและการใส่เสียงพากย์

หน้าจอการทำงานของโปรแกรม Adobe Captivate 6.0



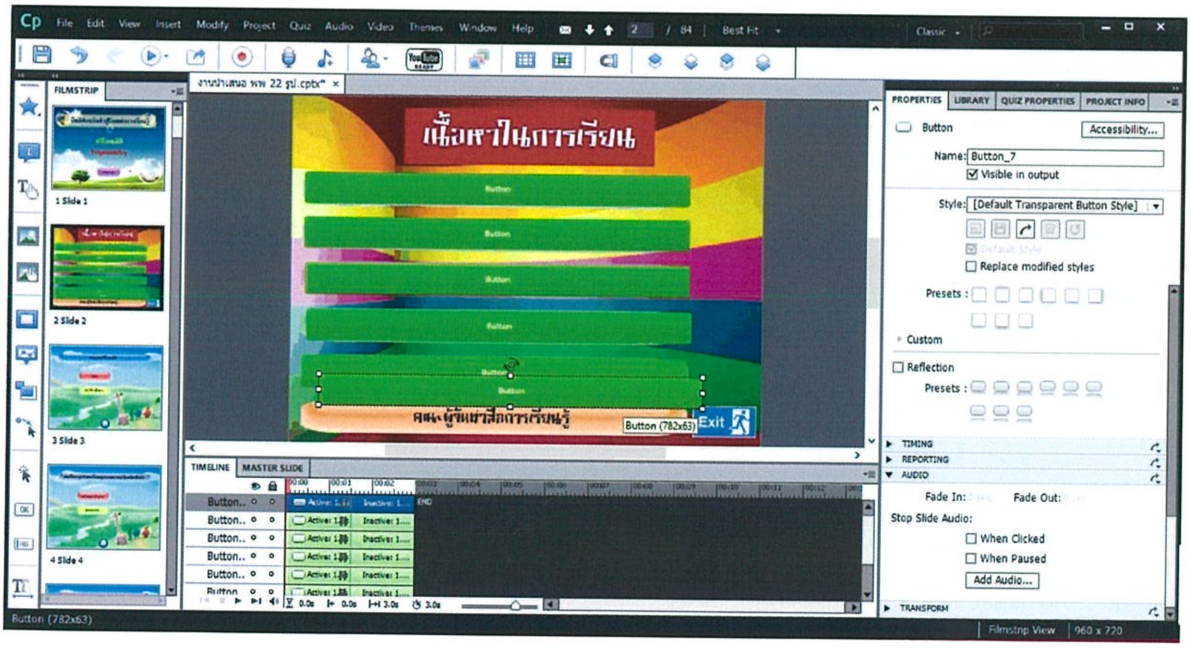
รูปที่ 3.10 ลักษณะโปรแกรมการใช้งานของ Adobe Captivate 6.0

นำสไลด์ที่เราทำในพาวเวอร์พ้อยเข้าในโปรแกรม



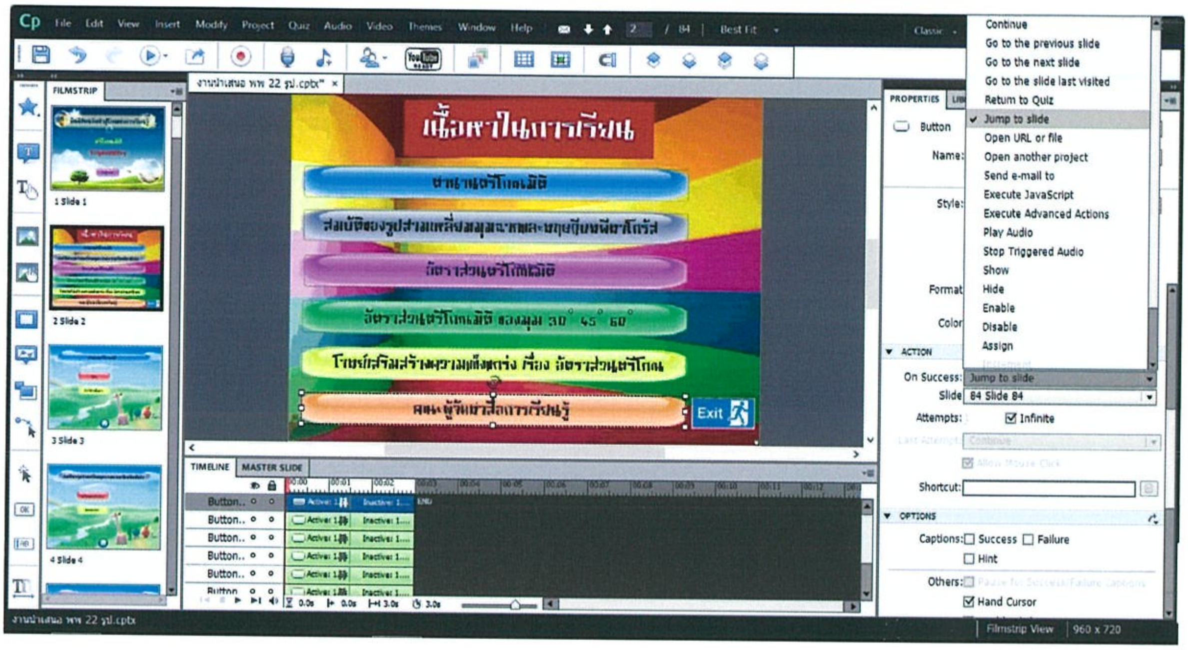
รูปที่ 3.11 นำงานเข้าสู่โปรแกรม

จากนั้นเราจะทำปุ่มโดยการคลิกที่เครื่องมือ เลือก button แล้วเอามาวางในปุ่มที่เราได้ทำเตรียมไว้แล้ว จะได้ดังรูป



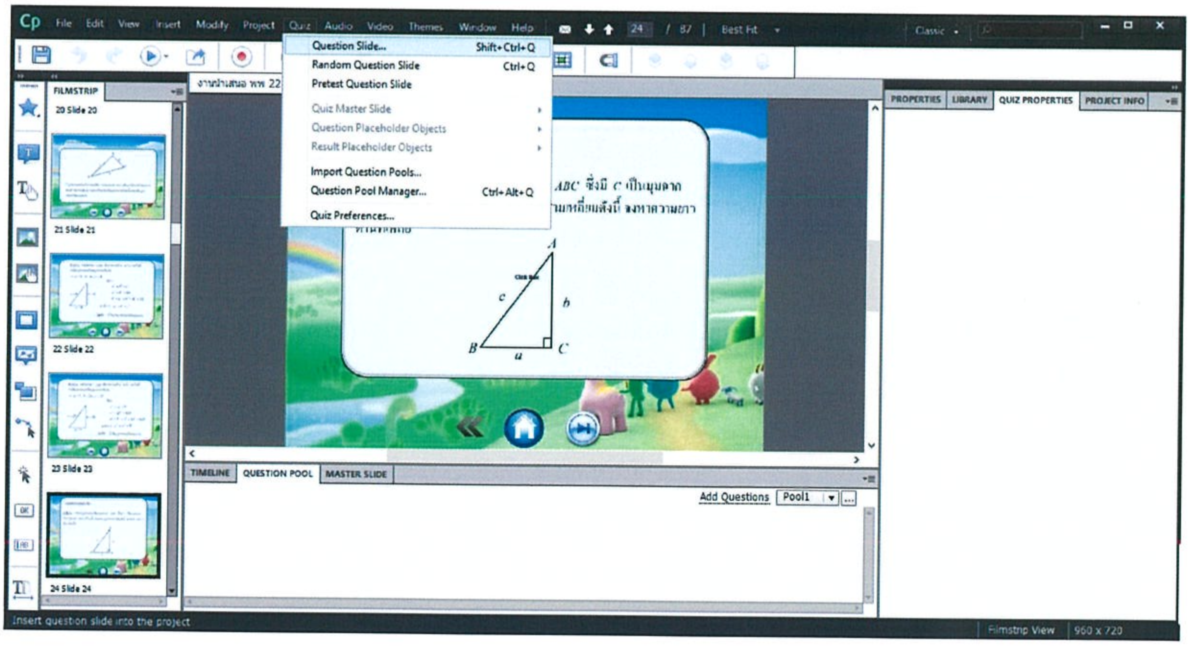
รูปที่ 3.12 การทำปุ่ม

ให้เราเลือกที่ปุ่มในสื่อการเรียนปุ่มที่เราจะเชื่อมโยงไปหน้าต่อไป จากนั้นเราก็ไปดูที่ properties แล้ว เลือก Action แล้วเลือก jump to slide ไปหน้าไหนก็ระบุหน้าลงไปว่าจะให้เชื่อมไปหน้าไหน ดังรูป



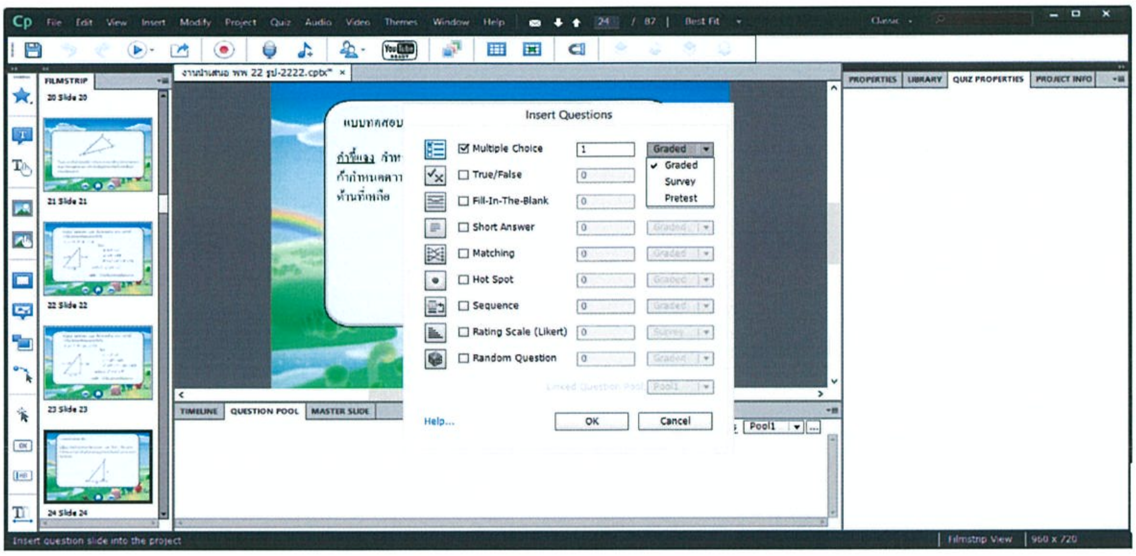
รูปที่ 3.13 การเชื่อมโยงสไลด์

มาถึงการทำแบบทดสอบ(Quiz)ให้เราเลือกตรงแถบเครื่องมือว่า Quiz จากนั้นให้เลือกที่ Question Slide



รูปที่ 3.14 การทำแบบทดสอบ(Quiz)

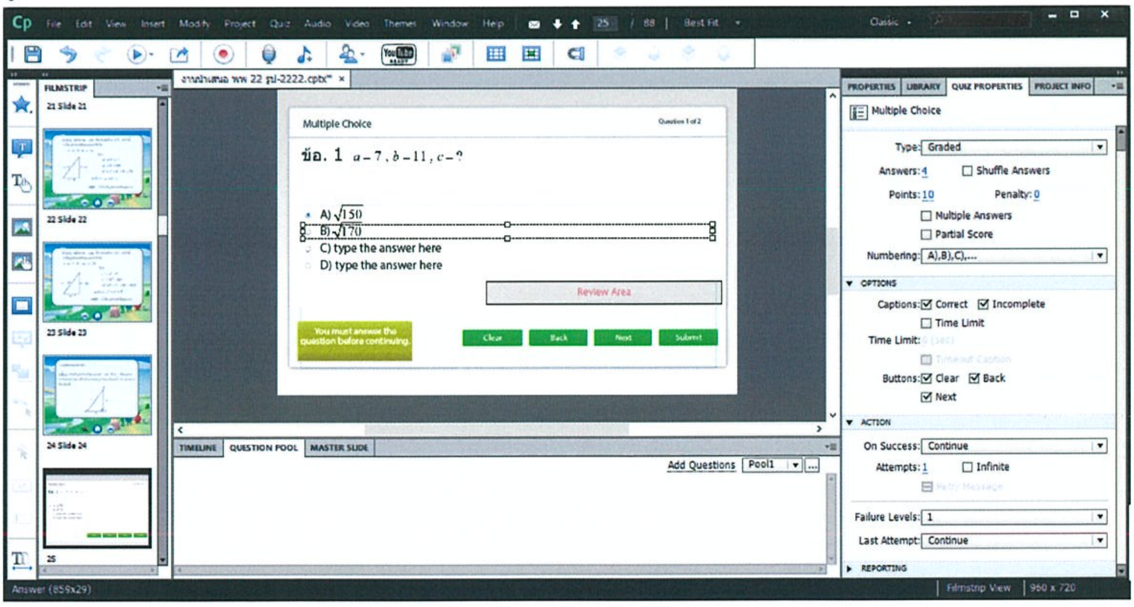
ในสื่อการเรียนของเราจะเป็นแบบทดสอบประเภท Multiple Choice ดังนั้นให้เราเลือกที่ Multiple Choice แล้วใส่จำนวนตัวเลือก(Choice)ของเราว่าจะให้มีกี่ตัวเลือก



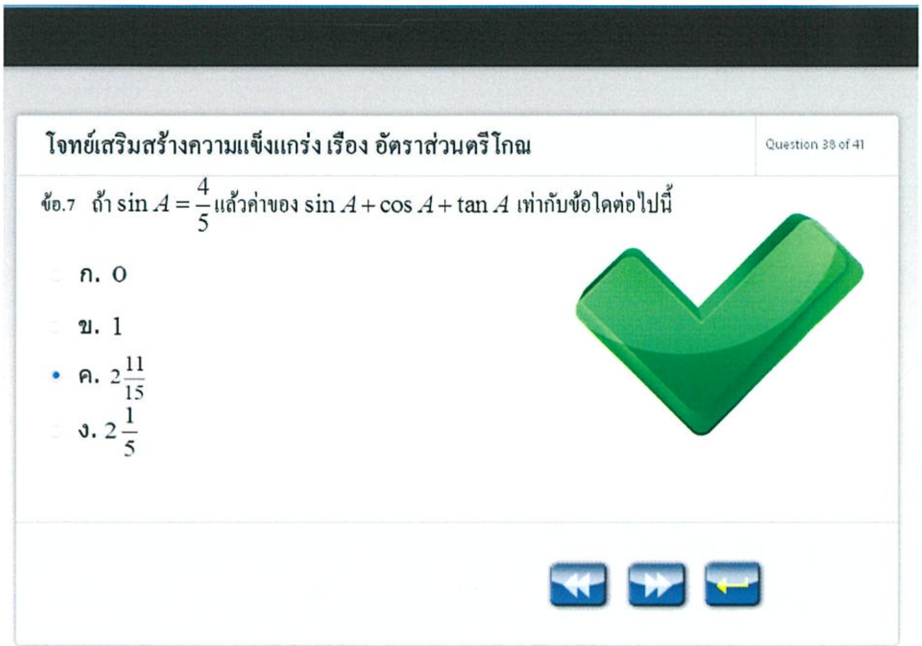
รูปที่ 3.15 การทำจำนวนตัวเลือก(Choice)

เมื่อเราเลือกจำนวนตัวเลือกเรียบร้อยแล้ว ก็จะปรากฏรูปแบบของแบบทดสอบขึ้นมาให้เราใส่ข้อความต่างๆลงไป ดัง

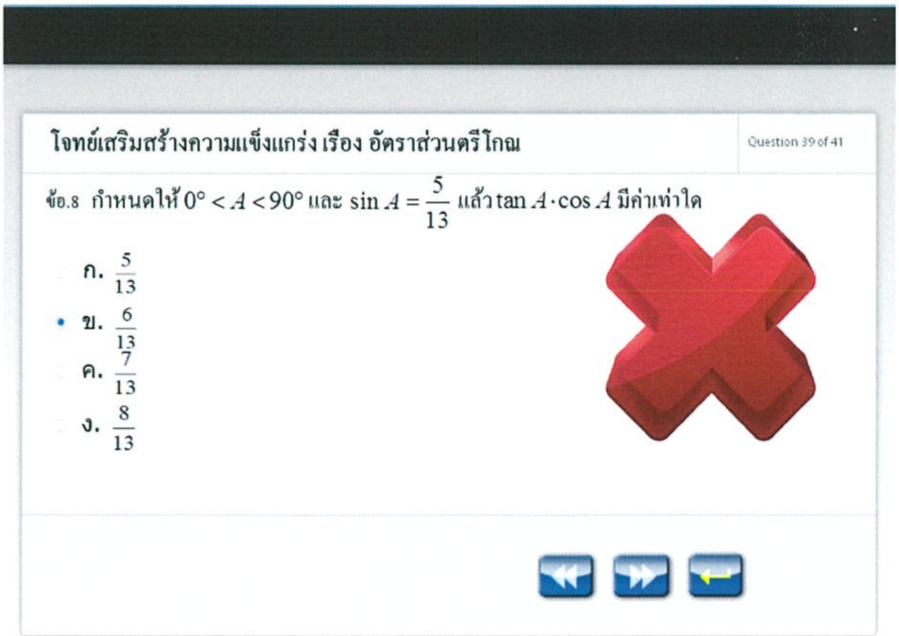
รูป



รูปที่ 3.16 รูปแบบการสร้างแบบทดสอบ



รูปที่ 3.17 ตัวอย่างเมื่อตอบถูก

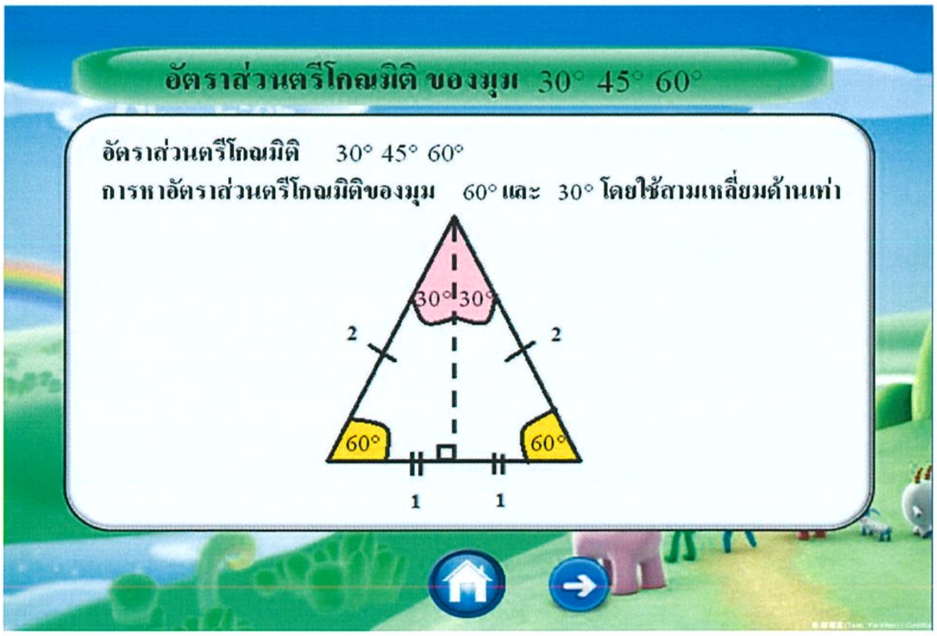


รูปที่ 3.18 ตัวอย่างเมื่อตอบผิด

3.3 บทเรียนต่างๆในสื่อมัลติมิเดีย

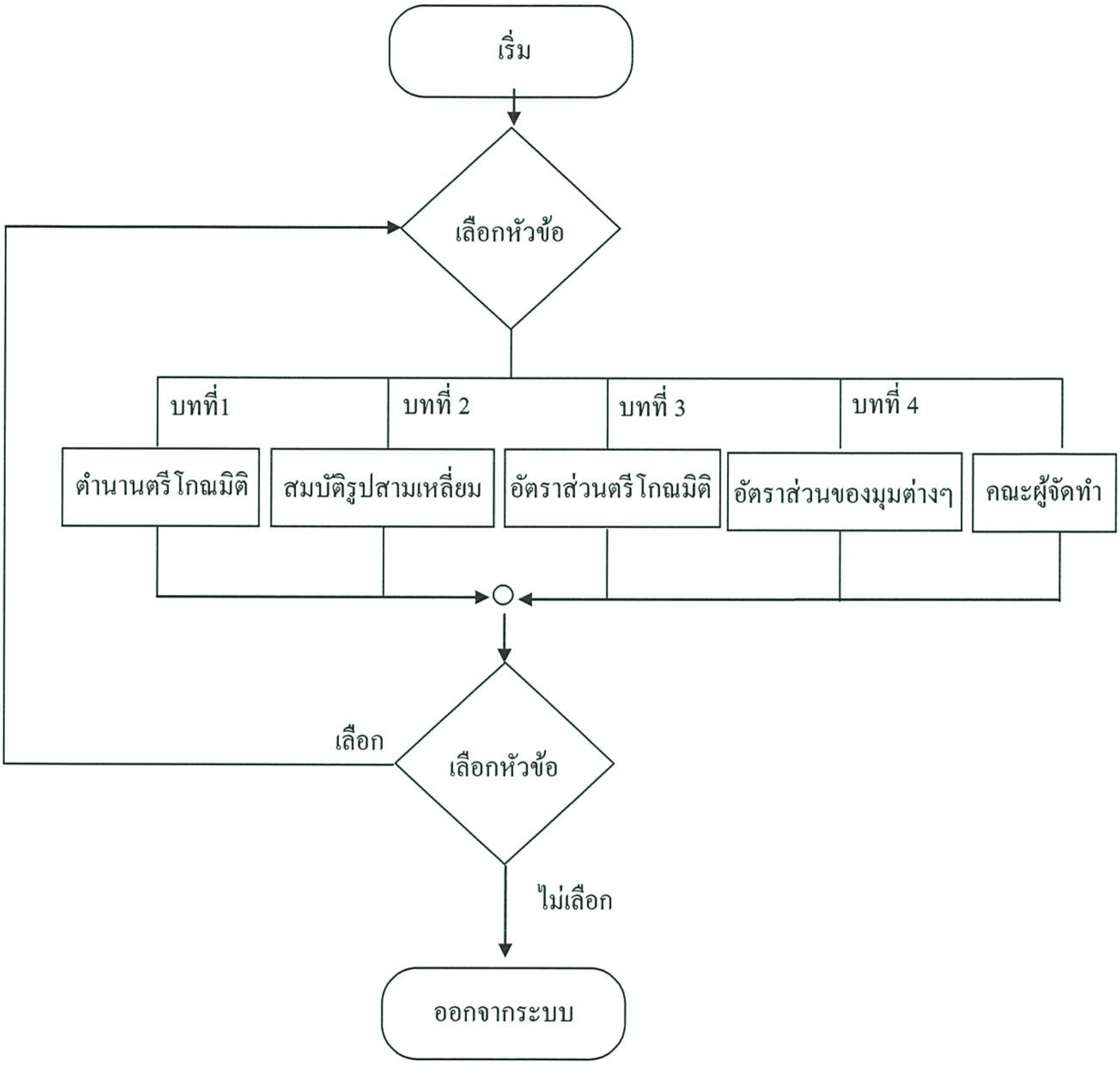
ภายในสื่อจะมีบทเรียน เรื่องตรีโกณมิติ อยู่ 5 บทเรียน ซึ่งจะมีแบบทดสอบให้ฝึกหัดทำเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจแทรกอยู่ในแต่ละบท

รูปที่ 3.19 หน้าหลักของสื่อมัลติมิเดีย



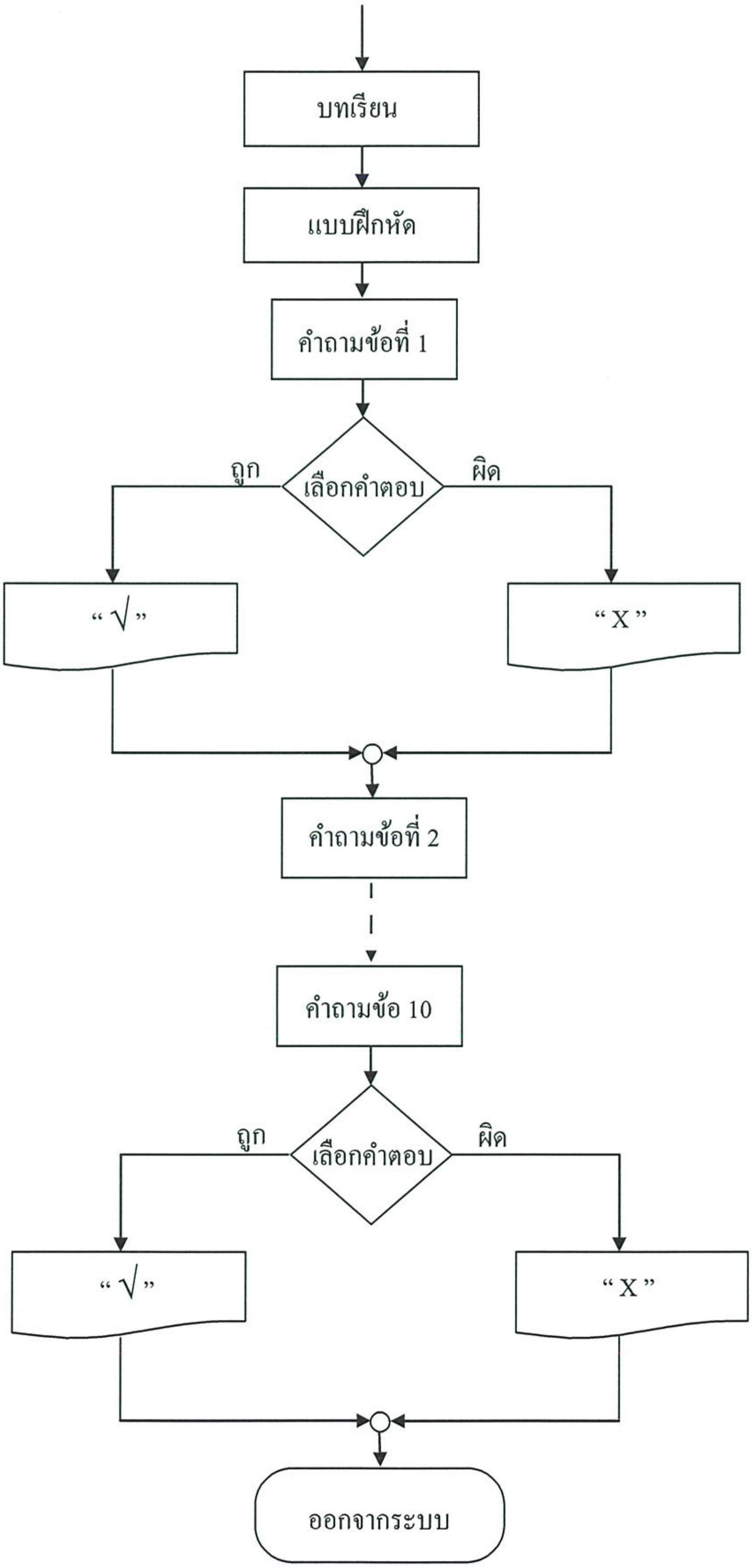
รูปที่ 3.20 ตัวอย่างบทเรียนบทสุดท้าย

3.4 Flowchart แสดงวิธีการเข้าสู่สื่อมัลติมิเดีย



รูปที่ 3.21 ตัวอย่างผังการทำงานของโปรแกรม

3.5 Flow Chart แสดงการทำแบบฝึกหัด



รูปที่ 3.22 ตัวอย่างผังการทำงานของแบบฝึกหัด

บทที่ 4
ผลการดำเนินงานและอภิปรายผล

4.1 โครงสร้างของโปรแกรม

4.1.1 หน้าจอของสื่อ

เริ่มแรกจะเป็นการนำเข้าสู่บทเรียนโดยมีชื่อเรื่อง และปุ่มคลิกเข้าสู่ระบบ ดังรูป

รูปที่ 4.1 หน้าแรกของสื่อมัลติมิเดีย

4.1.2 หน้าจอหลัก

หน้าจอหลักสำหรับเริ่มเข้าสู่บทเรียน : สื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์สำหรับเยาวชนรุ่นใหม่ Multimedia Math for Youngsters ในหน้านี้ประกอบไปด้วย ปุ่มเนื้อหาในการเรียน,ปุ่ม Help , ปุ่ม Exit Exit

ปุ่มเนื้อหาในการเรียน คือ เมื่อกดเข้าไปแล้วมีให้เลือกว่าจะศึกษาเนื้อหาหรือทำแบบทดสอบก่อนและเมื่อกดเลือกจะไปยังหน้าบทเรียนนั้นๆ

ปุ่ม Help คือ เมื่อกดเข้าไปแล้วจะเป็นการบอกสัญลักษณ์ต่างๆในสื่อว่าปุ่มไหนทำหน้าที่อย่างไร หรือบอกวิธีการใช้สื่อมัลติมิเดียนั่นเอง

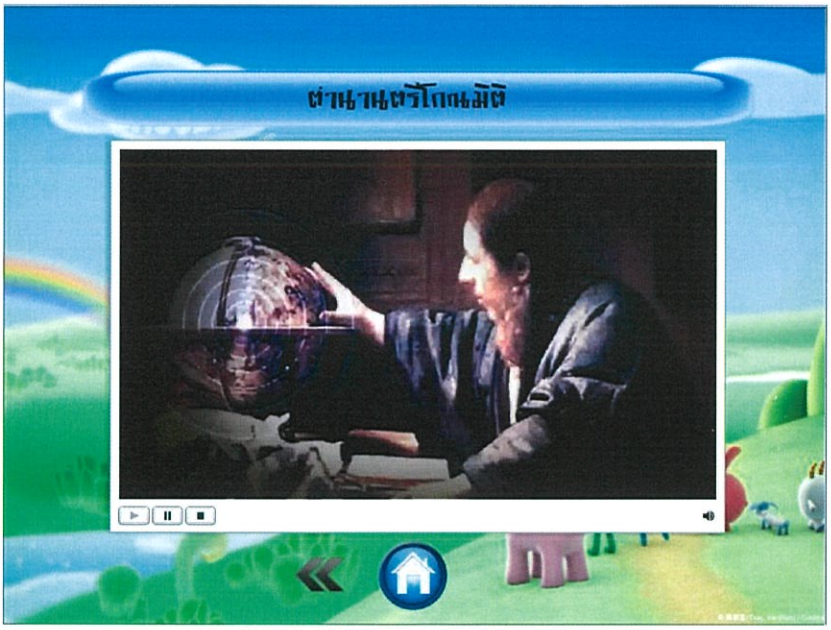
ปุ่ม Exit Exit คือ ปุ่มออกจากโปรแกรม

รูปที่ 4.2 หน้าจอหลัก (เนื้อหาในบทเรียน)

4.1.3 วิธีการใช้สื่อมัลติมิเดีย

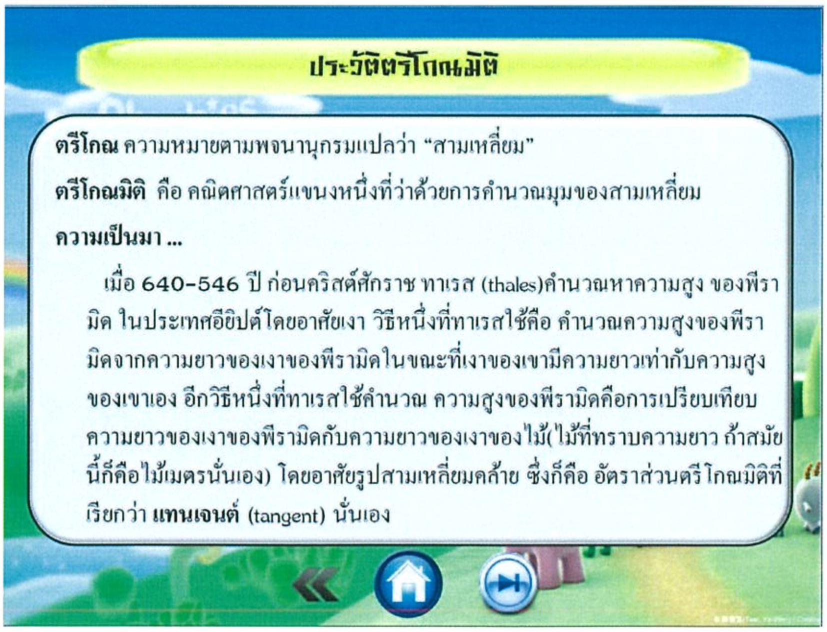
ในสื่อมัลติมิเดียจะประกอบไปด้วย บทเรียนต่างๆเริ่มจากบทแรกจะเป็นการกล่าวนำว่าตรีโกณมิติกำเนิดมาจากอะไรใครเป็นผู้คิดค้นหรือเรียกอีกอย่างว่าประวัติตรีโกณมิติ โดยสื่อในบทนี้จะใช้ชื่อว่า ตำนานตรีโกณฯ และเมื่อเข้าไปในหัวข้อนี้แล้วจะพบว่า มีทางเลือกให้ศึกษาด้วยกัน 2 ทางคือ 1.ดูเป็นวิดิโอ 2.เนื้อหาใช้สำหรับอ่านเสริมความเข้าใจ ดังรูป

รูปที่ 4.3 บทเรียนเรื่องตำนานตรีโกณ



รูปที่ 4.4 วิดิโอประวัติตรีโกณมิติ

ต่อไปเป็นในส่วนของเนื้อหาประวัติโดยย่อเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจจากวิดีโอ

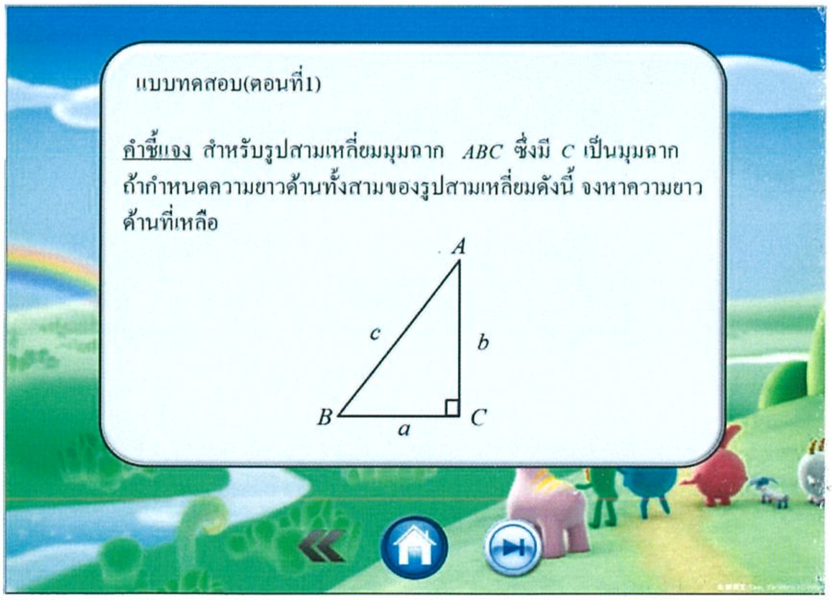


รูปที่ 4.5 เนื้อหา(บรรยาย) เรื่องตรีโกณมิติ

ในบทเรียนถัดไปจะเป็นเรื่องของสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในบทนี้จะเป็นการสอนเพื่อทำความเข้าใจในเบื้องต้นก่อนรู้จักกับตรีโกณมิติ เพราะในบทนี้เป็นพื้นฐานสำคัญ และทฤษฎีบทในบทเรียนนี้จะนำไปสู่การเรียนในบทถัดไปได้อย่างเข้าใจ ดังรูป

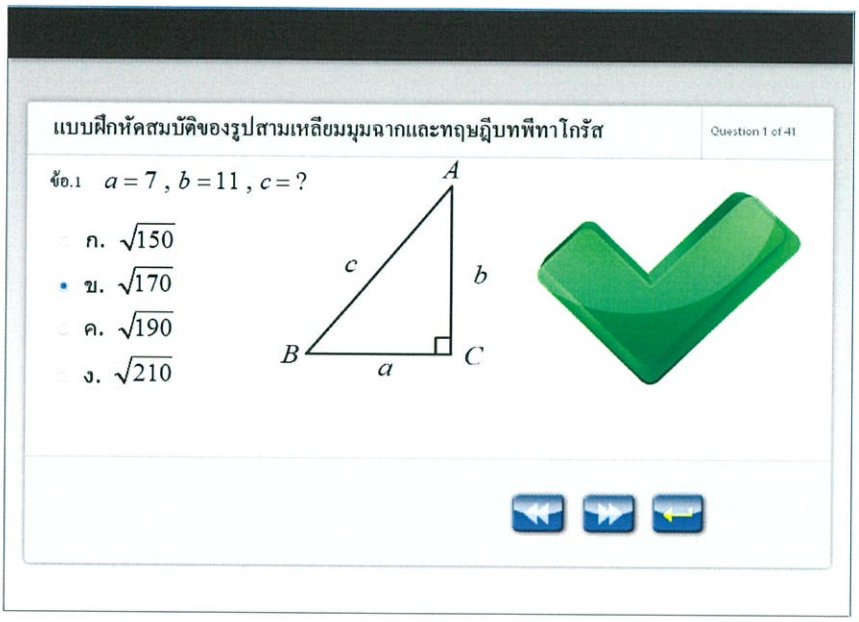
รูปที่ 4.6 บทเรียนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมฯ

เมื่อเรียนเสร็จเราจะมีแบบทดสอบให้ทำ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจในตนเองว่าผู้เรียนได้เข้าใจในเนื้อหาการสอนของเราอย่างถ่องแท้และสามารถนำไปปรับประยุกต์ใช้กับแบบทดสอบของเราได้ ดังรูป



รูปที่ 4.7 แบบทดสอบในบทเรียนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมฯ

เราจะมีคำชี้แจงเพื่อให้ผู้เรียนได้ศึกษาทำความเข้าใจก่อนว่าควรจะทำอย่างไร จากนั้นก็เลือกปุ่มถัดไปเพื่อเริ่มทำแบบทดสอบ ดังรูป



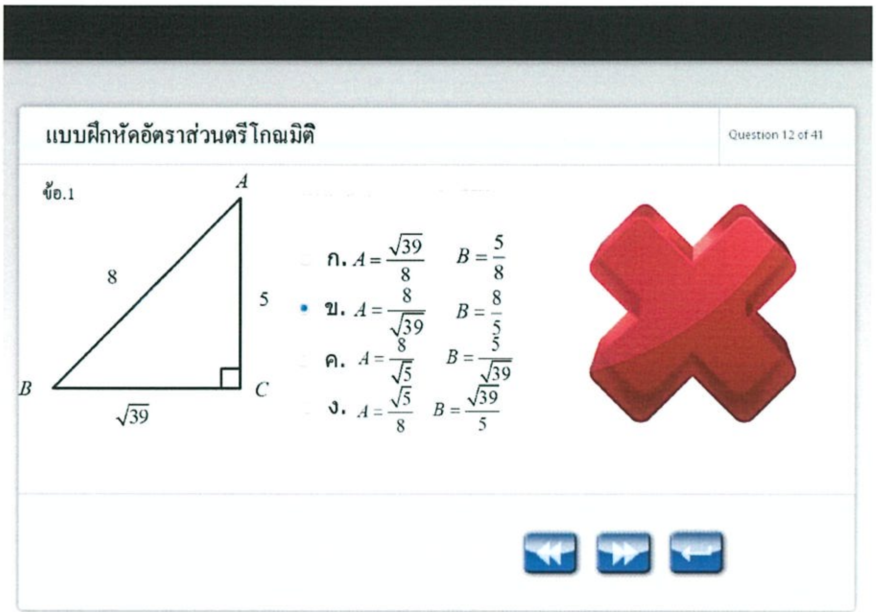
รูปที่ 4.8 ตัวอย่างแบบทดสอบในบทเรียนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากฯ

<u>อธิบายเพิ่มเติมจากรูป 4.8</u> เมื่อเราเลือกคำตอบที่คิดว่าถูกแล้วให้เรากดปุ่ม  ถ้าถูกจะปรากฏเครื่องหมายถูกดังรูป แต่ถ้าตอบผิด ก็จะปรากฏเป็นเครื่องหมายกากบาทสีแดงขึ้น

บทเรียนต่อไปจะว่าด้วยเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ในบทนี้จะพูดถึงสมบัติของความคล้าย และอธิบายด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมว่าด้านไหนเรียกว่าอะไร มีอัตราส่วนอย่างไร ซึ่งจะแบ่งเป็น 2 อย่าง คือ 1.เนื้อหาและตัวอย่าง 2. แบบทดสอบ ดังรูป

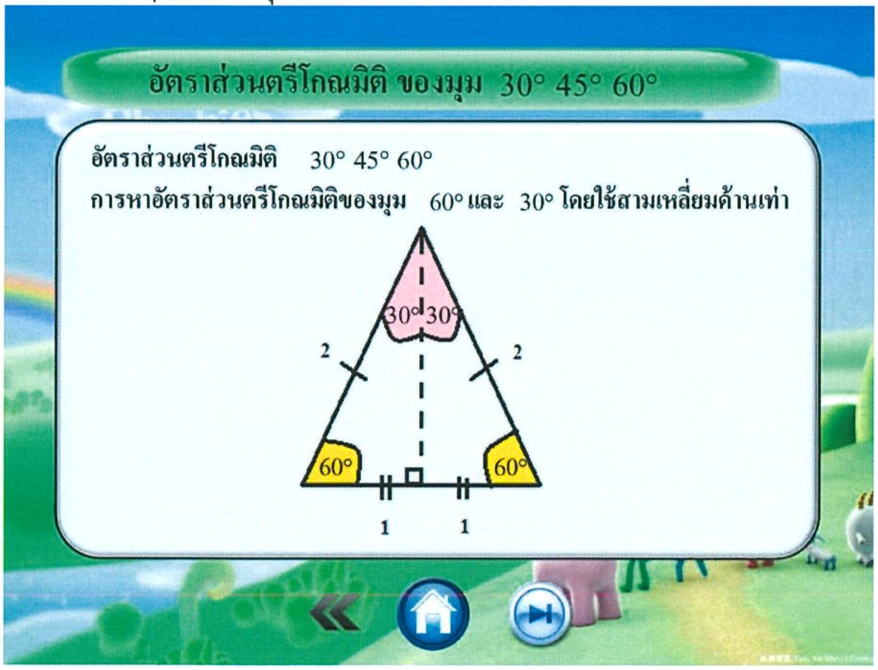
รูปที่ 4.9 บทเรียนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณ

เมื่อเราเลือกคำตอบผิด จะปรากฏเครื่องหมายกากบาท ดังรูป



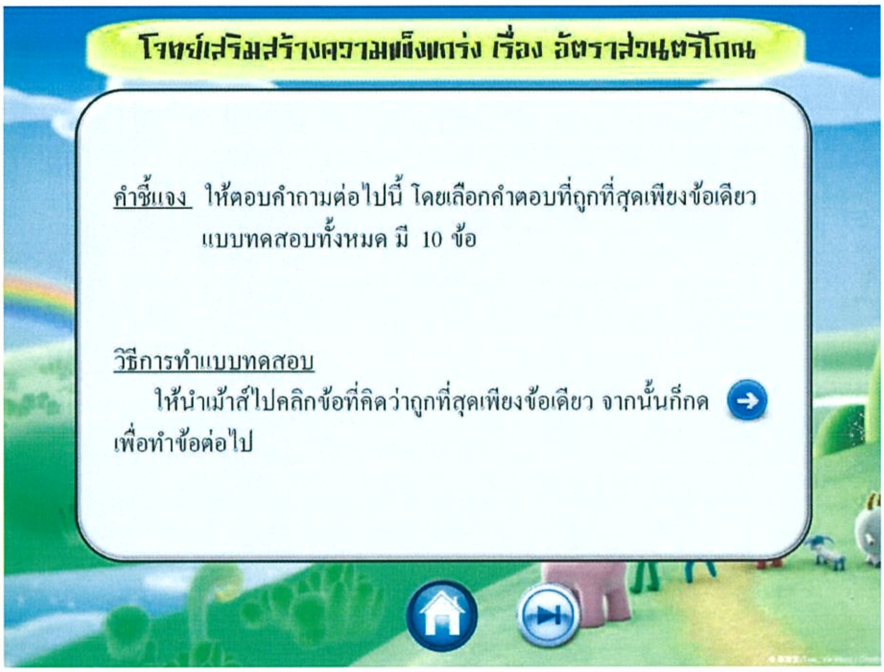
รูปที่ 4.10 แบบทดสอบเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

บทเรียนต่อไปจะว่าด้วยเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° 45° และ 60° เป็นการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณฯ ต่างๆของแต่ละมุมว่ามีขนาดเท่าไร และจะสอนเกี่ยวกับการหาความยาวด้าน ดังรูป

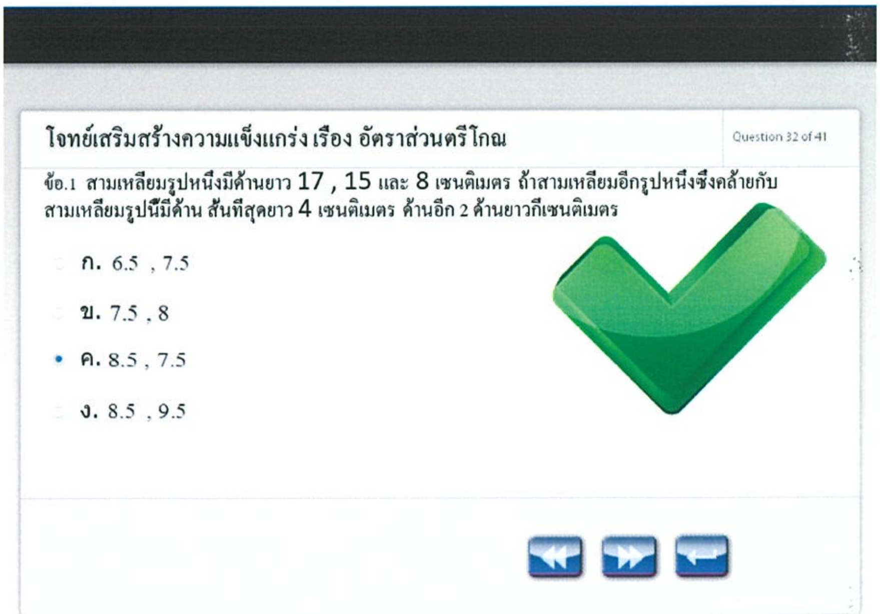


รูปที่ 4.11 บทเรียนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° 45° และ 60°

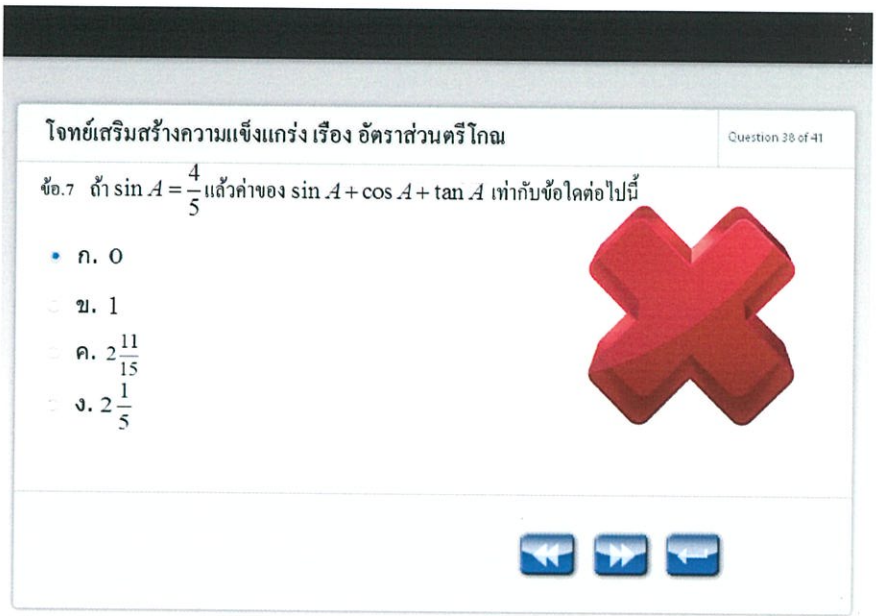
ต่อไปเป็นโจทย์เสริมสร้างความแข็งแกร่ง เป็นตัวอย่างโจทย์เสริมที่ทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในการเรียนมากขึ้น ในหัวข้อนี้จะเป็นแบบทดสอบอย่างเดียว โดยเนื้อหาจะคละกันทั้งหมดตามแต่ละบทเรียนก่อนๆที่ได้เรียนมาซึ่งมีจำนวนทั้งหมด 10 ข้อ ดังรูป



รูปที่ 4.12 โจทย์เสริมสร้างความแข็งแกร่ง

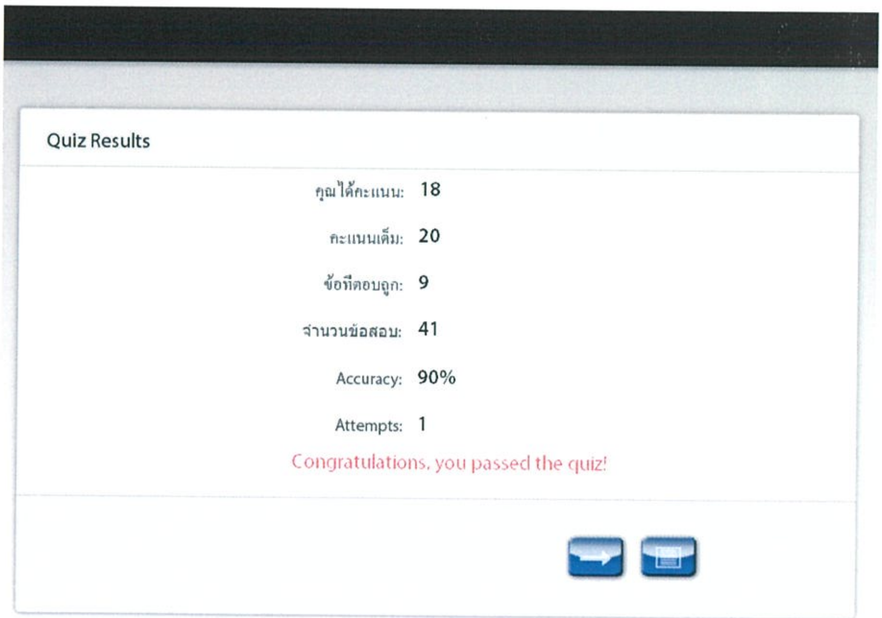


รูปที่ 4.13 แบบทดสอบโจทย์เสริมสร้างความแข็งแกร่ง



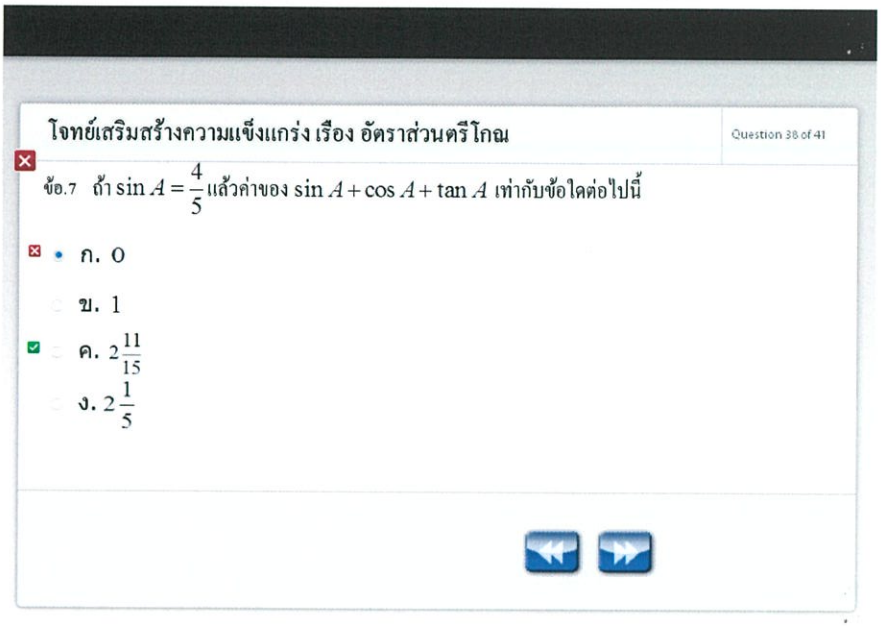
รูปที่ 4.14 แบบทดสอบโจทย์เสริมสร้างความแข็งแกร่ง

เมื่อทำแบบทดสอบเสร็จ จะปรากฏผลการทำแบบทดสอบออกมาว่าเราผ่านหรือไม่ผ่านได้คะแนนเท่าไร คิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ ดังรูป



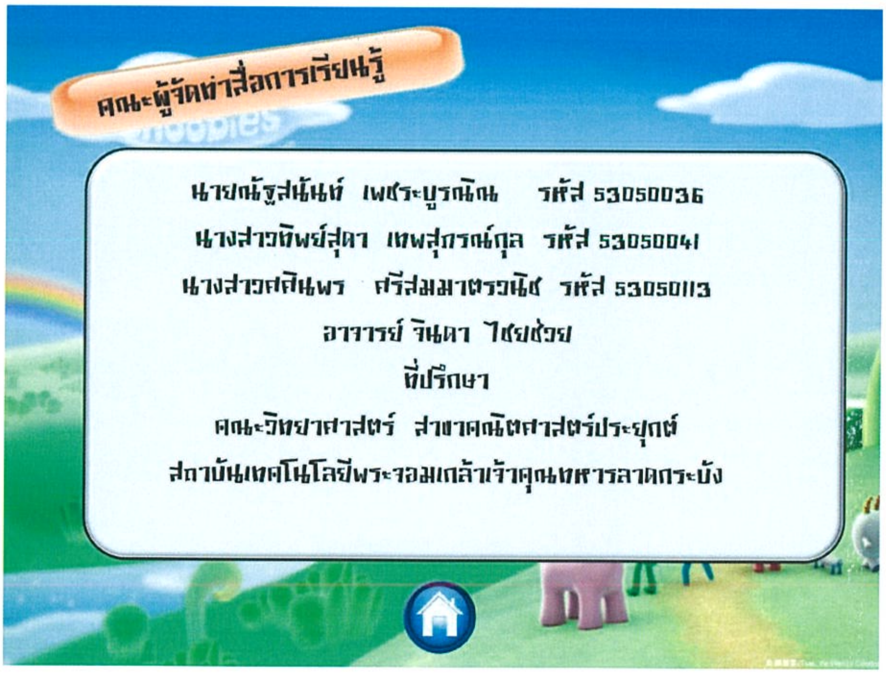
รูปที่ 4.15 ผลการทำแบบทดสอบ

หลังจากนั้นเราสามารถตรวจสอบคำตอบที่ถูกต้องได้จากเฉลย ดังรูป



รูปที่ 4.16 เฉลยแบบทดสอบโจทย์เสริมสร้างความแข็งแกร่ง

4.1.4 หน้าจอผู้จัดทำสื่อมัลติมิเดีย



รูปที่ 4.17 หน้าจอของผู้จัดทำสื่อมัลติมิเดีย

4.2 ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในการทำปัญหาพิเศษนี้ได้ทำการพัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยพัฒนาทักษะความเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์สำหรับใช้ในกลุ่มเป้าหมายในระดับชั้น

4.2.1 ประโยชน์ช่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษาตอนต้น(1-3) ซึ่งสามารถประเมินในแต่ละด้านได้ดังนี้

1. ช่วยให้ผู้เรียนสามารถที่จะศึกษาได้ด้วยตนเองในเวลาและสถานที่ที่สะดวก เช่น สามารถที่จะศึกษาเองที่บ้านได้ในเวลาใดก็ได้ที่อยากจะศึกษา

2. เป็นสื่อที่สามารถเสริมหรือทบทวนบทเรียนที่เรียนในชั้นเรียนโดยสามารถที่จะศึกษาบทที่ตามไม่ทันในชั้นเรียนและไม่จำกัดครั้งในการศึกษา

3. ไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการเรียนเพราะสามารถโต้ตอบฝึกการคิดทำให้สนุกที่จะเรียนรู้ ทั้งยังเป็นจุดเริ่มต้นสำหรับการศึกษาคอมพิวเตอร์อีกด้วย

4.2.2 การส่งเสริมให้เข้าใจในบทเรียนได้ง่ายขึ้นและเพลิดเพลินกับวิชาคณิศาสตร์

การนำเสนอในรูปลักษณะของสื่อมัลติมิเดียนั้น เน้นสาระเนื้อหาความเข้าใจเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์(เรื่องตรีโกณมิติ) รวมถึงวิธีคิดหลักการจำต่างๆ ประกอบกับรูปภาพที่เคลื่อนไหวได้และมีรูปแบบสีสันที่สวยงามเพื่อเพิ่มความน่าสนใจให้กับผู้เรียน ซึ่งโปรแกรมนี้ผู้เรียนสามารถที่จะเรียนรู้ได้จากคำอธิบายเนื้อหาไปจนถึงการทำแบบทดสอบเพื่อทดสอบความเข้าใจ จึงทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจอยากติดตามบทเรียนในขณะเดียวกันก็ได้ซึมซาบทั้งความรู้ และวิธีคิดประกอบกันไปด้วย

4.2.3 ผู้ใช้เกิดความสนใจและอยากที่จะใช้งาน

ด้วยสื่อมัลติมิเดียของเรานั้นมีรูปภาพที่เคลื่อนไหวได้และมีรูปแบบสีสันที่สวยงามเพื่อเพิ่มความน่าสนใจให้กับผู้เรียนทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจอยากจะศึกษาและติดตาม สื่อมัลติมิเดียคณิตศาสตร์สร้างขึ้นมาใช้งานบนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ ซึ่งแสดงส่วนการติดต่อกับผู้ใช้เป็นแบบกราฟฟิก (Graphics User Interface) จึงทำให้การใช้งานง่าย สามารถเลือกคำสั่งการทำงานต่างๆได้โดยการใช้ตัวควบคุมเมาส์ (Mouse)

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

เป้าหมายช่วยสอนวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับใช้ในกลุ่มเป้าหมายในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นปีที่ 1-3 และผู้สนใจทั่วไป โดยสร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนมีทักษะทางด้านคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์เพิ่มขึ้น และมีความสนุกสนานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และทำความเข้าใจเน้นในเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ มีการใช้งานที่สามารถเข้าใจได้ง่าย และสามารถที่จะทดสอบความเข้าใจในบทเรียนที่ได้ศึกษามาแล้วรวมถึงให้เด็กมีทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์นอกจากนี้ยังมีปัญหาทางด้านข้อจำกัดด้านฐานข้อมูลและด้านเวลา ทำให้ไม่สามารถใส่ข้อมูลต่างๆเป็นจำนวนมากได้ ถ้าทำการทดสอบบนระบบปฏิบัติการ เช่น IOS / Android คำสั่งบางตัวไม่สามารถใช้ได้ ระยะเวลาในการทำแบบทดสอบมีการจำกัดทำให้ผู้เรียนทำไม่ทัน และเสียสิทธิ์ในการทำข้ออื่นๆไป

5.2 สรุปผลปัญหาพิเศษ

ผลการวิจัยโปรแกรม สามารถสรุปความสามารถโดยสังเขปได้ดังนี้

1) สามารถใช้งานส่วนการควบคุมต่างๆ โดยอาศัยการคลิก (Click) เมาส์ (Mouse) และจะมีเสียงประกอบการใช้งานตลอดซึ่งเป็นการทำงานด้วยส่วนการติดต่อแบบกราฟฟิก (Graphics User Interface : GUI) การโต้ตอบกับผู้ใช้ (Interactive) โดยรองรับกับเหตุการณ์ต่างๆ

2) โปรแกรม จะเป็นไปตามลำดับของเนื้อหา มีทฤษฎีบทต่างๆสอดแทรกและมีแบบทดสอบให้ฝึกทำหลังจากที่ศึกษาเนื้อหาต่างๆเสร็จเรียบร้อย ทำให้รู้จักที่จะพัฒนาตนเองในครั้งต่อไป หรือนำกลับไปศึกษาเนื้อหาเหล่านั้นใหม่อีกครั้งได้

5.3 ข้อเสนอแนะ

1) ควรมีการเพิ่มทางเลือกในการเข้าถึงโปรแกรมให้หลากหลายมากยิ่งขึ้นโดยเพิ่มช่องทางด้าน Mobile Application และด้าน Desktop Application

2) ควรเพิ่มความหลากหลายของโจทย์ให้มีความหลากหลาย โดยการเพิ่มจำนวนแบบทดสอบให้มีหลายตอนมากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

กฤษณพงศ์ เลิศบำรุงชัย และ บังอร เลิศบำรุงชัย. (2556). **สร้างสื่อการสอนมัลติมิเดียด้วย Adobe Captivate 6.**
กรุงเทพฯ: โปรวิชั่น และ บจก.

รองศาสตราจารย์ จิตรจวบ เปาอินทร์. (ม.ป.ป.). **คู่มือประกอบสื่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์.** เข้าถึงได้จาก: http://www.slideshare.net (วันที่ค้นข้อมูล: 12 ตุลาคม 2556).

ครูเสวต. (ม.ป.ป.). **บทที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ**. เข้าถึงได้จาก:
http://krusawed.files.wordpress.com (วันที่ค้น ข้อมูล: 15 ตุลาคม 2556).

CrazyTalk Animator. (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก: http://www.thaigaming.com
(วันที่ค้น ข้อมูล: 15 ตุลาคม 2556)