

การประยุกต์การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยและจุดที่มีความโค้งสูงสุดบนเส้นโค้ง
ในการลงทะเบียนภาพ

APPLICATION OF DISCRETE WAVELET TRANSFORM AND MAXIMUM
CURVATURE OF CONTOURS FOR IMAGE REGISTRATION

เพชร นันทิวัดนา
PETCH NANTIVATANA

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2549

ISBN 974-15-2175-8

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การประยุกต์การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยและจุดที่มีความโค้งสูงสุดบนเส้นโค้ง
ในการลงทะเบียนภาพ

APPLICATION OF DISCRETE WAVELET TRANSFORM AND MAXIMUM
CURVATURE OF CONTOURS FOR IMAGE REGISTRATION

เพชร นันทิวัดนา

PETCH NANTIVATANA

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 63290
วัน,เดือน,ปี..... 25 ส.ค. 2549

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2549

ISBN 974-15-2175-8

**APPLICATION OF DISCRETE WAVELET TRANSFORM AND MAXIMUM
CURVATURE OF CONTOURS FOR IMAGE REGISTRATION**

PETCH NANTIVATANA

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER ENGINEERING IN ELECTRONIC ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2006

ISBN 974-15-2175-8

COPYRIGHT 2006

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประยุกต์การแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยและจุดที่มีความโค้งสูงสุดบนเส้นโค้งในการลงทะเบียนภาพ
นักศึกษา	นายเพชร นันทิวัดนา
รหัสนักศึกษา	47060412
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์
พ.ศ.	2549
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.มนัส สัจวรศิลป์
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม	ผศ.ดร.ชูชาติ ปิณฑวิรุจน์

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้นำเสนอวิธีการลงทะเบียนภาพแบบไม่ทำซ้ำ โดยการประยุกต์ใช้การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด ด้วยการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยในการหาจุดแลนมาร์ค ซึ่งข้อจำกัดในการนำการแปลงเวฟเล็ดมาใช้ในการลงทะเบียนภาพคือ จุดเริ่มต้นของคอนทราสต์ของขอบภาพต้องเป็นจุดที่สอดคล้องกัน เพื่อความถูกต้องในการลงทะเบียนภาพ ดังนั้นอาศัยพื้นฐานทางเรขาคณิตและคุณสมบัติค่าไม่ผันแปรต่อการแปลงแอฟฟอนน์ โดยใช้จุดที่มีความโค้งสูงสุดบนเส้นโค้งที่แทนด้วยสมการเส้นโค้งบีสไปลัน เป็นจุดเริ่มต้นของคอนทราสต์ของขอบภาพ ทำการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยเพื่อลดระดับความละเอียดของคอนทราสต์ของขอบภาพลง นำคอนทราสต์ของขอบภาพที่ลดระดับความละเอียด มาเป็นแลนมาร์คในการหาเมตริกซ์ของการแปลง เพื่อใช้ในการลงทะเบียนภาพ จากคุณสมบัติของการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วย และคุณสมบัติของเส้นโค้งบีสไปลัน วิธีการลงทะเบียนภาพวิธีนี้เป็นวิธีที่ให้ผลดีวิธีหนึ่ง ซึ่งสามารถใช้ได้กับภาพที่ถูกแปลงแบบแอฟฟอนน์และภาพที่มีสัญญาณรบกวนได้

Thesis Title	Application of Discrete Wavelet Transform and Maximum Curvature of Contours for Image Registration
Student	Mr.Petch Nantivatana
Student ID.	47060412
Degree	Master of Engineering
Programme	Electronics Engineering
Year	2006
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Manas Sangworasil
Thesis Co-advisor	Asst.Prof.Dr.Chuchart Pintavirooj

ABSTRACT

We introduce a multi-resolution image registration based on using discrete wavelet transform. We first extract contour from both images. The extracted contours are then fitted with B-spline curve representation to synthesize the new contours with the area parameter is used in B-spline fitting to make the new generated curve affine invariant. Discrete Wavelet Transform is applied for image registration However, DWT suffers from the problem of starting point. To solve the problem, maximum curvature is selected as starting point. Once the starting points on the contour have been established, the discrete wavelet transform is then recursively represented the contours until only few points are remained. Due to the affine-invariant properties of discrete wavelet transform, these points can be used as landmark points for registering the transformed contour with the original contour. The experiments have shown that the purposed methods are robust and promising even in the presence of noise.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ด้วยความกรุณาจากท่าน รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์ อาจารย์ที่ปรึกษา และท่าน ผศ.ดร.ชูชาติ ปิณฑวิรุจน์ อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหาตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดี ผู้เขียนรู้สึกซาบซึ้งในความเมตตาของท่านและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ ดร.รัชนิพร พุคยาภรณ์ พุกกะมาน อธิการบดีมหาวิทยาลัยศรีปทุมที่ได้สนับสนุนทุนการศึกษาในการวิจัยนี้

ขอขอบคุณ เพื่อนๆ พี่ๆ และน้องๆ นักศึกษาในห้องปฏิบัติการวิจัยประมวลผลสัญญาณและภาพทางการแพทย์ ที่ช่วยให้แนวคิด คำแนะนำ ช่วยแก้ปัญหา ทำให้งานวิจัยสำเร็จลุล่วงลงได้

สุดท้ายต้องขอขอบพระคุณบิดาและมารดา ผู้ซึ่งอบรมสั่งสอน เลี้ยงดู ตลอดจนให้กำลังใจและสนับสนุนในด้านการศึกษาแก่ข้าพเจ้าตลอดมา

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอบอบแต่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

เพชร นันทวิวัฒนา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VIII
สารบัญรูป.....	IX
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	1
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	1
1.4 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในงานวิจัย.....	2
1.5 ขอบเขตของงานวิจัย.....	2
1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์.....	3
บทที่ 2 การลงทะเบียนภาพและการแปลงเชิงเรขาคณิต.....	4
2.1 บทนำ.....	4
2.2 ประเภทของการลงทะเบียนภาพ.....	4
2.2.1 วัตถุชนิดเดียวกันและถ่ายภาพด้วยวิธีเดียวกัน (Intraobject-Intramodality Registration).....	4
2.2.2 วัตถุชนิดเดียวกันแต่ถ่ายภาพต่างวิธีกัน (Intraobject-Intermodality Registration).....	5
2.2.3 วัตถุต่างชนิดกัน (Interobject Registration).....	5
2.3 วิธีลงทะเบียนภาพ.....	6
2.3.1 วิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้จุดควบคุม (Control-point based registration).....	6
2.3.2 วิธีลงทะเบียนภาพแบบโมเมนต์ (Moment based registration).....	6
2.3.3 วิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้ขอบภาพ (Edge-based registration).....	7
2.3.4 วิธีลงทะเบียนภาพแบบพิจารณาความเหมือนกันของภาพ (Optimization of a similarity measurement).....	7

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.4 การแปลงเชิงเรขาคณิต	8
2.4.1 การเลื่อนพิกัด (Translation).....	9
2.4.2 การสเกล (Scaling).....	10
2.4.3 การหมุนวัตถุ (Rotation).....	11
2.4.4 การสะท้อน (Reflection).....	12
2.4.5 การเฉือน (Shearing).....	13
2.4.6 การฉายภาพ (Projection)	15
2.4.6.1 การฉายภาพแบบอโทกราฟิก (Orthographic Projections)	15
2.4.6.2 การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ (Perspective Projections).....	16
2.4.7 การแปลงแบบผสม (Multiple Transformations)	19
2.5 ค่าที่ไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิต (Geometric Invariance).....	19
2.5.1 ประเภทของค่าที่ไม่ผันแปร	19
2.5.1.1 ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ (Relative Invariance).....	19
2.5.1.2 ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ (Absolute Invariance).....	20
2.5.2 ค่าที่ไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิตสำหรับรูปแบบการแปลงภาพแต่ละชนิด	20
2.5.2.1 การแปลงแบบบริจิด (Rigid Transformation).....	20
2.5.2.2 การแปลงแบบสมิลาไรตี้ (Similarity Transformation).....	21
2.5.2.3 การแปลงแบบแอฟไฟน์ (Affine Transformation)	22
2.5.2.4 การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ (Perspective Transformation)	23
-	-
บทที่ 3 บีสไปไลน์ (B-Spline).....	27
3.1 บทนำ.....	27
3.2 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์	27
3.2.1 นิยามของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์.....	27
3.2.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์.....	32
3.2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์.....	34
3.3 เส้นโค้งบีสไปไลน์.....	34
3.3.1 นิยามของเส้นโค้งบีสไปไลน์.....	34
3.3.2 คุณสมบัติของเส้นโค้งบีสไปไลน์.....	36

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.3.3 อนุพันธ์ของเส้นโค้งบีสไปลน์.....	39
3.4 การประมาณเส้นโค้งด้วยบีสไปลน์.....	40
3.4.1 การกำหนดค่าพารามิเตอร์.....	40
3.4.2 Knot vector.....	42
3.4.3 การหา Control points จากการประมาณเส้นโค้งบีสไปลน์ด้วยวิธี Least Squares	42
บทที่ 4 เวฟเล็ต	45
4.1 บทนำ.....	45
4.2 ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต.....	45
4.2.1 การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด.....	47
4.2.2 สเกลลิงฟังก์ชัน.....	49
4.2.3 ฟังก์ชันเวฟเล็ต.....	52
4.3 การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย.....	54
4.4 การแปลงกลับเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย.....	57
4.5 ตระกูลของออร์โธโนมัลเวฟเล็ต	59
บทที่ 5 ขั้นตอนที่ใช้ในการลงทะเบียนภาพ	62
5.1 บทนำ.....	62
5.2 การหาคอนทัวร์ของภาพด้วยวิธีคอนทัวร์โพลโลเวอร์	63
5.3 การแทนเส้นโค้งด้วยบีสไปลน์.....	63
5.4 การหาแลนมาร์ค.....	63
5.4.1 จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด.....	63
5.4.2 การลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพ.....	66
5.5 หามetriksของการแปลง.....	67
5.6 ค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพ	69
บทที่ 6 ผลการทดลอง	70
6.1 บทนำ	70

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6.2 การลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพ	70
6.2.1 การทดลองผลจากการแปลงเชิงเรขาคณิต.....	70
6.2.1.1 การแปลงรีจิด	70
6.2.1.2 การแปลงสีมิลาตี.....	71
6.2.1.3 การแปลงแอฟไฟน์.....	72
6.2.2 การทดลองผลจากการเลื่อนตำแหน่งจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ	73
6.2.3 การทดลองผลจากสัญญาณรบกวน.....	75
6.3 การทดลองการหาจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด.....	76
6.4 การลงทะเบียนภาพของภาพถ่ายวัตถุจริง	78
6.5 การประยุกต์ใช้ในการจำแนกปลา.....	83
บทที่ 7 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ	86
เอกสารอ้างอิง.....	89
ประวัติผู้เขียน	92

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
5.1 แสดงจำนวนจุดสอดคล้องสำหรับการหาเมตริกซ์ของการแปลงแบบต่างๆ.....	68
6.1 แสดงค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายของวัตถุจริง.....	83
6.2 แสดงค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพปลา.....	85

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 (ก) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วย.....	4
(ข) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วยหลังจาก 6 สัปดาห์.....	4
2.2 (ก) แสดงภาพผลลัพธ์ของการลงทะเบียนภาพ MRI และ SPECT.....	5
(ข) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วย (ค) แสดงภาพถ่าย SPECT ของศีรษะผู้ป่วย.....	5
2.3 แสดงภาพผลลัพธ์ของการลงทะเบียนภาพถ่ายทางอากาศและแผนที่	5
2.4 ส่วนประกอบของระบบพิกัดโฮโมจีเนียส.....	9
2.5 การเลื่อนจุดกึ่งกลางของปริมาตรต้นฉบับมายังจุดกำเนิด	10
2.6 การสเกลวัตถุ	11
2.7 การแปลงแบบหมุนรอบแกนทั้งสาม.....	12
2.8 การสะท้อนวัตถุกับระนาบ XY	13
2.9 การเลื่อนโดยสัมพันธ์กับค่า z เมื่อ $Sh_{zx} = 0$ และ $Sh_{zy} = 1$	14
2.10 การฉายภาพลงบนระนาบ $x = 0, y = 0$ และ $z = 0$	15
2.11 การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ.....	16
2.12 ลักษณะการแปลงแบบบริจิต	21
2.13 ลักษณะการแปลงแบบสิมิลาริตี	21
2.14 ลักษณะการแปลงแบบแอฟไฟน์	22
2.15 อัตราส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยมภายในภาพ.....	23
2.16 ลักษณะการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ	23
2.17 การฉายภาพจุดบนเส้นตรง L_1 มายังเส้นตรง L_2	24
2.18 จุดบนระนาบทั้งห้า	24
2.19 สามเหลี่ยม $P_3 P_1 P_2$	25
3.1 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี 0 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$	29
3.2 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี 1 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$	30
3.3 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี 2 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$	31
3.4 เส้นโค้งบีสไปไลน์ดีกรี 3 เมื่อ $U = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$	35
3.5 (ก) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี 3 เมื่อ $U = \{0,0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1,1,1,1\}$	36
(ข) เส้นโค้งบีสไปไลน์ดีกรี 3 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์รูปที่ 3.5 (ก)	36
3.6 (ก) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี 2 เมื่อ $U = \{0,0,0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1,1,1\}$	37
(ข) เส้นโค้งบีสไปไลน์ดีกรี 2 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์รูปที่ 3.6 (ก).....	37

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.7 คุณสมบัติ Convex hull ของเส้นโค้งบีสไปลน์.....	37
3.8 เส้นโค้งบีสไปลน์ โดย $U = \{0,0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1,1,1\}$ เมื่อทำการเคลื่อนย้ายจุด P_4 ไปยังจุด P_4' พบว่าเส้นโค้งจะเปลี่ยนเฉพาะช่วง $[\frac{1}{4}, 1)$	38
3.9 เส้นโค้งบีสไปลน์.....	38
(ก) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 9 โดย $\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1\}$	38
(ข) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 2 และ $U = \{0,0,0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1,1,1\}$	38
3.10 เส้นโค้งบีสไปลน์ที่ดีกรีต่างกันโดยใช้จุดควบคุมเดียวกัน.....	39
4.1 แสดงรูปคลื่นชานน์ และ Daubechies Wavelet.....	46
4.2 แสดงสเปซย่อย V_j ใน $L^2(R)$ ตามนิยามของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด.....	48
4.3 แสดงสเปซย่อย W_j ใน $L^2(R)$	49
4.4 Haar และ Triangle Scaling Function.....	52
4.5 แสดง Haar และ triangle function.....	54
4.6 แสดง Two-band Analysis Filter Bank ของการแปลงเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด $j+1$ ไปยังระดับความละเอียด j	56
4.7 แสดง Two-Band Analysis Filter Bank ของการแปลงเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j+J$	56
4.8 ช่วงความถี่ (Frequency Bands) ของการแปลงเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j-J$	57
4.9 ช่วงความถี่ของการแปลงเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j-2$	57
4.10 แสดง Two-Band Synthesis Filter Bank ของการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j+1$	59
4.11 แสดง Octave-Band Synthesis Filter Bank ของการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด $j-J$ ไปยังระดับความละเอียด j	59
5.1 ภาพต้นฉบับและคอนทราสต์ที่ทำได้จากวิธีคอนทราสต์โฟลโลเวอร์.....	62
5.2 คอนทราสต์ที่ทำได้จากวิธีคอนทราสต์โฟลโลเวอร์และเส้นโค้งที่ผ่านการปรับค่าด้วยบีสไปลน์.....	63
5.3 จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดของภาพที่แปลงแอฟฟายน์.....	65
5.4 การลดระดับความละเอียดด้วยการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย เวฟเล็ตแม่แบบ Haar.....	67

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.5 ผลของขอบภาพจากการลงทะเบียนภาพ.....	68
6.1 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทราสต์ของขอบภาพที่แปลงรีจิด.....	71
6.2 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทราสต์ของขอบภาพที่แปลงสมิลาริตี้.....	72
6.3 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทราสต์ของขอบภาพที่แปลงแอฟไฟน์.....	73
6.4 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทราสต์ของขอบภาพที่ตำแหน่งจุดเริ่มต้นต่างกัน.....	74
6.5 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทราสต์ของขอบภาพที่ถูกสัญญาณรบกวน -1 dB.....	75
6.6 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทราสต์ของขอบภาพที่ถูกสัญญาณรบกวน -5 dB.....	76
6.7 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพอ้างอิง.....	77
6.8 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพที่ถูกหมุน 260 องศา.....	77
6.9 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพที่หมุน 160 องศา เหนือทางแกน $x = 0.1$ และแกน $y = 0.3$	77
6.10 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพที่หมุน 50 องศา ขยายแกน $x = 2$ เท่าและแกน $y = 2$ เท่า.....	77
6.11 ภาพที่ใช้ในการทดลอง.....	78
6.12 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายสมิลาริตี้ เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์.....	79
6.13 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายแอฟไฟน์ เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์.....	79
6.14 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มุม 15 องศา เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์.....	80
6.15 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มุม 30 องศา เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์.....	80
6.16 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายสมิลาริตี้ เวฟเล็ตแม่แบบ Haar.....	81
6.17 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายแอฟไฟน์ เวฟเล็ตแม่แบบ Haar.....	81
6.18 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มุม 15 องศา เวฟเล็ตแม่แบบ Haar.....	82
6.19 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มุม 30 องศา เวฟเล็ตแม่แบบ Haar.....	82
6.20 ภาพปลาที่ใช้ทดสอบ.....	83
6.21 ผลการลงทะเบียนภาพปลาเทียบกับปลาตัวที่ 0.....	84

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การลงทะเบียนภาพ (Image Registration) เป็นวิธีการประมวลผลภาพทางคอมพิวเตอร์วิธีหนึ่ง โดยทำการจัดวางภาพตั้งแต่ 2 ภาพขึ้นไปลงบนระนาบเดียวกันอย่างสอดคล้องกัน ทำให้สามารถดูรายละเอียดของภาพเหล่านั้นได้ในขณะเดียวกัน ด้วยเหตุนี้เอง การลงทะเบียนภาพจึงถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์ภาพทางการแพทย์เพื่อวินิจฉัยโรคต่างๆ เช่น การวิเคราะห์การเจริญเติบโตของเนื้อเยื่อมะเร็ง หรือใช้ในการวางแผนการผ่าตัดเป็นต้น นอกจากนี้แล้วการลงทะเบียนภาพยังถูกนำไปใช้ลงทะเบียนภาพระหว่างภาพถ่ายทางอากาศและแผนที่

เนื่องจากได้มีการศึกษาการลงทะเบียนมาเป็นเวลากว่าสิบปี ทำให้วิธีการลงทะเบียนภาพในปัจจุบันมีอยู่หลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกัน ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงนำเสนอวิธีการลงทะเบียนภาพอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเป็นวิธีแบบอัตโนมัติ ลดความผิดพลาดซึ่งเกิดจากมนุษย์สามารถประมวลผลได้อย่างรวดเร็ว เนื่องจากไม่มีกระบวนการทำซ้ำ มีความถูกต้องสูง สามารถใช้ได้กับภาพที่ถูกแปลงแบบแอฟไฟน์ (Affine Transformation) และถูกสัญญาณรบกวนได้

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อศึกษาหลักการและวิธีการลงทะเบียนภาพระหว่างภาพสองมิติและภาพสองมิติ
2. เพื่อให้สามารถใช้ได้กับภาพที่ถูกแปลงแบบแอฟไฟน์
3. เพื่อให้สามารถหาแลนมาร์คได้อย่างอัตโนมัติ เป็นผลให้ลดความผิดพลาดที่เกิดจากมนุษย์ได้
4. เพื่อนำเสนอวิธีการลงทะเบียนภาพโดยใช้การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย (Discrete Wavelet Transform)

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

จากการศึกษาวิธีการลงทะเบียนภาพแบบจุด เป็นวิธีที่สามารถประมวลผลได้รวดเร็ว เนื่องจากไม่มีกระบวนการทำซ้ำ ซึ่งในปัจจุบันจุดแลนมาร์คของภาพแต่ละภาพนั้นสามารถหาได้หลายวิธี เช่น การกำหนดตำแหน่งโดยมนุษย์หรือหาโดยอัตโนมัติ ซึ่งการกำหนดตำแหน่งโดยมนุษย์นั้นจำเป็นต้องอาศัยผู้เชี่ยวชาญและความแม่นยำในการกำหนดจุดอย่างมาก ส่วนแลนมาร์ค

แบบอัตรโนมัตติที่ใช้กันในปัจจุบันจะใช้ลักษณะเด่นของภาพนั้นๆ เช่นจุดเปลี่ยนเว้า (Inflection points) คือจุดที่มีค่าความโค้งเป็นศูนย์ และจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด (Maximum Curvature)

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการลงทะเบียนภาพแบบจุด โดยการหาแลนมาร์คแบบอัตรโนมัตติอีกแบบหนึ่ง โดยการประยุกต์ใช้การแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วย ซึ่งในการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยนั้น มีคุณสมบัติในการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด โดยใช้การแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยกับคอนทัวร์ของขอบภาพ เพื่อลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลง และใช้จุดของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ระดับความละเอียดที่ต่ำลงมา เป็นจุดแลนมาร์คในการหาพารามิเตอร์ของการแปลง จุดแลนมาร์คที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยนั้น จะเป็นค่าโดยประมาณของคอนทัวร์ของขอบภาพนั้น ซึ่งลดความละเอียดในส่วนของรายละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพออกไป ทำให้เหลือแต่ลักษณะเด่นหรือ โครงสร้างหลักของคอนทัวร์ของขอบภาพนั้นๆ

1.4 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในงานวิจัย

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีการลงทะเบียนภาพอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเป็นการหาแลนมาร์คแบบอัตรโนมัตติแบบใหม่ โดยการนำคุณสมบัติของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียดของการแปลงเวฟเล็ดมาใช้ โดยทำการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยกับคอนทัวร์ของขอบภาพ เพื่อลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลง จากนั้นนำจุดของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ระดับความละเอียดที่ต่ำลงมา เป็นจุดแลนมาร์ค แต่ในการใช้การแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วย ในการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพที่จะใช้ในการลงทะเบียนภาพนั้น มีข้อจำกัดคือจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพทั้งสองจะต้องเป็นจุดที่สอดคล้องกัน ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แก้ไขโดยการใช้จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดมาเป็นจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ เนื่องจากจุดดังกล่าวมีคุณสมบัติไม่ผันแปรต่อการแปลงแอฟฟายน์ ซึ่งพบว่าวิธีที่นำเสนอนี้มีข้อดีคือ จุดแลนมาร์คที่หาได้เป็นตัวแทนของคอนทัวร์ของขอบภาพนั้น ทำให้ผลของการลงทะเบียนภาพที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น

1.5 ขอบเขตของงานวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการลงทะเบียนภาพแบบจุด แบบอัตรโนมัตติ เพื่อทำการลงทะเบียนภาพสองมิติกับภาพสองมิติ โดยทำการทดลองลงทะเบียนภาพกับภาพที่ถูกทำการแปลงแบบต่างๆ คือ การแปลงแบบบริจิต (Rigid Transformation) การแปลงแบบสิมิลาริตี (Similarity Transformation) และการแปลงแบบแอฟฟายน์ (Affine Transformation) ภายได้เงื่อนไข คือมีสัญญาณรบกวนหรือไม่

มีสัญญาณรบกวนบนขอบภาพ นอกจากนี้ได้นำเอาวิธีการลงทะเบียนภาพไปประยุกต์ใช้ในงานจำแนกภาพ (Image classification) อีกด้วย

1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 บท ในแต่ละบทมีเนื้อหาดังต่อไปนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมา วัตถุประสงค์ของการศึกษา ความสำคัญของปัญหา ทฤษฎี และขอบเขตที่ใช้ในงานวิจัย

บทที่ 2 กล่าวถึงประเภทและวิธีการลงทะเบียนภาพในปัจจุบัน รูปแบบการแปลงเชิงเรขาคณิตแบบต่างๆ ประเภทและชนิดของค่าที่ไม่ผันแปรทางเรขาคณิตสำหรับภาพที่ถูกแปลงแบบต่างๆ

บทที่ 3 กล่าวถึงฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ (B-Spline Basis Function) เส้นโค้งบีสไปไลน์ และการประมาณเส้นโค้งด้วยบีสไปไลน์

บทที่ 4 กล่าวถึงการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย และการแปลงกลับเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย

บทที่ 5 กล่าวถึงขั้นตอนที่ใช้ในการลงทะเบียนภาพในงานวิจัยนี้

บทที่ 6 กล่าวถึงผลการทดลอง ได้แก่ การลงทะเบียนภาพและการจำแนกภาพ

บทที่ 7 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทที่ 2

การลงทะเบียนภาพและการแปลงทางเรขาคณิต (Image Registration and Geometric Transform)

2.1 บทนำ

การลงทะเบียนภาพ (Image Registration) เป็นกระบวนการในการจัดวางภาพตั้งแต่สองภาพขึ้นไปลงบนระนาบเดียวกันอย่างสอดคล้อง เพื่อพิจารณารายละเอียดรวมทั้งตำแหน่งของวัตถุบนภาพทั้งหมดได้ในขณะเดียวกัน ด้วยเหตุนี้การลงทะเบียนภาพจึงถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์ผลภาพทางการแพทย์เช่น การวิเคราะห์การเจริญเติบโตของเนื้อเยื่อมะเร็งเป็นต้น

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงประเภทของการลงทะเบียนภาพ วิธีในการลงทะเบียนภาพที่มีอยู่ในปัจจุบัน การแปลงทางเรขาคณิต และค่าที่ไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิต

2.2 ประเภทของการลงทะเบียนภาพ

2.2.1 วัตถุชนิดเดียวกันและถ่ายภาพด้วยวิธีเดียวกัน (Intraobject-Intramodality Registration)

เป็นการลงทะเบียนภาพจากวัตถุชนิดเดียวกันและถ่ายภาพด้วยวิธีเดียวกัน ซึ่งดังตัวอย่างเป็นรูปที่ถ่ายศีรษะของผู้ป่วยที่ได้จากเครื่อง MRI ที่ถ่ายต่างเวลากัน



(ก)



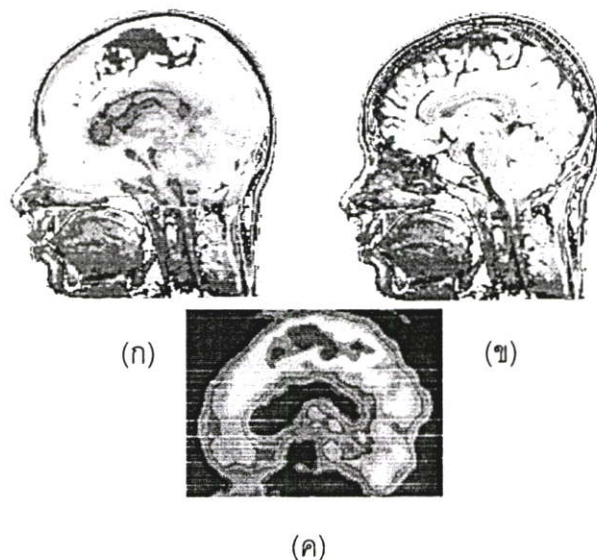
(ข)

รูปที่ 2.1 (ก) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วย

(ข) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วยหลังจาก 6 สัปดาห์

2.2.2 วัตถุชนิดเดียวกันแต่ถ่ายภาพต่างวิธีกัน (Intraobject-Intermodality Registration)

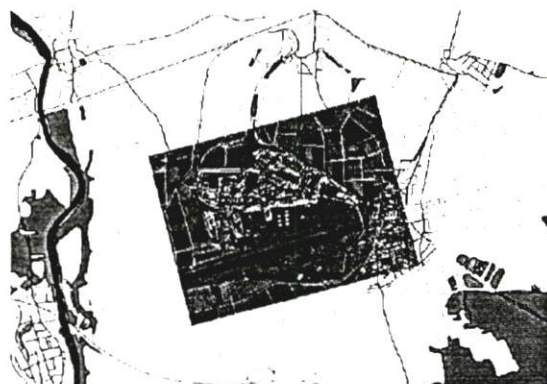
เป็นการลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายวัตถุชนิดเดียวกัน แต่ถ่ายภาพต่างวิธีกันซึ่งดังตัวอย่างเป็นการลงทะเบียนภาพที่ได้จากเครื่อง MRI กับ เครื่อง SPECT แล้วนำทั้งสองภาพมาซ้อนทับกัน



รูปที่ 2.2 (ก) แสดงภาพผลลัพธ์ของการลงทะเบียนภาพ MRI และ SPECT [1]
 (ข) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วย
 (ค) แสดงภาพถ่าย SPECT ของศีรษะผู้ป่วย

2.2.3 วัตถุต่างชนิดกัน (Interobject Registration)

เป็นการลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายวัตถุต่างชนิดกัน และถ่ายภาพต่างวิธีกัน ซึ่งดังตัวอย่างแสดงภาพถ่ายทางอากาศบนภาพแผนที่



รูปที่ 2.3 แสดงภาพผลลัพธ์ของการลงทะเบียนภาพถ่ายทางอากาศและแผนที่

2.3 วิธีลงทะเบียนภาพ

เราสามารถจำแนกวิธีลงทะเบียนภาพได้หลายแบบด้วยกัน [1-2] ในที่นี้เราแบ่งวิธีการลงทะเบียนภาพได้เป็น 4 วิธีตามคุณลักษณะของภาพที่นำมาใช้ลงทะเบียน ได้แก่

2.3.1 วิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้จุดควบคุม (Control-point based registration)

วิธีการลงทะเบียนภาพแบบใช้จุดควบคุม จะใช้จุดที่สอดคล้องกันระหว่างจุดบนภาพทั้งสองภาพในการลงทะเบียนและเรียกจุดเหล่านั้นว่าแลนมาร์ค ดังนั้นความแม่นยำของการลงทะเบียนภาพจึงขึ้นอยู่กับความถูกต้องของแลนมาร์คที่หาได้

แลนมาร์คอาจจะเป็นจุดซึ่งเป็นคุณสมบัติของวัตถุหรือไม่ใช่ก็ได้ เช่น ในภาพทางการแพทย์จะมีแลนมาร์ค เช่น จุดบนอวัยวะหรือขอบของกระดูกเป็นคุณสมบัติของวัตถุ หรือแลนมาร์คที่ได้จากการเอาแหล่งกำเนิดแสงติดไว้ที่ตัวผู้ป่วยตามจุดต่างๆหรือทำเครื่องหมายไว้ที่ตัวผู้ป่วย เป็นแลนมาร์คซึ่งไม่ใช่คุณสมบัติของวัตถุโดยตรง และวิธีที่ได้มาซึ่งแลนมาร์คนั้นมีหลายวิธี เช่น การหาแลนมาร์คด้วยมือหรือการกำหนดจุดซึ่งจำเป็นต้องอาศัยความแม่นยำและความรู้เกี่ยวกับภาพชนิดนั้นๆ เช่นการหาแลนมาร์คในภาพทางการแพทย์ เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีการหาแลนมาร์คแบบอัตโนมัติหรือกึ่งอัตโนมัติ เช่นจุดเปลี่ยนโค้ง หรือจุดมุมของรูป [3] และจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด [4]

จากนั้นสามารถหาเมตริกซ์ของการแปลงได้จากการหาความสัมพันธ์ระหว่างแลนมาร์คบนภาพที่หนึ่งกับภาพที่สอง เช่นในภาพที่มีความสัมพันธ์กันแบบเชิงเส้นสามารถหาเมตริกซ์ของการแปลงได้จากการประมาณค่าเฉลี่ยของค่าผิดพลาดกำลังสอง (Mean Square Error : MSE)

2.3.2 วิธีลงทะเบียนภาพแบบโมเมนต์ (Moment based registration)

หลักการของวิธีการลงทะเบียนภาพแบบโมเมนต์ จะพิจารณาความสัมพันธ์ของภาพจากคุณสมบัติพื้นฐานของภาพและไม่อาศัยมนุษย์ช่วยในการลงทะเบียนภาพ

เนื่องจากค่าระดับเทา (Gray level) และคุณสมบัติเชิงเรขาคณิตของภาพนั้น ถูกกำหนดลักษณะโดยจุดศูนย์กลางมวล (Center of Gravity) แกนหลัก (Principal Axis) และค่าโมเมนต์อื่นๆ [5-8]

ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ของการแปลง (เลื่อน หมุน ย่อ ขยาย เป็นต้น) ของการแปลงสำหรับภาพมาตรฐาน สามารถคำนวณได้จากการคำนวณโมเมนต์แบบนอร์มอลไลซ์ (Normalizing Moments) ในแต่ละภาพ เนื่องจากค่าโมเมนต์แบบนอร์มอลไลซ์นี้มีคุณสมบัติที่ไม่แปรผันของภาพ

สำหรับประสิทธิภาพของวิธีการลงทะเบียนภาพแบบนี้ จะวัดต่อสัญญาณรบกวนอย่างมาก กล่าวคือ ค่าโมเมนต์และพารามิเตอร์สำหรับการแปลงที่คำนวณได้จากภาพที่มีสัญญาณรบกวนจะมีความผิดพลาดแปรผันตามขนาดของสัญญาณรบกวน เป็นผลให้วิธีลงทะเบียนภาพแบบนี้ไม่นิยมใช้ในการลงทะเบียนภาพมากนักและถูกจำกัดให้ใช้กับภาพที่มีรูปทรงอย่างง่ายเท่านั้น

2.3.3 วิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้ขอบภาพ (Edge-based registration)

วิธีลงทะเบียนภาพแบบนี้นิยมใช้กับภาพที่มีขอบภาพชัดเจน และไม่สนใจข้อมูลอื่นบนภาพยกเว้นขอบภาพเท่านั้น

โดยขั้นตอนของการหาขอบภาพสามารถทำได้หลายวิธี เช่น เทมเพลตแมชชีน (Template matching) หรือซีโรครอสซิง (Zero Crossing) เป็นต้น อย่างไรก็ตามการหาขอบภาพที่มีสัญญาณรบกวนอาจทำได้ไม่ถนัดนัก

หลังจากนั้นก็เข้าสู่กระบวนการในการลงทะเบียน เช่น วิธี ICP (Iterative Closet Points) หรือซูเปอร์เคิร์ฟ (Super-Curve) [9] จากนั้นคำนวณหาค่าผิดพลาด โดยใช้ค่าต่ำสุดของค่าเฉลี่ยของค่าผิดพลาดกำลังสอง (Minimum Mean Square Error) หรือการเปรียบเทียบระดับความเข้มสี (Intensity) ของพิกเซลที่เป็นขอบภาพ

แต่เนื่องจากความไม่สมบูรณ์ของข้อมูลที่ได้ หรือขอบภาพที่ได้ไม่ถูกต้องทำให้กระบวนการลงทะเบียนผิดพลาดได้ กล่าวคือค่าที่คำนวณได้อาจจะให้ค่าผิดพลาดน้อยสุดในช่วงหนึ่ง (Local minimum) ไม่ใช่ค่าที่ผิดพลาดน้อยสุดจริงๆ (Global minimum) ดังนั้นผลของการลงทะเบียนจึงผิดพลาด จึงต้องอาศัยกระบวนการในการหาจุดที่เป็นค่าผิดพลาดน้อยสุดจริงๆ จึงจะช่วยแก้ปัญหาข้างต้นได้

อย่างไรก็ตามวิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้ขอบภาพ นับว่าเป็นวิธีที่แพร่หลายเนื่องจากขอบภาพเป็นข้อมูลพื้นฐานของภาพ

2.3.4 วิธีลงทะเบียนภาพแบบพิจารณาความเหมือนกันของภาพ (Optimization of a similarity measurement)

หลักการของวิธีลงทะเบียนภาพแบบพิจารณาความเหมือนกันของภาพคือ จะไม่ดึงคุณสมบัติใดๆของภาพ แต่จะทำการแปลงภาพๆหนึ่งและทำการวัดความเหมือนของภาพทั้งสอง และจะทำการแปลงภาพนั้นอีกจนกว่าภาพทั้งสองจะเหมือนกันที่สุด

การวัดความเหมือนของภาพจะพิจารณาจากคุณสมบัติของภาพเช่น Correlation Coefficient, Correlation function หรือ Sum of absolute differences [1-2]

วิธีลงทะเบียนภาพวิธีนี้จำเป็นต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ เช่นการใช้กระบวนการเจเนติก (Genetic Algorithm) [10] ทำให้ใช้เวลาในการประมวลผลมาก

อย่างไรก็ตาม วิธีลงทะเบียนภาพแบบนี้อาจให้ผลลัพธ์ที่ผิดพลาดได้ เนื่องจากคุณสมบัติที่ได้กล่าวไปข้างต้นนั้นมีค่าแปรผันกับค่าความเข้มแสงของภาพ ฉะนั้นวิธีนี้จึงเหมาะที่จะใช้กับภาพที่ถ่ายด้วยเทคนิคเดียวกันเท่านั้น (Same modality)

2.4 การแปลงเชิงเรขาคณิต (Geometric transformation)

ในงานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกนั้น บางครั้งจำเป็นต้องมีการเคลื่อนย้ายภาพไปยังตำแหน่งใหม่ ย่อ-ขยายภาพ หรือมีการหมุนภาพให้อยู่ในมุมมองที่เหมาะสม ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้การแปลงเชิงเรขาคณิต

ในการพิจารณาการแปลงนั้นจะพิจารณาได้ว่าเป็นการแปลงจุดในปริภูมิสามมิติ และเพื่อความเข้าใจง่ายจึงมักจะเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ โดยกำหนดให้จุดที่ต้องการแปลงเป็นจุด P มีพิกัดเป็น (x, y, z) ใดๆ เมื่อต้องการย้ายตำแหน่งของจุด P ไปยังพิกัดใหม่คือ P' ซึ่งมีพิกัด (x', y', z') ก็ทำได้โดยการนำพิกัดของจุด P ไปบวกกับเมตริกซ์การแปลงซึ่งก็คือ T สามารถแสดงเมตริกซ์ของการแปลงได้ดังนี้

$$P' = P + T = [x \ y \ z] + [T_x \ T_y \ T_z] \quad (2.1)$$

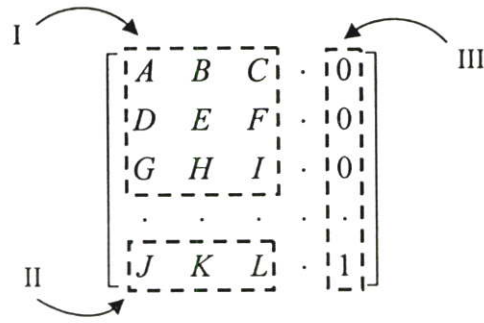
นอกจากนี้เมื่อนำพิกัดของจุด P มาคูณกับเมตริกซ์การแปลง T ให้ได้พิกัดใหม่คือ P' นั้นจะเป็นการสเกล การหมุน การสะท้อน หรืออื่นๆ ขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ภายในเมตริกซ์การแปลงนั้นและสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P' = P \cdot T = [x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

สำหรับการแปลงเชิงเรขาคณิตในทางคอมพิวเตอร์กราฟิก โดยทั่วไปแล้วจะประกอบด้วย การแปลงหลายๆชนิดประกอบกัน และเนื่องจากเป็นการคำนวณในรูปของเมตริกซ์จึงทำให้ยาก ในการคำนวณเมตริกซ์ที่มีรูปแบบแตกต่างกัน จึงได้มีการนำระบบพิกัดโฮโมจีเนียส (Homogeneous Coordinate System) เข้ามาใช้เพื่อแก้ปัญหานี้

ในระบบพิกัดโฮโมจีเนียส จุดในระบบสามมิติ (x, y, z) จะถูกแทนด้วยระบบสี่มิตินั้นคือ (x, y, z, H) โดยจะมี H เป็นค่าแพกเตอร์ที่มีหน้าที่สเกลซึ่งจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จุด (x, y, z, H) จะถูกนอร์มอลไลซ์เป็น $(x/H, y/H, z/H, 1)$ โดยทั่วไปแล้วค่า H จะมีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้นจุด (x, y, z) ใดๆจะมีค่าในระบบพิกัดโฮโมจีเนียสเป็น $(x, y, z, 1)$

จากรูปที่ 2.4 เมตริกซ์ย่อย I เป็นส่วนที่กำหนดว่าเป็นการแปลงแบบใด เช่น การหมุน การสเกล การสะท้อน เป็นต้น ส่วนเมตริกซ์ย่อย II เป็นส่วนของการย้ายตำแหน่งแบบเชิงเส้น และในส่วนสุดท้ายเมตริกซ์ย่อย III ใช้ในการรวมระหว่างการเคลื่อนย้ายพิกัดและการแปลงที่อยู่ในรูปการคูณ โดยมีรายละเอียดของการแปลงแบบต่างๆดังนี้



รูปที่ 2.4 ส่วนประกอบของระบบพิกัดโฮโมจีเนียส

2.4.1 การเลื่อนพิกัด (Translation)

เมตริกซ์การแปลง (T_T) ที่ใช้สำหรับการแปลงที่ต้องการเลื่อนพิกัดมีลักษณะดังนี้

$$T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

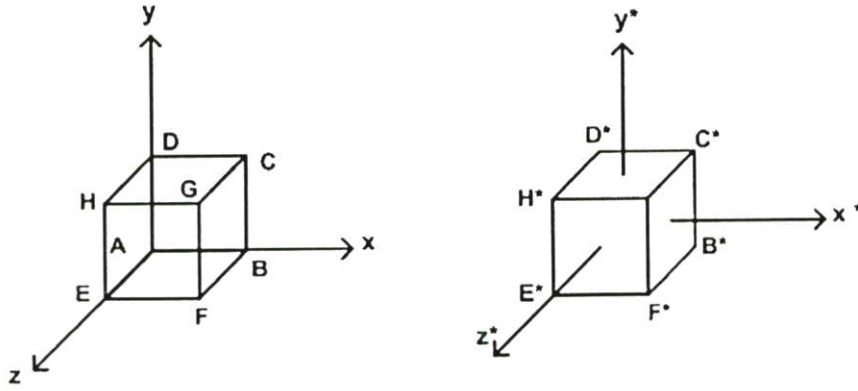
โดยที่ค่า T_x, T_y และ T_z แสดงระยะทางที่ต้องการเคลื่อนย้ายตำแหน่งไปในแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ และพิกัดของจุดในระบบโฮโมจีเนียส (x', y', z', h) เป็น

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

หรือ

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [x + T_x \ y + T_y \ z + T_z \ 1] \quad (2.5)$$

การเลื่อนเมตริกซ์เป็นการแปลงที่มีประโยชน์มากในทางคอมพิวเตอร์กราฟิก เนื่องจากข้อมูลภาพต้นฉบับที่นำมาใช้จะมีตำแหน่งอยู่ในด้านบวกเท่านั้น จึงจำเป็นต้องการอาศัยการแปลงแบบนี้เพื่อเลื่อนพิกัดกึ่งกลางของข้อมูลต้นฉบับให้มาอยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ เสียก่อน แสดงในรูปที่ 2.5 จึงถือได้ว่าการแปลงแบบเลื่อนพิกัด เป็นพื้นฐานที่สำคัญของการสร้างภาพทางคอมพิวเตอร์กราฟิก



รูปที่ 2.5 การเลื่อนจุดกึ่งกลางของปริมาตรต้นฉบับมายังจุดกำเนิด

2.4.2 การสเกล (Scaling)

การสเกลเป็นการแปลงเพื่อปรับเปลี่ยนขนาดของวัตถุที่ต้องการ มีเมตริกซ์การแปลง (S) ดังนี้

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

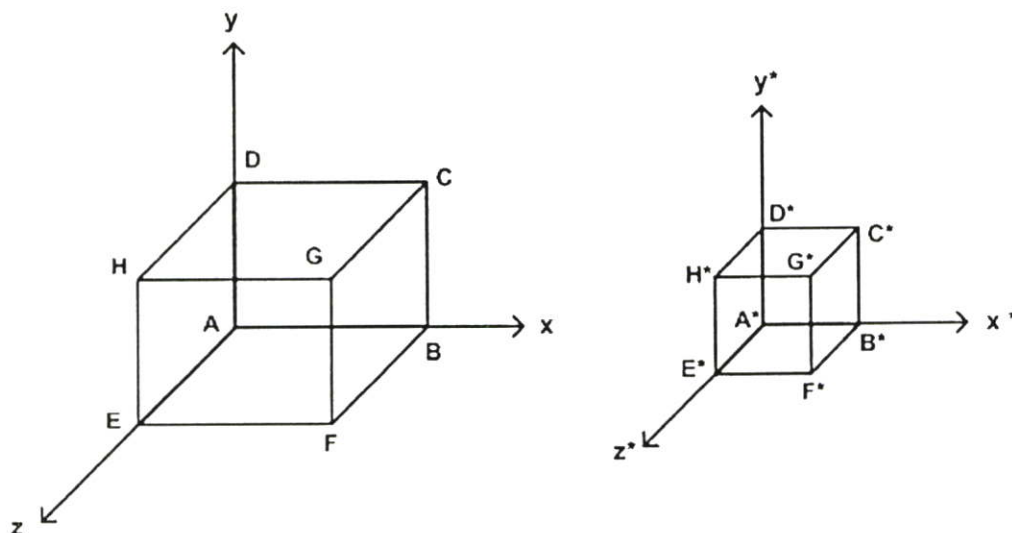
โดยที่ S_x, S_y และ S_z เป็นสัมประสิทธิ์การสเกลสำหรับพิกัด x, y และ z ตามลำดับ และพิกัดของจุดในระบบโฮโมจีเนียส (x', y', z', h) เป็น

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

หรือ

$$[x' \ y' \ z' \ h] = [xS_x \ yS_y \ zS_z \ 1] \quad (2.8)$$

ค่า S_x, S_y และ S_z จะเป็นตัวกำหนดว่าเป็นการย่อหรือขยายรูป กล่าวคือ ถ้า S มีค่ามากกว่า 1 จะเป็นการขยายภาพและถ้า S มีค่าน้อยกว่า 1 จะเป็นการย่อขนาดภาพ



รูปที่ 2.6 การสเกลวัตถุ

2.4.3 การหมุนวัตถุ (Rotation)

การหมุนวัตถุเป็นการหมุนวัตถุรอบแกนต่างๆทั้งสามแกน ซึ่งได้แก่ แกน x, y หรือ z โดยการอ้างอิงการมองในลักษณะมองออกจากจุดกำเนิดไปตามแนวแกน เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกนต่างๆในทิศทางตามเข็มนาฬิกา มีดังนี้

- เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน x ไปเป็นมุม θ คือ

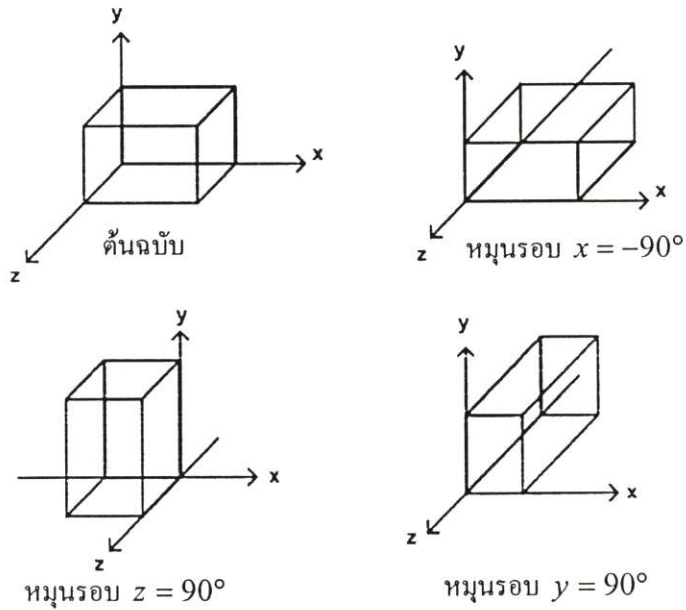
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน y ไปเป็นมุม ϕ คือ

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน z ไปเป็นมุม φ คือ

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$



รูปที่ 2.7 การแปลงแบบหมุนรอบแกนทั้งสาม

2.4.4 การสะท้อน (Reflection)

การสะท้อนวัตถุเป็นการสะท้อนพิกัดของวัตถุไปยังพิกัดที่อยู่อีกด้านหนึ่งของระนาบการสะท้อน xy, yz หรือ xz เมตริกซ์ของการสะท้อนมีดังต่อไปนี้

- เมตริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ xy คือ

$$Rf_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด z โดย $z' = -z$

- เมตริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ yz คือ

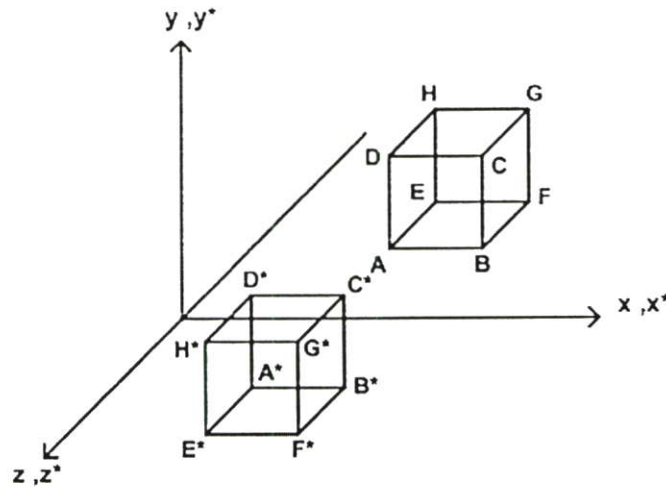
$$Rf_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด x โดย $x' = -x$

- เมตริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ xz คือ

$$Rf_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด y โดย $y' = -y$



รูปที่ 2.8 การสะท้อนวัตถุกับระนาบ xy

2.4.5 การเฉือน (Shearing)

การเฉือนในปริภูมิสามมิติเป็นการแปลงพิกัดตามแกนของสองแกนใดๆ (สมมติว่าเป็น x และ y) โดยสัมพันธ์กับค่าของพิกัดตามแนวแกนที่สาม (z) เป็นผลให้ค่าพิกัดตามแนวแกนของสองแกนแรกเปลี่ยนไป ในขณะที่ค่าพิกัดตามแนวแกนที่สามนั้นมีค่าคงเดิม

- เมตริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน x

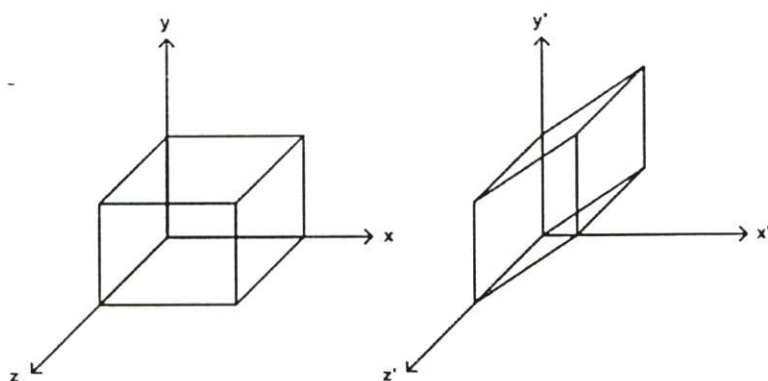
$$Sh_x = \begin{bmatrix} 1 & Sh_{xy} & Sh_{xz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

- เมตริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน y

$$Sh_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ Sh_{yx} & 1 & Sh_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

- เมตริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน z

$$Sh_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ Sh_{zx} & Sh_{zy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$



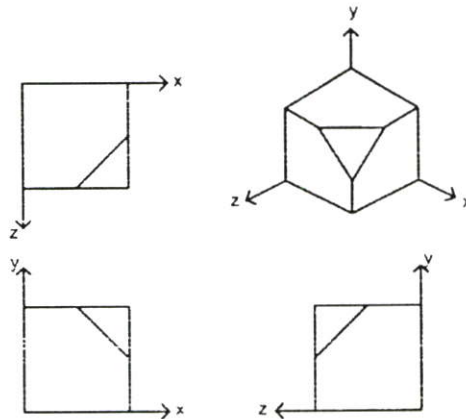
รูปที่ 2.9 การเฉือนโดยสัมพันธ์กับค่า z เมื่อ $Sh_{xz} = 0$ และ $Sh_{xy} = 1$

2.4.6 การฉายภาพ (Projection)

การฉายภาพเป็นการแปลงจาก n มิติไปเป็น $n-1$ มิติ การฉายภาพมี 2 ประเภทคือแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น ในวิชานี้พนธ์ฉบับนี้สนใจเฉพาะการฉายภาพแบบเชิงเส้นเท่านั้น สำหรับการฉายภาพแบบเชิงเส้นยังสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ

2.4.6.1 การฉายภาพแบบตั้งฉาก (Orthographic Projections)

การฉายภาพแบบตั้งฉากเป็นวิธีฉายภาพแบบขนานอย่างหนึ่งที่มีรูปแบบอย่างง่ายและถูกใช้ ในการวาดภาพทางวิศวกรรม โดยจะแสดงขนาดจริงของวัตถุในแต่ละด้าน เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบต่างๆเป็นดังนี้



รูปที่ 2.10 แสดงการฉายภาพลงบนระนาบ $x=0, y=0$ และ $z=0$

- เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $x=0$

$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

- เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $y=0$

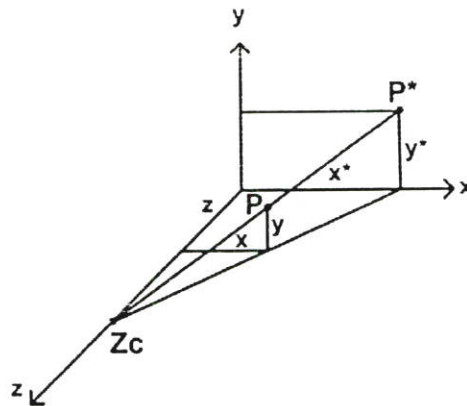
$$P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

- เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $z = 0$

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.4.6.2 การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ (Perspective Projections)

เป็นรูปแบบการแปลงเชิงเรขาคณิตอย่างหนึ่งซึ่งแตกต่างจากการแปลงแบบอื่นๆที่ได้กล่าวมาแล้ว คือการแปลงแบบเลื่อนพิกัด การสเกล การหมุน การสะท้อน และการเฉือนนั้นเป็นการแปลงซึ่งคงคุณสมบัติความขนานกันของเส้น แต่การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟนี้แตกต่างออกไปและการแปลงแบบนี้ยังมีผลให้ขนาดของวัตถุเปลี่ยนแปลงไป โดยมีความสัมพันธ์แบบผกผันกับระยะห่างระหว่างวัตถุกับจุดศูนย์กลางของการฉายภาพ



รูปที่ 2.11 การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ

พิจารณารูปที่ 2.11 เป็นการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟและทำการฉายภาพจากจุด P ไปยังจุด P^* บนระนาบ $z = 0$ โดยมี z_c เป็นจุดศูนย์กลางของการฉายภาพ (Center of projection) จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย ได้ว่า

$$\frac{x^*}{z_c} = \frac{x}{z_c - z}$$

หรือ
$$x^* = \frac{x}{1 - \frac{z}{z_c}}$$

และ
$$\frac{y^*}{\sqrt{(x^*)^2 + z_c^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + (z_c - z)^2}}$$

หรือ
$$y^* = \frac{y}{1 - \frac{z}{z_c}}$$

จะได้ x^*, y^* เป็นพิกัดของ P^*

$$\text{กำหนดให้ } r = \frac{-1}{z_c} \text{ จะได้ } x^* = \frac{x}{rz+1} \text{ และ } y^* = \frac{y}{rz+1} \quad (2.21)$$

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ 0 \ rz+1] \quad (2.22)$$

เนื่องจาก $h = rz+1 \neq 1$ ดังนั้นจึงคูณสมการที่ 2.22 ด้วย $\frac{1}{rz+1}$ จะได้

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \begin{bmatrix} \frac{x}{rz+1} & \frac{y}{rz+1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

จะเห็นว่าสมการที่ 2.21 มีค่าเท่ากับสมการที่ 2.23

จะได้เมตริกซ์ของการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟเมื่อจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน x, y และ z ดังนี้

- กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน x หรือที่พิกัด $[-1/p \ 0 \ 0 \ 1]$

$$[x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ px+1] \quad (2.24)$$

และ

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{px+1} \ \frac{y}{px+1} \ \frac{z}{px+1} \ 1 \right] \quad (2.25)$$

- กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน y หรือที่พิกัด $[0 \ -1/q \ 0 \ 1]$

$$[x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ qy+1] \quad (2.26)$$

และ

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{qy+1} \ \frac{y}{qy+1} \ \frac{z}{qy+1} \ 1 \right] \quad (2.27)$$

- กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน z หรือที่พิกัด $[0 \ 0 \ -1/r \ 1]$

$$[x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y \ z \ rz+1] \quad (2.28)$$

และ

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x}{rz+1} \ \frac{y}{rz+1} \ \frac{z}{rz+1} \ 1 \right] \quad (2.29)$$

2.4.7 การแปลงแบบผสม (Multiple Transformations)

โดยทั่วไปในการใช้งานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกจำเป็นต้องใช้การแปลงหลายแบบร่วมกัน เช่นในการหมุนวัตถุรอบเส้นตรงใดๆ ซึ่งขนานกับแกน z จำเป็นต้องทำการเลื่อนให้จุดศูนย์กลางของวัตถุไปยังจุดกำเนิดก่อน จึงจะทำการหมุนวัตถุรอบแกน z จากนั้นจึงทำการเลื่อนวัตถุกลับไปยังตำแหน่งเดิม

ตัวอย่าง หมุนวัตถุเป็นมุม φ รอบเส้นตรงที่ขนานกับแกน z ซึ่งผ่านจุด $(-T_x, -T_y, -T_z)$ กำหนดให้เมตริกซ์ M เป็นเมตริกซ์การแปลงแบบผสม จะได้

$$M = T_T \cdot R_z \cdot T_T^{-1} \quad (2.30)$$

เมื่อ

$$T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \quad T_T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเมตริกซ์ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ ดังนั้นลำดับของเมตริกซ์ของการแปลงจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง

2.5 ค่าที่ไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิต (Geometric Invariance)

ความไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิตเป็นคุณสมบัติเชิงเรขาคณิตของภาพที่ยังคงคุณสมบัติพื้นฐาน แม้ว่าภาพนั้นจะถูกทำการแปลงไปก็ตาม

เนื่องจากคุณสมบัติที่ไม่เปลี่ยนแปลงนี้เอง จึงถูกนำไปใช้ในงานวิจัยต่างๆมากมาย [11] และในงานวิจัยนี้ได้นำคุณสมบัติความไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิตมาใช้ในการหาจุดสอดคล้องระหว่างภาพสองภาพ จากเลนส์มาร์คจำนวนหนึ่งบนภาพทั้งสอง

2.5.1 ประเภทของค่าที่ไม่ผันแปร

2.5.1.1 ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ (Relative Invariance)

จะได้ว่าค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพที่ถูกทำการแปลงจะมีค่าเป็นสัดส่วนกันกับค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพต้นฉบับดังสมการที่ 2.31

$$I(r, \alpha) = \Delta I(r', \alpha) \quad (2.31)$$

เมื่อ I คือค่าไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิต
 α คือเซตของพารามิเตอร์สำหรับการแปลง
 Δ คืออัตราส่วนค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพต้นฉบับกับภาพที่ถูกแปลง
 r, r' คือพิกัดของภาพ

2.5.1.2 ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ (Absolute Invariance)

จะได้ว่าค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ของภาพต้นฉบับกับภาพที่ถูกแปลงนั้นจะมีค่าเท่ากัน โดยทั่วไปค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์จะหาได้จากการกำจัดแฟกเตอร์ Δ ของค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์สองค่า เช่น

$$I_1(r, \alpha) = \Delta I_1(r', \alpha) \quad (2.32)$$

$$I_2(r, \alpha) = \Delta I_2(r', \alpha) \quad (2.33)$$

จะได้ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์เป็น

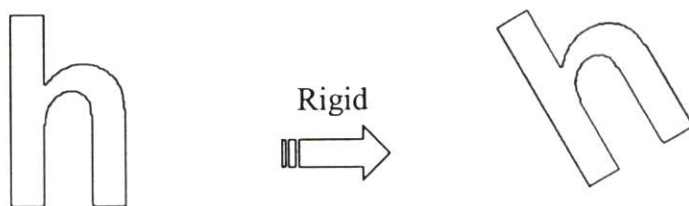
$$\frac{I_2(r, \alpha)}{I_1(r, \alpha)} = \frac{I_2(r', \alpha)}{I_1(r', \alpha)} \quad (2.34)$$

เมื่อ I_1, I_2 คือค่าไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิตของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง
 α คือเซตของพารามิเตอร์สำหรับการแปลง
 Δ คืออัตราส่วนค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพต้นฉบับกับภาพที่ถูกแปลง
 r, r' คือพิกัดของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง

2.5.2 ค่าที่ไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิตสำหรับรูปแบบการแปลงภาพแต่ละชนิด

2.5.2.1 การแปลงแบบบริจิด (Rigid Transformation)

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นซึ่งประกอบไปด้วยการเลื่อนและการหมุนเท่านั้น

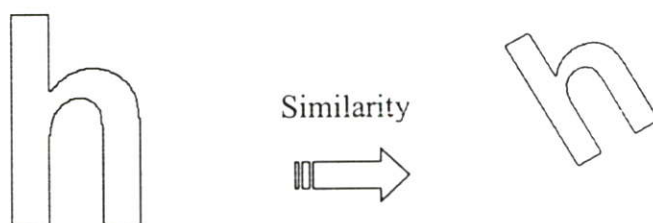


รูปที่ 2.12 ลักษณะการแปลงแบบบริจิด

จากรูปที่ 2.12 จะเห็นว่าความยาวของเส้น, พื้นที่และมุมของของภาพที่ถูกแปลงจะยังมีค่าเท่ากับภาพต้นฉบับ นั่นคือ การแปลงแบบบริจิดนี้จะมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ คือ ความยาวของเส้น พื้นที่และมุม

2.5.2.2 การแปลงแบบสมิลาริตี้ (Similarity Transformation)

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นซึ่งประกอบไปด้วยการเลื่อน การหมุนและการสเกล (โดย $S_x = S_y$)



รูปที่ 2.13 ลักษณะการแปลงแบบสมิลาริตี้

จากรูปที่ 2.13 จะเห็นว่ามุมของของภาพที่ถูกแปลงจะยังมีค่าเท่ากับภาพต้นฉบับ และความยาวของเส้น L กับเส้นของภาพที่ถูกแปลง L' และพื้นที่ของภาพ A กับภาพที่ถูกแปลง A' จะมีค่าสัมพันธ์กันด้วยค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ที่ใช้แปลง ดังสมการที่ 2.35 และสมการที่ 2.36

$$L' = \det(T) \cdot L \quad (2.35)$$

และ

$$A' = \det(T) \cdot A \quad (2.36)$$

เมื่อ L, L' คือความยาวของเส้นของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง

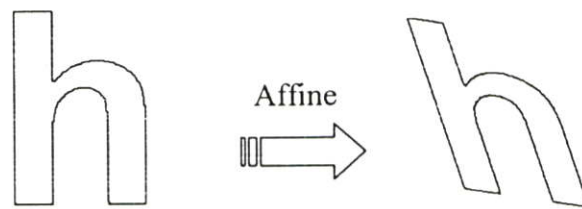
A, A' คือพื้นที่ของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง

T คือเมตริกซ์ที่ใช้แปลง

นั่นคือการแปลงแบบสิมิลาริตี้ นี้จะมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ คือ มุม ความยาวของเส้นและพื้นที่ และมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ คือ มุม อัตราส่วนของความยาวและอัตราส่วนของพื้นที่

2.5.2.3 การแปลงแบบแอฟฟายน์ (Affine Transformation)

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นซึ่งประกอบไปด้วย การเลื่อน การหมุน การสเกล และการเฉือน การแปลงแบบแอฟฟายน์ มีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ คือ ความยาวของเส้น พื้นที่และจุดเปลี่ยนโค้ง (Inflection Points) และจุดศูนย์กลางของภาพ (Centroid) และมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ คือ อัตราส่วนของมุม อัตราส่วนของความยาว อัตราส่วนของพื้นที่และความขนานกันของเส้นคู่ขนาน



รูปที่ 2.14 ลักษณะการแปลงแบบแอฟฟายน์

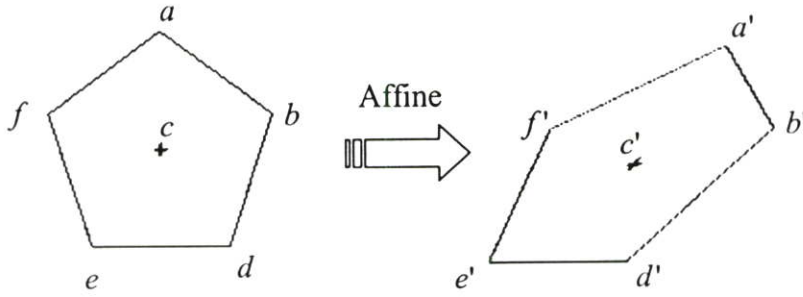
การแปลงแบบแอฟฟายน์มีค่าที่ไม่ผันแปร ดังนี้

1. เมื่อ c เป็นจุดตัดของเส้นตรง a, b จะได้ว่า $A(c)$ ยังคงเป็นจุดตัดของเส้นตรง $A(a), A(b)$ เมื่อ A เป็นการแปลงแบบแอฟฟายน์
2. เมื่อ c เป็นจุดศูนย์กลางของภาพและ $A(c)$ เป็นจุดศูนย์กลางของภาพที่ถูกทำการแปลง จะได้

$$A(c_x) = \sum_{i=1}^n x'_i, \quad A(c_y) = \sum_{i=1}^n y'_i \quad (2.37)$$

และ

$$c_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad c_y = \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.38)$$



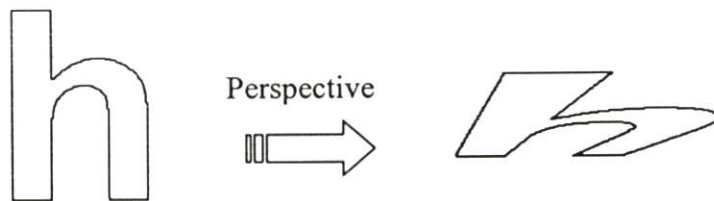
รูปที่ 2.15 อัตราส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยมภายในภาพ

3. ให้ a, b, c, d, e, f เป็นจุดบนภาพต้นฉบับและ a', b', c', d', e', f' เป็นจุดที่ถูกแปลงไปยังภาพผลลัพธ์ตามลำดับ จะได้ความสัมพันธ์ของพื้นที่สามเหลี่ยมดังนี้

$$\frac{\Delta abc}{\Delta bcd} = \frac{\Delta a'b'c'}{\Delta b'c'd'} \quad (2.39)$$

เมื่อ Δabc เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี a, b, c เป็นจุดยอดมุม
 Δbcd เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี b, c, d เป็นจุดยอดมุม
 $\Delta a'b'c'$ เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี a', b', c' เป็นจุดยอดมุม
 $\Delta b'c'd'$ เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี b', c', d' เป็นจุดยอดมุม

2.5.2.4 การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ (Perspective Transformation)



รูปที่ 2.16 ลักษณะการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นที่ประกอบด้วยการแปลงแบบแอฟไฟน์และการฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟอีกด้วย

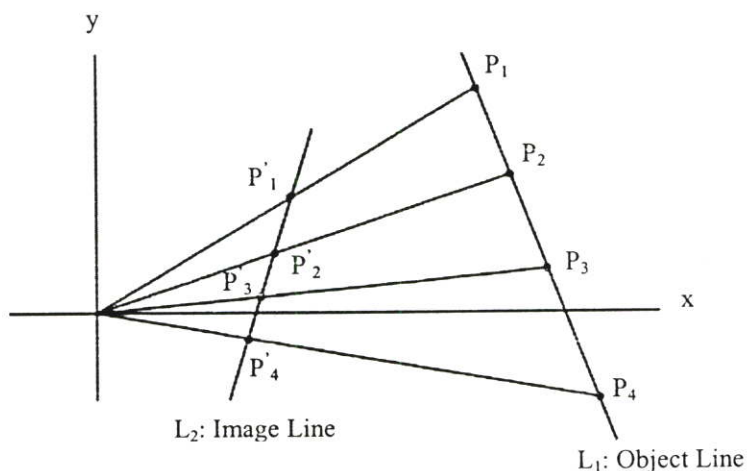
การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟมีค่าที่ไม่ผันแปร ดังนี้

1. อัตราส่วนของจุดบนเส้นตรงเดียวกัน [12]

พิจารณารูปที่ 2.13 กำหนดให้ P_1, \dots, P_4 เป็นจุดบนเส้นตรง L_1 และ P'_1, \dots, P'_4 เป็นจุดบนเส้น L_2 ซึ่งจุดที่ได้จากการฉายภาพวัตถุ พิจารณารูปที่ 2.13 จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ 2.40

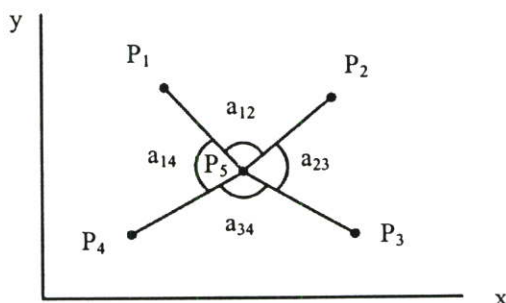
$$\frac{L'_{12} \cdot L'_{34}}{L'_{13} \cdot L'_{24}} = \frac{L_{12} \cdot L_{34}}{L_{13} \cdot L_{24}} \tag{2.40}$$

เมื่อ $L_{n,m}$ เป็นเส้นตรงระหว่างจุด P_n, P_m
 $L'_{n,m}$ เป็นเส้นตรงระหว่างจุด P'_n, P'_m



รูปที่ 2.17 การฉายภาพจุดบนเส้นตรง L_1 มายังเส้นตรง L_2

2. ห้าจุดบนระนาบร่วม (Five-Point Coplanar)



รูปที่ 2.18 จุดบนระนาบทั้งห้า

กำหนดให้ P_1, \dots, P_5 เป็นจุดบนระนาบซึ่งไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน สามารถสร้างสมการความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ 2.41 [12] และเรียกว่าเป็น “Five-Point Coplanar Invariance”

$$\frac{|m'_{512}||m'_{534}|}{|m'_{514}||m'_{523}|} = \frac{|m_{512}||m_{534}|}{|m_{514}||m_{523}|} \quad (2.41)$$

เมื่อ $m_{ijk} = (P_i P_j P_k)$, $P_i = (x_i y_i 1)'$ และ $m'_{ijk} = (P'_i P'_j P'_k)$, $P'_i = (x'_i y'_i 1)'$ และ $|m|$ เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของ m

พิจารณา $|m_{512}|$ สามารถหาได้จาก 2.42(ก) หรือ 2.42(ข)

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} x_5 & x_1 & x_2 \\ y_5 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} x_5 & x_1 - x_5 & x_2 - x_5 \\ y_5 & y_1 - y_5 & y_2 - y_5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \text{(ก)} & & \text{(ข)} \end{array} \quad (2.42)$$

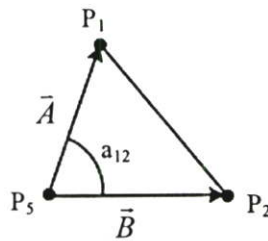
จากสมการ 2.42(ก) พบว่ามีค่าเป็นสองเท่าของพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุด P_1, P_2, P_5 เป็นจุดยอดมุมซึ่งมีพื้นที่ดังสมการ 2.43 เมื่อ $d_{i,j}$ เป็นระยะทางระหว่างจุด P_i และ P_j

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{A} \times \vec{B}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |d_{5,1}| |d_{5,2}| \cdot \sin a_{12} \end{aligned} \quad (2.43)$$

เมื่อ \vec{A}, \vec{B} คือค่าเวกเตอร์ระหว่างจุด P_i และ P_j

$d_{i,j}$ คือระยะทางระหว่างจุด P_i และ P_j

$a_{i,j}$ คือมุมระหว่างจุด P_i และ P_j



รูปที่ 2.19 สามเหลี่ยม $P_5P_1P_2$

แทนสมการที่ 2.43 ในสมการที่ 2.41 จะได้ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ ในรูปของอัตราส่วนระหว่างมุมดังสมการที่ 2.44 [12]

$$\frac{\sin a'_{12} \sin a'_{34}}{\sin a'_{14} \sin a'_{23}} = \frac{\sin a_{12} \sin a_{34}}{\sin a_{14} \sin a_{23}} \quad (2.44)$$

เมื่อ $a_{i,j}$ คือมุมระหว่างจุด P_i และ P_j ของภาพต้นฉบับ
 $a'_{i,j}$ คือมุมระหว่างจุด P_i และ P_j ของภาพที่ถูกแปลง

บทที่ 3

บีสไปลน์

(B-Spline)

3.1 บทนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงบีสไปลน์ ซึ่งเป็นสมการที่ใช้แทนเส้นโค้ง (Curve Representation) แบบพารามетริกซ์ (Parametric Form) คือสามารถแทนเส้นโค้งในพิกัด x, y ได้ด้วยพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว นอกจากนี้บีสไปลน์ยังมีคุณสมบัติที่สำคัญมากมาย ดังจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป [13-14]

3.2 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ (B-Spline Basis Functions)

3.2.1 นิยามของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์

ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์สามารถหาได้หลายวิธี เช่น วิธี divided difference ของอนุกรมกำลัง วิธี blossoming และวิธี recurrence formula โดย deBoor, Cox และ Mansfield [14] ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธี recurrence formula เนื่องจากเป็นวิธีที่สะดวกในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์

ให้ $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ คือ knot vector และเป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าไม่ลดลงหรือ $u_i \leq u_{i+1}$ เมื่อ $i = 0, \dots, m-1$ และ u_i คือ knot

ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ลำดับที่ i ซึ่งมีดีกรี p (order = $p+1$) สามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ $N_{i,p}(u)$ ซึ่งถูกนิยามด้วยสมการ

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & , u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

หมายเหตุ

- $N_{i,0}(u)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดที่มีค่าเท่ากับหนึ่งในช่วงพารามิเตอร์ $u \in [u_i, u_{i+1})$
- สำหรับ $p > 0$ สามารถหา $N_{i,p}(u)$ ได้จากการบวกแบบเชิงเส้นของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี $p-1$ สองฟังก์ชัน

- จากสมการที่ 3.1 ถ้ามีค่าเป็น $\frac{0}{0}$ นิยามให้มีผลลัพธ์เป็น 0
- เรียกช่วง $[u_i, u_{i+1})$ ว่า knot span ลำดับที่ i ซึ่งอาจมีขนาดเป็นศูนย์ก็ได้
- การคำนวณหาค่าฟังก์ชันที่ติกรี p สามารถพิจารณาจากแผนภูมิดังนี้

$$\begin{array}{cccc}
 N_{0,0} & & & \\
 N_{1,0} & N_{0,1} & & \\
 N_{2,0} & N_{1,1} & N_{0,2} & \\
 N_{3,0} & N_{2,1} & N_{1,2} & N_{0,3} \\
 N_{4,0} & N_{3,1} & N_{2,2} & N_{1,3} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $U = \{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 1, u_5 = 1\}$ และ $p = 2$ ให้คำนวณหาฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ติกรี 0, 1 และ 2

$$\begin{array}{ll}
 N_{0,0} = N_{1,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
 N_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \\
 N_{3,0} = N_{4,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
 N_{0,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
 N_{1,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \\
 N_{2,1} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,0} = \begin{cases} u & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \\
 N_{3,1} = \frac{u-1}{1-1} N_{3,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{4,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
 N_{0,2} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = \begin{cases} (1-u)^2 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \\
 N_{1,2} = \frac{u-0}{1-0} N_{1,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u(1-u) & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \\
 N_{2,2} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,1} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,1} = \begin{cases} u^2 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} &
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้

$$U = \{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 2, u_5 = 3, u_6 = 4, u_7 = 4, u_8 = 5, u_9 = 5, u_{10} = 5\}$$

และ $p = 2$ จำนวนหาฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 0, 1 และ 2

$$N_{0,0} = N_{1,0} = 0 \quad -\infty < u < \infty$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{3,0} = \begin{cases} 1 & 1 \leq u < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

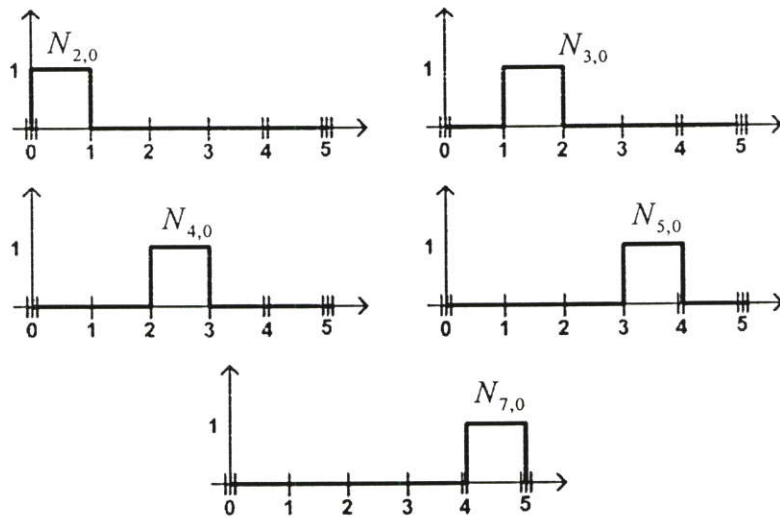
$$N_{4,0} = \begin{cases} 1 & 2 \leq u < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{5,0} = \begin{cases} 1 & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{6,0} = 0 \quad -\infty < u < \infty$$

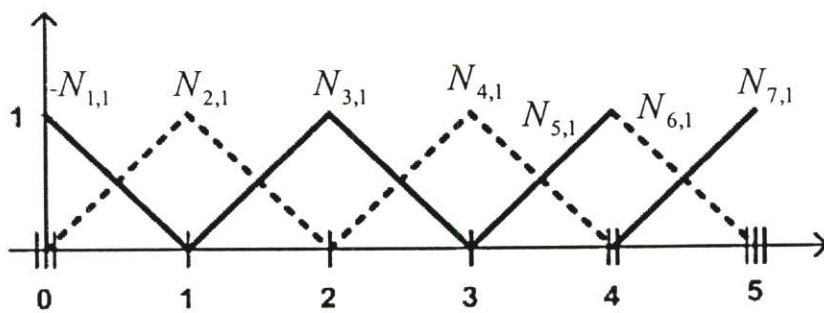
$$N_{7,0} = \begin{cases} 1 & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{8,0} = N_{9,0} = 0 \quad -\infty < u < \infty$$



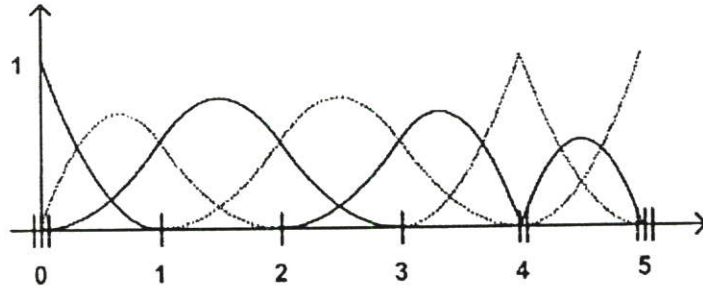
รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 0 เมื่อ $U = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$

$$\begin{aligned}
N_{0,1} &= \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
N_{1,1} &= \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{2,1} &= \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{2-u}{2-1} N_{3,0} = \begin{cases} u & 0 \leq u < 1 \\ 2-u & 1 \leq u < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{3,1} &= \frac{u-1}{2-1} N_{3,0} + \frac{3-u}{3-2} N_{4,0} = \begin{cases} u-1 & 1 \leq u < 2 \\ 3-u & 2 \leq u < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{4,1} &= \frac{u-2}{3-2} N_{4,0} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,0} = \begin{cases} u-2 & 2 \leq u < 3 \\ 4-u & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{5,1} &= \frac{u-3}{4-3} N_{5,0} + \frac{4-u}{4-4} N_{6,0} = \begin{cases} u-3 & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{6,1} &= \frac{u-4}{4-4} N_{6,0} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,0} = \begin{cases} 5-u & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{7,1} &= \frac{u-4}{5-4} N_{7,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,0} = \begin{cases} u-4 & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{8,1} &= \frac{u-5}{5-5} N_{8,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{9,0} = 0 & -\infty < u < \infty
\end{aligned}$$



รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลดดีกรี 1 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

$$\begin{aligned}
N_{0,2} &= \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = (1-u)^2 & 0 \leq u < 1 \\
N_{1,2} &= \frac{u-0}{1-0} N_{1,1} + \frac{2-u}{2-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u - \frac{3}{2}u^2 & 0 \leq u < 1 \\ \frac{1}{2}(2-u)^2 & 1 \leq u < 2 \end{cases} \\
N_{2,2} &= \frac{u-0}{2-0} N_{2,1} + \frac{3-u}{3-1} N_{3,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & 0 \leq u < 1 \\ -\frac{3}{2} + 3u - u^2 & 1 \leq u < 2 \\ \frac{1}{2}(3-u)^2 & 2 \leq u < 3 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \frac{u-1}{3-1} N_{3,1} + \frac{4-u}{4-2} N_{4,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-1)^2 & 1 \leq u < 2 \\ -\frac{11}{2} + 5u - u^2 & 2 \leq u < 3 \\ \frac{1}{2}(4-u)^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \frac{u-2}{4-2} N_{4,1} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-2)^2 & 2 \leq u < 3 \\ -16 + 10u - \frac{3}{2}u^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases} \\
N_{5,2} &= \frac{u-3}{4-3} N_{5,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{6,1} = \begin{cases} (u-3)^2 & 3 \leq u < 4 \\ (5-u)^2 & 4 \leq u < 5 \end{cases} \\
N_{6,2} &= \frac{u-4}{5-4} N_{6,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,1} = 2(u-4)(5-u) & 4 \leq u < 5 \\
N_{7,2} &= \frac{u-4}{5-4} N_{7,1} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,1} = (u-4)^2 & 4 \leq u < 5
\end{aligned}$$

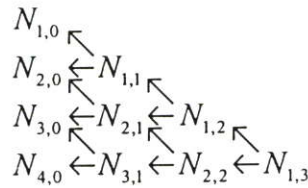


รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลดดีกรี 2 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

3.2.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์

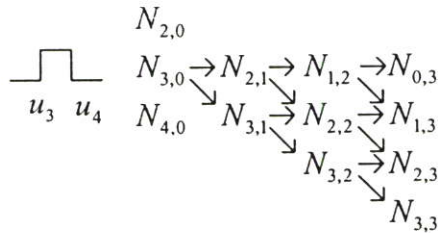
คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์เหล่านี้ สามารถกำหนดคุณสมบัติทางเรขาคณิตของเส้นโค้งบีสไปลอน์และพื้นผิวบีสไปลอน์ได้ กำหนดให้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์มีดีกรี p และมี knot vector $U = \{u_0, \dots, u_m\}$

1. $N_{i,p}(u) = 0$ เมื่อ $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ เรียกคุณสมบัตินี้ว่าเป็น Local support สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิดังนี้



พบว่า $N_{1,3}$ เกิดจากผลรวมของ $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}, N_{4,0}$ นั่นคือ $N_{1,3} \neq 0$ เมื่อ $u \in [u_1, u_5)$

2. ในช่วง knot span, $[u_j, u_{j+1})$ ใดๆ จะมี $N_{i,p}$ ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด $p+1$ ฟังก์ชันคือ $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$ เช่น บนช่วง $[u_3, u_4)$ จะมีฟังก์ชันที่ดีกรี 0 ซึ่งมีค่าไม่เป็นศูนย์เพียง 1 ฟังก์ชันคือ $N_{3,0}$ จะได้ว่าฟังก์ชันที่ดีกรี 3 และมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ได้แก่ $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$



3. $N_{i,p}(u) \geq 0$ สำหรับทุกค่า i, p และ $u (u \geq 0)$

4. สำหรับช่วง knot span, $[u_j, u_{j+1})$ ใดๆ ได้ $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1$

5. อนุพันธ์ของ $N_{i,p}(u)$ จะถูกนิยามในแต่ละช่วง knot span และที่ knot ใดๆ $N_{i,p}(u)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึง $p-k$ เมื่อ k เป็นจำนวน knot ที่มีค่าซ้ำกัน

ตัวอย่างที่ 3.3 ให้ $p = 2$, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ และ $u = 5/2$ (ดูรูปที่ 3.3) ได้ $i = 4$ ดังนั้น $u \in [u_4, u_5)$ จะหา $N_{i,2}(u) \geq 0$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} N_{4,0}(\frac{5}{2}) & N_{3,1}(\frac{5}{2}) & N_{2,2}(\frac{5}{2}) \\ & N_{4,1}(\frac{5}{2}) & N_{3,2}(\frac{5}{2}) \\ & & N_{4,2}(\frac{5}{2}) \end{array}$$

แทน $u = 5/2$ ในผลลัพธ์ที่ได้จากตัวอย่างที่ 3.2 จะได้

$$\begin{array}{ccc} N_{4,0}(\frac{5}{2}) = 1 & & \\ N_{3,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & N_{4,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & \\ N_{2,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} & N_{3,2}(\frac{5}{2}) = \frac{6}{8} & N_{4,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} \end{array}$$

จะสังเกตได้ว่า ที่คิกริใดๆผลรวมของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์มีค่าเท่ากับหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 3.4 ให้ $p = 2$, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ และ $u = 5/2$ ให้หา $N_{3,2}(\frac{5}{2})$ สามารถหา $N_{3,2}(\frac{5}{2})$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} N_{3,0}(\frac{5}{2}) = 0 & & \\ N_{4,0}(\frac{5}{2}) = 1 & N_{3,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & \\ N_{5,0}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{4,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & N_{3,2}(\frac{5}{2}) = \frac{6}{8} \end{array}$$

และสามารถหา $N_{4,2}(\frac{5}{2})$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} N_{4,0}(\frac{5}{2}) = 1 & & \\ N_{5,0}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{4,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & \\ N_{6,0}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{5,1}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{4,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} \end{array}$$

3.2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์

ให้ $N_{i,p}^{(k)}(u)$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ k ของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad (3.2)$$

หรือ

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k} \quad (3.3)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1 \\ a_{k,0} &= \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1} - u_i} \\ a_{k,j} &= \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1} - u_{i+j}}, \quad j = 1, \dots, k-1 \\ a_{k,k} &= \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} \end{aligned}$$

หมายเหตุสมการที่ 3.2

- $k \leq p$
- ถ้าตัวหารเป็นศูนย์ นิยามให้มีค่าเท่ากับ 0

3.3 เส้นโค้งบีสไปไลน์

3.3.1 นิยามของเส้นโค้งบีสไปไลน์

สมการเส้นโค้งบีสไปไลน์ดีกรี p สามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i, \quad a < u < b \quad (3.4)$$

เมื่อ $\{P_i\}$ คือเซตของจุดควบคุม (control point)
 $n+1$ คือจำนวนจุดควบคุม

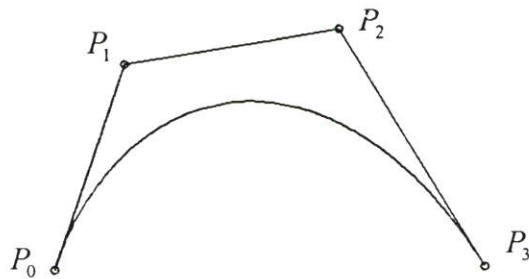
$\{N_{i,p}(u)\}$ คือเซตของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี p และกำหนดให้ knot vector เป็นแบบ nonperiodic (nonuniform) ซึ่งมี knot เป็นจำนวน $m+1$ โดย

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}$$

กำหนดให้ $a=0, b=1$ และเรียกพื้นที่ปิดที่เกิดจาก $\{P_i\}$ ว่า Control point polygon

ขั้นตอนในการหาค่าบนเส้นโค้งบีสไปไลน์ที่พารามิเตอร์ u ใดๆ มีดังนี้

1. หาวว่า u อยู่ในช่วงของ knot span ใด
2. หาค่าฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี p ที่ u นั้นๆ
3. คูณผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 2 กับจุดควบคุมตามสมการที่ 3.4



รูปที่ 3.4 เส้นโค้งบีสไปไลน์ดีกรี 3 เมื่อ $U = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$

ตัวอย่างที่ 3.5 จากตัวอย่างที่ 3.3 ซึ่งมี $U = \{0,0,0,1,2,3,4,5,5,5\}$, $u = 5/2$ และ $p = 2$ ได้

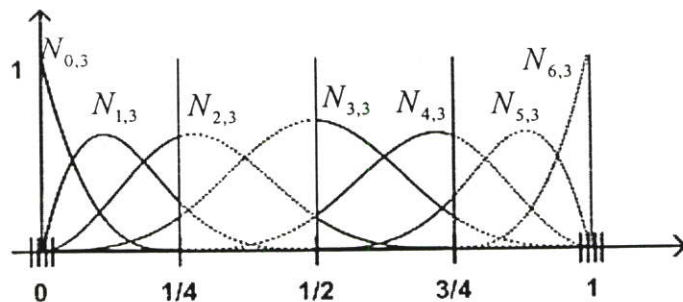
$$u \in [u_4, u_5) \text{ และ } N_{2,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8} \quad N_{3,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{6}{8} \quad N_{4,2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

จะได้

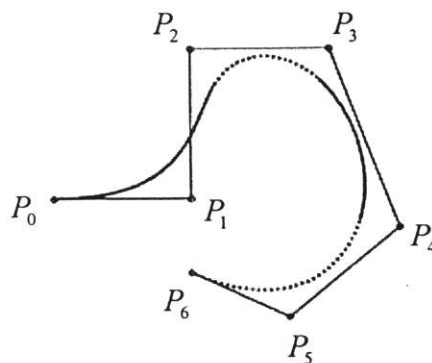
$$C\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8}P_2 + \frac{6}{8}P_3 + \frac{1}{8}P_4$$

3.3.2 คุณสมบัติของเส้นโค้งบีสไปไลน์

1. ถ้า $n = p$ และ $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ แล้ว $C(u)$ คือ Bezier curve [19]
2. $C(u)$ เป็น piecewise polynomial curve เนื่องจาก $N_{i,p}(u)$ เป็น piecewise polynomial function และดีกรี p , จุดควบคุม $n+1$, knot จำนวน $m+1$ สัมพันธ์กันด้วยสมการ $m = n + p + 1$
3. $C(0) = P_0$ และ $C(1) = P_n$
4. คุณสมบัติที่ไม่แปรผันต่อการแปลงแบบแอฟไฟน์ (Affine Invariance) คือ สามารถทำการแปลงแบบแอฟไฟน์เส้นโค้งได้โดยทำการแปลงกับจุดควบคุมได้เช่นกัน
5. คุณสมบัติ Strong convex hull คือ เส้นโค้งจะถูกกำหนดให้อยู่ภายในจุดควบคุม (control point polygon) หรือพื้นที่ที่เกิดจากจุดควบคุมดังรูปที่ 3.7 นั่นคือ ถ้า $u \in [u_i, u_{i+p})$ เมื่อ $p \leq i < m - p - 1$ แล้ว $C(u)$ จะถูกควบคุมโดย P_{i-p}, \dots, P_i ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากคุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ $N_{j,p}(u) = 0$ ที่ $j < i - p$ และ $j > i$ เมื่อ $u \in [u_i, u_{i+1})$
6. คุณสมบัติ Local modification scheme คือ หากทำการเปลี่ยนตำแหน่ง P_i จะมีผลให้ $C(u)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงเฉพาะช่วง $[u_i, u_{i+p+1})$ พิจารณารูปที่ 3.8 เนื่องจาก $N_{i,p}(u) = 0$ เมื่อ $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$



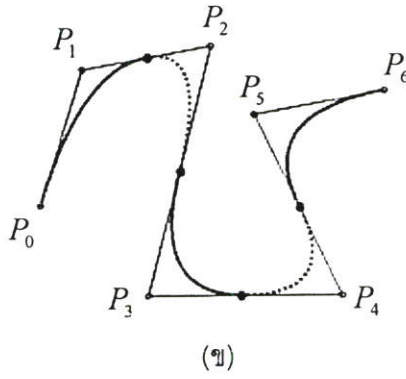
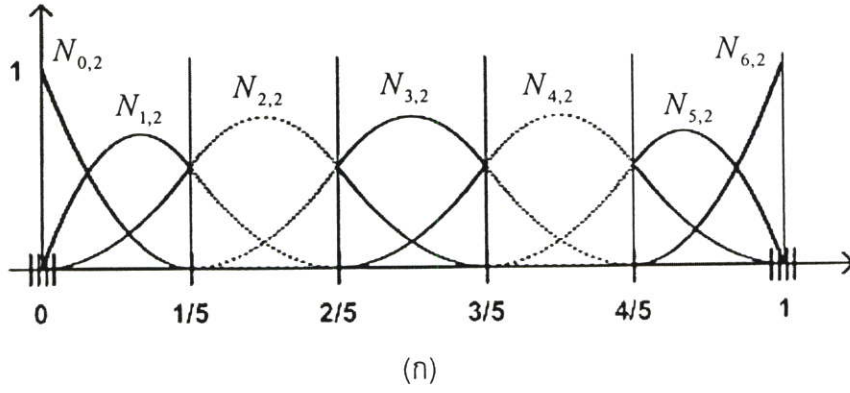
(ก)



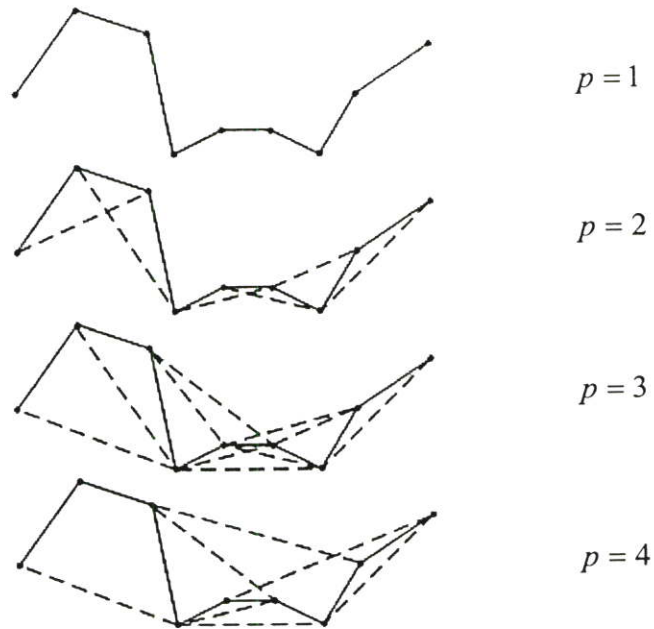
(ข)

รูปที่ 3.5 (ก) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี 3 เมื่อ $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$

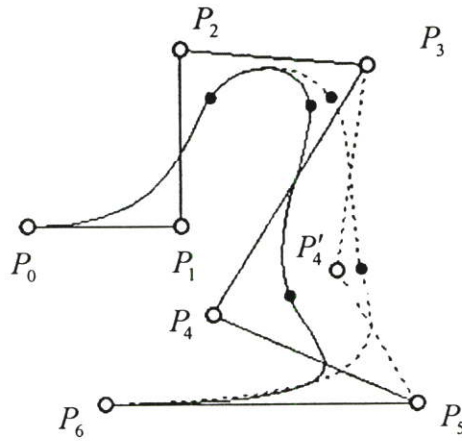
(ข) เส้นโค้งบีสไปไลน์ดีกรี 3 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์รูปที่ 3.5 (ก)



รูปที่ 3.6 (ก) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 2 เมื่อ $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1\}$
 (ข) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 2 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์รูปที่ 3.6 (ก)



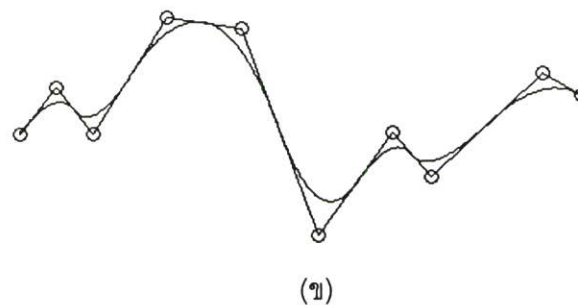
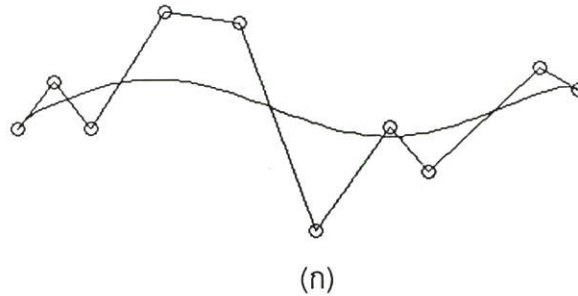
รูปที่ 3.7 คุณสมบัติ Convex hull ของเส้นโค้งบีสไปลน์



รูปที่ 3.8 เส้นโค้งบีสไปลน์ โดย $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ เมื่อทำการเคลื่อนย้ายจุด P_4 ไปยังจุด P_4' พบว่าเส้นโค้งจะเปลี่ยนเฉพาะช่วง $[1/4, 1)$

7. เส้นโค้งบีสไปลน์สามารถปรับปรุงวิธีการประมาณค่าได้โดยวิธีการแทรก knot หรือ degree elevation และพบว่ายิ่งดีกรีมีค่าน้อย เส้นโค้งบีสไปลน์จะยิ่งชิดจุดควบคุม (control point polygon) มากขึ้น ดังรูปที่ 3.9 และ 3.10

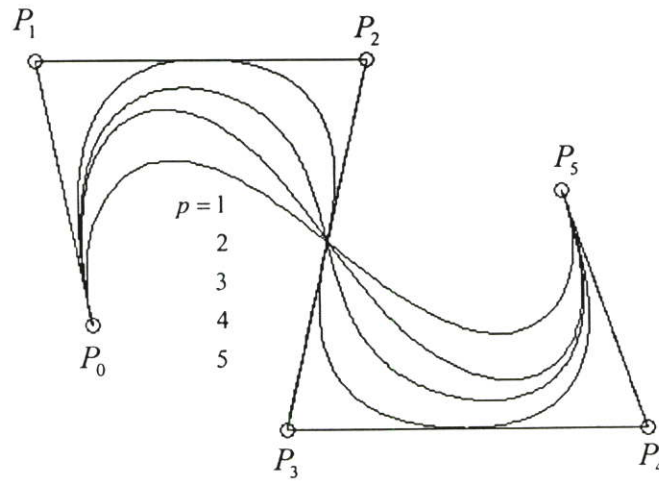
8. $C(u)$ มีคุณสมบัติความต่อเนื่อง (Continuity) และสามารถหาอนุพันธ์ได้ (differentiability)



รูปที่ 3.9 เส้นโค้งบีสไปลน์

(ก) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 9 โดย $U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

(ข) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 2 และ $U = \{0, 0, 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, 1, 1, 1\}$



รูปที่ 3.10 เส้นโค้งบีสไปลน์ที่ดีกรีต่างๆกัน โดยใช้จุดควบคุมเดียวกัน

3.3.3 อนุพันธ์ของเส้นโค้งบีสไปลน์

ให้ $C^{(k)}(u)$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ k ของ $C(u)$

$$C^{(k)} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) P_i \quad (3.5)$$

หา $C'(u)$ โดยกำหนดค่า u ที่ต้องการหา

เมื่อ
$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i$$

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

แทนสมการที่ 3.2 ในสมการที่ 3.5 ได้

$$\begin{aligned}
C'(u) &= \sum_{i=0}^n N'_{i,p}(u)P_i \\
&= \sum_{i=0}^n \left(\frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \right) P_i \\
&= \left(p \sum_{i=1}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_{i+1}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) - \left(p \sum_{i=0}^n N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \\
&= p \frac{\overbrace{N_{0,p-1}(u)P_0}^0}{\underbrace{u_p - u_0}_0} + p \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{(P_{i+1} - P_i)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} - p \frac{\overbrace{N_{n+1,p-1}(u)P_n}^0}{\underbrace{u_{n+p+1} - u_{n+1}}_0}
\end{aligned}$$

จากนิยามเรากำหนดให้ $\frac{0}{0} = 0$

ได้

$$C'(u) = p \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{(P_{i+1} - P_i)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) Q_i \quad (3.6)$$

เมื่อ

$$Q_i = p \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}$$

3.4 การประมาณเส้นโค้งด้วยบีสไปไลน์

3.4.1 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ (\bar{u}_k)

กำหนดให้เซตของข้อมูล $\{Q_k\}$, $k = 0, \dots, n$ กำหนดให้ \bar{u}_k เป็นพารามิเตอร์สำหรับ Q_k และให้ $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ จะได้ระบบสมการเชิงเส้น $n+1$ ตัวแปรจำนวน $n+1$ สมการที่ 3.7

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \quad (3.7)$$

พารามิเตอร์ที่นิยมใช้ทั่วไปมีดังนี้

1. Equally Spaced

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \frac{k}{n} & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

วิธีนี้ไม่เหมาะกับข้อมูลที่มีระยะห่างระหว่างจุดไม่เท่ากันทั้งหมด

2. Chord Length

กำหนดให้ d เป็นความยาวทั้งหมด

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}|$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

วิธีนี้นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายและเป็นพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับเส้นโค้งทุกชนิด ไม่ว่าจะ เป็นเส้นโค้งเปิดหรือเส้นโค้งปิด

3. Centripetal method

กำหนดให้

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d} & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

วิธีนี้ให้ผลดีสำหรับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว

4. Area parameter

กำหนดให้ Center:

$$C = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q_k$$

และ

$$\text{Area: } a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |Q_k \times Q_{k-1}|$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k \times Q_{k-1}|}{a} \quad k=1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

พารามิเตอร์แบบนี้ เหมาะกับเส้นโค้งที่มีลักษณะปิด และมีคุณสมบัติที่ไม่ผันแปรเมื่อถูกแปลงแบบ แอฟไฟน์

3.4.2 Knot vector

Knot vector มีวิธีการกำหนดหลายรูปแบบ เราสนใจเฉพาะแบบที่เป็น non-periodic (หรือ clamped หรือ open) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$U = \{u_0, \dots, u_m\} = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (3.12)$$

เมื่อ $n = m - p - 1$

โดยทั่วไปจะกำหนดให้ $a = 0$ และ $b = 1$ เช่นเมื่อ $p = 2, n = 6$ จะได้

$$U = 1/5\{0001234555\}$$

3.4.3 หาจุดควบคุมจากการประมาณเส้นโค้งบีสไปลงด้วยวิธี Least Squares

สมมติให้มีข้อมูล $p \geq 1, n \geq p$ และ Q_0, \dots, Q_m ($m > n$) จะหาเส้นโค้งบีสไปลงดีกรี p แบบ Non-rational ได้จากสมการ

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad , a < u < b \quad (3.13)$$

ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

- $Q_0 = C(0) = P_0$ และ $Q_m = C(1) = P_n$
- ที่จุดของข้อมูล Q_k อื่นๆ จะถูกประมาณและมีผลรวมของค่าผิพลาตกำลังสองเป็น

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^{m-1} |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2 \quad (3.14)$$

ค่าผิดพลาด ε^2 จะมีค่าน้อยที่สุดขึ้นกับจำนวนของจุดควบคุมที่เป็นตัวแปรจำนวน $n+1$ ตัวแปร และ $\{\bar{u}_k\}$ ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่ได้คำนวณไว้แล้ว กำหนดให้

$$R_k = Q_k - N_{0,p}(\bar{u}_k)Q_0 - N_{n,p}(\bar{u}_k)Q_m, \quad k = 1, \dots, m-1$$

จากสมการที่ 3.14

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \sum_{k=1}^{m-1} |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \left| R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left(R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \cdot \left(R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left[R_k R_k - 2 \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot (R_k P_i) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \right] \end{aligned}$$

หา ε^2 ที่น้อยที่สุดโดยหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน ε^2 เทียบกับ P_l เมื่อ $l = 1, \dots, n-1$ ได้

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial P_l} = \sum_{k=1}^{m-1} \left(-2N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k + 2N_{l,p}(\bar{u}_k) \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \quad (3.15)$$

ให้สมการที่ 3.15 เป็นศูนย์ จะได้

$$- \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} N_{l,p}(\bar{u}_k)N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot P_i = 0 \quad (3.16)$$

หรือ

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot N_{i,p}(\bar{u}_k) \right) \cdot P_i = \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k \quad (3.17)$$

จากสมการที่ 3.17 เป็นสมการเชิงเส้น 1 สมการที่ประกอบด้วยตัวแปรคือ P_1, \dots, P_{n-1} ฉะนั้นให้ $l=1, \dots, n-1$ จะได้ระบบสมการที่มีสมการทั้งหมด $n-1$ สมการซึ่งมีตัวแปร $n-1$ ตัวแปร และสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$(N^T N)P = R \quad (3.18)$$

$$P = (N^T N)^{-1} R \quad (3.19)$$

เมื่อ N เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m-1) \times (n-1)$

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \end{bmatrix}$$

และ R เป็นคอลัมน์เวกเตอร์ขนาด $(n-1)$

$$R = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_1)R_{n-1} \\ \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1})R_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{n-1} \end{bmatrix}$$

และ

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

ฉะนั้นเราสามารถหาค่า $(P_x P_y P_z)$ ได้จากสมการที่ 3.19 เมื่อทราบเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และ $(R_x R_y R_z)$

บทที่ 4

เวฟเล็ต

4.1 บทนำ

ในบทนี้จะอธิบายคณิตศาสตร์ของเวฟเล็ต โดยจะกล่าวถึงการวิเคราะห์แบบหลายระดับ ความละเอียด (Multiresolution analysis: MRA) ซึ่งเป็นพื้นฐานของการกำเนิดสเกลลิงฟังก์ชัน และเวฟเล็ตฟังก์ชัน การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย การแปลงกลับเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย โดยจะพิจารณาในลักษณะของ ฟิลเตอร์แบงก์ (Filter Banks) และกล่าวถึงผลตอบสนองอิมพัลส์ของการแปลงเวฟเล็ตตระกูลออร์โธโรนอร์มัล

4.2 ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต

คลื่นถูกนิยามให้เป็นฟังก์ชันที่มีการออกซซิลเลทในโดเมนเวลาหรือสเปซ เช่น คลื่นไซน์ (Sine wave) เป็นต้น ส่วนเวฟเล็ตก็เป็นคลื่นเช่นกัน ในการวิเคราะห์สัญญาณหรือฟังก์ชันเช่นการวิเคราะห์ฟูเรียร์ ซึ่งเป็นการวิเคราะห์คลื่นโดยกระจายสัญญาณหรือฟังก์ชันในเทอมของไซน์หรืออ็อกโทเนนเชียล ซึ่งเป็นการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนความถี่ ส่วนการวิเคราะห์เวฟเล็ตเป็นการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนเวลาและความถี่ไปพร้อมๆกัน เวฟเล็ตสามารถนำมาใช้ในการกระจายอนุกรมของสัญญาณ ในลักษณะเดียวกันที่ใช้ออนุกรมฟูเรียร์ในการแทนสัญญาณนั้นคือ สัญญาณหรือฟังก์ชัน $f(t)$ สามารถเขียนในรูปของ Linear Combination [1,2] ได้โดย

$$f(t) = \sum_l a_l \psi_l(t) \quad (4.1)$$

เมื่อ l เป็นดัชนีจำนวนเต็มของอนุกรม
 a_l เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจาย
 $\psi_l(t)$ เป็นเซตของฟังก์ชันจำนวนจริง

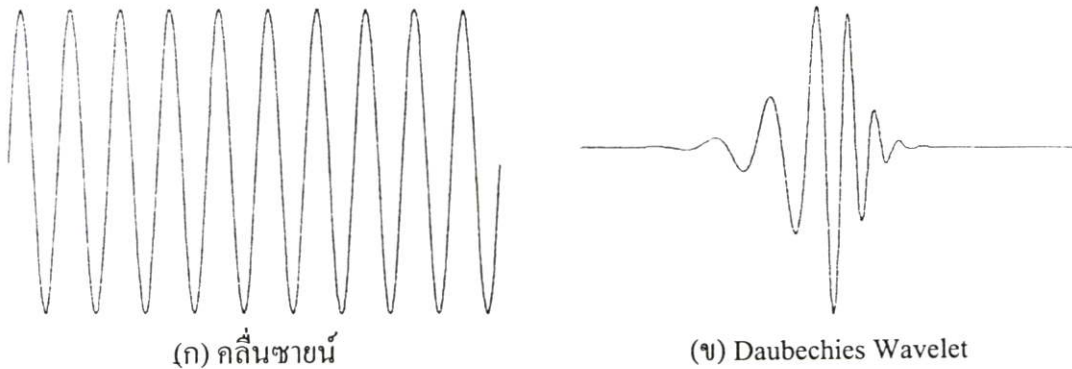
เซตของฟังก์ชันถูกเรียกว่า Basis และถ้าฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) มีลักษณะเชิงตั้งฉาก (Orthogonal) จะได้ผลคูณภายใน (Inner Product) เป็นศูนย์นั่นคือ

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t) \psi_l(t) dt = 0 \quad k \neq l \quad (4.2)$$

และสัมประสิทธิ์ a_k สามารถหาได้โดยการหาผลคูณภายในดังสมการที่ 4.3

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t) \psi_k(t) dt \quad (4.3)$$

เมื่อพิจารณาค้นเวฟเลต $\psi(t)$ จะหมายถึงคลื่นสัญญาณเล็กๆที่เหมาะสมสำหรับเป็นเซตฟังก์ชันพื้นฐานของสเปซฟังก์ชัน (function spaces) ซึ่งเป็นคลื่นที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้นๆ และมีแอมพลิจูดลดลงสู่ศูนย์อย่างรวดเร็วเมื่อ $t \rightarrow \pm\infty$ (local support ในโดเมนเวลา) ดังรูปที่ 4.1 (ข) และพื้นที่สุทธิของรูปคลื่นเท่ากับศูนย์หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับฟูรีเยร์ที่ประกอบด้วยคลื่นโคไซน์ (cosine) และไซน์ (sine) ดังรูปที่ 4.1 (ก) ซึ่งมีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ต (local support) ในโดเมนความถี่แต่จะไม่มีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ตในโดเมนเวลา ส่วนเวฟเลตจะมีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ตทั้งในโดเมนความถี่และเวลา ดังนั้นเวฟเลตจึงสามารถแทนฟังก์ชันที่มีลักษณะขดแหลมหรือมีลักษณะเป็นขอบ nonstationary หรือเหตุการณ์ที่เปลี่ยนไปตามเวลา ด้วยเทอมของ basis function ที่มีนัยสำคัญสูงน้อยกว่า Fourier Basis ซึ่งจากคุณสมบัติดังกล่าวสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการบีบอัดสัญญาณได้เป็นอย่างดี



รูปที่ 4.1 แสดงรูปคลื่นไซน์ และ Daubechies Wavelet

ในการสร้างเซตเวฟเลต คลื่นเวฟเลตจะถูกยืดขยาย (dilation) หรือเปลี่ยนความถี่ และคลื่นเวฟเลตที่ถูกยืดขยายยังถูกเลื่อน (translation) ในแกนเวลาอีกด้วย ซึ่งคุณสมบัติทั้งสองอย่างเป็นส่วนหนึ่งของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด การวิเคราะห์แบบนี้เป็นการกระจายรายละเอียดของสัญญาณจะถูกกระจายไปที่ความถี่ต่างๆและตำแหน่งต่างๆเปรียบเหมือนเสียงดนตรีที่ถูกกระจายเป็นตัวโน้ตบนเส้นของระดับเสียง

4.2.1 การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด(Multiresolution Analysis)

ถ้ากำหนดสัญลักษณ์ $f_j(t)$ แทนฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกกระจายไปที่ระดับความละเอียด j และที่ระดับความละเอียด $j+1$ รายละเอียดจะถูกแทนด้วย $d_j(t)$ ซึ่งเมื่อรวมเข้ากับ j จะได้ฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกกระจายไปที่ระดับความละเอียด $j+1$ นั่นคือ

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t) \quad (4.4)$$

ซึ่งฟังก์ชันในสมการที่ 4.4 จะเป็นฟังก์ชันที่มีรายละเอียดเข้าใกล้ $f(t)$ มากกว่าแทนฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด j และสัญญาณ $f(t)$ จะสร้างกลับคืนเมื่อรวมรายละเอียดที่ระดับความละเอียดต่างๆไปจนถึงอนันต์หรือ $j \rightarrow \infty$ ซึ่งจะได้

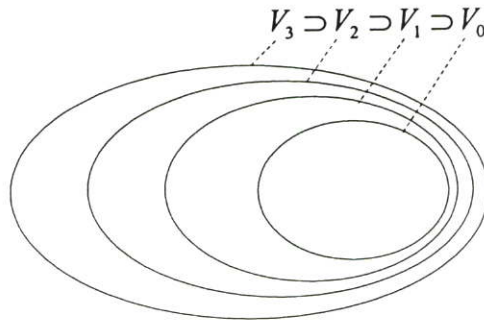
$$f(t) = f_j(t) + \sum_{k=j}^{\infty} d_k(t) \quad (4.5)$$

การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดจะครอบคลุมถึงการแสดงความละเอียด ในแต่ละระดับไปพร้อมๆกัน จากสมการที่ 4.5 จะเห็นว่าฟังก์ชันถูกกระจายออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วน background และส่วนของรายละเอียด ในทำนองเดียวกันจะสามารถดูสเปซของฟังก์ชันนั้นก็คือ Square integral: $L^2(R)$ ซึ่งประกอบไปด้วยลำดับของสเปซย่อย W_k และ V_j รวมไปถึงการประมาณค่าของ $f(t)$ ที่ระดับความละเอียด j คือ $f_j(t)$ ใน V_j และรายละเอียด $d_k(t)$ ใน W_k

การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียดของ $L^2(R)$ ได้นิยามลำดับของสเปซย่อย V_j โดยที่ Z เป็นเซตของจำนวนเต็มดังนี้

- (1) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(R)$
- (2) $\bigcap_j V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_j V_j} = L^2(R)$
- (3) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
- (4) $f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t-k) \in V$
- (5) มีฟังก์ชัน $\varphi(t)$ และ $\varphi(t-k)$ ซึ่งเป็นออร์โธโนมัล (orthonormal basis) อยู่ใน V_0

จากนิยามข้อที่ (1) สเปซย่อย V_j จะเป็นสับเซตของสเปซย่อย V_{j+1} ดังรูปที่ 4.2 หรือถ้าพิจารณาในโดเมนเวลา ฟังก์ชันที่ถูกประมาณใน V_{j+1} คือสมการที่ 4.4



รูปที่ 4.2 แสดงสเปซย่อย V_j ใน $L^2(R)$ ตามนิยามของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด

และความแตกต่างของการประมาณฟังก์ชันใน V_j และ V_{j+1} คือรายละเอียด $d_j(t)$ ซึ่งอยู่ใน W_j ดังนั้นจะได้

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (4.6)$$

เมื่อ \oplus แทนการบวกเชิงตั้งฉากและ W_j ถูกเรียกว่าสเปซของรายละเอียดหรือ Complementary subspace และจะตั้งฉากกับ V_j โดยใช้สัญลักษณ์ $V_j \perp W_j$ ซึ่งหมายความว่าผลคูณภายในของแต่ละส่วน (element) ใน V_j กับแต่ละส่วนใน W_j จะมีค่าเป็นศูนย์ แต่เมื่อมองที่สเปซย่อย จะได้

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (4.7)$$

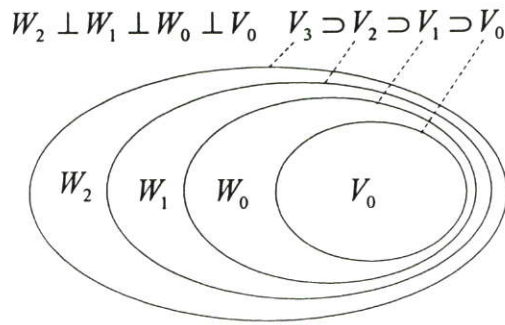
เมื่อแทนสมการที่ 4.7 ในสมการที่ 4.6 จะได้

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-1} \quad (4.8)$$

และเมื่อกระจาย V_{j+1} ไปอีกจะได้

$$V_{j+1} = W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_{j-j} \oplus V_{j-1} \quad (4.9)$$

จากสมการที่ 4.9 สามารถแสดงสเปซย่อย W_j ใน $L^2(R)$ ได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงสเปซย่อย W_j ใน $L^2(\mathbb{R})$

นิยามข้อที่ (2) ฟังก์ชันจะถูกประมาณที่ระดับความละเอียดที่หยาบที่สุดคือที่ระดับ $j \rightarrow -\infty$ จะได้ว่า $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = 0$ ในทางกลับกันเมื่อเพิ่มรายละเอียดจนถึงที่ระดับความละเอียดอนันต์จะได้สัญชาตญาณกลับคืนมา นั่นคือ $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

นิยามข้อที่ (3) สเปซ V_j ถูกสเกลหรือขยายจากสเปซ V_0 เนื่องจากที่ระดับความละเอียด $j+1$ จะเก็บรายละเอียดที่สูงกว่าที่ระดับความละเอียด j ดังนั้นความถี่ฟังก์ชันใน V_{j+1} จะมีค่าเป็นสองเท่าของฟังก์ชันใน V_j หมายความว่าถ้ามีฟังก์ชัน $f(t)$ ในสเปซย่อย V_j แล้วจะมี $f(2t)$ อยู่ใน V_{j+1}

นิยามข้อที่ (4) ถ้าสเปซย่อย V_0 มีฟังก์ชัน $f(t)$ แล้วฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกเลื่อนคือ $f(t-k)$ ซึ่งจะเลื่อนด้วยค่าจำนวนเต็ม k และจะเก็บอยู่ใน V_0 ด้วย

นิยามข้อที่ (5) มีฟังก์ชันพื้นฐาน $\varphi(t)$ ซึ่งเรียกว่าสเกลลิงฟังก์ชัน (scaling function) และรวมถึงสเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกเลื่อนคือ $\varphi(t-k)$ อยู่ใน V_0 และแต่ละฟังก์ชัน จะมีคุณสมบัติที่เป็นออร์โธโนมัล

4.2.2 สเกลลิงฟังก์ชัน (Scaling Function)

จากแนวความคิดของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด จะสามารถนิยามสเกลลิงฟังก์ชัน $\varphi_k(t)$ และเซตของสเกลลิงฟังก์ชันถูกนิยามในเทอมของการเลื่อนของการสเกลลิงฟังก์ชัน ซึ่งจะได้

$$\varphi_k(t) = \varphi(t-k) \quad k \in \mathbb{Z} \in L^2 \quad (4.10)$$

เมื่อ \mathbb{Z} เป็นเซตของจำนวนเต็ม จากสมการที่ 4.10 ขนาดของสเปซย่อยใน L^2 ถูกกำหนดโดยเซตของสเกลลิงฟังก์ชันคือ

$$V_0 = \overline{\text{Span}_k \{\varphi_k(t)\}} \quad (4.11)$$

เครื่องหมาย over bar แทนช่วงปิดของสเปซ จากนิยามข้อที่ (3) และนิยามข้อที่ (4) ของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด จะสามารถนิยามการสเกลของสเกลลิงฟังก์ชันหรือการเปลี่ยนความถี่ของสเกลลิงฟังก์ชัน โดย

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad (4.12)$$

ดังนั้นขนาดของสเปซย่อยในสมการที่ 4.11 จะกลายเป็น

$$V_j = \overline{\text{Span}_k \{\varphi_k(2^j t)\}} = \overline{\text{Span}_k \{\varphi_{j,k}(t)\}} \quad (4.13)$$

ถ้า $f(t) \in V_j$ และ $k \in Z$ แล้วจะสามารถประมาณฟังก์ชัน $f(t)$ ได้ดังสมการที่ 4.14

$$f(t) = \sum_k a_k (2^j t - k) \quad (4.14)$$

สำหรับทุกค่าที่ $j > 0$ ขนาดของสเปซย่อยจะกว้างขึ้น เป็นเหตุให้ $\varphi_{j,k}(t)$ แคบลงและมีลำดับชั้นในการเลื่อนเล็กลง ดังนั้นจึงสามารถแทนสัญญาณได้ละเอียดมากขึ้น สำหรับที่ค่า $j < 0$ ความกว้างของสเปซย่อยจะแคบลง สเกลลิงฟังก์ชัน $\varphi_{j,k}(t)$ มีขนาดกว้างขึ้นและมีลำดับชั้นในการเลื่อนกว้างขึ้นเป็นเหตุให้สามารถแทนสัญญาณได้ไม่ละเอียด

จากกฎข้อที่ (3) ของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด สเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด $j+1$ จะมีความถี่เป็นสองเท่าของสเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด j ดังนั้นจะสามารถนิยามสเกลลิงฟังก์ชัน $\varphi(t)$ ที่อยู่ใน V_0 ในรูปแบบของการรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ $\varphi(2t)$ ที่ถูกเลื่อนใน V_1 ได้ดังนี้

$$\varphi(t) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n) \quad (4.15)$$

โดยที่ $h_0(n)$ เป็นสัมประสิทธิ์ตัวกรองความถี่บางครั้งจะเรียกว่าตัวกรองสเกลลิง (scaling filter) และ $\sqrt{2}$ เป็นตัวนอร์มอลไลซ์ เพื่อให้สเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกสเกลด้วย 2 ยังคงเป็นนอร์มฟังก์ชัน (norm function) สมการนี้เรียกว่า dilation equation เนื่องจาก $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ เป็นออร์โธโนมัล ดังนั้น

สัมประสิทธิ์ $\{h_0(n)\}$ สามารถหาได้จากการคำนวณผลคูณภายใน (สมมติว่า φ เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง) จะได้

$$h_0(n) = \langle \varphi_{1n}, \varphi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(2t - n) dt \quad (4.16)$$

จากสมการนี้จะสามารถหาคุณสมบัติบางอย่างของสัมประสิทธิ์ $\{h_0(n)\}$ ได้ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการที่ 4.15 โดยใช้คุณสมบัติของสเกลลิงฟังก์ชัน ที่มีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่ง $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1 \right)$ จะได้

$$\sum_n h_0(n) = \sqrt{2} \quad (4.17)$$

ในทางตรงกันข้ามถ้าคูณทั้งสองข้างของสมการที่ 4.15 ด้วย $\varphi(t - l)$ แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t - l) dt &= 2 \sum_n \sum_{n'} h_0(n) h_0(n') \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - n') \varphi(2t - 2l - n) dt \\ &= \sum_n h_0(n) h_0(n + 2l) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ใช้คุณสมบัติออร์โธกอนัล (orthogonal) ของสเกลลิงฟังก์ชันจะได้

$$\sum_n h_0(n) h_0(n + 2l) = 0, \quad l \neq 0$$

$$\sum_n h_0(n) h_0(n + 2l) = \delta, \quad l = 0$$

นั่นคือ

$$\sum_n h_0^2(n) = 1, \quad l = 0 \quad (4.19)$$

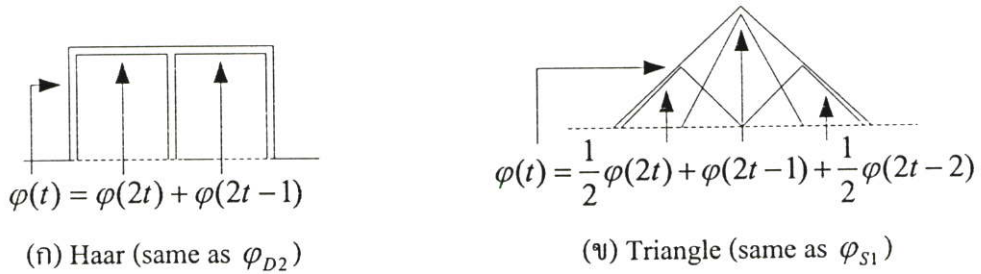
ตัวอย่างของสเกลลิงฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดคือสเกลลิงฟังก์ชันแบบ Haar (Haar scaling function) ซึ่งเป็นพัลส์ขนาด 1 หน่วยดังรูปที่ 4.4(ก) จะเห็นว่า $\varphi(2t)$ สามารถใช้ในการสร้างฟังก์ชัน ได้โดย

$$\varphi(t) = h_0(0)\sqrt{2}\varphi(2t) + h_0(1)\sqrt{2}\varphi(2t-1) \quad (4.20)$$

ดังนั้น $h_0(n)$ ในสมการที่ 4.20 จะต้องมีค่า $h_0(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_0(1) = 1/\sqrt{2}$ และตัวอย่างที่ 2 ดังรูปที่ 4.4(ข) เป็นสเกลลิงฟังก์ชันแบบสามเหลี่ยม (triangle scaling function) หรือสไปลน์อันดับที่ 1 (first order spline) สามารถสร้าง $\varphi(t)$ ได้โดย

$$\varphi(t) = h_0(0)\frac{1}{2}\varphi(2t) + h_0(1)\varphi(2t-1) + h_0(2)\frac{1}{2}\varphi(2t-2) \quad (4.21)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $h_0(n)$ ที่เป็นไปตามสมการที่ 4.21 คือ $h_0(0) = 1/2\sqrt{2}$, $h_0(1) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_0(2) = 1/2\sqrt{2}$



รูปที่ 4.4 Haar และ Triangle Scaling Function

4.2.3 ฟังก์ชันเวฟเลต (Wavelet function)

เมื่อพิจารณาสเปซย่อย $\{W_j\}$ ซึ่งเป็น detail spaces และแต่ละสเปซจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน จากสมการที่ 4.9

$$V_{j+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k$$

และให้ $j \rightarrow \infty$ จะได้ว่า

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k \quad (4.22)$$

จากสมการที่ 4.22 จะสามารถกระจาย $L^2(\mathbb{R})$ เป็นการบวกเชิงตั้งฉากของสเปซย่อย $\{W_j\}$ และในสเปซย่อย $\{W_j\}$ จะบรรจุฟังก์ชันพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}(t)\}_k$ โดยที่ $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$

ดังนั้น L^2 จะมีออร์โธนอร์มัล $\{\psi_{j,k}(t)\}_k$ ซึ่งถูกเรียกว่าเวฟเล็ต และเวฟเล็ต $\psi_{j,k}(t)$ ทั้งหมดจะถูกสร้างจากฟังก์ชัน $\psi(t)$ โดยการเลื่อนและการสเกล ซึ่งเรียกฟังก์ชัน $\psi(t)$ ว่า เวฟเล็ตแม่ (mother wavelet) หรือฟังก์ชันพื้นฐาน เพราะว่า $\psi(t-k)$ อยู่ใน W_0 และ $W_0 \subset V_1$ ดังนั้น $\psi(t)$ สามารถเขียนในแบบของ linear combination ของฟังก์ชันพื้นฐานจะได้

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \varphi(2t-n) \quad (4.23)$$

สมการนี้ถูกเรียกว่าสมการเวฟเล็ต (wavelet equation) และจากคุณสมบัติของ $\{\psi_{j,k}(t)\}$ ที่เป็นออร์โธนอร์มัล ดังนั้นสัมประสิทธิ์ $\{h_1(n)\}$ สามารถหาได้โดยการคำนวณผลคูณภายใน

$$h_1(n) = \langle \varphi_n, \psi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \varphi(2t-n) dt \quad (4.24)$$

จากสมการที่ 4.23 จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ $\{h_1(n)\}$ ได้ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการที่ 4.23 โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันเวฟเล็ต ที่มีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับศูนย์หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ จะได้

$$\sum_n h_1(n) = 0 \quad (4.25)$$

โดยที่ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ มีความสัมพันธ์กันดังสมการที่ 4.26 [15-16]

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(1-n) \quad (4.26)$$

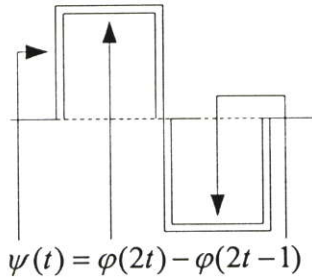
ตัวอย่างของเวฟเล็ตฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดคือ Haar wavelet function ดังรูปที่ 4.5(ก) จะเห็นว่า $\varphi(2t)$ สามารถใช้ในการสร้างฟังก์ชัน $\psi(t)$ ได้โดย

$$\psi(t) = h_1(0) \sqrt{2} \varphi(2t) + h_1(1) \varphi \sqrt{2}(2t-1) \quad (4.27)$$

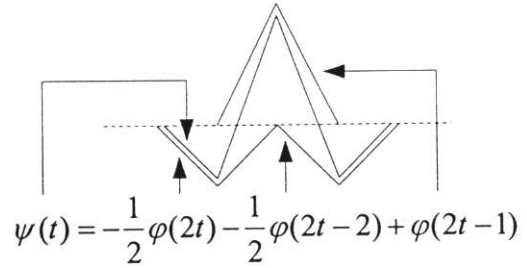
ดังนั้น $h_1(n)$ ในสมการที่ 4.27 จะต้องมีค่า $h_0(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_1(1) = -1/\sqrt{2}$ และตัวอย่างที่ 2 เป็น triangle wavelet function (first order spline) ดังรูปที่ 4.5 (ข) สามารถสร้าง $\varphi(t)$ ได้โดย

$$\psi(t) = \frac{1}{2}h_1(0)\varphi(2t) + h_1(1)\varphi(2t-1) + \frac{1}{2}h_1(2)\varphi(2t-2) \quad (4.28)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $h_1(n)$ ในสมการที่ 4.28 คือ $h_1(0) = 1/2\sqrt{2}$, $h_1(1) = 1/2\sqrt{2}$ และ $h_1(2) = 1/2\sqrt{2}$



(ก) Haar (same as ψ_{D2})



(ข) Triangle (same as ψ_{S1})

รูปที่ 4.5 แสดง Haar และ triangle function

4.3 การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย

จากความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การกระจายเวฟเล็ตที่ระดับสเกลต่ำในเทอมของการกระจายระดับการสเกลสูงสามารถหาได้โดยใช้สมการสเกลลิงฟังก์ชัน หรือสมการที่ 4.15 นั่นคือ

$$\varphi(t) = \sum_n h_0(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)$$

ถ้าสเกลและเลื่อนตัวแปรเวลา t ด้วย k จะได้

$$\begin{aligned} \varphi(2^j t - k) &= \sum_n h_0(n)\sqrt{2}\varphi(2^j t - k - n) \\ &= \sum_n h_0(n)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t - 2k - n) \end{aligned} \quad (4.29)$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $m = 2k + n$ จะได้

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_m h_0(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1}t - m) \quad (4.30)$$

ดังนั้นสเปซ V_j จะกลายเป็น

$$V_j = \overline{\text{Span}_k \{2^{j/2} \varphi(2^j t - k)\}} \quad (4.31)$$

แล้วสัญญาณ $f(t) \in V_{j+1}$ จะกลายเป็น

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - k) \quad (4.32)$$

ที่ระดับความละเอียดต่ำกว่า 1 ระดับ และใช้เวฟเล็ตฟังก์ชันแทนรายละเอียดหรือ $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ จะได้ว่า

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) + \sum_k d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (4.33)$$

ซึ่ง $2^{j/2}$ เป็นตัวนอร์มอลไลซ์ เพื่อให้สเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกสเกลด้วย 2^j ยังคงเป็น norm function ที่การสเกลต่างๆ ถ้า $\varphi_{j,k}(t)$ และ $\psi_{j,k}(t)$ เป็นออร์โธนอร์มัล สัมประสิทธิ์ของการสเกลที่ระดับ j หาได้โดยผลคูณภายใน

$$c_j(k) = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = \int f(t) 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) dt \quad (4.34)$$

แทนสมการที่ 4.30 ลงในสมการที่ 4.34 จะได้ว่า

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m - 2k) \int f(t) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - m) dt \quad (4.35)$$

เมื่อพิจารณาในเทอมที่อินทิเกรตในสมการที่ 4.35 ซึ่งเป็นผลคูณภายในของ $f(t)$ กับสเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับการสเกล $j+1$ นั่นคือ

$$c_{j+1}(m) = \int f(t) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - m) dt \quad (4.36)$$

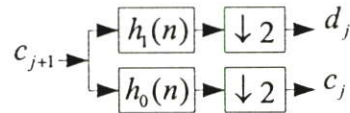
ดังนั้นจะได้

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \quad (4.37)$$

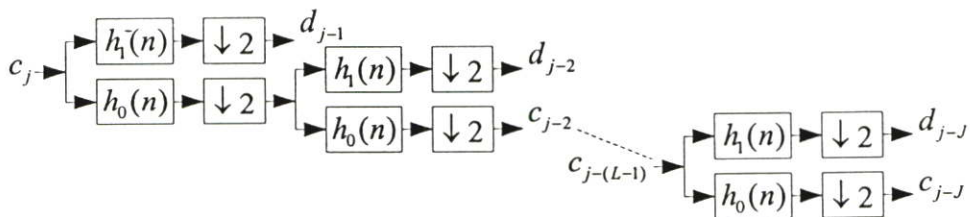
และสัมประสิทธิ์เวฟเล็ท $d_j(k)$ หาได้ในลักษณะเดียวกันกับ $c_j(k)$ จะได้

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m) \quad (4.38)$$

โดยที่ $c_j(k)$ ในสมการที่ 4.37 คือสัมประสิทธิ์สเกลลิงและ $d_j(k)$ ในสมการที่ 4.38 คือสัมประสิทธิ์เวฟเล็ท และการคำนวณหาค่า $c_j(k)$ และ $d_j(k)$ เรียกว่าการแปลงเวฟเล็ทแบบดิสครีท ซึ่ง h_0 และ h_1 ในสมการที่ 4.37 และสมการที่ 4.38 เป็นผลตอบสนองอิมพัลซ์ ดังนั้นในการแปลงเวฟเล็ทจากระดับความละเอียด $j+1$ ไปยังระดับความละเอียด j จะสามารถอธิบายด้วย Two-Band Analysis Filter Bank ได้ดังรูปที่ 4.6 และการแปลงเวฟเล็ทแบบเต็มหน่วยจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด J จะสามารถแสดงในรูปของ Octave Band Analysis Filter Bank ได้ดังรูปที่ 4.7

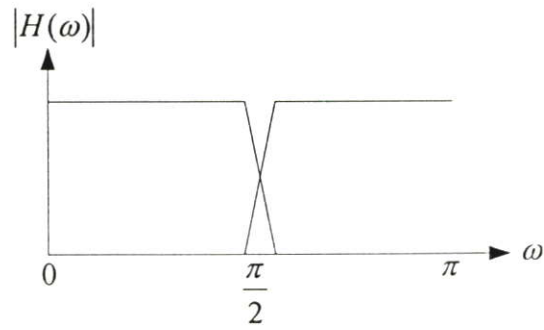


รูปที่ 4.6 แสดง Two-band Analysis Filter Bank ของการแปลงเวฟเล็ทจากระดับความละเอียด $j+1$ ไปยังระดับความละเอียด j



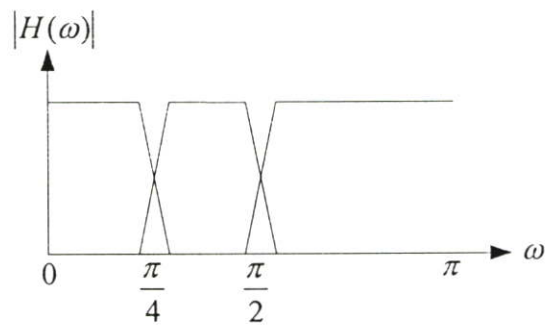
รูปที่ 4.7 แสดง Two-Band Analysis Filter Bank ของการแปลงเวฟเล็ทจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j+J$

โดยที่ $\downarrow 2$ แทนการลดอัตราสุ่ม (down sampling) ด้วยสองแต่ h_0 เป็นการกรองความถี่ต่ำผ่าน (lowpass filter) และ h_1 เป็นการกรองความถี่สูงผ่าน (highpass filter) ดังนั้นจะสามารถแสดงช่วงความถี่ (Frequency Band) ของการแปลงเวฟเล็ทในรูปที่ 4.8 ได้ดังนี้



รูปที่ 4.8 ช่วงความถี่ (Frequency Bands) ของการแปลงเวฟเล็ดจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j - J$

เมื่อพิจารณาการแปลงเวฟเล็ดจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j - 2$ หมายความว่าช่วงความถี่ในรูปที่ 4.8 ช่วงของความถี่ต่ำจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ช่วง คือความถี่ต่ำและความถี่สูง ดังนั้นช่วงความถี่ในรูปที่ 4.8 จะถูกเปลี่ยนดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 ช่วงความถี่ของการแปลงเวฟเล็ดจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j - 2$

4.4 การแปลงกลับเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วย

สัมประสิทธิ์ที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยในรูปที่ 4.7 คือ $\{d_{j-1}(k)\}, \{d_{j-2}(k)\}$ ไปจนถึง $\{d_{j-j}(k)\}$ และ $\{C_{j-j}(k)\}$ สามารถนำมาสร้างกลับได้อย่างสมบูรณ์ (Perfect reconstruction) ซึ่งการสร้างสัญญาณกลับคืนสามารถทำได้โดยการรวมกันของสัมประสิทธิ์สเกลลิงและสัมประสิทธิ์เวฟเล็ดที่ระดับความละเอียดต่ำไปยังที่ระดับความละเอียดสูง ซึ่งถ้าพิจารณาสัญญาณที่ถูกแทนในระดับความละเอียด $j + 1$ สัญญาณสามารถเขียนในเทอมของสเกลลิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f(t) = \sum_m c_{j+1}(m) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}t - m) \quad (4.39)$$

ถ้ามองจากระดับความละเอียดต่ำกว่า 1 ระดับแล้วจะเหมือนกับได้รวมรายละเอียดโดยใช้เวฟเล็คฟังก์ชันหรือ $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ จะได้

$$f(t) = \sum_k c_j(m) 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) + \sum_k d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (4.40)$$

เพราะว่าทุกฟังก์ชันเป็นออร์โธนอร์มัล ดังนั้นถ้าคูณสมการที่ 4.40 ด้วย $\varphi(2^{j+1}t - m)$ แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} \int f(t) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}t - m) dt &= \sum_k c_j(k) 2^{(j+1)/2} 2^{j/2} \int \varphi(2^{j+1}t - m) \varphi(2^j t - k) dt \\ &+ \sum_k d_j(k) 2^{(j+1)/2} 2^{j/2} \int \varphi(2^{j+1}t - m) \psi(2^j t - k) dt \end{aligned}$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = 2^{j+1}t - k$ จะได้

$$\begin{aligned} \int f(t) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1}t - m) dt &= \sum_k c_j(k) \sqrt{2} \int \varphi(2u - (m - 2k)) \varphi(u) du \\ &+ \sum_k d_j(k) \sqrt{2} \int \varphi(2u - (m - 2k)) \psi(u) du \end{aligned} \quad (4.41)$$

จากสมการที่ 4.16 $h_0(n) = \langle \varphi_n, \varphi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(2t - n) dt$ และจากสมการที่ 4.24 $h_1(n) = \langle \varphi_n, \psi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \varphi(2t - n) dt$ ดังนั้นเทอมขวามือของสมการที่ 4.41 จะกลายเป็น

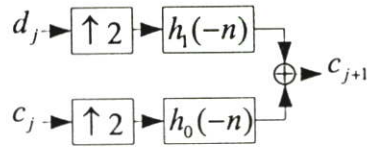
$$\sqrt{2} \int \varphi(2u - (m - 2k)) \varphi(u) du = h_0(m - 2k)$$

$$\sqrt{2} \int \varphi(2u - (m - 2k)) \psi(u) du = h_1(m - 2k)$$

และแทนสมการที่ 4.36 ลงในสมการที่ 4.41 จะได้

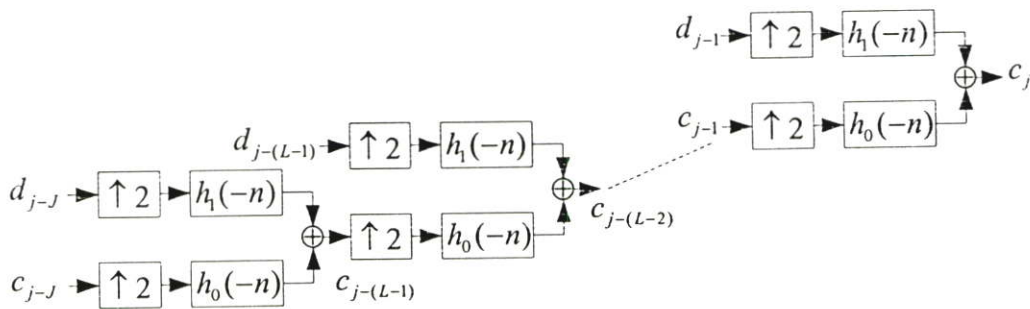
$$c_{j+1}(m) = \sum_k c_j(k) h_0(m - 2k) + \sum_k d_j(k) h_1(m - 2k) \quad (4.42)$$

จากสมการที่ 4.42 สามารถแสดงในรูปของ Two-Band Synthesis Filter Bank ได้ดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 แสดง Two-Band Synthesis Filter Bank ของการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j+1$

โดยที่ $\uparrow 2$ แทนเพิ่มอัตราสุ่ม (up sampling) ด้วยสองและการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด $j-J$ ไปยังระดับความละเอียด j สามารถแสดงเป็น Octave-Band Synthesis Filter Bank ได้ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 แสดง Octave-Band Synthesis Filter Bank ของการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด $j-J$ ไปยังระดับความละเอียด j

4.5 ตระกูลของออร์โธโกนัลเวฟเล็ต

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นว่าสัญญาณหรือฟังก์ชันสามารถกระจายในรูปแบบของการรวมเชิงเส้น (linear combination) ซึ่งมีเวฟเล็ตเป็นฟังก์ชันพื้นฐานได้ แต่เวฟเล็ตยังสามารถแบ่งย่อยตามลักษณะคุณสมบัติเชิงตั้งฉากออกเป็น 4 ประเภทใหญ่ๆ คือ

(1) ออร์โธโกนัลเวฟเล็ต (Orthogonal Wavelet) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็นออร์โธโกนัลจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in Z$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายใน (inner product) ของเวฟเล็ตจะเป็นหนึ่งเมื่อเป็นเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้น

(2) เซมิออร์โธกอนัลเวฟเล็ต (Semi-orthogonal Wavelet) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็น เซมิออร์โธกอนัลจะมีเงื่อนไข

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0 \quad j \neq l \quad ; j, l, k, m \in Z$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายในของเวฟเล็ตจะเป็นศูนย์เมื่อเป็นเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดต่างกันและจะเป็นศูนย์หรือหนึ่งก็ได้ถ้าเป็นเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดเดียวกัน

(3) นอนออร์โธกอนัลเวฟเล็ต (Nonorthogonal Wavelet) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็นนอนออร์โธกอนัลหมายถึงเวฟเล็ตที่ไม่เป็นเซมิออร์โธกอนัล

(4) ไบออร์โธกอนัลเวฟเล็ต (Bi-orthogonal Wavelet) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็นไบออร์โธกอนัลจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in Z$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายในของเวฟเล็ตกับ dual basis: $\tilde{\psi}_{l,m}$ จะเป็นหนึ่งเมื่ออยู่ที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้นนอกจากนั้นจะเป็นศูนย์

ดังนั้นจะเห็นว่าเวฟเล็ตที่ได้กล่าวในตอนต้นของบทนี้เป็นออร์โธกอนัลเวฟเล็ต ซึ่งเมื่อพิจารณาฟังก์ชันพื้นฐานของออร์โธกอนัลเวฟเล็ต หรือที่เรียกว่าออร์โธโนมัลเวฟเล็ตยังสามารถแบ่งตามลักษณะของฟังก์ชันพื้นฐานได้อีก ซึ่งตระกูลออร์โธโนมัลเวฟเล็ตที่สำคัญได้แก่ Daubechies, Symmlet และ Coiflet โดยที่เวฟเล็ตตระกูล Daubechies มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ Asymmetric เวฟเล็ตตระกูล Symmlet มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ Least Asymmetric และเวฟเล็ตตระกูล Coiflet มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ nearly Symmetric นอกจากนี้แต่ละตระกูลยังสามารถแบ่งตามลักษณะความราบเรียบของฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งกำหนดโดยค่าของ Number of Vanishing Moments (NVM) [15-16] โดยที่ Daubechies Wavelet จะนิยามโดย

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.43)$$

หรือมองในสเปซฟูเรียร์จะได้

$$\left. \frac{d^l \tilde{\psi}(\omega)}{d\omega^l} \right|_{\omega=0} = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.44)$$

ถ้าค่า l มากขึ้นจะทำให้ฟังก์ชันพื้นฐานมีความราบเรียบมากขึ้น ตัวอย่างของฟังก์ชันพื้นฐานของออร์โธนอร์มัลเวฟเล็ตทั้งฟังก์ชันพื้นฐานสเกลลิงและฟังก์ชันพื้นฐานเวฟเล็ต

แต่ในการประยุกต์ใช้งานนั้น ส่วนใหญ่จะไม่ใช้สเกลลิงฟังก์ชัน หรือเวฟเล็ตฟังก์ชัน โดยตรงแต่จะใช้สัมประสิทธิ์ผลตอบสนองอิมพัลซ์ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ จากเงื่อนไขของ $h_0(n)$ ในสมการที่ 4.17 และสมการที่ 4.19 จะสามารถหาสัมประสิทธิ์ $h_0(n)$ NVM=2 ได้คือ

$$\begin{aligned} h_0(0) + h_0(1) &= \sqrt{2} \\ h_0^2(0) + h_0^2(1) &= 1 \end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ $h_0(0) = h_0(1) = 1/\sqrt{2}$ ซึ่งเป็น $h_0(n)$ ของเวฟเล็ตตระกูล Daubechies NVM=2 และจากสมการที่ 4.26 จะได้ $h_1(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_1(1) = -1/\sqrt{2}$

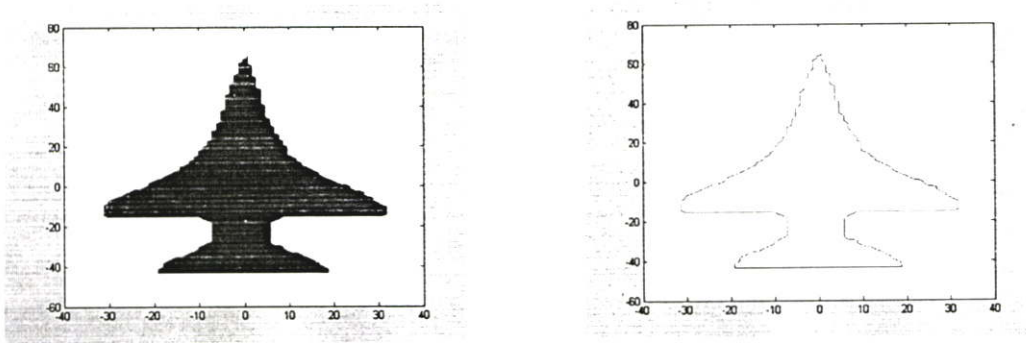
บทที่ 5

ขั้นตอนที่ใช้ในการลงทะเบียนภาพ

5.1 บทนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงวิธีการที่ใช้ลงทะเบียนภาพ รวมถึงขั้นตอนต่างๆที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้แก่การหาคอนทัวร์ของภาพด้วยวิธีคอนทัวร์ฟอลโลเวอร์ (Contour Follower) การแทนเส้นโค้งด้วยบีสไปไลน์ การหาค่าความโค้งสูงสุด และการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพ โดยการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย เพื่อใช้ในการลงทะเบียนภาพ

5.2 การหาคอนทัวร์ของภาพด้วยวิธีคอนทัวร์ฟอลโลเวอร์(Contour Follower)



รูปที่ 5.1 ภาพต้นฉบับและคอนทัวร์ที่หาได้จากวิธีคอนทัวร์ฟอลโลเวอร์

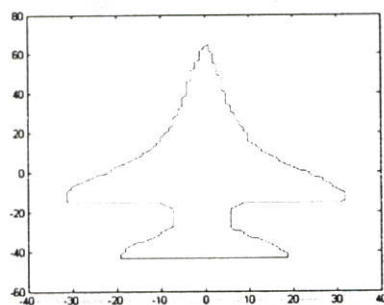
คอนทัวร์ฟอลโลเวอร์เป็นวิธีการหาขอบภาพวิธีหนึ่งซึ่งให้พิกัดของขอบภาพนั้นเป็นผลลัพธ์ โดยอัลกอริทึมที่ใช้สามารถเข้าใจได้ง่ายและประมวลผลได้อย่างรวดเร็ว

โดยหลักการของคอนทัวร์ฟอลโลเวอร์นั้น ขอบภาพคือพิกเซลที่แบ่งแยกระหว่างส่วนที่เป็นวัตถุและส่วนนอกวัตถุ โดยพิจารณาจากค่าระดับสีที่เกินกว่าค่าเทรชโฮลที่กำหนด และมีขั้นตอนในการหาขอบภาพในทิศทางตามเข็มนาฬิกาดังนี้

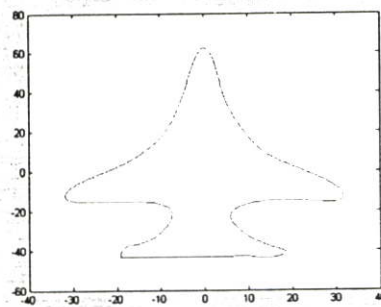
1. กำหนดให้จุดบนสุดของขอบภาพเป็นจุดเริ่มต้นของขอบภาพ
2. จากนั้นจะพิจารณาว่าจุดใดเป็นจุดต่อไป โดยพิจารณาพิกเซลที่ติดอยู่กับจุดเริ่มต้นบนขอบภาพทางด้านซ้าย พิจารณาค่าที่พิกเซลนั้นว่าเป็นจุดภายในวัตถุหรือไม่ ถ้าใช่จะถือว่าพิกเซลนั้นเป็นจุดที่สองบนขอบภาพ หากไม่ใช่จะพิจารณาจุดที่ติดกันตามทิศทางตามเข็มนาฬิกา
3. ทำซ้ำในขั้นตอนที่ 2 จนกว่าจะได้จุดต่ำสุดบนขอบภาพมีค่าเท่ากับจุดเริ่มต้นบนขอบภาพจะได้เส้นรอบวงปิดของขอบภาพนั้นๆ

5.3 การแทนเส้นโค้งด้วยบีสไปลน์

ทำการแทนเส้นขอบภาพที่หาได้จากวิธีคอนทัวร์โฟลโลเวอร์ ด้วยการประมาณเส้นโค้งบีสไปลน์ โดยกำหนดให้มีคิกริของเส้นโค้งบีสไปลน์เป็น 3 โดยกำหนดจำนวนจุดควบคุม(Control points) ต่อจำนวนข้อมูลของเส้นขอบ [17-18] เป็น 10:1 โดยประมาณและเลือกใช้พารามิเตอร์แบบพื้นที่ (Area Parameter) และสร้างเส้นโค้งใหม่ให้มีจำนวนจุดเป็น 2^j จุดสำหรับเวฟเล็ตแม่แบบ Haar หรือ $2^j + 3$ จุดสำหรับเวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์ โดยที่ j ก็ระดับของการแปลงเวฟเล็ต เพื่อให้เส้นโค้งใหม่ที่ได้มีจำนวนจุดที่เท่ากัน และสามารถทำการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยได้



(ก)



(ข)

รูปที่ 5.2 (ก) ก่อนการประมาณ (ข) หลังจากการประมาณด้วยบีสไปลน์

5.4 การหาเลนมาร์ค

การหาเลนมาร์คเริ่มจากการหาจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด เพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นที่สอดคล้องกันของคอนทัวร์ของขอบภาพทั้งสอง จากนั้นทำการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลง ด้วยการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย

5.4.1 จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด (Maximum Curvature Points)

กำหนดให้ $r(t) = [x(t), y(t)]$ แทนเส้นโค้ง C ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เมื่อ t เป็นพารามิเตอร์แบบ Chord length จะได้ความโค้งของเส้นโค้ง C ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $k(t)$ ดังสมการที่ 5.1

$$k(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t)|^3} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}} \quad (5.1)$$

เมื่อ $r'(t)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเส้นโค้งบีสไปลน์

$r''(t)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่สองของเส้นโค้งบีสไปลอน์

$\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ เป็นตำแหน่งพิกัดของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเส้นโค้งบีสไปลอน์

$\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$ เป็นตำแหน่งพิกัดของอนุพันธ์อันดับที่สองของเส้นโค้งบีสไปลอน์

และให้ $C_a = r_a(\tau)$ แทนเส้นโค้งที่ถูกแปลงแอฟไฟน์ เมื่อ τ เป็นพารามิเตอร์ จะได้ความสัมพันธ์ของเส้นโค้ง C และ C_a เป็น

$$\begin{bmatrix} x_a(\tau) \\ y_a(\tau) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

เมื่อ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ จะมีค่าขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ของการหมุน สเกลและการเลื่อน และ b_1, b_2 เป็นพารามิเตอร์สำหรับการเลื่อน ในทำนองเดียวกันจะให้ความโค้งของเส้นโค้ง C_a ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $k_a(\tau)$

จากคุณสมบัติของการแปลงแอฟไฟน์จะได้

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_a(t) & \ddot{x}_a(t) \\ \dot{y}_a(t) & \ddot{y}_a(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

หรือ

$$|r'_a(t) \times r''_a(t)| = |a| \cdot |r'(t) \times r''(t)| \quad (5.4)$$

เส้นโค้ง

$$C: \quad k(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t)|^3} = 0 \quad (5.5)$$

ดังนั้น

$$|r'(t) \times r''(t)| = 0$$

เส้นโค้ง

$$C_a: \quad k_a(\tau) = \frac{r'_a(\tau) \times r''_a(\tau)}{|r'_a(\tau)|^3} = 0 \quad (5.6)$$

ดังนั้น

$$|r'_a(\tau) \times r''_a(\tau)| = 0$$

แทนสมการที่ 5.4 ในสมการที่ 5.6 จะได้

$$|a| \cdot |r'(t) \times r''(t)| = 0 \quad (5.7)$$

$$\therefore |r'(t) \times r''(t)| = 0$$

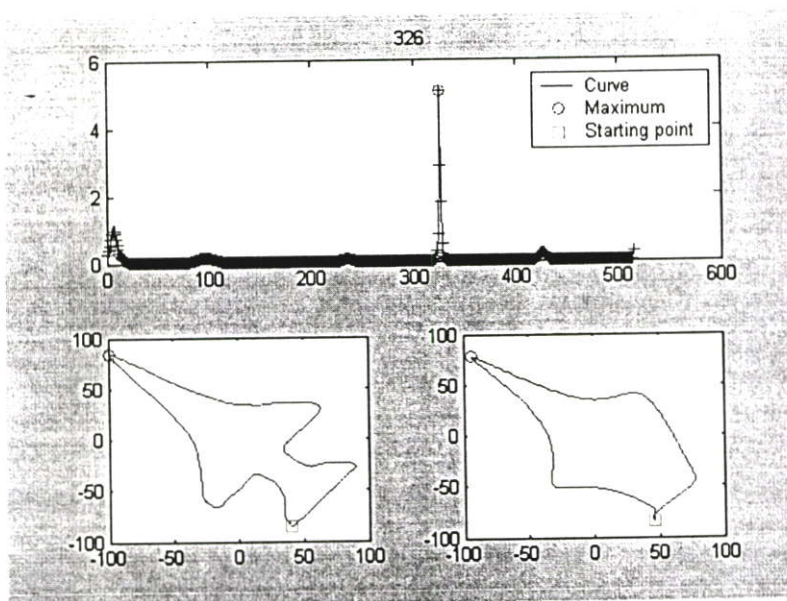
จะเห็นว่าสมการที่ 5.6 เท่ากันกับสมการที่ 5.7 ดังนั้นจุดเปลี่ยนเว้าจึงมีคุณสมบัติไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์

จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดของเส้นโค้ง C สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการที่ 5.1 และพิจารณาดำเนินการที่ให้ค่าเป็นศูนย์ ดังสมการที่ 5.8

$$|r^{(3)}(t)|^3 |r^{(1)}(t) \times r^{(2)}(t)|^{(1)} - |r^{(1)}(t) \times r^{(2)}(t)| \left(|r^{(3)}(t)|^3 \right)^{(1)} = 0 \quad (5.8)$$

ในการทำงานเดียวกันจะได้ค่าความโค้งสูงสุดของเส้นโค้ง C_a หาได้ดังสมการที่ 5.9

$$|r_a^{(3)}(t)|^3 |r_a^{(1)}(t) \times r_a^{(2)}(t)|^{(1)} - |r_a^{(1)}(t) \times r_a^{(2)}(t)| \left(|r_a^{(3)}(t)|^3 \right)^{(1)} = 0 \quad (5.9)$$



รูปที่ 5.3 จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดของภาพที่แปลงแอฟฟีน

จากสมการที่ 5.8 และสมการที่ 5.9 หาคำนวนของเส้นโค้ง $r^{(n)}(t)$ และ $r_a^{(n)}(t)$ ได้จากการประมาณเส้นโค้งด้วยบีสไปนัล ดีกรี 3 โดยกำหนดจุดควบคุมจำนวน 10 จุด จะได้จุดที่มีส่วนโค้งสูงสุด ดังรูปที่ 5.3

5.4.2 การลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพ

หลังจากได้จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดของเส้นโค้งแล้ว จะทำการย้ายจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพมายังจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด จากนั้นทำการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพโดยการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยกับสมการที่ 5.2 สัญญาณที่ผ่านตัวกรองความถี่ต่ำถูกเรียกว่าสัญญาณโดยประมาณ (Approximation Signal) ซึ่งเป็นตัวแทนของสัญญาณอินพุต และสัญญาณรายละเอียด (Detail Signal) จะผ่านตัวกรองความถี่สูงผ่าน จากคุณสมบัติเชิงเส้นของการแปลง จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประมาณของสัญญาณ A_j และค่ารายละเอียดของสัญญาณ W_j ของ x_a, y_a, x , และ y ที่ระดับความละเอียด j จะได้ดังสมการที่ 5.10 และ 5.11 [19]

$$A_j x_a = a_{11} A_j x + a_{12} A_j y + 2^{\frac{j}{2}} b_1 \quad (5.10)$$

$$A_j y_a = a_{21} A_j x + a_{22} A_j y + 2^{\frac{j}{2}} b_2$$


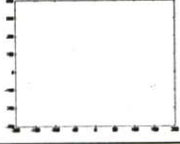
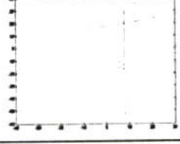
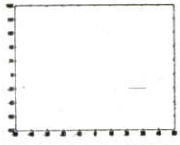
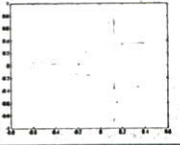
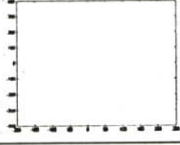
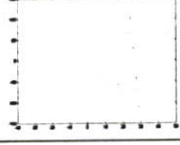
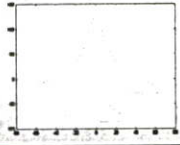
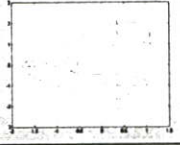
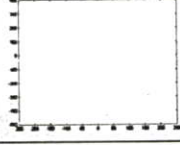
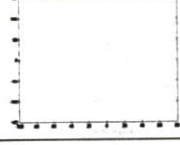
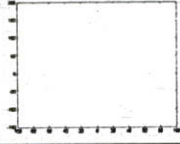
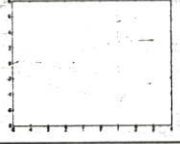
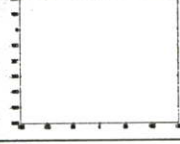
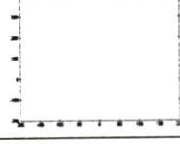
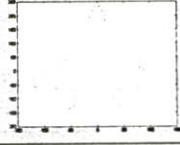
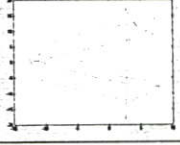
$$W_j x_a = a_{11} W_j x + a_{12} W_j y \quad (5.11)$$

$$W_j y_a = a_{21} W_j x + a_{22} W_j y$$

จากสมการด้านบนจะเห็นว่าในส่วนของค่าประมาณของสัญญาณ จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของคอนทัวร์บนภาพ แต่ค่ารายละเอียดของสัญญาณจะไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของคอนทัวร์ ดังนั้นถ้าเซ็นทรอยของภาพถูกย้ายมาที่จุดศูนย์กลางจะทำให้ค่า $b_1 = b_2 = 0$ จะได้สมการใหม่ดังสมการที่ 5.12

$$\begin{bmatrix} A_j x_a & W_j x_a \\ A_j y_a & W_j y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j x & W_j x \\ A_j y & W_j y \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

ทำการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพโดยการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยลงที่ระดับความละเอียดที่ต้องการ จากนั้นนำจุดที่ได้เป็นจุดแลนมาร์คสำหรับหาเมตริกซ์ของการแปลงรูปที่ 5.4 ผลการลดระดับความละเอียดโดยใช้เวฟเลตแม่แบบ Haar ทำการลดระดับความละเอียดจาก 512 จุด ที่ระดับความละเอียด $j=9$ ลงมาที่ระดับความละเอียด $j=1$

ระดับ (j)	สัญญาณที่ ประมาณ	สัญญาณ รายละเอียด	ระดับ (j)	สัญญาณที่ ประมาณ	สัญญาณ รายละเอียด
9			4		
8			3		
7			2		
6			1		
5					

รูปที่ 5.4 การลดระดับความละเอียดด้วยการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วย เวฟเล็ดแม่แบบ Haar

จากการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลง เราสามารถที่จะเลือกจำนวนจุดที่จะใช้เป็นแลนมาร์ค เพื่อใช้ในการหาเมตริกซ์ของการแปลงในการลงทะเบียนภาพ ซึ่งในการทดลองจะเลือกใช้ 4 จุดสำหรับเวฟเล็ดแม่แบบ Haar และ 5 จุดสำหรับเวฟเล็ดแม่แบบปีสไปล์น ซึ่งเพียงพอสำหรับการแปลงแอฟฟายน์ [4]

5.5 หาเมตริกซ์ของการแปลง

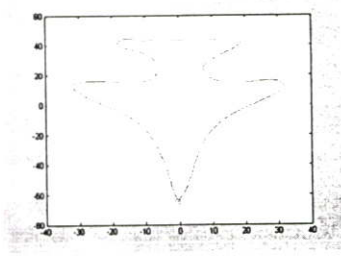
สำหรับภาพที่ถูกแปลงแบบเชิงเส้นสามารถหาเมตริกซ์ของการแปลงได้จากการแก้สมการ Normal Equation

$$AX = Y \quad (5.13)$$

$$A^T AX = A^T Y \quad (5.14)$$

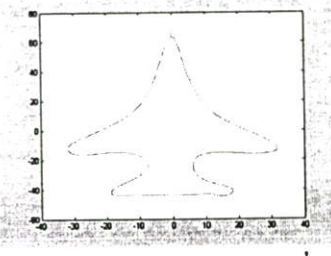
$$X = (A^T A)^{-1} \cdot (A^T Y) \quad (5.15)$$

เมื่อ X คือเมตริกซ์ของการแปลง และ A, Y เป็นจุดสอดคล้องบนภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลงตามลำดับ จะหาค่า X จากสมการที่ 5.14 (Normal Equation) โดยจำนวนจุดสอดคล้องต่ำสุดมีค่าขึ้นกับรูปแบบของการแปลง ดังตารางที่ 5.1 [4]



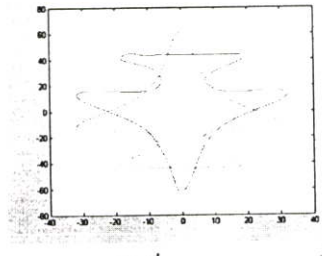
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพ

อ้างอิง



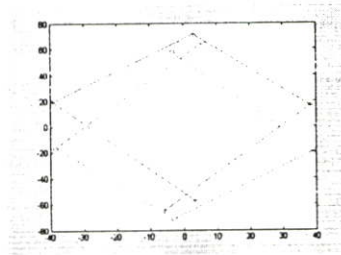
(ข) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะ

นำมาลงทะเบียน



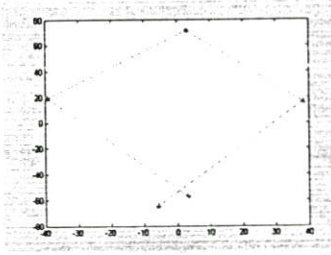
(ค) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะ

ลงทะเบียน



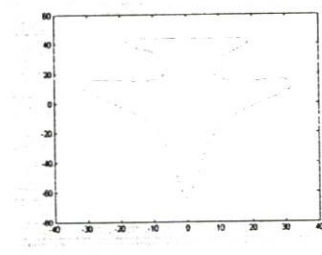
(ง) ผลการลงทะเบียนความ

ละเอียด



(จ) ผลการลงทะเบียนภาพที่

ระดับที่ 1



(ฉ) ผลการลงทะเบียนภาพ

รูปที่ 5.5 ผลของขอบภาพจากการลงทะเบียนภาพ

ตารางที่ 5.1 แสดงจำนวนจุดสอดคล้องสำหรับการหาเมตริกซ์ของการแปลงแบบต่างๆ [4]

รูปแบบการแปลง	จำนวนจุดสอดคล้องต่ำสุด
สิมิลาริตี้	2
แอฟฟายน์	3
เพอร์สเปกทีฟ	4

5.6 ค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพ

ค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพหาได้จากผลรวมของระยะทางที่สั้นที่สุด ระหว่างขอบของผลภาพที่ได้จากการลงทะเบียนเทียบกับภาพต้นฉบับ (ภาพอ้างอิง) ดังสมการที่ 5.16 จะได้ว่าค่า *Error* เป็นระยะทางที่ผิดพลาดไปโดยเฉลี่ยต่อหนึ่งพิกเซลนั่นเอง

$$Error = \frac{\sum_{i=1, j=1}^n \min |P_i - P_j|}{n} \quad (5.16)$$

เมื่อ P_i, P_j เป็นจุดบนขอบภาพต้นฉบับและผลภาพที่ได้จากการลงทะเบียนตามลำดับ n เป็นจำนวนจุดบนขอบภาพ

บทที่ 6

ผลการทดลอง

6.1 บทนำ

การทดลองถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนตามลักษณะภาพและวัตถุประสงค์ของงาน ได้แก่ การทดลองที่ 1 การลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพ ประกอบด้วยการทดลองผลกระทบเนื่องจากการแปลง การทดลองผลกระทบเนื่องจากการเลื่อนจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ และการทดลองผลกระทบเนื่องจากสัญญาณรบกวน การทดลองที่ 2 การหาจุดที่มีความโค้งสูงสุดจากภาพสองมิติ การทดลองที่ 3 การลงทะเบียนภาพของภาพดำวัตถุจริง และการทดลองที่ 4 การจำแนกปลา

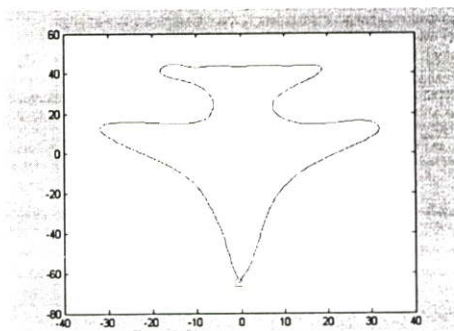
6.2 การลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพ

6.2.1 การทดลองผลจากการแปลงทางเรขาคณิต

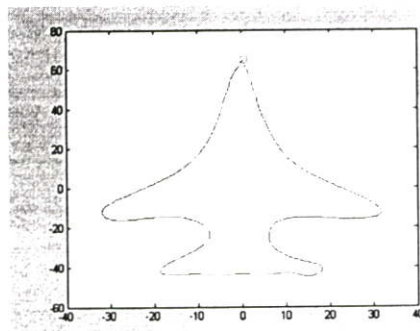
การทดลองนี้จะทำการลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงแบบต่างๆ ที่มีจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพเป็นจุดเดียวกัน และมีจุดของคอนทัวร์ของขอบภาพจำนวน 515 จุด โดยเลือกใช้เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปไลน์ ลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลงที่ระดับที่ 1 จะได้จุดแลนมาร์กจำนวน 5 จุด เพื่อศึกษาความเป็นไปได้ของการประยุกต์ใช้การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยมาใช้ในการลงทะเบียนภาพ กับภาพที่แปลงแบบต่างๆ

6.2.1.1 การแปลงรีจิด

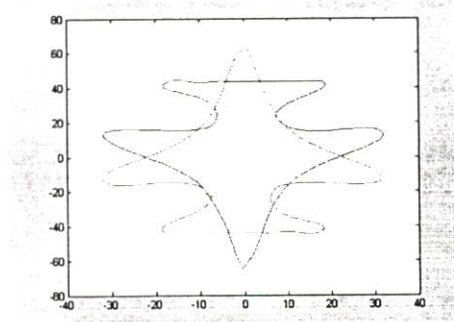
การทดลองจะทำการลงทะเบียนภาพ จากคอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิงกับคอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงรีจิด คอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิงดังแสดงในรูปที่ 6.1ก คอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงรีจิดที่ถูกหมุน 180 องศาแสดงในรูปที่ 6.1ข คอนทัวร์ของขอบภาพทั้งสองที่จะทำการลงทะเบียนภาพดังแสดงในรูปที่ 6.1ค ผลของการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ระดับความละเอียดที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 6.1ง ผลของการลงทะเบียนภาพที่ระดับความละเอียดที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 6.1จ และผลของการลงทะเบียนภาพดังแสดงในรูปที่ 6.1ฉ



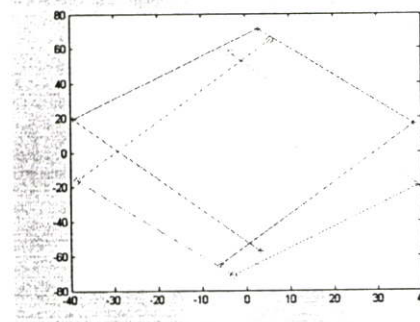
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิง



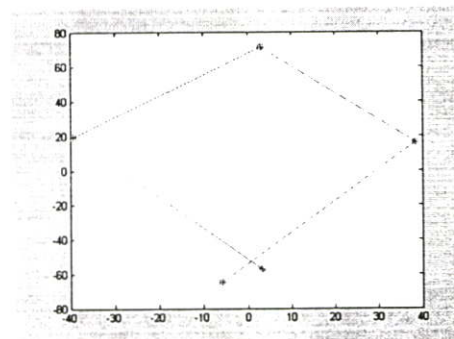
(ข) คอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงรีจิด



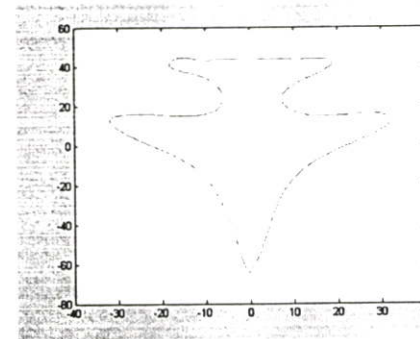
(ค) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ง) ผลการลดระดับความละเอียด



(จ) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1

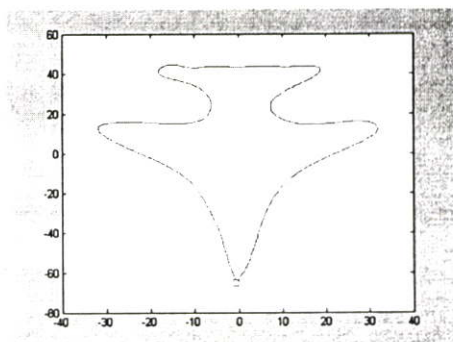


(ฉ) ผลการลงทะเบียนภาพ

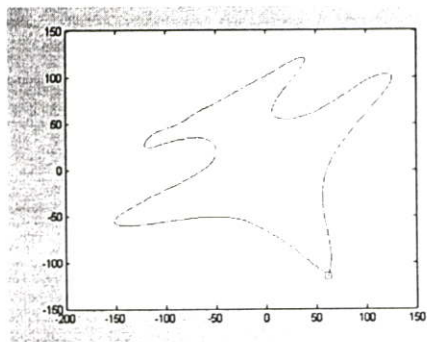
รูปที่ 6.1 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงรีจิด

6.2.1.2 การแปลงสมิลาไรตี้

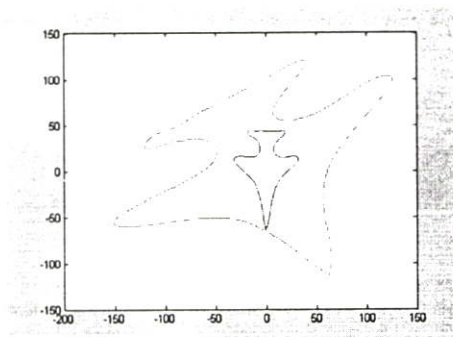
การทดลองจะทำการลงทะเบียนภาพ จากคอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิงกับคอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงสมิลาไรตี้ คอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิงดังแสดงในรูปที่ 6.2ก คอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงสมิลาไรตี้ถูกหมุน 30 องศา ช่องทางแกน $x = 5$ เท่า และช่องทางแกน $y = 2$ เท่าดังแสดงในรูปที่ 6.2ข คอนทัวร์ของขอบภาพทั้งสองที่จะทำการลงทะเบียนภาพดังแสดงในรูปที่ 6.2ค ผลของการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ระดับความละเอียดที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 6.2ง ผลของการลงทะเบียนภาพที่ระดับความละเอียดที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 6.2จ และผลของการลงทะเบียนภาพดังแสดงในรูปที่ 6.2ฉ



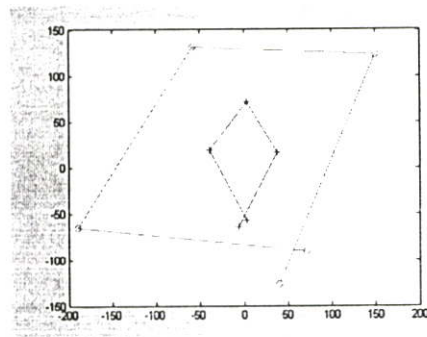
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิง



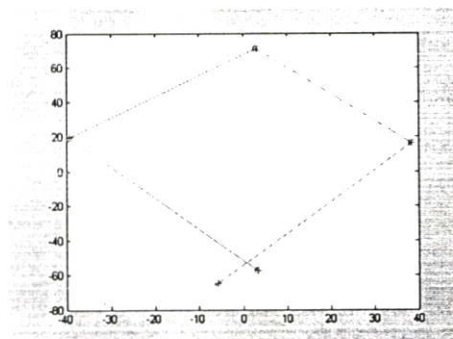
(ข) คอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงสิมิลาริตี้



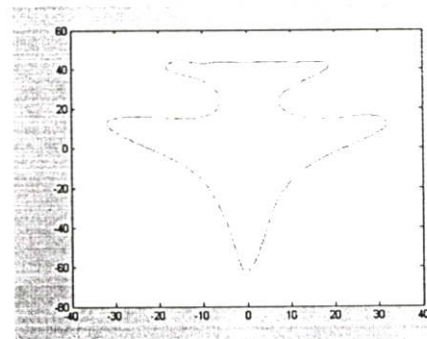
(ค) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ง) ผลการลดระดับความละเอียด



(จ) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1

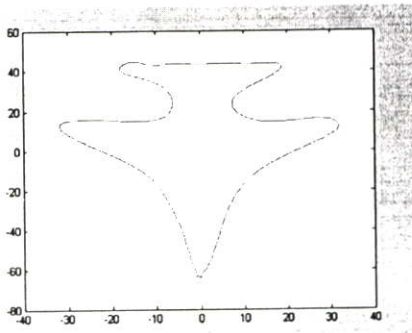


(ฉ) ผลการลงทะเบียนภาพ

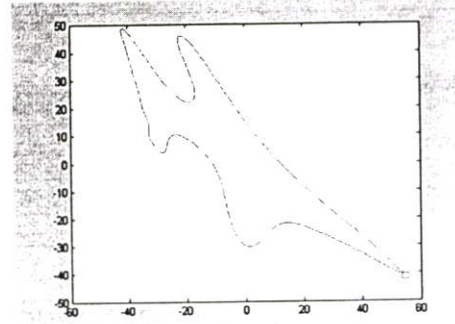
รูปที่ 6.2 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงสิมิลาริตี้

6.2.1.3 การแปลงแอฟไฟน์

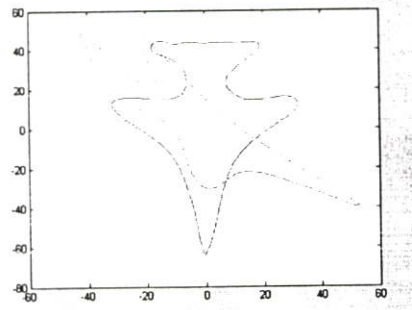
การทดลองจะทำการลงทะเบียนภาพ จากคอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิงกับคอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงแอฟไฟน์ คอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิงดังแสดงในรูปที่ 6.3ก คอนทัวร์ของขอบภาพแปลงแอฟไฟน์ที่ถูกหมุน 70 องศา เหนือทางแกน $x = 0.3$ และเหนือทางแกน $y = 0.7$ ดังแสดงในรูปที่ 6.3ข คอนทัวร์ของขอบภาพทั้งสองที่จะทำการลงทะเบียนภาพดังแสดงในรูปที่ 6.3ค ผลของการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ระดับความละเอียดที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 6.3ง ผลของการลงทะเบียนภาพที่ระดับความละเอียดที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 6.3จ และผลของการลงทะเบียนภาพดังแสดงในรูปที่ 6.3ฉ



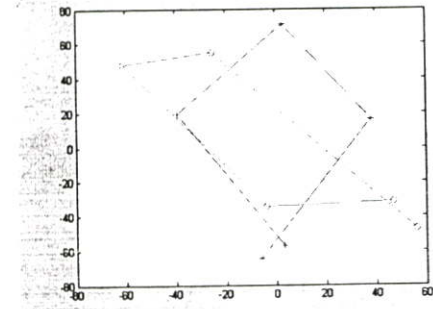
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิง



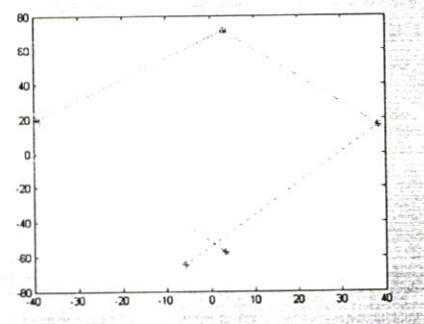
(ข) คอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงแอฟเฟน



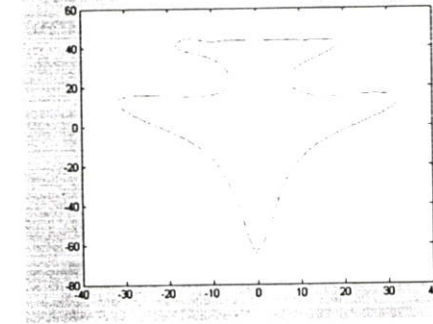
(ค) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ง) ผลการลดระดับความละเอียด



(จ) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1



(ฉ) ผลการลงทะเบียนภาพ

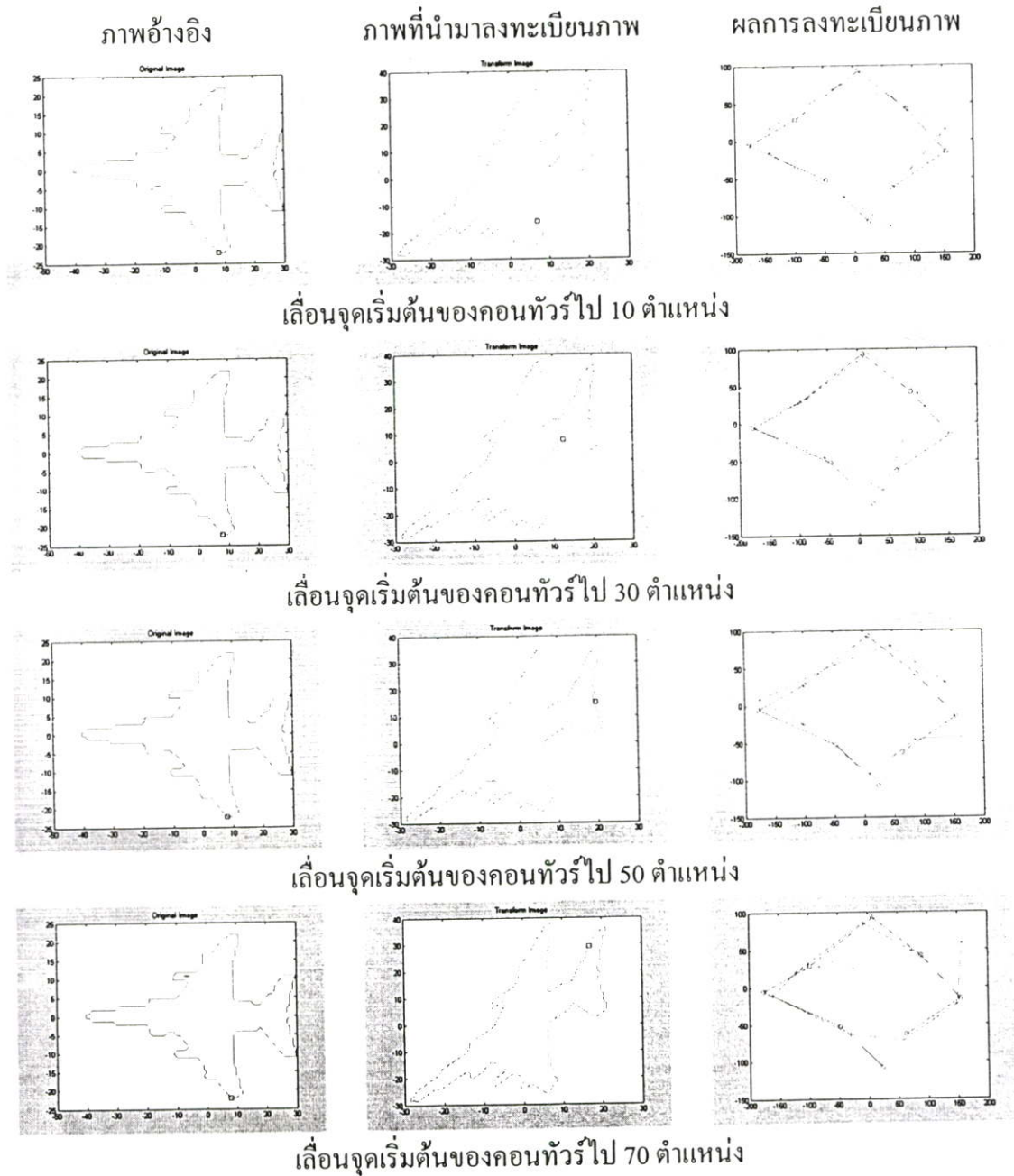
รูปที่ 6.3 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพที่แปลงแอฟเฟน

จากการทดลองจะเห็นว่า การลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลง โดยการแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยนั้น ข้อมูลที่ได้ที่ระดับความละเอียดที่ต่ำลงมา สามารถใช้เป็นจุดแลนมาร์คในการหาเมตริกซ์ของการแปลง เพื่อใช้ในการลงทะเบียนภาพได้ และสามารถใช้ได้กับภาพที่ถูกแปลงแบบรีจิด, แบบสิมิลาริตี และแบบแอฟเฟน

6.2.2 การทดลองผลจากการเลื่อนตำแหน่งจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ

การทดลองการลงทะเบียนภาพโดยใช้การแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วย กับคอนทัวร์ของขอบภาพ ที่มีจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ที่ต่างกันของคอนทัวร์ของขอบภาพอ้างอิงกับคอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน โดยทำการเลื่อนตำแหน่งของจุดเริ่มต้นดังแสดงดังรูปที่ 6.4 จุดสี่เหลี่ยม

บนภาพแสดงตำแหน่งของจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพนั้น การทดลองนี้เพื่อศึกษาผลของการลงทะเบียนภาพจากการที่มีจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ไม่สอดคล้องกัน



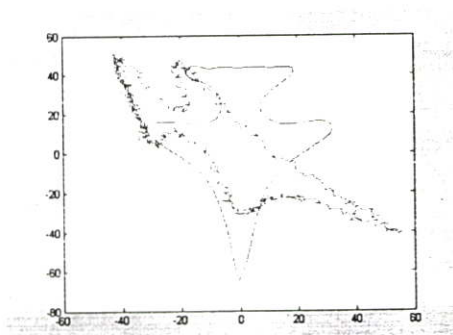
รูปที่ 6.4 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพที่ตำแหน่งจุดเริ่มต้น ต่างกัน

จากผลการทดลองจะเห็นว่า การที่จุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพไม่เป็นจุดเดียวกัน จะทำให้ข้อมูลที่ได้จากการลดระดับความละเอียด ด้วยการแปลงเวฟเล็ทแบบเต็มหน่วยนั้น ไม่สอดคล้องกัน แลนมาร์คที่ได้ก็ไม่มีความสัมพันธ์กัน เป็นผลให้การลงทะเบียนภาพมีความผิดพลาด

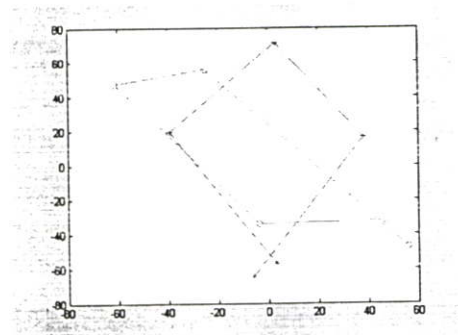
ฉะนั้นจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ จะมีผลต่อความถูกต้องในการลงทะเบียนภาพ โดยใช้การแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วย

6.2.3 การทดลองผลจากสัญญาณรบกวน

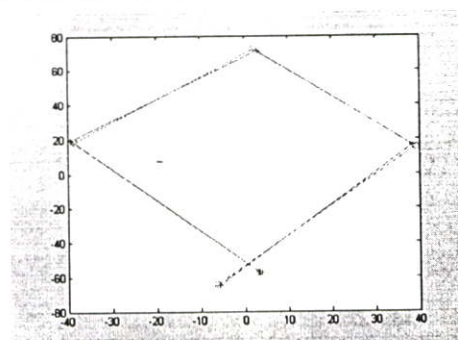
การทดลองได้ทำการเพิ่มสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนไวท์นอยส์(Gaussian white noise) กับคอนทัวร์ของขอบภาพที่ถูกแปลงแอฟไฟน์ เพื่อจะทดสอบคุณสมบัติที่ทนต่อสัญญาณรบกวนของการใช้การแปลงเวฟเล็ดแบบเต็มหน่วยในการลงทะเบียนภาพ โดยคอนทัวร์ของขอบภาพที่ใช้ในการทดลองจะมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน และมีจำนวนจุดของคอนทัวร์ของขอบภาพเท่ากับ 515 จุด เลือกใช้เวฟเล็ดแม่แบบบีสไปลน์ในการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพ รูปที่ 6.5 แสดงผลของการลงทะเบียนภาพที่ถูกสัญญาณรบกวน -1 dB และรูปที่ 6.6 แสดงผลของการลงทะเบียนภาพที่ถูกสัญญาณรบกวน -5 dB



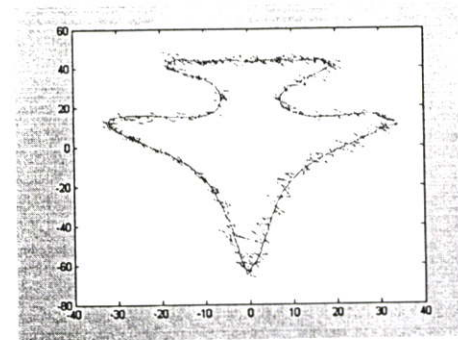
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด

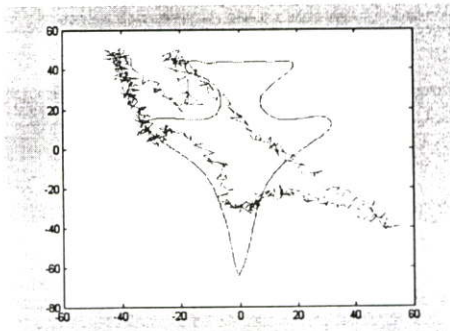


(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1

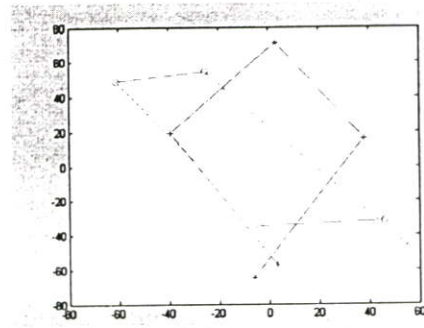


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

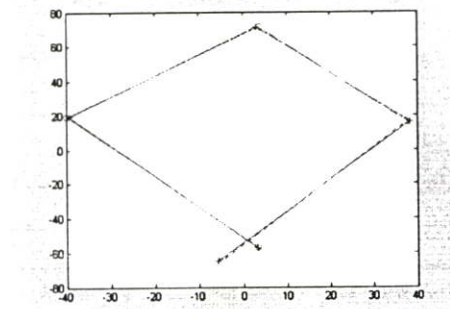
รูปที่ 6.5 ผลการลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพที่ถูกสัญญาณรบกวน -1 dB



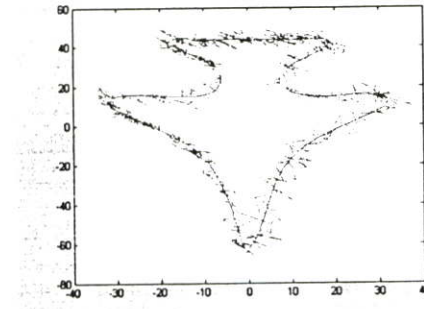
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเลเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด



(ค) ผลการลงทะเลเบียนภาพที่ระดับที่ 1



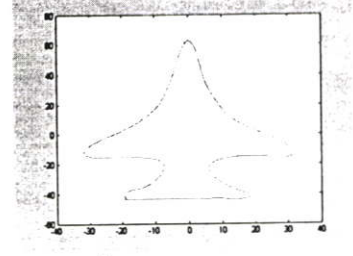
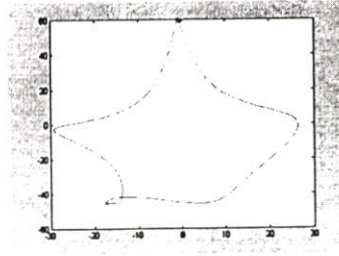
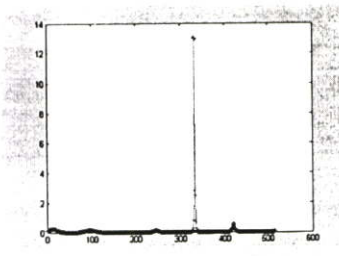
(ง) ผลการลงทะเลเบียนภาพ

รูปที่ 6.6 ผลการลงทะเลเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพที่ถูกสัญญาณรบกวน -5 dB

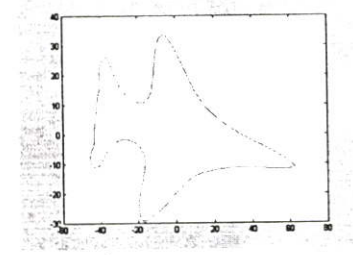
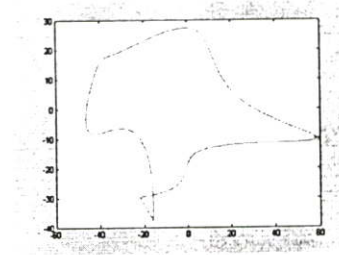
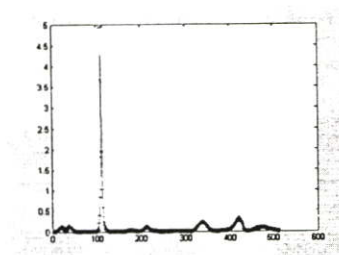
จากผลการทดลองจะเห็นว่า การนำการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยมาใช้ในการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของภาพ เพื่อใช้ในการลงทะเลเบียนภาพนั้น สามารถใช้ได้กับภาพที่ถูกสัญญาณรบกวนได้ เนื่องจากการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย จะทำการแยกสัญญาณออกเป็นสองส่วน คือสัญญาณโดยประมาณ (Approximation Signal) และสัญญาณรายละเอียด (Detail Signal) ซึ่งสัญญาณรบกวนจะถูกมองว่าเป็นสัญญาณรายละเอียด ดังนั้นสัญญาณโดยประมาณที่ได้จากการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพนั้น จึงเป็นตัวแทนของคอนทัวร์ของขอบภาพ ซึ่งสามารถใช้เป็นแลนมาร์คในการลงทะเลเบียนภาพได้

6.3 การทดลองการหาจุดที่มีความโค้งสูงสุด

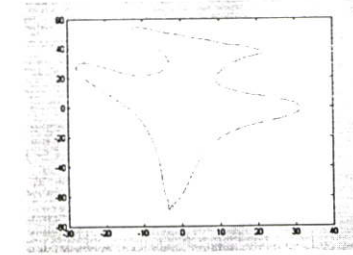
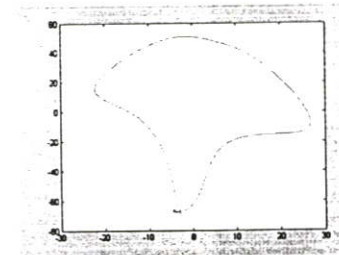
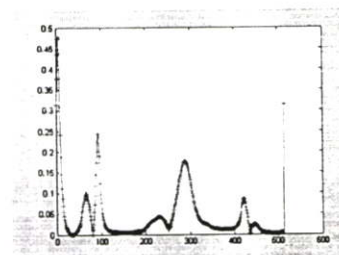
การทดลองหาจุดที่มีความโค้งสูงสุด โดยการหาค่าความโค้งสูงสุดจากภาพ 2 มิติที่ถูกแปลงแอฟฟายน์ดังแสดงในรูปที่ 6.7, 6.8, 6.9, และ 6.10 โดยที่จุดสี่เหลี่ยมในรูปแสดงจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ได้จากการหาขอบภาพด้วยวิธีคอนทัวร์โพลโลเวอร์ และจุดวงกลมแสดงจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด ซึ่งหาได้จากการประมาณเส้นโค้งและอนุพันธ์จากบีสไปไลน์ โดยใช้จุดควบคุม (Control point) จำนวน 10 จุด ในการหาค่าอนุพันธ์บีสไปไลน์



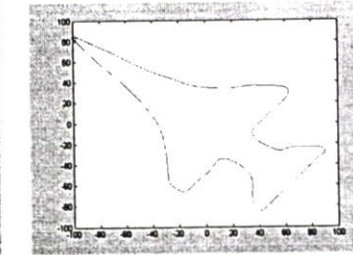
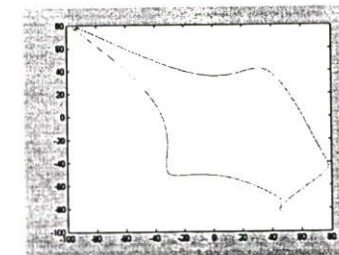
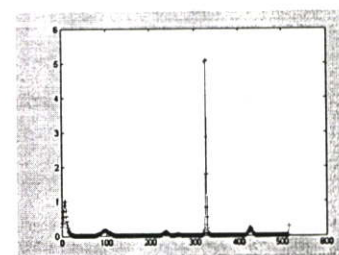
(ก) แสดงค่าความโค้งสูงสุด (ข) ส่วนโค้งที่จุดควบคุม 10 จุด (ค) จุดที่มีความโค้งสูงสุดบนภาพ
รูปที่ 6.7 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพอ้างอิง



(ก) แสดงค่าความโค้งสูงสุด (ข) ส่วนโค้งที่จุดควบคุม 10 จุด (ค) จุดที่มีความโค้งสูงสุดบนภาพ
รูปที่ 6.8 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพที่ถูกหมุน 260 องศา



(ก) แสดงค่าความโค้งสูงสุด (ข) ส่วนโค้งที่จุดควบคุม 10 จุด (ค) จุดที่มีความโค้งสูงสุดบนภาพ
รูปที่ 6.9 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพที่หมุน 160 องศา เลื่อนทางแกน $x = 0.1$ และแกน $y = 0.3$



(ก) แสดงค่าความโค้งสูงสุด (ข) ส่วนโค้งที่จุดควบคุม 10 จุด (ค) จุดที่มีความโค้งสูงสุดบนภาพ
รูปที่ 6.10 ค่าความโค้งสูงสุดจากภาพที่หมุน 50 องศา ขยายแกน $x = 2$ เท่าและแกน $y = 2$ เท่า

จากการทดลองจะเห็นว่า จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดของคอนทัวร์ของขอบภาพ ที่ได้จากการหาอนุพันธ์ของบีสไปไลน์ เป็นจุดที่สอดคล้องกันทุกจุดกับภาพที่แปลงแบบแอฟไฟน์ ซึ่งมีคุณสมบัติ

ไม่แปรผันต่อการแปลงแบบแอฟไฟน์ จึงสามารถที่จะนำจุดดังกล่าว มาใช้เป็นจุดเริ่มต้นที่สอดคล้องกันของคอนทัวร์ของขอบภาพทั้งสองที่จะนำมาลงทะเบียนภาพได้

6.4 การลงทะเบียนภาพของภาพถ่ายจากวัตถุจริง

การทดลองนี้ทำการลงทะเบียนภาพที่ถ่ายจากวัตถุจริง โดยทำการถ่ายภาพในมุมมองต่างกัน 4 ลักษณะเมื่อเทียบกับภาพอ้างอิง ได้แก่ภาพสมิธลารีตี้โดยทำการขยายภาพ ภาพแอฟไฟน์ โดยทำการย่อภาพและการหมุนภาพ และภาพเพอร์สเปกทีฟโดยการปรับมุมกล้องกับพื้นระนาบเป็นมุมประมาณ 15 องศาและ 30 องศา ดังแสดงดังรูปที่ 6.11 ผลการทดลองการลงทะเบียนภาพที่ใช้เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์ดังแสดงในรูปที่ 6.12, 6.13, 6.14 และ 6.15 และผลการลงทะเบียนภาพที่ใช้เวฟเล็ตแม่แบบ Haar ดังแสดงในรูปที่ 6.16, 6.17, 6.18 และ 6.19 และมีค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพจากค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยเปรียบเทียบกับค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับ Five-Points Coplanar [4] ดังแสดงในตารางที่ 6.1



(ก) ภาพถ่ายอ้างอิง



(ข) ภาพถ่ายสมิธลารีตี้



(ค) ภาพถ่ายแอฟไฟน์

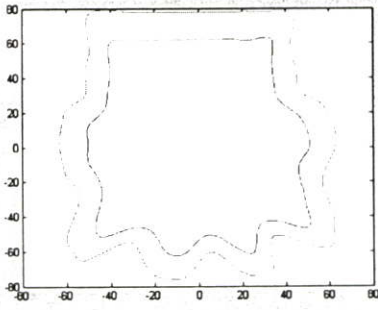


(ง) ภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟทำมุม 15 องศา

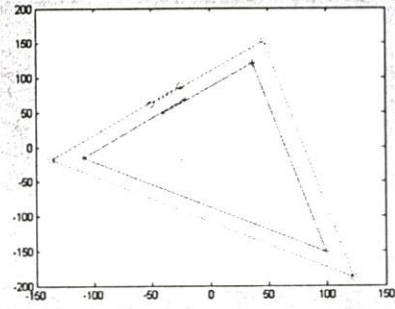


(จ) ภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟทำมุม 30 องศา

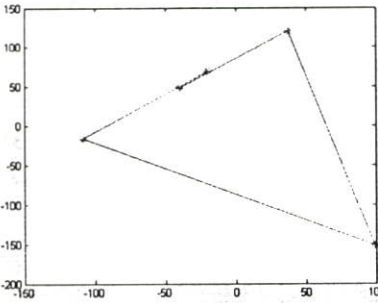
รูปที่ 6.11 ภาพที่ใช้ในการทดลอง



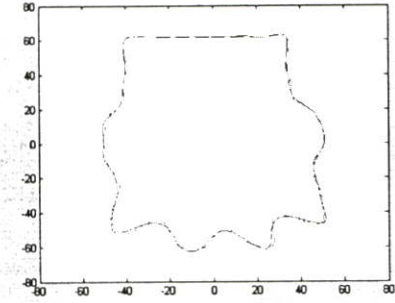
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด

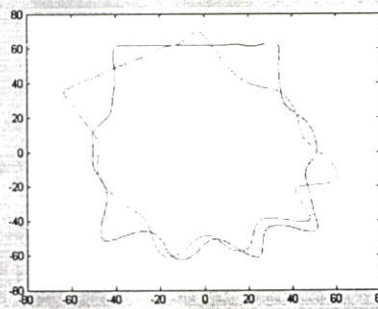


(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1

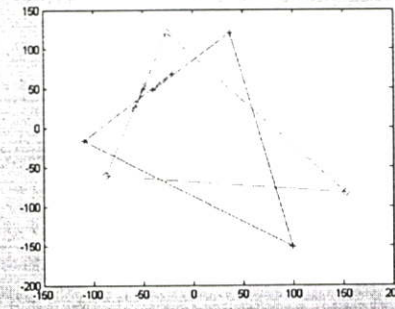


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

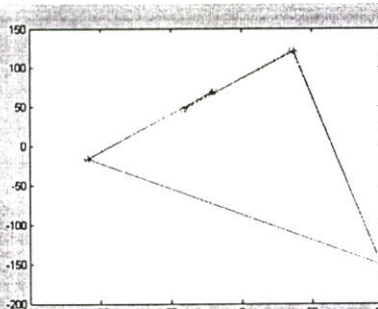
รูปที่ 6.12 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายสิบลาริตี เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์



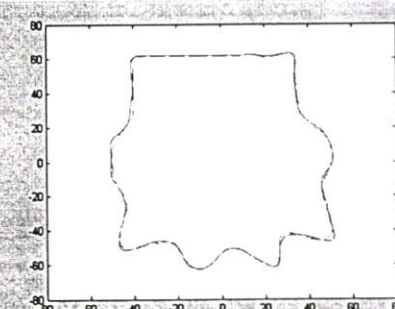
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด

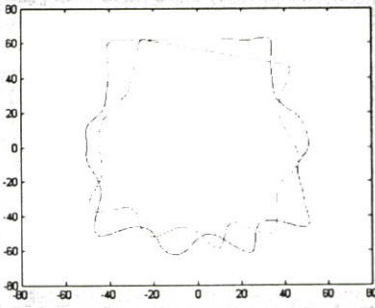


(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1

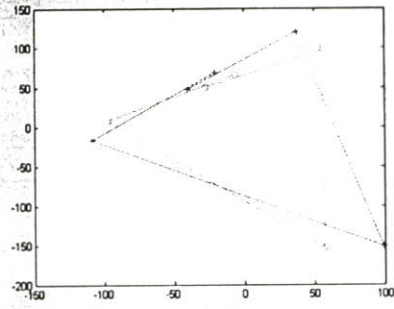


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

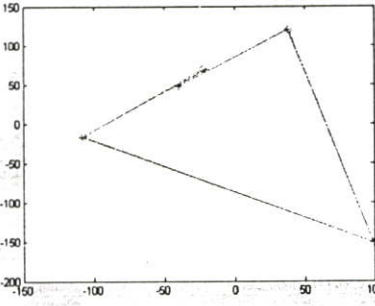
รูปที่ 6.13 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายแอฟไลน์ เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์



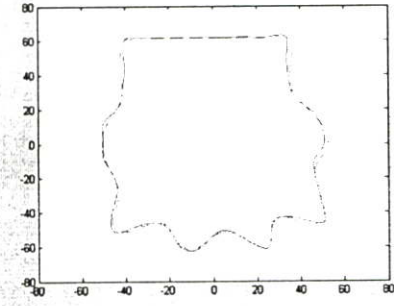
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด



(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1

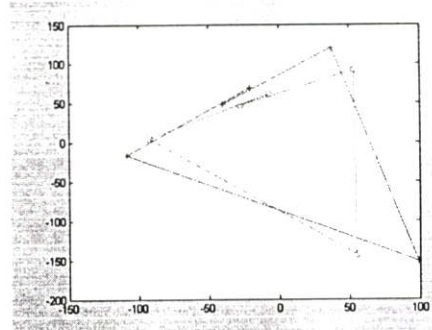


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

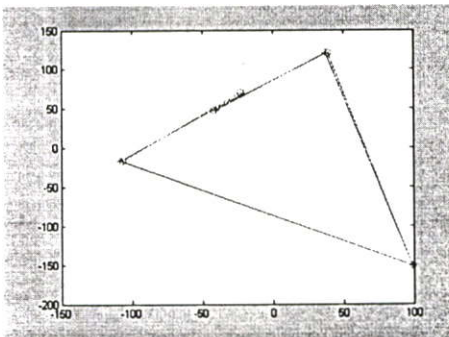
รูปที่ 6.14 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มีมุม 15 องศา เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปไลน์



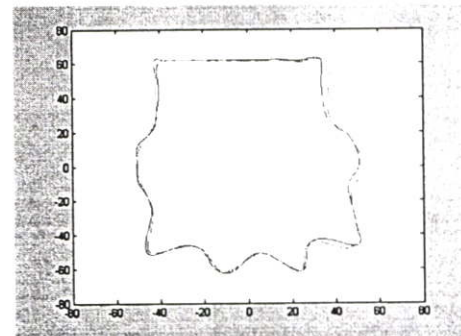
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด

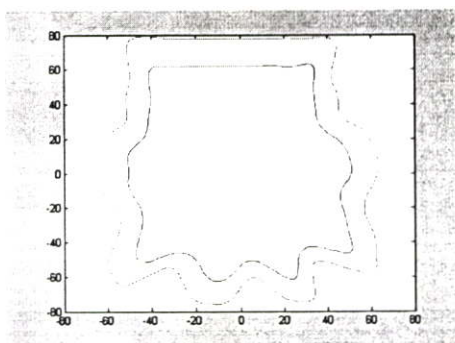


(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 1

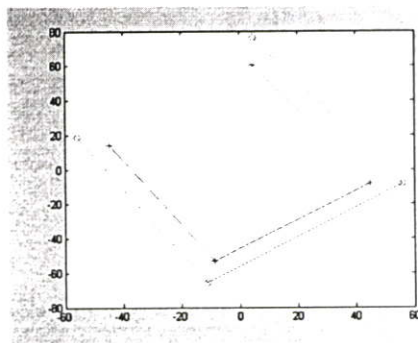


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

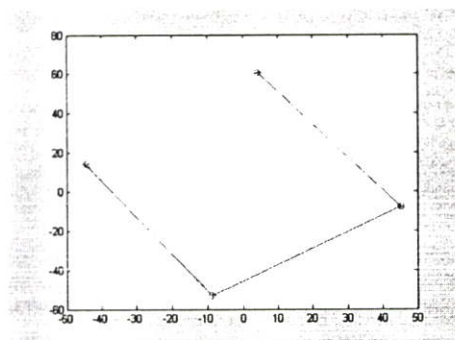
รูปที่ 6.15 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มีมุม 30 องศา เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปไลน์



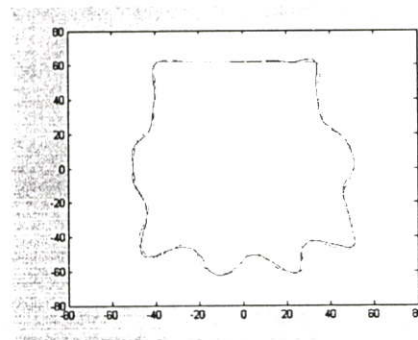
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด

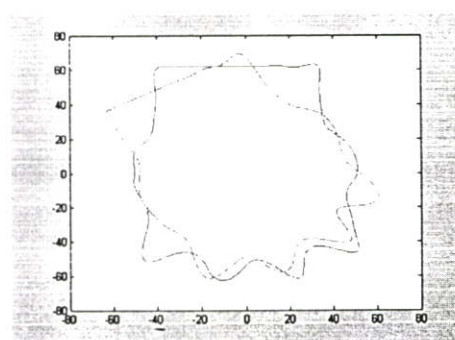


(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 2

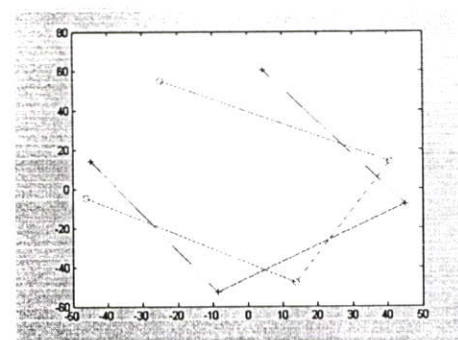


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

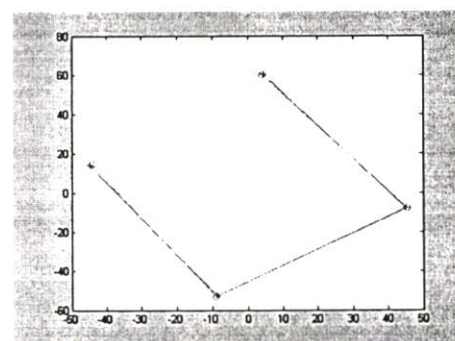
รูปที่ 6.16 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายสีมิลาร์ดี เวฟเล็ทแม่แบบ Haar



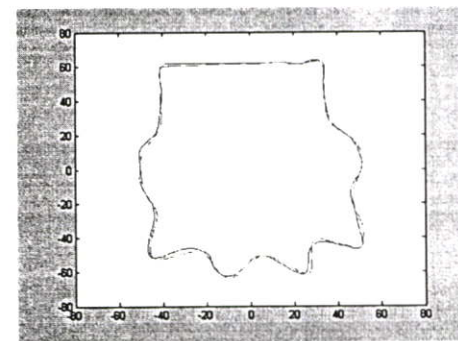
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด

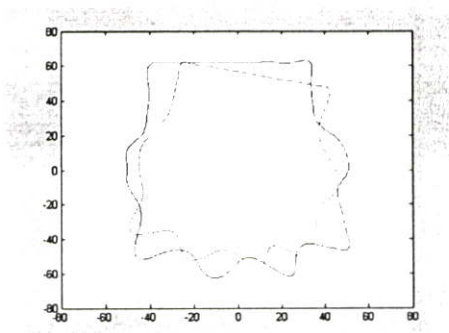


(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 2

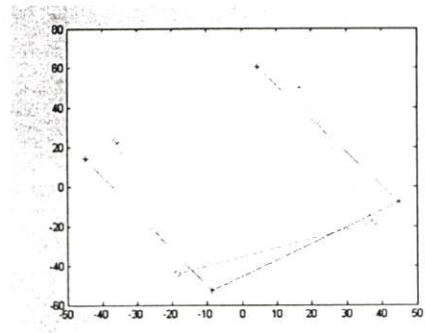


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

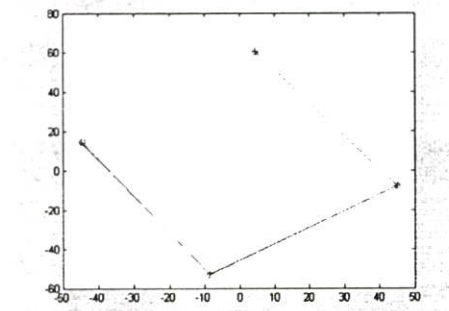
รูปที่ 6.17 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายแอฟไพน์ เวฟเล็ทแม่แบบ Haar



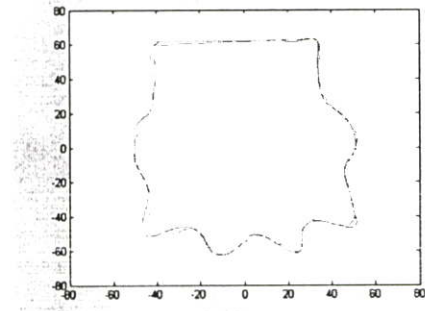
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด



(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 2

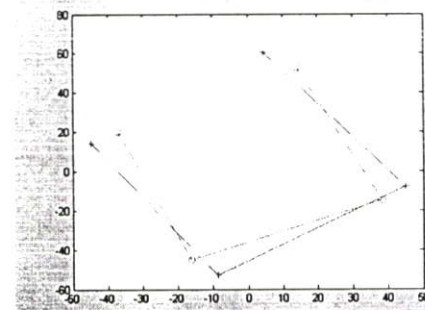


(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

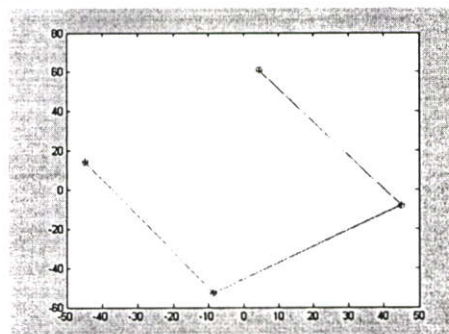
รูปที่ 6.18 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มีมุม 15 องศา เวฟเล็ตแม่แบบ Haar



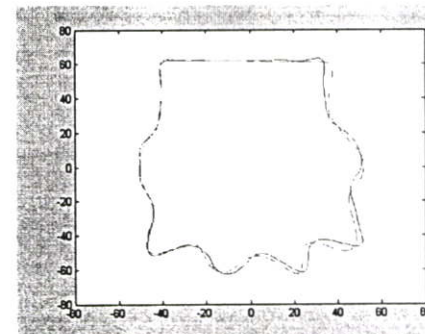
(ก) คอนทัวร์ของขอบภาพที่จะลงทะเบียน



(ข) ผลการลดระดับความละเอียด



(ค) ผลการลงทะเบียนภาพที่ระดับที่ 2



(ง) ผลการลงทะเบียนภาพ

รูปที่ 6.19 การลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายเพอร์สเปกทีฟที่มีมุม 30 องศา เวฟเล็ตแม่แบบ Haar

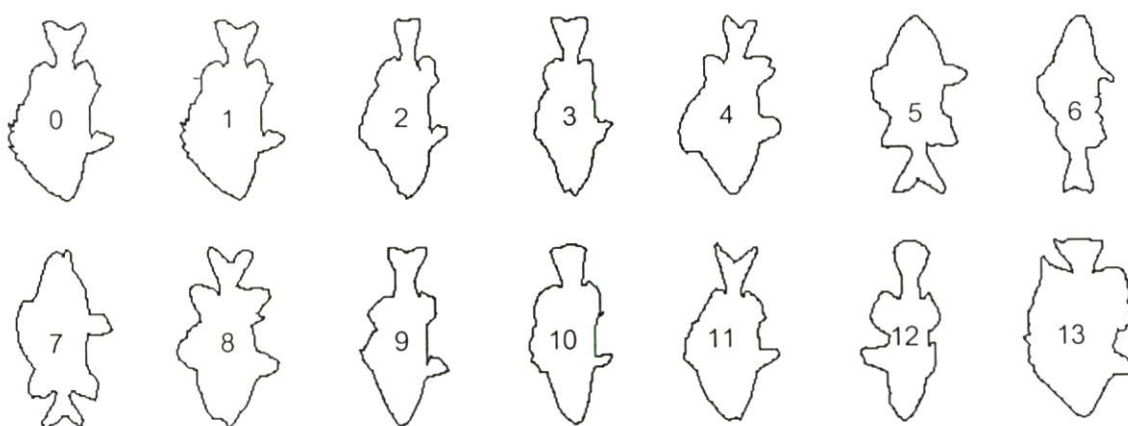
ตารางที่ 6.1 แสดงค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายวัตถุจริง

การแปลงแบบ	การใช้ค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับ		
	Five-Point Coplanar [4]	เวฟเล็ตแม่แบบ บีสไปลน์	เวฟเล็ตแม่แบบ Haar
สิมิลาริตี	0.61	0.68	0.75
แอฟฟายน์	1.17	0.62	0.88
เพอร์สเปกทีฟทำมุม 15°	1.24	0.86	0.96
เพอร์สเปกทีฟทำมุม 30°	2.09	0.99	1.16

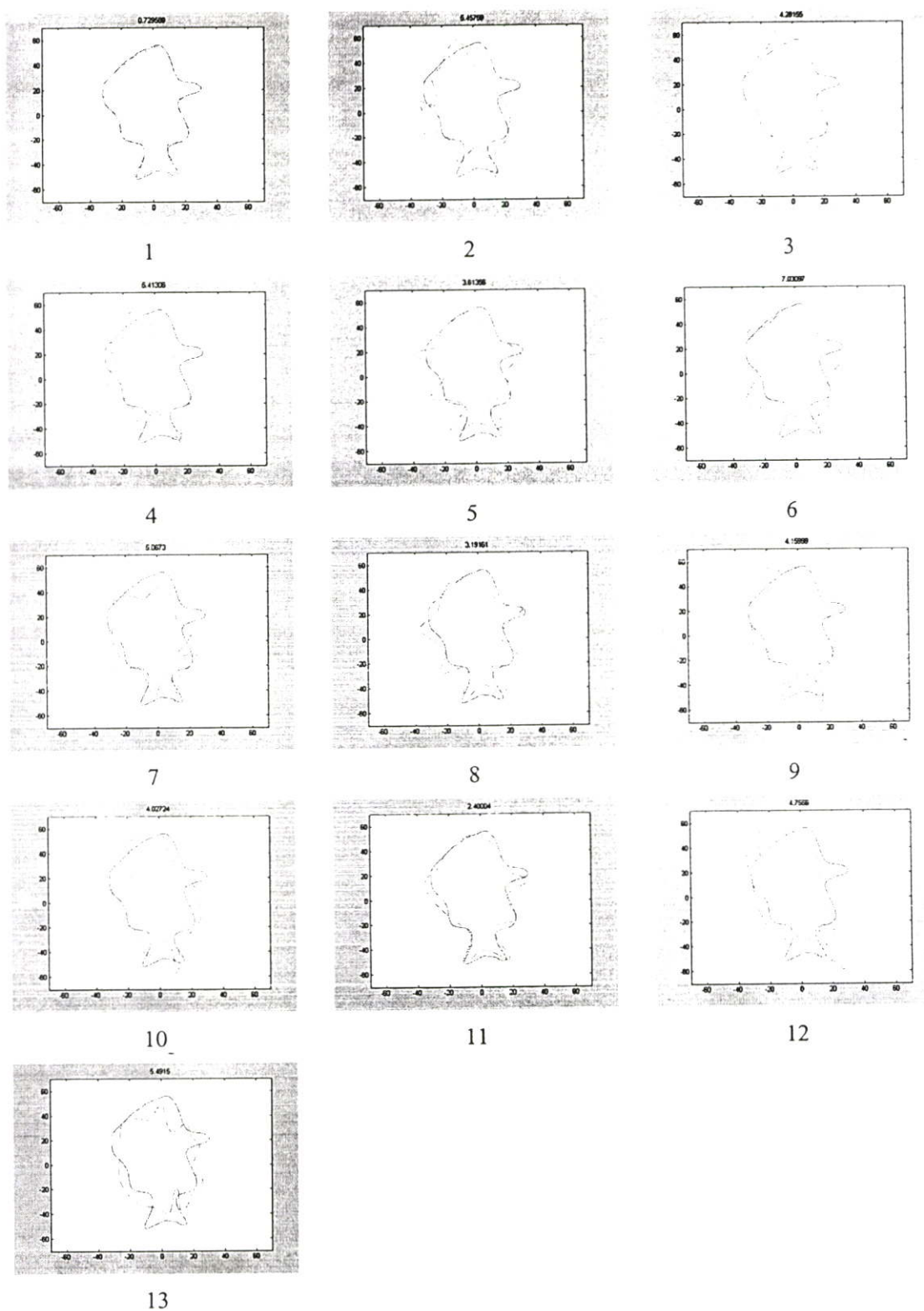
จากตารางที่ 6.1 จะเห็นว่าผลของการลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายวัตถุจริง ที่ใช้จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับ Five-Point Coplanar [4] เปรียบเทียบกับการใช้จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย โดยเลือกใช้เวฟเล็ตแม่แบบ Haar และเวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์ ผลของการลงทะเบียนภาพการใช้จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับการแปลงเวฟเล็ตนั้น มีค่าความผิดพลาดน้อยกว่าการใช้จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับ Five-Point Coplanar โดยที่เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์มีผลความผิดพลาดน้อยกว่าเวฟเล็ตแม่แบบ Haar

6.5 การประยุกต์ใช้ในการจำแนกปลา

กำหนดให้ภาพปลาตัวที่ 0 เป็นภาพโจทซ์ จะหาภาพปลาตัวที่เหมือนภาพปลาตัวที่ 0 มากที่สุด จากภาพปลาจำนวน 13 ภาพ



รูปที่ 6.20 ภาพปลาที่ใช้ทดสอบ



รูปที่ 6.21 ผลการลงทะเบียนภาพปลาเทียบกับปลาตัวที่ 0

จากการทดลองจะเห็นว่า วิธีการลงทะเบียนภาพที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สามารถประยุกต์ใช้ในการจำแนกภาพได้ โดยผลของการลงทะเบียนภาพที่มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด จะเป็นภาพที่เหมือนกัน

ตารางที่ 6.2 แสดงค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพปลา

ปลาตัวที่	ค่าผิดพลาด	ปลาตัวที่	ค่าผิดพลาด
1	0.73	8	3.19
2	5.46	9	4.16
3	4.28	10	4.03
4	5.41	11	2.40
5	3.61	12	4.76
6	7.03	13	5.49
7	5.07		

บทที่ 7

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอวิธีการลงทะเบียนภาพระหว่างภาพสองมิติกับภาพสองมิติแบบอัตโนมัติ โดยใช้เลนส์มาร์คในการลงทะเบียนภาพ เนื่องจากมีข้อดีคือสามารถประมวลผลได้อย่างรวดเร็ว ซึ่งจากเดิมเลนส์มาร์คที่ได้จากวิธีการกำหนดจุดจากมนุษย์นั้นอาจไม่ถูกต้องนัก ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้เลือกใช้คุณสมบัติเชิงเรขาคณิตของขอบภาพ คือใช้จุดที่มีค่าความโค้งสูงสุดเป็นจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ และลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลง ด้วยการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย ใช้จุดที่ระดับความละเอียดต่ำลงมาเป็นเลนส์มาร์คซึ่งมีข้อดีคือจุดเลนส์มาร์คที่หามาได้นั้น เป็นตัวแทนของคอนทัวร์ของขอบภาพนั้น และสามารถเลือกจำนวนจุดเลนส์มาร์คได้จากระดับความละเอียดของการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย

การทดลองถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนตามวัตถุประสงค์ของงาน การทดลองที่ 1 การลงทะเบียนภาพจากคอนทัวร์ของขอบภาพ ประกอบด้วย การทดลองผลกระทบเนื่องจากการแปลงโดยการนำคอนทัวร์ของขอบภาพที่มีจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพเป็นจุดเดียวกัน ทำการแปลงในรูปแบบต่างๆกันคือ การแปลงแบบปริจิด การแปลงแบบสมิลาริตี้ และการแปลงแบบแอฟไฟน์ จากผลการทดลองจะเห็นว่าข้อมูลที่ได้จากการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพ โดยการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย สามารถนำมาใช้เป็นจุดเลนส์มาร์คในการหาเมตริกซ์ของการแปลงที่ใช้ในการลงทะเบียนภาพได้

การทดลองผลกระทบเนื่องจากการเลื่อนจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ โดยการทดลองได้ทำการเลื่อนจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ ไปยังตำแหน่งต่างๆ จากผลการทดลองจะเห็นว่าจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ มีผลอย่างมากต่อค่าความผิดพลาดที่จะเกิดขึ้น ในการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพด้วยการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย ทำให้ข้อมูลที่ระดับความละเอียดที่ถูกลดลงไปของคอนทัวร์ของขอบภาพทั้งสองไม่สอดคล้องกัน เป็นผลให้การลงทะเบียนภาพมีความผิดพลาด จะเห็นว่าจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ จะต้องเป็นจุดที่สอดคล้องกัน เพื่อความถูกต้องในการลงทะเบียนภาพ

การทดลองผลกระทบเนื่องจากสัญญาณรบกวนที่ขอบภาพ โดยการเพิ่มสัญญาณรบกวนแบบเกาเซียนไวท์นอยส์ (Gaussian white noise) ให้กับคอนทัวร์ของขอบภาพที่ถูกแปลงแบบแอฟไฟน์ที่มีจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพเป็นจุดเดียวกัน จากการศึกษาจะพบว่าการใช้การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย เพื่อลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ถูกสัญญาณรบกวนนั้น จะสามารถแยกสัญญาณรบกวนหรือสัญญาณรายละเอียดกับสัญญาณ โดยประมาณ เพื่อ

ใช้เป็นจุดแลนมาร์คได้ ดังนั้นสามารถใช้วิธีที่นำเสนอเกี่ยวกับคอนทัวร์ของขอบภาพที่ถูกสัญญาณรบกวนได้

การทดลองที่ 2 การหาจุดที่มีความโค้งสูงสุดจากภาพสองมิติ เป็นการทดลองเพื่อแก้ไขปัญหาของจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพที่ได้จากวิธีคอนทัวร์โพลโลเวอร์ ซึ่งวิธีคอนทัวร์โพลโลเวอร์เป็นวิธีการหาขอบแบบอัตโนมัติ ทำให้จุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพที่หาได้นั้นเป็นจุดที่ไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับลักษณะของภาพ ซึ่งจากการทดลองพบว่าจุดที่มีความโค้งสูงสุดของภาพที่แปลงแบบแอฟไฟน์ ในการทดลองเป็นจุดที่สอดคล้องกัน ดังนั้นจึงใช้ค่าความโค้งสูงสุดเป็นจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์ของขอบภาพ ก่อนการลดระดับความละเอียดของคอนทัวร์ของขอบภาพลง เพื่อใช้ในการลงทะเบียนภาพ

การทดลองที่ 3 การลงทะเบียนภาพของภาพถ่ายวัตถุจริง โดยเป็นวัตถุที่มีลักษณะแบนเนื่องจากงานวิจัยนี้ได้ศึกษาเฉพาะการลงทะเบียนภาพที่เป็นสองมิติเท่านั้น และถ่ายวัตถุในลักษณะต่างๆกันคือ ภาพอ้างอิง ภาพแบบสิมิลาริตี้ (ขยายขนาด) ภาพแบบแอฟไฟน์ (ย่อและหมุนประมาณ 30 องศา) และภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ (ย่อ และหมุนกล้องทำมุมกับระนาบภาพประมาณ 15 และ 30 องศา) จากผลการทดลองจะพบว่าวิธีที่นำเสนอสามารถลงทะเบียนภาพถ่ายวัตถุจริงได้ แต่สำหรับภาพแบบเพอร์สเปกทีฟที่มุมมากขึ้นจะให้ค่าผิดพลาดเพิ่มขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากภาพแบบเพอร์สเปกทีฟไม่เป็นการแปลงแบบเชิงเส้น จึงไม่สามารถใช้วิธีการหาเมตริกซ์ของการแปลงจากการแก้สมการ Normal Equation ได้ถูกต้องนัก แต่ถึงอย่างไรก็ตามค่าผิดพลาดนั้นยังอยู่ในระดับที่ใช้ได้สำหรับภาพถ่ายทั่วไป และเมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้กับการใช้ค่าความโค้งสูงสุดร่วมกับ Five-Point Coplanar นั้นปรากฏว่าวิธีที่นำเสนอให้ค่าความผิดพลาดน้อยกว่า โดยที่พบว่าการใช้เวฟเล็ตแม่แบบบีสไปลน์ให้ค่าความผิดพลาดน้อยกว่าการใช้เวฟเล็ตแม่แบบ Haar

การทดลองที่ 4 นั้นเป็นการนำการลงทะเบียนภาพไปประยุกต์ใช้งาน โดยนำไปใช้ในการจำแนกภาพ โดยจะทำการลงทะเบียนภาพระหว่างภาพสองภาพใดๆ ให้มีค่าผิดพลาดน้อยที่สุด จากนั้นเปรียบเทียบค่าผิดพลาดที่ได้จากการลงทะเบียนภาพแต่ละคู่เพื่อหาคู่ที่ให้ค่าผิดพลาดน้อยที่สุดเป็นภาพที่เหมือนกันที่สุด จากตาราง 6.2 แสดงค่าผิดพลาดของการลงทะเบียนภาพปลา พบว่าภาพปลาตัวที่ 0 เหมือนกันกับปลาตัวที่ 1 มากที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 6.21

จากผลการทดลองทั้งหมด พบว่าแลนมาร์คที่หาได้จากจุดที่มีความโค้งสูงสุดและการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยของภาพอ้างอิงและภาพที่ต้องการลงทะเบียน จะได้จุดซึ่งมีตำแหน่งสอดคล้องกันทั้งหมด และภาพที่ลงทะเบียนแล้วสามารถยอมรับได้เมื่อมีความผิดพลาดประมาณไม่เกิน 2 ต่อหนึ่งจุดบนขอบภาพ

อย่างไรก็ตาม การลงทะเบียนภาพที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ยังมีข้อจำกัดอยู่หลายประการคือ

1. สามารถใช้กับภาพซึ่งมีลักษณะของขอบภาพที่ไม่ราบเรียบจนเกินไป โดยขอบของภาพนั้นต้องมีเลนมาร์คซึ่งเป็นจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด
2. ความถูกต้องในการลงทะเบียนภาพโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งจุดเริ่มต้นของคอนทราสต์ของขอบภาพ ถ้าสามารถหาจุดเริ่มต้นที่สอดคล้องกันของทั้งสองภาพ จะทำให้มีความถูกต้องมากขึ้น
3. การหาเมตริกซ์การแปลงที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นวิธีแบบเชิงเส้น จึงทำให้ผลในการลงทะเบียนภาพที่ได้มีความถูกต้องในระดับหนึ่ง ถ้านำการหาเมตริกซ์การแปลงแบบไม่เป็นเชิงเส้นมาใช้จะทำให้สามารถเพิ่มความถูกต้องในการลงทะเบียนภาพได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Karin K., Marija I., Josef M., David A.W. "Medical image registration" **Europhysics New**, Vol. 31, No. 4, 2000
- [2] Petra A. van den Elsen, Evert-Jan D. Pol, Max A. Viergever, "Medical Image Matching A Review with Classification" **IEEE Engineering in Medicine and Biology**, March 1993. pp. 26-39.
- [3] Rao K.K., Krishnan R. "Shape feature extraction from object corners" **Proceedings of the IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation**, April 1994. pp.160-165.
- [4] ปาริชาติ พุทธิจารุพงศ์. "การประยุกต์ใช้ค่าไม่ผันแปรทางเรขาคณิตของขอบภาพในการลงทะเบียนภาพ." วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2547.
- [5] Ming-Kei Hu. "Visual Pattern Recognition by Moment Invariants" **IRE Transactions Information Theory**, IT-8, February 1962. pp. 179-187.
- [6] Flusser J., Suk T. "Affine Moment Invariants: A New Tool for Character Recognition" **Pattern Recognition Letters**, Vol. 15, April 1994. pp. 433-436.
- [7] Peleg S., Resenfeld A. "A min-max Medial Axis Transformation" **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Vol. 3, No. 2, March 1981. pp. 208-210. -
- [8] Blum H., Nagel R. "Shape Description using Weighted Symmetric Axis Features" **Pattern Recognition**, Vol. 10, 1978. pp. 167-180.
- [9] Minghui X., Bede L. "Image Registration by "Super-Curves" **IEEE Transactions on Image Processing**, Vol. 13, No. 5, May 2004. pp. 720-732.
- [10] Jean-Michel R., Jean-Jose J., Christian R., "Genetic Algorithms for a Robust 3-D MR-CT Registration" **IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine**, Vol. 4, No. 3, June 2000. pp. 126-136.
- [11] Govindu V., Shekhar C. "Alignment using Distributions of Local Geometric Properties" **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Vol. 21, No. 3, 1999. pp.1031-1043.

- [12] E.B. Barrett, P. Payton. "General Methods for Determining Projective Invariants in Imagery" **CVGIP: Image Understanding**, Vol. 53, No. 1, Jan 1991. pp. 46-65.
- [13] W. Tiller, L. Piegel. "Curve and Surface constructions using rational B-splines" **Computer-Aided Design**, Vol. 19, No. 9, 1987. pp. 485-498.
- [14] W. Tiller, L. Piegel. **The NURBS Book**. 2nd ED. New York: Springer-Verlag, Inc. 1997.
- [15] C.Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath, and Guo, **Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms**, Prentice-hall, Texas, 1998.
- [16] Yu He, **Mathematica Wavelet Explorer**, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 1996
- [17] Fernand S. Cohen, Jin-Yinn W. "Part I: Modeling Image Curves Using Invariant 3-D Object Curve Models – A Part to 3-D Recognition and Shape Estimation from Image Contours" **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Vol. 16, No. 1, January 1994. pp. 1-12.
- [18] Walid S. Ibrahim Ali, Fernand S. Cohen "Registering Coronal Histological 2-D Sections of a Rat Brain with Coronal Sections of 3-D Brain Atlas Using Geometric Curve Invariants and B-Spline Representation" **IEEE Transactions on Medical Imaging**, Vol. 17, No. 6, December 1998. pp. 957-966.
- [19] Ibrahim EI Rube, Maher Ahmed, Mohamed Kamel, "Affine Invariant Multiscale Wavelet-based Shape Matching Algorithm" **Proceeding of the First Canadian Conference on Computer and Robot Vision (CRV'04)**, May 2004. pp. 217-224.

ภาคผนวก ก.

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

1. P. Putjarupong, C. Pintavirooj, P. Nantivatana, W. Withayachumnankul, and M. Sangworasil, "*Non-Linear Image Registration using Perspective Invariant and Thin-Plate Spline*," IEEE International Region 10 Conference (TENCON2004), Chaingmai, Thailand, November 2004.
2. C. Pintavirooj, P. Nantivatana, P. Putjarupong, W. Withayachumnankul, and M. Sangworasil, "*Shape Matching using Set of Curve Geometric Invariant Point*," International Conferences in Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision (WSCG2005), Czech Republic, February 2005.
3. P. Nantivatana, W. Narkbuakaew, C. Pintavirooj and M. Sangworasil, "*Image Registration using Discrete Wavelet Transform*," The 20th International Technical Conference On Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC 2005), Jeju, Korea, July 2005.
4. P. Nantivatana, U. Thongrak, C. Pintavirooj and M. Sangworasil, "*Contour-based Image Registration using Wavelet Transform and Ratio of Triangle Area*," Electrical Engineering Conference (EECON28), Phuket, Thailand, October 2005.
5. M. Lohakan, P. Nantivatana, W. Narkbuakaew, C. Pintavirooj and M. Sangworasil, "*Multiresolution Image Alignment based on Discrete Wavelet Transform*," IEEE International Region 10 Conference (TENCON2005), Melbourne, Australia, November 2005.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นายเพชร นันทิวัดนา
 วัน เดือน ปีเกิด 19 กรกฎาคม 2520 ที่กรุงเทพฯ
 ที่อยู่ 2/12 ซ.พืงมี22 ถ.สุขุมวิท แขวงบางจาก เขตพระโขนง จ.กรุงเทพฯ
 10260
 e-mail: petch@spu.ac.th, nantivatana@hotmail.com

ประวัติการศึกษา

พ.ศ.2538

ประกาศนียบัตรวิชาชีพ สาขาอิเล็กทรอนิกส์

โรงเรียนเทคโนโลยีกรุงเทพ

พ.ศ.2540

ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สาขาอิเล็กทรอนิกส์

โรงเรียนเทคโนโลยีกรุงเทพ

พ.ศ.2543

วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า

มหาวิทยาลัยศรีปทุม

ประสบการณ์ทำงานและผลงานวิจัย

พ.ศ.2538-2540

Technician บริษัท G. Simon Radio จำกัด

พ.ศ.2543-2544

Technical Staff บริษัท R&D Computer System จำกัด

พ.ศ.2544-ปัจจุบัน

อาจารย์ประจำ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยศรีปทุม