กึ่งกรุปบางแบบที่ให้โครงสร้างของริง

SOME SEMIGROUPS ADMITTING RING STRUCTURE

ศรสวรรค์ มีชนะ
หนึ่งฤทัย จันทบุรี
อรทัย หลงทัพไทย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา ๒๕๕๖

กึ่งกรุปบางแบบที่ให้โครงสร้างของริง

SOME SEMIGROUPS ADMITTING RING STRUCTURE

ศรสวรรค์ มีชนะ

หนึ่งฤทัย จันทบุรี

อรทัย หลงทัพไทย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

SOME SEMIGROUPS ADMITTING RING STRUCTURE

SORNSAWAN MEECHANA

NUENGRUETHAI CHANTHABURI

ORATHAI LONGTAPTHAI

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อปัญหาพิเศษ กึ่งกรุปแบบที่ให้โครงสร้างของริง

ชื่อนักศึกษา นางสาวศรสวรรค์ มีชนะ 53050111

นางสาวหนึ่งฤทัย จันทบุรี 53050131

นางสาวอรทัย หลงทัพไทย 53050137

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.กัมปนาท นามงาม ประธานกรรมการ	
ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการ	
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

หัวข้อปัญหาพิเศษ กึ่งกรุปแบบที่ให้โครงสร้างของริง

ชื่อนักศึกษา นางสาวศรสวรรค์ มีชนะ 53050111

นางสาวหนึ่งฤทัย จันทบุรี 53050131

นางสาวอรทัย หลงทัพไทย 53050137

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล

บทคัดย่อ

สำหรับกึ่งกรุป $(S,\cdot)$ จะกล่าวว่าให้โครงสร้างของริง ถ้าสามารถหาตัวดำเนินการ $\oplus$ ที่ทำให้ $(S^0,\oplus,\cdot)$ เป็นริง การศึกษาปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่องนี้เราจะพิจารณากึ่งกรุปบางรูปแบบว่าสามารถให้โครงสร้างของริงได้หรือไม่ โดยเราจะพิจารณากึ่งกรุปบางรูปแบบของจำนวนจริงและกึ่งกรุปของฟังก์ชันบางรูปแบบ

คำสำคัญ : กึ่งกรุป ริง

Special Project Title	Some Semigroups Admitting Ring Structure	
Students	Ms. Sornsawan Meechana	53050111
	Ms. Nuengruethai Chanthaburi	53050131
	Ms. Orathai Longtapthai	53050137
Degree	Bachelor of Science	
Major Program	Applied Mathematics	
Academic Year	2013	
Advisor	Dr. Ngarmcherd Danpattanamongkon	

ABSTRACT

A semigroup $(S,\cdot)$ admitting ring structure if there is an operation $\oplus$ on $(S^0,\cdot)$ such that $(S^0,\oplus,\cdot)$ is a ring. In this special project, some multiplicative interval semigroups of real number are considered. In addition the transformation semigroup $T(X)$, $G(X)$, $M(X)$ and $E(X)$ are determined.

Keywords : semigroups, ring

กิตติกรรมประกาศ

ในการศึกษาปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่องกึ่งกรุปบางแบบที่ให้โครงสร้างของริง ทางคณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณ ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษนี้เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความรู้ คำปรึกษา ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะต่างๆ ในการจัดทำปัญหาพิเศษ และได้ช่วยแก้ไขปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นพร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้สำเร็จ และขอกราบขอบพระคุณคณะกรรมการสอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ ดร.กัมปนาท นามงาม ประธานกรรมการสอบ และ ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการสอบ ที่ได้เสียสละเวลามาเป็นกรรมการสอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ พร้อมทั้งให้ความรู้และข้อเสนอแนะต่างๆที่สร้างความเข้าใจ เพื่อนำความรู้ที่ได้ไปใช้ประโยชน์และแก้ไขปัญหาพิเศษนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

ทางคณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณอาจารย์และเจ้าหน้าที่ทุกท่านที่ได้ให้ความรู้ทั้งทางทฤษฎีและทางปฏิบัติจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2557

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
บทที่ 1 บทนำ	**1**
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์	2
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	2
1.4 การดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ	3
บทที่ 2 นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน	**4**
นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน	4
บทที่ 3 กึ่งกรุปช่วงบนจำนวนจริง	**16**
กึ่งกรุปช่วงบนจำนวนจริง	16
บทที่ 4 กึ่งกรุปบนฟังก์ชัน	**34**
กึ่งกรุปบนฟังก์ชัน	34
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ	**46**
สรุปผลและข้อเสนอแนะ	46
เอกสารอ้างอิง	**48**

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในทางคณิตศาสตร์ด้านพีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra) ได้ศึกษาเกี่ยวกับกรุป (Group) และริง (Ring) ไว้มากมาย ซึ่งให้นิยามได้ดังนี้

นิยาม กรุป $(G,\cdot)$ คือ กึ่งกรุป $(G,\cdot)$ ที่มีสมบัติดังนี้

1. มีสมาชิก $e \in G$ เพียงตัวเดียว ซึ่ง $e \cdot a = a = a \cdot e$ สำหรับทุกสมาชิก $a \in G$ และ เรียก e ว่า **สมาชิกเอกลักษณ์**ภายใต้ $\cdot$ บนเซต G
2. ทุกสมาชิก $a \in G$ จะมี $a^{-1} \in G$ ซึ่ง $a^{-1} \cdot a = e = a \cdot a^{-1}$ และเรียก a^{-1} ว่า **ตัวผกผัน**ของ a ภายใต้ $\cdot$ บนเซต G

นิยาม ริง $(R,+,\cdot)$ เป็นระบบซึ่งประกอบด้วยเซต R และการดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\cdot$ เรียกว่า การบวก และการคูณตามลำดับ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1. $(R,+)$ เป็นอาบีเลียนกรุป
2. $(R,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป
3. R มีสมบัติการแจกแจง นั่นคือ

   สำหรับทุกๆ $a,b,c \in R$

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$
$$(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a)$$

ในปัญหาพิเศษเรื่องนี้จะทำการพิจารณากึ่งกรุป (Semigroup) บางรูปแบบว่าสามารถให้โครงสร้างของริงได้หรือไม่ โดยเราสนใจที่จะศึกษากึ่งกรุปบางรูปแบบบนจำนวนจริงและกึ่งกรุปของฟังก์ชันบางรูปแบบ ซึ่งจะพิจารณาว่ากึ่งกรุป $(S,\cdot)$ ใดบ้างที่สามารถให้โครงสร้างของริงได้

เราจะกล่าวว่ากึ่งกรุป $(S,\cdot)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ มีตัวดำเนินการ $\oplus$ บน S^0 ที่ทำให้ $(S^0,\oplus,\cdot)$ เป็นริงโดยที่

$$S^0 = \begin{cases} S \cup \{0\} & , |S| = 1 \text{ หรือ } S \text{ ไม่มีสมาชิกศูนย์} \\ S & , \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาสมบัติของกึ่งกรุปบนจำนวนจริงว่าสามารถให้โครงสร้างของริงได้หรือไม่

1.2.2 รวบรวมรูปแบบของกึ่งกรุปที่ให้โครงสร้างของริงได้

1.4.7 ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมเกี่ยวกับกึ่งกรุป

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีของกึ่งกรุป โดยพิจารณากึ่งกรุปบนจำนวนจริงว่ามีกี่รูปแบบ และศึกษาจากรูปแบบว่ากึ่งกรุปรูปแบบใดบ้างที่สามารถให้โครงสร้างของริงได้

1.4 การดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับพีชคณิตนามธรรม

1.4.2 ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีของกึ่งกรุปที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ

1.4.3 ศึกษาค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุป

1.4.4 วิเคราะห์บทพิสูจน์ต่างๆที่ทำให้กึ่งกรุปให้โครงสร้างของริง

1.4.5 สรุปว่ากึ่งกรุปบนจำนวนจริงรูปแบบใดบ้างที่ให้โครงสร้างของริง

1.4.6 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษและสื่อในการนำเสนอ

1.4.7 นำเสนอหัวข้อปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ

1.5.1 ได้ความรู้ใหม่ๆเกี่ยวกับทฤษฎีของกึ่งกรุปและริงมากขึ้น

1.5.2 ได้ศึกษางานวิจัยและนำมาใช้ในการศึกษาค้นคว้าต่อไปได้

1.5.3 นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ในการหากึ่งกรุปรูปแบบใหม่ๆที่สามารถให้โครงสร้างของริงได้

บทที่ 2

นิยามและทฤษฎีพื้นฐาน

ในการศึกษากึ่งกรุปที่กำหนดให้บางรูปแบบว่าสามารถให้โครงสร้างของริงได้หรือไม่ ต้องอาศัยความรู้และทฤษฎีพื้นฐานดังต่อไปนี้

นิยาม 2.1 **กึ่งกรุป** $(S,\cdot)$ คือเซต S ที่มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการทวิภาค $\cdot$ และมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ สำหรับ $x, y, z \in S$ ใดๆ

นิยาม 2.2 **กึ่งกรุปย่อย**ของกึ่งกรุป $(S,\cdot)$ คือเซตย่อย T ของ S ซึ่ง $T \neq \varnothing$ และ $x \cdot y \in T$ สำหรับ $x, y \in T$

นิยาม 2.3 **กรุป** $(G,\cdot)$ คือ กึ่งกรุป $(G,\cdot)$ ที่มีสมบัติดังนี้

1. มีสมาชิก $e \in G$ เพียงตัวเดียว ซึ่ง $e\cdot a = a = a\cdot e$ สำหรับทุกสมาชิก $a \in G$ และ เรียก e ว่า **สมาชิกเอกลักษณ์**ภายใต้ $\cdot$ บนเซต G
2. ทุกสมาชิก $a \in G$ จะมี $a^{-1} \in G$ ซึ่ง $a^{-1}\cdot a = e = a\cdot a^{-1}$ และ เรียก a^{-1} ว่า **ตัวผกผัน**ของ a ภายใต้ $\cdot$ บนเซต G

<u>ตัวอย่าง</u> $(\{1,-1,i,-i\},\times)$ เป็นกรุป

เนื่องจากสำหรับทุก $x,y,z\in\{1,-1,i,-i\}$

จะได้ว่า $x\times y\in\{1,-1,i,-i\}$ และ $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$

มี 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

มี 1 เป็นตัวผกผันของ 1

มี -1 เป็นตัวผกผันของ -1

มี i เป็นตัวผกผันของ $-i$

และ $-i$ เป็นตัวผกผันของ i

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ S เป็นเซตของจำนวนอตรรกยะ แล้ว S กับการคูณปรกติ ไม่เป็นกรุป

เนื่องจาก $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\notin S$

<u>ตัวอย่าง</u> $(\mathbb{Z}^+,+)$ ไม่เป็นกรุป เพราะว่า เซต $\mathbb{Z}^+$ ไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์

$(\mathbb{Z}^+\cup\{0\},+)$ ไม่เป็นกรุป เพราะว่า 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

แต่สมาชิกทุกตัวยกเว้น 0 ไม่มีตัวผกผัน

$(\mathbb{Z}^+,\times)$ ไม่เป็นกรุป เพราะว่า 2 ไม่มีตัวผกผันในเซต $\mathbb{Z}^+$ ภายใต้ $\times$

นิยาม 2.4 $(S,\cdot)$ เป็น**กรุปย่อย**ของ $(G,\cdot)$ ก็ต่อเมื่อ

1. S เป็นเซตย่อยของ G
2. $(S,\cdot)$ เป็นกรุป

<u>ตัวอย่าง</u> เนื่องจาก $(\mathbb{R},+)$ เป็นกรุป และ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{Q}$ เป็นจำนวนตรรกยะ และ $\mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริง

จะพบว่า $(\mathbb{Q},+)$ เป็นกรุปด้วย

ดังนั้น $(\mathbb{Q},+)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R},+)$

<u>ตัวอย่าง</u> เนื่องจาก $(\{1,-1,i,-i\}\ ,\times)$ เป็นกรุป

ซึ่ง $\{1,-1\}$ เป็นเซตย่อยของ $\{1,-1,i,-i\}$

และ $(\{1,-1\},\times)$ เป็นกรุป

ดังนั้น $(\{1,-1\},\times)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\{1,-1,i,-i\}\ ,\times)$

นิยาม 2.5 กรุป $(G,\cdot)$ จะเรียกว่า **อาบีเลียนกรุป (abelian group)** ถ้าการดำเนินการ $\cdot$ มีสมบัติสลับที่ของสมาชิกใน G นั่นคือ $a\cdot b=b\cdot a$ สำหรับทุกสมาชิก $a,b\in G$

<u>ตัวอย่าง</u> $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q}^{+},\times)$, $(\mathbb{R}-\{0\},\times)$ และ $(\{1,-1,i,-i\},\times)$ เป็นอาบีเลียนกรุป

นิยาม 2.6 ให้ $(S,\cdot)$ และ $(T,*)$ เป็นกึ่งกรุป จะเรียกฟังก์ชัน $\varphi:S\to T$ ว่า **สาทิสสัณฐาน** (homomorphism) จาก S ไปยัง T เมื่อ

$$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)*\varphi(y) \qquad \text{สำหรับทุก } x,y\in S \text{ ใดๆ}$$

เอกสัณฐาน (monomorphism) จาก S ไปยัง T คือ สาทิสสัณฐานจาก S ไปยัง T ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

อุปริสัณฐาน (epimorphism) จาก S ไปยัง T คือ สาทิสสัณฐานจาก S ไปทั่วถึง T

เรียกสาทิสสัณฐาน $\varphi : S \to T$ ว่า **สมสัณฐาน (isomorphism)** เมื่อ φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง และกล่าวว่า S และ T **สมสัณฐานกัน** ซึ่งเขียนแทนด้วย $S \cong T$

นิยาม 2.7 **ริง** $(R,+,\cdot)$ เป็นระบบซึ่งประกอบด้วยเซต R และการดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\cdot$ เรียกว่า การบวก และการคูณตามลำดับ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1. $(R,+)$ เป็นอาบีเลียนกรุป

2. $(R,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

3. R มีสมบัติการแจกแจง นั่นคือ

สำหรับทุกๆ $a,b,c \in R$

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$
$$(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a)$$

ข้อตกลง ในริง $(R,+,\cdot)$ ใดๆเราให้ 0 แทนเอกลักษณ์การบวกของ R และ $-a$ แทนผกผันการบวกของสมาชิก a ใน R

<u>ตัวอย่าง</u> $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ และ $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ เป็นริง

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ F เป็นเซตของฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และนิยามการบวกและการคูณของฟังก์ชัน ดังนี้

สำหรับ $f,g \in F$ และ $x \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

จะได้ว่า $(F,+,\cdot)$ เป็นริง เพราะว่า

1. $(F,+)$ เป็นอาบีเลียนกรุป

   จากสมบัติของฟังก์ชันทำให้ได้ว่าเซตของฟังก์ชันมีสมบัติปิดภายใต้การ $+$ ของฟังก์ชัน

   มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของฟังก์ชัน

   มีสมาชิกเอกลักษณ์คือฟังก์ชันที่นิยามดังนี้ $f(x)=0$

   และตัวผกผันของ $f(x)$ คือ $-f(x)$

2. การคูณใน F มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่

3. การบวก และการคูณใน F มีสมบัติการแจกแจงด้านซ้ายและด้านขวา

นิยาม 2.8 ให้ $(S,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป และ $x\in S$ เราจะเรียก x ว่าสมาชิกศูนย์ของ S ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $y\in S,\ x\cdot y=x=y\cdot x$ และเขียนแทนด้วย 0

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง แล้ว

1. $0\cdot a=0=a\cdot 0$ สำหรับทุกๆ $a\in R$
2. $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)=a\cdot(-b)$ สำหรับทุกๆ $a,b\in R$
3. $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$ สำหรับทุกๆ $a,b\in R$
4. ถ้า R มีเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $\cdot$ แล้วเอกลักษณ์มีเพียงหนึ่งเดียวเรียกว่า 1 และ $-a=(-1)a$

นิยาม 2.10 กำหนดให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง และ $H\subset R$ เรียก $(H,+,\cdot)$ ว่าเป็น**ริงย่อย**ของ $(R,+,\cdot)$ ก็ต่อเมื่อ $(H,+,\cdot)$ เป็นริง

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ E เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่

$(E,+,\cdot)$ เป็นริงย่อยของ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

<u>ตัวอย่าง</u> $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ และ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ เป็นริงย่อยของ $(\mathbb{R},+,\cdot)$

ข้อสังเกต **ถ้า $(R,+,\cdot)$ เป็นริง แล้ว 0 (เอกลักษณ์ภายใต้ $+$ ของริง $(R,+,\cdot)$)** จะเป็นสมาชิกศูนย์ของกึ่งกรุป $(R,\cdot)$

ข้อสังเกต ถ้า $(S,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่ไม่มีสมาชิกศูนย์ แล้วไม่สามารถหาตัวดำเนินการทวิภาค $\oplus$ บน S ที่ทำให้ $(S,\oplus,\cdot)$ เป็นริงได้

<u>ตัวอย่าง</u> เนื่องจาก $(\mathbb{N},\cdot)$ ไม่มีสมาชิกศูนย์

ดังนั้น $(\mathbb{N},\cdot)$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

ให้ $(S,\circ)$ เป็นกึ่งกรุปใดๆ แล้ว $a\notin S$

กำหนด $\circ'$ เป็นการดำเนินการบนเซต $S\cup\{a\}$ โดย

$$x\circ' y=\begin{cases} x\circ y & \text{, ถ้า } x,y\in S \\ a & \text{, กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

ดังนั้น สำหรับ $x,y,z\in S\cup\{a\}$

$$(x \circ' y) \circ' z = \begin{cases} (x \circ y) \circ' z & , \text{ถ้า } x, y \in S \\ a \circ' z & , \text{ถ้า } x = a \text{ หรือ } y = a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x \circ y) \circ z & , \text{ถ้า } x, y, z \in S \\ a & , \text{ถ้า } z = a \\ a & , \text{ถ้า } x = a \text{ หรือ } y = a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x \circ y) \circ z & , \text{ถ้า } x, y, z \in S \\ a & , \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

$$x \circ' (y \circ' z) = \begin{cases} x \circ' (y \circ z) & , \text{ถ้า } y, z \in S \\ x \circ' a & , \text{ถ้า } y = a \text{ หรือ } z = a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x \circ (y \circ z) & , \text{ถ้า } x, y, z \in S \\ a & , \text{ถ้า } x = a \\ a & , \text{ถ้า } y = a \text{ หรือ } z = a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x \circ (y \circ z) & , \text{ถ้า } x, y, z \in S \\ a & , \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $(S \cup \{a\}, \circ')$ เป็นกึ่งกรุปซึ่งมี a เป็นสมาชิกศูนย์

เพราะสำหรับ $x \in S \cup \{a\}$, $x \circ' a = a = a \circ' x$

และเขียน $(S \cup \{a\}, \circ')$ แทนด้วย $(S \cup \{a\}, \circ)$

นิยาม 2.11 สำหรับกึ่งกรุป $(S,\cdot)$ ใดๆ นิยาม

$$S^0 = \begin{cases} S \cup \{0\} & , |S| = 1 \text{ หรือ } S \text{ ไม่มีสมาชิกศูนย์} \\ S & , \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่ $0 \notin S$ จะได้ว่า $(S^0,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป

นิยาม 2.12 ให้ $(S,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป จะกล่าวว่า $(S,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุปที่ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อสามารถหาตัวดำเนินการ $\oplus$ บน S^0 ที่ทำให้ $(S^0,\oplus,\cdot)$ เป็นริง

ทฤษฎีบท 2.13 ให้ $(S,*)$ และ $(R,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป ฟังก์ชัน $\varphi:(S,*)\to(R,\cdot)$ เป็นสมสัณฐาน ถ้ามีตัวดำเนินการ $+$ บน R ที่ทำให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง แล้วจะมีตัวดำเนินการ $\oplus$ บน S ที่ทำให้ $(S,\oplus,*)$ เป็นริง นิยามโดย

$$x \oplus y = \varphi^{-1}\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right) \qquad \text{ทุกๆ } x, y \in S$$

<u>พิสูจน์</u> สมมติ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง

กำหนดตัวดำเนินการ $\oplus$ บน S โดย

$$x \oplus y = \varphi^{-1}\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right) \qquad \text{ทุกๆ } x, y \in S$$

จะพิสูจน์ว่า $(S,\oplus,*)$ เป็นริง

1. $\oplus$ เป็นการดำเนินการบน S

ให้ $x_1 = x_2$ จะได้ $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

$y_1 = y_2$ จะได้ $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} x_1 \oplus y_1 &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_1) + \varphi(y_1)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_2) + \varphi(y_2)\right) \\ &= x_2 \oplus y_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\oplus$ เป็นการดำเนินการบน S

2. สมบัติปิดภายใต้ $\oplus$

ให้ $x, y \in S$ เนื่องจาก $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in R$ และ $(R,+)$ เป็นกรุป

จะได้ $\varphi(x) + \varphi(y) \in R$

ดังนั้น $x \oplus y = \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right) \in S$

3. การสลับที่ภายใต้ $\oplus$

จะแสดงว่า $x \oplus y = y \oplus x$ สำหรับทุก $x, y \in S$

ให้ $x, y \in S$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(y) + \varphi(x)\right) \\ &= y \oplus x \end{aligned}$$

4. การเปลี่ยนหมู่ภายใต้ $\oplus$

จะแสดงว่า $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in S$

ให้ $x, y, z \in S$

$$(x \oplus y) \oplus z = \varphi^{-1}\left[\varphi(x \oplus y) + \varphi(z)\right]$$

$$= \varphi^{-1}\left[\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right)\right) + \varphi(z)\right]$$

$$= \varphi^{-1}\left[\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right) + \varphi(z)\right]$$

$$= \varphi^{-1}\left[\varphi(x) + \left(\varphi(y) + \varphi(z)\right)\right]$$

$$= \varphi^{-1}\left[\varphi(x) + \varphi\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(y) + \varphi(z)\right)\right)\right]$$

$$= \varphi^{-1}\left[\varphi(x) + \varphi(y \oplus z)\right]$$

$$= x \oplus (y \oplus z)$$

5. เซต $(S, \oplus)$ มีสมาชิกเอกลักษณ์

   นั่นคือ $\exists z \in S, \forall x \in S$

   $$z \oplus x = x = x \oplus z$$

   ให้ e เป็นเอกลักษณ์ $(R, +)$

   $\therefore\ \varphi^{-1}(e) \in S$

   ให้ $x \in S$

   $$x \oplus \varphi^{-1}(e) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi\left(\varphi^{-1}(e)\right)\right)$$

   $$= \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + e\right)$$

   $$= \varphi^{-1}\left(\varphi(x)\right)$$

   $$= x$$

6. สมาชิกทุกตัวมีตัวผกผัน

ให้ $x \in S \quad \therefore \varphi(x) \in R$

เนื่องจาก $(R,+)$ เป็นกรุป มี $-\varphi(x) \in R$ ดังนั้น $\varphi^{-1}(-\varphi(x)) \in S$

$$
\begin{aligned}
x \oplus \varphi^{-1}(-\varphi(x)) &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi\left(\varphi^{-1}(-\varphi(x))\right)\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + (-\varphi(x))\right) \\
&= \varphi^{-1}(e)
\end{aligned}
$$

7. สมบัติการแจกแจง

จะแสดงว่า $(x \oplus y) * z = (x * y) \oplus (y * z)$

และ $z * (x \oplus y) = (z * x) \oplus (z * y)$ สำหรับทุก $x, y, z \in S$

ให้ $x, y, z \in S$

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y) * z &= \left[\varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right)\right] * z \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi\left[\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right)\right) * z\right]\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right)\right) \cdot \varphi(z)\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right) \cdot \varphi(z)\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\left(\varphi(x) \cdot \varphi(z)\right) + \left(\varphi(y) \cdot \varphi(z)\right)\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi(x * z) + \varphi(y * z)\right] \\
&= (x * z) \oplus (y * z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z*(x\oplus y) &= z*\left[\varphi^{-1}\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right)\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi\left[z*\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right)\right)\right]\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi(z)\cdot\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right)\right)\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi(z)\cdot\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right)\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\left(\varphi(z)\cdot\varphi(x)\right)+\left(\varphi(z)\cdot\varphi(y)\right)\right] \\
&= \varphi^{-1}\left[\varphi(z*x)+\varphi(z*y)\right] \\
&= (z*x)\oplus(z*y)
\end{aligned}
$$

จาก 1-7 สรุปได้ว่า $(S,\oplus,*)$ เป็นริง $\square$

บทที่ 3

กึ่งกรุปช่วงบนจำนวนจริง

ให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง และ I เป็นช่วง (interval) บน $\mathbb{R}$ ในปี ค.ศ.1966 K.R.Pearson [2] ได้แสดงว่า I เป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปรกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

1. $\mathbb{R}$
2. $\{0\}$
3. $\{1\}$
4. $(0,\infty)$
5. $[0,\infty)$
6. (a,∞) โดย $a \geq 1$
7. $[a,\infty)$ โดย $a \geq 1$
8. $(0,b)$ โดย $0 < b \leq 1$
9. $(0,b]$ โดย $0 < b \leq 1$
10. $[0,b)$ โดย $0 < b \leq 1$
11. $[0,b]$ โดย $0 < b \leq 1$
12. (a,b) โดย $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$
13. $(a,b]$ โดย $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$
14. $[a,b)$ โดย $-1 < a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$
15. $[a,b]$ โดย $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$

<u>**พิสูจน์**</u> $(\Rightarrow)$ สมมติว่า I เป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปรกติ

1. I ไม่มีขอบเขตล่างและไม่มีขอบเขตบน

   I จะอยู่ในรูปแบบ $(-\infty,\infty)$ นั่นคือ $I=\mathbb{R}$ และ $\mathbb{R}$ เป็นกึ่งกรุป

2. I ไม่มีขอบเขตล่างแต่มีขอบเขตบน นั่นคือ I จะมีค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุด ให้เป็น b $(\sup I=b)$ ดังนั้น I จะอยู่ในรูปแบบ $(-\infty,b),(-\infty,b]$

   <u>กรณี 1</u> $b<0$

   เนื่องจาก $b-1<b$ ดังนั้น $b-1\in(-\infty,b)\subseteq I$

   แต่ $0<(b-1)(b-1)=(b-1)^2\notin I$ ดังนั้น I ไม่เป็นกึ่งกรุป

   <u>กรณี 2</u> $b\geq 0$

   เนื่องจาก $b+1>b\geq 0$

   จะได้ $-(b+1)<-b<b$ ดังนั้น $-(b+1)\in(-\infty,b)\subseteq I$

   และ $-1\in I$ แต่ $(-1)[-(b+1)]=b+1\notin I$

   ดังนั้น I ไม่เป็นกึ่งกรุป

3. I มีขอบเขตล่างแต่ไม่มีขอบเขตบน นั่นคือ I จะมีค่าขอบเขตล่างที่มากที่สุด ให้เป็น a $(\inf I=a)$ ดังนั้น I จะอยู่ในรูปแบบ $(a,\infty),[a,\infty)$

   <u>กรณี 1</u> $a<0$

   เนื่องจาก $\dfrac{a}{2}>a$

   จะได้ $(4)\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a<a$ แต่ $4,\dfrac{a}{2}\in(0,\infty)\subseteq I$

   ดังนั้น I ไม่เป็นกึ่งกรุป

<u>กรณี 2</u> $a \geq 0$

เนื่องจาก $(a,\infty) \subseteq I$

จะได้ $(a,\infty)(a,\infty) \subseteq I^2 \subseteq I$ นั่นคือ $(a^2,\infty) \subseteq I$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 &\geq a \\ a^2 - a &\geq 0 \\ a(a-1) &\geq 0 \end{aligned}$$

จะได้ a อยู่ในช่วง $(-\infty,0] \cup [1,\infty)$

เนื่องจาก $a \geq 0$ จะได้ $a = 0$ หรือ $a \geq 1$

เนื่องจากทุก $x, y > a \geq 1$ จะได้ $xy > a$

นั่นคือ $xy \in (a,\infty) \subseteq I$ ทุก $x, y > a$ ดังนั้น I เป็นกึ่งกรุป

4. I มีขอบเขตล่างและมีขอบเขตบน นั่นคือ I จะมีค่าขอบเขตล่างที่มากที่สุด ให้เป็น a $(\inf I = a)$ และมีค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุด ให้เป็น b $(\sup I = b)$

<u>กรณี 1</u> $a < 0$

มี $a' \in I, a' < 0$ ทำให้ได้ว่า $(a')^2 > 0$ ดังนั้น $b > 0$

เนื่องจาก $(0,b) \subseteq I$ จะได้ $(0,b)(0,b) \subseteq I^2 \subseteq I$

นั่นคือ $(0,b^2) \subseteq I$ จะได้ว่า $b^2 \leq b$ ดังนั้น $0 \leq b \leq 1$

จะได้ $a < 0, 0 \leq b \leq 1$ แบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

<u>กรณี 1.1</u> $a < -1$

จะมี $a < a' < -1$ ซึ่ง $(a')^2 > 1 > b$ แต่ $(a')^2 \notin I$

ดังนั้น I ไม่เป็นกึ่งกรุป

<u>กรณี 1.2</u> $-1 \leq a < 0$ จะได้ $0 < a^2 \leq b \leq 1$

ดังนั้น $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$

<u>กรณี 2</u> $a \geq 0$ จะได้ $b \geq 0$

เนื่องจาก $(a,b) \subseteq I$ จะได้ $(a,b)(a,b) \subseteq I^2 \subseteq I$

นั่นคือ $(a^2,b^2) \subseteq I$ จะได้ว่า $a^2 \geq a$ และ $b^2 \leq b$

จาก	$a^2 \geq a$	และ	$b^2 \leq b$
	$a^2 - a \geq 0$		$b^2 - b \leq 0$
	$a(a-1) \geq 0$		$b(b-1) \leq 0$

จะได้ $a = 0$ หรือ $a \geq 1$ และ $0 \leq b \leq 1$ แบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

<u>กรณี 2.1</u> $a = 0$ หรือ $0 \leq b \leq 1$ ได้รูปแบบที่ 2, 8-11

<u>กรณี 2.2</u> $a \geq 1$ หรือ $0 \leq b \leq 1$ ได้รูปแบบที่ 3

$(\Leftarrow)$ ให้ I เป็น 1 ใน 15 รูปแบบ

เนื่องจาก $\mathbb{R}$ ภายใต้การคูณปกติเป็นกึ่งกรุป จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า

I ภายใต้การคูณปกติ มีสมบัติปิด

สำหรับ 1-3 เห็นได้ชัดเจนอยู่แล้ว

ให้ $x, y \in I$

4. $x, \mathrm{y} > 0 \Rightarrow xy > 0$

5. $x, \mathrm{y} \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

6. สำหรับ $a \geq 1$ ซึ่ง $x, \mathrm{y} > a \Rightarrow xy > a(1) = a$

7. สำหรับ $a \geq 1$ ซึ่ง $x, \mathrm{y} \geq a \Rightarrow xy \geq a(1) = a$

8. สำหรับ $0 < b \le 1$ ซึ่ง $0 < x, y < b \Rightarrow 0 < xy < b(1) = b$

9. สำหรับ $0 < b \le 1$ ซึ่ง $0 < x, y \le b \Rightarrow 0 < xy \le b(1) = b$

10. สำหรับ $0 < b \le 1$ ซึ่ง $0 \le x, y < b \Rightarrow 0 \le xy < b(1) = b$

11. สำหรับ $0 < b \le 1$ ซึ่ง $0 \le x, y \le b \Rightarrow 0 \le xy \le b(1) = b$

12.-15. สำหรับ $-1 \le a < 0 < a^2 \le b \le 1$ สมมติให้ $a < x, y < b$

สมมติว่า $x \le y$

ถ้า $x \le 0$ และ $y \le 0$ แล้ว $0 \le xy < a^2$ ดังนั้น $xy \in (a,b)$

ถ้า $x \le 0$ และ $y > 0$ แล้ว $a < x \le xy \le 0$ ดังนั้น $xy \in (a,b)$

ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $0 < xy < y < b$ ดังนั้น $xy \in (a,b)$ $\square$

ในบทนี้เราจะพิจารณากึ่งกรุปช่วงของเซตจำนวนจริงจำนวน 13 รูปแบบ (ยกเว้น รูปแบบที่ 4 และ 5) ว่าแต่ละรูปแบบสามารถให้โครงสร้างริงได้หรือไม่ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ถ้า I อยู่ในรูปแบบที่ 1 นั่นคือ $I = \mathbb{R}$ แล้ว I จะให้โครงสร้างของริง

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $I = \{a\}$ แล้ว I จะให้โครงสร้างของริง

พิสูจน์ เนื่องจาก $I = \{a\}$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ดังนั้น $I^0 = \{a, 0\}$

ให้ $\circ$ เป็นการดำเนินการบน I กำหนดโดย $a \circ a = a$ ดังนั้น $(I, \circ)$ เป็นกึ่งกรุป

เพราะฉะนั้น $I^0 = \{a, 0\}$ เป็นกึ่งกรุป

โดยที่ $0 = 0 \circ 0, a \circ 0 = 0 = 0 \circ a$ และ $a \circ a = a$

จากทฤษฎีบทที่ 2.13

นิยาม $\varphi:(\{a,0\},\circ)\to(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ โดยที่ $\varphi(a)=\overline{1}$, $\varphi(0)=\overline{0}$

จะเห็นได้ชัดว่า φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ต่อไปนี้จะแสดงว่า φ เป็นสมสัณฐานจาก $(\{a,0\},\circ)$ ไปยัง $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$

โดยแสดงว่า สำหรับทุก $x,y\in\{a,0\}$

$$\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

จะได้

$$\varphi(0\circ 0)=\varphi(0)=\overline{0}=\overline{0}\cdot\overline{0}=\varphi(0)\cdot\varphi(0)$$

$$\varphi(0\circ a)=\varphi(0)=\overline{0}=\overline{0}\cdot\overline{1}=\varphi(0)\cdot\varphi(a)$$

$$\varphi(a\circ 0)=\varphi(0)=\overline{0}=\overline{1}\cdot\overline{0}=\varphi(a)\cdot\varphi(0)$$

$$\varphi(a\circ a)=\varphi(a)=\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{1}=\varphi(a)\cdot\varphi(a)$$

ดังนั้น $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$ สำหรับทุก $x,y\in\{0,a\}$

โดยทฤษฎีบทที่ 2.13 จะได้ว่า I^0 ให้โครงสร้างของริง □

บทแทรก 3.2 ถ้า I เป็นรูปแบบที่ 2 หรือ 3 แล้ว I จะให้โครงสร้างของริง

ให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง และ $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$ ในการพิจารณา I ในรูปแบบที่ 6-15 จะต้องอาศัยบทตั้งที่ 3.3-3.4 และทฤษฎีบทที่ 3.5 ช่วยในการพิจารณา ดังนี้

บทตั้งที่ 3.3 ให้ S เป็นกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุป $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ ถ้า $\oplus$ เป็นตัวดำเนินการบน S^0 ที่ทำให้ $(S^0,\oplus,\cdot)$ เป็นริง แล้วสำหรับทุกๆ $x\in S^0$, $x\oplus x=0$

พิสูจน์ ให้ $x \in S^0$

ดังนั้น $x \oplus y = 0$ สำหรับบาง $y \in S^0$

แล้ว $x^2 \oplus xy = x(x \oplus y) = x0 = 0$

และ $xy \oplus y^2 = (x \oplus y)y = 0y = 0$

ดังนั้น x^2 และ y^2 เป็นผกผันการบวกของ xy ในริง $(S^0, \oplus, \cdot)$

นั่นคือ $x^2 = y^2$ เนื่องจาก $x, y \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x = y$

ดังนั้น $x \oplus x = 0$ □

บทตั้งที่ 3.4 ให้ S เป็นกึ่งกรุปย่อยของกรึ่งกรุป $(\mathbb{R}, \cdot)$ ถ้า $\oplus$ เป็นตัวดำเนินการบน S^0 ที่ทำให้ $(S^0, \oplus, \cdot)$ เป็นริง แล้ว $x \oplus (-x) = 0$ สำหรับทุกๆ $x \in S^0$ ซึ่ง $-x \in S^0$

พิสูจน์ ให้ $x \in S^0 \setminus \{0\}$ ซึ่ง $-x \in S^0$

ดังนั้น $x \oplus (-x) = c$ สำหรับบาง $c \in S^0$

แล้ว $xc = x(x \oplus (-x)) = x^2 \oplus (-(x^2)) = (-x)((-x) \oplus x) = (-x)c = x(-c)$

เพราะว่า $x \neq 0$ ดังนั้น $c = -c$ นั่นคือ $c = 0$ □

ทฤษฎีบทที่ 3.5 กึ่งกรุปภายใต้การคูณ $[0,1]$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

พิสูจน์ สมมติว่ากึ่งกรุป $([0,1], \cdot)$ ให้โครงสร้างของริง นั่นคือมี $\oplus$ เป็นตัวดำเนินการบน $[0,1]$

ซึ่งทำให้ $([0,1], \oplus, \cdot)$ เป็นริง

โดยบทตั้งที่ 3.3 จะได้ว่า $x \oplus x = 0$ สำหรับ $x \in [0,1]$

ให้ $c \in (0,1)$ ดังนั้น $1 \oplus c \neq 0$ และ $1 \oplus c \neq 1$

เราจะได้ว่า $c[0,1] = [0,c]$ เป็นไอดีลของริง $([0,1], \oplus, \cdot)$

เพราะว่า $0 < 1 \oplus c < 1$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $(1 \oplus c)^n \in [0,c]$

แต่

$$(1 \oplus c)^n = 1 \oplus \binom{n}{1}^* c \oplus \binom{n}{2}^* c^2 \oplus \cdots \oplus \binom{n}{n-1}^* c^{n-1} \oplus c^n$$

เมื่อ $k^* c^i$ หมายถึง $c^i \oplus c^i \oplus \ldots \oplus c^i$ (k ครั้ง)

ดังนั้น $(1 \oplus c)^n = 1 \oplus cy$ สำหรับบาง $y \in [0,1]$

เนื่องจาก $(1 \oplus c)^n$, $cy \in [0,c]$ และ $[0,c]$ เป็นไอดีลของริง $([0,1], \oplus, \cdot)$

ทำให้ได้ว่า $cy \oplus (1 \oplus c)^n \in [0,c]$

ดังนั้น

$$1 = 1 \oplus 0 = 1 \oplus cy \oplus cy = (1 \oplus c)^n \oplus cy \in [0,c]$$

ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น กึ่งกรุป $([0,1], \cdot)$ ไม่ให้โครงสร้างของริง □

บทแทรกที่ 3.6 สำหรับ $0 < b \leq 1$ กึ่งกรุปภายใต้การคูณในช่วง $[0,b]$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

พิสูจน์ ให้ $0 < b \leq 1$

สมมติ $\oplus$ เป็นตัวดำเนินการบน $[0,b]$ ที่ทำให้ $([0,b], \oplus, \cdot)$ เป็นริง

กำหนดให้ $\oplus'$ เป็นตัวดำเนินการบน $[0,1]$ โดย

$$x \oplus' y = \frac{bx \oplus by}{b} \quad \text{สำหรับ } x, y \in [0,1]$$

จะได้ว่า $x \oplus' y = y \oplus' x$ สำหรับ $x, y \in [0,1]$

ดังนั้น สำหรับ $x, y, z \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
(x \oplus' y) \oplus' z &= \left(\frac{bx \oplus by}{b}\right) \oplus' z \\
&= \frac{b\left(\frac{bx \oplus by}{b}\right) \oplus bz}{b} \\
&= \frac{(bx \oplus by) \oplus bz}{b} \\
&= \frac{bx \oplus (by \oplus bz)}{b} \\
&= \frac{bx \oplus b\left(\frac{by \oplus bz}{b}\right)}{b} \\
&= x \oplus' \left(\frac{by \oplus bz}{b}\right) \\
&= x \oplus' (y \oplus' z)
\end{aligned}$$

และ

$$x(y \oplus' z) = x\left(\frac{by \oplus bz}{b}\right)$$

$$= \frac{bx(by \oplus bz)}{b^2}$$

$$= \frac{(bx)(by) \oplus (bx)(bz)}{b^2}$$

$$= \frac{b(bxy) \oplus b(bxz)}{b^2}$$

$$= \frac{b(bxy \oplus bxz)}{b^2}$$

$$= \frac{bxy \oplus bxz}{b}$$

$$= xy \oplus' xz$$

ให้ $x \in [0,1]$ ดังนั้น $x \oplus' 0 = \frac{(bx \oplus 0)}{b} = x$

$$x \oplus' \frac{y}{b} = \frac{bx \oplus b(y/\mathrm{b})}{b} = \frac{bx \oplus y}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

เนื่องจาก $bx \in [0,\mathrm{b}]$, $bx \oplus y = 0$ สำหรับบาง $y \in [0,b]$ ดังนั้น $\frac{y}{b} \in [0,1]$

เพราะฉะนั้น $([0,1],\oplus',\cdot)$ เป็นริง ดังนั้น ขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ 3.5

ทำให้ได้ว่าสำหรับ $0 < b \le 1$, $[0,b]$ ไม่ให้โครงสร้างของริง □

บทแทรกที่ 3.7 สำหรับ $0 < b \le 1$ กึ่งกรุปภายใต้การคูณในช่วง $[0,b)$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

<u>พิสูจน์</u> ให้ $0 < b \le 1$ สมมติว่า $\oplus$ เป็นตัวดำเนินการบน $[0,b)$ ที่ทำให้ $([0,b),\oplus,\cdot)$ เป็นริง

สำหรับ $c \in (0,b)$ เราจะเห็นได้ว่า $[0,cb) = c[0,b)$ เป็นไอดีลของริง $([0,b),\oplus,\cdot)$

ให้ $d \in (0,b)$ และ $0 < \varepsilon < b(b-d)$ ดังนั้น $d < d + \dfrac{\varepsilon}{b} < b$ และ

$$\left[0,\left(d+\frac{\varepsilon}{b}\right)b\right) = [0, db+\varepsilon)$$

เป็นไอดีลของริง $([0,b),\oplus,\cdot)$ ทำให้ได้ว่า

$$[0,db] = \bigcap_{0<\varepsilon<b(b-d)} [0, db+\varepsilon)$$

เป็นไอดีลของริง $([0,b),\oplus,\cdot)$

ดังนั้น $0 < db < 1$ และ $([0,db],\oplus,\cdot)$ เป็นริง ซึ่งขัดแย้งกับบทแทรกที่ 3.6

เพราะฉะนั้น สำหรับ $0 < b \le 1$, $[0,b)$ ไม่ให้โครงสร้างของริง □

ทฤษฎีบทที่ 3.8 กึ่งกรุปภายใต้การคูณในช่วง $[a,1]$ โดย $-1 \le a < 0 < a^2 \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

<u>พิสูจน์</u> สมมติว่ามีตัวดำเนินการ $\oplus$ บน $[a,1]$ ที่ทำให้ $([a,1],\oplus,\cdot)$ เป็นริง

จากบทตั้งที่ 2 $x \oplus (-x) = 0$ สำหรับทุกๆ $x \in [a,|a|]$

เนื่องจาก $([a,1],\oplus)$ เป็นกรุป

จะได้ว่า $\left\{1 \oplus x \,\middle|\, x \in \left(0,\frac{1}{2}a^2\right)\right\}$ เป็นเซตย่อยไม่จำกัดของ $[a,1]$ ดังนั้นจะมี $c \in \left(0,\frac{1}{2}a^2\right]$

ซึ่ง $1 \oplus c \ne 1$ และ $1 \oplus c \ne a$

ดังนั้น $-1 \le a < a \oplus c < 1$ และทำให้ได้ว่า

$$(1\oplus c)^n \in \left[-\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2\right]$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก n

โดยการกระจายทวินามของ $(1\oplus c)^n$ ในริง $([a,1],\oplus,\cdot)$

จะได้ว่า $(1\oplus c)^n = 1\oplus cy$ สำหรับบาง $y\in[a,1]$

ดังนั้น $cy \in \left[-\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2\right]$

จะเห็นว่าทั้ง $(1\oplus c)^n$ และ $-cy$ อยู่ใน $\left[-\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2\right]$

และ $\left[-\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}|a|\right] = \frac{1}{2}|a|[a,1]$ เป็นไอดีลของริง $([a,1],\oplus,\cdot)$

ที่คลุม $\left[-\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2\right]$

นั่นคือ $(1\oplus c)^n \oplus (-cy) \in \left[-\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}|a|\right]$

ดังนั้น

$$1 = 1\oplus 0 = 1\oplus cy\oplus(-cy) = (1\oplus c)^n \oplus(-cy) \in \left[-\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}|a|\right]$$

ซึ่งขัดแย้ง เพราะฉะนั้น สำหรับ $-1\le a<0<a^2\le 1$, $[a,1]$ ไม่ให้โครงสร้างของริง □

บทแทรกที่ 3.9 กึ่งกรุปภายใต้การคูณในช่วง $[a,b]$ โดย $-1\le a<0<a^2\le b\le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

<u>พิสูจน์</u> สมมติว่ามีตัวดำเนินการ $\oplus$ บน $[a,b]$ ที่ทำให้ $([a,b],\oplus,\cdot)$ เป็นริง

<u>กรณีที่1</u> $|a| \le b$ ดังนั้น $-1 \le \frac{a}{b} < 0 < \left(\frac{a}{b}\right)^2 \le 1$

กำหนด $\oplus'$ เป็นตัวดำเนินการบน $\left[\frac{a}{b},1\right]$ โดย

$$x \oplus' y = \frac{bx \oplus by}{b} \qquad \text{สำหรับทุกๆ } x, y \in \left[\frac{a}{b},1\right]$$

จะได้ว่า $x \oplus' y = y \oplus' x$ สำหรับ $x, y \in \left[\frac{a}{b},1\right]$

ดังนั้น สำหรับ $x, y, z \in \left[\frac{a}{b},1\right]$

$$
\begin{aligned}
(x \oplus' y) \oplus' z &= \left(\frac{bx \oplus by}{b} \right) \oplus' z \\
&= \frac{b\left(\frac{bx \oplus by}{b} \right) \oplus bz}{b} \\
&= \frac{(bx \oplus by) \oplus bz}{b} \\
&= \frac{bx \oplus (by \oplus bz)}{b} \\
&= \frac{bx \oplus b\left(\frac{by \oplus bz}{b} \right)}{b} \\
&= x \oplus' \left(\frac{by \oplus bz}{b} \right) \\
&= x \oplus' (y \oplus' z)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
x(y \oplus' z) &= x\left(\frac{by \oplus bz}{b} \right) \\
&= \frac{bx(by \oplus bz)}{b^2} \\
&= \frac{(bx)(by) \oplus (bx)(bz)}{b^2} \\
&= \frac{b(bxy) \oplus b(bxz)}{b^2} \\
&= \frac{b(bxy \oplus bxz)}{b^2} \\
&= \frac{bxy \oplus bxz}{b} \\
&= xy \oplus' xz
\end{aligned}
$$

ให้ $x \in \left[\frac{a}{b},1\right]$ ดังนั้น $x \oplus' 0 = \frac{(bx \oplus 0)}{b} = x$

เนื่องจาก $bx \in [a,b]$ ซึ่ง $bx \oplus y = 0$ สำหรับบาง $y \in [a,b]$ ทำให้ได้ว่า $\frac{y}{b} \in \left[\frac{a}{b},1\right]$

และ

$$x \oplus' \frac{y}{b} = \frac{bx \oplus b(y/b)}{b} = \frac{bx \oplus y}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

จากการแสดงข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า $\left(\left[\frac{a}{b},1\right],\oplus',\cdot\right)$ เป็นริง ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ 3.6

นั่นคือ ถ้า $|a| \le b$ แล้ว $[a,b]$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

<u>กรณีที่2</u> $|a| > b$ ดังนั้น $a[a,b] = \left[ab, a^2\right]$ เป็นไอดีลของริง $([a,b],\oplus,\cdot)$

และ $|ab| < a^2$ ดังนั้น $-1 \le \frac{ab}{a^2} < 0 < b^2 \le 1$

กำหนด $\oplus'$ เป็นตัวดำเนินการบน $\left[\frac{ab}{a^2},1\right]$ โดย

$$x \oplus' y = \frac{a^2x \oplus a^2y}{a^2} \qquad \text{สำหรับทุกๆ } x,y \in \left[\frac{ab}{a^2},1\right]$$

จะได้ว่า $x \oplus' y = y \oplus' x$ สำหรับทุกๆ $x, y \in [0,1]$

ดังนั้น สำหรับ $x, y, z \in [0,1]$

$$(x \oplus' y) \oplus' z = \frac{a^2 x \oplus a^2 y}{a^2} \oplus' z$$

$$= \frac{a^2\left(\frac{a^2 x \oplus a^2 y}{a^2}\right) \oplus a^2 z}{a^2}$$

$$= \frac{(a^2 x \oplus a^2 y) \oplus a^2 z}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 x \oplus (a^2 y \oplus a^2 z)}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 x \oplus a^2\left(\frac{a^2 y \oplus a^2 z}{a^2}\right)}{a^2}$$

$$= x \oplus' \left(\frac{a^2 y \oplus a^2 z}{a^2}\right)$$

$$= x \oplus' (y \oplus' z)$$

และ

$$x(y \oplus' z) = x\left(\frac{a^2 y \oplus a^2 z}{a^2}\right)$$

$$= \frac{a^2 x (a^2 y \oplus a^2 z)}{a^4}$$

$$= \frac{(a^2 x)(a^2 y) \oplus (a^2 x)(a^2 z)}{a^4}$$

$$= \frac{a^2 (a^2 xy) \oplus a^2 (a^2 xz)}{a^4}$$

$$= \frac{a^2 (a^2 xy \oplus a^2 xz)}{a^4}$$

$$= \frac{a^2 xy \oplus a^2 xz}{a^2}$$

$$= xy \oplus' xz$$

ให้ $x \in \left[\frac{ab}{a^2}, 1\right]$ ดังนั้น $x \oplus' 0 = \frac{\left(a^2 x \oplus 0\right)}{a^2} = x$

เนื่องจาก $a^2 x \in [a,b]$ ซึ่ง $a^2 x \oplus y = 0$ สำหรับบาง $y \in [a,b]$

ทำให้ได้ว่า $\frac{y}{a^2} \in \left[\frac{ab}{a^2}, 1\right]$

และ

$$x \oplus' \frac{y}{a^2} = \frac{a^2 x \oplus a^2\left(y / a^2\right)}{a^2} = \frac{a^2 x \oplus y}{a^2} = \frac{0}{a^2} = 0$$

จากการแสดงข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า $\left(\left[\frac{ab}{a^2}, 1\right], \oplus', \cdot\right)$ เป็นริง

จากกรณีที่ 1 ผลลัพธ์ที่ได้ขัดแย้งกัน

นั่นคือ ถ้า $|a| > b$ แล้ว $[a,b]$ ไม่ให้โครงสร้างของริง □

บทแทรกที่ 3.10 ถ้า I เป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณบน $\mathbb{R}$ มีรูปแบบดังนี้

$(a,b]$ หรือ (a,b) โดย $-1 \le a < 0 < a^2 \le b \le 1$

$[a,b)$ โดย $-1 \le a < 0 < a^2 \le b \le 1$

ดังนั้น I ไม่ให้โครงสร้างของริง

<u>พิสูจน์</u> สมมติมีตัวดำเนินการ $\oplus$ บน I ที่ทำให้ $(I, \oplus, \cdot)$ เป็นริง

ให้ $d \in (0,b)$, $k = b^2 - bd$ และ $m = \max\{|a|, b\}$

ดังนั้น $k > 0$, $m > 0$ และให้ $0 < \varepsilon < k$

เนื่องจาก $0 < d + \frac{\varepsilon}{m} < d + \frac{b^2 - bd}{m} \le d + \frac{b^2 - bd}{b} = b$

ดังนั้น $d+\frac{\varepsilon}{m}\in S$ ทำให้ได้ว่า $\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)S$ เป็นไอดีลของริง $(S,\oplus,\cdot)$

โดยที่

$$\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)S=\begin{cases}\left(\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)a,\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)b\right], & S=(a,b]\\ \left(\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)a,\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)b\right), & S=(a,b)\\ \left[\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)a,\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)b\right), & S=[a,b)\end{cases}$$

และ $da>\left(a,\frac{\varepsilon}{m}\right)a\geq\left(a,\frac{\varepsilon}{|a|}\right)a=da-\varepsilon,\ da<\left(a,\frac{\varepsilon}{m}\right)b\leq\left(a,\frac{\varepsilon}{b}\right)b=db+\varepsilon$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}[da,db]&\subseteq\bigcap_{0<\varepsilon<k}\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)S\\ &\subseteq\bigcap_{0<\varepsilon<k}[da-\varepsilon,da+\varepsilon]\\ &=[da,db]\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$[da,db]\subseteq\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)S\subseteq[da-\varepsilon,da+\varepsilon)\text{ สำหรับทุกๆ } \varepsilon \text{ ที่ } 0<\varepsilon<k$$

ทำให้ได้ว่า $[da,db]=\bigcap_{0<\varepsilon<k}\left(d+\frac{\varepsilon}{m}\right)S$ เป็นไอดีลของริง $(S,\oplus,\cdot)$

ซึ่งขัดแย้งกับบทแทรกที่ 3.9 □

บทที่ 4

กึ่งกรุปบนฟังก์ชัน

นิยาม 4.1 ให้ X เป็นเซตไม่ว่างใดๆ สำหรับ $\alpha : X \to X$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix}$$

หมายความว่า

$$\alpha(a) = b,\ \alpha(b) = c,\ \alpha(c) = a,\ \alpha(x) = x \text{ ทุกๆ } x \in X - \{a, b, c\}$$

สำหรับเซต X ใดๆ กำหนดให้

$$T(X) = \{\ \alpha | \alpha : X \to X\ \}$$

$$G(X) = \{\ \alpha \in T(X) | \alpha \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง }\}$$

$$M(X) = \{\ \alpha \in T(X) | \alpha \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง }\}$$

$$E(X) = \{\ \alpha \in T(X) | \alpha \text{ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง }\}$$

จะเห็นได้ว่า $T(X), G(X), M(X)$ และ $E(X)$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้ฟังก์ชันประกอบ ซึ่ง $G(X) \subset M(X) \subset T(X)$ และ $G(X) \subset E(X) \subset T(X)$

ทฤษฎีบท 4.2 ถ้า X เป็นเซตจำกัดไม่ว่าง แล้ว $M(X) = G(X) = E(X)$

พิสูจน์ สมมติให้ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$\underline{M(X) = G(X)}$

ให้ $\alpha \in M(X)$ ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

นั่นคือสำหรับ $a,b \in X$ ซึ่ง $a \neq b, \alpha(a) \neq \alpha(b)$

ทำให้ได้ว่า $\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), ..., \alpha(x_n)\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก n ตัวที่แตกต่างกัน

เนื่องจาก $\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), ..., \alpha(x_n)\} \subseteq X$ และ X มีสมาชิก n ตัว

เพราะฉะนั้น $\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), ..., \alpha(x_n)\} = X$

ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันทั่งถึง นั่นคือ $\alpha \in G(X)$

ดังนั้น $M(X) \subseteq G(X) \subseteq M(X)$ นั่นคือ $M(X) = G(X)$

$\underline{E(X) = G(X)}$

ให้ $\alpha \in E(X)$ ดังนั้น α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้น $\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), ..., \alpha(x_n)\} = X$

ซึ่งมีสมาชิกทั้งหมด n ตัว ทำให้ได้ว่า $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$

$\alpha(x_i) = \alpha(x_j)$ ทุก $i = j$

ทำให้ได้ว่า α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ $\alpha \in G(X)$

ดังนั้น $E(X) \subseteq G(X) \subseteq E(X)$ นั่นคือ $E(X) = G(X)$

ในบทนี้เราจะพิจารณากึ่งกรุปบนฟังก์ชัน $T(X)$, $G(X)$, $M(X)$ และ $E(X)$ ว่าสามารถให้โครงสร้างของริงได้หรือไม่

หมายเหตุ 1_X คือ $1_X : X \to X$ โดยที่ $1_X(x) = x$ ทุก $x \in X$

X_a คือ $X_a : X \to X$ โดยที่ $X_a(x) = a$ ทุก $x \in X$

ทฤษฎีบท 4.3 สำหรับเซต X ไม่ว่างใดๆ $T(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 1$

<u>พิสูจน์</u> $(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีตัวดำเนินการ $+$ บน $T(X)$ ที่ทำให้ $\left(T(X)^0, +, \circ\right)$ เป็นริง

สมมติว่า $|X| \geq 2$ ให้ a, b เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X

จะได้ว่า $X_a + X_b = \beta$ สำหรับบาง $\beta \in T(X)^0$

<u>กรณี $\beta = 0$</u> นั่นคือ $X_a + X_b = 0$

ดังนั้น $X_b \circ X_a + X_b \circ X_b = X_b \circ 0$

$$X_b + X_b = 0$$

ดังนั้น $X_a + X_b = 0 = X_b + X_b$ นั่นคือ $X_a = X_b$

ซึ่ง $a \neq b$ ขัดแย้ง

<u>กรณี $\beta \neq 0$</u> นั่นคือ $X_a + X_b = \beta$ จะได้ว่า

$$X_b \circ X_a + X_b \circ X_b = X_b \circ \alpha$$

$$X_b + X_b = X_b$$

$$X_b + X_b = X_b + 0$$

ดังนั้น $X_b = 0$

$(\Leftarrow)$ ถ้า $|X| = 1$ แล้ว $T(X) = \{1_X\}$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $T(X)$ ให้โครงสร้างของริง

ดังนั้น $T(X)$ ให้โครงสร้างของริงก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 1$ □

ทฤษฎีบท 4.4 สำหรับเซต X ไม่ว่างใดๆ $G(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X| \le 2$

<u>พิสูจน์</u> $(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีตัวดำเนินการ + บน $G(X)$ ที่ทำให้ $\left(G(X)^0, +, \circ\right)$ เป็นริง

สมมติว่า $|X| \ge 3$

ให้ a, b, c เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X ดังนั้น

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \beta$$

สำหรับบาง $\beta \in G(X)^0$

<u>กรณี $\beta = 0$</u> นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = 0$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & a & c & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix} = 0$$

และ $$\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ a & c & b & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} + 1_X = 0$$

จะได้ $\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X = 0 = \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} + 1_X$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix}$ ซึ่งขัดแย้ง

<u>กรณี $\alpha \neq 0$</u> นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \beta$

$$\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & a & c & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

และ

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta v \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ a & b & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix}$$

$$1_X + \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} \circ \alpha = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix}$$

นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix}$

ดังนั้น

$$\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta(a) = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix}(a) = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta(b)$$

เนื่องจาก $\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $a = b$

ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $|X| \leq 2$

$(\Leftarrow)$ ถ้า $|X| \le 2$

<u>กรณี $|X|=1$</u> จะได้ว่า $X=\{a\}$ นั่นคือ $G(X)=\{\{a\}_a\}$

โดยทฤษฎีบท 3.1

เพราะฉะนั้น $G(X)$ ให้โครงสร้างของริง

<u>กรณี $|X|=2$</u> จะได้ว่า $X=\{a,b\}$ โดยที่ $a \neq b$

นั่นคือ $G(X)=\left\{1_X, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right\}$

กำหนดให้ $\varphi:\left(G(X)^0,\cdot\right)\to(\mathbb{Z}_3,\cdot)$ โดย

$$\varphi(0) = \bar{0}$$

$$\varphi(1_X) = \bar{1}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \bar{2}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

และเห็นได้ชัดว่า $G(X)^0$ เป็นกึ่งกรุปสลับที่

ให้ $\alpha,\beta\in G(X)^0$

<u>กรณี 1</u> $\alpha=0$ หรือ $\beta=0$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $\alpha=0$

เพราะฉะนั้น $\varphi(\alpha\circ\beta)=\varphi(0)=\bar{0}=\bar{0}\cdot\varphi(\beta)=\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$

<u>กรณี 2</u> $\alpha \neq 0$ และ $\beta \neq 0$

<u>กรณี 2.1</u> $\alpha = \beta$ ดังนั้น $\alpha \cdot \beta = 1_X$

$$\varphi(\alpha \circ \beta) = \varphi(1_X) = \bar{1}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น}\,\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) = \begin{cases} \bar{1}\cdot\bar{1} & ;\alpha = 1_X \\ \bar{2}\cdot\bar{2} & ;\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$= \bar{1}$$

ดังนั้น $\varphi(\alpha \circ \beta) = \bar{1} = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$

<u>กรณี 2.2</u> $\alpha \neq \beta$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติ $\varphi = 1_X$ และ $\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

เพราะฉะนั้น $\alpha \circ \beta = \beta$ ดังนั้น

$$\varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\beta) = \bar{2} = \bar{1}\cdot\bar{2} = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$$

เพราะฉะนั้น φ เป็นสมสัณฐานจาก $\left(G(X)^0, \circ\right)$ ไปยัง $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$

เนื่องจาก $\mathbb{Z}_3$ เป็นริง โดยทฤษฎีบทที่ 2.13 ทำให้ได้ว่า

$G(X)$ ให้โครงสร้างของริง □

ทฤษฎีบท 4.5 สำหรับเซต X ไม่ว่างใดๆ $M(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 2$

<u>พิสูจน์</u> $(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีตัวดำเนินการ $+$ บน $M(X)$ ที่ทำให้ $\left(M(X)^0, +, \circ\right)$ เป็นริง

สมมติว่า $|X| \geq 3$

ให้ a, b, c เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X ดังนั้น

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \beta$$

สำหรับบาง $\beta \in M(X)^0$

<u>กรณี $\beta = 0$</u> นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & a & c & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X = 0$$

และ

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ a & c & b & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} + 1_X = 0$$

จะได้ $\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X = 0 = \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} + 1_X$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix}$ ซึ่งขัดแย้ง

<u>กรณี $\beta \neq 0$</u> นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \alpha$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \beta \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ a & c & b & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix} = \beta \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} + 1_X = \beta \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} + 1_X \circ \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} = \beta \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix}$$

$$1_X + \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} = \beta \circ \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ c & a & b & x \end{pmatrix}$$

$$\beta \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \beta \circ \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ c & a & b & x \end{pmatrix}$$

เนื่องจาก β เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น $\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ c & a & b & x \end{pmatrix}$ ซึ่งขัดแย้ง

$(\Leftarrow)$ ถ้า $|X| \leq 2$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2 $M(X) = G(X)$

โดยทฤษฎีบท 4.4 $M(X)$ ให้โครงสร้างของริง □

ทฤษฎีบท 4.6 เซต X ไม่ว่างใดๆ $E(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X|\le 2$

<u>พิสูจน์</u> $(\Rightarrow)$ สมมติว่ามีตัวดำเนินการ + บน $E(X)$ ที่ทำให้ $\left(E(X)^0,+,\circ\right)$ เป็นริง

สมมติว่า $|X|\ge 3$

ให้ a,b,c เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันใน X ดังนั้น

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}=\beta$$

สำหรับบาง $\beta\in E(X)^0$

<u>กรณี $\beta=0$</u> นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}=0$

ดังนั้น $$\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & a & c & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix}+1_X=0$$

และ

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ a & c & b & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix}+1_X=0$$

จะได้ $\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X = 0 = \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix} + 1_X$

ดังนั้น $\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & x \\ c & b & x \end{pmatrix}$ ซึ่งขัดแย้ง

<u>กรณี $\beta \neq 0$</u> นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \beta$

$$\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & c & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & x \\ b & a & c & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & c & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + 1_X = \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} \circ 1_X = \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$\begin{pmatrix} a & b & x \\ a & b & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ c & a & b & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$1_X + \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ c & a & b & x \end{pmatrix} \circ \beta$$

นั่นคือ $\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} \circ \beta = \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ c & a & b & x \end{pmatrix} \circ \beta$

เนื่องจาก α เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ดังนั้น $\begin{pmatrix} a & c & x \\ c & a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & x \\ c & a & b & x \end{pmatrix}$ ซึ่งขัดแย้ง

$(\Leftarrow)$ ถ้า $|X| \leq 2$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2 $E(X) = G(X)$

โดยทฤษฎีบท 4.4 $E(X)$ ให้โครงสร้างของริง $\square$

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ในปัญหาพิเศษนี้ เราได้ทำการศึกษาว่ากึ่งกรุปใดบ้างที่ให้โครงสร้างของริง ซึ่งสามารถสรุปผลได้ดังนี้

กึ่งกรุปบนจำนวนจริง 13 รูปแบบ

1. $\mathbb{R}$ ให้โครงสร้างของริง
2. $\{0\}$ ให้โครงสร้างของริง
3. $\{1\}$ ให้โครงสร้างของริง
4. (a,∞) โดย $a \ge 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
5. $[a,\infty)$ โดย $a \ge 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
6. $(0,b)$ โดย $0 < b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
7. $(0,b]$ โดย $0 < b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
8. $[0,b)$ โดย $0 < b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
9. $[0,b]$ โดย $0 < b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
10. (a,b) โดย $-1 \le a < 0 < a^2 \le b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
11. $(a,b]$ โดย $-1 \le a < 0 < a^2 \le b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
12. $[a,b)$ โดย $-1 < a < 0 < a^2 \le b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง
13. $[a,b]$ โดย $-1 \le a < 0 < a^2 \le b \le 1$ ไม่ให้โครงสร้างของริง

สำหรับกึ่งกรุปบนฟังก์ชัน $T(X)$, $G(X)$, $M(X)$ และ $E(X)$ ซึ่งเป็นกึ่งกรุปภายใต้ฟังก์ชันประกอบ ได้ผลดังนี้

$T(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 1$

$G(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 2$

$M(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 2$

$E(X)$ ให้โครงสร้างของริง ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 2$

เอกสารอ้างอิง

[1] J.M Howie, *"Fundamentals of Semigroup Theory"*, Oxford University Press, New York, 1995.

[2] K.R. Pearson, *"Interval Semirings on R_1 with Ordinary Multiplication"*, J Aust Math Soc **6**, 273-88, 1966.

[3] Y. Kemprasit, Ng. Danpattanamongkon, K. Savettaseranee, *"Some Results on Semigroup Admitting Ring Structure"*, ScienceAsia36, 85-88, 2010.

[4] พัฒนี อุดมกะวานิช, *"หลักคณิตศาสตร์"*, พิมพ์ครั้งที่2, กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555.

[5] พันธนี พงศ์สัมพันธ์, *"พีชคณิตนามธรรม"*, กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2552.

[6] ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์, *"ทฤษฎีกึ่งกรุปเชิงพีชคณิต"*, กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์, 2545.

[7] วัชรี กาญจน์กีรติ, *"พีชคณิตนามธรรม"*, กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2551.

[8] โสภาพรรณ ศรีไชยรัตน์, *"เซมิกรุปของการแปลงแบบทั่วไปที่ให้โครงสร้างของริง"*, วิทยานิพนธ์ (มหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.