ภาคตัดทรงไฮเปอร์โบลา

HYPERBOLOID SECTION

สุชาณัฐ จำเริญวรทศ
อลิสา เกลียวสีนาค
อาทิยา ศรีวิสัย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา ๒๕๕๖

ภาคตัดทรงไฮเปอร์โบลา

HYPERBOLOID SECTION

สุชาณัฐ จำเริญวรทศ
อลิสา เกลียวสีนาค
อาฑิยา ศรีวิสัย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2556

HYPERBOLOID SECTION

Suchanut Chumreonworathos
Alisa Klieosinak
Atiya Sriwisai

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ภาคตัดทรงไฮเปอร์โบลา	
	Hyperboloid section	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุชาณัฐ จำเริญวรทศ	53050121
	นางสาวอลิสา เกลียวสีนาค	53050141
	นางสาวอาทิยา ศรีวิสัย	53050142
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์	

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.กาญจนา คำนึงกิจ ประธานกรรมการ	
อาจารย์เทิดขวัญ ช้างเผือก กรรมการ	
รศ.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ภาคตัดทรงไฮเปอร์โบลา	
	Hyperboloid section	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุชาณัฐ จำเริญวรทศ	53050121
	นางสาวอลิสา เกลียวสีนาค	53050141
	นางสาวอาฑิยา ศรีวิสัย	53050142
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์	

บทคัดย่อ

ภาคตัดทรงไฮเปอร์โบลา เป็นการศึกษาถึงลักษณะทางเรขาคณิตที่เกิดขึ้นจากการตัดกันของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นกับระนาบ โดยจะแบ่งกรณีศึกษาออกเป็น 2 กรณี คือ 1) เมื่อตัดด้วยสมการระนาบที่กำหนดให้แกนใดแกนหนึ่งเป็นศูนย์และพบว่ากราฟที่ได้จากการตัดจะมีลักษณะเป็นไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง ไฮเปอร์โบลาแนวนอน กากบาท วงกลมและไม่มีรอยตัด และ 2) เมื่อตัดด้วยสมการระนาบที่กำหนดให้สัมประสิทธิ์หน้าเป็นศูนย์และพบว่ากราฟที่ได้จากการตัดจะมีลักษณะเป็นวงรี จุด เส้นตรงที่ขนานกัน ไฮเปอร์โบลาแนวนอน ไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง กากบาท และไม่มีกราฟ นอกจากนี้ ในแต่ละกรณีจะพิจารณาเปรียบเทียบกับกราฟที่เกิดจากการตัดกันของรูปทรงกรวยกับระนาบ

Title	Hyperboloid Section	
Students	Miss Suchanut Chumreonworathos	53050121
	Miss Alisa Klieosinak	53050141
	Miss Atiya Sriwisai	53050142
Degree	Bachelor of Science	
Major Program	Applied Mathematics	
Academic Year	2013	
Advisor	Assoc. Prof. Pakkinee Chitsakul	
	Asst. Prof. Dr. Jaipong Kasemsuwan	

ABSTRACT

Hyperboloid section is studied about geometric characteristics forming by the intersection between hyperboloid of one sheet and hyperboloid of two sheets with plane. We classify two cases study; 1) when we cut the cross section by given plane equation that determined either x-axis, y-axis, or z-axis be zero. We find that the graph is obtained by cross section characterized as vertical hyperbola, horizontal hyperbola, cross line, circle, and no graphs. And 2) when we cut the cross section by given plane equation that determined the coefficient of x variable be zero. We find that the graph is obtained by cross section characterized as ellipse, point, parallel, horizontal hyperbola, vertical hyperbola, cross line, and no graphs. Furthermore, we compare each case with graph forming by the intersection of conic section with plane.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง ภาคตัดทรงไฮเปอร์โบลา ให้ประสบผลสำเร็จไปด้วยดี ต้องขอกล่าวถึงท่านบุคคลเหล่านี้ คือ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ผศ.ดร.กาญจนา คำนึงกิจ และอาจารย์เทิดขวัญ ช้างเผือก ซึ่งท่านบุคคลเหล่านี้ได้เป็นอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษและคณะกรรมการ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือในส่วนของคำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ ทั้งในเรื่องของการเรียบเรียงข้อมูล และการหาข้อมูล รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้ผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ กำลังใจ และคำแนะนำจนการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี รวมทั้งรุ่นพี่นักศึกษาปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ เพื่อนๆ และน้องๆทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆเกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

นางสาวสุชาณัฐ จำเริญวรทศ
นางสาวอลิสา เกลียวสีนาค
นางสาวอาฑิยา ศรีวิสัย

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ | หน้า

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ | **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

บทนี้จะกล่าวถึงที่มาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ ซึ่งผู้จัดทำมีความสนใจที่จะทำการศึกษาการหารอยตัดของรูปทรงไฮเปอร์โบลา (Hyperboloid) ด้วยระนาบตรงในกรณีที่แตกต่างกัน รวมทั้งศึกษาวัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ ขอบเขตของปัญหาพิเศษ ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษและประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ เพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาพิเศษให้สมบูรณ์มากขึ้น

รูปเรขาคณิตที่พบในชีวิตประจำวันโดยเฉพาะรูปเรขาคณิตสองมิติและรูปทรงเรขาคณิตสามมิติมีความสัมพันธ์กันอย่างมาก เช่น เหรียญบาทและลูกฟุตบอล ซึ่งมีลักษณะเป็นวงกลม (Circle) และทรงกลม (Sphere) ตามลำดับ ถ้าหมุนวงกลมรอบเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมจะได้ทรงกลม ซึ่งต้องการใช้การสังเกตหาความสัมพันธ์ ความสอดคล้อง การจำแนก และการเปรียบเทียบ ภาพที่มองเห็นจะต้องสามารถอธิบายขนาด ตำแหน่ง ระยะทาง และใช้การคาดเดารูปร่างลักษณะของสิ่งที่กำหนดให้เมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่งหรือเปลี่ยนมุมมองในด้านต่าง ๆ

จากการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ในมัธยมศึกษาตอนปลาย ได้ศึกษาภาคตัดกรวย (Conic section) โดยพบว่า สิ่งที่เกิดจากการตัดกรวยกลม (Circular cone) ด้วยระนาบซึ่งไม่ตัดผ่านจุดยอดของกรวย จะได้ วงกลม พาราโบลา (Parabola) วงรี (Ellipse) หรือไฮเปอร์โบลา (Hyperbola) ในกรณีที่ระนาบตัดผ่านจุดยอดของกรวยจะได้ จุด (Point) หรือเส้นตรง (Line) ซึ่งในปัญหาพิเศษนี้สนใจที่จะศึกษากราฟของสมการรอยตัดของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นกับระนาบ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ได้มีผู้ทดลองโดยการนำไม้หวายมามัดรวมกันเป็นรูปทรงกระบอก แล้วบิดในแนวเฉียง พบว่าเกิดลักษณะทรงกระบอกเว้าคล้ายรูปทรงไฮเปอร์โบลา ซึ่งจากการสังเกตไม้หวาย ไม่มีไม้หวายเส้นไหนที่ตัดกันเลย จากการทดลองนี้จึงเป็นที่มาให้ผู้จัดทำสนใจที่จะทำการศึกษาเกี่ยวกับการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาด้วยระนาบตรงในกรณีที่แตกต่างกัน

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อศึกษาลักษณะของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

1.2.2 เพื่อศึกษากราฟของสมการรอยตัดทางเรขาคณิตของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นที่ตัดกับระนาบในกรณีต่าง ๆ

1.2.3 เพื่อเปรียบเทียบรอยตัดของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นกับรอยตัดของรูปทรงกรวย

1.2.4 เพื่อวิเคราะห์สมการระนาบที่ตัดกับสมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นและรูปทรงกรวย

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1.3.1 ผู้จัดทำจะศึกษาการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นด้วยระนาบในกรณีที่แตกต่างกัน

1.3.2 แสดงลักษณะของกราฟสมการรอยตัดในกรณีที่แตกต่างกันว่ามีลักษณะอย่างไร

1.3.3 แสดงการเปรียบเทียบรอยตัดที่ตัดกับระนาบระหว่างรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นกับรูปทรงกรวย

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษ

1.4.1 ศึกษาความรู้เกี่ยวกับรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

1.4.2 ศึกษาลักษณะของการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติและสามมิติ

1.4.3 ศึกษาการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นด้วยระนาบในกรณีที่แตกต่างกัน

1.4.4 สรุปผลแสดงการเปรียบเทียบการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นและรูปทรงกรวย

1.4.5 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.4.6 นำเสนอรายงานปัญหาพิเศษ

ตารางที่ 1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงาน

กิจกรรมดำเนินงาน	เดือน / ปี (2556 - 2557)								
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1. ศึกษาหาข้อมูล และกำหนดหัวโครงงาน									
2. ศึกษาลักษณะการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติและสามมิติ									
3. ศึกษาลักษณะของรูปทรงไฮเปอร์โบลา									
4. ศึกษาการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลา									
5. เปรียบเทียบรอยตัดของกรวยกลมกับรูปทรงไฮเปอร์โบลา									
6. สรุปผลการศึกษา และจัดทำรูปเล่ม									
7. นำเสนอปัญหาพิเศษ									

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 สามารถนำลักษณะรูปร่างของรูปทรงไฮเปอร์โบลาเป็นแนวความรู้พื้นฐานในการประยุกต์ใช้การออกแบบเฟอร์นิเจอร์

1.5.2 สามารถนำความรู้จากการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาเป็นแนวความรู้พื้นฐานในการประยุกต์ใช้กับการขุดเจาะหาแร่ทองคำ

1.5.3 เพื่อเป็นแนวคิดพื้นฐานในการออกแบบการรับน้ำหนักเก้าอี้หวาย หรือเฟอร์นิเจอร์อื่น ๆ

1.5.4 สามารถนำความรู้เกี่ยวกับการศึกษาภาคตัดทรงไฮเปอร์โบลาเพื่อเป็นพื้นฐานในการพัฒนาปัญหาพิเศษอื่นได้

บทต่อไปเป็นความรู้พื้นฐานต่าง ๆ ของเล่มรายงานปัญหาพิเศษ โดยเนื้อหาเป็นรายละเอียดเกี่ยวกับภาคตัดกรวย และการหมุนกราฟในสองมิติ

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้จัดทำปัญหาพิเศษมีความสนใจที่จะศึกษาภาคตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลา ก่อนที่จะกล่าวถึงภาคตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลา ผู้จัดทำจะกล่าวถึงกรณีต่าง ๆ ของภาคตัดกรวยก่อน เพื่อเป็นการทบทวนความรู้พื้นฐาน

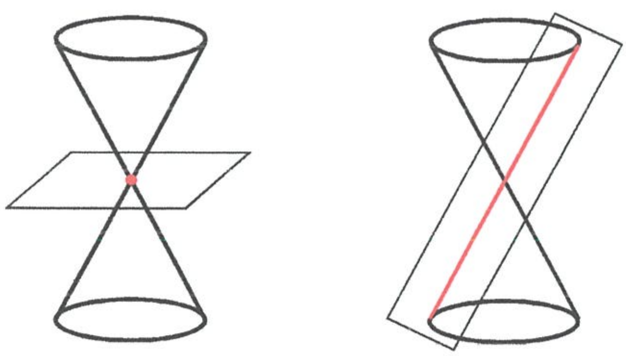
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงไฮเปอร์โบลา ส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับความคงทนของโครงสร้าง ลักษณะการเปลี่ยนความโค้ง โดยพิจารณาจากเส้นบนพื้นผิวของรูปทรงไฮเปอร์โบลา

จากงานวิจัยของ S. Sabouri-Ghomi และ M.H.K Kharrazi [1] ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับความคงทนของโครงสร้างปล่องระบายความร้อน (Cooling tower) ของเตาปฏิกรณ์ ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปทรงไฮเปอร์โบลา พร้อมศึกษาลักษณะการเปลี่ยนความโค้งโดยพิจารณาจากเส้นบนพื้นผิวที่เกิดจากการตัดด้วยระนาบในลักษณะที่แตกต่างกัน

2.1 ภาคตัดกรวย

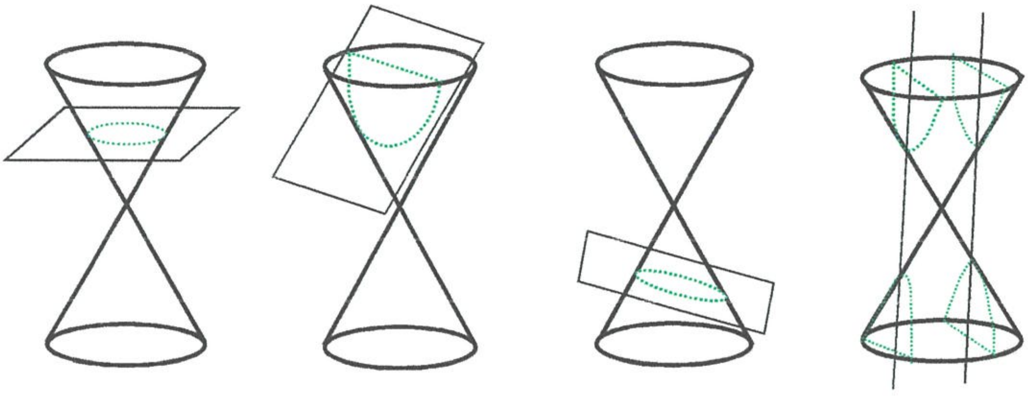
ภาคตัดกรวย ในทางคณิตศาสตร์ คือ เส้นโค้งที่ได้จากการตัดพื้นผิวกรวยกลม ด้วยระนาบแบน ซึ่งการตัดกรวยกลมด้วยระนาบซึ่งไม่ผ่านจุดยอดของกรวย จะได้ วงกลม พาราโบลา วงรี หรือไฮเปอร์โบลา ในกรณีที่ระนาบตัดผ่านจุดยอดของกรวยจะได้จุดหรือเส้นตรง

กรณีตัดผ่านจุดยอดของกรวย



รูปที่ 2.1 ภาพแสดงการตัดผ่านจุดยอดของกรวยจะได้ จุดหรือเส้นตรง ตามลำดับ

กรณีตัดไม่ผ่านจุดยอดของกรวย



รูปที่ 2.2 ภาพแสดงการตัดที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวยจะได้ วงกลม พาราโบลา วงรีหรือไฮเปอร์โบลา ตามลำดับ

ดังนั้น ในหัวข้อนี้จะอธิบายถึง จุด เส้น วงกลม พาราโบลา วงรีและไฮเปอร์โบลา

2.1.1 จุด

จุดกึ่งกลาง (Midpoint) ระหว่างจุด (x_1, y_1) และจุด (x_2, y_2) คือจุด$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

ความชัน (Slope) ของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และจุด (x_2, y_2) คือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ซึ่งความชันของเส้นตรง หาได้จากมุม θ ที่เส้นตรงทำกับแกน x ด้านบวก เรียกว่า มุมเอียงของเส้นตรง หาได้จาก $m = \tan\theta$ โดยที่ $0 \le \theta \le 180°$

ข้อสังเกต เส้นตรงสองเส้น ที่มีความชัน m_1 และ m_2 จะขนานกันเมื่อ $m_1 = m_2$
และตั้งฉากกันเมื่อ $m_1 \times m_2 = -1$

2.1.2 เส้นตรง

เส้นตรงที่มีความชัน m ผ่านจุด (x_1, y_1) จะมีสมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$ และเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) จะมีสมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

สมการเส้นตรงที่มีความชัน m และระยะตัดแกน y เท่ากับ c คือ $y = mx + c$ และเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x เท่ากับ a และระยะตัดแกน y เท่ากับ b จะมีสมการเส้นตรงคือ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

รูปแบบสมการทั่วไปของเส้นตรง คือ $Ax + By + C = 0$ โดยที่ A, B, C เป็นค่าคงที่ และ $A \ne 0$ หรือ $B \ne 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ระยะทาง (Distance) ระหว่างจุดสองจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ระยะทางระหว่างจุด (x_1, y_1) ไปยังเส้นตรง

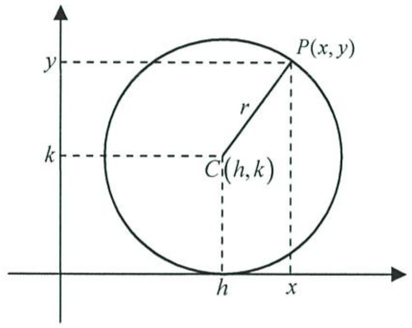
$Ax + By + C = 0$ คือ $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ระยะระหว่างเส้นขนาน $Ax + By + C_1 = 0$ และ $Ax + By + C_2 = 0$ คือ

$$d = \frac{|C_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.1.3 วงกลม

<u>นิยาม</u> วงกลม เป็นทางเดินของจุดบนระนาบ ซึ่งเคลื่อนที่ห่างจากจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่งเป็นระยะที่คงที่เสมอ

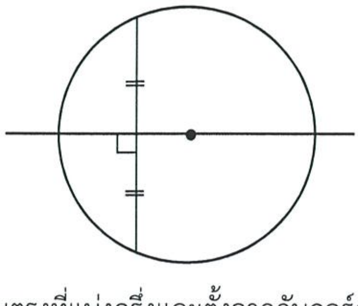


รูปที่ 2.3 ส่วนประกอบวงกลม

จุดคงที่ C เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม โดยระยะทางที่เท่ากันเรียกว่า รัศมีของวงกลม (r) สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) และความยาวรัศมี r คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ สมการทั่วไปของวงกลมคือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ โดยที่ A, B, C เป็นค่าคงที่

จุดศูนย์กลาง คือ $\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ และความยาวรัศมี $r = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

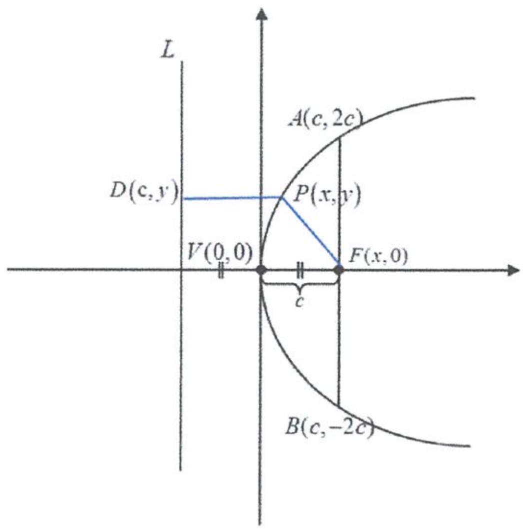
เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลมใดๆ จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลม

2.1.4 พาราโบลา

<u>**นิยาม**</u> พาราโบลา คือ ทางเดินของจุดซึ่งเคลื่อนที่ไป โดยมีระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดคงที่จุดหนึ่ง เท่ากับระยะจากจุดนั้นไปยังเส้นตรงที่คงที่เส้นหนึ่ง



รูปที่ 2.5 ส่วนประกอบของพาราโบลา

จุดคงที่ F เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus) โดยมีเส้นตรง L ที่ลากขนานกับแกนของพาราโบลา โดยห่างจากจุดยอดเป็นระยะ c เรียกว่า เส้นไดเรกตริกซ์ (Directrix line) และเส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไดเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนของพาราโบลา

จุด V ที่กราฟตัดกับแกนพาราโบลาเรียกว่า จุดยอด โดยระยะทางจากจุดยอดไปยังโฟกัส คือ c และเส้นตรง AB ที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านจุดโฟกัส เรียกว่า ลาตัสเรกตัม (Latusrectum) นั่นคือ ลาตัสเรกตัมมีความยาวเท่ากับ $4c$

หาค่าลาตัสเรกตัมของกราฟพาราโบลา

จากสมการรูปทั่วไปของพาราโบลา

$$y^2 = 4cx \tag{2.1}$$

กำหนดให้ c เป็นระยะทางระหว่างจุด F และจุด V จะได้ $x = c$ แทนลงในสมการที่ (2.1) จะได้

$$y^2 = 4cx$$
$$y^2 = 4c^2$$
$$y = \pm 2c$$

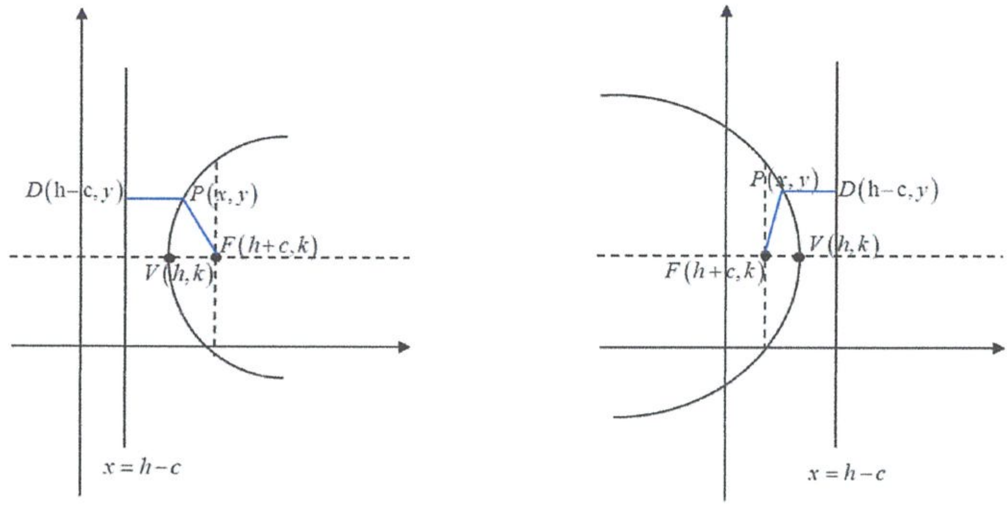
ระยะทางระหว่างจุด A และจุด B

$$d(A,B) = \sqrt{(2c-(-2c))^2 + (c-c)^2}$$
$$= |4c|$$

ดังนั้น ค่าลาตัสเรกตัมของกราฟพาราโบลา คือ $4c$

กำหนดให้ จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่จุด (h,k) จะสามารถแบ่งกรณีของพาราโบลาได้ ดังนี้

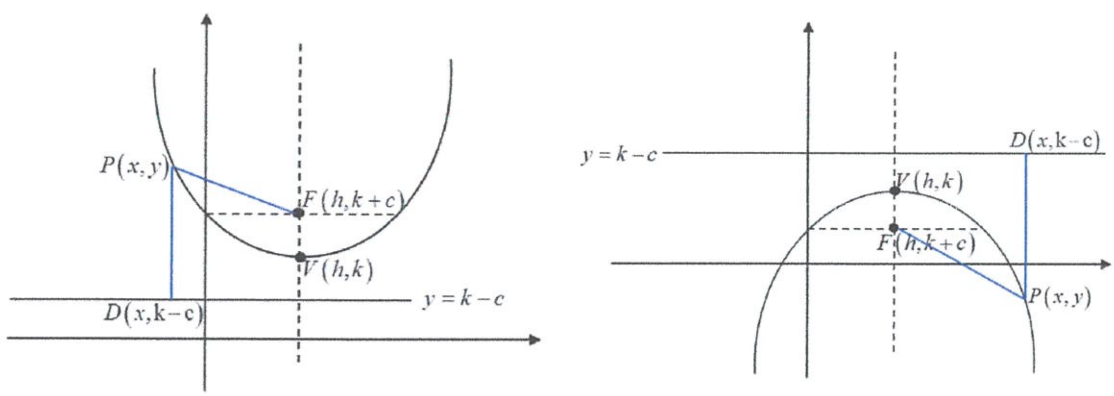
พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานกับแกน x จะมีรูปสมการ คือ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ จุดยอด (h,k) , จุดโฟกัส $(h+c,k)$, เส้นไดเรกตริกซ์ $x=h-c$, แกนสมมาตร $y=k$ ดังรูปที่ 2.6



เมื่อ $c>0$ เมื่อ $c<0$

รูปที่ 2.6 พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานกับแกน x เมื่อ $c>0$ และ $c<0$ ตามลำดับ

พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานกับแกน y จะมีรูปสมการ คือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ จุดยอด (h,k), จุดโฟกัส $(h,k+c)$, เส้นไดเรกตริกซ์ $y=k-c$, แกนสมมาตร $x=h$ ดังรูปที่ 2.7

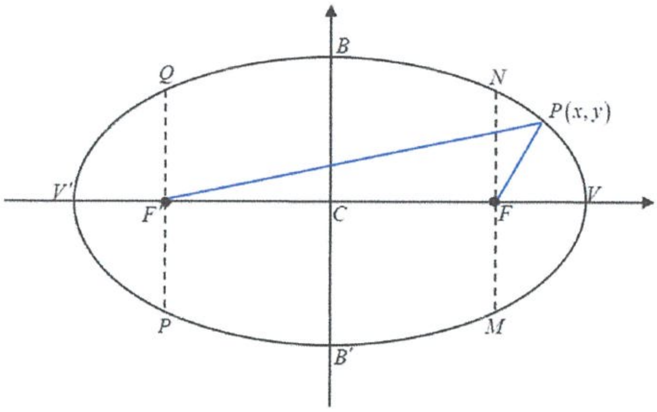


เมื่อ $c>0$ เมื่อ $c<0$

รูปที่ 2.7 พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานกับแกน y เมื่อ $c>0$ และ $c<0$ ตามลำดับ

2.1.5 วงรี

นิยาม วงรี คือ ทางเดินของจุดซึ่งเคลื่อนที่ไป โดยทำให้ผลบวกของระยะ ที่ห่างจากจุดคงที่สองจุด เป็นค่าคงที่เสมอ



รูปที่ 2.8 ส่วนประกอบวงรี

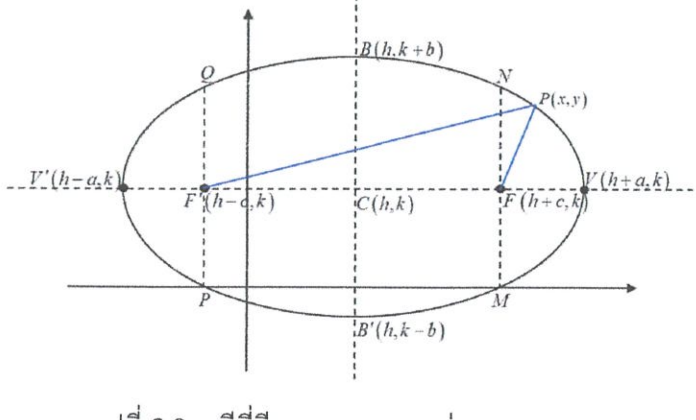
รูปทั่วไปของสมการวงรี $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ เมื่อ $AB>0$ และ $A\neq B$ จุด C เรียกว่า จุดศูนย์กลาง โดยมีจุด V กับ V' เป็นจุดยอดและจุดคงที่ F กับ F' เป็นจุดโฟกัส มีส่วนของเส้นตรง $V'V$ เรียกว่า แกนเอก (Major axis) และส่วนของเส้นตรง $B'B$ เรียกว่า แกนโท (Minor axis)

ส่วนของเส้นตรง PQ และ MN เรียกว่า ลาตัสเรกตัม ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a}$

กำหนดให้ จุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่จุด (h,k) จะสามารถแบ่งกรณีของวงรีได้ ดังนี้

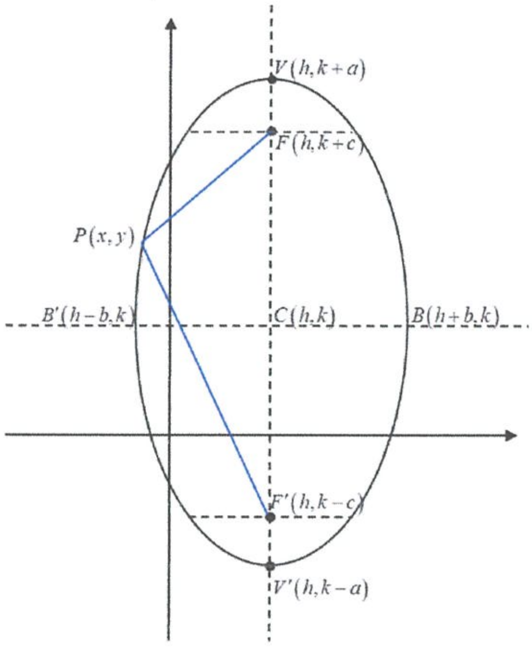
วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน x จะมีรูปสมการ คือ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

เมื่อ $b=\sqrt{a^2-c^2}$ โดยที่ $a>b>0$ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน x

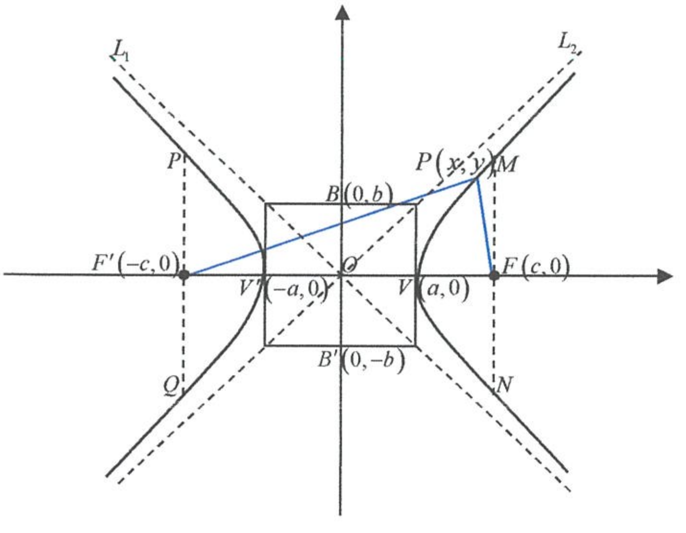
วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน y จะมีรูปสมการ คือ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ เมื่อ $b=\sqrt{a^2-c^2}$ โดยที่ $a>b>0$ ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน y

2.1.6 ไฮเปอร์โบลา

นิยาม ไฮเปอร์โบลา คือ ทางเดินของจุดที่เคลื่อนที่ไป ซึ่งทำให้ผลต่างของระยะที่ห่างจากจุดที่คงที่สองจุด เป็นค่าคงที่บวกเสมอ



รูปที่ 2.11 ส่วนประกอบไฮเปอร์โบลา

จุดคงที่สองจุด F และจุด F' เรียกว่า จุดโฟกัส และจุดสองจุด V และ V' เรียกว่าจุดยอดของไฮเปอร์โบลา โดยมีจุด O อยู่กึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า จุดศูนย์กลางของไฮเปอร์โบลา

เส้นตรง L_1 และ L_2 ที่กำกับไฮเปอร์โบลา เรียกว่า เส้นกำกับ (Asymptotic lines) โดยส่วนของเส้นตรง VV' ซึ่งอยู่ในแนวโฟกัสทั้งสองและมีจุดปลายอยู่บนไฮเปอร์โบลาเรียกว่า แกนตามขวาง (Transverse axis) ของไฮเปอร์โบลา และส่วนของเส้นตรง BB' ที่ตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลาง และประกอบกันเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำกับไฮเปอร์โบลา เรียกว่า แกนสังยุค (Conjugate axis)

เส้นตรง PQ และ MN เรียกว่า ลาตัสเรกตัม มีความยาวเท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a}$

หาค่าลาตัสเรกตัมของกราฟไฮเปอร์โบลา

จากสมการรูปทั่วไปของไฮเปอร์โบลา

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.2}$$

ให้ c เป็นระยะทางระหว่างจุด F และจุด O จะได้ $x=c$ แทนลงในสมการที่ (2.2) จะได้

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\
&\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\
&y=\sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)b^2} \qquad ;c^2=a^2+b^2\\
&\;=\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}-1\right)b^2}\\
&\;=\sqrt{\frac{a^2b^2-b^4}{a^2}-b^2}\\
&\;=\sqrt{b^2+\frac{b^4}{a^2}-b^2}\\
&\;=\pm\frac{b^2}{a}
\end{aligned}$$

ระยะทางระหว่างจุด P และจุด Q

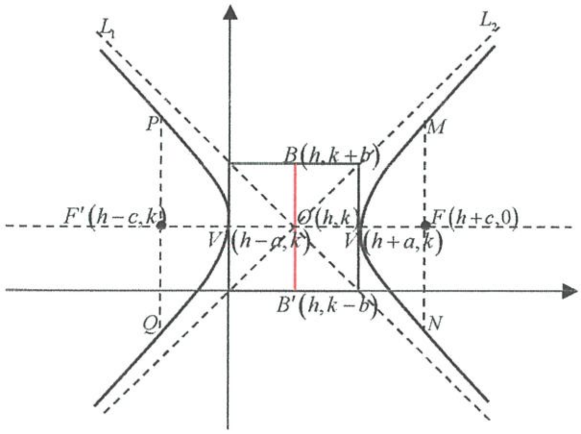
$$\begin{aligned}
d(P,Q)&=\sqrt{\left(\frac{b^2}{a}-\left(-\frac{b^2}{a}\right)\right)^2+(c-c)^2}\\
&=\frac{2b^2}{a}
\end{aligned}$$

โดยที่ระยะทาง PQ = ระยะทาง MN

ดังนั้น ค่าลาตัสเรกตัมของกราฟไฮเปอร์โบลา คือ $\dfrac{2b^2}{a}$

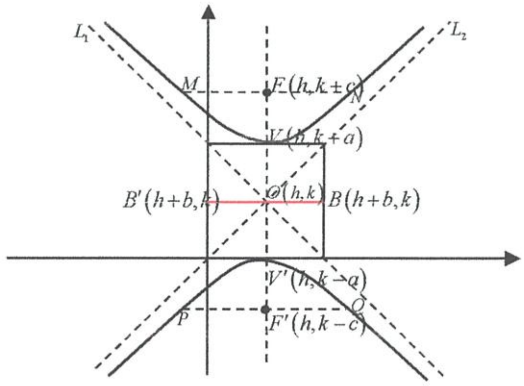
กำหนดให้ จุดศูนย์กลางของไฮเปอร์โบลาอยู่ที่จุด (h,k) จะสามารถแบ่งกรณีของวงรีได้ ดังนี้

ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน x จะมีรูปสมการ คือ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ เมื่อ $b=\sqrt{c^2-a^2}$ ดังรูปที่ 2.12 ที่จุดศูนย์กลาง (h,k) มีจุดโฟกัส $(h-c,k)$ และ $(h+c,k)$ มีจุดยอด $(h-a,k)$ และ $(h+a,k)$ และมีเส้นกำกับ $y-k=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$



รูปที่ 2.12 ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน x

ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน y จะมีรูปสมการ คือ $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ เมื่อ $b=\sqrt{c^2-a^2}$ ดังรูปที่ 2.13 ที่จุดศูนย์กลาง (h,k) มีจุดโฟกัส $(h,k-c)$ และ $(h,k+c)$ มีจุดยอด $(h,k-a)$ และ $(h,k+a)$ และมีเส้นกำกับ $y-k=\pm\dfrac{a}{b}(x-h)$



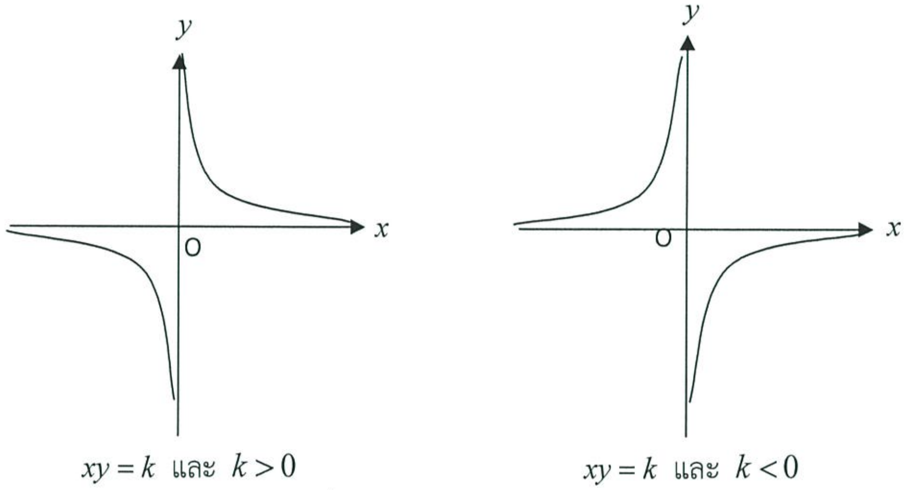
รูปที่ 2.13 ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน y

ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบลาไปยังจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ โดยที่แกนตามขวางยาว $2a$ และแกนสังยุคยาว $2b$

สมการทั่วไปของไฮเปอร์โบลา คือ $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ โดยที่ $AB < 0$

ลาตัสเรกตัม ของไฮเพอร์โบลา คือส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่บนไฮเปอร์โบลา และขนานกับแกนสังยุคที่จุดโฟกัส ซึ่งมีความยาว $\dfrac{2b^2}{a}$

<u>ข้อสังเกต</u> ไฮเปอร์โบลามุมฉาก หมายถึง ไฮเปอร์โบลาที่มี $a = b$ และสมการ $xy = k$
(โดยที่ $k = 0$ เป็นสมการของไฮเปอร์โบลามุมฉากเสมอ)



รูปที่ 2.14 ไฮเปอร์โบลามุมฉาก

สมการภาคตัดกรวยในรูปทั่วไป

สมการภาคตัดกรวยทุกสมการสามารถจัดให้อยู่ในรูป $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $A \neq 0$ หรือ $B \neq 0$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยหรือภาคตัดกรวยแปรสภาพแบบใดแบบหนึ่ง ดังนี้

1) ถ้า $A = B$ กราฟเป็นวงกลมหรือจุดหรือไม่มีกราฟ
2) ถ้า $A \neq B$ และ A กับ B มีเครื่องหมายเหมือนกัน $AB > 0$ กราฟเป็นวงรีหรือจุดหรือไม่มีกราฟ
3) ถ้า $A \neq B$ และ A กับ B มีเครื่องหมายต่างกัน $AB < 0$ กราฟเป็นไฮเปอร์โบลาหรือเส้นตรงตัดกันสองเส้น
4) ถ้า $A = 0$ หรือ $B = 0$ เพียงตัวใดตัวหนึ่ง กราฟเป็นพาราโบลาหรือเส้นตรงหนึ่งเส้นหรือเส้นขนานสองเส้น หรือไม่มีกราฟ

จากที่ได้กล่าวมาเรื่องภาคตัดกรวย ที่มีแกนขนานกับแกนพิกัดสามารถแทนในรูปสมการกำลังสอง $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$

สำหรับสมการกำลังสองใดๆ $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ โดยที่ $C\neq 0$ ยังแทนภาคตัดกรวยหรือภาคตัดกรวยเสื่อมคลาย (Degenerate conic) ที่มีแกนขนานกับแกนพิกัดได้ ซึ่งในการวาดกราฟของสมการกำลังสองใดๆที่ $C\neq 0$ นี้ เราสามารถกำจัดเทอม Cxy ออกไปจากสมการได้ โดยใช้วิธีการเปลี่ยนทิศทางของแกนโดยใช้เมทริกซ์

เมทริกซ์ของการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติ

การเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติ

ทฤษฎีบทแกนมุขสำคัญสำหรับ $\mathbb{R}^2$ (Principle axes theorem for $\mathbb{R}^2$)

ให้ $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ เป็นสมการภาคตัดกรวย และ

ให้ $X^TAX=ax^2+2bxy+cy^2$ เป็นรูปแบบกำลังสอง

แล้วแกนพิกัดถูกหมุน และได้สมการภาคตัดกรวย ในระบบแกนพิกัดใหม่ $x'y'$ อยู่ในรูป

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+d'x'+e'y'+f=0$$

เมื่อ λ_1 และ λ_2 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A

การหมุนจะทำได้โดยการแทน $X=PX'$

เมื่อ P เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ X^TAX เป็นเมทริกซ์ทแยงเชิงตั้งฉากและ $\det(P)=1$

ขั้นตอนการคำนวณการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติ

สมการภาคตัดกรวย $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

ให้ $X^TAX=ax^2+2bxy+cy^2$

จะได้
$$X^TAX+KX+f=0 \tag{2.3}$$

เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ และ $K=\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 1 หา λ_1 และ λ_2 จากสมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\det(A-\lambda I)=0$

ขั้นที่ 2 หา $\bar{v}_1$ และ $\bar{v}_2$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย

และเป็นผลเฉลยของสมการ $(A-\lambda I)\bar{v}_j=0$ เมื่อ $j=1,2$ และ $\bar{v}_j=\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix}$

จะได้ $P=\begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{bmatrix}$ โดยที่ $P^{-1}=P^T$ และ $P^TAP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 3 เปลี่ยนตัวแปรโดยการแทน $X = PX'$ ในสมการ (2.3) เมื่อ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
(PX')^T A(PX') + K(PX') + f &= 0 \\
(X')^T P^T A(PX') + K(PX') + f &= 0 \\
(X')^T (P^T AP)(X') + (KP)X' + f &= 0
\end{aligned}
$$

หลังจากแทนค่าแล้วจัดรูปสมการให้เรียบร้อย

ขั้นที่ 4 เปลี่ยนพจน์ที่อยู่ในรูปกำลังสองให้เป็น x'' และ y''

ตัวอย่างการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติ

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$

<u>วิธีทำ</u> ผลเฉลย สมการที่ให้อยู่ในรูป

$$X^T AX + KX + 4 = 0 \tag{2.4}$$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ และ $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ และ $K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

หา P ซึ่ง $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}$ โดยที่ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

จากนั้นจะหา λ_1 , λ_2 จากสมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\det(A - \lambda I) = 0$ จะได้

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 - 13\lambda + 36 &= 0 \\
(\lambda - 4)(\lambda - 9) &= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\lambda_1 = 4$ และ $\lambda_2 = 9$

หา $\vec{v}_1$ โดยการแทนค่า $\lambda_1 = 4$ ในสมการ $(A - \lambda I)\vec{v}_1 = 0$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 2y_1 \\ -2x_1 + 4y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ $x_1 - 2y_1 = 0$ เพราะฉะนั้น $y_1 = \frac{x_1}{2}$

ให้ $x_1 = 2t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ $y_1 = t$ และ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$

แต่ $\|\vec{v}_1\| = 1$ นั่นคือ
$$\begin{aligned} \sqrt{(2t)^2 + t^2} &= 1 \\ \sqrt{5}t &= 1 \\ t &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

หา $\vec{v}_2$ โดยการแทนค่า $\lambda_2 = 9$ ในสมการ $(A - \lambda I)\vec{v}_2 = 0$ จะได้

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4x_2 - 2y_2 \\ -2x_2 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ $-2x_2 - y_2 = 0$ เพราะฉะนั้น $y_2 = -2x_2$

ให้ $x_2 = -t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ $y_2 = 2t$ และ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -t \\ 2t \end{bmatrix}$

แต่ $\|\vec{v}_2\| = 1$ นั่นคือ
$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-t^2\right) + (2t)^2} &= 1 \\ 5t^2 &= 1 \\ t &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

การหมุนแกนจะทำได้โดยการแทน $X = PX'$; $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ในสมการ (2.4) จะได้

$$(PX')^T A(PX') + K(PX') + 4 = 0$$

$$\begin{aligned}(X')^T P^T A(PX') + K(PX') + 4 &= 0\\ (X')^T (P^T AP)(X') + (KP)X' + 4 &= 0 \qquad (2.5)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $P^T AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ และ $KP = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}$

นำไปแทนค่าในสมการ (2.5) จะได้

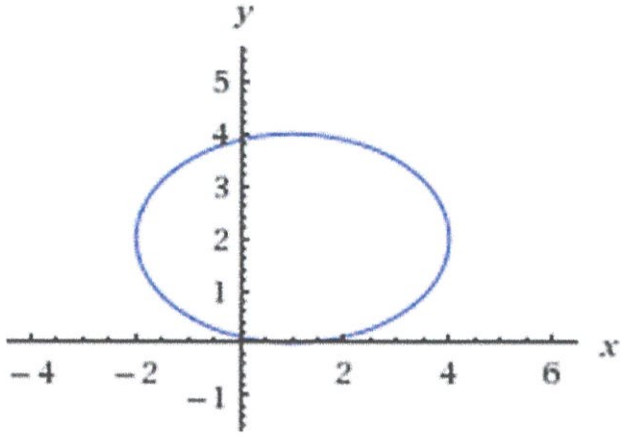
$$\begin{aligned}
[X']^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} X' + \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix} X' + 4 &= 0\\
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4 &= 0\\
\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4 &= 0\\
\begin{bmatrix} 4x' & 9y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8x' - 36y' \end{bmatrix} + 4 &= 0\\
4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 &= 0\\
(4x'^2 - 8x') + (9y'^2 - 36y') &= -4\\
4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') &= -4\\
4(x'^2 - 2(1)x' + 1) + 9(y'^2 - 2(2)y' + 4) &= -4 + 4 + 36\\
4(x'-1)^2 + 9(y'-2)^2 &= 36
\end{aligned}$$

ให้ $x'' = x' - 1$ และ $y'' = y' - 2$

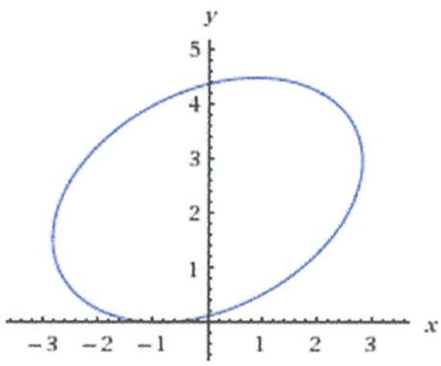
จะได้ว่า $4x''^2 + 9y''^2 = 36$

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

สมการที่ได้เป็นสมการของวงรี



รูปที่ 2.15 กราฟก่อนการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติ



รูปที่ 2.16 กราฟหลังการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสองมิติ

บทถัดไป กล่าวถึงเนื้อหาเกี่ยวกับพื้นผิวกำลังสอง รายละเอียดของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและแบบสองชิ้น และการหมุนในกราฟสามมิติ

บทที่ 3
รูปทรงไฮเปอร์โบลา

รูปทรงไฮเปอร์โบลา เป็นส่วนหนึ่งของพื้นผิวกำลังสอง ดังนั้น ก่อนที่จะกล่าวถึงรูปทรงไฮเปอร์โบลาอย่างละเอียด ผู้จัดทำปัญหาพิเศษจึงขอทบทวนเกี่ยวกับพื้นผิวกำลังสองก่อน

3.1 พื้นผิวกำลังสอง (Quadric surface)

จากรูปแบบทั่วไปของภาคตัดกรวยในสองมิติ $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

เราจะพิจารณาลักษณะของกราฟของสมการกำลังสอง (Quadratic equation) ของตัวแปร x, y และ z ในรูปของ

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

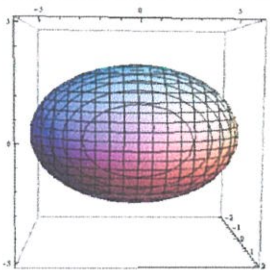
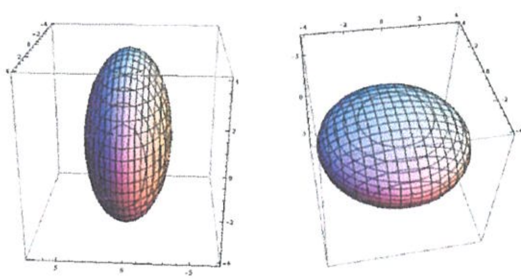
เมื่อ A,B และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ถ้ากราฟของสมการนี้เป็นพื้นผิว จะเรียกพื้นผิวนี้ว่า พื้นผิวกำลังสอง โดยบางรูปแบบของสมการกำลังสองและพื้นผิวกำลังสองแสดงได้ดังนี้

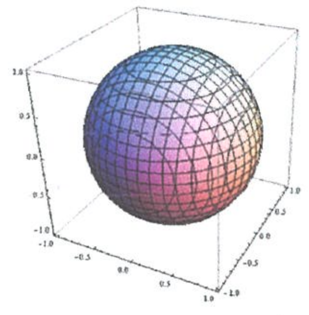
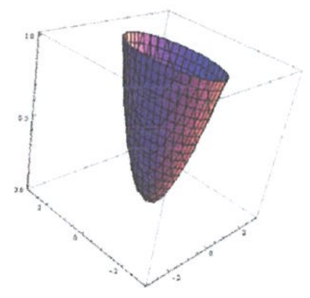
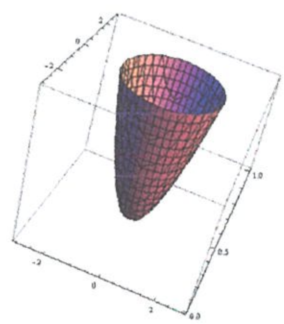
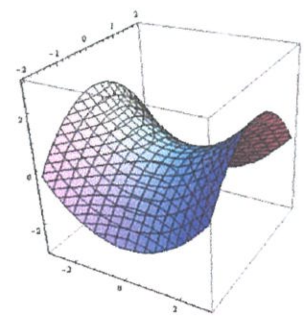
3.1.1 พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปไม่ได้ (Non-degenerate real quadric surfaces)

พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปไม่ได้ คือ พื้นผิวกำลังสองที่มีลักษณะเป็นสามมิติ แต่ไม่สามารถลดรูปให้อยู่ในลักษณะสองมิติได้

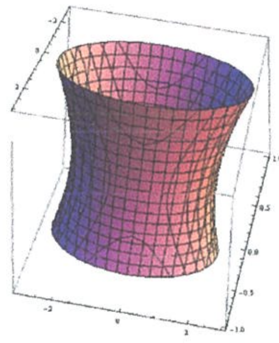
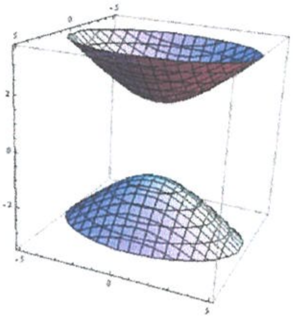
ตารางที่ 3.1 พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปไม่ได้

ชื่อพื้นผิว	สมการพื้นผิว	กราฟของสมการพื้นผิว
ทรงกรวย (Ellipse)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
ทรงกลมแบน (Spheroid)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$	

ตารางที่ 3.1 (ต่อ) พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปไม่ได้

ชื่อพื้นผิว	สมการพื้นผิว	กราฟของสมการพื้นผิว
ทรงกลม (Sphere)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$	
ทรงพาราโบลาเชิงวงรี (Elliptic paraboloid)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$	
ทรงพาราโบลาเชิงวงกลม (Circular paraboloid)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=0$	
ทรงพาราโบลาเชิงไฮเปอร์โบลา (Hyperbolic paraboloid)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$	

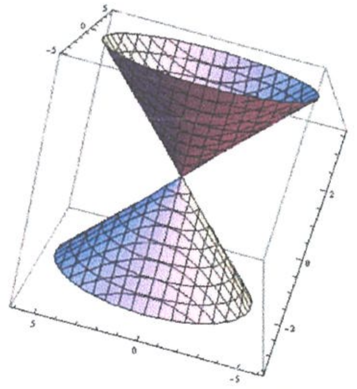
ตารางที่ 3.1 (ต่อ) พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปไม่ได้

ชื่อพื้นผิว	สมการพื้นผิว	กราฟของสมการพื้นผิว
ทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น (Hyperboloid of one sheet)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
ทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น (Hyperboloid of two sheets)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	

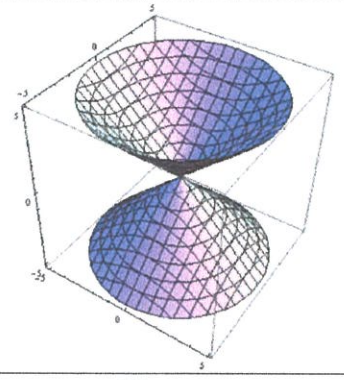
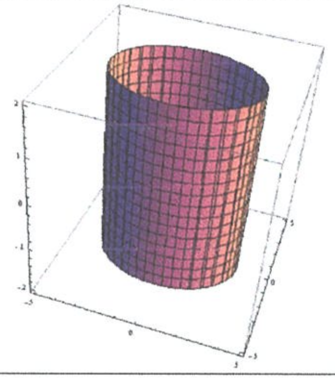
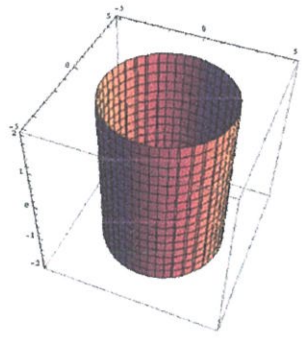
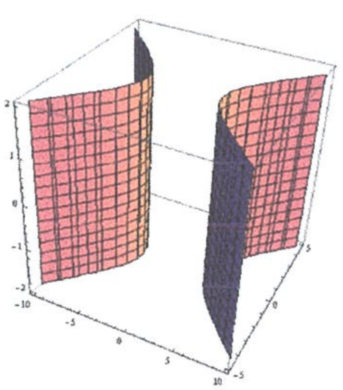
3.1.2 พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปได้ (Degenerate quadric surfaces)

พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปได้ คือ พื้นผิวกำลังสองที่มีลักษณะเป็นสามมิติ สามารถลดรูปให้อยู่ในลักษณะสองมิติได้

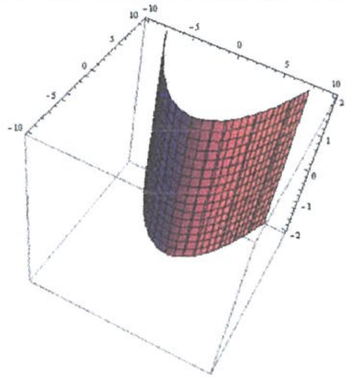
ตารางที่ 3.2 พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปได้

ชื่อพื้นผิว	สมการพื้นผิว	กราฟของสมการพื้นผิว
ทรงกรวย (Cone)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	

ตารางที่ 3.2 (ต่อ) พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปได้

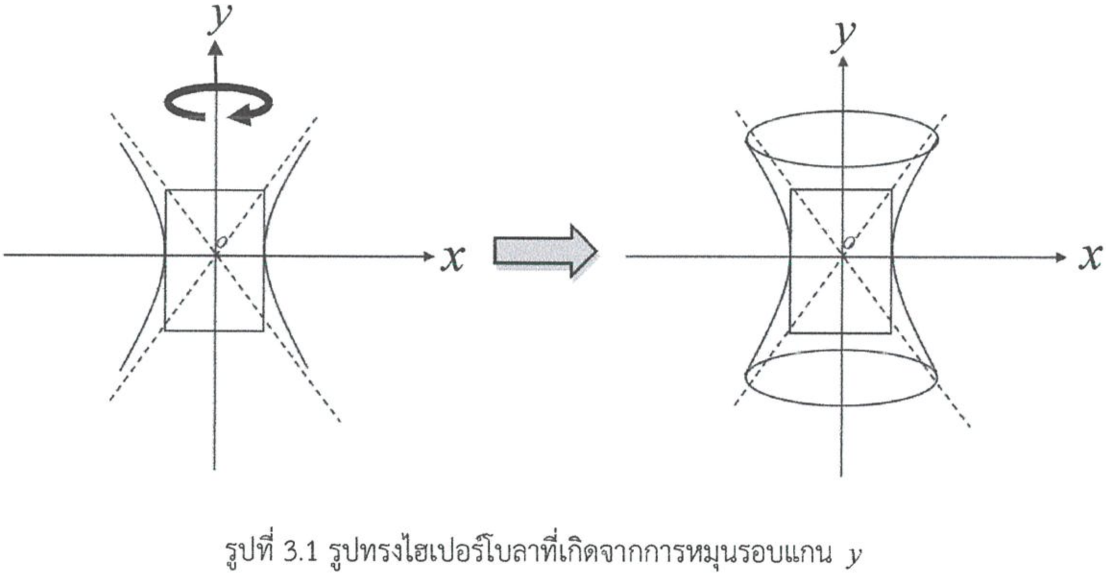
ชื่อพื้นผิว	สมการพื้นผิว	กราฟของสมการพื้นผิว
ทรงกรวยกลม (Circular cone)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$	
ทรงกระบอกเชิงวงรี (Elliptic cylinder)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
ทรงกระบอกเชิงวงกลม (Circular cylinder)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	
ทรงกระบอกเชิงไฮเปอร์โบลา (Hyperbolic cylinder)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

ตารางที่ 3.2 (ต่อ) พื้นผิวกำลังสองที่ลดรูปได้

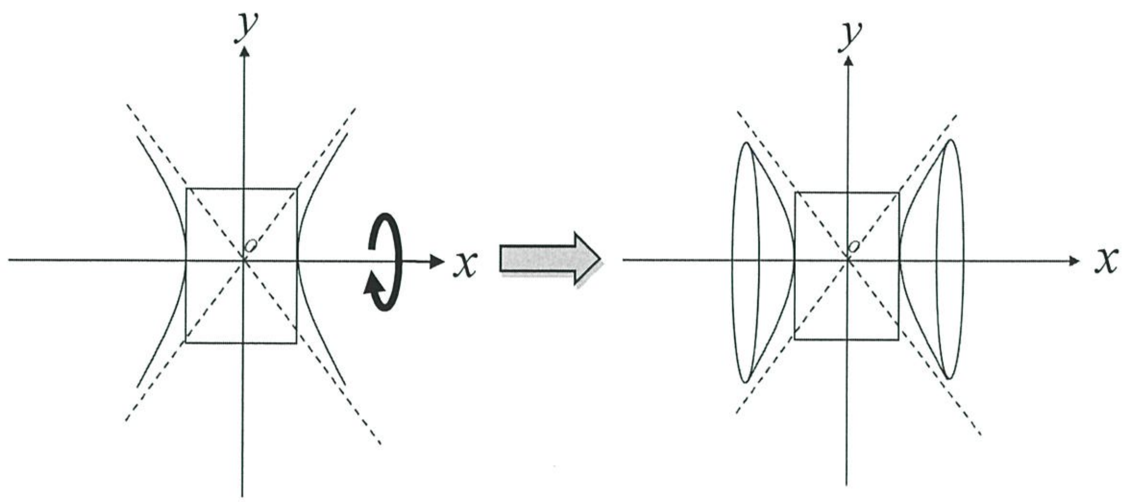
ชื่อพื้นผิว	สมการพื้นผิว	กราฟของสมการพื้นผิว
ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา (Parabolic cylinder)	$x^2 + 2ay = 0$	

3.2 รูปทรงไฮเปอร์โบลา (Hyperboloid)

จากการศึกษาความรู้เรื่องภาคตัดกรวย ที่เกิดจากการตัดพื้นผิวกรวยกลม ด้วยระนาบแบน จะได้ จุด เส้น วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเปอร์โบลา ซึ่งสิ่งที่น่าสนใจ คือ ไฮเปอร์โบลาที่เกิดจากการตัดพื้นผิวกรวยกลมนั้นสามารถทำให้เกิดรูปทรงไฮเปอร์โบลาได้ด้วยการหมุนรอบแกน y และหมุนรอบแกน x จะได้รูปทรงไฮเปอร์โบลา 2 แบบคือ รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น (Hyperboloid of one sheet) และ รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น (Hyperboloid of two sheets) ดังรูปที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 รูปทรงไฮเปอร์โบลาที่เกิดจากการหมุนรอบแกน y



รูปที่ 3.2 รูปทรงไฮเปอร์โบลาที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x

3.2.1 รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

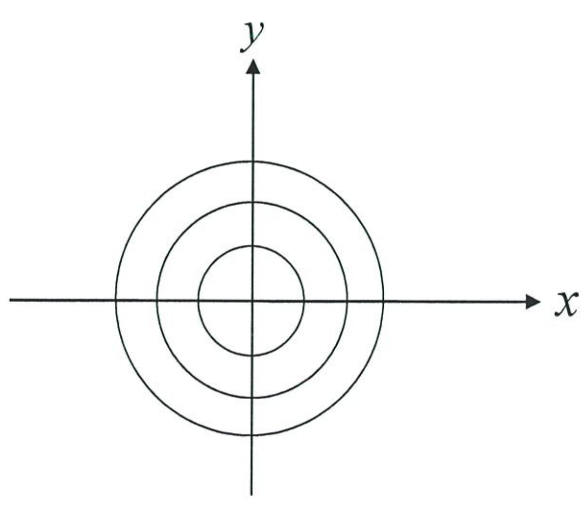
สมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น คือ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ เมื่อ $a,b,c>0$ เป็นค่าคงที่ โดยสามารถสร้างรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

เริ่มจากเขียนกราฟของรอยตัดบนระนาบพิกัดทั้งสามแล้วจึงเขียนกราฟรวมทั้งหมด

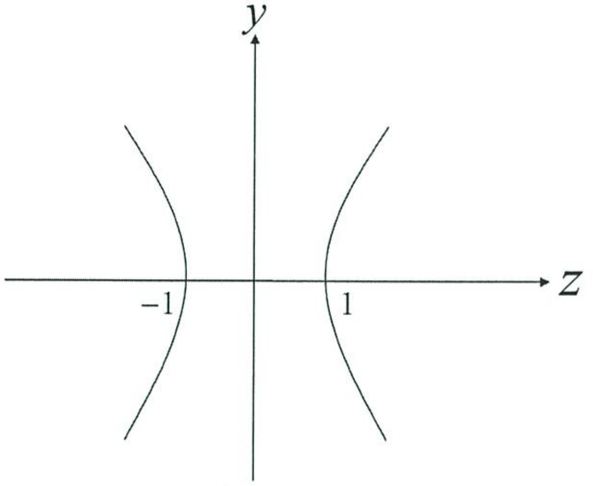
พิจารณา $x^2+y^2-z^2=1$ นั่นคือ $x^2+y^2=1+z^2$

(i) พิจารณาเส้นโค้งระดับ (Level curve) ในระนาบ xy นั่นคือเส้นโค้งระดับ คือ $z=c$

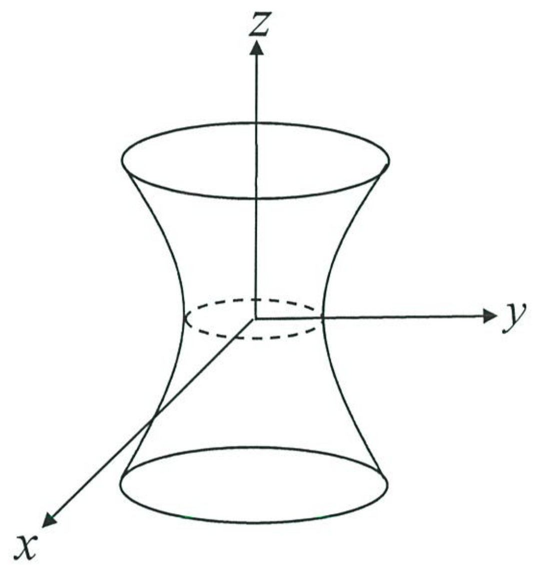
พิจารณา $z=c$ และ $x^2+y^2=1+c^2$ ซึ่งเส้นโค้งระดับแต่ละเส้นจะเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน อยู่ที่จุด $(0,0)$ และมีรัศมี $\sqrt{1+c^2}\geq 1$



(ii) ถ้า $x=0$ แล้วพิจารณา $y^2-z^2=1$ จะได้ รูปไฮเปอร์โบลาในระนาบ yz



(iii) รอยตัดของพื้นผิวประกอบด้วย (i) และ (ii) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น



จากรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นที่ได้แสดงมาแล้ว สามารถแสดงการตัดจากสมการของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นอย่างง่ายแบบใดแบบหนึ่งจากสามสมการนี้

1. $Ax^2+By^2-Cz^2=D$ หรือ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
2. $Ax^2-By^2+Cz^2=D$ หรือ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
3. $-Ax^2+By^2+Cz^2=D$ หรือ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

เมื่อ $A,B,C,D>0$ หรือ $a,b,c>0$

ในที่นี้จะพิจารณาการเขียนกราฟของพื้นผิวซึ่งมีสมการแบบที่ 1

พิจารณาจุดตัดแกน

จุดตัดแกน x คือ $(\pm a,0,0)$

จุดตัดแกน y คือ $(0,\pm b,0)$

จุดตัดแกน z ไม่มี เนื่องจากเมื่อแทน $x=0$ และ $y=0$ แล้วจะได้ค่า z เป็นจำนวนจินตภาพ

พิจารณาสมมาตร

กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

กราฟมีสมมาตรกับแกนทั้งสาม

กราฟมีสมมาตรกับระนาบทั้งสามระนาบ

พิจารณาขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ y คือ $(-\infty,+\infty)$

ขอบเขตของ z คือ $(-\infty,+\infty)$

พิจารณารอยตัด

รอยตัดบนระนาบ xy เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$

รอยตัดบนระนาบ yz เป็นไฮเปอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, x=0$

รอยตัดบนระนาบ xz เป็นไฮเปอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xy เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}, z=k$ ทุกค่า k

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ yz เป็นไฮเปอร์โบลา $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}, x=k$ ทุกค่า k

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xz เป็นไฮเปอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}, y=k$ ทุกค่า k

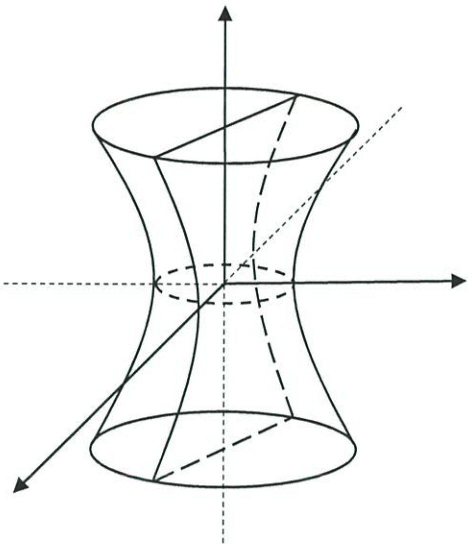
พิจารณารอยตัดบนระนาบทั้งหลายที่ขนานกับระนาบ xy ซึ่งเป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}, z=k$$

หรือ
$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}=1, z=k$$

จะเห็นว่าวงรีมีขนาดเล็กที่สุดบนระนาบ xy (เมื่อ $k=0$) และวงรีจะมีขนาดใหญ่ขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดเมื่อ $|k|$ เพิ่มขึ้นจากศูนย์อย่างไม่มีขีดจำกัด

การพิจารณารอยตัดบนระนาบ $z=k$ หลายๆ ระนาบประกอบกับรอยตัดบนระนาบพิกัดและข้อมูลที่พิจารณาไว้แล้ว จะเขียนกราฟของพื้นผิวรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 กราฟของพื้นผิวรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

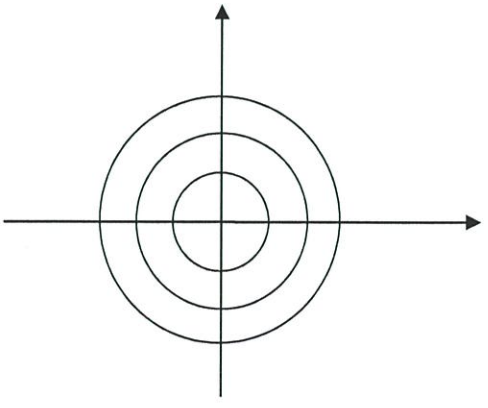
3.2.2 รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น คือ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ เมื่อ $a,b,c>0$ เป็นค่าคงที่

พิจารณาสมการ $x^2-y^2-z^2=1$

(i) พิจารณาเส้นโค้งระดับ ในระนาบ yz โดยกำหนดให้ $x=c$

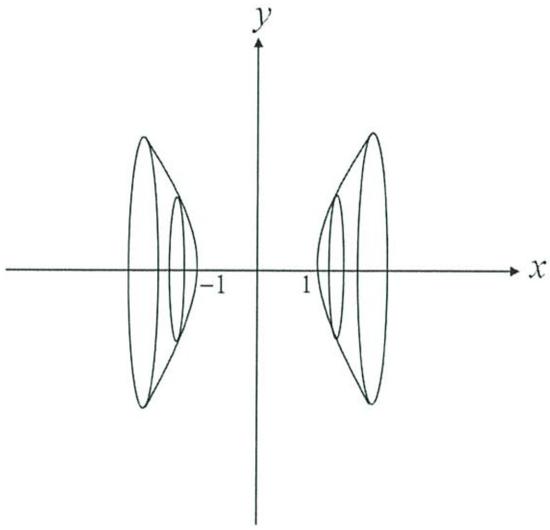
จากสมการ $x^2-y^2-z^2=1$ จะได้ $x^2+z^2=c^2-1$ $\left(c^2\geq 1\right)$ ซึ่งเส้นโค้งระดับแต่ละเส้นจะเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน อยู่ที่จุด $(0,0)$ และมีรัศมี $\sqrt{c^2-1}\geq 1$



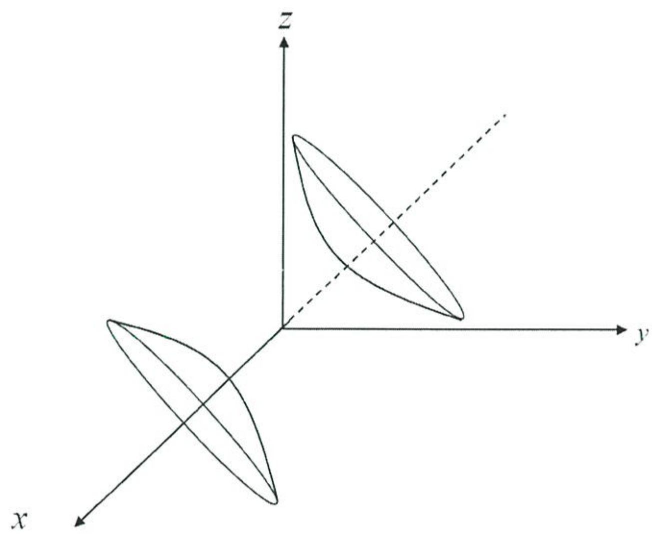
(ii) ส่วนที่ตัดด้วยระนาบ xy

โดยกำหนดให้ $z = 0$ และจากสมการ $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

จะได้ $x^2 - y^2 = 1$ ซึ่งได้เป็นรูปไฮเปอร์โบลา



(iii) รอยตัดของพื้นผิวประกอบด้วย (i) และ (ii) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น



จากรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นที่ได้แสดงมาแล้ว สามารถแสดงการตัดจากสมการของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นอย่างง่ายแบบใดแบบหนึ่งจากสามสมการนี้

1. $Ax^2 - By^2 - Cz^2 = D$ หรือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
2. $-Ax^2 + By^2 - Cz^2 = D$ หรือ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
3. $-Ax^2 - By^2 + Cz^2 = D$ หรือ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

เมื่อ $A, B, C, D > 0$ หรือ $a, b, c > 0$

ในที่นี้จะพิจารณาการเขียนกราฟของพื้นผิวซึ่งมีสมการแบบที่ 3

พิจารณาจุดตัดแกน

จุดตัดแกน x ไม่มี

จุดตัดแกน y ไม่มี

จุดตัดแกน z คือ จุด $(0, 0, \pm c)$

พิจารณาสมมาตร

กราฟมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

กราฟมีสมมาตรกับแกนทั้งสามแกน

กราฟมีสมมาตรกับระนาบทั้งสามระนาบ

พิจารณาขอบเขต

ขอบเขตของ x คือ $(-\infty, +\infty)$

ขอบเขตของ y คือ $(-\infty, +\infty)$

ขอบเขตของ z คือ $(-\infty, -c] \cup [c, +\infty)$

พิจารณารอยตัด

รอยตัดบนระนาบ xy ไม่มี

รอยตัดบนระนาบ yz เป็นไฮเปอร์โบลา $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$

รอยตัดบนระนาบ xz เป็นไฮเปอร์โบลา $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xy เป็นวงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1, z=k$$ ทุกค่า k ซึ่ง $|k|<c$ เป็นจุด $(0,0,k)$ เมื่อ $|k|=c$

รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ yz เป็นไฮเปอร์โบลา

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{a^2}, x=k$$ ทุกค่า k

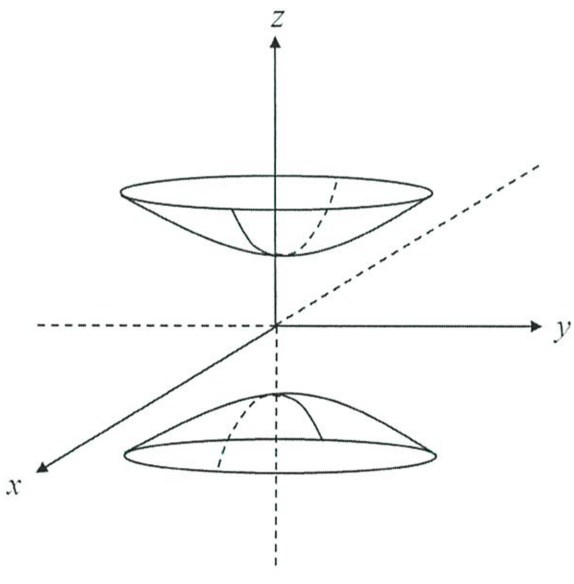
รอยตัดบนระนาบที่ขนานกับระนาบ xz เป็นไฮเปอร์โบลา

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2}, y=k$$ ทุกค่า k

พิจารณารอยตัดบนระนาบทั้งหลายที่ขนานกับระนาบ xy อย่างละเอียดจะเห็นว่า เมื่อ $|k|=c$ รอยตัดจุดเป็นจุด $(0,0,\pm c)$

เมื่อ $|k|>c$ รอยตัดเป็นวงรี และมีขนาดใหญ่ขึ้นเรื่อยๆ เมื่อ $|k|$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด

จะเขียนกราฟของพื้นผิวรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นได้ ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 กราฟของพื้นผิวรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

เมทริกซ์ของการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสามมิติ

การเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสามมิติ

ทฤษฎีบทแกนมุขสำคัญสำหรับ $\mathbb{R}^3$ (Principle axes theorem for $\mathbb{R}^3$)

ให้ $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0$ เป็นสมการพื้นผิว Q

และให้ $X^TAX=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$ เป็นรูปแบบกำลังสอง

แล้วแกนพิกัดถูกหมุนทำให้ Q ในระบบ $x'y'z'$ อยู่ในรูป

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+g'x'+h'y'+i'z'+j'=0$$

เมื่อ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ P การหมุนแกนนั้นแทน $X=PX'$

เมื่อ P เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ X^TAX เป็นเมทริกซ์ทแยงเชิงตั้งฉากและ $|\mathrm{P}|=1$

ขั้นตอนการคำนวณการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสามมิติ

สมการพื้นผิว $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0$

ให้ $\mathbb{R}$ 3

จะได้
$$X^TAX+MX+j=0 \tag{3.1}$$

เมื่อ $A=\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ และ $M=\begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 1 หา λ_1,λ_2 และ λ_3 จากสมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\det(A-\lambda I)=0$

ขั้นที่ 2 หา $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ และ $\vec{v}_3$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย

และเป็นผลเฉลยของสมการ $(A-\lambda I)\vec{v}_j=0$ เมื่อ $j=1,2,3$ และ $\vec{v}_j=\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}$

จะได้ $P=\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$ โดยที่ $P^{-1}=P^T$ และ $P^TAP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 3 เปลี่ยนตัวแปรโดยการแทน $X=PX'$ ในสมการที่ (3.1)

เมื่อ $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $X'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

จะได้ $$\left(PX'\right)^{T} A\left(PX'\right)+M\left(PX'\right)+j = 0$$
$$\left(X'\right)^{T} P^{T}A\left(PX'\right)+M\left(PX'\right)+j = 0$$
$$\left(X'\right)^{T}\left(P^{T}AP\right)\left(X'\right)+\left(MP\right)X'+j = 0$$

หลังจากแทนค่าแล้วจัดรูปสมการให้เรียบร้อย

ขั้นที่ 4 เปลี่ยนพจน์ที่อยู่ในรูปกำลังสองให้เป็น x'', y'' และ z''

ตัวอย่างการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสามมิติ

$$x^2+y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz+30x+30y-30z=0$$

<u>วิธีทำ</u> ผลเฉลย สมการที่ให้อยู่ในรูป

$$X^{T}AX+MX=0 \tag{3.2}$$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ และ $M = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $M = \begin{bmatrix} 30 & 30 & -30 \end{bmatrix}$

หา P ซึ่ง $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$

หา λ_1 , λ_2 และ λ_3 จากสมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\det\left(A-\lambda I\right)=0$

จะได้ $$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda)-4\right)-(-1)\left(-(2-\lambda)-4\right)+(2)\left(-2-2(1-\lambda)\right)=0$$
$$\lambda^3-4\lambda^2-4\lambda+16=0$$
$$(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+2)=0$$
$$\lambda=4,2,-2$$

จะได้ $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ และ $\lambda_3 = -2$

หา $\vec{v}_1$ โดยการแทนค่า $\lambda_1 = 4$ ในสมการ $\left(A-\lambda_1 I\right)\vec{v}_1 = 0$

จะได้ $$\begin{bmatrix} 1-4 & -1 & 2 \\ -1 & 1-4 & 2 \\ 2 & 2 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x-y+2z \\ -x-3y+2z \\ 2x+2y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $-3x-y+2z = 0$ (3.3)

$-x-3y+2z = 0$ (3.4)

$2x+2y-2z = 0$ (3.5)

นำสมการที่ $(3.3)+(3.4)$ จะได้ $-4x-4y+4z = 0$

$2x+2y-2z = 0$ เหมือนกับสมการที่ (3.5)

เพราะฉะนั้นไม่พิจารณาสมการที่ (3.5) ได้

นำสมการที่ $(3.3)-(3.4)$ จะได้ $-2x+2y=0$ เพราะฉะนั้น $y=x$

จากสมการที่ (3.3) จะได้ $-3x-x+2z=0$ เพราะฉะนั้น $z=2x$

ให้ $x=t$ เมื่อ $t\in\mathbb{R}$ จะได้ $y=t, z=2t$ และ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2t \end{bmatrix}$

แต่ $\|\vec{v}_1\| = 1$ นั่นคือ $\sqrt{t^2+t^2+(2t)^2} = 1$

$$\sqrt{6}t = 1$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ดังนั้น $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

หา $\vec{v}_2$ โดยการแทนค่า $\lambda_2 = 2$ ในสมการ $(A-\lambda_2 I)\vec{v}_2 = 0$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1-2 & -1 & 2 \\ -1 & 1-2 & 2 \\ 2 & 2 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -x-y+2z \\ -x-y+2z \\ 2x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $-x-y+2z = 0$ (3.6)

$-x-y+2z = 0$ (3.7)

$$2x+2y = 0 \tag{3.8}$$

จากสมการที่ (3.8) จะได้ $y=-x$

จากสมการที่ (3.6) จะได้ $-x+x+2z = 0$

เพราะฉะนั้น $z=0$

ให้ $x=t$ เมื่อ $t\in\mathbb{R}$ จะได้ $y=-t$ และ $\vec{v}_2=\begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix}$

แต่ $\|\vec{v}_2\|=1$ นั่นคือ $\sqrt{t^2+\left(-t^2\right)+0} = 1$

$$\sqrt{2}t = 1$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น $\vec{v}_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

หา $\vec{v}_3$ โดยการแทนค่า $\lambda_3=-2$ ในสมการ $(A-\lambda_3 I)\vec{v}_3=0$

จะได้
$$\begin{bmatrix} 1+2 & -1 & 2 \\ -1 & 1+2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x-y+2z \\ -x+3y+2z \\ 2x+2y+4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า

$$3x-y+2z = 0 \tag{3.9}$$

$$-x+3y+2z = 0 \tag{3.10}$$

$$2x+2y+4z = 0 \tag{3.11}$$

นำสมการที่ $(3.9)+(3.10)$ จะได้ $2x+2y+4z=0$ เหมือนกับสมการที่ (3.11)

เพราะฉะนั้นไม่พิจารณาสมการที่ (3.11) ได้

นำสมการที่ $(3.9)-(3.10)$ จะได้ $4x-4y = 0$ เพราะฉะนั้น $y=x$

จากสมการที่ (3.9) จะได้ $3x-x+2z = 0$ เพราะฉะนั้น $z=-x$

ให้ $x = t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ $y = t$, $z = -t$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \end{bmatrix}$

แต่ $\|\vec{v}_2\| = 1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + t^2 + \left(-t^2\right)} &= 1 \\ \sqrt{3}t &= 1 \\ t &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

การหมุนแกนจะทำได้โดยการแทน $X = PX'$; $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ ในสมการที่ (3.2)

จะได้

$$\begin{aligned} \left(PX'\right)^T A\left(PX'\right) + M\left(PX'\right) &= 0 \\ \left(X'\right)^T P^T A\left(PX'\right) + M\left(PX'\right) &= 0 \\ \left(X'\right)^T \left(P^T AP\right)\left(X'\right) + \left(MP\right)X' &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

เนื่องจาก $P^T AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

และ $MP = \begin{bmatrix} 30 & 30 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{30}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

นำไปแทนค่าในสมการที่ (3.12)

จะได้
$$[X']^T \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{30}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} X' = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{30}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{30}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4x' & 2y' & -2z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + 0 + 0 + \frac{30}{\sqrt{3}} z' = 0$$

$$4x'^2 + 2y'^2 - 2z'^2 + \frac{30}{\sqrt{3}} z' = 0$$

$$4x'^2 + 2y'^2 - 2\left[z'^2 - 15\sqrt{3}z' + \left(\frac{15\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right] = -2\left(\frac{15\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

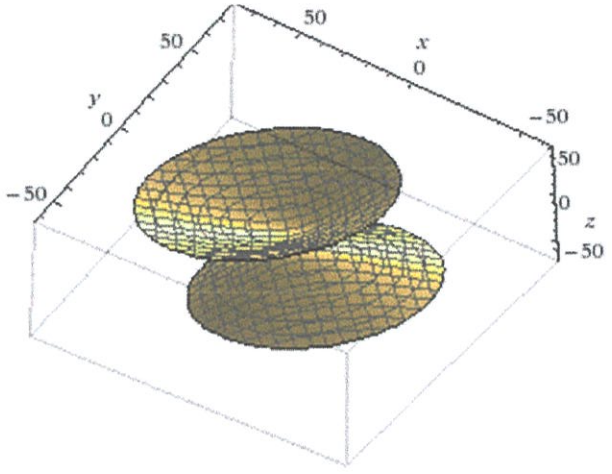
$$4x'^2 + 2y'^2 - 2\left(z' - \frac{15\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -\frac{675}{2}$$

$$-4x'^2 - 2y'^2 + 2\left(z' - \frac{15\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{675}{2}$$

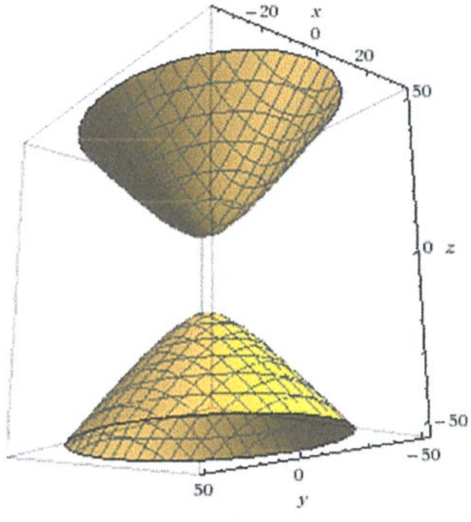
ให้ $x'' = x'$, $y'' = y'$ และ $z'' = z' - \frac{15\sqrt{3}}{2}$

จะได้ว่า $-4x''^2 - 2y''^2 + 2z''^2 = \frac{675}{2}$

$-2x''^2 + -y''^2 + z''^2 = \frac{675}{2}$ ซึ่งเป็นรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น



รูปที่ 3.5 กราฟก่อนการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสามมิติ



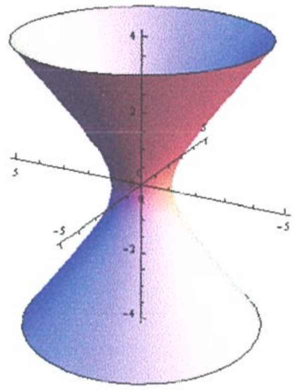
รูปที่ 3.6 กราฟหลังการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสามมิติ

บทต่อไป กล่าวถึงการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและแบบสองชิ้นด้วยระนาบต่างๆ พร้อมทั้งแสดงตารางเปรียบเทียบรอยตัดของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและแบบสองชิ้นกับภาคตัดกรวย

บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

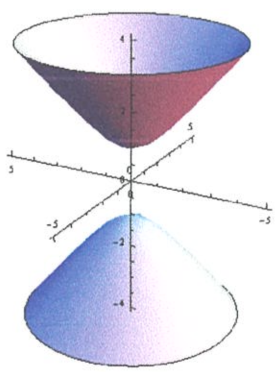
จากการที่เราได้ศึกษาที่มาของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นแล้วนั้น ในบทนี้จะศึกษาการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและแบบสองชิ้นด้วยระนาบในกรณีที่แตกต่างกัน และนำรอยตัดที่ได้มาเปรียบเทียบกับรอยตัดของรูปทรงกรวยที่เกิดจากการตัดด้วยระนาบในกรณีต่างๆ โดยมีสมการและขอบเขตการศึกษา ดังนี้

รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น กำหนดสมการ คือ $x^2+y^2-z^2=1$ และกำหนดให้มีขอบเขต $x\in(-5,5), y\in(-5,5), z\in(-4,4)$



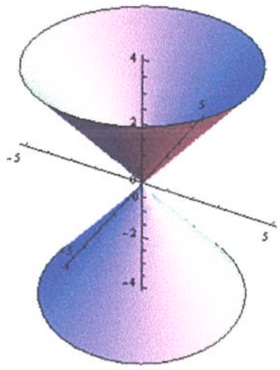
รูปที่ 4.1 รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น กำหนดสมการที่ใช้ศึกษา คือ $x^2+y^2-z^2=-1$ และกำหนดให้มีขอบเขต $x\in(-5,5), y\in(-5,5), z\in(-4,4)$



รูปที่ 4.2 รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

รูปทรงกรวย กำหนดสมการ คือ $x^2+y^2-z^2=0$ และกำหนดให้มีขอบเขต $x\in(-5,5), y\in(-5,5), z\in(-4,4)$



รูปที่ 4.3 รูปทรงกรวย

กำหนดให้สมการระนาบ คือ $ax+by+cz=0$ เมื่อ $x\in(-5,5), y\in(-5,5), z\in(-5,5)$

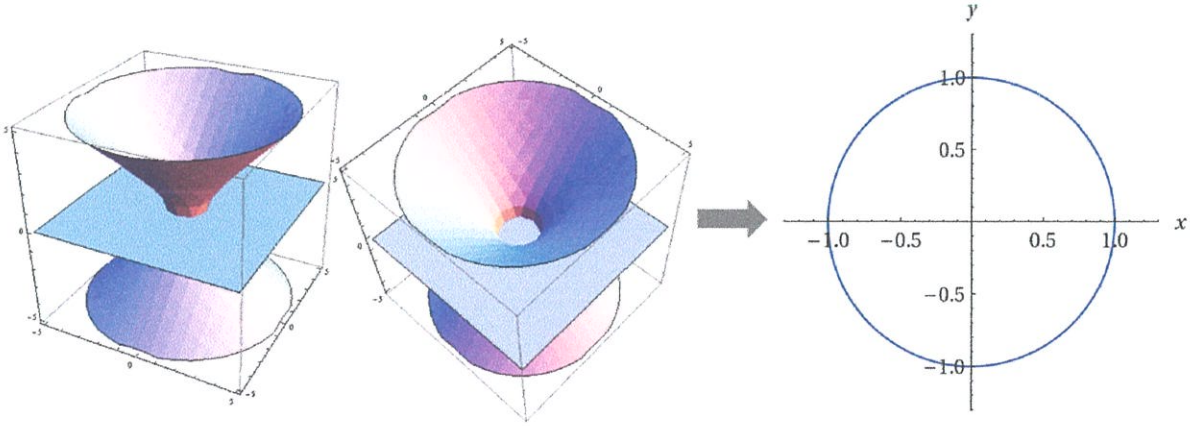
ในการศึกษาการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นด้วยระนาบจะแบ่งการศึกษาเป็น 2 กรณี ได้แก่

1. เมื่อตัดด้วยระนาบ xy, yz และ xz
2. เมื่อตัดด้วยสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$ ที่ผ่านจุดกำเนิดโดยให้แกนใดแกนหนึ่งเป็นศูนย์

4.1 เมื่อตัดด้วยระนาบ xy, yz และ xz

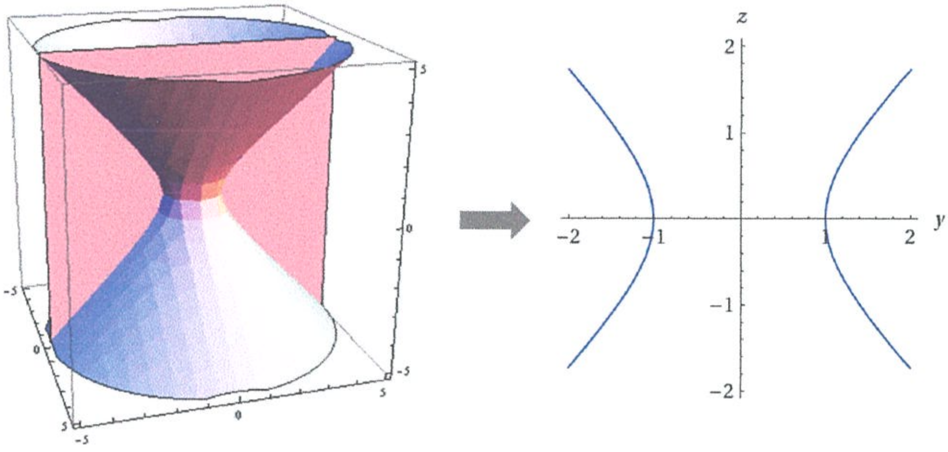
4.1.1 การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

จากสมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น คือ $x^2+y^2-z^2=1$ ตัดด้วยระนาบ xy นั่นคือ $z=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $x^2+y^2-z^2=1$ ซึ่งเป็นสมการวงกลม



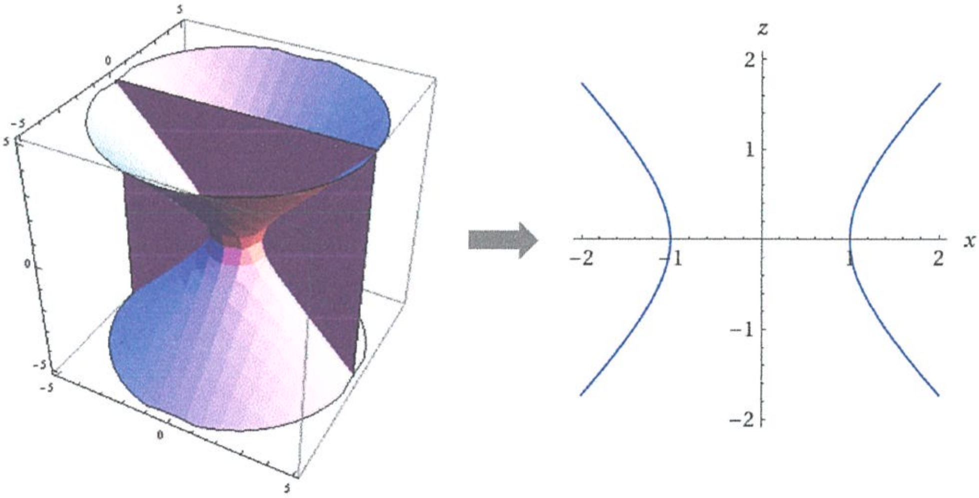
รูปที่ 4.4 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xy

จากสมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น คือ $x^2+y^2-z^2=1$ ตัดด้วยระนาบ yz นั่นคือ $x=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $y^2-z^2=1$ ซึ่งเป็นสมการไฮเปอร์โบลาแนวนอน



รูปที่ 4.5 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ yz

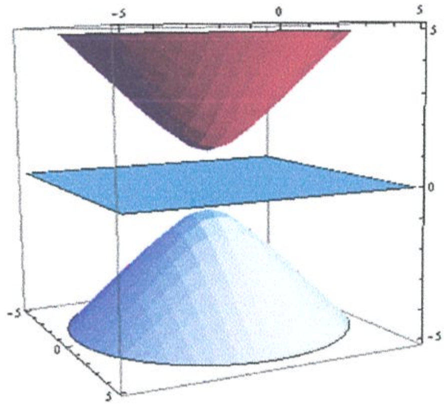
จากสมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น คือ $x^2+y^2-z^2=1$ ตัดด้วยระนาบ xz นั่นคือ $y=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $x^2-z^2=1$ ซึ่งเป็นสมการไฮเปอร์โบลาแนวนอน



รูปที่ 4.6 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xz

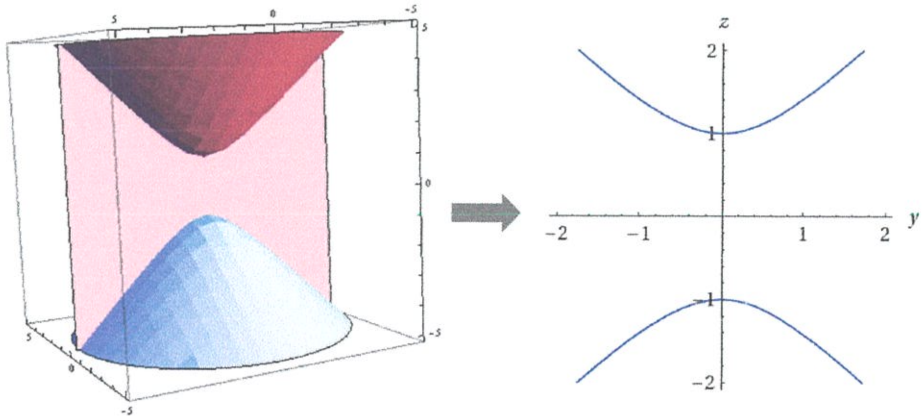
4.1.2 การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

จากสมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น คือ $x^2+y^2-z^2=-1$ ตัดด้วยระนาบ xy นั่นคือ $z=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $x^2+y^2=-1$ ซึ่งไม่เกิดรอยตัดของระนาบที่ตัดกับไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น



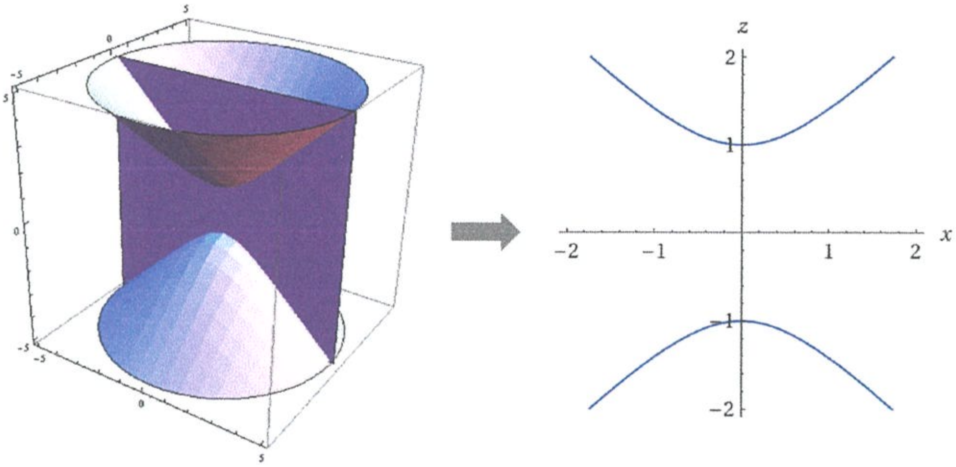
รูปที่ 4.7 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xy

จากสมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น คือ $x^2+y^2-z^2=-1$ ตัดด้วยระนาบ yz นั่นคือ $x=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $y^2-z^2=-1$ นั่นคือ $z^2-y^2=1$ ซึ่งเป็นสมการไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง



รูปที่ 4.8 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ yz

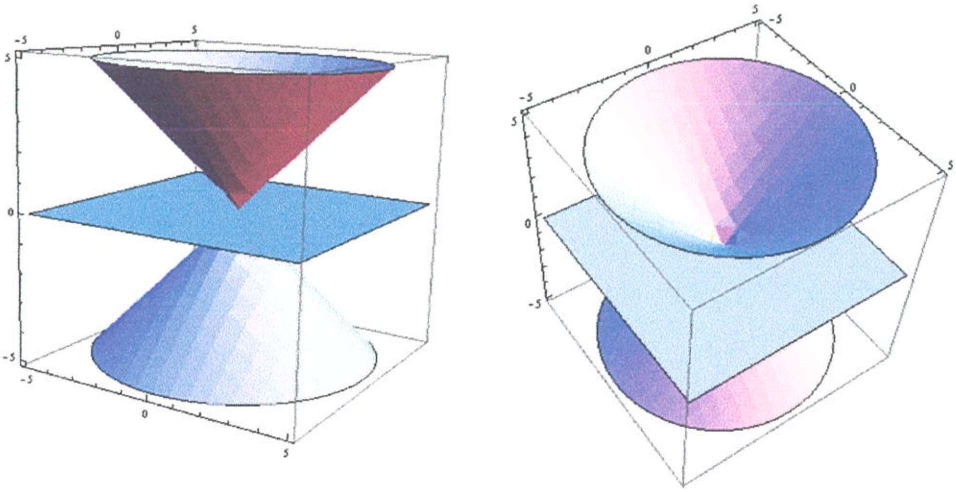
จากสมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น คือ $x^2+y^2-z^2=-1$ ตัดด้วยระนาบ xz นั่นคือ $y=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $x^2-z^2=-1$ นั่นคือ $z^2-x^2=1$ ซึ่งเป็นสมการไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง



รูปที่ 4.9 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xz

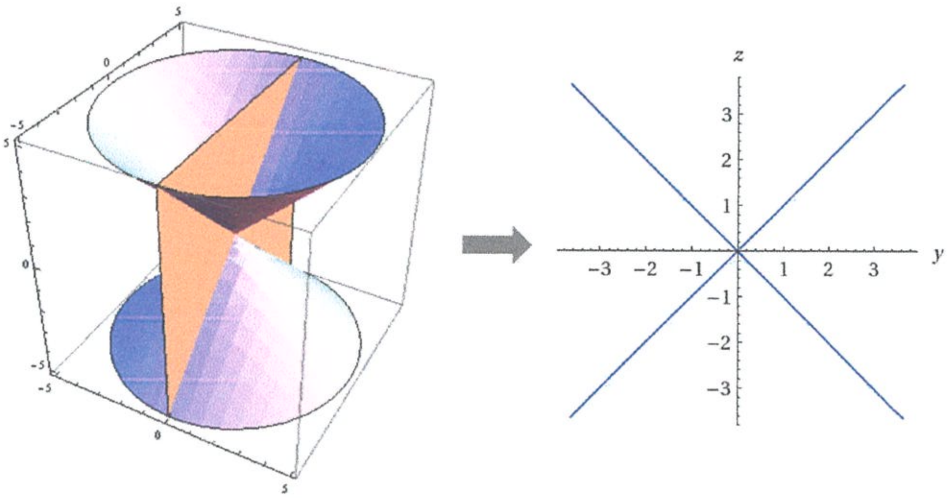
4.1.3 การตัดรูปทรงกรวย

จากสมการรูปทรงกรวย คือ $x^2+y^2-z^2=0$ ตัดด้วยระนาบ xy นั่นคือ $z=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $x^2+y^2=0$ ซึ่งรอยตัดมีลักษณะเป็นจุด



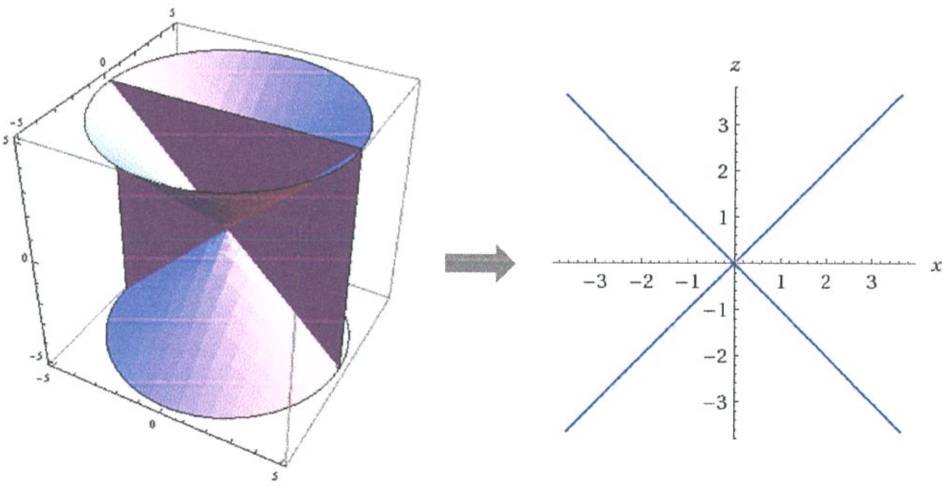
รูปที่ 4.10 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xy

จากสมการรูปทรงกรวย คือ $x^2+y^2-z^2=0$ ตัดด้วยระนาบ yz นั่นคือ $x=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $y^2-z^2=0$ ดังรูป



รูปที่ 4.11 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ yz

จากสมการรูปทรงกรวย คือ $x^2+y^2-z^2=0$ ตัดด้วยระนาบ xz นั่นคือ $y=0$ จะได้สมการรอยตัด คือ $x^2-z^2=0$ ดังรูป



รูปที่ 4.12 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xz

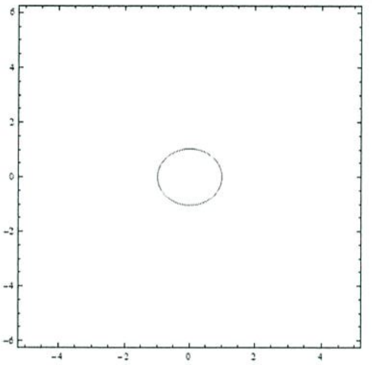
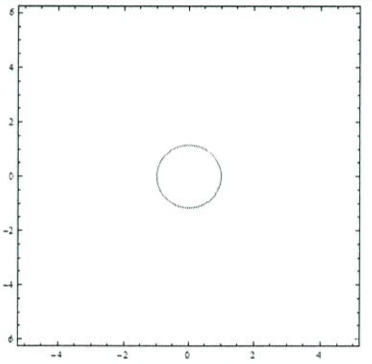
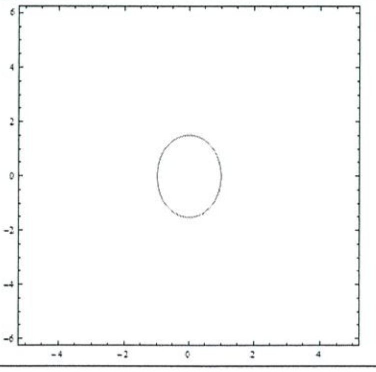
4.2 เมื่อตัดด้วยสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$ ที่ผ่านจุดกำเนิดโดยให้แกนใดแกนหนึ่งเป็นศูนย์

จากสมการระนาบ $ax+by+cz=0$ กำหนดให้ $a=0$ และ $c=1$ จะได้ว่า $z=0x-by$ เมื่อ $-\infty<b<0$ และวาดกราฟของสมการรอยตัดในขอบเขตจำนวนจริงเท่านั้น

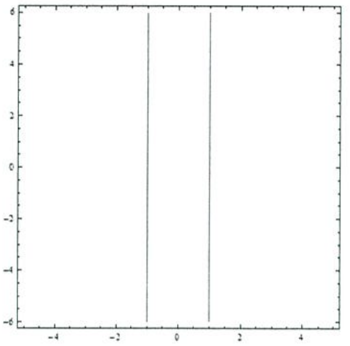
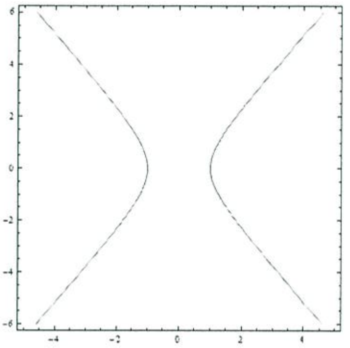
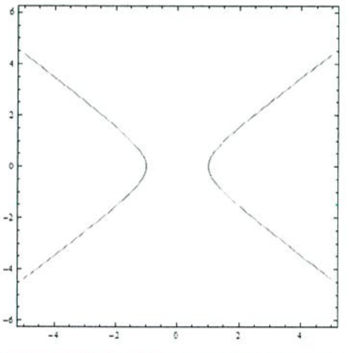
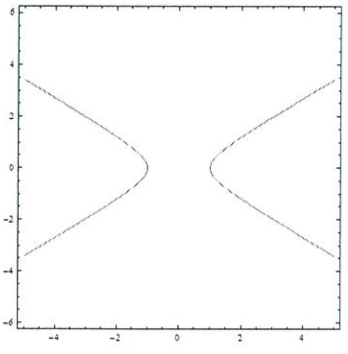
4.2.1 การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น คือ $x^2+y^2-z^2=1$

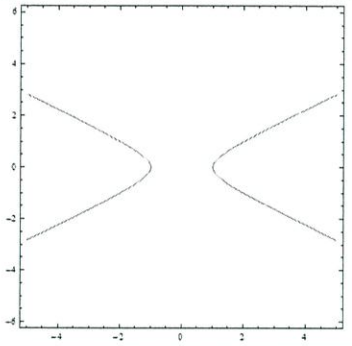
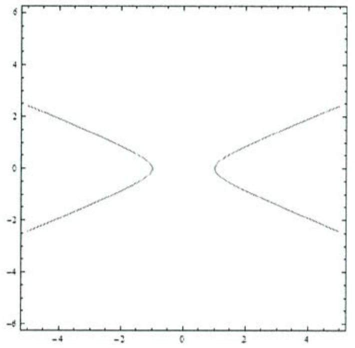
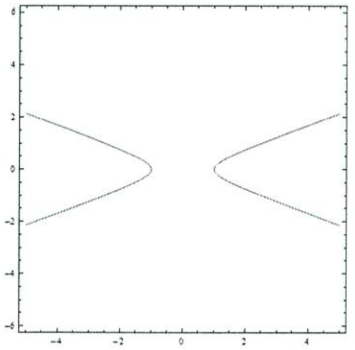
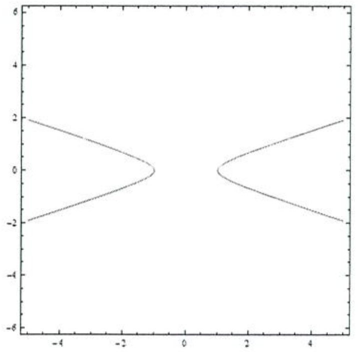
ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z=0.25y$	$x^2+0.9375y^2=1$	
$z=0.50y$	$x^2+0.75y^2=1$	
$z=0.75y$	$x^2+0.4375y^2=1$	

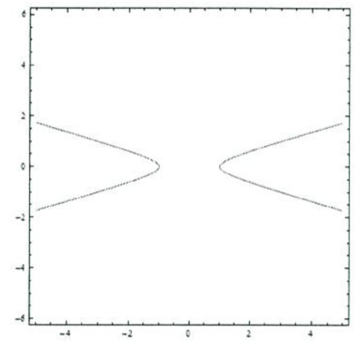
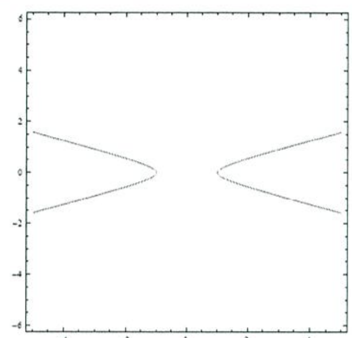
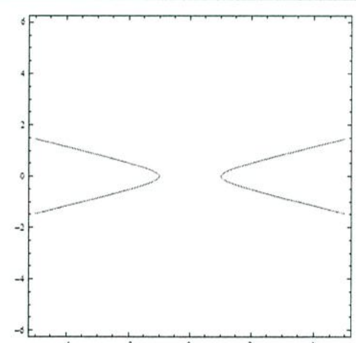
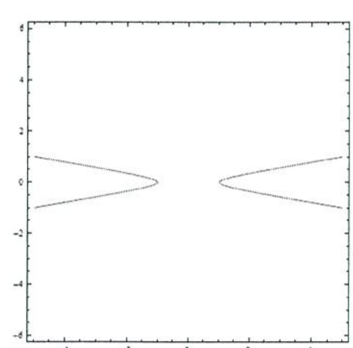
ตารางที่ 4.1 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = y$	$x^2 = 1$	
$z = 1.25y$	$x^2 - 0.5625y^2 = 1$	
$z = 1.50y$	$x^2 - 1.25y^2 = 1$	
$z = 1.75y$	$x^2 - 2.0625y^2 = 1$	

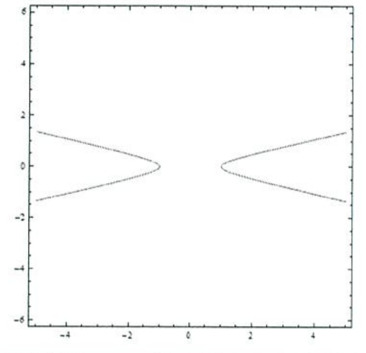
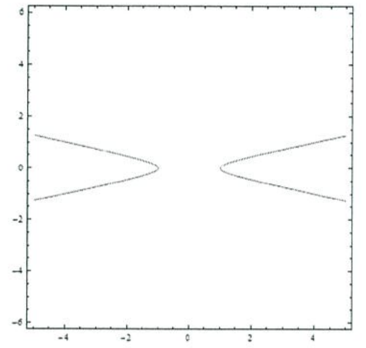
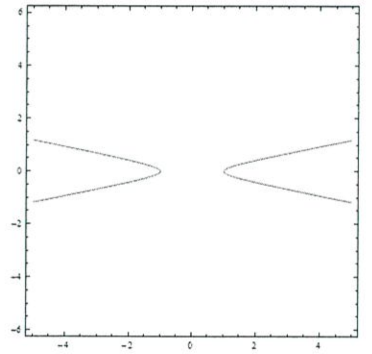
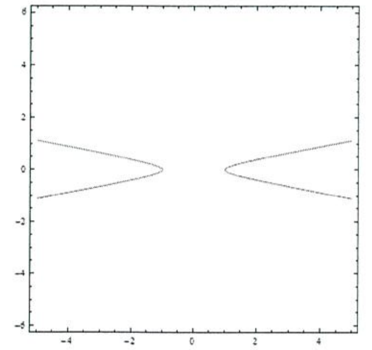
ตารางที่ 4.1 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z=2y$	$x^2-3y^2=1$	
$z=2.25y$	$x^2-4.0625y^2=1$	
$z=2.50y$	$x^2-5.25y^2=1$	
$z=2.75y$	$x^2-6.5625y^2=1$	

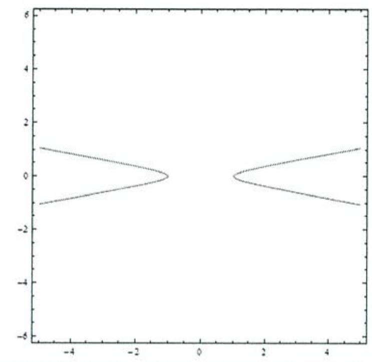
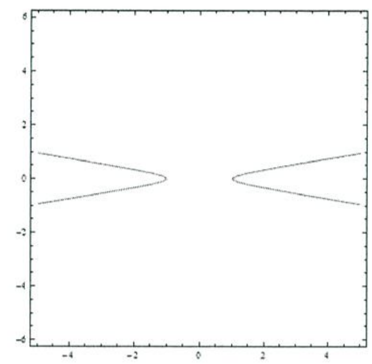
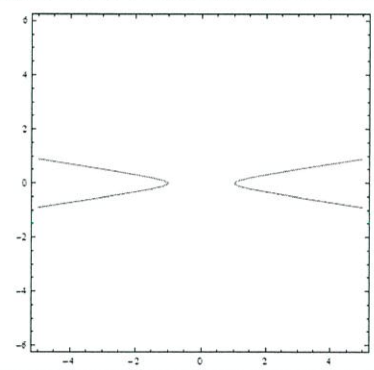
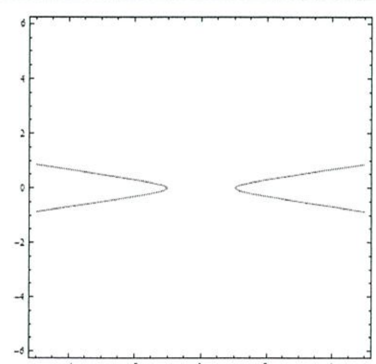
ตารางที่ 4.1 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z=3y$	$x^2-8y^2=1$	
$z=3.25y$	$x^2-9.5625y^2=1$	
$z=3.50y$	$x^2-11.25y^2=1$	
$z=3.75y$	$x^2-13.0625y^2=1$	

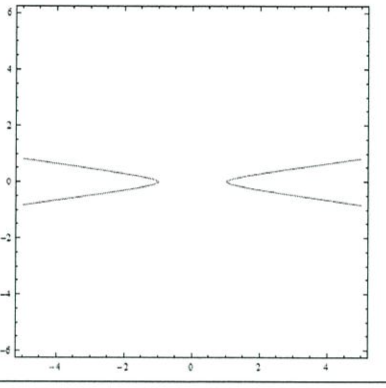
ตารางที่ 4.1 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 4y$	$x^2 - 15y^2 = 1$	
$z = 4.25y$	$x^2 - 17.0625y^2 = 1$	
$z = 4.50y$	$x^2 - 19.25y^2 = 1$	
$z = 4.75y$	$x^2 - 21.5625y^2 = 1$	

ตารางที่ 4.1 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z=5y$	$x^2-24y^2=1$	
$z=5.25y$	$x^2-26.5625y^2=1$	
$z=5.50y$	$x^2-29.25y^2=1$	
$z=5.75y$	$x^2-32.0625y^2=1$	

ตารางที่ 4.1 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 6y$	$x^2 - 35y^2 = 1$	

จากตารางที่ 4.1 พบว่า สมการระนาบที่ใช้ตัดนั้น

เมื่อ $a = 0, c = 1$ และ $-1 < b < 0$ กราฟของสมการรอยตัด มีลักษณะเป็นวงรี

เมื่อ $a = 0, c = 1$ และ $b = -1$ กราฟของสมการรอยตัด มีลักษณะเป็นเส้นตรงขนานกันในแนวตั้ง

เมื่อ $a = 0, c = 1$ และ $b < -1$ กราฟของสมการรอยตัด มีลักษณะเป็นไฮเปอร์โบลาตามแนวแกน x กราฟจะแคบลง

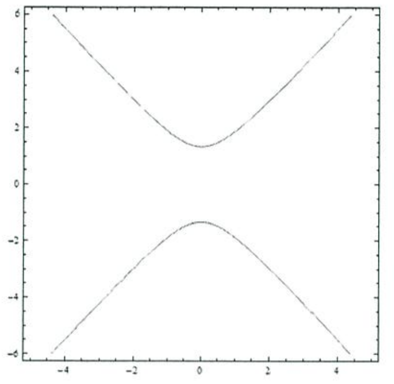
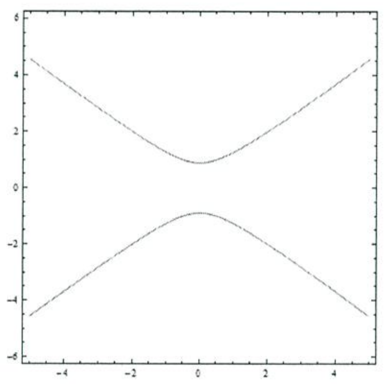
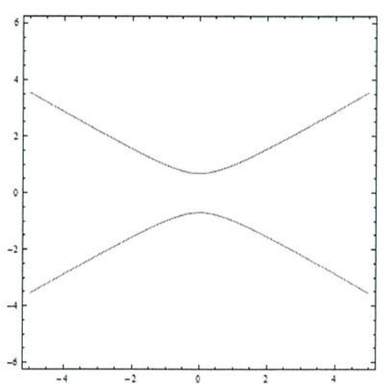
4.2.2 การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น คือ $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

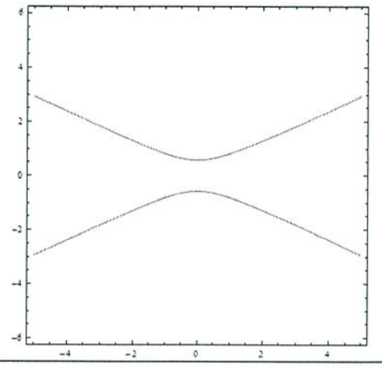
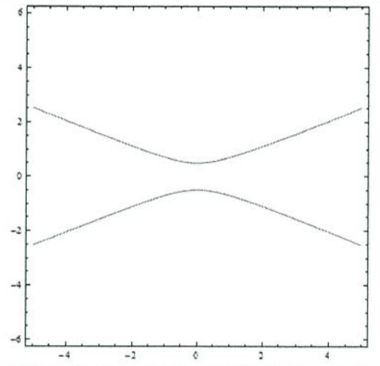
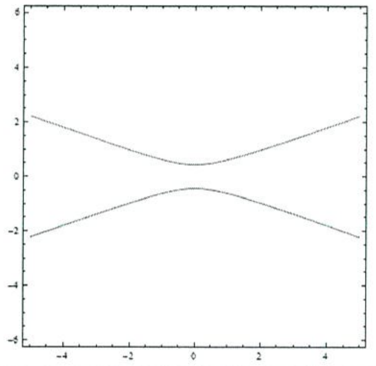
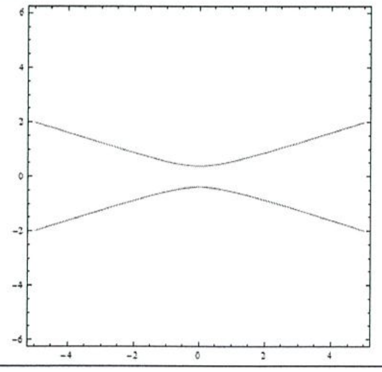
ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 0.25y$	$x^2 + 0.9375y^2 = -1$	ไม่มีกราฟ
$z = 0.50y$	$x^2 + 0.75y^2 = -1$	ไม่มีกราฟ
$z = 0.75y$	$x^2 + 0.4375y^2 = -1$	ไม่มีกราฟ

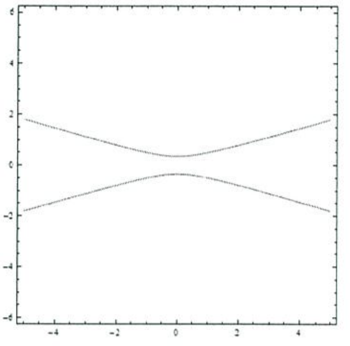
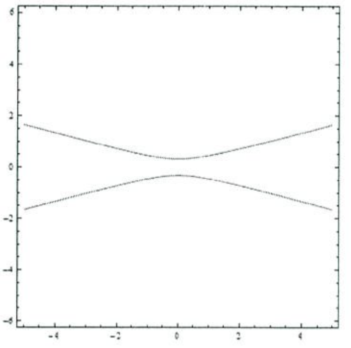
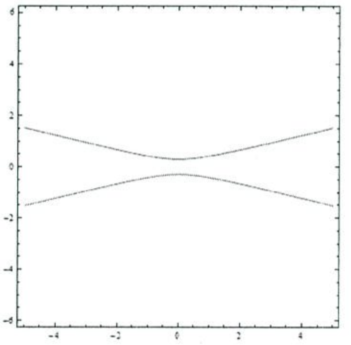
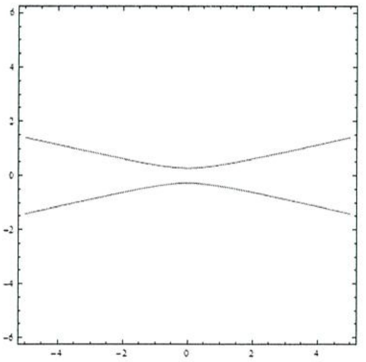
ตารางที่ 4.2 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชั้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = y$	$x^2 = -1$	ไม่มีกราฟ
$z = 1.25y$	$x^2 - 0.5625y^2 = -1$	
$z = 1.50y$	$x^2 - 1.25y^2 = -1$	
$z = 1.75y$	$x^2 - 2.0625y^2 = -1$	

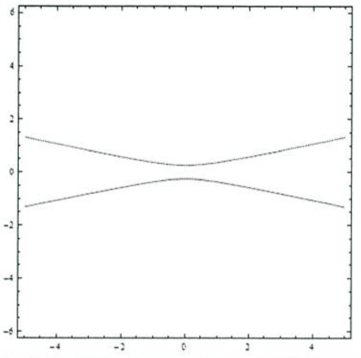
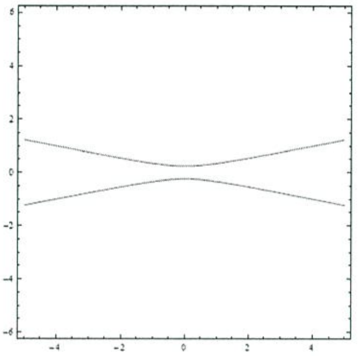
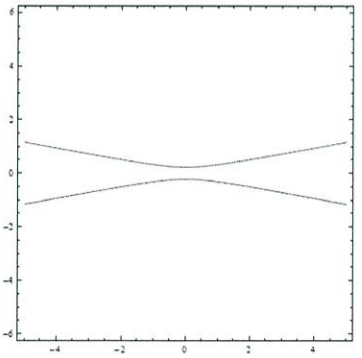
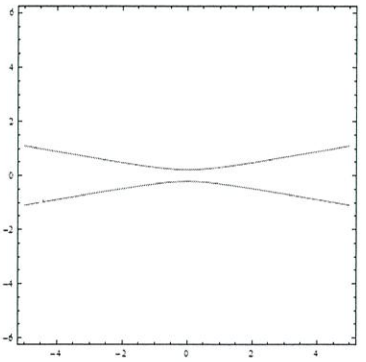
ตารางที่ 4.2 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	**สมการรอยตัด**	**กราฟของสมการรอยตัด**
$z=2y$	$x^2-3y^2=-1$	
$z=2.25y$	$x^2-4.0625y^2=-1$	
$z=2.50y$	$x^2-5.25y^2=-1$	
$z=2.75y$	$x^2-6.5625y^2=-1$	

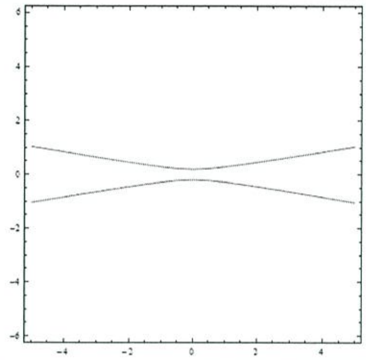
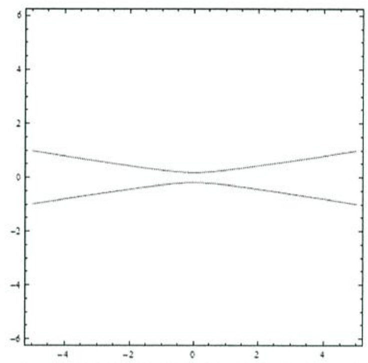
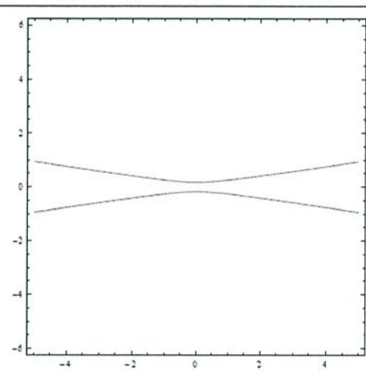
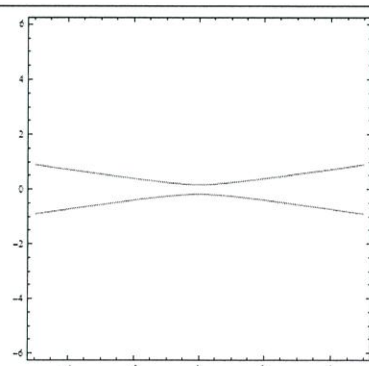
ตารางที่ 4.2 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z=3y$	$x^2-8y^2=-1$	
$z=3.25y$	$x^2-9.5625y^2=-1$	
$z=3.50y$	$x^2-11.25y^2=-1$	
$z=3.75y$	$x^2-13.0625y^2=-1$	

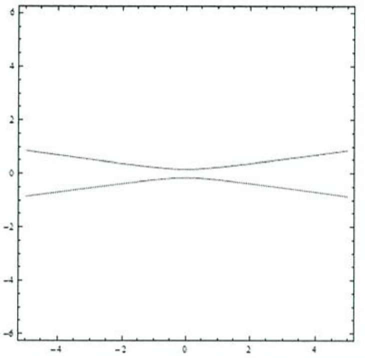
ตารางที่ 4.2 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 4y$	$x^2 - 15y^2 = -1$	
$z = 4.25y$	$x^2 - 17.0625y^2 = -1$	
$z = 4.50y$	$x^2 - 19.25y^2 = -1$	
$z = 4.75y$	$x^2 - 21.5625y^2 = -1$	

ตารางที่ 4.2 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 5y$	$x^2 - 24y^2 = -1$	
$z = 5.25y$	$x^2 - 26.5625y^2 = -1$	
$z = 5.50y$	$x^2 - 29.25y^2 = -1$	
$z = 5.75y$	$x^2 - 32.0625y^2 = -1$	

ตารางที่ 4.2 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 6y$	$x^2 - 35y^2 = -1$	

จากตารางที่ 4.2 พบว่า สมการระนาบที่ใช้ตัดนั้น
เมื่อ $a = 0, c = 1$ และ $-1 \le b < 0$ จะไม่มีกราฟที่เป็นรอยตัด
เมื่อ $a = 0, c = 1$ และ $b < -1$ กราฟของสมการรอยตัด มีลักษณะเป็นไฮเปอร์โบลาตามแนวแกน y และเมื่อ b ลดลงเรื่อยๆ กราฟจะมีลักษณะกว้างขึ้น

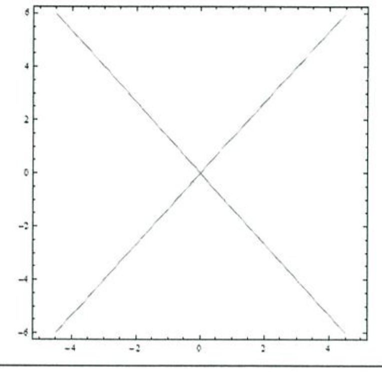
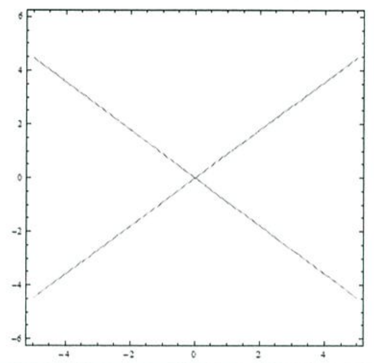
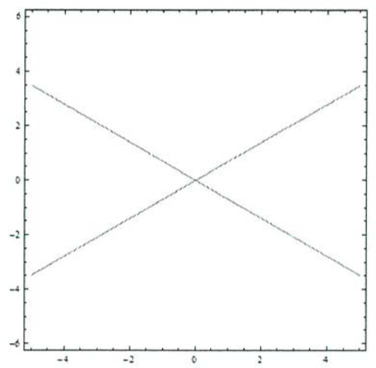
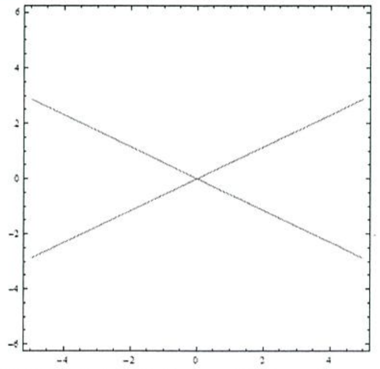
4.2.3 การตัดรูปทรงกรวย

สมการรูปทรงกรวย คือ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

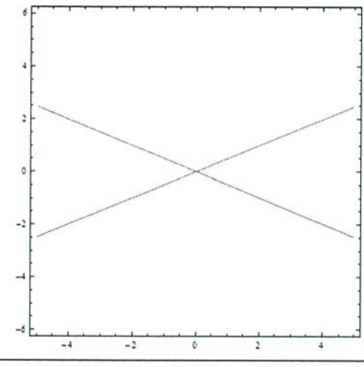
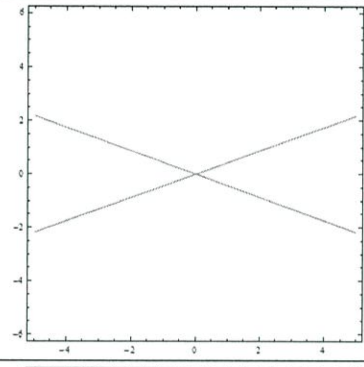
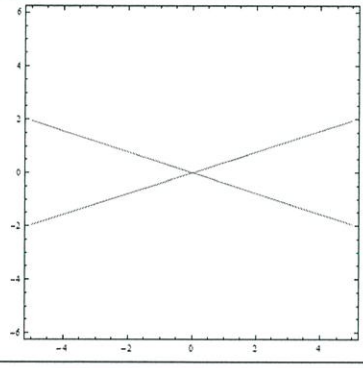
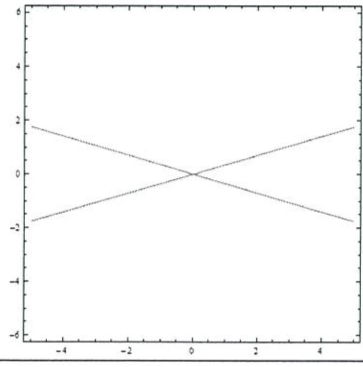
ตารางที่ 4.3 ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงกรวย

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 0.25y$	$x^2 + 0.9375y^2 = 0$	ไม่มีกราฟ
$z = 0.50y$	$x^2 + 0.75y^2 = 0$	ไม่มีกราฟ
$z = 0.75y$	$x^2 + 0.4375y^2 = 0$	ไม่มีกราฟ
$z = y$	$x^2 = 0$	จุด

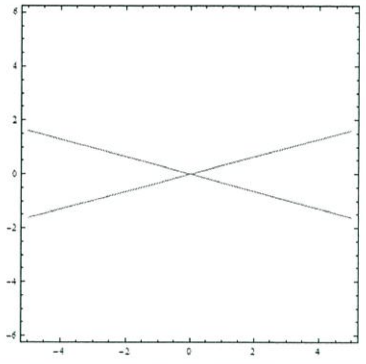
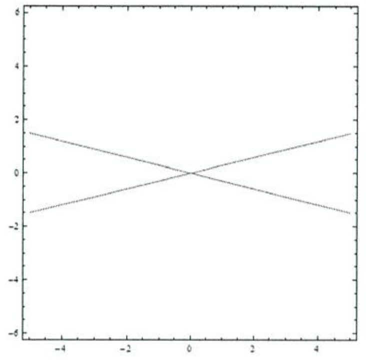
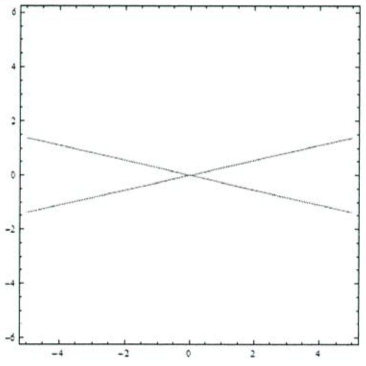
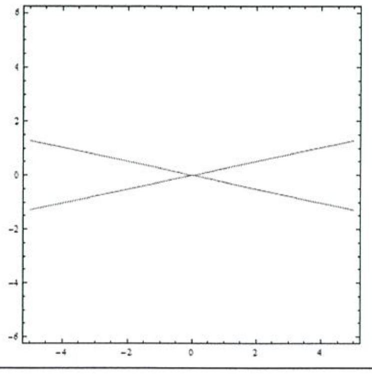
ตารางที่ 4.3 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงกรวย

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z=1.25y$	$x^2-0.5625y^2=0$	
$z=1.50y$	$x^2-1.25y^2=0$	
$z=1.75y$	$x^2-2.0625y^2=0$	
$z=2y$	$x^2-3y^2=0$	

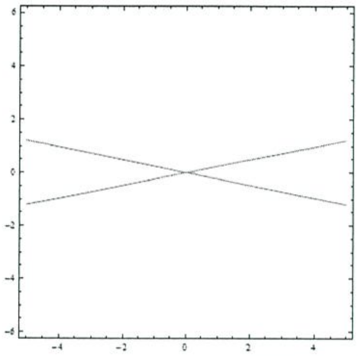
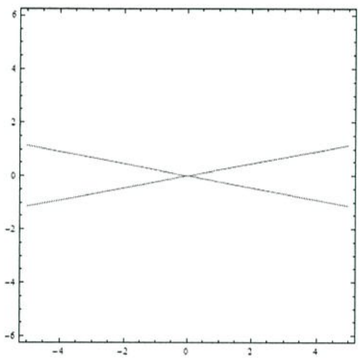
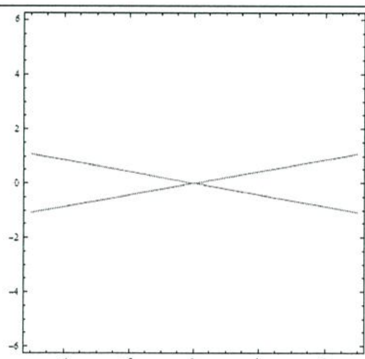
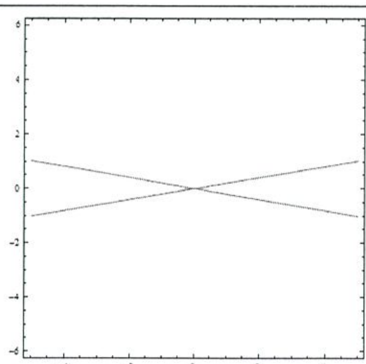
ตารางที่ 4.3 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงกรวย

สมการระนาบที่ใช้ตัด	**สมการรอยตัด**	**กราฟของสมการรอยตัด**
$z = 2.25y$	$x^2 - 4.0625y^2 = 0$	
$z = 2.50y$	$x^2 - 5.25y^2 = 0$	
$z = 2.75y$	$x^2 - 6.5625y^2 = 0$	
$z = 3y$	$x^2 - 8y^2 = 0$	

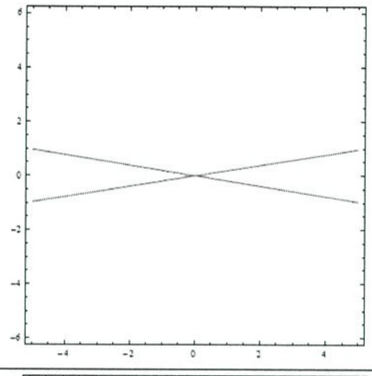
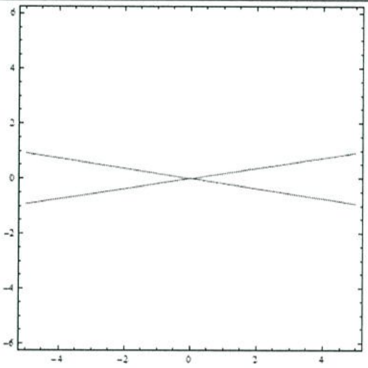
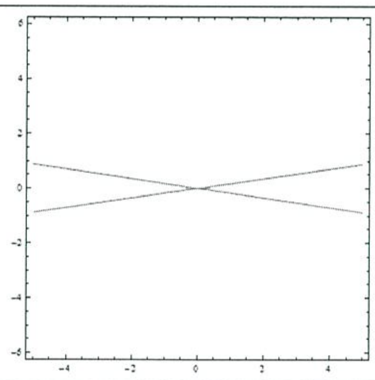
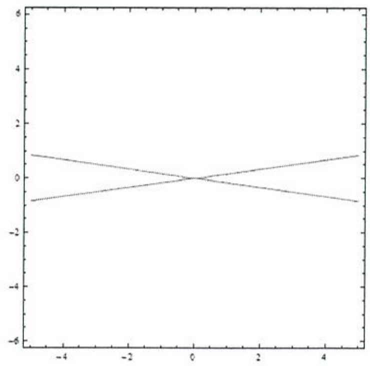
ตารางที่ 4.3 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงกรวย

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 3.25y$	$x^2 - 9.5625y^2 = 0$	
$z = 3.50y$	$x^2 - 11.25y^2 = 0$	
$z = 3.75y$	$x^2 - 13.0625y^2 = 0$	
$z = 4y$	$x^2 - 15y^2 = 0$	

ตารางที่ 4.3 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงกรวย

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 4.25y$	$x^2 - 17.0625y^2 = 0$	
$z = 4.50y$	$x^2 - 19.25y^2 = 0$	
$z = 4.75y$	$x^2 - 21.5625y^2 = 0$	
$z = 5y$	$x^2 - 24y^2 = 0$	

ตารางที่ 4.3 (ต่อ) ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงกรวย

สมการระนาบที่ใช้ตัด	สมการรอยตัด	กราฟของสมการรอยตัด
$z = 5.25y$	$x^2 - 26.5625y^2 = 0$	
$z = 5.50y$	$x^2 - 29.25y^2 = 0$	
$z = 5.75y$	$x^2 - 32.0625y^2 = 0$	
$z = 6y$	$x^2 - 35y^2 = 0$	

จากตารางที่ 4.3 พบว่า สมการระนาบที่ใช้ตัด
เมื่อ $a=0, c=1$ และ $-1<b<0$ จะไม่มีกราฟที่เป็นรอยตัด
เมื่อ $a=0, c=1$ และ $b=-1$ สมการรอยตัดเป็นจุด
เมื่อ $a=0, c=1$ และ $b<-1$ กราฟของสมการรอยตัดมีลักษณะเป็นเส้นตรงตัดกันและจะแคบลงเรื่อยๆ

4.3 สรุปการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและสองชิ้น และรูปทรงกรวยด้วยระนาบต่างๆ

ตารางที่ 4.4 เมื่อตัดด้วยระนาบ xy, yz และ yz

ขอบเขตของสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$	**รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น**	**รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น**	**กรวย**
$a=0$ และ $b,c=1$	ไฮเปอร์โบลาแนวนอน	ไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง	กากบาท
$b=0$ และ $a,c=1$	ไฮเปอร์โบลาแนวนอน	ไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง	กากบาท
$c=0$ และ $a,b=1$	วงกลม	ไม่มีกราฟ	จุด

ตารางที่ 4.5 เมื่อตัดด้วยสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$ ที่ผ่านจุดกำเนิดโดยให้แกนใดแกนหนึ่งเป็นศูนย์

ขอบเขตของสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$	**รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น**	**รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น**	**กรวย**
$a=0$, $c=1$, $-1<b<0$	วงรี	ไม่มีกราฟ	ไม่มีกราฟ
$a=0$, $c=1$, $b=-1$	เส้นตรงขนานกัน	ไม่มีกราฟ	จุด
$a=0$, $c=1$, $b<-1$	ไฮเปอร์โบลาแนวนอน	ไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง	กากบาท

ในกรณีตัดด้วยสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$ เมื่อ $b=0, c=1, a\le -1$ จะมีผลการตัดเหมือนกับการตัดด้วยสมการระนาบ เมื่อ $a=0$, $c=1$, $b\le -1$

4.4 การนำไปใช้

4.4.1 การขุดเจาะหาแร่ทองคำ

จากการศึกษาการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาด้วยระนาบในแนวต่างๆ ทำให้ทราบลักษณะของรอยตัดที่เกิดขึ้น ซึ่งรูปทรงที่ต่างกัน เมื่อถูกตัดในระนาบที่ต่างกัน จะเกิดรอยตัดที่แตกต่างกันด้วย บางแนวการตัดอาจมีพื้นที่รอยตัดที่มากหรือน้อยตามแบบของรูปทรงและแนวการตัดนั้น ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการศึกษาการขุดเจาะแร่ทองคำ นั่นคือ การคาดคะเนการขุดหาทองคำให้ได้ปริมาณทองคำมาก

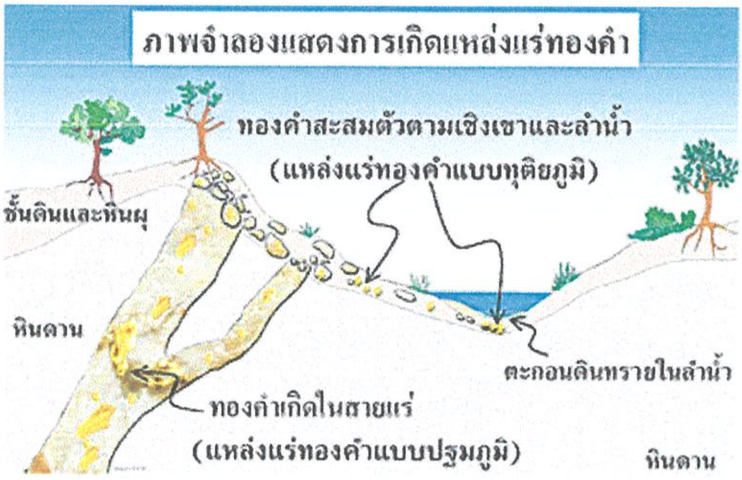
ลักษณะการเกิดแร่ทองคำ

ในการเกิดแร่ทองคำที่สามารถพบได้ตามธรรมชาติ คือ แบบปฐมภูมิและแบบทุติยภูมิ ซึ่งในแบบปฐมภูมิหรือในชั้นหินแข็งเป็นแหล่งแร่ทองคำที่เกิดเองตามธรรมชาติ ทำให้เกิดการสะสมตัวของแร่ทองคำในหินชนิดต่างๆ ขณะที่แหล่งแร่ทองคำแบบทุติยภูมิหรือแหล่งลานแร่ เกิดจากการผุพังของหินที่มีแร่ทองคำลักษณะแรกแล้วสะสมในที่เดิมหรืออาจถูกน้ำชะล้างพาไปสะสมในที่ใหม่บริเวณต่างๆที่เหมาะสม ดังนั้น แร่ทองคำจึงมีกระจายอยู่ทั่วไปทุกสภาพภูมิประเทศก็สามารถพบเจอได้

ชนิดหินที่เป็นแหล่งกำเนิดสำคัญของแร่ทองคำ ได้แก่ หินแกรนิต หินแกรโนไดออไรต์ บางครั้งก็อาจเป็นหินภูเขาไฟจำพวกแอนดีไซต์หรือหินไรโอไลต์ นอกจากนี้อาจพบได้จากบริเวณที่มีการสัมผัสระหว่างหินอัคนีแทรกซอนกับหินชั้นหรือหินตะกอนที่มีรอยแตก ซึ่งในหินตะกอนพวกนี้สามารถปล่อยให้น้ำแร่ร้อนพาทองไปสะสมอยู่ตามรอยแตก ดังนั้น ถ้าสถานที่ใดมีลักษณะหินในลักษณะนี้ก็มีโอกาสเกิดเป็นแหล่งแร่ทองคำได้

การสำรวจหาแหล่งแร่ทองคำ

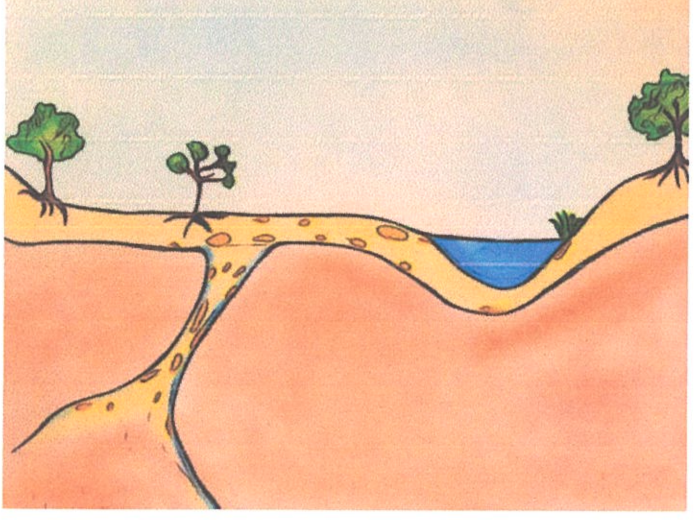
การสำรวจหาแร่ทองคำเป็นไปตามขั้นตอนหลายขั้นตามหลักวิชาการ หลังการสำรวจธรณีฟิสิกส์ทางอากาศ เมื่อทราบศักยภาพดังกล่าวก็จะติดตามผลภาคพื้นดิน แล้วสำรวจทางธรณีวิทยาในบริเวณนั้นเพื่อให้ทราบชนิดหินว่ามีความเหมาะสมที่จะเกิดแร่ทองคำหรือไม่ จากนั้นจะเป็นการสำรวจธรณีเคมีในบริเวณกว้างเพื่อเก็บตะกอนทองเพื่อนำมาวิเคราะห์หาปริมาณทองคำ ซึ่งจะทำการสำรวจธรณีเคมีซ้ำเพื่อให้ได้พื้นที่เป้าหมายที่เล็กลง จากนั้นสำรวจธรณีเคมีและธรณีวิทยารายละเอียดซ้ำอีกและสำรวจธรณีฟิสิกส์โดยใช้เครื่องมือสำรวจวัดความต้านทานไฟฟ้าของชั้นดิน ความเข้มของสนามแม่เหล็กบริเวณนั้นหรืออื่นๆ แล้วนำมาแปลความหมายข้อมูลร่วมกันว่ามีศักยภาพเหมาะสมหรือไม่ ซึ่งต้องใช้เวลาและวิทยาการหลายด้านร่วมกัน จากการศึกษาการสำรวจหาแหล่งแร่ทองคำพบภาพจำลองแสดงการเกิดแหล่งแร่ทองคำ ดังรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 ภาพจำลองแสดงการเกิดแหล่งแร่ทองคำ

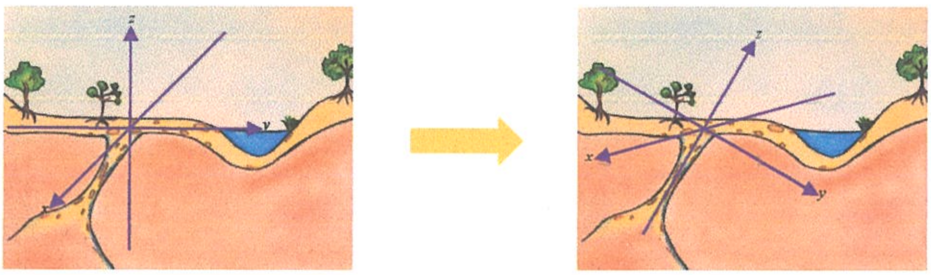
เมื่อเราทราบบริเวณการเกิดของแร่ทองคำแล้ว จากนั้นจะทำการขุดหาแร่ทองคำเพื่อให้ได้ปริมาณมาก ผู้จัดทำจึงมีแนวคิดประยุกต์จากการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาด้วยระนาบในแนวต่างๆ มาปรับเปลี่ยนเป็นการคาดคะเนการขุดหาแร่ทองคำในลักษณะใดที่จะพบแร่ทองคำได้มาก

ในการศึกษาขุดหาแร่ทองคำ พบว่า ได้มีผู้ทำการศึกษาลักษณะการเกิดแร่ทองคำแล้ว ผู้จัดทำจึงนำมาดัดแปลงแบบจำลองลักษณะการเกิดแร่ทองคำให้มีรายละเอียดใกล้เคียงกับข้อมูลที่พบมากที่สุด ได้เป็นลักษณะดังรูปที่ 4.14



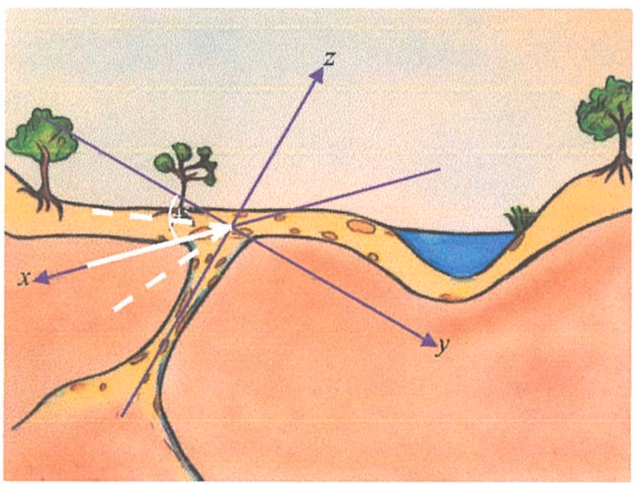
รูปที่ 4.14 แบบจำลองลักษณะการเกิดแร่ทองคำ

ใส่แกนพิกัดลงในแบบจำลองลักษณะการเกิดแร่ทองคำ และทำการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดแบบสามมิติตามทฤษฎีแกนมุขสำคัญสำหรับ $\mathbb{R}^3$ จึงทำให้ได้แกนพิกัดใหม่ดังรูปที่ 4.15



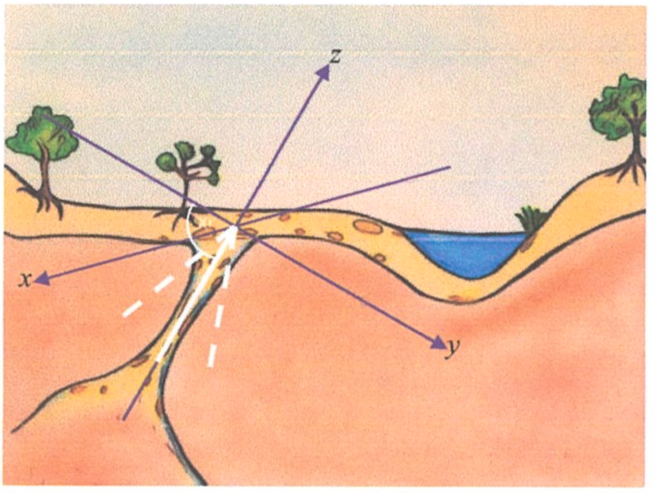
รูปที่ 4.15 การเปลี่ยนทิศทางแกนพิกัดของแบบจำลองลักษณะการเกิดแร่ทองคำ

โดยจะทำการตัดหาแร่ทองคำในองศาต่างๆ โดยประมาณ เพื่อที่จะให้ครอบคลุมพื้นที่มากที่สุดในการพบเจอแร่ทองคำ แต่ก็ต้องคำนึงถึงทรัพยากรที่จะสูญเสียในการหาแร่ทองคำ ดังนั้นเพื่อที่จะประหยัดทรัพยากรจึงต้องสุ่มตัดหาแร่ทองคำในระนาบต่างๆ ที่มีองศาแตกต่างกัน นั่นคือ 45° ,90° และ 135° บนระนาบแกน yz ตามทิศทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ โดยที่ในแต่ละมุมหลักนั้น จะมีการสำรวจอย่างละเอียดจากมุมหลักนั้นอีก บวกลบ 20°



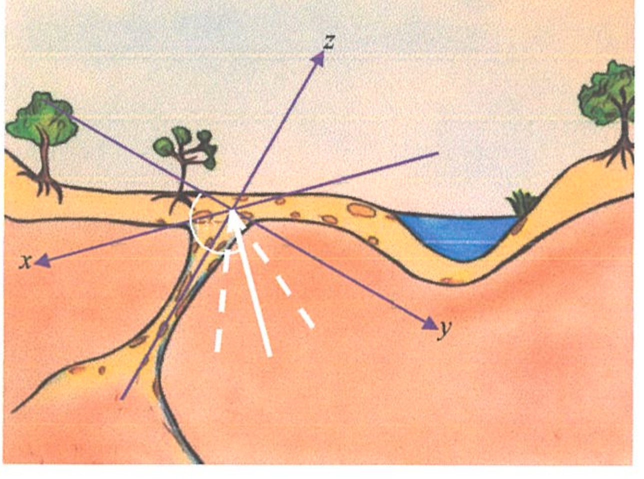
รูปที่ 4.16 พิจารณาขุดหาแร่ทองคำที่มุม 45°

จากรูปที่ 4.16 การพิจารณาขุดหาแร่ทองคำที่มุม 45° บนระนาบแกน yz ตามทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยสำรวจอย่างละเอียดจากมุมนี้เพิ่มอีกบวกลบ 20° นั่นคือ 25° และ 65° พบว่า เจอแร่ทองคำเพียงนิดหน่อยและมักพบอยู่ในบริเวณผิวดิน ยิ่งขุดลึกลงไปตามแนวองศาช่วงนี้ก็ไม่พบแร่ทองคำอะไร



รูปที่ 4.17 พิจารณาขุดหาแร่ทองคำที่มุม 90°

จากรูปที่ 4.17 การพิจารณาขุดหาแร่ทองคำที่มุม 90° บนระนาบแกน yz ตามทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยสำรวจอย่างละเอียดจากมุมนี้เพิ่มอีกบวกลบ 20° นั่นคือ 70° และ 110° พบว่า การขุดหาในตำแหน่งนี้พบแร่ทองคำจำนวนมาก ทั้งบริเวณผิวดินและขุดลึกลงไปตามแนวองศาช่วงนี้ก็ยังพบแร่ทองคำอยู่จำนวนมาก



รูปที่ 4.18 พิจารณาขุดหาแร่ทองคำที่มุม 135°

จากรูปที่ 4.18 การพิจารณาขุดหาแร่ทองคำที่มุม 135° บนระนาบแกน yz ตามทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยสำรวจอย่างละเอียดจากมุมนี้เพิ่มอีกบวกลบ 20° นั่นคือ 115° และ 155° พบว่า การขุดหาแร่ทองคำในตำแหน่งนี้ทั้งในบริเวณผิวดินและในบริเวณที่ลึกลงไปก็ไม่พบแร่ทองคำเลยอาจมีบ้างบริเวณผิวดินซึ่งไม่จำเป็นต้องขุดลึกให้เปลืองงบประมาณ

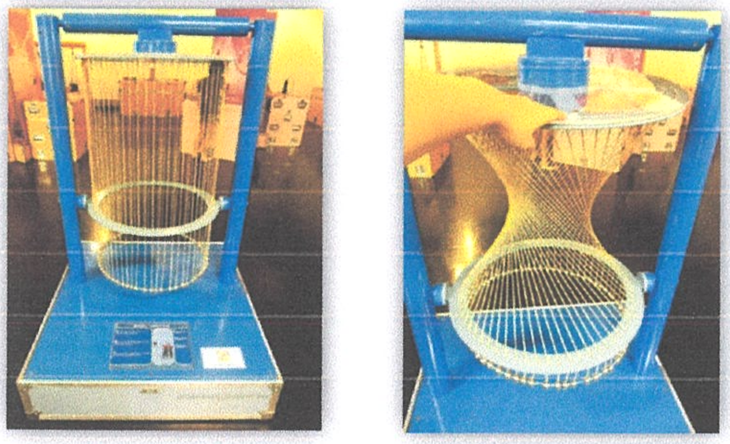
จากการพิจารณาขุดหาแร่ทองคำในมุมต่างๆ พบว่า การขุดหาแร่ทองคำในช่วง $70^{\circ}-110^{\circ}$ บนระนาบแกน yz ตามทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นขอบเขตที่พบแร่ทองคำเป็นจำนวนมาก มากกว่าขอบเขตอื่นทั้งบริเวณพื้นดินและขุดลึกลงไปในพื้นดิน ดังนั้นในช่วง $70^{\circ}-110^{\circ}$ จึงเหมาะแก่การขุดหาแร่ทองคำมากที่สุดตามแบบจำลองลักษณะการเกิดแร่ทองคำดังกล่าว จะทำให้ได้แร่ทองคำมากและประหยัดทรัพยากรในการขุดเจาะแร่ทองคำอีกด้วย

4.4.2 การออกแบบการรับน้ำหนักเก้าอี้หวาย หรือเฟอร์นิเจอร์อื่นๆ

หลายคนอาจคิดว่าที่กลางสะพานถูกสร้างไว้ให้สูงและโค้งก็เพื่อให้เรือสามารถลอดผ่านข้างใต้ได้ เหตุผลนี้ถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน เพราะยังมีเหตุผลที่มองไม่เห็นซ่อนอยู่ในความโค้งนั้น นั่นคือการสร้างสะพานให้มีความโค้ง จะช่วยกระจายแรงที่กดตัวสะพานลงสู่พื้นดินฐานสะพานได้ดีกว่าแบบพาดตรงๆ นอกจากนี้การสร้างสะพานจึงต้องพิจารณาความเหมาะสมของลักษณะพื้นดินบริเวณนั้นด้วย ไม่ใช่นึกอยากจะสร้างตรงไหนก็สร้างได้ ดังรูปที่ 4.19

รูปที่ 4.19 สะพานโค้งที่พบเห็นทั่วไป

จากตัวอย่างการสร้างสะพานโค้งที่ช่วยกระจายแรงที่กดตัว เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบค่าความโค้งของรูปทรงไฮเปอร์โบลากับรูปทรงกระบอก ณ แต่ละจุดตลอดช่วง ดังรูปที่ 4.20



รูปที่ 4.20 ภาพแสดงการเปรียบเทียบค่าความโค้ง

พบว่า ทรงกระบอกมีแรงโน้มถ่วงทิ้งดิ่งลงสู่พื้นโลกหรือค่าความโค้งเท่ากับศูนย์ แต่รูปทรงไฮเปอร์โบลามีการกระจายแรงเนื่องจากค่าความโค้งไม่เท่ากับศูนย์จึงมีความแข็งแรงและยืดหยุ่นกว่ารูปทรงกระบอก

4.4.3 การออกแบบเฟอร์นิเจอร์จากรูปทรงไฮเปอร์โบลา

ปัจจุบันพบการสร้างเฟอร์นิเจอร์ที่มีลักษณะคล้ายกับ รูปทรงทางเรขาคณิตหลากหลายรูปแบบ และรูปทรงไฮเปอร์โบลาก็เป็นอีกรูปทรงหนึ่งที่นิยมสร้างเฟอร์นิเจอร์ ดังรูปที่ 4.21

รูปที่ 4.21 ภาพตัวอย่างเฟอร์นิเจอร์รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

บทที่ 5
สรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

จากการศึกษาทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับภาคตัดกรวย และพื้นผิวกำลังสอง ทำให้ทราบว่า รูปทรงไฮเปอร์โบลาเป็นรูปแบบหนึ่งในเรื่องพื้นผิวกำลังสอง โดยทางคณะผู้จัดทำต้องการศึกษาการตัด รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นและรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น ด้วยระนาบระดับต่างๆ เพื่อ เปรียบเทียบกับการตัดรูปทรงกรวยด้วยระนาบระดับต่างๆในขอบเขตเดียวกัน ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบสมการ รอยตัดและกราฟที่เกิดจากการตัดด้วยระนาบของรูปทรงต่างๆมีผล ดังนี้

ผลการศึกษาการตัดด้วยสมการระนาบ แบ่งเป็น 2 กรณี นั่นคือ

1. เมื่อตัดด้วยระนาบ xy, yz และ yz

   ที่ขอบเขตของสมการระนาบเป็น $a=0$ และ $b,c=1$ จะมีลักษณะรอยตัดของทุก รูปทรงที่ศึกษาเหมือนกับขอบเขตของสมการระนาบ $b=0$ และ $a,c=1$ นั่นคือ

   - รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น มีลักษณะรอยตัดเป็นไฮเปอร์โบลาแนวนอน
   - รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น มีลักษณะรอยตัดเป็นไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง
   - รูปทรงกรวย มีลักษณะรอยตัดเป็นกากบาท

   ที่ขอบเขตของสมการระนาบ $c=0$ และ $a,b=1$ จะมีลักษณะรอยตัดของรูปทรง ไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้นเป็นวงกลม ส่วนรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นจะไม่มีกราฟ และ รูปทรงกรวยเป็นจุด

2. เมื่อตัดด้วยสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$ ที่ผ่านจุดกำเนิดโดยให้แกนใดแกนหนึ่ง เป็นศูนย์

   พบว่าที่ขอบเขตของสมการระนาบที่แตกต่างกัน มีลักษณะรอยตัดที่แตกต่างกันด้วย ดังนี้

   ที่ขอบเขตของสมการระนาบ $-1<b<0$ จะมีลักษณะรอยตัดของรูปทรงไฮเปอร์โบลา แบบหนึ่งชิ้นเป็นรูปวงรี ส่วนรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นและรูปทรงกรวย ไม่มีกราฟทั้งคู่

   ที่ขอบเขตของสมการระนาบ $b=-1$ จะมีลักษณะรอยตัดของรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบ หนึ่งชิ้นเป็นเส้นตรงที่ขนานกัน ส่วนรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้นจะไม่มีกราฟ และรูปทรง กรวยเป็นจุด

   ที่ขอบเขตของสมการระนาบ $b<-1$ จะมีลักษณะรอยตัดคือ

   - รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น มีลักษณะรอยตัดเป็นไฮเปอร์โบลาแนวนอน
   - รูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น มีลักษณะรอยตัดเป็นไฮเปอร์โบลาแนวตั้ง
   - รูปทรงกรวย มีลักษณะรอยตัดเป็นกากบาท

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 จากตัวอย่างการประยุกต์เกี่ยวกับการขุดเจาะแร่ทองคำนั้น ถ้าในกรณีที่การเกิดแร่ชนิดอื่นๆ รูปทรงในการสะสมของแร่แต่ละชนิดอาจเป็นรูปทรงที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงควรมีการศึกษาเพิ่มเติม เกี่ยวกับการตัดรูปทรงอื่นๆ ด้วยระนาบในระดับต่างกัน

5.2.2 ควรมีการศึกษาเพิ่มในการออกแบบการรับน้ำหนักของเก้าอี้หวายที่มีลักษณะคล้ายกับรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น ซึ่งถ้าค่าความโค้งของรูปทรงไฮเปอร์โบลานั้นแตกต่างกันอาจทำให้ประสิทธิภาพการรับน้ำหนักนั้นแตกต่างกันด้วย

5.2.3 งานวิจัย Reinforced Concrete Column-Supported Hyperboloid Cooling Tower Stability Assessment for Seismic Loads อาจเป็นแนวคิดพื้นฐานเพื่อเป็นส่วนหนึ่งในการศึกษาเรื่องความแข็งแรงของโครงสร้าง ซึ่งเป็นเรื่องที่ผู้สนใจควรจะศึกษาต่อไป

บรรณานุกรม

ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์. (ม.ป.ป.). *เรขาคณิตวิเคราะห์.* (ม.ป.ท.).

ภัทรา เตชาภิวาทย์. (2540). *เรขาคณิตวิเคราะห์.* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

รุ้งระวี อำนาจตระกูล. (2555). *แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 3.* กรุงเทพฯ: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

ศรีบุตร แววเจริญ, & ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (รวบรวม) (2544). *คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ.* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

Anton, H., & Herr, A. (1995). *Calculus with Analytic Geometry.* 5th ed. New York: John wiley & Sons.

กว่าจะเป็นทองคำ. (2552). ค้นเมื่อ 28 พฤศจิกายน 2556, จาก http://www.electron.rmutphysics.com/science-news/index.php?option=com_content&task=view&id=1260&Itemid=4

การเปลี่ยนพิกัดแกน 2 มิติและ 3 มิติ. 10 กันยายน 2556, จาก http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/2301203/sheet_book/v9_Cal_III_ch1_page_001_146_2551_1st.pdf

[1]Sabouri-Ghomi, S. , & Kharrazi, M.H.K. (2005). Reinforced Concrete Column-Supported Hyperboloid Cooling Tower Stability Assessment for Seismic Loads. Retrieved August 8,2013, from source http://www.sid.ir/en/VEWSSID/J_pdf/95520050206.pdf

Sketch hyperboloid of one sheet. ค้นเมื่อ 25 สิงหาคม 2556, จากhttp://www.youtube.com/watch?v=PSnmZVQX60&list=PLyCrEOlahJK8IZ1asz2p7-yNes1RIjy53

ภาคผนวก

การพลอตกราฟ

ในการพลอตกราฟด้วยโปรแกรม Mathematica และ http://www.wolframalpha.com

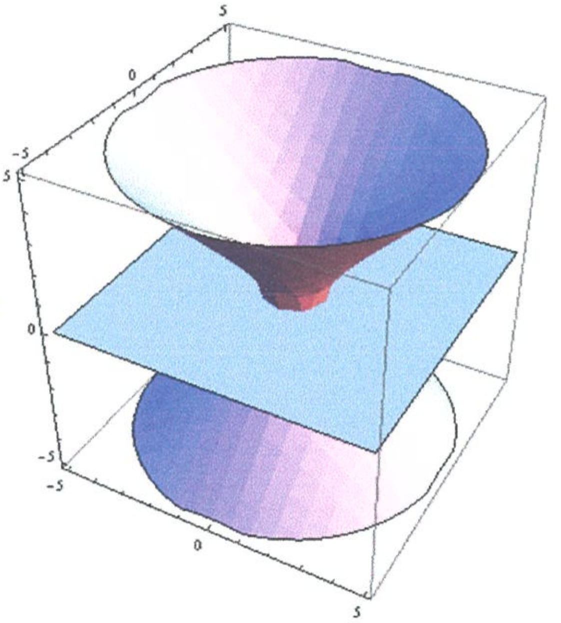
กรณีที่ 1 เมื่อตัดด้วยระนาบ xy, yz **และ** xz

1. การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

จากรูปที่ 4.4 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xy

```
In[1]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == 1, z == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
  NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

Out[1]=



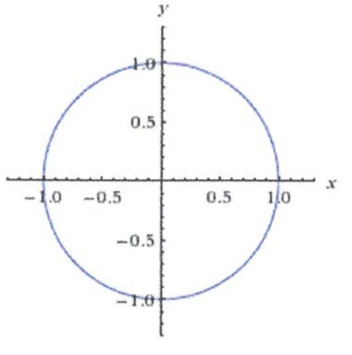
Input

$$x^2 + y^2 = 1$$

Geometric figure

circle

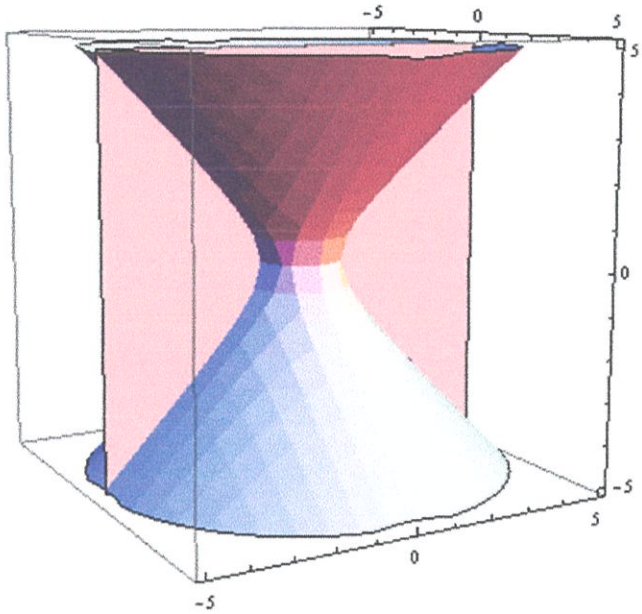
Implicit plot



จากรูปที่ 4.5 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ yz

```
In[2]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == 1, x == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
  NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

Out[2]=



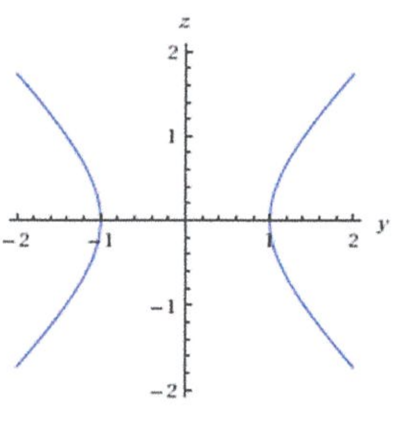
Input:

$$y^2 - z^2 = 1$$

Geometric figure:

hyperbola

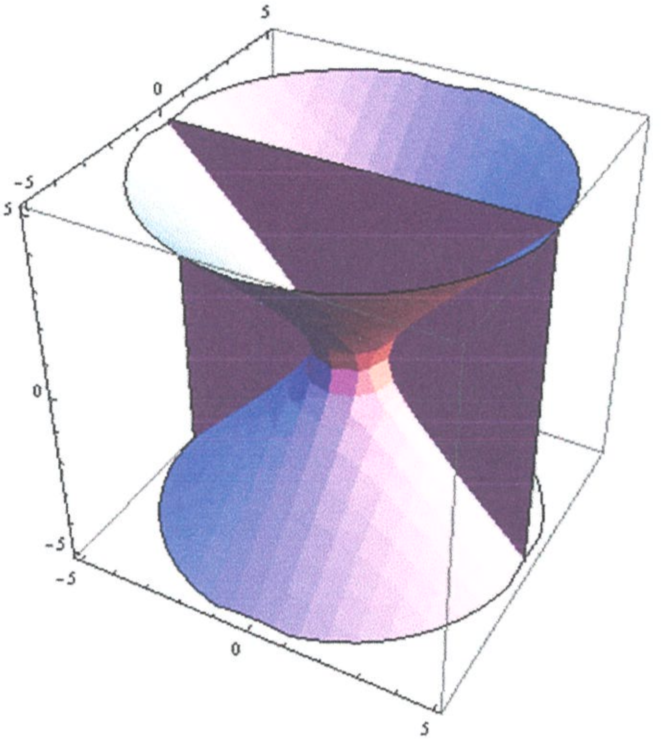
Implicit plot:



จากรูปที่ 4.6 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xz

```
In[3]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == 1, y == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
         NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

Out[3]=



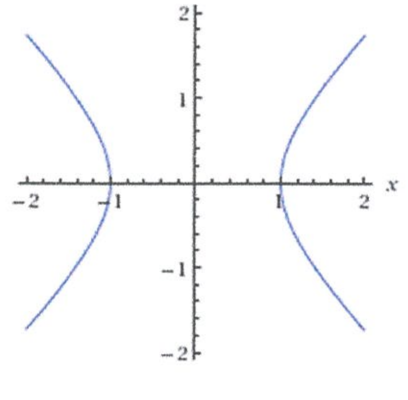
Input:

$$x^2 - z^2 = 1$$

Geometric figure:

hyperbola

Implicit plot:

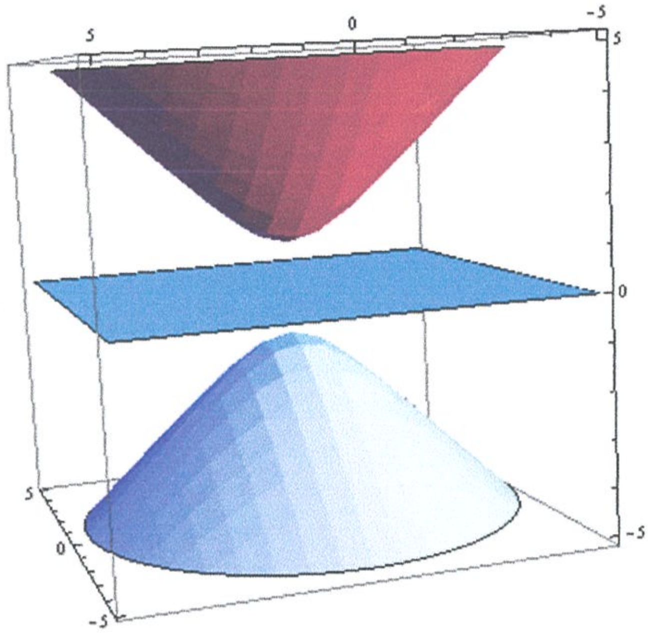


2. การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

จากรูปที่ 4.7 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xy

```
In[4]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == -1, z == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
         NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

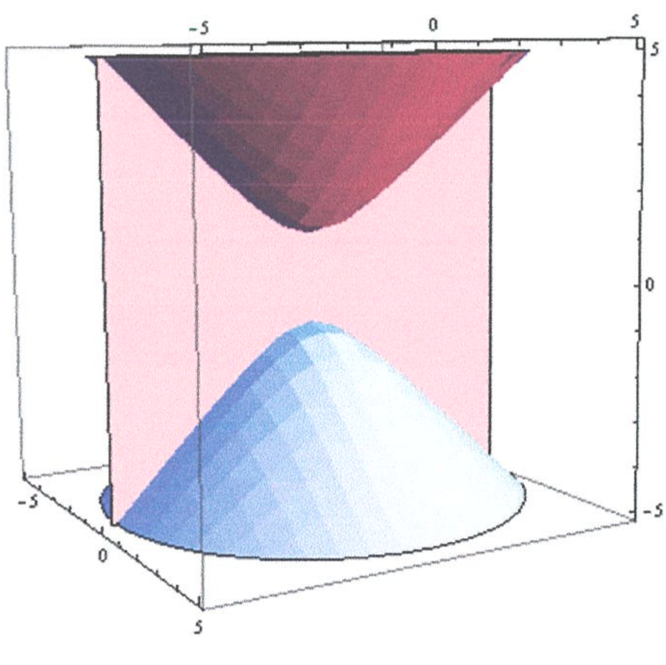
Out[4]=



จากรูปที่ 4.8 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ yz

```
In[5]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == -1, x == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
         NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

Out[5]=



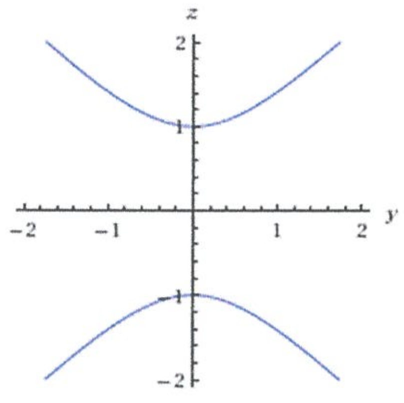
Input:

$$y^2 - z^2 = -1$$

Geometric figure:

hyperbola

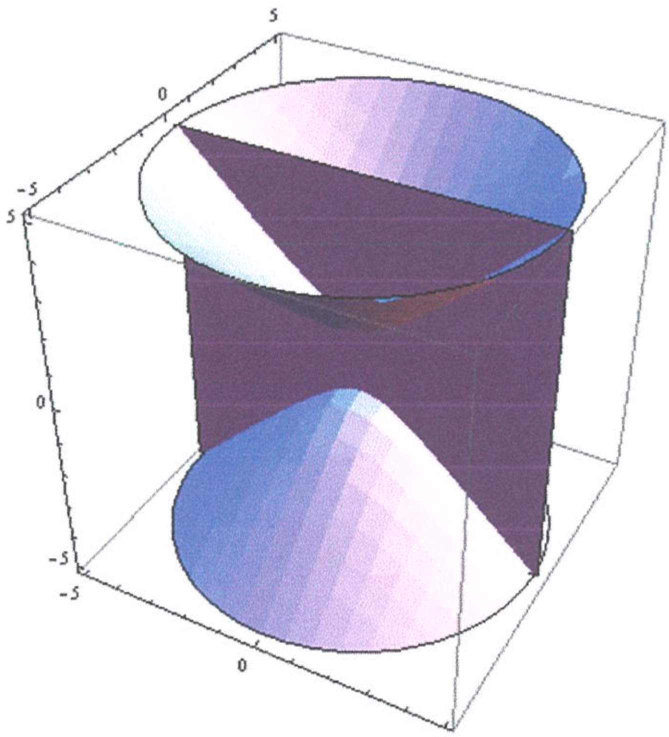
Implicit plot:



จากรูปที่ 4.9 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xz

```
In[6]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == -1, y == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
   NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

Out[6]=



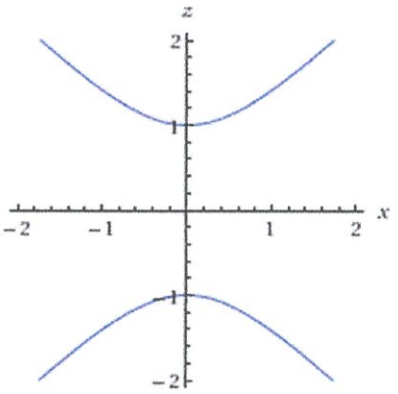
Input:

$x^2 - z^2 = -1$

Geometric figure:

hyperbola

Implicit plot:

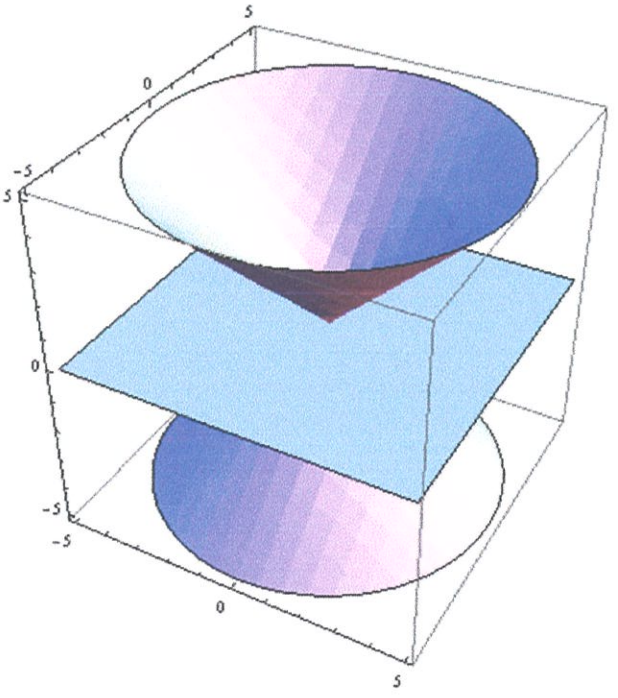


3. การตัดรูปทรงกรวย

จากรูปที่ 4.10 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xy

```
In[7]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == 0, z == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
         NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

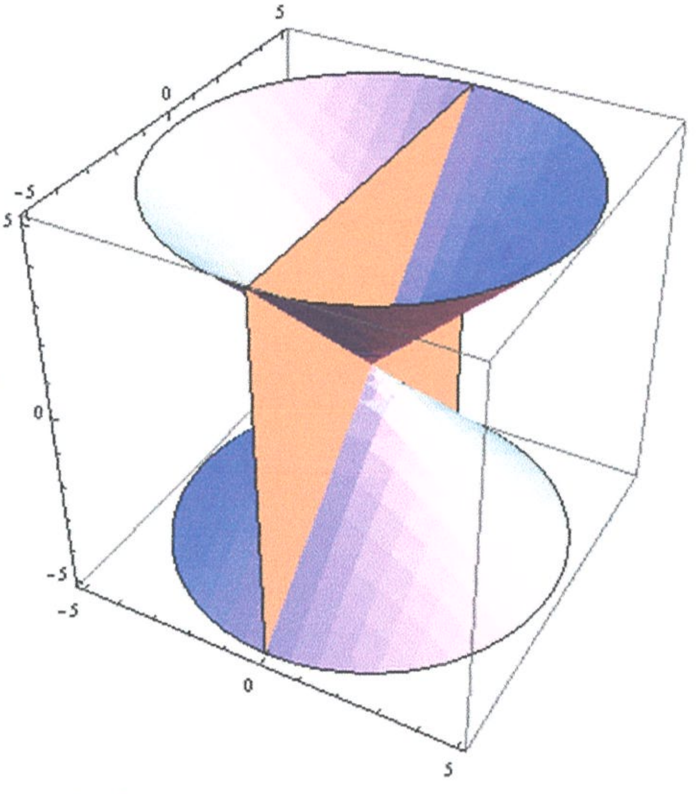
Out[7]=



จากรูปที่ 4.11 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ yz

```
In[8]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == 0, x == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
  NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

Out[8]=



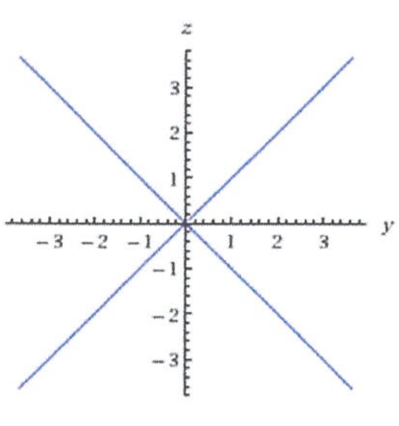
Input:

$$y^2 - z^2 = 0$$

Geometric figure:

pair of intersecting lines

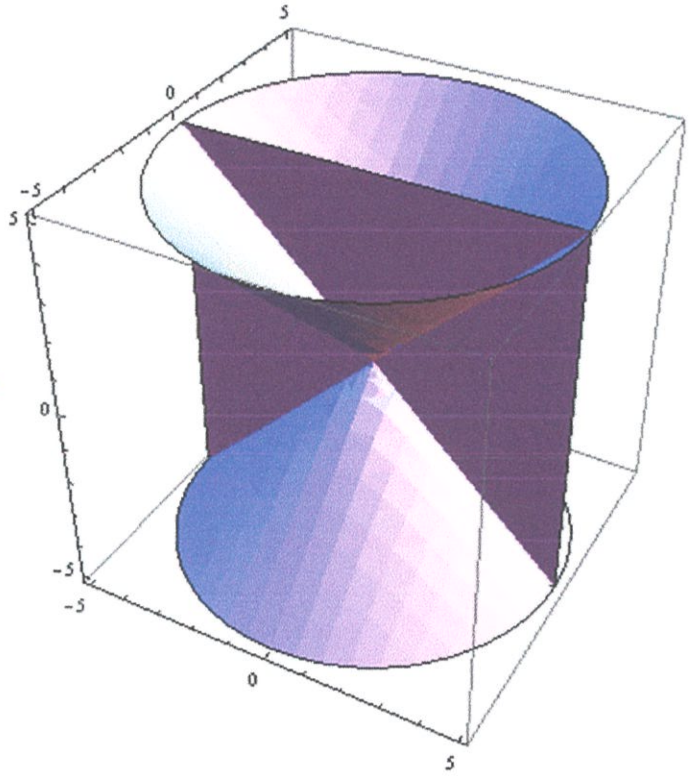
Implicit plot:



จากรูปที่ 4.12 กราฟที่ได้เมื่อตัดด้วยระนาบ xz

```
In[9]:= ContourPlot3D[{x^2 + y^2 - z^2 == 0, y == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
        NormalsFunction → None, Mesh → None]
```

Out[9]=



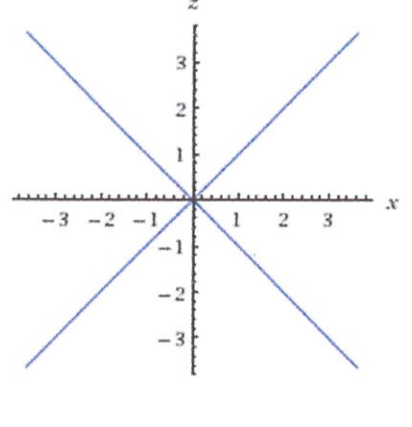
Input:

$x^2 - z^2 = 0$

Geometric figure:

pair of intersecting lines

Implicit plot:



กรณีที่ 2 เมื่อตัดด้วยสมการระนาบ $(ax+by+cz=0)$ ที่ผ่านจุดกำเนิดโดยให้แกนใดแกนหนึ่งเป็นศูนย์

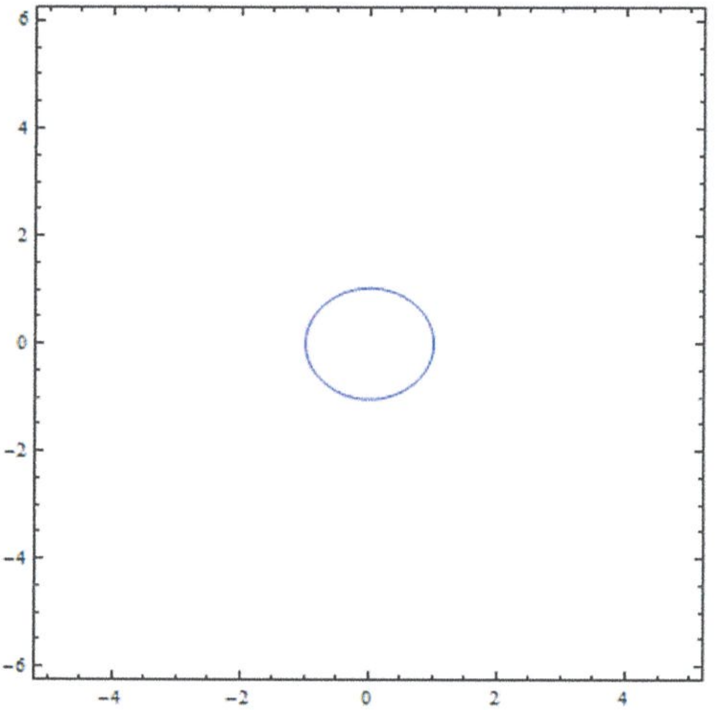
จะพลอตกราฟโดยใช้คำสั่งในทำนองเดียวกัน เพียงแต่เปลี่ยนสมการรอยตัด

1. การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

จากตารางที่ 4.1 ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบหนึ่งชิ้น

```
In[10]:= ContourPlot[x^2 + 0.9375 * y^2 == 1, {x, -5, 5}, {y, -6, 6}]
```

Out[10]=

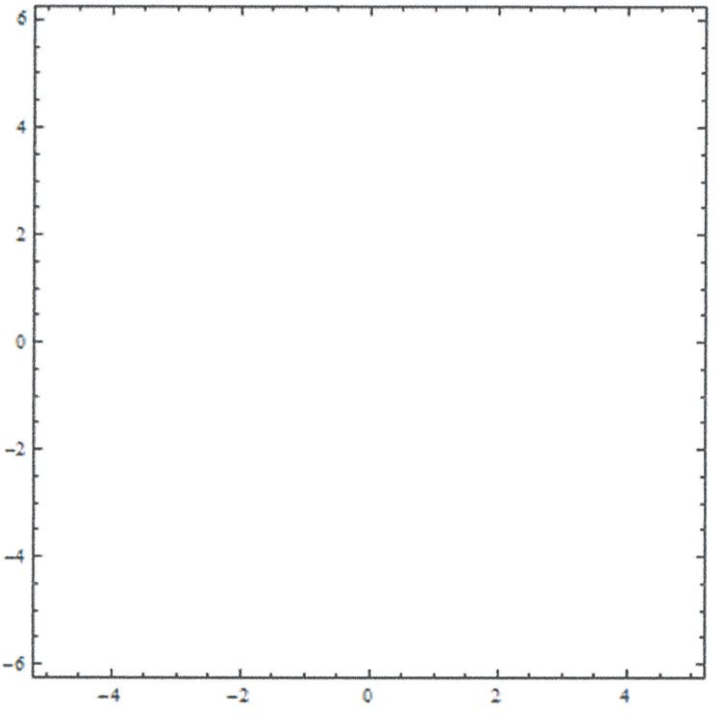


2. การตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

จากตารางที่ 4.2 ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงไฮเปอร์โบลาแบบสองชิ้น

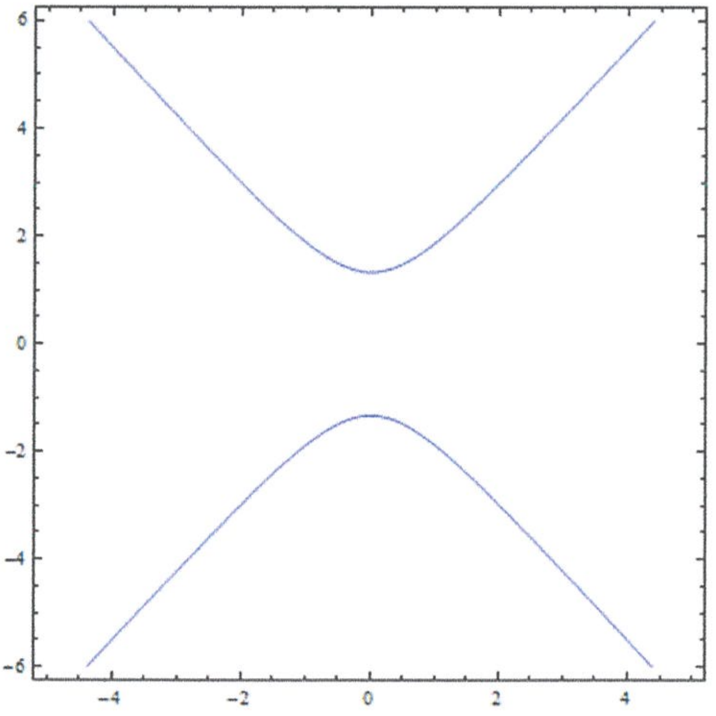
```
In[11]:= ContourPlot[x^2 + 0.9375 * y^2 == -1, {x, -5, 5}, {y, -6, 6}]
```

Out[11]=



```
In[12]:= ContourPlot[x^2 - 0.5625 * y^2 == -1, {x, -5, 5}, {y, -6, 6}]
```

Out[12]=

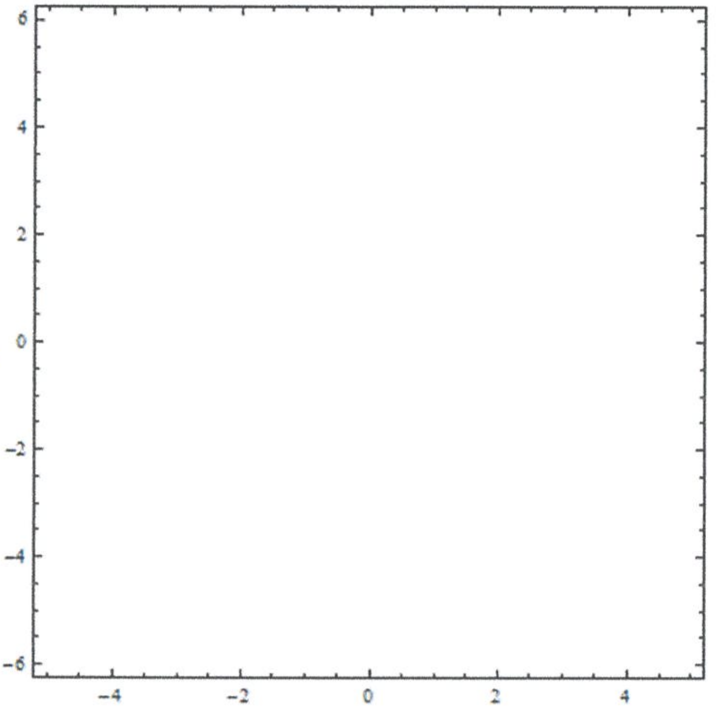


3. การตัดรูปทรงกรวย

จากตารางที่ 4.3 ตารางแสดงกราฟและสมการรอยตัดของการตัดรูปทรงกรวย

```
In[13]:= ContourPlot[x^2 + 0.9375 * y^2 == 0, {x, -5, 5}, {y, -6, 6}]
```

Out[13]=




```
In[14]:= ContourPlot[x^2 - 0.5625 * y^2 == 0, {x, -5, 5}, {y, -6, 6}]
```

Out[14]=