

ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้สำหรับหุ่นยนต์

ADAPTIVE KALMAN FILTER FOR ROBOTICS

ประกอบ จันทร์แดง  
PRAKOB CHANDAENG

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2550

ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้สำหรับหุ่นยนต์

ADAPTIVE KALMAN FILTER FOR ROBOTICS

ประกอบ จันทร์แดง

PRAKOB CHANDAENG

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศ

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2550

**ADAPTIVE KALMAN FILTER FOR ROBOTICS**

**PRAKOB CHANDAENG**

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN INFORMATION ENGINEERING  
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**2007**

**COPYRIGHT 2007**

**SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้สำหรับหุ่นยนต์
นักศึกษา	นายประกอบ จันทร์แดง
รหัสนักศึกษา	45065101
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมสารสนเทศ
พ.ศ.	2550
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.ปิติเชต สุรักษา

## บทคัดย่อ

ตัวกรอง Kalman เป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ เพื่อแสดงสถานะของระบบ สำหรับแบบจำลองเชิงพลศาสตร์และแบบจำลองเชิงการวัด โดยแบบจำลองเชิงพลศาสตร์ใช้อธิบายพฤติกรรมของระบบ ในขณะที่แบบจำลองเชิงการวัดใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าที่ได้จากการวัด และสถานะของระบบ

ในอัลกอริทึมที่ใช้สำหรับตัวกรอง Kalman นั้นต้องการอินพุต คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนในระบบ ( $Q_{(k)}$ ) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนจากการวัด ( $R_{(k)}$ ) ที่มีค่าคงที่ แต่ปัญหาที่เกิดขึ้นก็คือ ถ้าในระบบที่พิจารณานั้น เป็นระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน ทำให้ค่าพารามิเตอร์ทั้งสองไม่สามารถหาค่าได้ ค่าที่ประมาณได้จากตัวกรอง Kalman จะมีค่าความผิดพลาดที่สูง เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว วิทยานิพนธ์นี้ปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ (Enhancement of Adaptive Kalman Filter) ทำให้สามารถทำงานกับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

<b>Thesis Title</b>	Adaptive Kalman Filter for Robots
<b>Student</b>	Mr.Prakob Chandaeng
<b>Student ID.</b>	45065101
<b>Degree</b>	Master of Engineering
<b>Program</b>	Information Engineering
<b>Year</b>	2007
<b>Thesis Advisor</b>	Assoc.Prof.Dr.Pitikhate Sooraksa

## ABSTRACT

Kalman filter is an algorithm to estimate state of dynamic and measurement models described dynamic behaviors and relationship between measurement and state of the system.

In Kalman filtering method, a disturbance covariance matrix,  $Q_{(k)}$  and a noise covariance matrix  $R_{(k)}$  are needed as input parameters. However, the covariance matrices are constants. As a result, the matrices may not be suitable for a system contaminated with chaotic noises. To cope with such a problem; hence, this thesis proposes a new enhancement of adaptive Kalman filter.

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ปิติเชต ผู้รักษา  
ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหาตลอดจนให้ความรู้และแนะแนวทางที่แก่ข้าพเจ้า

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดามารดา ซึ่ง  
เป็นที่รักและเคารพยิ่ง ตลอดจนครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่านที่ได้ประสาทวิชาความรู้และถ่ายทอด  
ประสบการณ์ให้แก่ข้าพเจ้า

ประกอบ จันทร์แดง

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูปภาพ.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	1
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	2
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	2
1.6 ขั้นตอนของการศึกษา.....	2
บทที่ 2 ตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็น.....	3
2.1 บทนำ.....	3
2.2 ตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็นของเกาส์เซียน.....	3
2.3 ค่าความคาดหวังและความแปรปรวน.....	3
2.4 ค่าความแปรปรวนร่วมและสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์เกาส์เซียน.....	5
2.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข.....	6
2.6 ค่าความคาดหวังแบบมีเงื่อนไข.....	7
2.7 ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนแบบมีเงื่อนไขและร่วมกัน.....	8
2.8 ค่าความคาดหวังของ Quadratic.....	9
2.9 การประมาณค่าแวกเตอร์ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียน.....	9
2.10 การประมาณเชิงเส้น.....	11
2.11 บทสรุป.....	15

## สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 การประมาณเชิงเส้นในระบบพลศาสตร์และตัวกรอง Kalman .....	16
3.1 บทนำ .....	16
3.2 การประมาณทางพลศาสตร์ .....	17
3.3 อัลกอริทึมของตัวกรอง Kalman .....	18
3.4 สมมุติฐานทางสถิติของตัวกรอง Kalman .....	20
3.5 บทสรุป .....	21
บทที่ 4 การปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ .....	23
4.1 บทนำ .....	23
4.2 ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า .....	24
4.3 การปรับปรุงตัวกรองตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ .....	27
4.4 บทสรุป .....	29
บทที่ 5 ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ .....	30
5.1 บทนำ .....	30
5.2 ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน .....	31
5.3 ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอสมมาตร .....	35
5.4 วิจารณ์ผลการวิเคราะห์ .....	50
บทที่ 6 บทสรุปและข้อเสนอแนะ .....	51
6.1 บทสรุป .....	51
6.2 ข้อเสนอแนะ .....	51
เอกสารอ้างอิง .....	52
ภาคผนวก .....	54
ประวัติผู้เขียน .....	61

# สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
5.1 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมี สัญญาณ รบกวนแบบเกาส์เซียน .....	32
5.2 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมี สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz .....	37
5.3 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมี สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Logistic map .....	42
5.4 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมี สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Henon map .....	47

# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
3.1 การทำงานของตัวกรองKalman .....	22
3.2 การใช้งานของตัวกรอง Kalman .....	22
5.1 การทดสอบของตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน .....	31
5.2 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(1,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบ เกาส์เซียน .....	33
5.3 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(2,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบ เกาส์เซียน .....	33
5.4 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(3,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบ เกาส์เซียน .....	34
5.5 สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz .....	35
5.6 การทดสอบของตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz .....	36
5.7 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(1,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Lorenz .....	38
5.8 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(2,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Lorenz .....	38
5.9 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(3,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Lorenz .....	39
5.10 สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Logistic map .....	40
5.11 การทดสอบของตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Logistic map .....	41

## สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.12 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(1,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Logistic map.....	43
5.13 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(2,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Logistic map.....	43
5.14 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(3,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Logistic map.....	44
5.15 สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Henon map.....	45
5.16 การทดสอบของตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Henon map.....	46
5.17 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(1,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Henon map.....	48
5.18 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(2,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Henon map.....	48
5.19 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ $X(3,1)$ ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน อลวนแบบ Henon map.....	49

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการหาค่าสถานะของระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน (Gaussian Noise) ปนอยู่ให้มีความถูกต้องโดยใช้ตัวกรอง Kalman นั้น จำเป็นต้องรู้ค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนที่มีอยู่ในระบบ จึงเป็นการยากที่จะวัดหรือคำนวณออกมา และเมื่อสัญญาณรบกวนนั้นเป็นสัญญาณรบกวนแบบอลวน (Chaotic Noise) ซึ่งไม่มีค่าความแปรปรวนร่วม (Covariance) ค่าที่ได้จากการประมาณโดยใช้ตัวกรอง Kalman จะมีค่าความผิดพลาดสูงมากหรือไม่อาจใช้ตัวกรอง Kalman ในการประมาณสถานะของระบบดังกล่าวได้ วิทยานิพนธ์นี้มุ่งแก้ไขปัญหาดังกล่าว

### 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

ในอดีตมีการนำตัวกรอง Kalman ไปประยุกต์ในระบบต่างๆ มากมาย [11-21] แต่ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่คือจะต้องทราบค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีอยู่ในระบบ จึงจะสามารถทำงานได้อย่างถูกต้อง แม้ในปัจจุบันปัญหาดังกล่าวได้ถูกแก้ไขโดยการปรับปรุงตัวกรอง Kalman (Adaptive Kalman Filter) [1,7] ให้มีความสามารถในการประมาณค่าสถานะของระบบได้โดยไม่ต้องทราบค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนแล้วก็ตาม เมื่อนำไปใช้ในระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน ก็ยังมีค่าความผิดพลาดที่สูงอยู่ในตอนเริ่มแรกของการทำงาน

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ สำหรับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน เพื่อให้ค่าที่ได้จากการประมาณมีความถูกต้องแม่นยำมากกว่า ตัวกรอง Kalman ที่มีอยู่และมีประสิทธิภาพที่ดีเมื่อใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน แม้ไม่ทราบค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนก็ตาม

### 1.3 สมมติฐานของการศึกษา

จากการศึกษาตัวกรอง Kalman ที่ใช้ในระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนนั้น ค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนที่ใช้จะมีค่าคงที่ และเมื่อนำตัวกรอง Kalman ดังกล่าวไปใช้ในระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีค่าความแปรปรวนร่วมที่ไม่คงที่หรือกับระบบที่มีสัญญาณ

รบกวนแบบอลวน จะให้ค่าความผิดพลาดที่สูง ดังนั้นการสมมุติให้ค่าความแปรปรวนร่วมที่ใช้กับตัวกรอง Kalman แบบใหม่ (Enhancement of Adaptive Kalman Filter) ไม่คงที่ อาจแก้ปัญหาดังกล่าวได้ จึงวิเคราะห์ประสิทธิภาพโดยใช้โปรแกรม Matlab เพื่อทำการเปรียบเทียบผลของตัวกรอง Kalman แบบใหม่กับตัวกรอง Kalman ที่มีอยู่

#### 1.4 ทฤษฎีและแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสนอแนวความคิดในการออกแบบตัวกรอง Kalman แบบใหม่เพื่อลดค่าความผิดพลาดให้น้อยที่สุด โดยอาศัย

1. ตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา [2,3,4,5,6]
2. ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ [1,7]
3. การปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้

#### 1.5 ขอบเขตการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสนอแนวความคิดในการหาค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนที่มีอยู่ในระบบ และค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนที่มีอยู่ในการวัด โดยการทดสอบความถูกต้องของการศึกษา อาศัยโปรแกรม Matlab เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์เพื่อเปรียบเทียบผลการทดสอบ

#### 1.6 ขั้นตอนการศึกษา

ขั้นตอนการศึกษาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีขั้นตอนต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาหลักการ ค่าพารามิเตอร์ และการประยุกต์ใช้งานของตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา
2. ศึกษาหลักการ แนวความคิดของตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวได้ที่ใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน
3. นำวิธีการที่ได้มาศึกษาหาวิธีเพิ่มประสิทธิภาพของตัวกรอง Kalman ให้ใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนและระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน ซึ่งจะต้องมีประสิทธิภาพดีกว่าตัวกรอง Kalman ที่มีอยู่ โดยการศึกษาอาศัยโปรแกรม Matlab เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์เพื่อเปรียบเทียบผลการจำลองของตัวกรอง Kalman แต่ละแบบ

## บทที่ 2

# ตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็น

### 2.1 บทนำ

ในการศึกษาเกี่ยวกับตัวกรอง Kalman นั้น ตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็น เป็นพื้นฐานที่สำคัญ ซึ่งต้องศึกษาเป็นอันดับแรก เพื่อที่จะช่วยให้ศึกษาอัลกอริทึมของตัวกรอง Kalman เข้าใจง่ายขึ้น

### 2.2 ตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็น(Random Variables and Probability Density Function)แบบเกาส์เซียน

ตัวแปรสุ่มแบบเกาส์เซียนที่มีตัวแปร  $\mu$ ,  $\sigma^2$  (ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนตามลำดับ) เป็นสัญลักษณ์โดยใช้แทน

$$\mu x \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{2.2.1}$$

โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$p(x) = N(x; \mu, \sigma^2) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.2.2}$$

### 2.3 ค่าความคาดหวังและความแปรปรวน (Expectation and Variance)

ค่าความคาดหวังของตัวแปรสุ่ม ค่าเฉลี่ย หรือ moment ที่ 1 แสดงโดย

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \triangleq \bar{x} \tag{2.3.1}$$

และ moment ที่ n เป็น

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx \tag{2.3.2}$$

ซึ่งค่าความแปรปรวน(Variance) หาได้โดย

$$\begin{aligned} Var(x) &\triangleq E[(x-\bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 p(x) dx \\ &= E[x^2] - (\bar{x})^2 \triangleq \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

โดยที่  $X$  เป็นตัวแปรสุ่ม  $\bar{x}$  คือค่าเฉลี่ย  $\bar{x}$  และ  $\sigma^2$  คือค่าความแปรปรวน

กำหนดให้

$$x \sim N[\bar{x}, \sigma^2] \quad (2.3.4)$$

ซึ่งค่ากำลังสองเฉลี่ย (Mean square) จะมีค่าเท่ากับ ค่าเฉลี่ยกำลังสองบวกกับค่าความแปรปรวน

$$E[x^2] = [E(x)]^2 + Var(x) = \bar{x}^2 + \sigma_x^2 \quad (2.3.5)$$

สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเท่ากับรากที่ 2 ของค่ากำลังสองเฉลี่ย

(RMS) และค่าความคาดหมายของฟังก์ชัน  $g(X)$  ของตัวแปรสุ่ม  $X$  มีค่าเป็น

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx \quad (2.3.6)$$

สำหรับตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนที่มีค่าตัวแปร  $\mu$ ,  $\sigma^2$  ค่าเฉลี่ยหาได้โดย

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \mu \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

และค่าความแปรปรวน

$$\begin{aligned} Var(x) &= E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

โดย

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \quad (2.3.9)$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (2.3.10)$$

ดังนั้น

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 \quad (2.3.11)$$

## 2.4 ค่าความแปรปรวนร่วมและสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์กัน (Covariance and Correlation coefficient)

ค่าความแปรปรวนร่วมของสองตัวแปรสุ่ม  $X_1$  และ  $X_2$  ที่มีค่าเฉลี่ย  $\bar{x}_1$  และ  $\bar{x}_2$  จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_1, x_2) &\triangleq E[(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \triangleq \sigma_{x_1 x_2}^2 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

โดยสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์กันของตัวแปรทั้งสองหาได้โดย

$$\rho_{12} \triangleq \frac{\sigma_{x_1 x_2}^2}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \quad (2.4.2)$$

และเมื่อตัวแปรทั้งสองมีสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์กันเท่ากับศูนย์ เราเรียกว่า ไม่มีความสัมพันธ์กัน

(Uncorrelated) โดยพิจารณาตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  ที่มีค่าเฉลี่ย  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  และค่าความแปรปรวน  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  ซึ่ง

ไม่มีความสัมพันธ์กัน  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  โดย

$$z = ax + by \quad (2.4.3)$$

ค่าเฉลี่ยของ  $Z$  มีค่าเป็น

$$\bar{z} = E[z] = E[ax + by] = aE[x] + bE[y] = a\bar{x} + b\bar{y} \quad (2.4.4)$$

โดยที่ค่าความแปรปรวนร่วมมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \text{Var}(z) &= E[(z - \bar{z})^2] = E[(ax + by - a\bar{x} - b\bar{y})^2] \\ &= E\left\{[a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})]^2\right\} \\ &= a^2 E[(x - \bar{x})^2] + b^2 E[(y - \bar{y})^2] + 2abE[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] \\ &= a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

โดยให้ค่าความแปรปรวนร่วมของ X และ Y เป็น ศูนย์ ค่าความแปรปรวนร่วมของ X และ Z จะเป็น

$$\begin{aligned} E[(z-\bar{z})(x-\bar{x})] &= E\{[a(x-\bar{x})+b(y-\bar{y})](x-\bar{x})\} \\ &= a\sigma_x^2 + b \operatorname{cov}(x, y) = a\sigma_x^2 \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

## 2.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดเหตุการณ์ B กำหนดได้โดย

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A, B\}}{P\{B\}} \quad (2.5.1)$$

เหมือนกันกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดโดยตัวแปรสุ่มอื่นๆ หาได้จาก

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} \quad (2.5.2)$$

กำหนดให้  $Z = X + Y$  และฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ Y เมื่อกำหนดตัวแปร X เป็น

$P_{Y|X}(\cdot)$  จะได้ว่า

$$p(z|x) = p_{y|x}(z-x) \quad (2.5.3)$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$p(z|x) = p_y(z-x) \quad (2.5.4)$$

และสมมติว่า  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$  เป็นอิสระต่อกัน และกำหนดให้  $Z = X + Y$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(z|x) &= p_y(z-x) = N(z-x; \mu_y, \sigma_y^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(z-x-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} = N(z; x+\mu_y, \sigma_y^2) \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

## 2.6 ค่าความคาดหมายแบบมีเงื่อนไข (Conditional Expectation)

ค่าความคาดหมายแบบมีเงื่อนไขจะกำหนดเหมือนกับแบบไม่มีเงื่อนไข แต่จะสัมพันธ์กับ

ฟังก์ชันที่ความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$E[x|y] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|y)dx \quad (2.6.1)$$

และจะเหมือนกันสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม  $X$  โดย

$$E[g(x,y)|y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)p(x|y)dx \quad (2.6.2)$$

โดยค่าความคาดหมายของค่าความคาดหมายแบบมีเงื่อนไข จะมีค่าเท่ากับค่าความคาดหมายโดยทั่วไปของตัวแปร

$$\begin{aligned} E\{E[x|y]\} &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{x=-\infty}^{\infty} xp(x|y)dx \right] p(y)dy \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} x \left[ \int_{y=-\infty}^{\infty} p(x,y)dy \right] dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} xp(x)dx = E[x] \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

ซึ่งเรียกโดยทั่วไปว่ากฎแห่งการคาดหวังซ้ำวน (Law of Iterated Expectation)

$$E\{E[x|y]\} = E[x] \quad (2.6.4)$$

## 2.7 ตัวแปรสุ่มเกาส์เขียนแบบมีเงื่อนไขและร่วมกัน (Joint and Conditional Gaussian Random Variables)

เวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  ร่วมกันแบบเกาส์เขียน ถ้าเวกเตอร์

$$y = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (2.7.1)$$

เป็นเกาส์เขียน นั่นคือ

$$p(x, z) = p(y) = N(y; \bar{y}, P_{yy}) \quad (2.7.2)$$

โดยค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของ  $Y$  ในเทอมของ  $X$  และ  $Z$  จะเป็น

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (2.7.3)$$

$$P_{yy} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.7.4)$$

$$P_{xx} = \text{cov}(x) = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})'] \quad (2.7.5)$$

$$P_{zz} = \text{cov}(z) = E[(z - \bar{z})(z - \bar{z})'] \quad (2.7.6)$$

$$P_{xz} = \text{cov}(x, z) = E[(x - \bar{x})(z - \bar{z})'] = P_{zx}' \quad (2.7.7)$$

และค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขของ  $X$  เมื่อกำหนดค่า  $Z$  เป็น

$$E[x|z] \triangleq \hat{x} = \bar{x} + P_{xz} P_{zz}^{-1} (z - \bar{z}) \quad (2.7.8)$$

ซึ่งหาค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขได้โดย

$$\text{cov}(x|z) \triangleq P_{xx|z} = P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx} \quad (2.7.9)$$

โดยที่ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข (2.7.8) เป็นเชิงเส้นกับการสังเกตของ  $Z$  และค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (2.7.9) จะเป็นอิสระจากการสังเกต

## 2.8 ค่าความคาดหมายของ Quadratic (Expected Value of Quadratic)

พิจารณาค่าของเวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม  $X$  ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น ศูนย์ และค่าความแปรปรวนร่วมเป็น เมทริกซ์  $P$  ดังนั้นค่าความคาดหมายในรูปแบบ Quadratic ของเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มสามารถเขียนได้โดย

$$\text{เมื่อ } x \sim N(\mu, P)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[x'Ax] &= E[\text{tr}(x'Ax)] = E[\text{tr}(Axx')] \\ &= \text{tr}[AE(xx')] = \text{tr}(AP) \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

## 2.9 การประมาณค่าเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียน (Estimation of Gaussian Random Vectors)

พิจารณาเวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Z$  ซึ่งเป็นการแจกแจงร่วมแบบเกาส์เซียนโดยที่ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขและค่าความแปรปรวนร่วมสำหรับเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียน

โดยกำหนดให้

$$y \triangleq \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (2.9.1)$$

และ

$$y \sim N[\bar{y}, P_{yy}] \quad (2.9.2)$$

ซึ่ง  $Y$  เป็นตัวแปรสุ่มแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ย

$$\bar{y} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (2.9.3)$$

และมีค่าความแปรปรวนร่วมเป็น

$$P_{yy} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.9.4)$$

เมื่อ  $X$  เป็นค่าเฉลี่ยของ  $X$  และมีค่าความแปรปรวนร่วมเป็น

$$P_{xx} = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})'] \quad (2.9.5)$$

และค่าความแปรปรวนร่วมของ  $X$  และ  $Z$  เป็น

$$P_{xz} = E[(x - \bar{x})(z - \bar{z})'] = P_{zx}' \quad (2.9.6)$$

โดยที่  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่ได้จากการประมาณ และ  $Z$  เป็นค่าที่ได้จากการวัดหรือการสังเกต การหาค่าของตัวแปรสุ่ม  $X$  ในเทอมของ  $Z$  ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยกำลังสองน้อยที่สุดของค่าความผิดพลาด (Minimum Mean Square Error (MMSE)) สำหรับ  $X$  และ  $Z$  ซึ่งมีความสัมพันธ์กัน กำหนดตามสมการที่ (2.9.2)

ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขจะเป็น

$$\hat{x} \triangleq E[x|z] = \bar{x} + P_{xz}P_{zz}^{-1}(z - \bar{z}) \quad (2.9.7)$$

และค่าความแปรปรวนร่วมแบบมีเงื่อนไขเป็น

$$P_{x|z} \triangleq E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})' | z] = P_{xx} - P_{xz}P_{zz}^{-1}P_{zx} \quad (2.9.8)$$

ซึ่งการประมาณค่าของ  $X$  ในเทอมของ  $Z$  จะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ  $Z$  ซึ่งก็คือสมมุติฐานของเกาส์เซียน

ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขของเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนในเทอมของเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนอื่น (ที่ได้จากการวัด) จะเป็นการรวมกันแบบเชิงเส้นของ

- ค่าเฉลี่ยก่อนหน้า (Prior mean) ของตัวแปรซึ่งหาค่าได้
- ผลต่างระหว่างค่าจากการวัด (Measurement) และค่าเฉลี่ยก่อนหน้า (Prior mean)

ค่าความแปรปรวนร่วมแบบมีเงื่อนไขของหนึ่งเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนที่ได้จากเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนอื่น (ที่ได้จากการวัด) จะเป็นอิสระจากค่าที่ได้จากการวัด

## 2.10 การประมาณค่าเฉลี่ยกำลังสองของความผิดพลาดที่น้อยที่สุดแบบเชิงเส้น (Linear Minimum Mean Square Error Estimation: MMSE)

### 2.10.1 หลักการของ Orthogonal

จากหลักการของ Minimum mean square error (MMSE) ซึ่งหาค่าของตัวแปรสุ่ม  $X$  ในเทอมของตัวแปรสุ่ม  $Z$  จะเป็นค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข  $E[X|Z]$  ในหลายๆปัญหา การแจกแจงข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการคำนวณหาค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขไม่อาจทำได้ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้าสามารถหาค่าได้ การหาค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขอาจเกิดความยุ่งยากที่อาจเกิดขึ้น

ในส่วนนี้วิธีการที่ใช้

- ใช้วิธีอย่างง่าย ให้ผลของการประมาณเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของการสังเกต
- ต้องการข้อมูลเพียงเล็กน้อยเฉพาะลำดับที่ 1 และลำดับที่ 2 ซึ่งจำเป็นมาก

วิธีการเช่นนี้เรียกว่า การประมาณแบบ MMSE

การประมาณ MMSE ของตัวแปรสุ่มในเทอมของตัวแปรสุ่มอื่นนั้น จะเป็น

- การประมาณเป็นแบบไร้อคติ (Unbiased) ซึ่งค่าความผิดพลาดของการประมาณมีค่าเฉลี่ยเป็น “ศูนย์”
- ค่าความผิดพลาดของการประมาณไม่เกี่ยวข้องกับค่าที่ได้จากการสังเกต ซึ่งทั้งหมดนี้เป็นไปตามหลักความสัมพันธ์แบบฉาก (Orthogonal)

### 2.10.2 การประมาณ MMSE ของตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นศูนย์ (Linear Minimum Mean Square Error estimation for Zero Mean Random Variables)

การประมาณเชิงเส้นแบบ MMSE สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ค่าตัวแปรสุ่มโดย กลุ่มของตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ซึ่งมีค่าเป็นตัวเลขจำนวนจริง  $Z_i$  โดยที่  $i$  เป็น  $1, 2, 3, \dots, n$  และสามารถพิจารณาให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ ดังนั้นผลคูณภายใน (Inner product) สามารถกำหนดได้โดย

$$\langle z_i, z_k \rangle = E[z_i z_k] \quad (2.10.2.1)$$

กำหนดให้ตัวแปรสุ่มภายใต้การพิจารณามีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\langle z_i, z_i \rangle = E[z_i^2] = \|z_i\|^2 \quad (2.10.2.2)$$

ซึ่งเป็นคุณสมบัติของ norm

การขึ้นแก่กันแบบเชิงเส้น (Linear dependence) กำหนดโดยการเริ่มต้นให้ norm ของการ

รวมกันแบบเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่เป็นศูนย์

$$E \left[ \left( \sum_{i=1}^m a_i z_i \right)^2 \right] = 0 \quad (2.10.2.3)$$

ถ้า  $a_1 \neq 0$  แล้ว  $Z_1$  จะเป็นการรวมกันทางเชิงเส้น (Linear combination) ของ  $Z_2, \dots, Z_n$  กล่าวคือ

$$z_1 = -\frac{1}{a_1} \sum_{i=2}^m a_i z_i \quad (2.10.2.4)$$

และ 2 เวกเตอร์จะเป็น Orthogonal ก็ต่อเมื่อ

$$\langle z_i, z_k \rangle = 0 \quad (2.10.2.5)$$

ตัวประมาณเชิงเส้นของ MMSE ของตัวแปรสุ่ม  $X$  ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ในเทอมของ  $Z_i$  โดยที่  $i$  เป็น 1, 2, 3, ...,  $n$  ทำให้

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i \quad (2.10.2.6)$$

ดังนั้น ค่าความผิดพลาดของการประมาณ

$$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x} \quad (2.10.2.7)$$

และค่า norm เป็น

$$\|\tilde{x}\|^2 = E \left[ (x - \hat{x})^2 \right] = E \left[ \left( x - \sum_{i=1}^n \beta_i z_i \right)^2 \right] \quad (2.10.2.8)$$

กำหนดให้อนุพันธ์ของ 2.10.2.8 โดย  $\beta_k$  เป็น ศูนย์

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_k} \|\tilde{x}\|^2 = E \left[ \left( x - \sum_{i=1}^n \beta_i z_i \right) z_k \right] = E[\tilde{x} z_k] = 0 \quad (2.10.2.9)$$

ตามคุณสมบัติของ Orthogonal ทำให้ (2.10.2.9) เป็น Orthogonal

### 2.10.3 การประมาณ MMSE ของตัวแปรสุ่มที่มีค่าไม่เป็นศูนย์ (Linear Minimum Mean Square Error Estimation for Nonzero Mean Random Variables)

สำหรับตัวแปรสุ่ม  $X$  ที่มีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์  $\bar{x}$  ตัวประมาณเชิงเส้นที่ดีจะอยู่ในรูป

$$\hat{x} = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i z_i \quad (2.10.3.1)$$

เมื่อค่า MSE เป็นผลบวกของค่ากำลังสอง ของค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน

$$E[\tilde{x}^2] = (E[\tilde{x}])^2 + Var(\tilde{x}) \quad (2.10.3.2)$$

ในการลดขนาด (minimize) การหาค่าควรจะมีคุณสมบัติ Unbiased ซึ่ง

$$E[\tilde{x}] = 0 \quad (2.10.3.3)$$

และการลดขนาด (Minimize) ของ norm ให้เป็นศูนย์ จากสมการที่ (2.10.3.3) จะได้

$$\beta_0 = \bar{x} - \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{z}_i \quad (2.10.3.4)$$

$$\text{เมื่อ } \bar{z}_i = E[z_i] \quad (2.10.3.5)$$

โดยใช้สมการ (2.10.3.4) แทนลงในสมการ (2.10.3.1) จะได้

$$\hat{x} = \bar{x} + \sum_{i=1}^n \beta_i (z_i - \bar{z}_i) \quad (2.10.3.6)$$

ค่าความผิดพลาดที่คล้ายกันกับการหาค่าสมการที่ (2.10.3.6) เป็น

$$\begin{aligned} \tilde{x} &\triangleq x - \hat{x} \\ &= x - \bar{x} - \sum_{i=1}^n \beta_i (z_i - \bar{z}_i) \end{aligned} \quad (2.10.3.7)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนรูปแบบจากค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นศูนย์ไปเป็นรูปแบบของค่าเฉลี่ยที่มีค่าเป็นศูนย์

หลักการของ Orthogonal  $\tilde{x} \perp z_k$  จะให้ค่าสัมประสิทธิ์  $\beta_i$  จากสมการเป็น

$$E[\tilde{x}z_k] = E\left[\left[x - \bar{x} - \sum_{i=1}^n \beta_i (z_i - \bar{z}_i)\right] z_k\right] = 0 \quad (2.10.3.8)$$

### 2.10.4 การประมาณ MMSE สำหรับเวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม (Linear Minimum Mean Square Error Estimation for Vector Random Variables)

พิจารณาค่าเวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Z$  ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นการกระจายแบบเกาส์เซียนหรือมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ การประมาณเชิงเส้นที่ดีที่สุดของ  $X$  ในเทอมของ  $Z$  ซึ่ง

$$\hat{x} = Az + b \quad (2.10.4.1)$$

โดยค่าคาดหวัง (Expected value) ของ Squared norm ของการประมาณค่าผิดพลาด

$$J \triangleq E \left[ (x - \hat{x})' (x - \hat{x}) \right] \quad (2.10.4.2)$$

โดยตัวประมาณเชิงเส้นของ MMSE

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (2.10.4.3)$$

เป็นค่าเฉลี่ยที่มีค่าเป็นศูนย์ และ Orthogonal กับค่าที่ได้จากการสังเกต  $Z$  ซึ่ง

$$E[\tilde{x}] = \bar{x} - (A\bar{z} + b) = 0 \quad (2.10.4.4)$$

$$\text{และ } b = \bar{x} - A\bar{z} \quad (2.10.4.5)$$

ดังนั้นการประมาณค่าความผิดพลาดจะเป็น

$$\tilde{x} = x - \bar{x} - A(z - \bar{z}) \quad (2.10.4.6)$$

โดยที่ส่วนประกอบของ  $\tilde{x}$  จะเป็น Orthogonal กับส่วนประกอบของ  $Z$  และเขียนได้เป็น

$$E[\tilde{x}z'] = E \left\{ [x - \bar{x} - A(z - \bar{z})] z' \right\} \quad (2.10.4.7)$$

$$\begin{aligned} &= E \left\{ [x - \bar{x} - A(z - \bar{z})] (z - \bar{z})' \right\} \\ &= P_{xz} - AP_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (2.10.4.8)$$

การลบค่าของ  $\bar{z}$  ออกจาก  $Z$  ในสมการ (2.10.4.7) และ (2.10.4.8) ซึ่งแสดงได้จากสมการ (2.10.4.4) และ  $\tilde{x}$  มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์

ดังนั้น เมทริกซ์ตัวคูณ (Weighting matrix)  $A$  จะเป็น

$$A = P_{xz} P_{zz}^{-1} \quad (2.10.4.9)$$

โดยที่  $P_{zz}$  นั้นจะต้องมีคุณสมบัติการย้อนกลับ (Inverse) จะได้ว่า

$$\hat{x} = \bar{x} + P_{xz} P_{zz}^{-1} (z - \bar{z}) \quad (2.10.4.10)$$

ซึ่งจะคล้ายกับค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขของสมการที่ (2.9.7) ที่อยู่ในรูปแบบของเกาส์เซียนและค่า MSE จากสมการ (2.10.4.10) หาได้โดย

$$E[\tilde{x}\tilde{x}'] = \left\{ [x - \bar{x} - A(z - \bar{z})][x - \bar{x} - A(z - \bar{z})]' \right\} \quad (2.10.4.11)$$

และได้ว่า

$$E[\tilde{x}\tilde{x}'] = P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx} = P_{xx|z} \quad (2.10.4.12)$$

ซึ่งคล้ายกับค่าความแปรปรวนร่วมแบบมีเงื่อนไขของสมการที่ (2.9.8) ที่อยู่ในรูปแบบของเกาส์เซียนตามสมการที่ (2.10.4.10) และ (2.10.4.12) เป็นสมการพื้นฐานของการประมาณแบบเชิงเส้น

## 2.11 บทสรุป

บทนี้กล่าวถึงสมการและทฤษฎีพื้นฐานของตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็น ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญ ที่จะช่วยให้ศึกษาอัลกอริธึมของตัวกรอง Kalman ในบทต่อไปได้เข้าใจยิ่งขึ้น และเป็นส่วนสำคัญที่ใช้แก้ปัญหา ในการปรับปรุงอัลกอริธึมของตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ที่จะได้กล่าวต่อไป

## บทที่ 3

# การประมาณเชิงเส้นในระบบพลศาสตร์และตัวกรอง Kalman

### 3.1 บทนำ

พิจารณาระบบพลศาสตร์เชิงเส้นที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete Time Linear Dynamic System) ซึ่งแสดงด้วยสมการผลต่างของเวกเตอร์ ด้วยการบวกสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนเข้าไปในระบบ ซึ่งแบบจำลองเชิงพลศาสตร์แสดงได้โดย

$$x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k) + v(k) \quad (3.1.1)$$

โดย  $x(k)$  เป็นเวกเตอร์สถานะที่มี  $n_x$  มิติ  $u(k)$  เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณป้อนเข้าที่มี  $n_u$  มิติ และ  $v(k)$  เป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนของระบบ ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และค่าความแปรปรวนร่วมเป็น

$$E[v(k)v(k)'] = Q(k) \quad (3.1.2)$$

และมีแบบจำลองของการวัดเป็น

$$z(k) = H(k)x(k) + w(k) \quad (3.1.3)$$

โดย  $z(k)$  เป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนของการวัด ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และค่าความแปรปรวนร่วมเป็น

$$E[w(k)w(k)'] = R(k) \quad (3.1.4)$$

ซึ่งค่าเมทริกซ์  $F, G, H, Q$  และ  $R$  เป็นค่าที่เราทราบ

โดยปกติแล้วจะสมมติว่าไม่ทราบค่าเริ่มต้น  $x(0)$  ซึ่งเป็นแบบจำลองของตัวแปรสุ่ม (Random variable) สัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่เกิดขึ้น โดยทราบค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนและค่าเริ่มต้นจะสมมติให้เป็นอิสระต่อกัน องค์ประกอบรวมนี้เรียกว่า สมมติฐานเชิงเส้นของเกาส์เซียน (Linear Gaussian assumption)

### 3.2 การประมาณทางพลศาสตร์ (Dynamic Estimation)

จากการหาค่าของตัวแปรสุ่ม  $X$  ในเทอมของ  $Z$  ซึ่งเป็นแบบ minimum mean square error (MMSE) สำหรับ  $X$  และ  $Z$  ซึ่งมีความสัมพันธ์กัน ดังกำหนดตามสมการที่ (3.2.1) โดยค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข (Conditional Mean) เป็น

$$\hat{x} \triangleq E[x|z] = \bar{x} + P_{xz}P_{zz}^{-1}(z - \bar{z}) \quad (3.2.1)$$

และค่าความแปรปรวนร่วมแบบมีเงื่อนไข (Conditional Covariance) เป็น

$$P_{x|z} \triangleq E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})' | z] = P_{xx} - P_{xz}P_{zz}^{-1}P_{zx} \quad (3.2.2)$$

ซึ่งการประมาณค่าของ  $X$  ในเทอมของ  $Z$  จะเป็นฟังก์ชันกึ่งเชิงเส้นของ  $Z$  ซึ่งก็คือสมมติฐานของเกาส์เซียน อันเป็นที่มาของตัวกรอง Kalman โดยการหาค่าของพารามิเตอร์แต่ละตัวในสมการที่ (3.2.1) และ (3.2.2) สามารถแสดงได้ดังนี้

เริ่มจากการกำหนดค่า (Update) ตัวแปรที่ทำการหาค่าสถานะที่  $k+1$

$$x \rightarrow x(k+1) \quad (3.2.3)$$

ทำการหาค่าเฉลี่ยจากสถานะอันก่อนถึงสถานะที่  $k+1$  ซึ่งเป็นการหาค่าสถานะล่วงหน้า (Predicted state) เป็น

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x}(k+1) \triangleq \hat{x}(k+1|k) = E[x(k+1)|Z^k] \quad (3.2.4)$$

ภายใต้การสังเกต

$$z \rightarrow z(k+1) \quad (3.2.5)$$

ด้วยค่าเฉลี่ยก่อนหน้า ค่าการวัดล่วงหน้า (Predicted measurement)

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z}(k+1) \triangleq \hat{z}(k+1|k) = E[z(k+1)|Z^k] \quad (3.2.6)$$

ในหนึ่งรอบของการคำนวณ การประมาณสถานะอันก่อนถึงสถานะที่  $k+1$  จะได้ การประมาณสถานะใหม่ (Updated state estimate) เป็น

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}(k+1) \triangleq \hat{x}(k+1|k+1) = E[x(k+1)|Z^{k+1}] \quad (3.2.7)$$

ค่าความแปรปรวนร่วมของการทำนายสถานะ (State prediction covariance) เป็น

$$P_{xx} \rightarrow P(k+1|k) = \text{cov}[x(k+1)|Z^k] \quad (3.2.8)$$

ค่าความแปรปรวนร่วมของการทำนายการวัด (Measurement prediction covariance) เป็น

$$P_{zz} \rightarrow S(k+1|k) = \text{cov}[z(k+1)|Z^k] \quad (3.2.9)$$

ค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างค่าการประมาณของตัวแปร  $x(k+1)$  และการวัด  $z(k+1)$  เป็น

$$P_{xz} \rightarrow \text{cov}[x(k+1), z(k+1)|Z^k] = \text{cov}[\tilde{x}(k+1|k) \tilde{z}(k+1|k)|Z^k] \quad (3.2.10)$$

และค่าความแปรปรวนร่วมของสถานะใหม่ (Updated state covariance)

$$P_{xx|z} \rightarrow P(k+1|k+1) = \text{cov}[x(k+1)|Z^{k+1}] \quad (3.2.11)$$

โดยค่าอัตราขยายของตัวกรอง (Filter gain)

$$P_{xz} P_{zz}^{-1} \rightarrow W(k+1) = \text{cov}[x(k+1), z(k+1)|Z^k] S(k+1)^{-1} \quad (3.2.12)$$

### 3.3 อัลกอริทึมของตัวกรอง Kalman (Algorithm of Kalman Filter)

การหาค่าสถานะล่วงหน้า (Predicted state) ซึ่งได้จากสมการที่ (3.1.1) มาหาค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไขภายใต้  $Z^k$  จะได้

$$E[x(k+1)|Z^k] = E[[F(k)x(k) + v(k)]|Z^k] \quad (3.3.1)$$

โดยกำหนดให้สัญญาณรบกวนของระบบ  $v(k)$  เป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ จะได้ผลเป็น

$$\hat{x}(k+1|k) = F(k)\hat{x}(k|k) \quad (3.3.2)$$

แล้วลบด้วยสมการที่ (3.1.1) จะได้ค่าความผิดพลาดของการทำนายสถานะ (State prediction error)

$$\tilde{x}(k+1|k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) = F(k)\tilde{x}(k|k) + v(k) \quad (3.3.3)$$

ซึ่งสัญญาณป้อนเข้า  $u(k)$  ในสมการที่ (3.3.3) จะไม่มีผลในการคำนวณค่าความผิดพลาด

ค่าความแปรปรวนร่วมของการทำนายสถานะ (State prediction covariance) ในสมการที่ (2.8) สามารถเขียนในรูป

$$E\left[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}(k+1|k)'|Z^k\right] = F(k)E\left[\tilde{x}(k|k)\tilde{x}(k|k)'|Z^k\right]F(k)' + E\left[v(k)v(k)'|Z^k\right] \quad (3.3.4)$$

และสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F(k)' + Q(k) \quad (3.3.5)$$

การหาค่าการวัดล่วงหน้า (Predicted measurement) ซึ่งได้จากสมการที่ (3.2.6) มาหาค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไขภายใต้  $Z^k$  จะได้

$$E\left[z(k+1)|Z^k\right] = E\left[[H(k+1)x(k+1) + w(k+1)]|Z^k\right] \quad (3.3.6)$$

ให้สัญญาณรบของการวัด  $w(k+1)$  เป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ จะได้ผลเป็น

$$\hat{z}(k+1|k) = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \quad (3.3.7)$$

แล้วลบด้วยสมการที่ (3.1.2) จะได้ ค่าความผิดพลาดของการทำนายการวัด (Measurement prediction error)

$$\tilde{z}(k+1|k) = z(k+1) - \hat{z}(k+1|k) = H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + w(k+1) \quad (3.3.8)$$

จะได้ค่าความแปรปรวนร่วมของการทำนายการวัด (Measurement prediction covariance) จากสมการที่ (3.3.8) ทำวิธีเดียวกันกับสมการที่ (3.3.5) เป็น

$$S(k+1) = H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)' + R(k+1) \quad (3.3.9)$$

ค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างค่าสถานะและการวัด โดยใช้สมการที่ (3.3.8) จะเป็น

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{z}(k+1|k)'|Z^k\right] &= E\left[\tilde{x}(k+1|k)[H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + w(k+1)]'|Z^k\right] \\ &= P(k+1|k)H(k+1)' \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

อัตราขยายของตัวกรอง (Filter gain) โดยใช้สมการที่ (3.3.9) และ สมการที่ (3.3.10) มีค่าเป็น

$$W(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)'S(k+1)^{-1} \quad (3.3.11)$$

ดังนั้นการประมาณสถานะใหม่ (Updated state estimate) สามารถเขียนใหม่ตามสมการที่ (3.2.1) ได้เป็น

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)v(k+1) \quad (3.3.12)$$

เมื่อให้

$$v(k+1) \triangleq z(k+1) - \hat{z}(k+1|k) = \tilde{z}(k+1|k) \quad (3.3.13)$$

สุดท้าย จะได้ค่าความแปรปรวนร่วมใหม่ (Updated covariance) ของสถานะ  $k+1$  ตามสมการที่ (3.2.2) เป็น

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1) &= P(k+1|k) - P(k+1|k)H(k+1)'S(k+1)^{-1}H(k+1)P(k+1|k) \\ &= [I - W(k+1)H(k+1)]P(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

หรือในรูปแบบที่สมมาตรเป็น

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - W(k+1)S(k+1)W(k+1)' \quad (3.3.15)$$

### 3.4 สมมุติฐานทางสถิติของตัวกรอง Kalman

ค่าเริ่มต้นของสถานะที่ทราบค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนร่วม

$$E[x(0)|Z^0] = \hat{x}(0|0) \quad (3.4.1)$$

$$\text{cov}[x(0)|Z^0] = P(0|0) \quad (3.4.2)$$

ที่  $Z^0$  เป็นค่าเริ่มต้นของข้อมูล

สัญญาณรบกวนของระบบและการวัดเป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และทราบค่าความแปรปรวนร่วม

$$E[v(k)] = 0 \quad (3.4.3)$$

$$E[v(k)v(j)'] = Q(k)\delta_{kj} \quad (3.4.4)$$

$$E[w(k)] = 0 \quad (3.4.5)$$

$$E[w(k)w(j)'] = R(k)\delta_{kj} \quad (3.4.6)$$

ซึ่งทั้งหมดจะเป็นอิสระต่อกัน โดย

$$E[x(0)v(k)'] = 0 \quad (3.4.7)$$

$$E[x(0)w(k)'] = 0 \quad (3.4.8)$$

$$E[v(k)w(j)'] = 0 \quad (3.4.9)$$

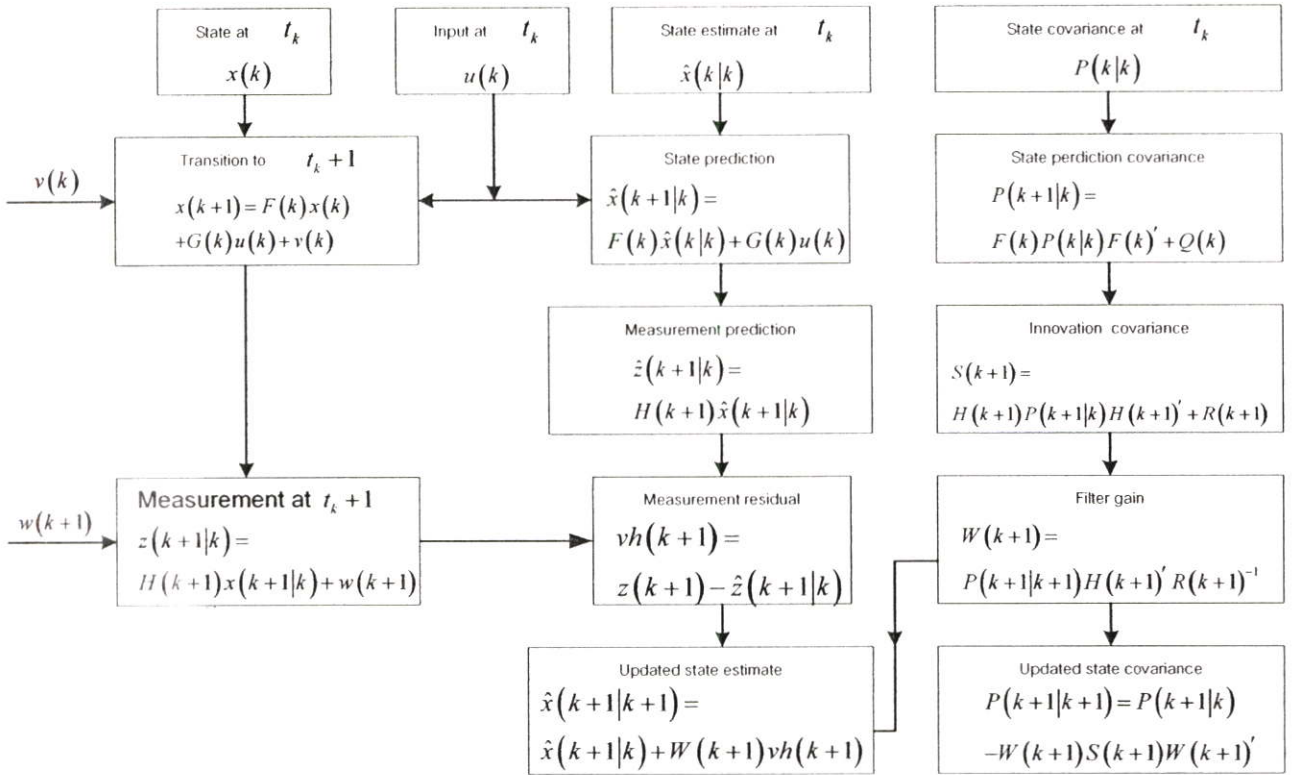
และสามารถแสดงให้เห็นว่า ภายใต้สมมุติฐานของเกาส์เซียน สัญญาณรบกวนจะมีค่าเป็น

$$E[v(k)|Z^k] = E[v(k)] = 0 \quad (3.4.10)$$

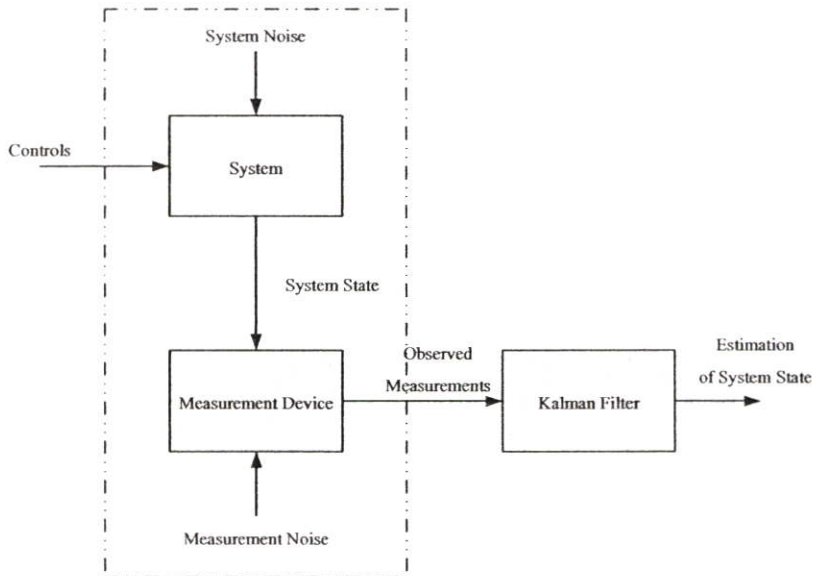
$$E[w(k)|Z^{k-1}] = E[w(k)] = 0 \quad (3.4.11)$$

### 3.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงพื้นฐานและที่มาของอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman ตั้งแต่เริ่มต้นของระบบ พลศาสตร์เชิงเส้นที่ไม่ต่อเนื่องเชิงเวลา การกำหนดคัวแปรที่ใช้ในการประมาณทางพลศาสตร์ ที่มาของแต่ละสมการที่ใช้ในอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman ตลอดจนสมมุติฐานค่าเริ่มต้นและข้อกำหนดต่างๆซึ่งต้องทราบ ซึ่งเมื่อเอาสมการต่างๆมาจัดเรียง จะได้ขั้นตอนการทำงานของอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman ดังรูปที่ 3.1 และรูปที่ 3.2 แสดงการต่อตัวกรอง Kalman ในการใช้งานโดยทั่วไปต้องนำเอาความรู้พื้นฐานเหล่านี้ไปใช้ในการปรับปรุงอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ที่จะได้กล่าวในบทต่อไป



รูปที่ 3.1 การทำงานของตัวกรอง Kalman



รูปที่ 3.2 การใช้งานของตัวกรอง Kalman

## บทที่ 4

# การปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้

### 4.1 บทนำ

จากบทที่แล้ว จะเริ่มจากพิจารณาระบบพลศาสตร์แบบเชิงเส้นทั่วไป

$$\begin{aligned}X_{(k+1)} &= \Phi_{(k)}X_{(k)} + v_{(k)} \\Z_{(k+1)} &= H_{(k+1)}X_{(k+1)} + w_{(k+1)}\end{aligned}$$

โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned}E[v_{(k)}] &= 0 \\cov[v_{(k)}] &= Q_{(k)} \\E[w_{(k)}] &= 0 \\cov[w_{(k)}] &= R_{(k)} \\cov[v_{(k)}, w_{(k)}] &= 0\end{aligned}$$

โดยที่  $k$  แทนตำแหน่งของสถานะ;  $X_{(k)}$  เป็นสถานะของระบบที่สถานะ  $k$ ;  $\Phi_{(k)}$  เป็นเมทริกซ์ของการส่งผ่าน;  $v_{(k)}$  เป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนของระบบ;  $Z_{(k+1)}$  เป็นค่าของการวัดที่สถานะ  $k+1$ ;  $H_{(k+1)}$  เป็นเมทริกซ์ของการวัด;  $w_{(k+1)}$  เป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนของการวัด โดยขั้นตอนของการประมาณด้วยตัวกรอง Kalman ด้วยวิธีดั้งเดิม (classical method) แสดงได้ดังนี้คือ

การประมาณล่วงหน้า:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{(k+1/k)} &= \Phi_{(k)}\hat{X}_{(k/k)} \\P_{(k+1/k)} &= \Phi_{(k)}P_{(k/k)}\Phi_{(k)}^T + Q_{(k)}\end{aligned}$$

การประมาณใหม่:

$$\begin{aligned}K_{(k+1)} &= P_{(k+1/k)}H_{(k+1)}^T[H_{(k+1)}P_{(k+1/k)}H_{(k+1)}^T + R_{(k+1)}]^{-1} \\ \hat{X}_{(k+1/k+1)} &= \hat{X}_{(k+1/k)} + K_{(k+1)}[Z_{(k+1)} - H_{(k+1)}\hat{X}_{(k+1/k)}] \\ P_{(k+1/k+1)} &= [I - K_{(k+1)}H_{(k+1)}]P_{(k+1/k)}\end{aligned}$$

ซึ่ง  $\hat{X}_{(k+1/k)}$  เป็นค่าการประมาณสถานะล่วงหน้าของระบบ;  $P_{(k+1/k)}$  เป็นค่าเมทริกซ์ผันแปรของ  $\hat{X}_{(k+1/k)}$ ;  $K_{(k+1)}$  เป็นเมทริกซ์ของอัตราขยาย;  $\hat{X}_{(k+1/k+1)}$  เป็นค่าที่ได้จากการประมาณ;  $P_{(k+1/k+1)}$  เป็นค่าเมทริกซ์ผันแปรที่ได้จากการประมาณ.

โดยในบทนี้จะอธิบายในสองส่วนใหญ่ คือในส่วนของตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า [1,7] จะเป็นการหาค่าของ

- เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนของระบบ ( $Q_{(k)}$ )
- เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนจากการวัด ( $R_{(k)}$ )

และในส่วนของการปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นการหาค่าของ

- Variance factor  $\sigma_X^2$  ของ  $P_{(k+1/k)}$
- Variance factor  $\sigma_Q^2$  ของ  $Q_{(k)}$
- Variance factor  $\sigma_R^2$  ของ  $R_{(k)}$

ซึ่งจะได้แสดงต่อไป

#### 4.2 ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า [1,7]

เนื่องจากในความเป็นจริงไม่สามารถหาค่าของสถานะของระบบ ( $X_{(k+1)}$ ) ได้โดยตรง จึงไม่สามารถหาค่าของสัญญาณรบกวนของการวัด (Measurement noise :  $w_{(k+1)}$ ) ได้ แต่สามารถหาค่าได้จากการประมาณ

โดย  $Wh_{(k+1)}$  เป็นค่าที่ได้จากการประมาณของ  $w_{(k+1)}$  หาได้จาก

$$Wh_{(k+1)} = Z_{(k+1)} - H_{(k+1)}\hat{X}_{(k+1/k)} \quad (4.1.1)$$

ซึ่ง  $\hat{X}_{(k+1/k+1)}$  เป็นค่าที่ได้จากการประมาณโดยใช้ตัวกรอง Kalman

$$\text{โดย } E[Wh_{(k+1)} | Z^k] = \widehat{Wh}_{(k+1/k)} = 0$$

$$\text{ให้ } \widetilde{Wh}_{(k+1/k)} = Wh_{(k+1)} - \widehat{Wh}_{(k+1/k)}$$

$$\text{ดังนั้น } \widetilde{Wh}_{(k+1/k)} = H_{(k+1)}\widetilde{X}_{(k+1/k)} + w_{(k+1)} \quad (4.1.2)$$

ซึ่งเราสามารถหาค่าความแปรปรวนร่วมของ  $Wh_{(k+1)}$  ได้จาก

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Wh_{(k+1)} | Z^k] &= E\left[\widetilde{Wh}_{(k+1|k)} \widetilde{Wh}_{(k+1|k)}^T | Z^k\right] \\ &= E\left[\langle H_{(k+1)} \widetilde{X}_{(k+1|k)} + w_{(k+1)} \rangle \langle H_{(k+1)} \widetilde{X}_{(k+1|k)} + w_{(k+1)} \rangle^T | Z^k\right] \\ &= H_{(k+1)} E\left[\widetilde{X}_{(k+1|k)} \widetilde{X}_{(k+1|k)}^T | Z^k\right] H_{(k+1)}^T + E[w_{(k+1)} w_{(k+1)}^T | Z^k] \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\text{โดยที่ } \text{Cov}[Wh_{(k+1)} | Z^k] = H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + R_{(k+1)} \quad (4.1.4)$$

$$\text{ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น } E\left[\widetilde{Wh}_{(k+1|k)} \widetilde{Wh}_{(k+1|k)}^T | Z^k\right] = H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + R_{(k+1)}$$

และจากคุณสมบัติของกฎการคาดหวังซ้ำวน (Law of Iterated Expectations)

$$E\left[E[X_k | Z^k]\right] = E[X_k]$$

$$\text{ดังนั้น } E\left[E\left[\widetilde{Wh}_{(k+1|k)} \widetilde{Wh}_{(k+1|k)}^T | Z^k\right]\right] = E\left[H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + R_{(k+1)}\right]$$

$$E\left[\widetilde{Wh}_{(k+1|k)} \widetilde{Wh}_{(k+1|k)}^T\right] = E\left[H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T\right] + R_{(k+1)} \quad (4.1.5)$$

$$\text{จะได้ค่าของ } R_{(k+1)} = E\left[\widetilde{Wh}_{(k+1|k)} \widetilde{Wh}_{(k+1|k)}^T\right] - E\left[H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T\right] \quad (4.1.6)$$

จากวิธีการหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย (Sample Mean)

$$\text{เมื่อ } E[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

ดังนั้น

$$R_{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\widetilde{Wh}_{(k+1|k)} \widetilde{Wh}_{(k+1|k)}^T\right] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T\right] \quad (4.1.7)$$

เมื่อ N คือจำนวนรอบของการทำงานของตัวกรอง Kalman โดยที่ N เป็น 1, 2, 3, ..., k

ในการหาค่าของสัญญาณรบกวนของระบบ (Process noise:  $v_{(k+1)}$ ) นั้น ไม่สามารถหาค่าได้โดยตรง ซึ่งเหมือนกับหาค่าของสัญญาณรบกวนของการวัด (Measurement noise :  $w_{(k+1)}$ ) ซึ่งหาได้จาก

$$Vh_{(k)} = \Phi_{(k)} \widehat{X}_{(k|k)} - \widehat{X}_{(k+1|k)} \quad (4.1.8)$$

โดยที่  $Vh_{(k)}$  เป็นค่าที่ได้จากการประมาณของ  $V_{(k)}$

$$\text{และ } E[Vh_{(k)} | Z^k] = \widehat{Vh}_{(k|k)} = 0$$

$$\text{โดยจะเขียนใหม่ได้เป็น } Vh_{(k)} = \widetilde{X}_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} \widetilde{X}_{(k|k)} - v_{(k)} \quad (4.1.9)$$

จะสามารถหาค่าความแปรปรวนร่วมของ  $Vh_{(k)}$  ได้จาก

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Vh_{(k)} | Z^k] &= E[\widetilde{Vh}_{(k|k)} \widetilde{Vh}_{(k|k)}^T | Z^k] \\ &= E[\langle \widetilde{X}_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} \widetilde{X}_{(k|k)} - v_{(k)} \rangle \langle \widetilde{X}_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} \widetilde{X}_{(k|k)} - v_{(k)} \rangle^T | Z^k] \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$$\text{โดยที่ } \text{Cov}[Vh_{(k)} | Z^k] = P_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T + Q_{(k)} \quad (4.1.11)$$

และจากคุณสมบัติของกฎการคาดหวังซ้ำวน (Law of Iterated Expectations)

$$E[E[X_k | Z^k]] = E[X_k]$$

$$\text{ดังนั้น } E[E[\widetilde{Vh}_{(k|k)} \widetilde{Vh}_{(k|k)}^T | Z^k]] = E[P_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T + Q_{(k)}]$$

$$E[\widetilde{Vh}_{(k|k)} \widetilde{Vh}_{(k|k)}^T] = E[P_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T] + Q_{(k)} \quad (4.1.12)$$

$$\text{จะได้ค่าของ } Q_{(k)} = E[\widetilde{Vh}_{(k|k)} \widetilde{Vh}_{(k|k)}^T] - E[P_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T] \quad (4.1.13)$$

จากวิธีการหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย (Sample Mean)

$$\text{เมื่อ } E[X] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

ดังนั้น

$$Q_{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \widetilde{V}h_{(k|k)} \widetilde{V}h_{(k|k)}^T \right] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [P_{(k+||k)} - \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T] \quad (4.1.14)$$

เมื่อ  $N$  คือจำนวนรอบของการทำงานของตัวกรอง Kalman โดยที่  $N$  เป็น 1, 2, 3, ...,  $k$

จากสมการที่ (4.1.5) และสมการที่ (4.1.8) จะเห็นได้ว่า จะสามารถประมาณค่าเมทริกซ์  $Q_{(k)}$  และ  $R_{(k)}$  ได้ หักข้อถัดไปเป็นวิธีการที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เพื่อปรับปรุงการประมาณค่าที่ได้ให้มีความถูกต้องมากขึ้น

### 4.3 การปรับปรุงตัวกรองตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้

เนื่องจากการคำนวณค่าตัวประกอบความแปรปรวนของแบบจำลองทางพลศาสตร์ใดๆ ไม่อาจทำได้โดยตรง จึงใช้หลักการทำนายค่าส่วนเหลือ (Predicted residual) ของค่าของสัญญาณรบกวนของการวัด (Measurement noise:  $w_{(k+1)}$ ) ซึ่งสามารถหาค่าได้จากการประมาณ

โดย  $Wh_{(k+1)}$  เป็นค่าที่ได้จากการประมาณของ  $w_{(k+1)}$  หาได้จาก

$$\begin{aligned} Wh_{(k+1)} &= Z_{(k+1)} - H_{(k+1)} \widehat{X}_{(k+||k)} \\ &= H_{(k+1)} \widetilde{X}_{(k+||k)} + w_{(k+1)} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\text{ซึ่ง } E[Wh_{(k+1)} | Z^k] = \widehat{Wh}_{(k+||k)} = 0 \quad (4.2.2)$$

โดยกำหนดให้

$$E[v_{(k)} v_{(k)}^T] = \sigma_Q^2 Q_{(k)}, E[v_{(k)}] = 0 \quad (4.2.3)$$

$$E[w_{(k)} w_{(k)}^T] = \sigma_R^2 R_{(k)}, E[w_{(k)}] = 0 \quad (4.2.4)$$

$$E[\widetilde{X}_{(k+||k)} \widetilde{X}_{(k+||k)}^T | Z^k] = \sigma_X^2 P_{(k+||k)} \quad (4.2.5)$$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเศษเหลือทำนาย (Predicted residuals) สามารถหาได้โดย

$$\text{Cov}[Wh_{(k+1)} | Z^k] = E[\widetilde{Wh}_{(k+||k)} \widetilde{Wh}_{(k+||k)}^T | Z^k] \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[Wh_{(k+1)} | Z^k] &= E \left[ \left\langle H_{(k+1)} \tilde{X}_{(k+1|k)} + w_{(k+1)} \right\rangle \left\langle H_{(k+1)} \tilde{X}_{(k+1|k)} + w_{(k+1)} \right\rangle^T \middle| Z^k \right] \\
&= H_{(k+1)} E \left[ \tilde{X}_{(k+1|k)} \tilde{X}_{(k+1|k)}^T \middle| Z^k \right] H_{(k+1)}^T + E \left[ w_{(k+1)} w_{(k+1)}^T \middle| Z^k \right] \\
\text{cov}[Wh_{(k+1)} | Z^k] &= \sigma_X^2 H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + \sigma_R^2 R_{(k+1)}
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

ดังนั้น

$$E \left[ \tilde{W}h_{(k+1|k)} \tilde{W}h_{(k+1|k)}^T \middle| Z^k \right] = \sigma_X^2 H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + \sigma_R^2 R_{(k+1)} \tag{4.2.8}$$

แล้วคูณเข้าทางด้านซ้ายของสมการที่ (4.2.8) ด้วย  $R_{(k+1)}^{-1}$

$$\text{จะได้ } R_{(k+1)}^{-1} E \left[ \tilde{W}h_{(k+1|k)} \tilde{W}h_{(k+1|k)}^T \middle| Z^k \right] = \sigma_X^2 R_{(k+1)}^{-1} H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + \sigma_R^2 \tag{4.2.9}$$

จากคุณสมบัติค่าความคาดหมายของ Quadratic

$$\text{Tr} \left[ A E \left[ X X^T \right] \right] = E \left[ X^T A X \right]$$

และเมื่อหาค่า Trace ของสมการที่ (4.2.9) จะได้

$$\text{Tr} \left[ R_{(k+1)}^{-1} E \left[ \tilde{W}h_{(k+1|k)} \tilde{W}h_{(k+1|k)}^T \middle| Z^k \right] \right] = \text{Tr} \left[ \sigma_X^2 R_{(k+1)}^{-1} H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + \sigma_R^2 \right]$$

$$\text{ดังนั้น } E \left[ \tilde{W}h_{(k+1|k)}^T R_{(k+1)}^{-1} \tilde{W}h_{(k+1|k)} \middle| Z^k \right] = \sigma_X^2 \text{Tr} \left[ R_{(k+1)}^{-1} H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T \right] + \sigma_R^2 \tag{4.2.10}$$

จากคุณสมบัติของกฎการคาดหวังซ้ำวน (Law of Iterated Expectations)

$$E \left[ E \left[ X_k \middle| Z^k \right] \right] = E \left[ X_k \right]$$

และจากวิธีการหาค่าเฉลี่ยอย่างง่าย (Sample Mean)

$$\text{เมื่อ } E \left[ X \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

$$\text{ดังนั้น } E \left[ E \left[ \tilde{W}h_{(k+1|k)}^T R_{(k+1)}^{-1} \tilde{W}h_{(k+1|k)} \middle| Z^k \right] \right] = E \left[ \sigma_X^2 \text{Tr} \left[ R_{(k+1)}^{-1} H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T \right] + \sigma_R^2 \right]$$

ซึ่งจะได้ค่าตามสมการที่ (4.2.11)

$$E\left[\widetilde{W}h_{(k+1|k)}^T R_{(k+1)}^{-1} \widetilde{W}h_{(k+1|k)}\right] = \sigma_x^2 \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \text{Tr}\left[R_{(i+1)}^{-1} H_{(i+1)} P_{(i+1|j)} H_{(i+1)}^T\right] + \sigma_R^2 \quad (4.2.11)$$

และสามารถหาค่าของ  $\sigma_x^2$  ได้จาก

$$\sigma_x^2 = [E[\widetilde{W}h_{(k+1)}^T R_{(k+1)}^{-1} \widetilde{W}h_{(k+1)}] - \sigma_R^2] / \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \text{tr}[R_{(i+1)}^{-1} H_{(i+1)} P_{(i+1|j)} H_{(i+1)}^T] \quad (4.2.12)$$

โดยอาศัยการคำนวณข้างต้น จะสามารถหาค่าตัวประกอบความแปรปรวน (variance factor) สำหรับแบบจำลองของสัญญาณรบกวนของระบบได้โดยอาศัยสมการที่ 4.2.12

$$\text{โดยที่ } \sigma_x^2 P_{(k+1|k)} = \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T + \sigma_Q^2 Q_{(k)}$$

$$\text{ดังนั้น } E\left[\widetilde{W}h_{(k+1|k)}^T R_{(k+1)}^{-1} \widetilde{W}h_{(k+1|k)}\right] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \text{Tr}\left[R_{(i+1)}^{-1} H_{(i+1)} \left\langle \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T + \sigma_Q^2 Q_{(k)} \right\rangle H_{(i+1)}^T\right] + \sigma_R^2$$

ซึ่งสามารถหาค่าของ  $\sigma_Q^2$  ได้จาก

$$\sigma_Q^2 = \frac{E\left[\widetilde{W}h_{(k+1|k)}^T R_{(k+1)}^{-1} \widetilde{W}h_{(k+1|k)}\right] - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \text{Tr}\left[R_{(i+1)}^{-1} H_{(i+1)} \Phi_{(i)} P_{(i|j)} \Phi_{(i)}^T H_{(i+1)}^T H_{(i+1)}^T\right] - \sigma_R^2}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \text{Tr}\left[R_{(i+1)}^{-1} H_{(i+1)} Q_{(i)} H_{(i+1)}^T\right]} \quad (4.2.13)$$

#### 4.4 บทสรุป

ในบทนี้กล่าวถึงที่มาของอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า ซึ่งใช้เป็นแนวความคิดพื้นฐาน ในการปรับปรุงเพื่อให้ได้มาซึ่งอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบใหม่ โดยที่เรานำอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบมาทดสอบเพื่อที่จะแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ซึ่งได้จากการปรับปรุงอัลกอริธึมตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า ดังจะแสดงให้เห็นในหัวข้อถัดไป

## บทที่ 5

# ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

### 5.1 บทนำ

ในบทนี้จะทำการทดสอบอัลกอริทึมของตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบเพื่อที่จะเป็นการยืนยันประสิทธิภาพของวิธีการที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ซึ่งได้จากการปรับปรุงอัลกอริทึมตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้

โดยที่การจำลองการทดสอบจะกำหนดให้มีสัญญาณรบกวนเข้าสู่ระบบ แล้วจะนำตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบมาทำการวิเคราะห์ เพื่อหาค่าของสถานะที่แท้จริงของระบบ แล้วนำค่าความผิดพลาดของตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบมาเปรียบเทียบกัน

ในการจำลองการทดสอบ เราจะใช้ตัวอย่างของระบบ [10] ซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

$$\Phi_{(k)} = \begin{bmatrix} 1.1269 & -0.4940 & 0.1129 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{(k)} = \begin{bmatrix} -0.3832 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5919 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5191 \end{bmatrix}$$

$$H_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองของระบบข้างต้นนี้ เป็นค่าดั้งเดิมที่ใช้ในการจำลองผลโดยใช้โปรแกรม Matlab เพื่อวิเคราะห์และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบ โดยจะแยกการทดสอบออกเป็นสองส่วน คือ

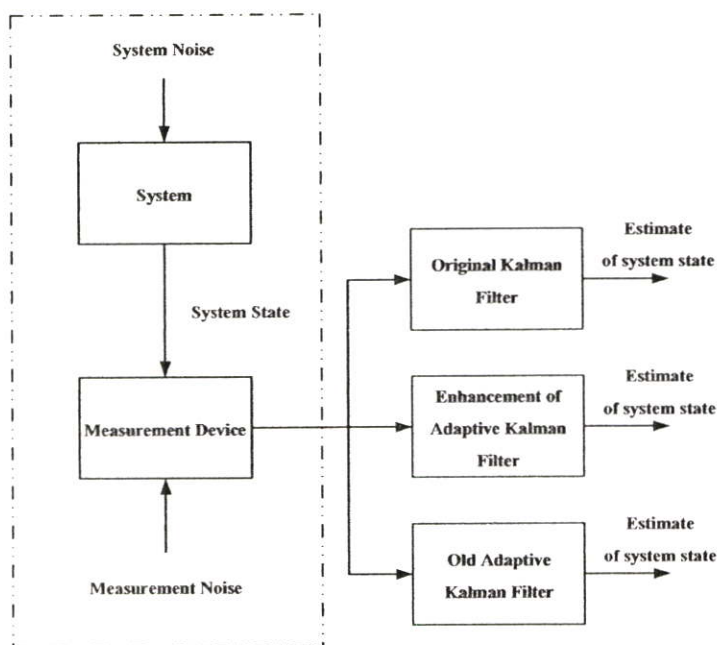
- ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน (Gaussian Noise) และ
- ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน (Chaotic Noise) ซึ่งจะแสดงใน 3 ลักษณะ คือ  
Lorenz noise, Logistic map noise และ Henon map noise

## 5.2 ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน (Gaussian Noise)

ในส่วนนี้จะทำการเปรียบเทียบผลจากการทดลองโดยใช้ตัวกรอง Kalman แต่ละแบบ เมื่อให้สัญญาณรบกวนที่มีในระบบเป็นสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนและกำหนดค่าของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนของระบบ ( $Q_{(k)}$ ) และเมทริกซ์ค่าความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนจากการวัด ( $R_{(k)}$ ) ให้มีค่าคงที่เพื่อใช้ในการจำลองการทดสอบ โดยให้

$$Q_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } R_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งในการจำลองการทดสอบ กำหนดให้ตัวกรอง Kalman ทุกชนิดมีโครงสร้างการทำงานในลักษณะเดียวกัน แสดงได้ดังรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 การทดสอบของตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน

โดยที่ผลของการทดสอบจากการจำลองโดยใช้โปรแกรม Matlab แสดงในตารางที่ 5.1 โดยแสดงค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS: Root Mean Square Error) ของพารามิเตอร์แต่ละตัวของระบบที่ใช้ในการทดสอบซึ่งได้จากการประมาณโดยใช้ตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบเปรียบเทียบกัน

โดยค่า RMS ของความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับพารามิเตอร์ทั้ง 3 ของระบบเมื่อใช้ตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา (Original KF) จะมีค่าที่สูงมาก เมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman แบบอื่นๆ แต่เมื่อเราใช้ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า (Adaptive KF) จะสามารถลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้เป็นอย่างมาก แต่เมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman ที่เสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ (Enhancement of Adaptive KF) ยิ่งถือว่าสูงอยู่มาก โดยสามารถเปรียบเทียบผลได้จากตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน

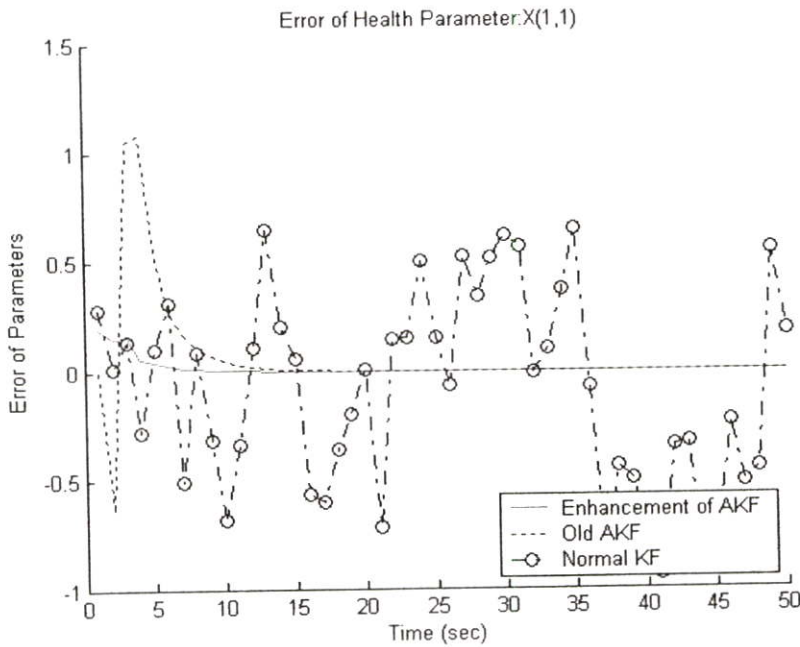
Parameter	Original KF	Old Adaptive KF	Enhancement of Adaptive KF
X(1,1)	0.0625	0.0191	0.0039
X(2,1)	0.0623	0.0092	0.0054
X(3,1)	0.0592	0.0147	0.0057
Average	0.0613	0.0143	0.0050

และเมื่อพิจารณารูปที่ 5.2-5.4 ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลาของการทดสอบที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา จะเห็นว่ากราฟของค่าความผิดพลาดจะแกว่งไปมาในช่วง 1 ถึง -1 ตลอดเวลาที่ใช้ในการทดสอบ แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาว่าไม่สามารถหาค่าของพารามิเตอร์ของระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนป้อนอยู่ได้ เนื่องจากเราไม่ทราบค่าที่แท้จริงของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนของระบบ ( $Q_{(k)}$ ) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวนจากการวัด ( $R_{(k)}$ ) ซึ่งในที่นี้เราใช้ค่าประมาณ

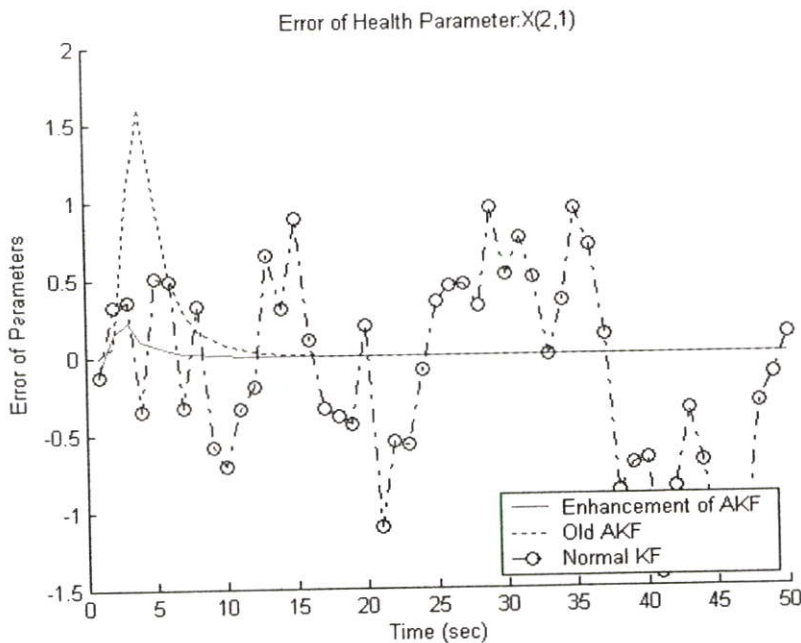
ในส่วนของกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่านั้น ในช่วง 10 วินาทีแรกของการทดสอบ ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะมีค่าที่สูงอยู่มาก และค่าความผิดพลาดจะลดลงจนเป็นศูนย์ในช่วงเวลา 15 วินาที และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ

ส่วนกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ในช่วง 5 วินาทีแรกของการทดสอบ จะเกิดค่าความผิดพลาดอยู่แต่ก็เพียงเล็กน้อยเท่านั้น และค่าความผิดพลาดจะลดลงจนเป็นศูนย์ในช่วงเวลา 10 วินาที ซึ่งใช้เวลานี้น้อยกว่าตัวกรอง

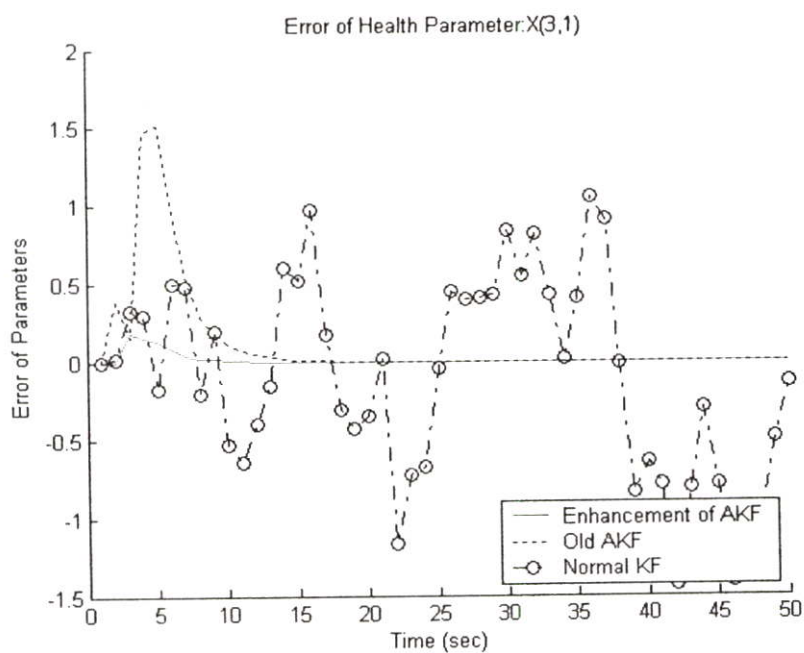
Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเพิ่มประสิทธิภาพ ที่เกิดจากการปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ ที่นำเสนอในในวิทยานิพนธ์นี้



รูปที่ 5.2 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(1,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน



รูปที่ 5.3 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(2,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน



รูปที่ 5.4 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(3,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน

### 5.3 ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน (Chaotic Noise)

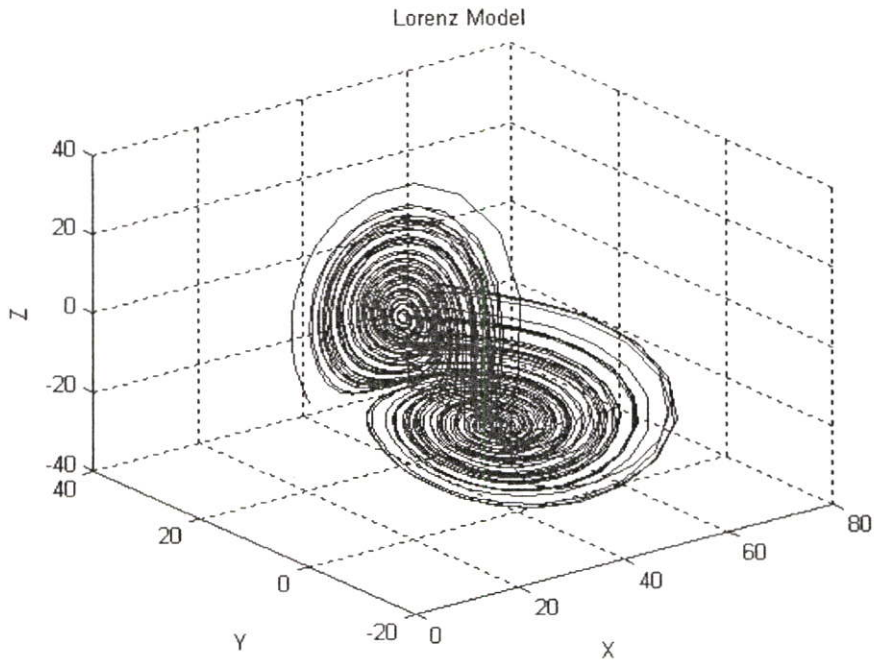
ในการทดลอง เราจะใช้สัญญาณรบกวนแบบอลวน 3 แบบ คือ แบบ Lorenz, แบบ Logistic map และแบบ Henon map ป้อนเข้าสู่ระบบแล้วทำการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบผลการจำลองโดยใช้ตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบ

#### 5.3.1 ระบบที่มีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz

ในการจำลองการทดสอบ จะใช้ตัวอย่างของสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz ซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

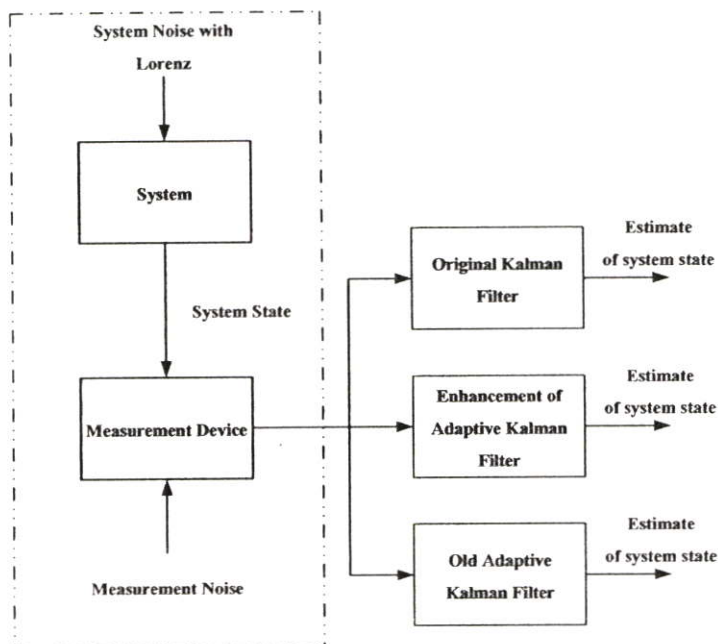
และกำหนดให้ค่า  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 28$ ,  $\beta = 8/3$  ตามลำดับ



รูปที่ 5.5 สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz

รูปที่ 5.5 แสดงรูปแบบของสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz ที่ใช้ในการจำลองการทดสอบของตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบ

ในการจำลองการทดสอบ จะให้ตัวกรอง Kalman ที่นำมาเปรียบเทียบใช้งานในลักษณะเดียวกัน โดยแสดงได้ดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6 การทดสอบตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz

โดยที่ผลการทดสอบจากการจำลองโดยใช้โปรแกรม Matlab แสดงในตารางที่ 5.2 โดยเป็นค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของพารามิเตอร์แต่ละตัวของระบบที่ใช้ในการทดสอบซึ่งได้จากการประมาณโดยใช้ตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบเปรียบเทียบกัน

โดยค่า RMS ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับพารามิเตอร์ทั้ง 3 ของระบบเมื่อใช้ตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา (Original KF) จะมีค่าที่สูงมากซึ่งมากกว่ากรณีระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน แต่เมื่อเราใช้ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า (Adaptive KF) จะสามารถลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้มาก แต่เมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ (Enhancement of Adaptive KF) ยังถือว่าสูงอยู่มาก โดยสามารถเปรียบเทียบผลได้จากตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมี

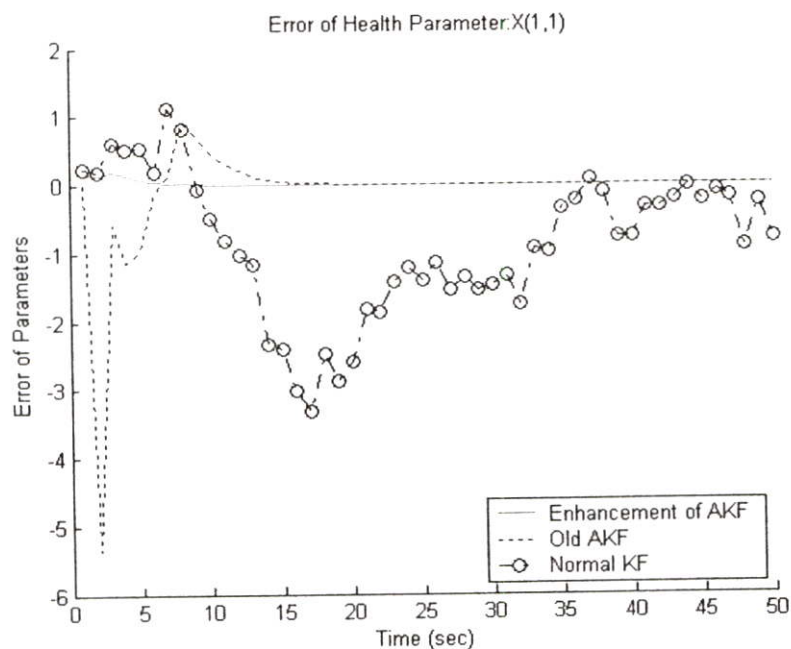
สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz

Parameter	Original KF	Old Adaptive KF	Enhancement of Adaptive KF
X(1,1)	1.2944	0.8970	0.0449
X(2,1)	1.7862	0.8551	0.0670
X(3,1)	1.8243	0.7778	0.0775
Average	1.6349	0.8433	0.0631

และเมื่อพิจารณารูปที่ 5.7-5.9 ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลาของการทดสอบที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาจะเห็นว่ากราฟของค่าความผิดพลาดจะแกว่งไปมาในช่วงเริ่มแรกและค่าความผิดพลาดจะเพิ่มขึ้นและมากที่สุดในช่วงเวลาวินาทีที่ 16-22 และจะค่อยๆ ลดลง แต่ก็ยังมีค่าความผิดพลาดอยู่ในช่วง 0 ถึง -1.5 แสดงให้เห็นว่าตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาไม่สามารถนำมาใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorenz ปนอยู่

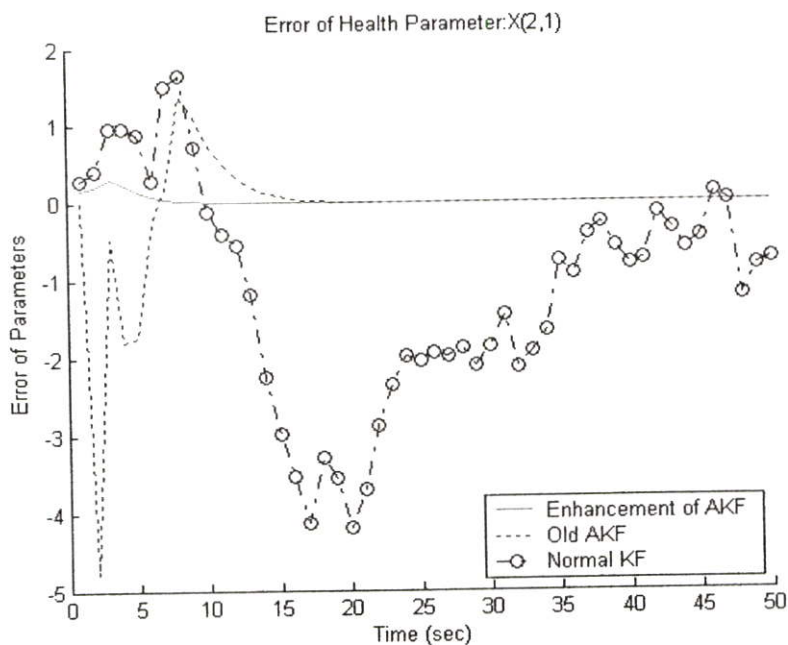
ในส่วนของกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า นั้น ในช่วง 10 วินาทีแรกของการทดสอบ ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะมีค่าที่สูงมากแต่จะเป็นช่วงแคบๆ เมื่อเทียบกับค่าความผิดพลาดได้จากตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา และค่าความผิดพลาดจะลดลงจนเป็นศูนย์ในช่วงเวลา 15 วินาที และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ

ส่วนกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ในช่วงแรกของการทดสอบ จะเกิดค่าความผิดพลาดอยู่แต่ก็เพียงเล็กน้อย และค่าความผิดพลาดจะลดลงจนเป็นศูนย์ในช่วงเวลา 5 วินาที ซึ่งใช้เวลาที่น้อยกว่าตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่ามาก และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพที่ดีมากเมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman แบบอื่นเมื่อใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Lorentz



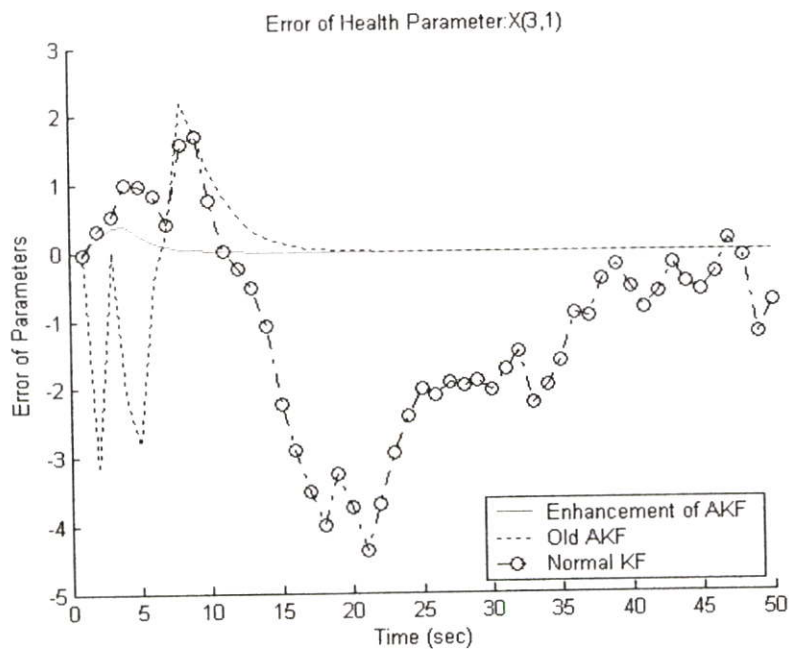
รูปที่ 5.7 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(1,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Lorenz



รูปที่ 5.8 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(2,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Lorenz



รูปที่ 5.9 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(3,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Lorenz

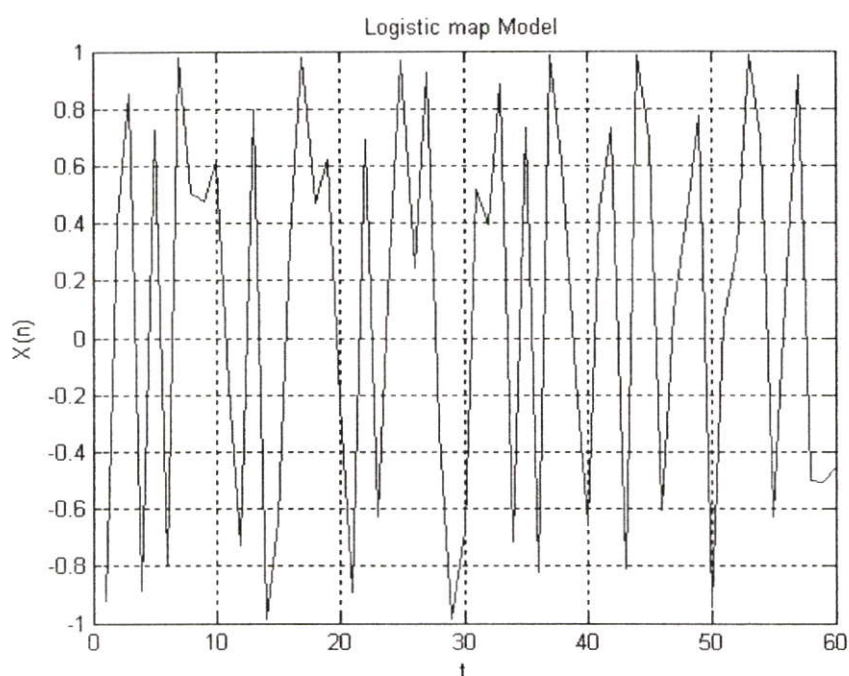
### 5.3.2 ระบบที่มีสัญญาณรบกวนอสุวนแบบ Logistic map

หัวข้อข้อย่อยนี้เป็นการจำลองการทดสอบ โดยใช้ตัวอย่างของสัญญาณรบกวนอสุวนแบบ Logistic map ซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ ดังนี้

$$x[n] = kx[n-1](1.25 - (5(x[n-1]^2)) + (4(x[n-1]^4)))$$

ในที่นี้  $k = 3.95$  และ  $-1 < x[n-1] < 1$

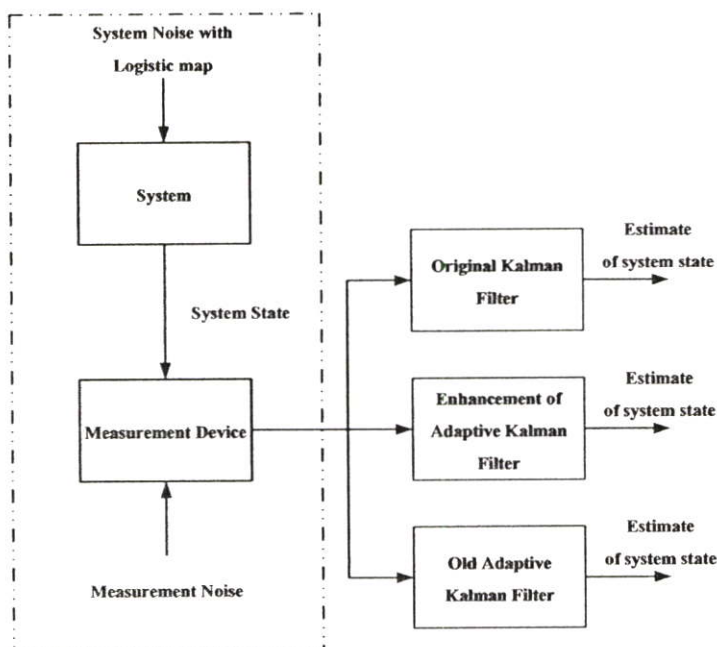
รูปที่ 5.10 แสดงรูปแบบของสัญญาณรบกวนอสุวนแบบ Logistic map ที่ใช้ในการจำลองการทดสอบของตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบ



รูปที่ 5.10 สัญญาณรบกวนอสุวนแบบ Logistic map

ผลของการทดสอบจากการจำลองโดยใช้โปรแกรม Matlab แสดงในตารางที่ 5.3 โดยเป็นค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของพารามิเตอร์แต่ละตัวของระบบที่ใช้ในการทดสอบซึ่งได้จากการประมาณโดยใช้ตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบเปรียบเทียบกับ

อนึ่งในการจำลองการทดสอบ เราจะให้ตัวกรอง Kalman ทุกชนิดต่อใช้งานในลักษณะเดียวกัน โดยแสดงได้ดังรูปที่ 5.11



รูปที่ 5.11 การทดสอบของตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบ Logistic map

โดยค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับพารามิเตอร์ทั้ง 3 ของระบบเมื่อใช้ตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา (Original KF) จะมีค่าที่สูงมากซึ่งมากกว่ากรณีระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนแต่น้อยกว่ากรณีระบบมีสัญญาณรบกวนแบบ Lorenz แต่เมื่อเราใช้ตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า (Adaptive KF) จะมีค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเท่ากับกรณีที่ใช้ตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา เนื่องจากตอนเริ่มแรกของการทดสอบตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า เกิดค่าความผิดพลาดที่สูงมากนั่นเองแต่เมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ (Enhancement of Adaptive KF) ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะมีค่าน้อยมาก ซึ่งไม่แตกต่างจากกรณีของระบบมีสัญญาณรบกวนแบบ Lorenz โดยสามารถเปรียบเทียบผลได้จากตารางที่ 5.3

ตารางที่ 5.3 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมี

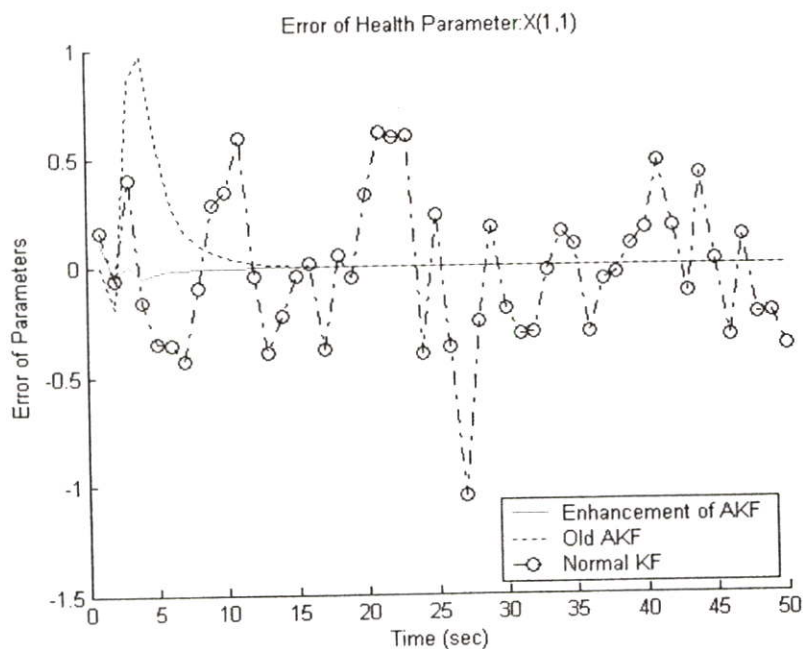
สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Logistic map

Parameter	Original KF	Old Adaptive KF	Enhancement of Adaptive KF
X(1,1)	0.3616	0.3559	0.0430
X(2,1)	0.4982	0.3649	0.0554
X(3,1)	0.5031	0.3656	0.0582
Average	0.4543	0.3621	0.0522

และเมื่อพิจารณารูปที่ 5.12-5.14 ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลาของการทดสอบที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาจะเห็นว่ากราฟของค่าความผิดพลาดจะแกว่งไปมาในช่วง 1 ถึง -1 แต่จะมีความถี่ที่เกิดมากกว่ากรณีของระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน แสดงให้เห็นว่าตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวนปนอยู่

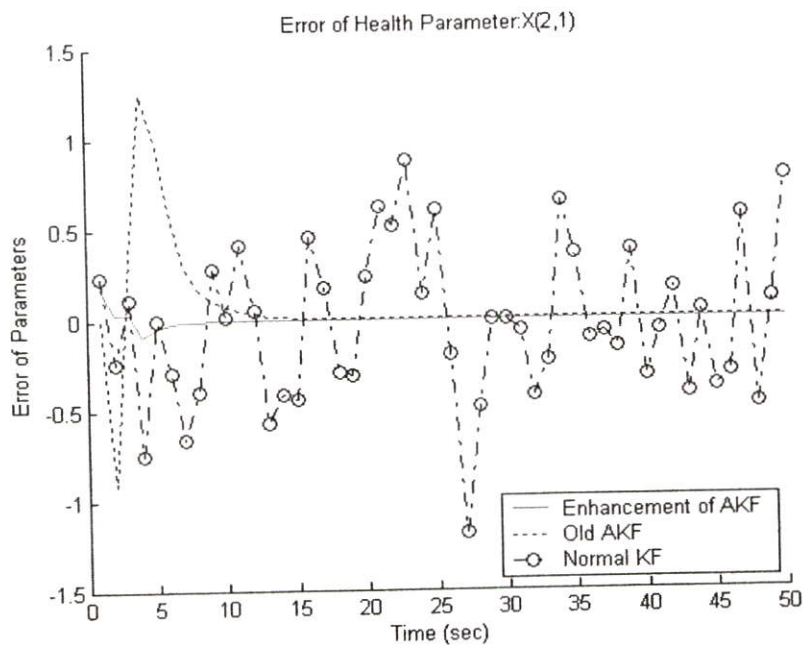
ในส่วนของกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่านั้น ในช่วง 10 วินาทีแรกของการทดสอบ ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะมีค่าที่สูงมากและสูงที่สุดที่วินาทีที่ 5 และจะลดลงอย่างรวดเร็วจนเป็น ศูนย์ ภายในวินาทีที่ 10 และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ แต่เมื่อคิดเป็นค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) แล้ว จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความผิดพลาดที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา

ส่วนกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ในช่วงแรกของการทดสอบ จะเกิดค่าความผิดพลาดอยู่แต่ก็เพียงเล็กน้อยเหมือนกับกรณีอื่นๆ และค่าความผิดพลาดจะลดลงจนเป็นศูนย์ในช่วงเวลา 5 วินาที ซึ่งใช้เวลาที่น้อย และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพที่ดีมากเมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman แบบอื่นเมื่อใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนอลวนแบบ Logistic map



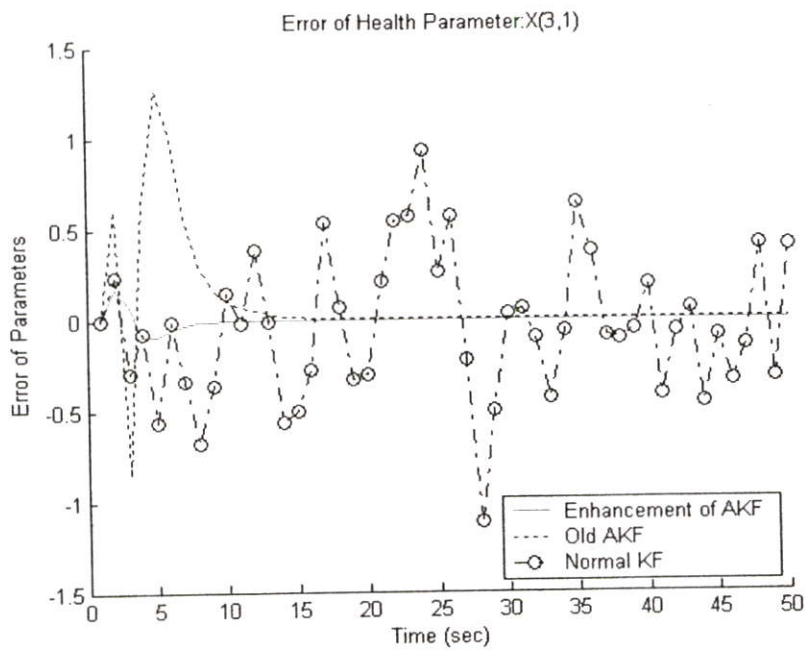
รูปที่ 5.12 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(1,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Logistic map



รูปที่ 5.13 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(2,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Logistic map



รูปที่ 5.14 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(3,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Logistic map

### 5.3.3 ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบ Henon map

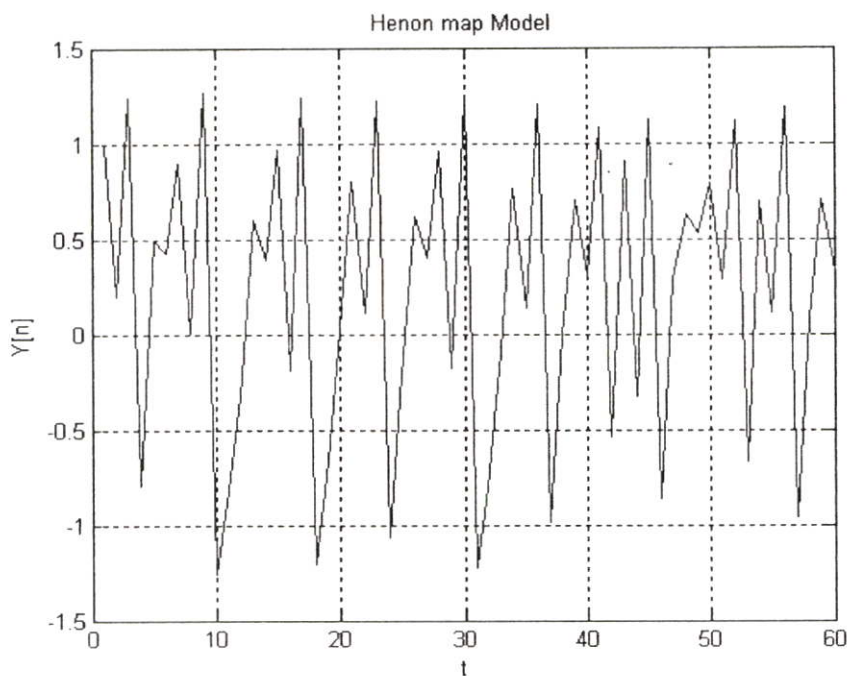
ในการจำลองการทดสอบ จะใช้ตัวอย่างของสัญญาณรบกวนแบบ Henon map ซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ ดังนี้

$$x[n] = 1 - \alpha x[n-1]^2 + y[n-1]$$

$$y[n] = \beta x[n-1]$$

โดยที่  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

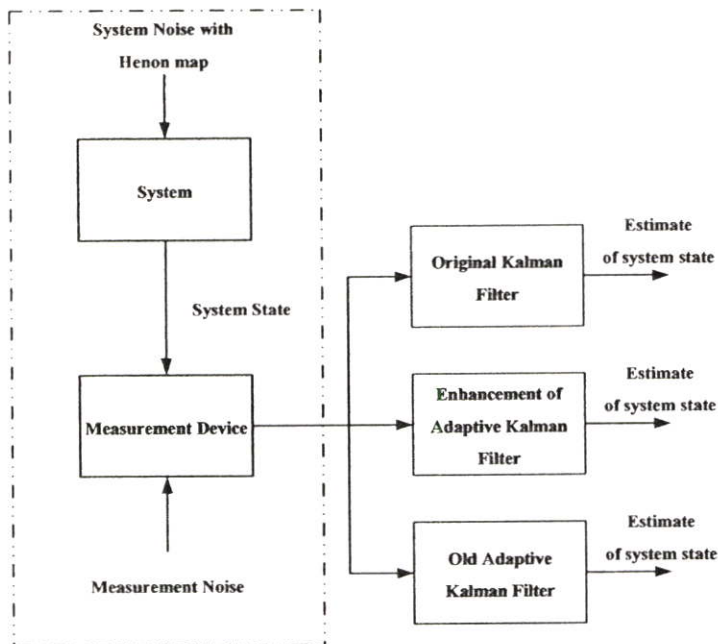
สำหรับรูปแบบของสัญญาณรบกวนแบบ Henon map ที่ใช้ในการจำลองการทดสอบของตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบ แสดงในรูปที่ 5.15



รูปที่ 5.15 สัญญาณรบกวนแบบ Henon map

ผลของการทดสอบจากการจำลองโดยใช้โปรแกรม Matlab แสดงในตารางที่ 5.4 โดยเป็นค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของพารามิเตอร์แต่ละตัวของระบบที่ใช้ในการทดสอบซึ่งได้จากการประมาณโดยใช้ตัวกรอง Kalman ในแต่ละแบบเปรียบเทียบกับ

ซึ่งในการจำลองการทดสอบ เราจะให้ตัวกรอง Kalman ทุกชนิดต่อใช้งานในลักษณะเดียวกัน โดยแสดงได้ดังรูปที่ 5.16



รูปที่ 5.16 การทดสอบของตัวกรอง Kalman เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวนแบบ Henon map

โดยค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับพารามิเตอร์ทั้ง 3 ของระบบเมื่อใช้ตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา (Original KF) จะมีค่าที่สูงเหมือนกับที่เกิดขึ้นในกรณีอื่นๆซึ่งมากกว่ากรณีของระบบมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน และเหมือนกับตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่า (Adaptive KF) ที่มีค่าความผิดพลาดที่สูงเมื่อใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวนทั้ง 3 ส่วนตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ (Enhancement of Adaptive KF) ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะมีค่ามากกว่าแบบอื่นเพียงเล็กน้อย ซึ่งไม่แตกต่างจากกรณีของระบบมีสัญญาณรบกวนแบบอลวนแบบอื่น โดยสามารถเปรียบเทียบผลได้จากตารางที่ 5.4

ตารางที่ 5.4 ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) ของการประมาณเมื่อระบบมี

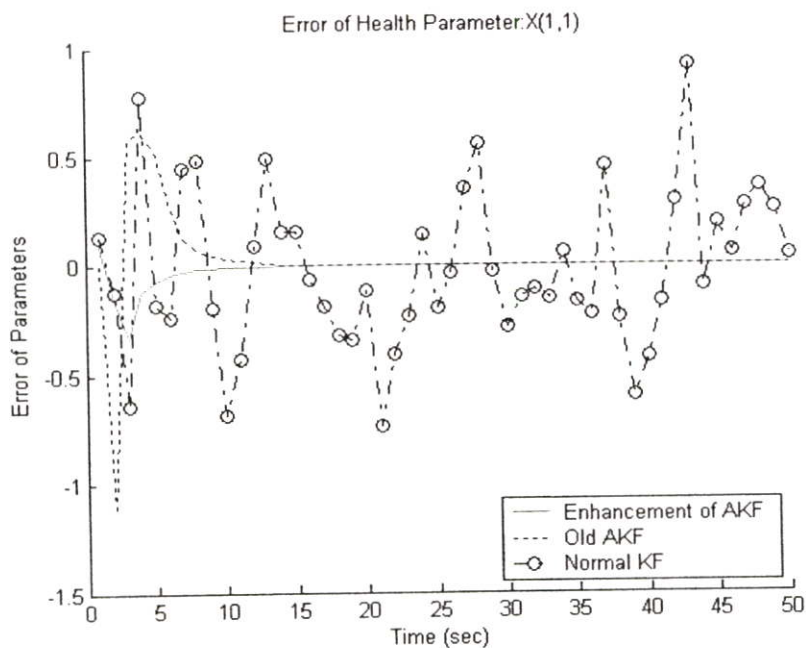
สัญญาณรบกวนอลวนแบบ Henon map

Parameter	Original KF	Old Adaptive KF	Enhancement of Adaptive KF
X(1,1)	0.3919	0.2912	0.0656
X(2,1)	0.5078	0.3932	0.0929
X(3,1)	0.4881	0.4372	0.0966
verage	0.4626	0.3738	0.0850

และเมื่อพิจารณารูปที่ 5.17-5.19 ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลาของการทดสอบที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาจะเห็นว่ากราฟของค่าความผิดพลาดจะยังแกว่งไปมาในช่วง 1 ถึง -1 เหมือนกับรูปที่ได้กล่าวไปแล้ว ยิ่งแสดงให้เห็นว่าตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวนอยู่

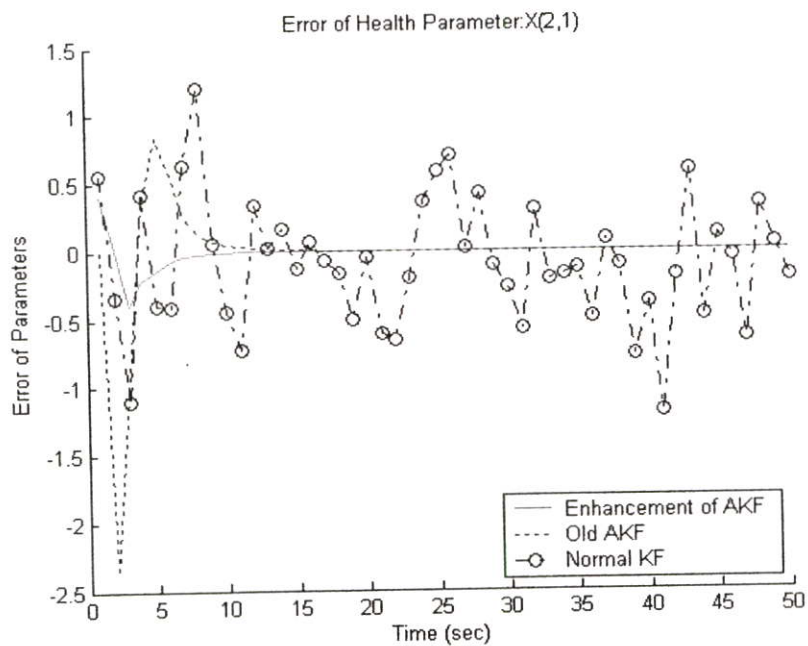
ในส่วนของกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่านั้น ในช่วง 10 วินาทีแรกของการทดสอบ ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจะมีค่าที่สูงมากกว่ากรณีอื่นๆและจะลดลงอย่างรวดเร็วจนเป็นศูนย์ ภายในวินาทีที่ 10 และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ แต่เมื่อคิดเป็นค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความผิดพลาดกำลังสอง (RMS) แล้วจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา

ส่วนกราฟที่แสดงค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ในช่วงแรกของการทดสอบ จะเกิดค่าความผิดพลาดอยู่ถึงจะมากกว่าค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับกรณีอื่นๆแต่เมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman แบบอื่นๆแล้วก็ถือว่าน้อยมาก และค่าความผิดพลาดจะลดลงจนเป็นศูนย์ในช่วงเวลา 10 วินาที และจะมีค่าเป็นศูนย์ไปจนจบการทดสอบ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพที่ดีมากเมื่อเทียบกับตัวกรอง Kalman แบบอื่นเมื่อใช้กับระบบมีสัญญาณรบกวนแบบอลวนทั้ง 3 แบบ



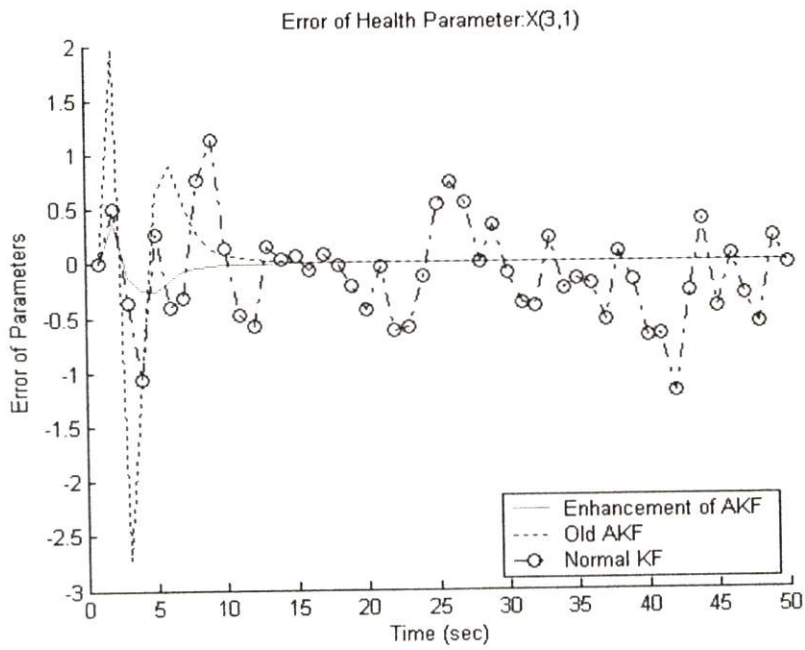
รูปที่ 5.17 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(1,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Henon map



รูปที่ 5.18 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(2,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Henon map



รูปที่ 5.19 ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์  $X(3,1)$  ซึ่งได้จากการประมาณ เมื่อระบบมีสัญญาณรบกวน

อลวนแบบ Henon map

## 5.4 วิจัยผลลัพธ์การวิเคราะห์

จากผลการวิเคราะห์ โดยใช้โปรแกรม MATLAB ในส่วนที่ 1 ซึ่งสมมุติให้สัญญาณรบกวนในระบบเป็นแบบเกาส์เซียน โดยแสดงในรูปที่ 5.2-5.4 จะเห็นว่าตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาให้ค่าความผิดพลาดที่สูง ส่วนตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่าก็ยังมีค่าความผิดพลาดที่สูงในช่วงแรกของการวิเคราะห์ ซึ่งในช่วงต่อมาค่าความผิดพลาดจึงลดลงมา ส่วนตัวกรอง Kalman ที่อ้างถึงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นั้นให้ค่าความผิดพลาดที่น้อยกว่าตัวกรอง Kalman ทั้งสองที่กล่าวไปเป็นอย่างมาก ตั้งแต่ช่วงต้นของการวิเคราะห์จนถึงตอนท้ายของการวิเคราะห์และด้วยการเปรียบเทียบค่าความผิดพลาด (RMS) ที่แสดงในตารางที่ 5.1 ก็ให้เห็นได้อย่างชัดเจน

ในส่วนที่ 2 ซึ่งสมมุติให้สัญญาณรบกวนในระบบเป็นแบบอลวน โดยใช้สัญญาณแบบอลวน 3 ชนิด คือ Lorenz Model, Logistic map Model และ Henon map Model ซึ่งจากผลของการวิเคราะห์จะคล้ายกับผลของการวิเคราะห์ในส่วนที่ 1 แต่ในส่วนที่ 2 นี้ ส่วนตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่าจะมีค่าความผิดพลาดที่สูงขึ้นมากในช่วงแรกของการวิเคราะห์ และในกรณีของสัญญาณรบกวนที่เป็นแบบ Lorenz Model นั้น ตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาและตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่าจะมีค่าความผิดพลาด (RMS) ที่สูงมากกว่าในในกรณีอื่นๆ โดยที่แสดงในตารางที่ 5.2

ข้อมูลจากตารางและรูปที่ได้กล่าวไปแล้วนั้น จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าตัวกรอง Kalman แบบธรรมดาไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน ส่วนตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่านั้นถึงแม้จะทำงานได้ดีหลังจากระบบทำงานไปแล้วนั้น ก็ยังมีปัญหาในตอนเริ่มแรกของการทำงานซึ่งมีค่าความผิดพลาดที่สูงมาก ส่วนตัวกรอง Kalman ที่อ้างถึงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นั้นให้ค่าความผิดพลาดที่น้อยกว่าตัวกรอง Kalman แบบอื่นๆเป็นอย่างมากทั้งในกรณีที่ระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวน และระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน

## บทที่ 6

### บทสรุปและข้อเสนอแนะ

#### 6.1 บทสรุป

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอวิธีการปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ ซึ่งใช้หลักการและที่มาของตัวกรอง Kalman เป็นพื้นฐาน รวมทั้งทดสอบประสิทธิภาพเทียบกับตัวกรอง Kalman แบบธรรมดา และตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้แบบเก่าที่มีอยู่ โดยในการทดสอบประสิทธิภาพนั้นได้กำหนดให้มีสัญญาณรบกวนทั้งแบบเกาส์เซียน (Gaussian noise) และแบบอลวน (Chaotic noise) และใช้โปรแกรม Matlab เป็นเครื่องมือในการจำลองผลของการทดลองเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวกรอง Kalman แต่ละแบบ กับสัญญาณรบกวนแต่ละชนิด จากผลการทดสอบจะเห็นได้ชัดเจนว่า การปรับปรุงตัวกรอง Kalman แบบปรับตัวเองได้ ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ ให้ประสิทธิภาพที่ดีกว่าตัวกรอง Kalman แบบอื่นๆ เมื่อใช้กับสัญญาณรบกวนทั้ง 2 แบบ ดังจะเห็นได้จากผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

#### 6.2 ข้อเสนอแนะ

ในการทดสอบนั้นสมมติให้สัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในระบบเป็นสัญญาณรบกวนแบบอลวน ซึ่งสัญญาณรบกวนทั้ง 3 ที่ใช้นั้น เป็นสัญญาณแบบอลวนพื้นฐานที่มีอยู่ทั่วไป แต่ความเป็นจริงมีสัญญาณแบบอลวนที่มีความซับซ้อนอื่นๆ ซึ่งไม่ได้นำมาพูดถึงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังนั้นจึงเป็นแนวทางที่เราจะนำสัญญาณแบบอลวนที่มีความซับซ้อนขึ้นมาทำการทดสอบ เพื่อหาความเป็นไปได้ที่จะนำตัวกรอง Kalman ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ไปใช้กับระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบอลวนอื่นๆ

## เอกสารอ้างอิง

- [1] R. K. Mehra, "Approaches to adaptive filtering," IEEE Trans.on Automatic Control, Vol. 17, pp. 693-698, 1972.
- [2] A. Gelb, Applied Optimal Estimation, MIT Press, 1974.
- [3] P. Z. Jia and Z.T. Zhu, Optimal estimate and its application , Science publishing company, China, 1984.
- [4] Y. Bar-Shalom and X. R. Lie, Estimation and Tracking Principles, Techniques and Software, Artech House, Boston, London, 1993.
- [5] G. Chen, Approximate Kalman Filtering, World Scientific, 1993.
- [6] B. Anderson and J. Moore, Optimal Filtering ,Prentice Hall, Englewood Cliffs,New Jersey, 1979.
- [7] B.P. Dahshayani, M.R. Ananthasayanam and N.V. Vighnesam," Adaptive Kalman filter Technique for relative orbit estimation for collocate deostationary satellites," AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Vol. 1, pp. 4812, 2001.
- [8] F. Gustafsson, Adaptive Filtering and Change Detection, John Wiley & Sons Ltd., 2000.
- [9] <http://www.allrite.com.au/science/science/sal.html>
- [10] <http://www.mathworks.com/products/control/demos.html?file=/products/demos/shipping/control/kalmdemo.html>
- [11] M. Y. Yoon, S. W. Lee, and J. S. Kim, "Faxed image restoration using Kalman filtering," Third International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR'95), Vol. 2, pp. 677-680, 1995.
- [12] N. Peterfreund, "Robust tracking of position and velocity with Kalman snakes," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 21, No. 6, pp. 564-569, 1999.
- [13] J. Weber, and J. Malik, "Rigid body segmentation and shape description from dense optical flow under weak perspective," Fifth International Conference on Computer Vision (ICCV'95), pp. 251-255, 1995.
- [14] Y. J. Chen, C. C. Wang, G. J. Jong, and B. W. Wang, "The separation system of the speech signals using Kalman filter with fuzzy algorithm," First International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC'06), Vol. 1, pp. 603-606, 2006.

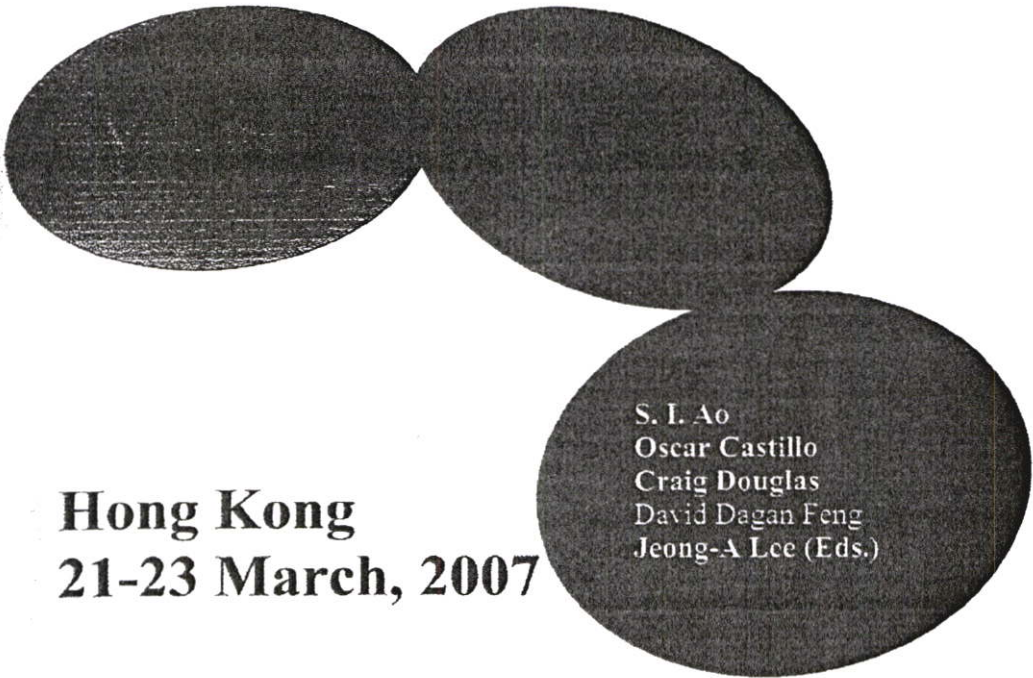
- [15] M. Mattavelli, G. Thonet, V. Vaerman, and B. Macq, "Image restoration by 1-D Kalman filtering on oriented image decompositions," *IEEE International Conference*, Vol. 4, pp. 2271-2274, 1996.
- [16] J. S. Gutmann, "Markov-Kalman localization for mobile robots," *16th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'02)*, Vol. 2, pp. 206-210, 2002.
- [17] H.R. Burris, A.E. Reed, N.M. Namazi, M.J. Vilcheck, and M. Ferraro, "Use of Kalman filtering in data detection in optical communication systems with multiplicative noise," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 4, pp. 2685-2688, 2001.
- [18] B. Shafai, and S. Mo, "Adaptive deconvolution and identification of nonminimum phase FIR systems using Kalman filter," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'92)*, Vol. 5, pp. 489-492, 1992.
- [19] A.H. Sayed, and T. Kailath, "A state-space approach to adaptive filtering," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'93)*, Vol. 3, pp. 559-562, 1993.
- [20] J. W. Lee, M. S. Kim, and I. S. Kweon, "A Kalman filter based visual tracking algorithm for an object moving in 3D," *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 1, pp. 342-346, 1995.
- [21] S. Venema, and B. Hannaford, "Kalman filter based calibration of precision motion control," *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 2, pp. 2224-2228, 1995.

ภาคผนวก

**Lecture Notes in Engineering and Computer Science**

**IMECS 2007**

International MultiConference of  
**Engineers and Computer  
Scientists 2007**



**Hong Kong  
21-23 March, 2007**

S. I. Ao  
Oscar Castillo  
Craig Douglas  
David Dagan Feng  
Jeong-A Lee (Eds.)

**IA ENG**

International Association of Engineers

ISBN: 978-988-98671-7-1

## Enhancement of Adaptive Kalman Filter for Systems with Chaotic Noise

Prakob Jandaeng<sup>1</sup> and Pinkhate Sooraksa<sup>2</sup>

Department of Information Engineering, Faculty of Engineering,  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand  
(Tel : +66-2-7392382, E-mail: kspitkh@kmitl.ac.th<sup>1</sup>, prakob.c@toyota-thai.com<sup>1</sup>)

**Abstract**—As we have known that, to estimate the state of the system, we need the covariance matrices as the inputs. The new prediction accuracy of the estimation is based recursively on the past ones. To search for the optimal solution, researchers try to obtain best closed-state approximation for the covariance inputs in Kalman filtering technique. Many variations of the technique have been purposed for many years. However, in our version, this paper presents enhancement of adaptive Kalman filter for systems with chaotic noise, which still remains the topic for us to investigate.

**Index Terms**—Kalman filter, Estimator, Noise, Chaos

### I. INTRODUCTION

In Kalman filtering (KF) technique [1-8], the covariance matrices obtained from system disturbance  $Q_{(k)}$ , and from the noise measurement  $R_{(k)}$ , are required as the inputs in the estimation procedure. For highly dynamic systems like chaotic ones, the change is quite unpredictable if we don't know the type and initial condition of the seed chaos. This eventually leads to the difficulty in obtaining accurate covariance matrices. In this case, an adaptive Kalman filter is required. This paper tries to enhance such adaptive filter for better performance in the presence of chaotic noise.

### II. PROPOSED METHOD FOR ADAPTIVE KALMAN FILTERING

Standard state-space equation for Kalman filter derivation is well-known described in the form

$$\begin{aligned} X_{(k+1)} &= \Phi_{(k)} X_{(k)} + \Gamma_{(k)} W_{(k)} \\ Z_{(k+1)} &= H_{(k+1)} X_{(k+1)} + V_{(k+1)} \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} E[W_{(k)}] &= 0 \\ \text{cov}[W_{(k)}] &= Q_{(k)} \\ E[V_{(k)}] &= 0 \\ \text{cov}[V_{(k)}] &= R_{(k)} \\ \text{cov}[W_{(k)}, V_{(k)}] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

That  $W_{(k)}$  and  $V_{(k)}$  are white noises of the system and the measurement, respectively. The meaning of

above equations can be read out directly. The approximation of

the prediction can be found that

$$\begin{aligned} \hat{X}_{(k+1|k)} &= \Phi_{(k)} \hat{X}_{(k|k)} \\ P_{(k+1|k)} &= \Phi_{(k)} P_{(k|k)} \Phi_{(k)}^T + \Gamma_{(k)} Q_{(k)} \Gamma_{(k)}^T \end{aligned} \quad (3)$$

The next approximation can also be presented in the form

$$\begin{aligned} K_{(k+1)} &= P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T [H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + R_{(k+1)}]^{-1} \\ \hat{X}_{(k+1|k+1)} &= \hat{X}_{(k+1|k)} + K_{(k+1)} [Z_{(k+1)} - H_{(k+1)} \hat{X}_{(k+1|k)}] \\ P_{(k+1|k+1)} &= [I - K_{(k+1)} H_{(k+1)}] P_{(k+1|k)} \end{aligned} \quad (4)$$

For adaptive algorithm adopted from [7], the state equations and the derivation of the algorithm yield following results:

The residual sequence is  $V_{(k+1)}$ , a measure of the measurement noise

$$V_{(k+1)} = Z_{(k+1)} - H_{(k+1)} \hat{X}_{(k+1|k)} \quad (5)$$

$$\text{and } \bar{V}_{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_{(k+1,i)}$$

$$\bar{C}_{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V_{(k+1,i)} - \bar{V}_{(k+1)}) (V_{(k+1,i)} - \bar{V}_{(k+1)})^T$$

$$E[\bar{C}_{(k+1)}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T + R_{(k+1)}] \quad (6)$$

for which an unbiased estimate for  $R_{(k+1)}$  is taken as

$$\begin{aligned} \hat{R}_{(k+1)} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V_{(k+1,i)} - \bar{V}_{(k+1)}) (V_{(k+1,i)} - \bar{V}_{(k+1)})^T \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [H_{(k+1)} P_{(k+1|k)} H_{(k+1)}^T] \end{aligned} \quad (7)$$

Similarly measurement of the state noise sample can be calculated by

$$W_{(k+1)} = \hat{X}_{(k+1|k)} - \Phi_{(k)} \hat{X}_{(k|k)} \quad (8)$$

and

$$\bar{W}_{(k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_{(k+1,i)}$$

$$\hat{C}_{(k)(k-1)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\hat{W}h_{(k-1)} - \hat{W}h_{(k-2)})(\hat{W}h_{(k-1)} - \hat{W}h_{(k-2)})^T$$

$$E[\hat{C}_{(k)(k-1)}] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [\Phi_{(k)} P_{(k-1)} \Phi_{(k)}^T + Q_{(k)} - P_{(k-1)}] \quad (9)$$

And an estimate for  $Q_{(k)}$  is given by

$$Q_{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\hat{W}h_{(k-1)} - \hat{W}h_{(k-2)})(\hat{W}h_{(k-1)} - \hat{W}h_{(k-2)})^T$$

$$- \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [P_{(k-1)} - \Phi_{(k)} P_{(k-1)} \Phi_{(k)}^T] \quad (10)$$

In our modified version, the covariance matrix can be found by using the concept of predicted residual from the measurement noise  $V_{(k)}$ . In our calculation, the equation for calculation in the estimation is described in equations (11)-(13):

$$\hat{V}h_{(k-1)} = Z_{(k-1)} - H_{(k-1)} \hat{X}_{(k-1)} \quad (11)$$

$$\text{cov}[V_{(k-1)}] = \sigma_{R_{(k-1)}}^2$$

$$\text{cov}[X_{(k-1)}] = \sigma_{X_{(k-1)}}^2 P_{(k-1)}$$

$$\text{cov}[Vh_{(k-1)}] = \sigma_{X_{(k-1)}}^2 H_{(k-1)} P_{(k-1)} H_{(k-1)}^T + \sigma_{R_{(k-1)}}^2$$

$$\text{And } E[V_{(k-1)}] = E[X_{(k-1)}]$$

where

$$E[Vh_{(k-1)}^T R_{(k-1)}^{-1} Vh_{(k-1)}] = n[R_{(k-1)}^{-1} (\sigma_{X_{(k-1)}}^2 H_{(k-1)} P_{(k-1)} H_{(k-1)}^T + \sigma_{R_{(k-1)}}^2)]$$

$$E[Vh_{(k-1)}^T R_{(k-1)}^{-1} Vh_{(k-1)}] = \sigma_{X_{(k-1)}}^2 n[R_{(k-1)}^{-1} H_{(k-1)} P_{(k-1)} H_{(k-1)}^T] - \sigma_{R_{(k-1)}}^2 \quad (12)$$

$$E[X] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$$

$$\sigma_{X_{(k)}}^2 = \frac{[E[Vh_{(k-1)}^T R_{(k-1)}^{-1} Vh_{(k-1)}] - \sigma_{R_{(k-1)}}^2]}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n[R_{(k-1)}^{-1} H_{(k-1)} P_{(k-1)} H_{(k-1)}^T]} \quad (13)$$

and

$$\sigma_{V_{(k)}}^2 = \frac{[E[Vh_{(k-1)}^T R_{(k-1)}^{-1} Vh_{(k-1)}] - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n[R_{(k-1)}^{-1} H_{(k-1)} P_{(k-1)} H_{(k-1)}^T] - \sigma_{R_{(k-1)}}^2]}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n[R_{(k-1)}^{-1} H_{(k-1)} P_{(k-1)} H_{(k-1)}^T]} \quad (14)$$

Note that the derivation is carried out by the combining method of adaptive KF and the methods of prediction of the residual. The computer simulation result is presented in the next section.

### III. RESULTS

#### A. Model

The model used for testing the effectiveness of the algorithms, is the system described in [10] and is the system having mathematical form as:

$$\Phi_{(k)} = \begin{bmatrix} 1.1269 & -0.4940 & 0.1129 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{(k)} = \begin{bmatrix} -0.3832 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5919 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5191 \end{bmatrix}$$

$$H_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

The system uses as a test-bed similar to a Rena's picture in signal processing.

#### B. Computer Simulation

Three sets of chaotic noises have been employed for testing the effectiveness of the proposed system compared to the existing methods. The chaotic noises used here are the Lorenz, Logistic map, and the Henon map. The tests can be shown in the following simulations.

##### 1. The Lorenz chaotic noise system

A Lorenz chaotic noise is injected into the system. The noise parameter is  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 28$ ,  $\beta = 8/3$ . The parameter is referred to the following pseudocode for generating the Lorenz chaos:

Lorenz noise System

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y-x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x - y - \alpha z$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha x - \beta z$$

An example of the results in comparison of the existing methods available in the publication[1-8] are compared with our proposed one. Note that all methods can filtered out the chaotic noises as shown in Table.1

The error signals from the estimation of the three methods are shown in Figs 1-3 for the state X(1,1), X(2,1) and X(3,1). According to those figures, the solid line is the error obtained from our method, the classical adaptive version is shown by the dash line, and the line with circle markers stands for the original KF. As can be seen from the figures that our method provides the least error.

Table.1 An example of a result shown RMS error of the estimation obtained from the Lorenz model

Parameter	Original KF	Adaptive KF	Enhancement of Adaptive KF
X(1,1)	1.2944	0.8970	0.0449
X(2,1)	1.7862	0.8551	0.0670
X(3,1)	1.8243	0.7778	0.0775
Average	1.6349	0.8433	0.0631

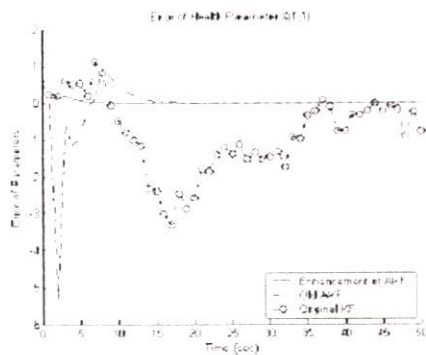


Fig.1 Error of Parameter X(1,1) for the system with LorentZ noises

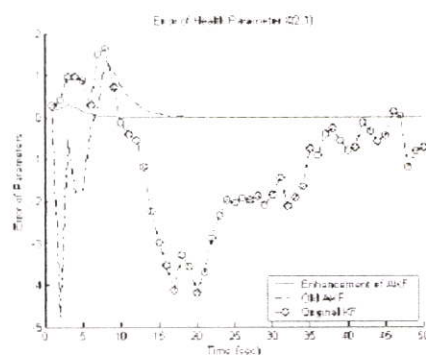


Fig.2 Error of Parameter X(2,1) for the system with LorentZ noises

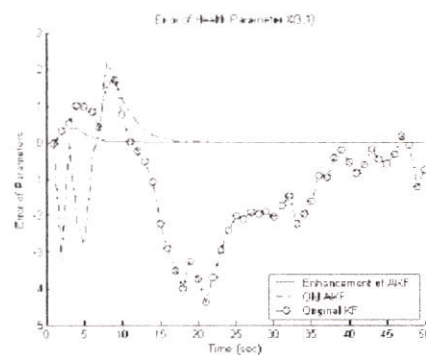


Fig.3 Error of Parameter X(3,1) for the system with LorentZ noises

## 2. The Logistic map chaotic noise system

The model for the noise can be illustrated mathematically by

$$x[n] = kx[n-1](1.25 - 5(x[n-1]^2)) - 4(x[n-1]^3)$$

Where  $k = 3.5$  and  $-1 < x[n-1] < 1$ .

Table 2 shows RMS error of the estimation obtained from the simulation. Figures 4-6 show error of parameter X(j,1) where  $j = 1, 2, 3$ , respectively. Again our method outperforms the rest in comparison.

Table 2 An example of a result shown RMS error of the estimation obtained from using the Logistic map model

Parameter	Original KF	Adaptive KF	Enhancement of Adaptive KF
X(1,1)	0.3616	0.3559	0.0430
X(2,1)	0.4982	0.3649	0.0554
X(3,1)	0.5031	0.3656	0.0582
Average	0.4543	0.3621	0.0522

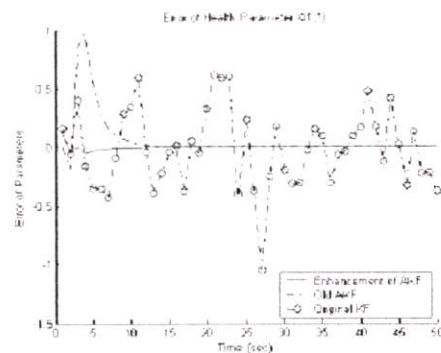


Fig.4 Error of Parameter X(1,1) for the system with Logistic noises

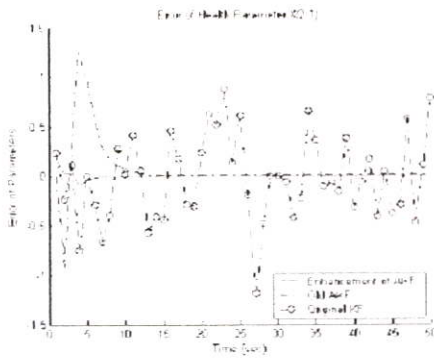


Fig.5 Error of Parameter X(2,1) for the system with Logistic noises

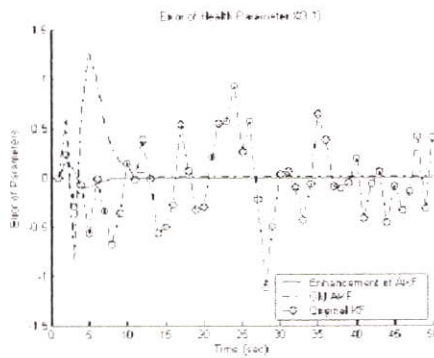


Fig.6 Error of Parameter X(3,1) for the system with Logistic noises

3. The Henon map chaotic noise system  
The noise system can be illustrated by

$$x[n] = 1 - \alpha x[n-1]^2 + y[n-1]$$

$$y[n] = \beta x[n-1]$$

Where  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$

Table 3 and Figures 7-9 are presented in the same fashion as in the previous subsections. Remark that our proposed method yields better results in comparison for the estimation.

Table 3 An example of a result shown RMS error of the estimation obtained from the Henon map model

Parameter	Original KF	Adaptive KF	Enhancement of Adaptive KF
X(1,1)	0.3919	0.2912	0.0656
X(2,1)	0.5078	0.3932	0.0929
X(3,1)	0.4881	0.4372	0.0966
Average	0.4626	0.3738	0.0850

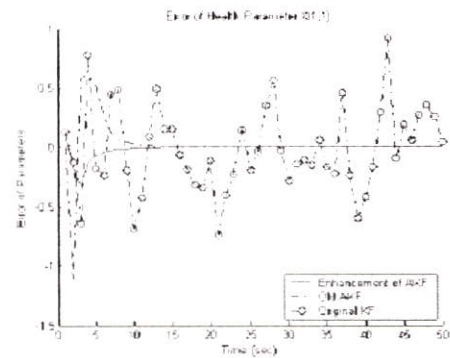


Fig.7 Error of Parameter X(1,1) for the system with Henon noises

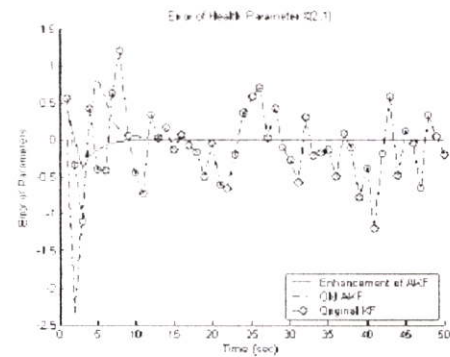


Fig.8 Error of Parameter X(2,1) for the system with Henon noises

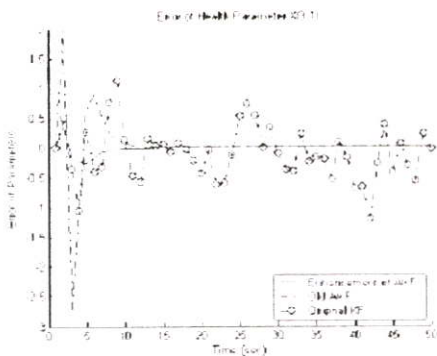


Fig.9 Error of Parameter X(3,1) for the system with Henon noises

#### IV. CONCLUSION

Computer results are shown that our idea in combining all advantage methods purposed by the researchers in the past, which is our proposed method, yields the best in comparison with the existing ones.

#### V. ACKNOWLEDGEMENT

This paper is supported in part by the Thailand Research Fund under Grant RSA 4680007. The authors would like to thank K. Klonkam for useful discussion about the systems with chaotic noises.

#### VI. REFERENCES

- [1] R. K. Mehra, "Approaches to adaptive filtering," IEEE Trans on Automatic Control, Vol. 17, pp. 693-698, 1972.
- [2] A. Gelb, Applied Optimal Estimation, MIT Press, 1974.
- [3] P. Z. Ju and Z. T. Zhu, Optimal estimate and its application, Science publishing company, China, 1994.
- [4] Y. Bar-Shalom and X. R. Li, Estimation and Tracking Principles, Techniques and Software, Artech House, Boston, London, 1993.
- [5] G. Chen, Approximate Kalman Filtering, World Scientific, 1993.
- [6] B. Anderson and J. Moore, Optimal Filtering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [7] B.P. Dabshayam, M.R. Ananthasayanam and N.V. Vigneesam, "Adaptive Kalman filter Technique for relative orbit estimation for collocate deorbitation satellites," pp.4812, 2001.
- [8] F. Gustafsson, Adaptive Filtering and Change Detection, John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [9] [http://www.litfire.com.au/science/science\\_ssl.htm](http://www.litfire.com.au/science/science_ssl.htm)
- [10] [http://www.mathworks.com/products/control/demos.html?file=products/demos\\_shipping/control/ksdemo.html](http://www.mathworks.com/products/control/demos.html?file=products/demos_shipping/control/ksdemo.html)

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายประกอบ จันทร์แดง
วัน เดือน ปีเกิด	1 มิถุนายน 2519
ที่อยู่	2/8 หมู่ 6 ต.สัดหีบ อ.สัดหีบ จ.ชลบุรี 20180
ประวัติการศึกษา	2543 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปัจจุบัน	ตำแหน่งวิศวกรเครื่องมือวัด บริษัท โตโย-ไทย จำกัด