

ผลเฉลยของสมการ ไคลน์-กอร์ดอน ในบ่อศักย์สี่เหลี่ยมจัตุรัส
THE SOLUTION OF KLEIN GORDON EQUATION WITH FINITE
SQUARE WELL POTENTIAL

นายคุณวุฒิ ชูบุญโง

โครงการนิพนธ์วิทยานิพนธ์ปริญญาตรีของภาควิชาคณิตศาสตร์ วิทยาลัยวิทยาศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

ผลเฉลยของสมการไคลน์กอร์ดอน ในบ่อศักย์สี่เหลี่ยมจำกัด
THE SOLUTION OF KLEIN GORDON EQUATION WITH FINITE
SQUARE WELL POTENTIAL

นายสุภณัฐ สุปัญญา

โครงการพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาฟิสิกส์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2556

**THE SOLUTION OF KLEIN GORDON EQUATION WITH FINITE
SQUARE WELL POTENTIAL**

MR SUPPANAT SUPANYO

**A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIES PHYSICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2556**

หัวข้อโครงการพิเศษ ผลเฉลยของสมการ ไคลน์กอร์ดอน ในบ่อศักย์สี่ก้ากััด

THE SOLUTION OF KLEIN GORDON EQUATION WITH FINITE
SQUARE WELL POTENTIAL

ชื่อนักศึกษา นายสุภณัฐ สุปัญญา

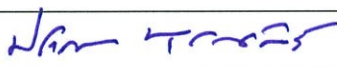
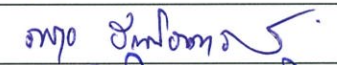

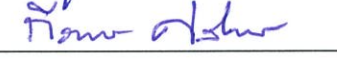
ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิชา ฟิสิกส์

ปี การศึกษา 2556

อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ กิรยุทธ ศรีนวลจันทร์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้
โครงการพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ดร.ประธาน	บุรณศิริ	
อ.ภารุจ	บัณฑิตดาวิทย์	
อ.สุรชาติ	กมลฉิลก	
อ.กิรยุทธ	ศรีนวลจันทร์	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

หัวข้อโครงการพิเศษ	ผลเฉลยของสมการ ไคลน์กอร์ดอน ในบ่อศักย์ลึกจำกัด
ชื่อนักศึกษา	นายสุภณัฐ สุปัญญา
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชา	ฟิสิกส์
ปีการศึกษา	2556
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์กฤษฎ์ ศรีนวลจันทร์

บทคัดย่อ

ในโปรเจกนี้ เราได้ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ในบ่อศักย์ลึกจำกัดซึ่งเราจะเปรียบเทียบ พลังงานของอนุภาคที่ถูกกักขังในบ่อศักย์ลึกจำกัด และฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคที่ถูกกักขังในบ่อศักย์ลึกจำกัด ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ซึ่งเราพบว่าในเงื่อนไขที่ พลังงานศักย์ของบ่อศักย์มีค่าอยู่ในช่วง $0.1m_0c^2 < V \leq 2m_0c^2$ จำนวนสถานะของอนุภาคของไคลน์กอร์ดอน จะมีมากกว่าจำนวนสถานะของอนุภาคของชเรอดิงเงอร์ ซึ่งจำนวนสถานะที่เพิ่มขึ้นนี้เกิดขึ้นจากผลกระทบจากทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

คำสำคัญ: สมการชเรอดิงเงอร์, สมการไคลน์กอร์ดอน, ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

Title	The solution of Klein Gordon equation with finite square well potential
Students	Mr. Suppanat Supanyo
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Physics
Academic Year	2013
Advisor	Keerayoot Srinuanjan

Abstract

In this special project. We draw a comparison between a solution of Schrodinger equation and Klein Gordon equation in finite square well. Which we will comparison between energy of particle in square well of Schrodinger equation and KleinGordon equation in finite square well and wave function of particle in finite square well of Schrodinger and Klein Gordon equation. We find in condition of $0.1m_0c^2 < V \leq 2m_0c^2$ (When V is potential energy) Klein Gordon particle have state more than the state of Schrodinger particle which this is an effect of special relativity in high energy potential.

Keyword: Schrodinger Equation, Klein Gordon Equation , Special Relativity

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ อาจารย์กฤษฎ์ ศรีนวลจันทร์ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่คอยช่วยเหลือให้คำแนะนำต่างๆ ทั้งกระบวนการคิดในเรื่องราวของวิชาฟิสิกส์ ให้คิดอย่างมีระเบียบแบบแผน ให้แก้ปัญหาได้อย่างตรงจุด และยังให้ความรู้ความเข้าใจให้ลึกซึ้งมากยิ่งขึ้นในวิชาฟิสิกส์ ทั้งความรู้ในวิชาที่อาจารย์ได้สอนในห้องเรียน และวิชาที่อาจารย์ไม่ได้สอน ซึ่งนำไปก้าวเดินไปหาเป้าหมายได้อย่างไม่ออกนอกเส้นทาง และขอขอบคุณอาจารย์ที่ช่วยอธิบายเรื่องราวต่างๆ ในวิชาฟิสิกส์ ทำให้โปรเจกต์เล่มนี้สำเร็จออกมาได้ดีที่สุด

และขอขอบคุณคณะกรรมการสอบโปรเจกต์ คร.ประธาน บุรณศิริ, อาจารย์สุรชาติ กมลฉีก ที่รับฟัง ดิฉัน และแก้ไขข้อบกพร่องให้โครงการพิเศษเล่มนี้ออกมาอย่างดีที่สุด ขอขอบคุณ อาจารย์ภารุจ บัณฑิตาคาวิทย์ ที่ให้คำแนะนำในวิชาคณิตศาสตร์ควอนตัมและทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ให้มีความเข้าใจในแก่นแท้ของวิชาได้เป็นอย่างดี

และสุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณผู้ที่สำคัญที่สุดในชีวิตของผม ได้แก่ บิดาและมารดา ที่คอยเลี้ยงดู ให้ความอบอุ่น ให้กำลังใจเสมอมา ไม่ว่าจะเจออุปสรรคต่างๆ มากมาย ก็ยังคอยยื่นเคียงข้างเสมอมา

ศุภณัฐ สุปัญญา

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VII
สารบัญรูป	X
ตารางสัญลักษณ์ค่าพารามิเตอร์	XII
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	1
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	2
1.4 ขั้นตอนในการวิจัยและวิธีดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 กำเนิดกลศาสตร์ควอนตัม	3
2.2 ไฮโดรเจนอะตอมของบอร์	3
2.3 คลื่นสสารของเดอบรอยล์	4
2.4 สมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์	5
2.5 สมการไคลน์กอร์ดอน	5
2.6 การประมาณสมการไคลน์กอร์ดอน เมื่ออนุภาคมีพลังงานต่ำ	7
2.7 สมการไคลน์กอร์ดอนที่มีอันตรกิริยากับพลังงานศักย์	9
2.8 สมการความต่อเนื่อง และการนอร์มอลไลซ์ ชเรอดิงเงอร์เวฟฟังก์ชัน	9
2.9 สมการความต่อเนื่อง และการนอร์มอลไลซ์ ไคลน์กอร์ดอนเวฟฟังก์ชัน	11
2.10 การทำนายประจุของโบซอน ที่มีสปินเป็นศูนย์	12
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย	14

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
3.1 เปรียบเทียบความแตกต่างของสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอนแบบไม่ขึ้นกับเวลา	14
3.2 หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอนจากเงื่อนไขขอบเขต	15
3.2.1 แก้สมการชเรอดิงเงอร์ในบ่อศักย์ลึกจำกัด	16
3.2.1.1 การนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่นของชเรอดิงเงอร์	19
3.2.2 แก้สมการไคลน์กอร์ดอนในบ่อศักย์ลึกจำกัด	21
3.2.2.1 การนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่นของไคลน์กอร์ดอน	24
3.3 เปรียบเทียบความแตกต่างของผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอน	26
3.4 กำหนดเงื่อนไขความกว้างและลึกของบ่อศักย์	27
3.5 เขียนโปรแกรม MATLAB หาผลเฉลยจากกราฟ	28
บทที่ 4 ผลการทดลองและอภิปรายผล	30
4.1 บ่อศักย์ กว้าง 1A ลึก 27 eV	30
4.2 บ่อศักย์ลึก $V = 884,145.6965eV$, $a \approx 1fm$	33
4.3 บ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$	35
4.4 บ่อศักย์ลึก $V = m_0c^2$	37
4.5 บ่อศักย์ลึก $V = 1.5m_0c^2$	39
4.6 บ่อศักย์ลึก $V = 2m_0c^2$	42
4.7 บันทึกความแตกต่างระหว่างระดับพลังงานที่หามาได้จากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	45
4.8 บันทึกความแตกต่างระหว่างระดับพลังงานที่หามาได้จากสมการไคลน์กอร์ดอนที่ความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	46
4.9 กราฟแสดงฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ในบ่อศักย์ที่มีเงื่อนไข $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c$ ที่สถานะต่างๆ	49
4.10 กราฟแสดงความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (ฟังก์ชันคลื่นกำลัง 2) ที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอนในบ่อศักย์ที่มีเงื่อนไข $V = 2m_0c^2$	

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
$a = 0.5h/m_0c$ ที่สถานะต่างๆ	52
บทที่ 5 สรุปผลการทดลอง	55
เอกสารอ้างอิง	56

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1.1 ตารางขั้นตอนการวิจัยและวิธีการดำเนินการ	2
3.1 ตารางเปรียบเทียบผลเฉลยต่างๆของสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	26
4.1.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก 27eV กว้าง 1 อังสตรอม ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	31
4.2.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 884,145.6965\text{eV}$ และกว้าง $a \approx 1\text{fm}$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และ สมการไคลน์กอร์ดอน	34
4.3.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	36
4.3.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์ และสมการไคลน์กอร์ดอน	36
4.3.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	36
4.4.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	38
4.4.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	38
4.4.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	38
4.5.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 1.5m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน	40

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.5.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ ลึก $V = 1.5m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการ ไคลน์กอร์ดอน	40
4.5.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ ลึก $V = 1.5m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการ ไคลน์กอร์ดอน	41
4.6.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ ลึก $V = 2m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการ ไคลน์กอร์ดอน	43
4.6.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ ลึก $V = 2m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการ ไคลน์กอร์ดอน	43
4.6.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ ลึก $V = 2m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการ ไคลน์กอร์ดอน	44
4.7.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่ มีความกว้าง $a = 0.5h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	45
4.7.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่ มีความกว้าง $a = h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	45
4.7.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่ มีความกว้าง $a = 2h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	46
4.8.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่ มีความกว้าง $a = 0.5h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	46
4.8.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่	

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
มีความกว้าง $a = h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	47
4.8.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคไพออนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่ มีความกว้าง $a = 2h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$	47

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
3.2.1 บ่อศักย์ลึกจำกัด	16
4.1.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47),(48) และ (51)	30
4.1.2 จุดตัดแสดงค่าไอเกนพลังงานที่1	30
4.1.3 จุดตัดแสดงค่าไอเกนพลังงานที่2	31
4.2.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47),(48) และ (51)ที่ $V = 884,145.6965eV, a \approx 1fm$	33
4.2.2 ภาพขยายแสดงจุดตัดค่าไอเกนพลังงาน ที่ $V = 884,145.6965eV, a \approx 1fm$	33
4.3.1 กราฟแสดงค่าไอเกนซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(48)ที่เงื่อนไข $V = 0.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	35
4.3.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(51)ที่เงื่อนไข $V = 0.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	35
4.4.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(48)ที่เงื่อนไข $V = m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	37
4.4.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(51)ที่เงื่อนไข $V = m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	37
4.5.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(48)ที่เงื่อนไข $V = 1.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	39
4.5.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(51)ที่เงื่อนไข $V = 1.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	40
4.6.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(48)ที่เงื่อนไข $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	42
4.6.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่(47)และ(51)ที่เงื่อนไข $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$	42
4.9.1 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลน์กอร์ดอนที่ สถานะที่1	49
4.9.2 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลน์กอร์ดอนที่ สถานะที่2	49
4.9.3 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลน์กอร์ดอนที่	

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
สถานะที่3	50
4.9.4 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่4	50
4.9.5 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่5	51
4.9.6 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่6	51
4.10.1 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่1	52
4.10.2 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่2	52
4.10.3 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่3	53
4.10.4 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่4	53
4.10.5 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่5	54
4.10.6 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และโคลนน์กอร์คตอนที่สถานะที่6	54

ตารางสัญลักษณ์ค่าพารามิเตอร์

ชื่อตัวแปร	สัญลักษณ์	ความหมาย
Planck constant	h	ค่าคงที่ของพลังค์ มีค่า $6.62606876 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Reduce Planck constant	\hbar	$\hbar = h/2\pi$
Nu	ν	ความถี่
Lambda	λ	ความยาวคลื่น
Wave number	k	เลขคลื่น
Momentum	p	โมเมนตัม
Angular momentum	L	โมเมนตัมเชิงมุม
Psi	Ψ	ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาค
Classical total energy	E'	พลังงานรวมแบบคลาสสิกัล
Potential energy	V	พลังงานศักย์
Relativistic total energy	E	พลังงานรวมเชิงสัมพัทธภาพ
gamma	γ	$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$
rest mass	m_0	มวลนิ่งของอนุภาค
Kinetic energy	K	พลังงานจลน์
Electric charge	e	ประจุ มีค่า $1.602176 \times 10^{-19} \text{ C}$

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

หลังจากที่ นักวิทยาศาสตร์ชาวออสเตรียน นามว่า ชเรอดิงเงอร์ (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrodinger) ได้ค้นพบสมการคลื่นของอนุภาค ในปี ค.ศ.1925 ซึ่งสมการนี้ในภายหลัง ได้ถูกตั้งชื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ที่ค้นพบว่า “Schrodinger wave equation” หลังจากการค้นพบสมการนี้ ก็เรียกได้ว่าการเข้าสู่ยุคของกลศาสตร์ควอนตัมยุคใหม่ ซึ่งมีแกนหลักของทฤษฎีคือสมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์

แต่ทว่าสมการของ ชเรอดิงเงอร์ ยังเป็นสมการที่มาจากกฎการอนุรักษ์พลังงานในรูปแบบของ Classical Mechanics ซึ่งยังไม่ได้เป็นสมการที่รวมเอาทฤษฎีสัมพัทธภาพเข้ามาเกี่ยวกับ ต่อมาไคลน์-กอร์ดอน ได้พัฒนาสมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์ต่อ โดยได้ใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษมาใช้ร่วมด้วย จึงได้ออกมาเป็นสมการ ไคลน์กอร์ดอน ดังนี้

$$-\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + m_0^2 c^4 \Psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t)$$

โดยผลเฉลยของพลังงานที่ได้ออกมาจากสมการ ไคลน์กอร์ดอน นั้นจะได้ออกมาแตกต่างจากสมการชเรอดิงเงอร์ โดยสมการไคลน์กอร์ดอน จะให้ผลของพลังงานที่เป็น relativistic total energy ซึ่งเป็นพลังงานที่ได้รวมเอาพลังงานนิ่งของอนุภาคเข้ามาด้วย ซึ่งพลังงานรวมที่ได้ออกมาจากผลเฉลยของสมการของชเรอดิงเงอร์นั้น เป็นพลังงานรวมที่ไม่ได้รวมเอาพลังงานที่เกิดจากมวลนิ่งของอนุภาคเข้ามาด้วย หรือก็คือพลังงานที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์นั้นเป็นพลังงานที่อนุภาคถูกยึดเหนี่ยวอยู่ในสถานะหนึ่งๆ (binding energy)

ในจุดนี้จะเป็นจุดที่หน้าสนใจนั่นก็เพราะสมการ ไคลน์กอร์ดอน จะให้ผลเฉลยของพลังงานซึ่งมีโครงสร้างที่แตกต่างไปจากสมการของชเรอดิงเงอร์เป็นอย่างมาก ซึ่งนี่เกิดจากการที่สมการชเรอดิงเงอร์ ได้ใช้พลังงานจลน์ในรูปแบบของคลาสสิก ซึ่งถ้าเราทำการปรับสมการชเรอดิงเงอร์ ให้ใช้พลังงานจลน์ในรูปแบบของสัมพัทธภาพ สมการที่เราได้ออกมานั้นควรมีค่าเทียบเท่ากับสมการ ไคลน์กอร์ดอน ซึ่งเราจะกล่าวอย่างละเอียดกันอีกทีในบทต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

พัฒนาสมการชเรอดิงเงอร์ โดยนำทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษรวมเข้าไป ซึ่งให้ได้ผลเฉลยของพลังงานให้อยู่ในรูปแบบของ binding energy เช่นเดียวกับกับสมการชเรอดิงเงอร์ แต่ผลเฉลยนั้นต้องอยู่ในรูปของ relativistic binding และทั้งตัวสมการและผลเฉลยของสมการควรมีค่าประมาณ

และลดรูปได้เหลือเพียงรูปแบบเดิมของสมการชเรอดิงเงอร์ เมื่อระดับพลังงานของอนุภาคมีค่าน้อย
ประมาณ $E \ll mc^2$

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ทำการศึกษาเฉพาะกรณีของผลเฉลยของสมการ ในบ่อศักย์แบบสี่เหลี่ยมแบบลึกจำกัดเพียง
เท่านั้น โดยผลเฉลยจากสมการที่เราพัฒนาสมการของชเรอดิงเงอร์ จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับ
สมการชเรอดิงเงอร์ในรูปแบบปกติและสมการ โคลน์กอร์คอง โดยผลเฉลยที่แก้ออกมาจากสมการ
ที่นำมาเปรียบเทียบกับจะแบ่งออกเป็น 3 ส่วน

1. ผลเฉลยของ ฟังก์ชันคลื่น
2. ผลเฉลยของพลังงาน
3. หาผลเฉลยของ ฟังก์ชันคลื่น และ ไอเจนพลังงาน ด้วยวิธีการพล็อตกราฟจากโปรแกรม
MATLAB

1.4 ขั้นตอนในการวิจัยและวิธีการดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 1 มกราคม-เมษายน 2556 พัฒนาสมการชเรอดิงเงอร์

ขั้นตอนที่ 2 พฤษภาคม-มิถุนายน 2556 ตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยของสมการ

ขั้นตอนที่ 3 กรกฎาคม-สิงหาคม 2556 ทำรูปเล่มบทที่ 1, 2

ขั้นตอนที่ 4 กันยายน-ตุลาคม 2556 ทำรูปเล่มให้สมบูรณ์ และทำกราฟผลเฉลยของสมการ

	มกราคม-เมษายน	พฤษภาคม-มิถุนายน	กรกฎาคม-สิงหาคม	กันยายน-ตุลาคม
ขั้นตอนที่ 1				
ขั้นตอนที่ 2				
ขั้นตอนที่ 3				
ขั้นตอนที่ 4				

ตารางที่ 1.1 ตารางขั้นตอนการดำเนินงานและขั้นตอนในการวิจัย

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สามารถอธิบายพฤติกรรมของ relativistic particle ในบ่อศักย์ลึกจำกัดได้ และสามารถหา
ผลเฉลยของ พลังงาน และ ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคในบ่อศักย์ลึกจำกัดได้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 กำเนิดกลศาสตร์ควอนตัม

นับตั้งแต่ที่ พลังค์ (Max Planck ,1858-1947) ได้แก้ปัญหาคงของการแผ่รังสีของวัตถุดำได้สำเร็จในปี 1901 โดยพลังค์ได้อธิบายว่าพลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่วัตถุดำแผ่ออกมา มีค่าเป็นก้อนพลังงานที่ไม่ต่อเนื่อง(เป็นควอนตัม)

$$E = nh\nu \dots\dots\dots(1)$$

โดยที่ E คือ พลังงาน J

h คือ ค่าคงที่ของ Planck มีค่า $6.62606876 \times 10^{-34} J.s$

ν คือ ความถี่ของออสซิลเลเตอร์

นับตั้งต่อนั้นก็ถือว่าโลกของเราได้ก้าวเข้าสู่ยุคของกลศาสตร์ควอนตัม แต่ในเวลานั้นพลังค์เองก็ไม่แน่ใจนักเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่เขาได้มาของควอนตัมของพลังงานนั้นนัก ซึ่งเขาเองก็ยังไม่เชื่อด้วยซ้ำไปว่าพลังงานจะมีความไม่ต่อเนื่อง จนกระทั่งในปี 1905 นักฟิสิกส์หนุ่มวัย 25 ปี นามว่า ไอน์สไตน์ (Albert Einstein ,1879-1955) ได้ตีพิมพ์ผลงานเกี่ยวกับ ปรัชญาการณโฟโตอิเล็กทริก โดยมองว่าแสงมีคุณสมบัติเป็นอนุภาค เรียกว่า “โฟตอน” โดยแต่ละอนุภาคของแสงจะประกอบด้วยพลังงานเป็นควอนตัม $E = h\nu$ เมื่อโฟตอนวิ่งเข้าไปชนกับอิเล็กตรอนในโลหะที่มีพลังงานยึดเหนี่ยว W จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาด้วยพลังงานจลน์ดังสมการนี้

$$KE_{\max} = h\nu - W \dots\dots\dots(2)$$

โดยที่

KE_{\max} คือ พลังงานจลน์ที่สูงที่สุดที่อิเล็กตรอนหลุดออกมา

W คือ เวิร์คฟังก์ชันของโลหะ

จากปรัชญาการณนี้ทำให้บอกได้อย่างชัดเจนว่าแสงมีคุณสมบัติของอนุภาคอยู่นั่นเอง และจากทฤษฎีของไอน์สไตน์ก็เป็นเครื่องยืนยันถึงความถูกต้องของแนวคิดของพลังค์ได้อย่างชัดเจน

2.2 ไฮโดรเจนอะตอมของบอร์

ต่อมาในปี 1913 บอร์ (Niels Bohr ,1885-1962) นักฟิสิกส์ชาวเดนมาร์ก ได้เสนอข้อสมมติฐานที่นำเอาหลักการของควอนตัมพลังงานมาใช้ธิบายลักษณะของโครงสร้างอะตอมของไฮโดรเจน (ในขณะนั้นแบบจำลองอะตอมของรัทเทอร์ฟอร์ดไม่สามารถธิบายได้ว่าทำไมอิเล็ก-

ตรอนที่โคจรรอบนิวเคลียสเป็นวงกลมถึงไม่สูญเสียพลังงาน เนื่องจากอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วตามทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าของ แมกซ์เวลล์ แล้วจะต้องแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา โดยสมมติฐาน 3 ข้อของบอร์มีดังนี้

1. อิเล็กตรอนในอะตอมจะโคจรรอบนิวเคลียสในลักษณะของวงกลมภายใต้แรงดึงดูด แบบคูลอมบ์ ระหว่างประจุลบของอิเล็กตรอนและประจุบวกของนิวเคลียส
 2. อิเล็กตรอนจะมีวงโคจรที่เสถียรได้เฉพาะบางวงโคจรเท่านั้น โดยวงโคจรนั้นอิเล็กตรอนจะมีค่าโมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับ $L = n\hbar$ ซึ่งวงโคจรดังกล่าว อิเล็กตรอนจะไม่มีการแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา
 3. จากการที่อิเล็กตรอนไม่แผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาในวงโคจรดังกล่าว ดังนั้นพลังงานของอิเล็กตรอนในวงโคจรนั้นจะต้องมีค่าคงที่
- แบบจำลองอะตอมของบอร์นั้นประสบความสำเร็จเป็นอย่างมาก แต่ก็ยังมีปัญหาอยู่หลายประการ เช่น สามารถแก้ปัญหาได้เฉพาะอะตอมที่มีอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียวเท่านั้น และ ปัญหาของสมมติฐานของ $L = n\hbar$ ซึ่งปัญหาเหล่านี้ก็ติดอยู่กับนักฟิสิกส์ตลอดทศวรรษ

2.3 คลื่นสสารของเดอบรอยด์

ในปี 1924 เดอบรอยด์ (Louis Victor de Broglie ,1892-1987) ได้เสนอหลักการของ Wave Particle Duality ในวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกของเขา ซึ่งมีเนื้อความว่า ถ้าหากแสงที่เป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั้น มีคุณสมบัติของอนุภาคที่เราเรียกว่าโฟตอนอยู่ด้วย ดังนั้น อนุภาคก็หน้าจะมีคุณสมบัติของคลื่นเช่นเดียวกัน

$$\lambda = \frac{h}{p} \dots\dots\dots(3)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \dots\dots\dots(4)$$

โดยที่

λ คือ ความยาวคลื่นของอนุภาค

p คือ โมเมนตัมของอนุภาค

\hbar คือ ค่าคงที่ของพลังค์ $\hbar = h/2\pi$

k คือ เลขคลื่น $k = 2\pi/\lambda$

ซึ่งสมการนี้แสดงให้เห็นว่าอนุภาคที่มีโมเมนตัม จะมีความยาวคลื่นของอะโรบางอย่างอยู่ดังสมการด้านบน เดอบรอยด์ยังได้ใช้หลักการนี้ในการพิสูจน์ที่มาของสมมติฐานของบอร์ $L = n\hbar$ ได้อย่างงดงามโดยกำหนดให้อิเล็กตรอน โคจรเป็นคลื่นนิ่งรอบนิวเคลียสทำให้อิเล็กตรอนไม่มีการสูญเสียพลังงาน

เมื่อถึงจุดนี้กลศาสตร์ควอนตัมได้เดินทางมาถึงจุดที่เราเรียกว่าจุดสิ้นสุดของ กลศาสตร์ควอนตัมยุคเก่า ซึ่งทฤษฎีในช่วงนี้ยังขาดสมการหลักๆ ที่เป็นแกนกลางของตัวทฤษฎี ในการแก้ปัญหาพฤติกรรมของอนุภาค

2.4 สมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์ (Schrodinger Equation)

ชเรอดิงเงอร์ (Erwin Schrodinger ,1887-1961) นักฟิสิกส์ชาวออสเตรีย ได้ตระหนักว่าหากเราจะเข้าใจความเป็นคลื่นของอนุภาคได้อย่างลึกซึ้ง มันเป็นเรื่องที่จำเป็นอย่างยิ่งที่เราจะต้องมีสมการคลื่น ซึ่งนั่นเป็นเหตุผลให้ชเรอดิงเงอร์ได้สร้างสมการคลื่นของอนุภาคขึ้นมา

โดยทั่วไปแล้วเราจะพิสูจน์สมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์ ดังนี้ เริ่มจากกฎการอนุรักษ์พลังงาน

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r) \dots\dots\dots(5)$$

และนำ Postulate Operator Momentum และ energy แทนลงในกฎการอนุรักษ์พลังงานสมการ(5)

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}, E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \dots\dots\dots(6)$$

จะได้

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \dots\dots\dots(7)$$

นำ ฟังก์ชันคลื่น $\Psi(\vec{r},t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$ ถูกรวมเข้าทางขวาตลอดสมการที่(7) เราจะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นสมการการที่มีชื่อว่า “สมการชเรอดิงเงอร์แบบขึ้นกับเวลา” (Time dependent Schrodinger Equation)

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + V(r)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \dots\dots\dots(8)$$

สมการชเรอดิงเงอร์ นั้นเป็นสมการที่ยังไม่ได้รวมเอาทฤษฎีสัมพัทธภาพเข้าไปด้วย และ E ที่อยู่ในฟังก์ชันคลื่น ของอนุภาคเป็นเพียงพลังงานรวมในแบบของกลศาสตร์แบบดั้งเดิมของนิวตัน(Classical Mechanics) และเนื่องจากที่เรายังไม่ได้นำทฤษฎีสัมพัทธภาพมารวมเข้าไปในสมการชเรอดิงเงอร์ เราจึงยังไม่สามารถบอกได้ว่ามวลที่ปรากฏอยู่ในสมการชเรอดิงเงอร์นั้นเป็น มวลนิ่ง หรือมวลเชิงสัมพัทธภาพ

2.5 สมการไคลน์กอร์ดอน (Klein Gordon Equation)

ต่อมาหลังจากที่ ชเรอดิงเงอร์ค้นพบสมการคลื่นของเขา ออสการ์ ไคลน์ (Oska Klein) และ วอลเตอร์ กอร์ดอน(Walter Gordon) ได้พัฒนาสมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์ต่อโดยทำการรวมทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เข้าไปในสมการด้วย ซึ่งเหตุผลที่ต้องทำแบบนี้เป็นเพราะว่า เมื่ออนุภาคมีพลังงานที่

สูงมากสมการชเรอดิงเงอร์จะทำนายผลที่คลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง เนื่องจาก ผลกระทบที่เกิดจากทฤษฎีสัมพัทธภาพ จึงเป็นที่จำเป็นในการรวมเอาทฤษฎีสัมพัทธภาพกับสมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์เข้าไว้ด้วยกัน (และในภายหลังเราได้รู้ว่าสมการไคลน์กอร์ดอนเป็นสมการที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของอนุภาคที่มีสปินเป็นศูนย์)

โดยเราจะเริ่มต้นจาก พลังงานรวมในกลศาสตร์สัมพัทธภาพ (Relativistic total energy) ซึ่งเป็นพลังงานที่รวมพลังงานจลน์กับพลังงานนิ่งของอนุภาคเข้าไว้ด้วยกันตามความสัมพันธ์ของสมการความสมมูลของมวลสารและพลังงาน

$$E = \gamma m_0 c^2 \dots\dots\dots(9)$$

โดยที่

E คือ พลังงานรวมเชิงสัมพัทธภาพ (relativistic total energy)

m_0 คือ มวลนิ่งของอนุภาค

c คือ ความเร็วแสง

γ คือ แกมมา มีค่าเท่ากับ $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

โดยเราสามารถที่จะพิสูจน์สมการที่(9)ว่ามันคือผลรวมของพลังงานจลน์กับพลังงานนิ่งได้ดังนี้ โดยใช้ ออนุกรมเทย์เลอร์ กระจายเทอมของ γ ออกมาจะได้

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

$$E \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2 + \dots \dots\dots(10)$$

ดังนั้นเราจึงบอกได้ว่า $\gamma m_0 c^2$ คือเทอมของพลังงานจลน์ที่รวมเข้ากับพลังงานนิ่ง เพราะเมื่อเราประมาณให้ความเร็วของอนุภาคมีค่าต่ำๆจะทำให้สมการประมาณค่าลงมาได้เหลือ พลังงานจลน์ในรูปแบบของกลศาสตร์นิวตัน บวกอยู่กับเทอมของพลังงานนิ่ง

จากความสัมพันธ์ของสมการที่(9)และ(10)ให้เราสามารถหาพลังงานจลน์ในแบบสัมพัทธภาพได้

$$E = \gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2$$

ดังนั้น

$$K = E - m_0 c^2 \dots\dots\dots(11)$$

และต่อไปเราจะมาดูอีกรูปแบบหนึ่งของ พลังงานรวมเชิงสัมพัทธภาพ

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4$$

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \dots\dots\dots(12)$$

ซึ่งสมการที่(12)คืออีกรูปแบบหนึ่งของ พลังงานรวมเชิงสัมพัทธภาพ (relativistic total energy) ซึ่งจากสมการนี้เมื่อเราแทน postulate ของ โมเมนตัมและพลังงานลงไปจะได้

$$\sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m_0^2c^4}\Psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t)$$

เราพบว่าเราจะได้สมการที่ไม่ได้มีลักษณะที่เป็นสมการคลื่น แต่เมื่อเราเปลี่ยนสมการตั้งต้นใหม่โดยเริ่มจาก

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \dots\dots\dots(13)$$

เมื่อแทน postulate โมเมนตัมและพลังงานลงไปจะได้ออกมาเป็น สมการที่เราเรียกว่า สมการไคลน์ กอร์ดอน (Klein Gordon Equation)

$$-\hbar^2c^2\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + m_0^2c^4\Psi(\vec{r},t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r},t) \dots\dots\dots(14)$$

ถ้าเราให้ m_0 ของอนุภาคเป็น 0 เราจะได้สมการคลื่นที่เหมือนกับสมการคลื่นที่ได้ออกมาจากสมการ

$$\text{แมกซ์เวลล์ออกมา} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r},t) = \nabla^2\Psi(\vec{r},t)$$

2.6 การประมาณสมการ ไคลน์กอร์ดอน เมื่ออนุภาคมีพลังงานต่ำๆ

ต่อไปเราจะทำการพิสูจน์ว่าจะเกิดอะไรขึ้นกับสมการ ไคลน์กอร์ดอนเมื่ออนุภาคมีพลังงานที่ต่ำลงมากๆ สิ่งที่เราพอจะคาดเดาได้นั้นก็คือถ้าสมการคลื่นของอนุภาคนั้นมีพลังงานที่ต่ำๆ สมการไคลน์กอร์ดอน ควรจะต้องถูกลดรูปลงมา ได้เป็นสมการชเรอดิงเงอร์ เปรียบเสมือน ที่ พลังงานรวมเชิงสัมพัทธภาพ เมื่อมีความเร็วต่ำๆก็จะได้ออกมาเป็นพลังงานจลย์ในรูปแบบของ กลศาสตร์นิวตันบวกอยู่กับพลังงานนิ่ง

โดยในหัวข้อนี้เราจะเริ่มจากหาผลเฉลยที่ได้จากสมการไคลน์กอร์ดอนก่อน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันคลื่นเป็นคลื่นที่มีความถี่เดียว

$$\Psi(x,t) = \Psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \dots\dots\dots(15)$$

หาผลเฉลยในส่วนของ ฟังก์ชันพิกัดโดยแทนสมการที่(15) ลงไปในสมการที่(14)

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \frac{(E^2 - m_0^2c^4)}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

เมื่อ

$$k^2 = \frac{(E^2 - m_0^2c^4)}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2}$$

ดังนั้น

$$\Psi(x) = Ae^{\frac{ipx}{\hbar}} + Be^{-\frac{ipx}{\hbar}} \dots\dots\dots(16)$$

ซึ่งถ้าเรากำหนดให้เป็นคลื่นที่ คลื่นที่ไปทางขวา ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นจะต้องมีค่าเป็น 0 ที่ตำแหน่งติดลบมากๆ ดังนั้นจึงทำให้ $B = 0$

$$\Psi(x,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \dots\dots\dots(17)$$

สังเกตว่า E ในฟังก์ชันคลื่นที่ได้จากสมการ ไคลน์กอร์ดอน เป็น Relativistic total energy ที่รวมพลังงานนิ่งของอนุภาคเข้าไว้ด้วย ซึ่งแตกต่างจาก E ในสมการชเรอดิงเงอร์ จากนั้น

$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$E \approx \frac{p^2}{2m} + m_0 c^2$$

$$\Psi(x,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - \frac{p^2 t}{2m})} \cdot e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} \dots\dots\dots(18)$$

เราจะพบว่า $Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - \frac{p^2 t}{2m})}$ เป็นฟังก์ชันคลื่นที่ไม่ได้รวมเอาทฤษฎีสัมพัทธภาพเข้าไว้ (สังเกตได้จากเทอมพลังงานที่เป็นพลังงานจลย์ในแบบ กลศาสตร์นิวตัน) หรือก็คือเป็นฟังก์ชันคลื่นที่เป็นผลเฉลยที่มาจากสมการชเรอดิงเงอร์ ซึ่งเราจะกำหนดให้เป็น Ψ'

$$\Psi(x,t) = \Psi' e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} \dots\dots\dots(19)$$

นำฟังก์ชันคลื่นของเราแทนกลับเราไปในสมการ ที่(14)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \frac{-im_0 c^2}{\hbar} \Psi' e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} + e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial t} \Psi'$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x,t) = \frac{-m_0^2 c^4}{\hbar^2} \Psi' e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} - \frac{2im_0 c^2 e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}}}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \Psi' + e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi'$$

เราพบว่าเทอม $e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi'$ จะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมอื่นๆ เราจึงสามารถตัดมันทิ้งไปได้

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x,t) = m_0^2 c^4 \Psi' e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} + 2im_0 c^2 \hbar e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial t} \Psi'$$

$$= -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi' e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}} + m_0^2 c^4 \Psi' e^{\frac{-im_0 c^2 t}{\hbar}}$$

$$2im_0 c^2 \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi' = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi'$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi' = \frac{-\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi' \dots\dots\dots(20)$$

ซึ่งสุดท้ายเราก็จะได้สมการชเรอดิงเงอร์ออกมานั่นเอง ซึ่งนี่ก็เป็นเครื่องยืนยันของความหมายที่ ถ้าอนุภาคอยู่ในระดับพลังงานที่ต่ำๆ สมการ ไคลน์กอร์ดอน จะสามารถประมาณให้เหลือเป็น สมการชเรอดิงเงอร์ได้

และเมื่อนำสมการที่(20)มาเปรียบเทียบกับสมการชเรอดิงเงอร์(สมการที่(20) เราจะพบว่ามวลที่ปรากฏขึ้นในสมการชเรอดิงเงอร์นั้น จริงแล้วคือมวลนิ่งของอนุภาค

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(r) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(r) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \dots\dots\dots(21)$$

2.7 สมการไคลน์กอร์ดอน ที่มีอันตรกิริยากับพลังงานศักย์

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้พูดถึงสมการไคลน์กอร์ดอนที่ใช้อธิบายอนุภาคอิสระไม่ได้มีอันตรกิริยากับพลังงานศักย์ใดๆ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงอนุภาคที่มีอันตรกิริยากับพลังงานศักย์ ซึ่งนี่เป็นสิ่งที่ขาดไม่ได้ เนื่องจากในธรรมชาติ อนุภาคจะมีอันตรกิริยากับพลังงานศักย์รูปแบบต่างๆ อยู่เสมอๆ และหลายกรณี เราจึงต้องทำการบวกเทอมของพลังงานศักย์ลงไปในสมการ ไคลน์กอร์ดอน เพื่อที่จะได้วิเคราะห์ทำนายพฤติกรรมของอนุภาคนั้นๆ ได้ โดยเราจะเริ่มจากสมการที่(12)

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

และถ้าอนุภาคมีอันตรกิริยากับพลังงานศักย์

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} + V$$

$$E - V = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$(E - V)^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \dots\dots\dots(22)$$

แทน postulate momentum operator ลงไป

$$-\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + m_0^2 c^4 \Psi(\vec{r}) = (E - V)^2 \Psi(\vec{r}) \dots\dots\dots(23)$$

เราจะได้เป็นสมการที่มีชื่อว่า “สมการไคลน์กอร์ดอน แบบไม่ขึ้นกับเวลา” (Time Independent Klein Gordon equation) ออกมา

2.8 สมการความต่อเนื่อง และ การนอร์มอลไลซ์ ชเรอดิงเงอร์เวฟฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงที่มาของสมการที่ใช้ในการนอร์มอลไลซ์เวฟฟังก์ชันที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์ โดยเราจะพิสูจน์สมการการนอร์มอลไลซ์นั้น จากสมการความต่อเนื่อง(Continuity equation) ซึ่งเราตีความสมการความต่อเนื่องในกลศาสตร์ควอนตัมว่าเป็นสมการที่บ่งบอกถึงจำนวนของอนุภาคที่อยู่ตำแหน่งหนึ่ง เมื่อเคลื่อนที่ไปอีกตำแหน่งหนึ่งใช้เวลา t เราจะต้องพบจำนวนของอนุภาคนั้นเท่าเดิม

โดยเราจะเริ่มต้นการหาสมการความต่อเนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

$$\frac{i\hbar}{2m_0} \nabla^2 \Psi = \frac{\partial}{\partial t} \Psi \dots\dots\dots(24)$$

นำ Ψ^* คูณตลอดสมการที่(24) จะได้

$$\frac{i\hbar}{2m_0} \Psi^* \nabla^2 \Psi = \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi \dots\dots\dots(25)$$

นำสมการที่(24) มาคอนจูเกต และคูณตลอดด้วย Ψ จะได้

$$\frac{-i\hbar}{2m_0} \Psi \nabla^2 \Psi^* = \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \dots\dots\dots(26)$$

นำสมการที่ (25)+(26) จะได้

$$\frac{i\hbar}{2m_0} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) = \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*$$

$$\frac{-i\hbar}{2m_0} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) + \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* = 0$$

$$\frac{-i\hbar}{2m_0} \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \Psi = 0 \dots\dots\dots(27)$$

จากสมการที่ เรากำหนดให้

$$\rho = \Psi^* \Psi \dots\dots\dots(28)$$

$$j = \frac{-i\hbar}{2m_0} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \dots\dots\dots(29)$$

โดยที่

ρ คือ ความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability density)

j คือ ความหนาแน่นกระแสของความน่าจะเป็น (Probability current density)

ซึ่งเมื่อนำ ρ, j แทนกลับไปในสมการที่(27) จะได้สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation)
ออกมา

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

จาก ρ คือความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ดังนั้นเราสามารถ หาได้ว่าในปริมาตรหนึ่งๆ จะมีความน่าจะเป็นเท่าไรที่จะพบอนุภาค ได้จาก

$$1 = \int \rho d^3x = \int \Psi^* \Psi d^3x \dots\dots\dots(30)$$

โดยที่ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคจะมีค่าได้มากที่สุดไม่เกินหนึ่ง โดยเราจะสมการที่ ในการนอร์มอลไลซ์เวฟฟังก์ชันที่ได้ออกมาจากสมการชเรอดิงเงอร์

2.9 สมการความต่อเนื่อง และการนอร์มอลไลซ์ โคลน์กอร์ดอนเวฟฟังก์ชัน

จากหัวข้อที่แล้วเราได้พิสูจน์สมการความต่อเนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์ออกมา ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะเริ่มตั้งต้นหาสมการความต่อเนื่องจากสมการโคลน์กอร์ดอน และดูว่าผลลัพธ์ของความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและความหนาแน่นกระแสของความน่าจะเป็น ที่ได้ออกมาจากสมการโคลน์กอร์ดอนนั้นแตกต่างไปอย่างไรกับสมการชเรอดิงเงอร์

โดยเราจะเริ่มตั้งต้นจากสมการโคลน์กอร์ดอนสมการที่(14)

$$-\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi + m_0^2 c^4 \Psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi - \nabla^2 \Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \dots\dots\dots(31)$$

นำ Ψ^* คูณตลอดสมการที่ (31)

$$\frac{1}{c^2} \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi - \Psi^* \nabla^2 \Psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^* \Psi = 0 \dots\dots\dots(32)$$

จากนั้นนำสมการที่(31) มาคูณจุดแล้วคูณด้วย Ψ ตลอดทั้งสมการจะได้

$$\frac{1}{c^2} \Psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^* - \Psi \nabla^2 \Psi^* + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^* \Psi = 0 \dots\dots\dots(33)$$

นำสมการที่(32)ลบกับสมการที่(33)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} (\Psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi - \Psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^*) - (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) - \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) &= 0 \end{aligned}$$

นำ $\frac{i\hbar}{2m_0}$ คูณตลอดทั้งสมการจะได้

$$\frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) - \frac{i\hbar}{2m_0} \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = 0 \dots\dots\dots(34)$$

กำหนดให้

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) \dots\dots\dots(35)$$

$$j = -\frac{i\hbar}{2m_0} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \dots\dots\dots(36)$$

เราพบว่าความหนาแน่นของกระแสความน่าจะเป็นที่ได้จากสมการโคลน์กอร์ดอนนั้นมีค่าเหมือนกันกับความหนาแน่นของกระแสความน่าจะเป็นที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์ แต่จะพบว่าความหนาแน่นของความน่าจะเป็นนี้มีค่าที่แตกต่างไปจากเดิม ซึ่งทำให้เมื่อเราทำการนอร์มอลไลซ์เวฟฟังก์ชันที่ได้ออกมาจากสมการโคลน์กอร์ดอนจะต้องใช้สมการที่แตกต่างกันกับสมการชเรอดิงเงอร์

ซึ่งจากสมการที่ เราสามารถหาความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในปริมาตรหนึ่งๆได้จาก

$$\int \rho d^3x = \int \frac{i\hbar}{2m_0c^2} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) d^3x \dots\dots\dots(37)$$

แต่เราพบว่าสมการที่ จะให้ผลของสมการออกมาเป็นลบเสมอ ซึ่งความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค ใดๆมีค่าเป็นลบไม่ได้ ซึ่งเราจำเป็นต้องทำการตีความสมการความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้จากสมการไคลน์กอร์ดอนใหม่ เพื่อไม่ให้ขัดแย้งกับหลักการทางสถิติ

ในปัจจุบันเราเลือกตีความให้ ρ, j ที่ได้ออกมาจากสมการไคลน์กอร์ดอนเป็นความหนาแน่นของประจุ และความหนาแน่นของกระแส แทนที่จะให้มันเป็นความน่าจะเป็น เนื่องจาก ถ้าเราให้มันเป็นความหนาแน่นของประจุ มันจะยอมให้ ρ มีค่าเป็น บวก ลบ และศูนย์ได้ซึ่งไม่ได้ขัดกับหลักการใดๆ ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการที่ ที่ตีความใหม่ได้ดังนี้

$$\rho' = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) \dots\dots\dots(38)$$

$$j' = -\frac{i\hbar e}{2m_0} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \dots\dots\dots(39)$$

โดยที่

e คือ ประจุของอนุภาค

ดังนั้นเราสามารถนอร์มอลไลซ์เวฟฟังก์ชันที่ได้ออกมาจากสมการไคลน์กอร์ดอนได้ด้วยการอินทิเกรตสมการที่(38)

$$\pm e = \int \rho' d^3x = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} \int (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) d^3x \dots\dots\dots(40)$$

2.10 การทำนายประจุของโบซอน ที่มีสปินเป็นศูนย์

สมการไคลน์กอร์ดอนเป็นสมการที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของอนุภาคที่มีสปินเป็นศูนย์ และให้ผลเฉลยของพลังงานออกมามีสองค่าเสมอ คือเป็นบวก (พลังงานของอนุภาค) และเป็นลบ (พลังงานของ ปฏิอนุภาค) เนื่องจากพลังงานที่หามาได้มีสองค่าดังนั้น ดังผลเฉลยของฟังก์ชันคลื่น ก็ต้องแบ่งออกเป็นสองส่วนเช่นเดียวกัน นั่นคือส่วนของ อนุภาคและ ปฏิอนุภาค

โดยเราสามารถเขียนผลเฉลยของฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคและ ปฏิอนุภาคได้ดังนี้

$$\psi_+ = A_+ e^{i(px-Et)/\hbar} \quad (\text{ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคสปิน0})$$

$$\psi_- = A_- e^{i(px+Et)/\hbar} \quad (\text{ฟังก์ชันคลื่นของปฏิอนุภาคสปิน0})$$

เมื่อเรานำฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคเข้าไปแทนสมการความหนาแน่นของประจุจะได้

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) \\ &= \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} (\frac{-2iE}{\hbar}) \Psi_+^* \Psi_+ \\ \rho' &= \frac{Ee}{m_0c^2} \Psi_+^* \Psi_+ \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

ซึ่งเราพบเมื่อเราแทนฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคลงไปในสมการความหนาแน่นของประจุ จะทำให้เราได้ความหนาแน่นของประจุ ที่มีค่าเป็นบวกออกมา (E ที่เห็นในสมการคือ พลังงานรวมเชิงสัมพัทธภาพ) และในทำนองเดียวกันเมื่อเราแทนฟังก์ชันคลื่นของปฏิอนุภาค เราจะได้ความหนาแน่นของประจุออกมาเป็น

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) \\ &= \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} (\frac{2iE}{\hbar}) \Psi_-^* \Psi_- \\ \rho' &= \frac{-Ee}{m_0c^2} \Psi_-^* \Psi_- \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

ซึ่งเราจะสังเกตได้ว่าเมื่อนำฟังก์ชันคลื่นของปฏิอนุภาคแทนลงไปในสมการ เราจะได้ความหนาแน่นของประจุที่เป็นลบออกมา

ซึ่งเราสามารถสรุปได้ว่า อนุภาคที่มีสปินเป็น 0 จะต้องมีประจุเป็นบวก และปฏิอนุภาคของตัวมันเองจะต้องมีประจุเป็นลบ นั่นเอง ยกตัวอย่างเช่น pion⁺ ซึ่งจัดเป็นอนุภาคที่มีสปินเป็น 0 และมีประจุเป็นบวก ซึ่งมีปฏิอนุภาคของตัวมันเอง คือ pion⁻ ซึ่งมีประจุเป็นลบ

และเราสามารถนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคได้จาก

$$\begin{aligned} \pm e &= \int \rho' d^3x \\ \pm e &= \int \frac{\pm Ee}{m_0c^2} \Psi_{\pm}^* \Psi_{\pm} d^3x \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

กำหนดให้อนุภาคอยู่ในกล่องกว้าง L

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{EA_{\pm}^2}{m_0c^2} L^3 \\ A_{\pm} &= \sqrt{\frac{m_0c^2}{EL^3}} \dots\dots\dots(44) \end{aligned}$$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย โดยที่เราจะแบ่งขั้นตอนการดำเนินการออกเป็น 4 ขั้นตอนหลักดังนี้

- 3.1 เปรียบเทียบความแตกต่างของสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน แบบไม่ขึ้นกับเวลา
- 3.2 หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์และ ไคลน์กอร์ดอน จากเงื่อนไขขอบเขต
- 3.3 เปรียบเทียบความแตกต่างของผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์และ ไคลน์กอร์ดอน
- 3.4 กำหนดเงื่อนไขความกว้างและลึกของบ่อศักย์
- 3.5 เขียน โปรแกรม MATLAB หาผลเฉลยจากกราฟ(บทที่ 4)

3.1 เปรียบเทียบความแตกต่างของสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน แบบไม่ขึ้นกับเวลา

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V(r)\Psi(\vec{r}) = E' \Psi(\vec{r}) \quad \text{สมการชเรอดิงเงอร์}$$

$$-\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + m_0^2 c^4 \Psi(\vec{r}) = (E - V)^2 \Psi(\vec{r}) \quad \text{สมการไคลน์กอร์ดอน}$$

จากบทที่สองเราจะสังเกตเห็นได้ว่าสมการทั้งสอง ในส่วนของพลังงานรวมจะเป็นพลังงานรวมคนละค่ากันโดยที่ พลังงานรวม E (Relativistic Total energy) ที่ได้จากสมการ ไคลน์กอร์ดอน คือ พลังงานรวมที่เป็นพลังงานรวมที่รวมเอาพลังงานจลน์ พลังงานนิ่ง และพลังงานศักย์พลังงานศักย์ของอนุภาคไว้ด้วยกัน

$$E = K + V + m_0 c^2$$

ซึ่งมีโครงสร้างของพลังงานที่แตกต่างกับพลังงานรวมของสมการชเรอดิงเงอร์อย่างมาก เนื่องจากพลังงานรวมที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์ E' (พลังงานยึดเหนี่ยว) คือพลังงานรวมที่รวมเอาพลังงานจลน์กับพลังงานศักย์เพียงเท่านั้น ไม่ได้รวมเอาพลังงานนิ่งของอนุภาคเข้าไปด้วยซึ่งแสดงได้ดังสมการนี้

$$E' = K + V$$

จากโครงสร้างของพลังงานรวมที่แตกต่างกัน ทำให้พลังงานรวมของสมการ ไคลน์กอร์ดอน มีค่าสูงกว่าพลังงานรวมที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์อย่างมาก ดังนั้นในขั้นตอนการเปรียบเทียบของสมการทั้งสองสมการนี้ เราควรที่จะจัดรูปสมการทั้งสองใหม่ให้ทั้งสองสมการมีพลังงานรวมในรูปแบบ

เดียวกันเสียก่อนที่จะนำผลเฉลยมาเปรียบเทียบกับกัน โดยเราจะเริ่มจากหาความสัมพันธ์ของพลังงานทั้งสองก่อน จากพลังงานรวม

$$E = K + V + m_0c^2 = E' + m_0c^2$$

เราจะได้ความสัมพันธ์ของพลังงานรวมที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอน ดังสมการด้านล่างนี้

$$E' = E - m_0c^2 \dots\dots\dots(45)$$

ดังนั้นเมื่อเราแทนสมการนี้กลับลงไปในสมการไคลน์กอร์ดอน เราจะได้

$$-\hbar^2c^2\nabla^2\Psi(\vec{r}) + m_0^2c^4\Psi(\vec{r}) = (E' + m_0c^2 - V)^2\Psi(\vec{r})$$

เมื่อทำการจัดรูปสมการใหม่ สุดท้ายแล้วเราจะได้สมการไคลน์กอร์ดอน ในรูปแบบที่มีค่าพลังงานรวมเป็นพลังงานฮิลแบร์ท เช่นเดียวกับกับสมการชเรอดิงเงอร์ออกมา

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\Psi(\vec{r}) - \frac{(E' - V)^2}{2m_0c^2}\Psi(\vec{r}) + V\Psi(\vec{r}) = E'\Psi(\vec{r}) \dots\dots\dots(46)$$

นำสมการทั้งสองมาเปรียบเทียบได้ดังนี้

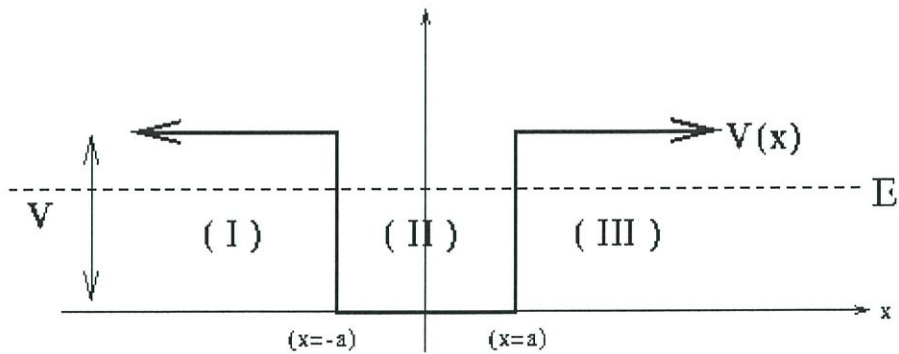
$$\frac{-\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\Psi(\vec{r}) + V(r)\Psi(\vec{r}) = E'\Psi(\vec{r}) \quad \text{สมการชเรอดิงเงอร์}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\Psi(\vec{r}) - \frac{(E' - V)^2}{2m_0c^2}\Psi(\vec{r}) + V\Psi(\vec{r}) = E'\Psi(\vec{r}) \quad \text{สมการไคลน์กอร์ดอน}$$

เราจะสังเกตเห็นว่าสมการไคลน์กอร์ดอน ที่จัดรูปใหม่นี้จะมีรูปแบบสมการที่เหมือนกับสมการชเรอดิงเงอร์อย่างมาก แต่จะมีในส่วนของพจน์ $-\frac{(E' - V)^2}{2m_0c^2}\Psi(\vec{r})$ ที่เพิ่มขึ้นมาซึ่งมีค่าน้อยมาก เนื่องจากหารด้วยความเร็วแสงยกกำลังสองอยู่ พจน์ที่เพิ่มขึ้นมานี้คือ ผลกระทบที่เกิดจากทฤษฎีสัมพัทธภาพที่มีต่อสมการชเรอดิงเงอร์

3.2 หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอน จากเงื่อนไขขอบเขต

ในหัวข้อนี้เราจะทำการแก้สมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ในบ่อศักย์ลึกจำกัด เพื่อหาผลเฉลยของฟังก์ชันคลื่นและผลเฉลยของไอเกนพลังงานในบ่อศักย์ โดยจะมีเงื่อนไขขอบเขตของบ่อศักย์ดังนี้



รูปที่ 3.2.1 บ่อศักย์สี่เหลี่ยม

$$V(x) = V \quad ; \quad x > a, x < -a$$

$$= 0 \quad ; \quad -a < x < a$$

โดยจะแบ่งเป็น 3 บริเวณ ในบริเวณที่ I และ III มีศักย์สูง V ส่วนบริเวณที่ II จะไม่มีพลังงานศักย์ และเราจะกำหนดให้อนุภาคมีพลังงาน $E' < V$ เนื่องจากอยู่ในสถานะที่ถูกกักขัง

3.2.1 แก้สมการชเรอดิงเงอร์ในบ่อศักย์สี่เหลี่ยม

เริ่มจาก ตั้งสมการชเรอดิงเงอร์ในบริเวณต่างๆ

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_I + V\Psi_I = E'\Psi_I \quad ; \quad x < -a$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{II} = E'\Psi_{II} \quad ; \quad -a < x < a$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{III} + V\Psi_{III} = E'\Psi_{III} \quad ; \quad x > a$$

แก้สมการ ที่บริเวณ II $x < -a$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_I + V\Psi_I = E'\Psi_I$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_I = -\frac{2m_0(E' - V)}{\hbar^2} \Psi_I$$

จากเงื่อนไขที่ $E' < V$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_I = \frac{2m_0(V - E')}{\hbar^2} \Psi_I$$

กำหนดให้ $\kappa^2 = \frac{2m_0(V - E')}{\hbar^2}$ จึงได้ผลเฉลยออกมาเป็น

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$$

และฟังก์ชันคลื่นบริเวณนี้จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่ระยะ $x \rightarrow -\infty$ ดังนั้น $B = 0$ ดังนั้นจึงได้ฟังก์ชันคลื่นที่บริเวณนี้เป็น

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x}$$

และในทำนองเดียวกัน บริเวณที่ III $x > a$ จะแก้ฟังก์ชันคลื่นออกมาได้เป็น

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x}$$

แก้สมการที่บริเวณที่ II $-a < x < a$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{II} = E' \Psi_{II}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_{II} = -\frac{2m_0 E'}{\hbar^2} \Psi_{II}$$

กำหนดให้ $k^2 = \frac{2m_0 E'}{\hbar^2}$ จะได้ผลเฉลยที่บริเวณที่ II เป็น

$$\Psi_{II} = C \sin kx + D \cos kx$$

ดังนั้นเราจึงได้ฟังก์ชันคลื่นที่แก้จากสมการชเรอดิงเงอร์ที่บริเวณต่างๆ ดังนี้

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} \quad ; \quad x < -a$$

$$\Psi_{II} = C \sin kx + D \cos kx \quad ; \quad -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x} \quad ; \quad x > a$$

จากนั้นเราสามารถแยกผลเฉลยออกได้เป็น 2 ส่วน คือฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ โดยใช้ parity operator ได้ดังนี้

โดยในส่วนของฟังก์ชันคู่

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} \quad ; \quad x < -a$$

$$\Psi_{II} = D \cos kx \quad ; \quad -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Ae^{-\kappa x} \quad ; \quad x > a$$

และโดยในส่วนของฟังก์ชันคี่

$$\Psi_I = -Be^{\kappa x} \quad ; \quad x < -a$$

$$\Psi_{II} = C \sin kx \quad ; \quad -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x} \quad ; \quad x > a$$

และเราสามารถหาพลังงานของอนุภาคในบ่อศักย์ได้จาก

$$k^2 = \frac{2m_0 E'}{\hbar^2}$$

$$E' = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

ซึ่งเราจำเป็นต้องรู้ k^2 ก่อนว่ามีค่าเท่ากับเท่าไร โดยสามารถหาได้จากการแทนเงื่อนไขขอบเขต โดยฟังก์ชันคลื่นจะต้องมีความต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อ ดังนั้นถ้าฟังก์ชันคลื่นต่อเนื่องแล้วอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นก็ต้องต่อเนื่องด้วยเช่นกัน เราจึงได้เงื่อนไขขอบเขตมาดังนี้

ที่ $x = -a$

$$\Psi_I = \Psi_{II}$$

$$\frac{d}{dx} \Psi_I = \frac{d}{dx} \Psi_{II}$$

สำหรับฟังก์ชันคู่

$$Ae^{-\kappa a} = D \cos ka$$

$$A\kappa e^{-\kappa a} = Dk \sin ka$$

สำหรับฟังก์ชันคี่

$$Be^{-\kappa a} = C \sin ka$$

$$-B\kappa e^{-\kappa a} = Ck \cos ka$$

ที่ $x = a$

$$\Psi_{III} = \Psi_{II}$$

$$\frac{d}{dx} \Psi_{III} = \frac{d}{dx} \Psi_{II}$$

สำหรับฟังก์ชันคู่

$$Ae^{-\kappa a} = D \cos ka$$

$$A\kappa e^{-\kappa a} = Dk \sin ka$$

สำหรับฟังก์ชันคี่

$$Be^{-\kappa a} = C \sin ka$$

$$-B\kappa e^{-\kappa a} = Ck \cos ka$$

ซึ่งเราจะเห็นว่าเมื่อเราแทนเงื่อนไขขอบเขตลงไป จะพบว่า ได้ผลของสมการออกมาเหมือนกันทุกๆ ขอบเขต ดังนั้นเราจะเลือกใช้สมการจากเงื่อนไขขอบเขตไหนก็ได้ เมื่อเราแทนเงื่อนไขขอบเขตจนเสร็จแล้ว ก็จะถึงขั้นตอนการหาค่าไอเกน โดย

ไอเกนของฟังก์ชันคู่

$$\frac{A\kappa e^{-\kappa a}}{Ae^{-\kappa a}} = \frac{Dk \sin ka}{D \cos ka}$$

$$\kappa = k \tan ka$$

ไอเกนของฟังก์ชันคี่

$$\frac{-B\kappa e^{-\kappa a}}{Be^{-\kappa a}} = \frac{Ck \cos ka}{C \sin ka}$$

$$\kappa = -k \cot ka$$

ต่อไปเราจะกำหนดให้ $\xi = ka, \eta = \kappa a$ จากนั้นนำ a คูณตลอดค่าไอเกนทั้งสองค่าจะได้

$$\eta = \xi \tan \xi, \eta = -\xi \cot \xi \dots \dots \dots (47)$$

และ

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2m_0Va^2}{\hbar^2} \dots\dots\dots(48)$$

ซึ่งก็คือสมการวงกลมที่มีรัศมีกกำลังสอง $2m_0Va^2/\hbar^2$ ซึ่งเราจะเห็นว่ารัศมีของสมการวงกลมขึ้นอยู่กับค่าของพลังงานศักย์และความกว้างของบ่อศักย์ ซึ่งเมื่อนำกราฟของสมการวงกลมไปพล็อตกับค่าไอเกน จุดตัดของกราฟจะสามารถทำให้เราทราบค่า k ได้ และเมื่อเรารู้ค่าเลขคลื่น เราก็สามารถหาค่าพลังงานออกมาได้ โดยเราสามารถจินตนาการไว้ได้ก่อนว่า ถ้ารัศมีของสมการวงกลมยิ่งมาก(หมายถึงพลังงานศักย์มากหรือความกว้างของบ่อมาก) ก็จะยิ่งได้จุดตัดกับกราฟของ \tan และ \cot มาก นั่นหมายถึงจะยังมีจำนวนระดับพลังงานของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ยิ่งมากนั่นเอง

จากความสัมพันธ์ของ $\xi = ka$ เราสามารถหาพลังงานของอนุภาคที่อยู่บริเวณที่สองได้จาก

$$E_{II} = \frac{\hbar^2\xi^2}{2m_0a^2} \dots\dots\dots(49)$$

ซึ่ง ξ สามารถหาได้จากจุดตัดของกราฟ และเราสามารถหาพลังงานของอนุภาคที่อยู่บริเวณที่หนึ่งและสามได้จาก $\kappa^2 = \frac{2m_0(V - E')}{\hbar^2}$ และ $\eta = \kappa a$

$$E_{I,III} = V - \frac{\hbar^2\eta^2}{2m_0a^2}$$

ซึ่งค่าของ η ก็สามารถหาได้จากจุดตัดของกราฟเช่นเดียวกัน และตามปกติแล้วถ้าไม่คิดผลกระทบจากทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษพลังงานของอนุภาคทั้งสามบริเวณจะต้องเท่ากัน

3.2.1.1 การนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่นของชเรอดิงเงอร์

ในหัวข้อนี้เราจะทำการนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่น ที่ได้ออกมาจากสมการชเรอดิงเงอร์ เฉพาะในส่วนของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ โดยจะเริ่มจากผมเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ในส่วนของฟังก์ชันคู่

$$\begin{aligned} \Psi_I &= Ae^{\kappa x} && ; x < -a \\ \Psi_{II} &= D \cos kx && ; -a < x < a \\ \Psi_{III} &= Ae^{-\kappa x} && ; x > a \end{aligned}$$

แทนฟังก์ชันคลื่นทั้งสามบริเวณลงไปในสมการที่(30)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-a} \Psi_I^* \Psi_I dx + \int_{-a}^a \Psi_{II}^* \Psi_{II} dx + \int_a^{\infty} \Psi_{III}^* \Psi_{III} dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{-a} A^2 e^{2\kappa x} dx + \int_{-a}^a D^2 \cos^2 kx dx + \int_a^{\infty} A^2 e^{-2\kappa x} dx &= 1 \\ \frac{A^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} + D^2 \left(a + \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) + \frac{A^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} &= 1 \end{aligned}$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $Ae^{-\kappa a} = D \cos ka$

$$A^2 e^{-2\kappa a} = D^2 \cos^2 ka$$

แทนกลับลงไปนสมการที่จะได้

$$\frac{D^2 \cos^2 ka}{\kappa} + D^2 \left(a + \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) = 1$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $Ae^{-\kappa a} = D \cos ka$ จะทำให้เราสามารถหาค่า A ออกมาได้

$$A = \frac{e^{\kappa a} \cos ka}{\sqrt{a + \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

และนอร์มอลไลซ์ในส่วนของฟังก์ชันที่ เริ่มจากผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ในส่วนของฟังก์ชันที่

$$\Psi_I = -Be^{\kappa x} \quad ; x < -a$$

$$\Psi_{II} = C \sin kx \quad ; -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x} \quad ; x > a$$

$$\int_{-\infty}^{-a} \Psi_I^* \Psi_I dx + \int_{-a}^a \Psi_{II}^* \Psi_{II} dx + \int_a^{\infty} \Psi_{III}^* \Psi_{III} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-a} B^2 e^{2\kappa x} dx + \int_{-a}^a C^2 \sin^2 kx dx + \int_a^{\infty} B^2 e^{-2\kappa x} dx = 1$$

$$\frac{B^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} + C^2 \left(a - \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) + \frac{B^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} = 1$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $Be^{-\kappa a} = C \sin ka$

$$B^2 e^{-2\kappa a} = C^2 \sin^2 ka$$

เมื่อนำเงื่อนไขขอบเขตแทนกลับลงไปนสมการจะได้

$$\frac{C^2 \sin^2 ka}{\kappa} + C^2 \left(a - \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin^2 ka}{\kappa} - \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

และ

$$B = \frac{e^{\kappa a} \sin ka}{\sqrt{a + \frac{\cos^2 ka}{\kappa} - \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

3.2.2 แก๊สมการไคลน์กอร์ดอน ในบ่อศักย์ลึกจำกัด

เริ่มจากตั้งสมการไคลน์กอร์ดอน ในขอบเขตต่างๆ

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_I - \frac{(E' - V)^2}{2m_0 c^2} \Psi_I + V \Psi_I = E' \Psi_I \quad ; x < -a$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{II} - \frac{E'^2}{2m_0 c^2} \Psi_{II} = E' \Psi_{II} \quad ; -a < x < a$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{III} - \frac{(E' - V)^2}{2m_0 c^2} \Psi_{III} + V \Psi_{III} = E' \Psi_{III} \quad ; x > a$$

แก้สมการ ที่บริเวณ II $x < -a$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_I - \frac{(E' - V)^2}{2m_0 c^2} \Psi_I + V \Psi_I = E' \Psi_I$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_I = -\frac{(E' - V)^2 + 2m_0 c^2 (E' - V)}{\hbar^2 c^2} \Psi_I$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_I = \frac{2m_0 c^2 (V - E') - (E' - V)^2}{\hbar^2 c^2} \Psi_I$$

กำหนดให้ $\kappa^2 = \frac{2m_0 c^2 (V - E') - (E' - V)^2}{\hbar^2 c^2}$ โดยที่ $(E' - V)^2 < 2m_0 c^2 (V - E')$ และเมื่อเราจัด

รูปใหม่จะได้

$$\kappa^2 = \frac{2m_0 (V - E')}{\hbar^2} - \frac{(E' - V)^2}{\hbar^2 c^2}$$

เราจะสังเกตเห็นได้ว่า ในพจน์แรกจะเป็นค่าเลขคลื่นที่ ตรงกับส่วนที่แก่ออกมาได้จากสมการชเรอดิงเงอร์ และพจน์ที่สองคือ เทอมที่เป็นผลกระทบเนื่องจากทฤษฎีสัมพัทธภาพ ซึ่งจะสังเกตว่าเป็นเทอมที่มีค่าน้อยมากเนื่องจากหารด้วยความเร็วแสงยกกำลังสอง และจากนั้นเราจะได้ผลเฉลยเป็น

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$$

และฟังก์ชันคลื่นบริเวณนี้จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ที่ระยะ $x \rightarrow -\infty$ ดังนั้น $B = 0$ ดังนั้นจึงได้ฟังก์ชันคลื่นที่บริเวณนี้เป็น

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x}$$

และในทำนองเดียวกัน บริเวณที่ III $x > a$ จะแก้ฟังก์ชันคลื่นออกมาได้เป็น

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x}$$

แก้สมการที่บริเวณที่ II $-a < x < a$

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{II} - \frac{E'^2}{2m_0 c^2} \Psi_{II} = E' \Psi_{II}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_{II} = -\frac{E'^2 + 2m_0 c^2 E'}{\hbar^2 c^2} \Psi_{II}$$

และกำหนดให้ $k^2 = \frac{E'^2 + 2m_0 c^2 E'}{\hbar^2 c^2}$ และเมื่อเราจัดรูปใหม่จะได้

$$k^2 = \frac{2m_0 E'}{\hbar^2} + \frac{E'^2}{\hbar^2 c^2}$$

และอีกเช่นกันที่เทอมแรกจะเป็นเทอมที่มีค่าเท่ากับที่แก้ออกมาได้สมการชเรอดิงเงอร์ส่วนในเทอมหลังคือเทอมที่เป็นผลกระทบเนื่องจากทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เราจึงได้ฟังก์ชันคลื่น ณ บริเวณนี้เป็น

$$\Psi_{II} = C \sin kx + D \cos kx$$

เราจึงได้ฟังก์ชันคลื่นที่แก้ออกมาจากสมการ ไคลน์กอร์ดอน บริเวณต่างๆดังนี้

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} \quad ; x < -a$$

$$\Psi_{II} = C \sin kx + D \cos kx \quad ; -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x} \quad ; x > a$$

และเมื่อแยกผลเฉลยออกเป็นฟังก์ชันคู่และคี่จะได้

โดยในส่วนของฟังก์ชันคู่

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} \quad ; x < -a$$

$$\Psi_{II} = D \cos kx \quad ; -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Ae^{-\kappa x} \quad ; x > a$$

และโดยในส่วนของฟังก์ชันคี่

$$\Psi_I = -Be^{\kappa x} \quad ; x < -a$$

$$\Psi_{II} = C \sin kx \quad ; -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x} \quad ; x > a$$

เราจะเห็นสมการไคลน์กอร์ดอน จะให้ผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการชเรอดิงเงอร์ (แต่จะมีค่าคงที่ k, κ แตกต่างกัน) ดังนั้นในเมื่อได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการออกมาอยู่ในรูปแบบเดียวกัน จึงทำให้เราได้ค่าไอเกนออกมาเหมือนกันดังนี้

ไอเกนของฟังก์ชันคู่

$$\kappa = k \tan ka$$

ไอเกนของฟังก์ชันคี่

$$\kappa = -k \cot ka$$

ต่อไปเราจะกำหนดให้ $\xi = ka, \eta = \kappa a$ จากนั้นนำ a คูณตลอดค่าไอเกนทั้งสองค่าจะได้

$$\eta = \xi \tan \xi, \quad \eta = -\xi \cot \xi$$

และต่อไปก็จะมาหาสมการวงกลมเพื่อนำไปหาจุดตัดของกราฟ กับ ค่าไอเกนจาก $\xi^2 + \eta^2$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2m_0 Va^2}{\hbar^2} + \frac{2E' Va^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{V^2 a^2}{\hbar^2 c^2}$$

ซึ่งเราจะได้ออกมาเป็นสมการวงกลมโดยที่มีค่ารัศมียกกำลังสองคือ $2m_0Va^2/\hbar^2 + 2E'Va^2/\hbar^2c^2 - V^2a^2/\hbar^2c^2$ ซึ่งเราจะพบว่า 2เทอมหลัง $2E'Va^2/\hbar^2c^2 - V^2a^2/\hbar^2c^2$ เป็นส่วนที่เพิ่มขึ้นมาจากผลกระทบของทฤษฎีสัมพัทธภาพ ซึ่งมีค่าน้อยมาก เนื่องจากหารด้วยความเร็วแสงยกกำลังสองอยู่ ในกรณีที่พลังงานของอนุภาคมีค่าน้อยมากๆ 2เทอมหลังจะยังมีค่าน้อย เราจึงสามารถประมาณค่าออกมาได้เป็น

$$\xi^2 + \eta^2 \approx \frac{2m_0Va^2}{\hbar^2}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับที่หาได้จากสมการชเรอดิงเงอร์นั่นเอง โดยเมื่อเราหาค่าไอเกนของสมการจากการพล็อตกราฟได้เราจึงสามารถหาพลังงานของอนุภาคที่ถูกกักขังได้จาก

$$k^2 = \frac{E'^2 + 2m_0c^2E'}{\hbar^2c^2}$$

$$E'^2 + 2m_0c^2E' - \hbar^2k^2c^2 = 0$$

ดังนั้นค่าพลังงานที่เราหาออกมาได้จะเป็น

$$E' = \sqrt{\hbar^2k^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$$

ซึ่งถ้าเราลองประมาณค่าของพลังงานโดยใช้อนุกรมTaylors เราจะพบว่าเราจะได้

$$E' \approx \frac{\hbar^2k^2}{2m_0}$$

ซึ่งก็สามารถประมาณ ได้ออกมาเป็นผลเฉลยของสมการที่แก้ออกมาได้จากสมการชเรอดิงเงอร์นั่นเอง จากนั้นจัดรูปใหม่โดยเปลี่ยนค่าkให้อยู่ในรูปของξ จะได้

$$E'_{II} = \sqrt{\frac{\hbar^2\xi^2c^2}{a^2} + m_0^2c^4} - m_0c^2 \dots\dots\dots(50)$$

โดยที่ ξ คือค่าไอเกนที่เราหาได้จากการพล็อตกราฟนั่นเอง (ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากการพล็อตกราฟนั้น จะอยู่ในส่วนของผลการทดลองในบทที่3) และกำหนดให้ E'_{II} แสดงถึงพลังงานของอนุภาคที่อยู่บริเวณที่สอง

และเราสามารถหาค่าของพลังงานของอนุภาคที่อยู่บริเวณที่หนึ่งและสามได้จาก

$$K^2 = \frac{2m_0c^2(V - E') - (E' - V)^2}{\hbar^2c^2}$$

$$E'_{I,III} = \sqrt{m_0^2c^4 - \frac{\hbar^2\eta^2c^2}{a^2}} - m_0c^2 + V$$

ในที่นี้เรากำหนดให้ $E'_{I,III}$ หมายถึงพลังงานของอนุภาคที่อยู่บริเวณที่หนึ่งและสาม แต่จากสมการวงกลมของเราที่ได้จากสมการโคลนิกอร์ดอนนั้นเราพบว่าเรายังไม่สามารถนำสมการดังกล่าวไปพล็อตกราฟหาค่าξ ออกมาได้ เนื่องจากสมการวงกลมที่ได้จากสมการโคลนิกอร์ดอนนั้นยังติดค่า E' อยู่ในสมการซึ่งยังเป็นตัวแปรที่เรายังไม่ทราบค่าและต้องการหา ดังนั้นเราจำเป็นต้องจัดรูปสมการใหม่เพื่อตัดค่าของ E' ทิ้งออกไปจากสมการ และจาก

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2m_0Va^2}{\hbar^2} + \frac{2E'Va^2}{\hbar^2c^2} - \frac{V^2a^2}{\hbar^2c^2}$$

และเราทราบว่าค่า E' มีค่าเท่ากับ

$$E' = \sqrt{\frac{\hbar^2\xi^2c^2}{a^2} + m_0^2c^4} - m_0c^2$$

เมื่อแทนค่ากลับลงไปนในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= \frac{2m_0Va^2}{\hbar^2} + \frac{2Va^2}{\hbar^2c^2} \left(\sqrt{\frac{\hbar^2\xi^2c^2}{a^2} + m_0^2c^4} - m_0c^2 \right) - \frac{V^2a^2}{\hbar^2c^2} \\ &= \frac{2m_0Va^2}{\hbar^2} + \frac{2Va^2}{\hbar^2c^2} \sqrt{\frac{\hbar^2\xi^2c^2}{a^2} + m_0^2c^4} - \frac{2m_0Va^2}{\hbar^2} - \frac{V^2a^2}{\hbar^2c^2} \\ &= \frac{2Va^2}{\hbar^2c^2} \sqrt{\frac{\hbar^2\xi^2c^2}{a^2} + m_0^2c^4} - \frac{V^2a^2}{\hbar^2c^2} \\ \xi^2 + \eta^2 &= \frac{2m_0Va^2}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\hbar^2\xi^2}{m_0^2c^2a^2} + 1} - \frac{V^2a^2}{\hbar^2c^2} \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

ซึ่งเราจะเห็นว่าสมการที่เราได้มานั้นเป็นสมการที่ไม่ใช่สมการวงกลมที่กลมสมบูรณ์ซึ่งยังไม่แน่ชัดว่าสมการที่(51) มีลักษณะของเส้นกราฟอย่างไร ซึ่งเรารู้แต่เพียงว่ายิ่งพจน์ $\sqrt{\hbar^2\xi^2/m_0^2c^2a^2 + 1}$ มีค่าที่สูงมากขึ้น จะยิ่งทำให้สมการมีรูปลักษณะที่แตกต่างจากไปจากสมการวงกลมมากยิ่งขึ้นและ $\hbar^2\xi^2/m_0^2c^2a^2$ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ ซึ่งพจน์นี้จะสามารถมีค่าสูงขึ้นได้ก็ต่อเมื่อค่าความกว้างของบ่อศักย์มีค่าน้อยลงมากๆ หรือในอีกกรณีที่บ่อศักย์มีความกว้างมาก แต่พลังงานศักย์มีค่าที่สูงขึ้นๆ จะทำให้พจน์ V^2a^2/\hbar^2c^2 มีผลมากขึ้น ส่งผลให้ รัศมีของวงกลมมีค่าเล็กลงเพราะมีค่าเป็นลบ

3.2.2.1 การนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่นของโคลนน์กอร์ดอน

โดยเริ่มจากนอร์มอลไลซ์ในส่วนของฟังก์ชันคู่

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x} \quad ; x < -a$$

$$\Psi_{II} = D \cos kx \quad ; -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Ae^{-\kappa x} \quad ; x > a$$

เราสามารถนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่นของสมการโคลนน์กอร์ดอนได้จากสมการที่(40)

$$\pm e = \int \rho' d^3x = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2} \int (\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*) d^3x$$

แต่จากสมการที่(40)จะเห็นว่าเป็นฟังก์ชันคลื่นที่ขึ้นกับเวลาดังนั้นเราจะต้องหาส่วนที่ขึ้นกับเวลาของฟังก์ชันคลื่นทั้งสามบริเวณก่อน โดยเราจำกำหนดให้ อนุภาคที่อยู่ภายในบ่อศักย์และภายนอกบ่อศักย์มีฟังก์ชันคลื่นในส่วนของแต่ละที่ขึ้นกับเวลาเป็น

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

$$\varphi_{out}(t) = e^{-iE_{out}t/\hbar}$$

เราจะได้ฟังก์ชันคลื่นทั้งสามบริเวณเป็น

$$\Psi_I = Ae^{\kappa x - iE_{I,III}t/\hbar}$$

$$\Psi_{II} = D \cos kx e^{-iE_{II}t/\hbar}$$

$$\Psi_{III} = Ae^{-\kappa x - iE_{I,III}t/\hbar}$$

นำฟังก์ชันคลื่นทั้งสามแทนลงไปในสมการที่(40)

$$\frac{E_{I,III}e}{m_0c^2} \int_{-\infty}^{-a} \Psi_I^* \Psi_I dx + \frac{E_{II}e}{m_0c^2} \int_{-a}^a \Psi_{II}^* \Psi_{II} dx + \frac{E_{I,III}e}{m_0c^2} \int_a^{\infty} \Psi_{III}^* \Psi_{III} dx = e$$

$$\frac{E_{I,III}}{m_0c^2} \int_{-\infty}^{-a} A^2 e^{2\kappa x} dx + \frac{E_{II}}{m_0c^2} \int_{-a}^a D^2 \cos^2 kx dx + \frac{E_{I,III}}{m_0c^2} \int_a^{\infty} A^2 e^{-2\kappa x} dx = 1$$

$$\frac{E_{I,III}}{m_0c^2} \frac{A^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0c^2} D^2 \left(a + \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) + \frac{E_{I,III}}{m_0c^2} \frac{A^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} = 1$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $A^2 e^{-2\kappa a} = D^2 \cos^2 ka$

$$\frac{E_{I,III}}{m_0c^2} \frac{D^2 \cos^2 ka}{\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0c^2} D^2 \left(a + \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) = 1$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0c^2} \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

และเราสามารถหาค่าของ A ได้จากเงื่อนไขขอบเขต $Ae^{-\kappa a} = D \cos ka$

$$A = \frac{e^{\kappa a} \cos ka}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0c^2} \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

และนอร์มอลไลซ์ในส่วนของฟังก์ชันคือ

$$\Psi_I = -Be^{\kappa x} \quad ; x < -a$$

$$\Psi_{II} = C \sin kx \quad ; -a < x < a$$

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x} \quad ; x > a$$

เมื่อหาส่วนที่ขึ้นกับเวลาจะได้

$$\Psi_I = -Be^{\kappa x - iE_{I,III}t/\hbar}$$

$$\Psi_{II} = C \sin kx e^{-iE_{II}t/\hbar}$$

$$\Psi_{III} = Be^{-\kappa x - iE_{I,III}t/\hbar}$$

$$\frac{E_{I,III}e}{m_0c^2} \int_{-\infty}^{-a} \Psi_I^* \Psi_I dx + \frac{E_{II}e}{m_0c^2} \int_{-a}^a \Psi_{II}^* \Psi_{II} dx + \frac{E_{I,III}e}{m_0c^2} \int_a^{\infty} \Psi_{III}^* \Psi_{III} dx = e$$

$$\frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \int_{-\infty}^{-a} B^2 e^{2\kappa x} dx + \frac{E_{II}}{m_0 c^2} \int_{-a}^a C^2 \sin^2 kx dx + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \int_a^{\infty} B^2 e^{-2\kappa x} dx = 1$$

$$\frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{B^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0 c^2} C^2 \left(a - \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{B^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa} = 1$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $B e^{-\kappa a} = C \sin ka$

$$B^2 e^{-2\kappa a} = C^2 \sin^2 ka$$

จะได้

$$\frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{C^2 \sin^2 ka}{\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0 c^2} C^2 \left(a - \frac{\sin(2ka)}{2k} \right) = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0 c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{\sin^2 ka}{\kappa} - \frac{E_{II}}{m_0 c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

และ

$$B = \frac{e^{\kappa a} \sin ka}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0 c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{\sin^2 ka}{\kappa} - \frac{E_{II}}{m_0 c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$$

3.3 เปรียบเทียบความแตกต่างของผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์และ โคลน์กอร์ดอน

	สมการชเรอดิงเงอร์	สมการโคลน์กอร์ดอน
κ^2	$\frac{2m_0(V - E')}{\hbar^2}$	$\frac{2m_0(V - E')}{\hbar^2} - \frac{(E' - V)^2}{\hbar^2 c^2}$
k^2	$\frac{2m_0 E'}{\hbar^2}$	$\frac{2m_0 E'}{\hbar^2} + \frac{E'^2}{\hbar^2 c^2}$
$\xi^2 + \eta^2$	$\frac{2m_0 V a^2}{\hbar^2}$	$\frac{2m_0 V a^2}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\hbar^2 \xi^2}{m_0^2 c^2 a^2} + 1} - \frac{V^2 a^2}{\hbar^2 c^2}$

E'	$\frac{\hbar^2 \xi^2}{2m_0 a^2}$	$\sqrt{\frac{\hbar^2 \xi^2 c^2}{a^2} + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$
A	$\frac{e^{\kappa a} \cos ka}{\sqrt{a + \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$	$\frac{e^{\kappa a} \cos ka}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0 c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0 c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$
D	$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0 c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{\cos^2 ka}{\kappa} + \frac{E_{II}}{m_0 c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$
B	$\frac{e^{\kappa a} \sin ka}{\sqrt{a + \frac{\cos^2 ka}{\kappa} - \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$	$\frac{e^{\kappa a} \sin ka}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0 c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{\sin^2 ka}{\kappa} - \frac{E_{II}}{m_0 c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$
C	$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin^2 ka}{\kappa} - \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{E_{II}}{m_0 c^2} a + \frac{E_{I,III}}{m_0 c^2} \frac{\sin^2 ka}{\kappa} - \frac{E_{II}}{m_0 c^2} \frac{\sin(2ka)}{2k}}}$

ตารางที่ 3.3.1 ตารางเปรียบเทียบผลเฉลยต่างๆของสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

3.4 กำหนดเงื่อนไขความกว้างและลึกของบ่อศักย์

เมื่อเราได้สมการทั้งหมดมาอย่างครบถ้วนแล้ว ต่อไปเราจะกำหนดค่าซึ่งเป็นเงื่อนไขความกว้างลึกของบ่อศักย์ เพื่อดูผลความแตกต่างระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ซึ่งคือการดูความแตกต่างระหว่างการนำทฤษฎีสัมพัทธภาพมาคิดและไม่คิด โดยอนุภาคที่เราจะนำมาใช้ในการพิจารณา คือ อนุภาค π^+ (ไพออน) ซึ่งเป็นอนุภาคที่มีสปิน 0 และมีมวลนิ่งกับประจุมีค่าเป็น $m_0 = 139.57018 \text{ MeV} = 2.48806 \times 10^{-28} \text{ kg}$, $e = +1.60218 \times 10^{-19} \text{ C}$ ตามลำดับ

1. กำหนดเงื่อนไขที่สามารถพบได้จริงในธรรมชาติ เพื่อดูผลกระทบของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษต่อเงื่อนไขนี้

1.1) ให้ บ่อศักย์ กว้าง $a \approx 1 \text{ \AA}$ ลึก $V = 27 \text{ eV}$ ซึ่งคือความกว้างในระดับอะตอม

1.2) บ่อศักย์ลึกและกว้าง $V = 884,145.6965 \text{ eV}$, $a \approx 1 \text{ fm}$ ซึ่งคือเงื่อนไขในระดับนิวเคลียส

2. กำหนดเงื่อนไขให้ความลึกของบ่อศักย์มีค่า $V = 0.5m_0c^2, 1m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$ (เป็นจำนวนเท่าของพลังงานนิ่ง) และความกว้างของบ่อศักย์มีค่า $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$ (เป็นจำนวนเท่าของความยาวคลื่นของคอมตัน)

3.5 เขียนโปรแกรม MATLAB หาผลเฉลยจากกราฟ

1. พล็อตกราฟสมการที่(47)กับสมการที่(48) และสมการที่(47)กับสมการที่(51) ที่เงื่อนไข

1.1) $V = 27eV$ และ $a \approx 1A$

1.2) $V = 884,145.6965eV$ และ $a \approx 1fm$

2. หาจุดตัดแกน ξ ระหว่างสมการที่(47)กับ(48)และหาจุดตัดแกน ξ ระหว่างสมการที่(47)กับสมการที่(51)

3. นำจุดตัดที่ได้จากสมการที่(47)และ(48)แทนค่าลงในสมการที่(49) และนำจุดตัดที่ได้จากสมการที่(47)และ(51)แทนลงในสมการที่(50) เพื่อหาพลังงานของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อ เพื่อเทียบความแตกต่างของจำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์และพลังงานของอนุภาคที่ถูกกักขังระหว่างกรณีที่เกิดสัมพัทธภาพพิเศษ(ไคลน์กอร์ดอน)และไม่เกิดสัมพัทธภาพพิเศษ(ชเรอดิงเงอร์)

4. พล็อตกราฟสมการที่(47)กับสมการที่(48) และสมการที่(47)กับสมการที่(51) ที่เงื่อนไข

4.1) $V = 0.5m_0c^2$ และ $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$

4.2) $V = 1m_0c^2$ และ $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$

4.3) $V = 1.5m_0c^2$ และ $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$

4.4) $V = 2m_0c^2$ และ $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$

5. หาจุดตัดแกน ξ ระหว่างสมการที่(47)กับ(48)และหาจุดตัดแกน ξ ระหว่างสมการที่(47)กับสมการที่(51)

6. นำจุดตัดที่ได้จากสมการที่(47)และ(48)แทนค่าลงในสมการที่(49) นำจุดตัดที่ได้จากสมการที่(47)และ(51)แทนลงในสมการที่(50) เพื่อหาพลังงานของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อ เพื่อเทียบความแตกต่างของจำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์และพลังงานของอนุภาคที่ถูกกักขังระหว่างกรณีที่เกิดสัมพัทธภาพพิเศษ (ไคลน์กอร์ดอน)และไม่เกิดสัมพัทธภาพพิเศษ (ชเรอดิงเงอร์)

7. เปรียบเทียบระดับพลังงานและสถานะของสมการชเรอดิงเงอร์ ที่

7.1) $a = 0.5h/m_0c$ กับ $V = 0.5m_0c^2, 1m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

7.2) $a = h/m_0c$ กับ $V = 0.5m_0c^2, 1m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

7.3) $a = 2h/m_0c$ กับ $V = 0.5m_0c^2, 1m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

8. เปรียบเทียบระดับพลังงานและสถานะของสมการชเรอดิงเงอร์ที่

8.1) $a = 0.5h/m_0c$ กับ $V = 0.5m_0c^2, 1m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

8.2) $a = h/m_0c$ กับ $V = 0.5m_0c^2, 1m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

$$8.3) a = 2h/m_0c \text{ กับ } V = 0.5m_0c^2, 1m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$$

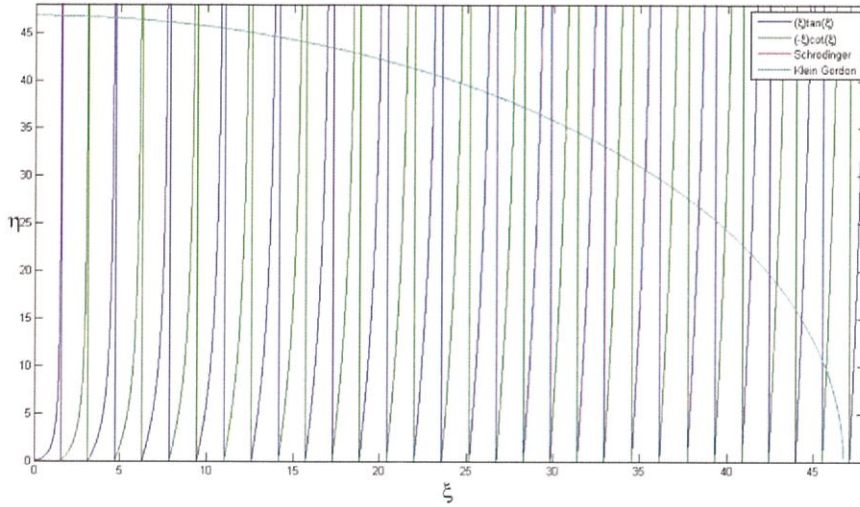
9. แสดงความแตกต่างของฟังก์ชันคลื่นที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ที่เงื่อนไข $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c$

10. แสดงความแตกต่างของความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้จากสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ที่เงื่อนไข $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c$

บทที่ 4

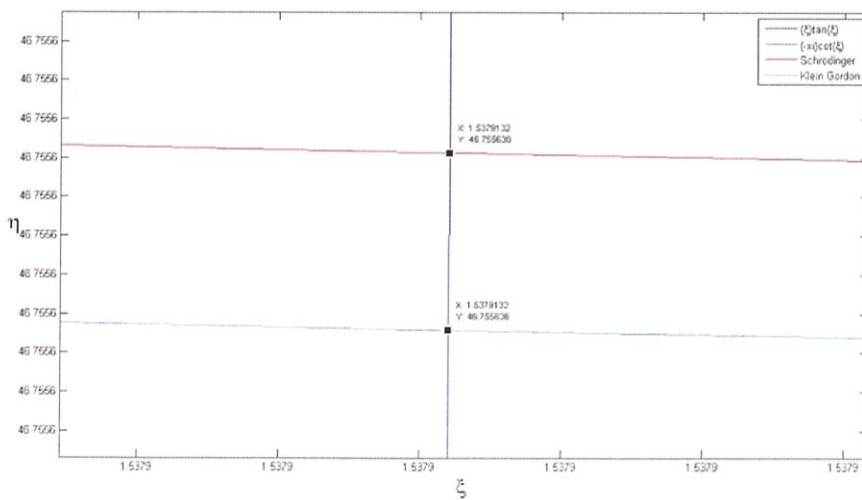
ผลการทดลองและอภิปรายผล

4.1 บ่อศักย์ กว้าง 1A ลึก 27 eV

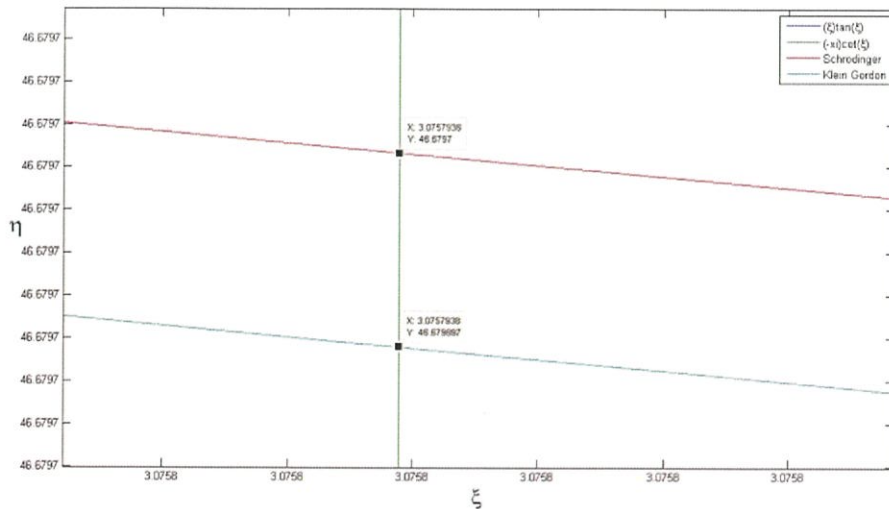


รูปที่ 4.1.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47),(48) และ (51)

จากรูปที่ 3.2.1 สมการวงกลมที่ได้จากสมการ ชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน ในเงื่อนไขที่บ่อศักย์กว้าง 1อังสตรอม และลึก 27eV ซึ่งคือเงื่อนไขที่กำหนดให้อนุภาคโพซอนถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ความกว้างประมาณ1อะตอม เราพบว่าเส้นกราฟของสมการทั้งสองมีค่าที่แตกต่างกันน้อยมาก จนซ้อนทับกัน



รูปที่ 4.1.2 จุดตัดแสดงค่าไอเกนพลังงานที่ 1



รูปที่ 4.1.3 จุดตัดแสดงค่าไอเกนพลังงานที่ 2

รูปที่ 4.1.2-4.1.3 แสดงภาพขยาย ของรูปที่ 2 แสดงค่าไอเกนต่างๆ ตั้งแต่ระดับพลังงานที่ 1 และ 2 ซึ่งเราพบว่า ค่าไอเกน ที่ได้จากสมการวงกลมของสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนนั้นมีค่าทศนิยมตรงกันถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 6 ที่เป็นแบบนี้เนื่องมาจากว่าเทอมของ $\hbar^2/m_0^2 c^2 a^2$, $V^2 a^2/\hbar^2 c^2$ มีค่าที่น้อยมากอยู่ในระดับสเกล 10^{-10} , 10^{-4} ซึ่งมีค่าที่น้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดของรัศมีวงกลมที่อยู่ในระดับสเกล 10^1 ซึ่งก็จะส่งผลให้สมการวงกลมที่ได้จากสมการไคลน์กอร์ดอนประมาณเหลือสมการวงกลมในรูปแบบสามัญปกติธรรมดา

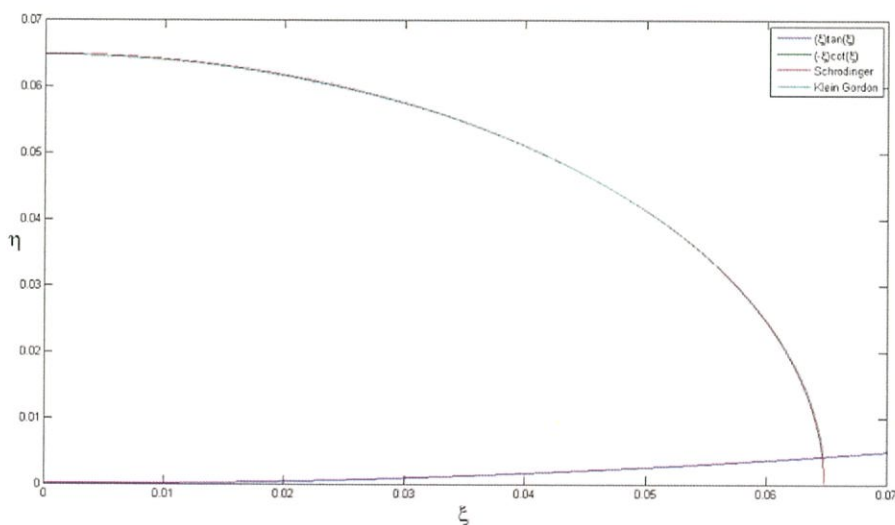
ตารางที่ 4.1.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคไพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก 27eV กว้าง 1 อังสตรอม ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.5379132	1.5379132	2.93631156	2.93631153
2	3.0757938	3.0757938	11.74499729	11.7449968
3	4.6136045	4.6136045	26.42525643	26.42525393
4	6.1513099	6.1513099	46.97574762	46.97573972
5	7.6888727	7.6888727	73.39455263	73.39453335
6	9.226253	9.226253	105.6791242	105.6790842
7	10.763412	10.763412	143.8263355	143.8262614
8	12.300308	12.300308	187.832379	187.8322526
9	13.836894	13.836894	237.6926291	237.6924267

10	15.373121	15.373121	293.4016672	293.4013589
11	16.908938	16.908938	354.9532441	354.9527928
12	18.444283	18.444283	422.33983	422.3391911
13	19.979094	19.979094	495.5529511	495.5520715
14	21.513296	21.513296	574.5824963	574.5813136
15	23.046808	23.046808	659.4168705	659.4153129
16	24.579535	24.579535	750.0423943	750.0403791
17	26.111367	26.111367	846.4429735	846.440407
18	27.642177	27.642177	948.5996793	948.5964558
19	29.171812	29.171812	1,056.489776	1,056.485777
20	30.700085	30.700085	1,170.085621	1,170.080716
21	32.22677	32.22677	1,289.353625	1,289.347669
22	33.751579	33.751579	1,414.251594	1,414.244429
23	35.274142	35.274142	1,544.725814	1,544.717266
24	36.793964	36.793964	1,680.70559	1,680.695471
25	38.310362	38.310362	1,822.094922	1,822.083029
26	39.822339	39.822339	1,968.756553	1,968.742668
27	41.328338	41.328338	2,120.480914	2,120.464806
28	42.825669	42.825669	2,276.914896	2,276.896325
29	44.308842	44.308842	2,437.357793	2,437.336512
30	45.762171	45.762171	2,599.870556	2,599.846342

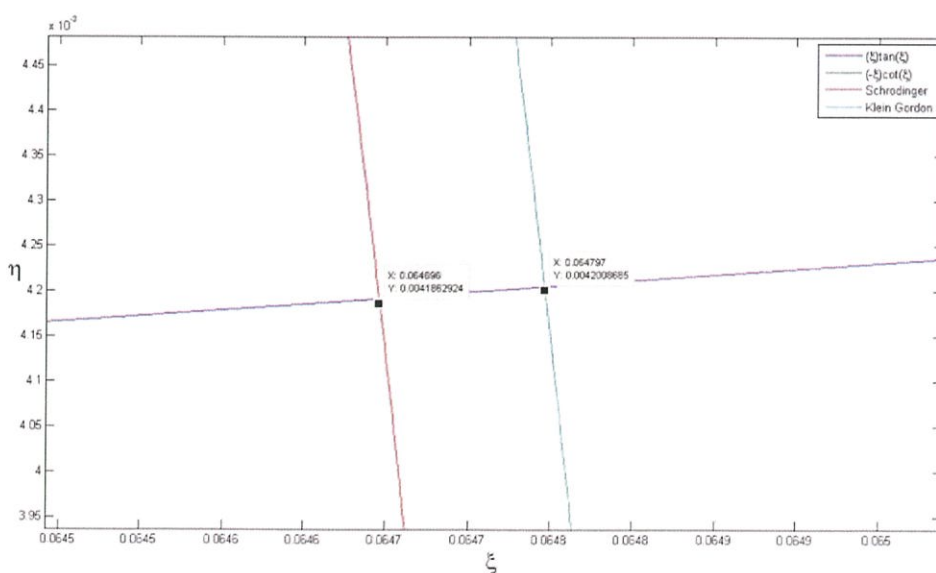
ซึ่งเราพบว่าถึงแม้ว่าสมการชเรอดิงเงอร์และโคลน์กอร์ดอนจะมีค่าไอเกนที่ตรงกันถึงทศนิยมลำดับที่ 6 แต่พบว่าความแตกต่างของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของพลังงาน ทำให้ระดับพลังงานที่หาได้มีค่าแตกต่างไปจากเดิมเล็กน้อย

4.2 บ่อศักย์ลึก $V = 884,145.6965eV$, $a \approx 1fm$



รูปที่ 4.2.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47),(48) และ (51) ที่ $V = 884,145.6965eV$, $a \approx 1fm$

จากรูปที่ 4.2.1 ในเงื่อนไขนี้เราทดลองให้อนุภาคโพซอนถูกกักขัง ในบ่อศักย์ที่แคบลงและความลึกของบ่อศักย์สูงมากยิ่งขึ้น ซึ่งเราจะกำหนดให้อนุภาคถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่กว้างประมาณนิวเคลียสของอะตอม และถูกกักขังด้วยแรงนิวเคลียร์ในนิวเคลียส ซึ่งเราจะพบว่าเส้นกราฟของสมการวงกลม ทั้งสองจะเริ่มซ้อนเหลื่อมกันจนสามารถมองเห็นได้อย่างชัดเจนกว่าในเงื่อนไขที่ให้อนุภาคถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่กว้างประมาณอะตอม



รูปที่ 4.2.2 ภาพขยายแสดงจุดตัดค่าไอเกนพลังงาน ที่ $V = 884,145.6965eV$, $a \approx 1fm$

จากรูปที่ 4.2.2 เราพบว่าจุดตัดของสมการทั้งสอง จะมีความแตกต่างกันมากยิ่งขึ้นซึ่งเกิดขึ้นมาจากพจน์ของ $\hbar^2/m_0^2c^2a^2$, V^2a^2/\hbar^2c^2 จะมีค่าอยู่ในระดับสเกลประมาณ $1.998 \sim 10^{-5}$ ซึ่งเราพบว่าเทอมของ $\hbar^2/m_0^2c^2a^2$ มีค่าที่สูงกว่าเดิมมาก เมื่อเทียบกับรัศมีของวงกลม

ตารางที่ 4.2.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาค โฟตอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก

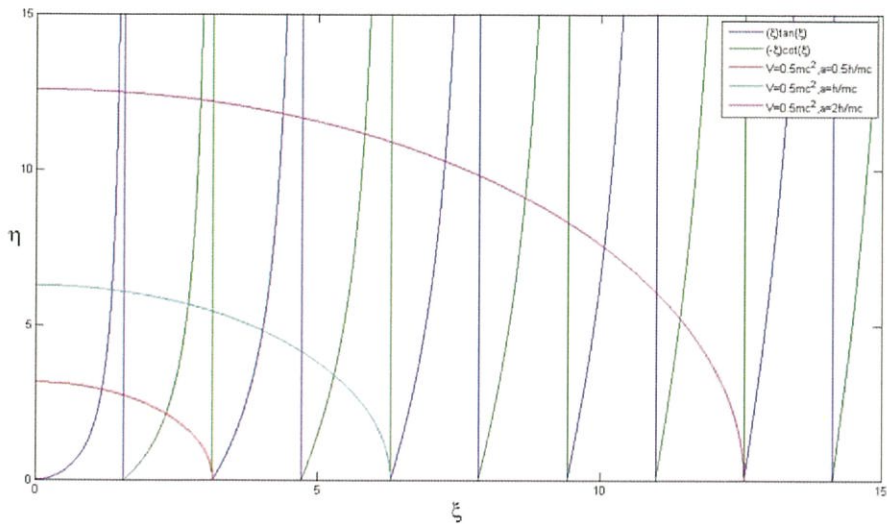
$V = 884,145.6965 eV$ และกว้าง $a \approx 1 fm$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	0.064696	0.064797	880,459.203	880,427.017

ซึ่งเราพบว่าจากเงื่อนไขทั้ง 2 ที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาตินั้น สมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอนนั้นให้ผลที่แทบจะไม่แตกต่างกันเลย หรือจะกล่าวได้ว่าทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษแทบจะไม่แสดงผลของความแตกต่างไปจากกลศาสตร์แบบดั้งเดิมเลย

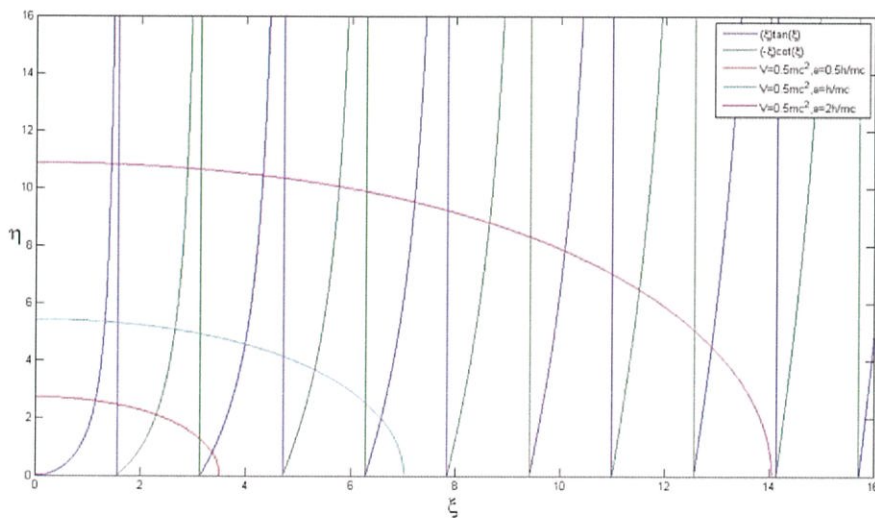
ซึ่งต่อไปเราจะกำหนดเงื่อนไขขึ้นมาเอง ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขที่ทำให้ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษมีผลมากขึ้น จนถึงจุดที่จะเป็นเงื่อนไขที่เป็นขีดจำกัดสูงสุดของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ โดยเราจะกำหนดเงื่อนไขให้ ความลึกของบ่อศักย์มีขนาด $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$ และความกว้างของบ่อเราจะกำหนดให้มันถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีความกว้างเป็นจำนวนเท่าของความยาวคลื่นของคอมตันดังนี้ $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$

4.3 บ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$



รูปที่ 4.3.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47)และ(48) ที่เงื่อนไข

$$V = 0.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$$



รูปที่ 4.3.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47)และ(51) ที่เงื่อนไข

$$V = 0.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$$

ตารางที่ 4.3.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.1842775	1.1524053	9,916,761.16	9,093,905.09
2	2.3137359	2.3104876	37,852,142.61	33,681,800.88
3		3.373379		65,222,759.88

ตารางที่ 4.3.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

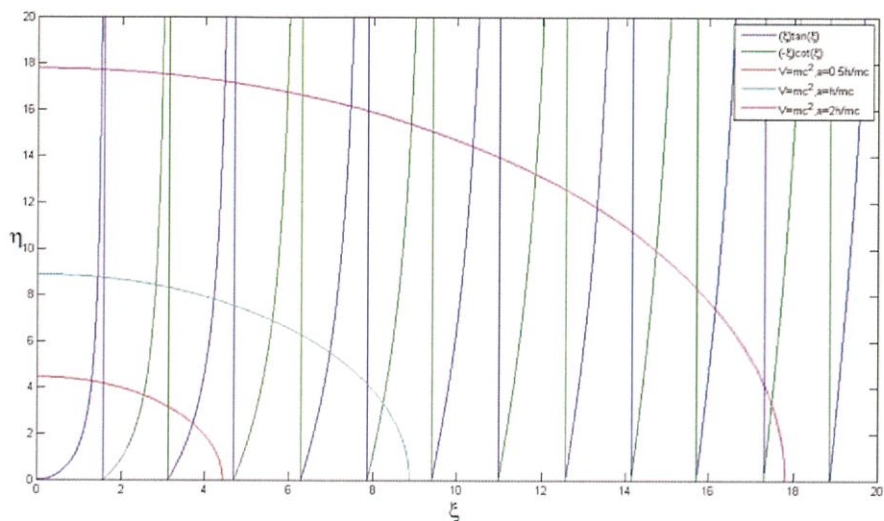
n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.3536938	1.3278924	3,239,244.91	3,082,893.46
2	2.6978008	2.6601198	12,865,381.36	11,993,215.50
3	4.0184667	3.9947783	28,544,579.76	25,820,618.00
4	5.2840825	5.3179812	49,356,242.03	43,280,828.09
5		6.5782192		62,499,152.54

ตารางที่ 4.3.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 0.5m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

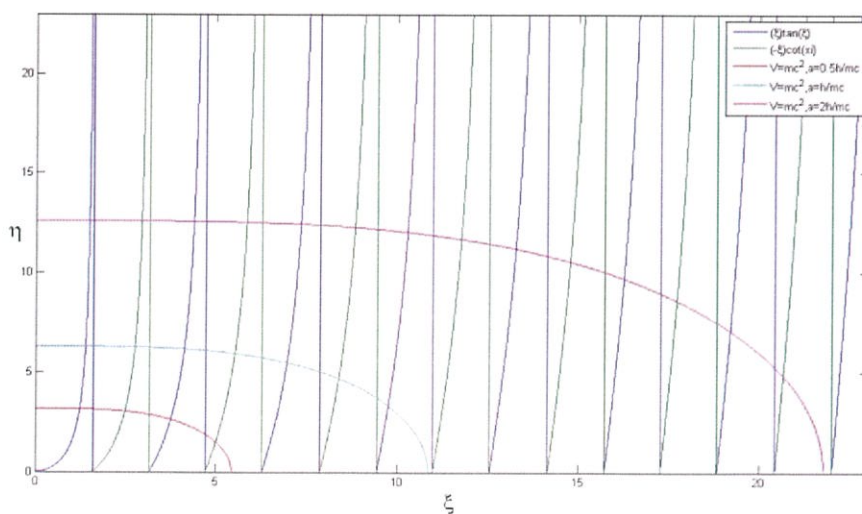
n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.4547696	1.4287789	935,257.82	899,241.11
2	2.9080602	2.8785197	3,737,228.91	3,614,875.18
3	4.3582158	4.3198224	8,393,834.00	8,016,380.41
4	5.803162	5.7626374	14,882,377.05	13,975,544.95
5	7.2399854	7.2060936	23,164,252.78	21,319,585.76
6	8.6640342	8.6480501	33,172,884.03	29,857,063.05
7	10.066502	10.084911	44,781,649.14	39,387,810.64

8	11.42507	11.50939	57,684,702.06	49,692,908.13
9		12.90287		60,472,043.99

4.4 บ่อศักย์ลึก $V = m_0c^2$



รูปที่ 4.4.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47) และ (48) ที่เงื่อนไข $V = m_0c^2$, $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$



รูปที่ 4.4.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47) และ (51) ที่เงื่อนไข $V = m_0c^2$, $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$

ตารางที่ 4.4.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก
 $V = m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.2788238	1.203965	11,563,367.22	9,898,227.45
2	2.5345081	2.4589902	45,420,327.81	37,670,320.34
3	3.7200312	3.7494235	97,848,925.73	77,746,958.70
4		5.0018932		122,842,105.37

ตารางที่ 4.4.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก
 $V = m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

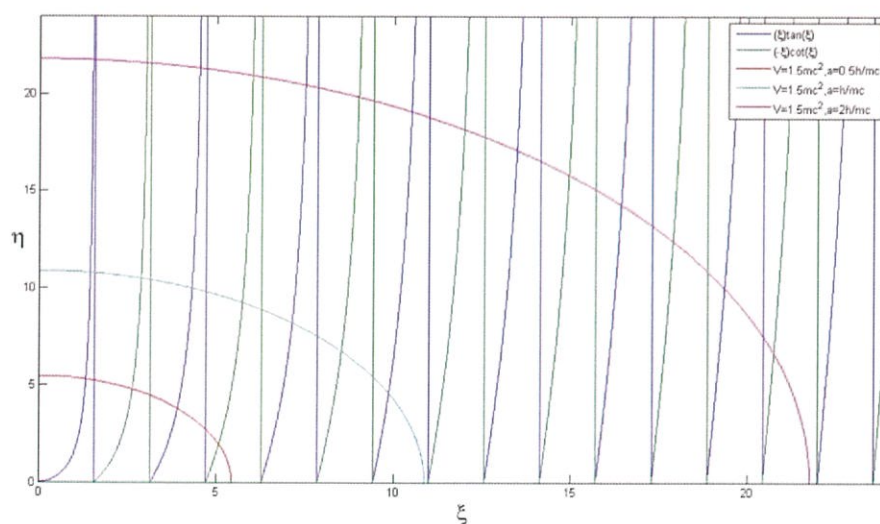
n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.4112934	1.3578909	3,520,768.96	3,222,168.40
2	2.8187881	2.730146	14,045,194.73	12,606,404.46
3	4.2177971	4.122583	31,446,641.80	27,360,999.09
4	5.6011712	5.5319586	55,457,539.88	46,386,962.64
5	6.9549662	6.9499371	85,505,283.93	68,548,309.66
6	8.2381212	8.3647063	119,966,298.77	92,818,068.95
7		9.7541607		118,163,336.85

ตารางที่ 4.4.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพออน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก
 $V = m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.4870237	1.4554835	977,189.28	933,057.12
2	2.9734844	2.9136772	3,907,277.38	3,702,568.44
3	4.4587841	4.3766926	8,785,688.52	8,222,925.54
4	5.9422491	5.8457316	15,604,311.87	14,362,528.77

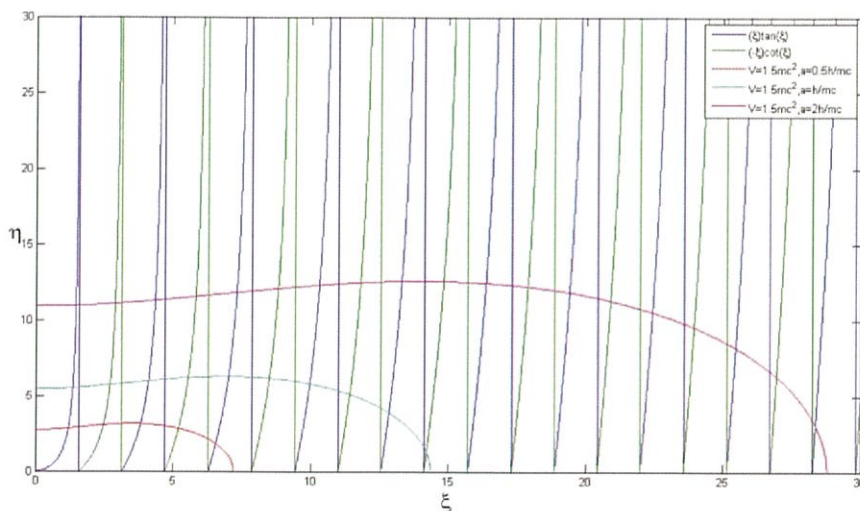
5	7.4230742	7.3209947	24,350,647.73	21,958,215.03
6	8.9002376	8.8019516	35,006,292.40	30,831,924.71
7	10.372356	10.287567	47,544,221.77	40,805,141.98
8	11.837417	11.776515	61,923,687.23	51,709,277.01
9	13.292198	13.267272	78,079,409.18	63,391,107.53
10	14.730822	14.758088	95,895,201.96	75,713,914.34
11	16.13983	16.246786	115,117,361.41	88,554,873.82
12	17.46481	17.730223	134,794,026.10	101,797,998.41
13		19.202735		115,316,656.23
14		20.649528		128,906,714.32

4.5 บ่อศักย์ลึก $V = 1.5m_0c^2$



รูปที่ 4.5.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47) และ (48) ที่เงื่อนไข

$$V = 1.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$$



รูปที่ 4.5.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47) และ (51) ที่เงื่อนไข

$$V = 1.5m_0c^2, a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$$

ตารางที่ 4.5.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 1.5m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.3248486	1.1770328	12,410,674.91	9,474,239.65
2	2.6358979	2.4634196	49,126,979.78	37,791,677.82
3	3.9105158	3.8274007	108,126,211.65	80,413,571.85
4	5.0792729	5.2094217	182,417,286.78	130,694,124.29
5		6.5546831		183,351,611.93

ตารางที่ 4.5.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก $V = 1.5m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.4382482	1.3336949	3,656,542.15	3,109,600.74
2	2.8743022	2.7007966	14,603,863.35	12,347,767.03
3	4.3056214	4.1103026	32,769,859.85	27,211,507.35
4	5.7288026	5.5522641	58,013,707.59	46,685,331.39

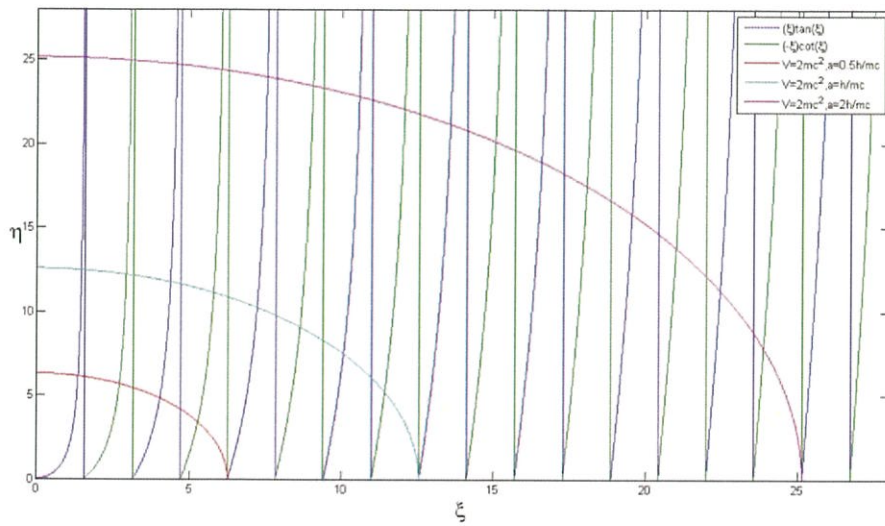
5	7.1385303	7.0133156	90,078,370.34	69,594,770.41
6	8.5247593	8.483093	128,459,774.92	94,926,028.24
7	9.861445	9.953858	171,903,223.18	121,903,580.79
8		11.418004		149,927,151.61
9		12.862685		178,419,077.92
10		14.229618		205,959,182.03

ตารางที่ 4.5.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก

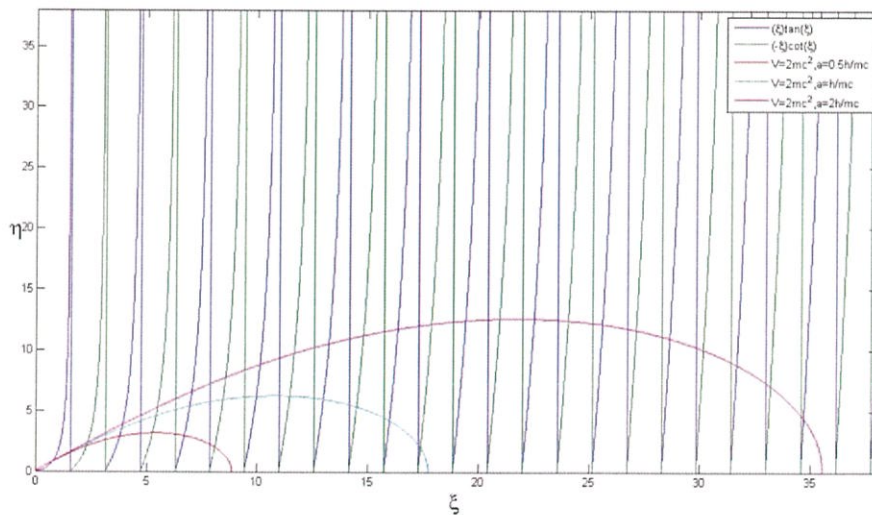
$V = 1.5m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.5017452	1.4398181	996,633.36	913,145.10
2	3.0031731	2.8864248	3,985,691.18	3,634,504.75
3	4.5039531	4.3445296	8,964,594.17	8,105,817.32
4	6.0037264	5.8159296	15,928,860.16	14,223,210.82
5	7.5020876	7.3000276	24,871,797.70	21,841,114.13
6	8.9985597	8.7949113	35,784,002.80	30,787,076.60
7	10.492556	10.29828	48,652,538.63	40,880,537.84
8	11.983332	11.807965	63,459,712.17	51,948,301.78
9	13.469875	13.322128	80,180,737.33	63,833,880.97
10	14.950751	14.839262	98,779,979.49	76,401,142.21
11	16.423755	16.35813	119,203,177.00	89,534,321.31
12	17.88514	17.877671	141,360,347.04	103,135,944.75
13	19.327418	19.396892	165,078,530.19	117,123,778.25
14	20.730059	20.914753	189,908,319.59	131,427,461.73
15		22.429998		145,984,692.67
16		23.94084		160,736,145.90
17		25.444232		175,616,402.55
18		26.933418		190,527,493.99
19		28.381513		205,169,674.34

4.6 บ่อศักย์ $V = 2m_0c^2$



รูปที่ 4.6.1 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47)และ(48) ที่เงื่อนไข $V = 2m_0c^2$,
 $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$



รูปที่ 4.6.2 กราฟแสดงค่าไอเกน ซึ่งคือจุดตัดระหว่างสมการที่ (47)และ(51) ที่เงื่อนไข $V = 2m_0c^2$,
 $a = 0.5h/m_0c, h/m_0c, 2h/m_0c$

ตารางที่ 4.6.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก
 $V = 2m_0c^2$ กว้าง $a = 0.5h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.3536538	0.77866544	12,956,213.94	4,223,216.11
2	2.6978006	2.2964109	51,461,517.80	33,312,014.81
3	4.0184667	3.783639	114,178,319.02	78,914,282.04
4	5.2840825	5.2508747	197,424,968.09	132,272,826.53
5		6.696468		189,043,171.33
6		8.0985795		246,344,559.05

ตารางที่ 4.6.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก
 $V = 2m_0c^2$ กว้าง $a = h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.4547687	0.78215962	3,741,026.66	1,077,260.86
2	2.29080584	2.3387452	9,276,400.04	9,355,182.23
3	4.3582131	3.8824138	33,575,294.41	24,494,968.38
4	5.8031582	5.416719	59,529,430.26	44,705,395.72
5	7.2399803	6.9449454	92,656,880.57	68,466,071.37
6	8.6640274	8.4657755	132,691,327.86	94,617,018.71
7	10.066493	9.9823851	179,126,276.27	122,439,653.14
8	11.425055	11.493511	230,738,202.40	151,397,737.31
9		12.997784		181,118,260.85
10		14.492083		211,300,498.46
11		15.968653		241,616,697.23
12		17.394437		271,252,396.45

ตารางที่ 4.6.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอน ที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ลึก
 $V = 2m_0c^2$ กว้าง $a = 2h/m_0c$ ระหว่างสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอน

n	ξ (Schrodinger)	ξ (KleinGordon)	E' (Schrodinger) (eV)	E' (KleinGordon) (eV)
1	1.5106530	0.78409208	1,008,491.75	271,428.19
2	3.0210955	2.3517551	4,033,404.91	2,423,111.66
3	4.5311103	3.9150959	9,073,026.58	6,616,877.87
4	6.0404662	5.4750557	16,124,409.97	12,671,826.21
5	7.5489094	7.0320505	25,183,224.72	20,366,778.18
6	9.0561526	8.5864776	36,243,520.71	29,470,309.37
7	10.561860	10.138696	49,297,367.42	39,762,309.13
8	12.065628	11.689007	64,334,329.23	51,045,994.06
9	13.566952	13.237649	81,340,622.47	63,152,363.02
10	15.065180	14.237649	100,297,836.41	71,346,185.98
11	16.559431	16.330548	121,180,777.43	89,291,461.71
12	18.048450	17.87497	143,953,668.19	103,111,402.77
13	19.530326	19.418057	168,562,863.29	117,321,097.89
14	21.001854	20.959752	194,920,799.80	131,855,989.87
15	22.456800	22.499936	222,863,351.35	146,662,614.71
16	23.879116	24.038416	251,987,736.32	161,696,151.98
17		25.574898		176,918,272.13
18		27.108946		192,295,210.16
19		28.639887		207,795,584.47
20		30.166636		223,387,607.95
21		31.68725		239,033,642.48
22		33.197589		254,675,498.58
23		34.684616		270,163,502.29

จากหัวข้อที่ 4.2 ถึงหัวข้อที่ 4.6 เราพบว่าเมื่อบ่อศักย์มีความลึกมากขึ้นจะส่งผลจำนวนสถานะ ของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อมากขึ้น และเมื่อคิดทฤษฎีสัมพัทธภาพ จะส่งผลให้จำนวนสถานะของอนุภาคมีมากขึ้นกว่าในกรณีที่ไม่คิดทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เนื่องจากสมการรวมกลมจะมีลักษณะที่

รื้อออกทำให้มีจุดตัดของสมการที่มากขึ้น และยิ่งความกว้างของบ่อศักย์ยิ่งกว้างก็ยิ่งส่งผลให้จำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกขังอยู่ในบ่อมากขึ้นเช่นกัน

4.7 บันทึกความแตกต่างระหว่างระดับพลังงานที่หามาได้จากสมการชเรอดิงเงอร์ ที่ความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

ตารางที่ 4.7.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีความกว้าง $a = 0.5h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

n	$E'(V = 0.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 1.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 2m_0c^2)$ (eV)
1	9,916,761.16	11,563,367.22	12,410,674.91	12,956,213.94
2	37,852,142.61	45,420,327.81	49,126,979.78	51,461,517.80
3		97,848,925.73	108,126,211.65	114,178,319.02
4			182,417,286.78	197,424,968.09

ตารางที่ 4.7.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีความกว้าง $a = h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

n	$E'(V = 0.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 1.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 2m_0c^2)$ (eV)
1	3,239,244.91	3,520,768.96	3,656,542.15	3,741,026.66
2	12,865,381.36	14,045,194.73	14,603,863.35	9,276,400.04
3	28,544,579.76	31,446,641.80	32,769,859.85	33,575,294.41
4	49,356,242.03	55,457,539.88	58,013,707.59	59,529,430.26
5		85,505,283.93	90,078,370.34	92,656,880.57
6		119,966,298.77	128,459,774.92	132,691,327.86
7			171,903,223.18	179,126,276.27
8				230,738,202.40

ตารางที่ 4.7.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโฟตอนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีความกว้าง $a = 2h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

n	$E'(V = 0.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 1.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 2m_0c^2)$ (eV)
1	935,257.82	977,189.28	996,633.36	1,008,491.75
2	3,737,228.91	3,907,277.38	3,985,691.18	4,033,404.91
3	8,393,834.00	8,785,688.52	8,964,594.17	9,073,026.58
4	14,882,377.05	15,604,311.87	15,928,860.16	16,124,409.97
5	23,164,252.78	24,350,647.73	24,871,797.70	25,183,224.72
6	33,172,884.03	35,006,292.40	35,784,002.80	36,243,520.71
7	44,781,649.14	47,544,221.77	48,652,538.63	49,297,367.42
8	57,684,702.06	61,923,687.23	63,459,712.17	64,334,329.23
9		78,079,409.18	80,180,737.33	81,340,622.47
10		95,895,201.96	98,779,979.49	100,297,836.41
11		115,117,361.41	119,203,177.00	121,180,777.43
12		134,794,026.10	141,360,347.04	143,953,668.19
13			165,078,530.19	168,562,863.29
14			189,908,319.59	194,920,799.80
15				222,863,351.35
16				251,987,736.32

4.8 บันทึกความแตกต่างระหว่างระดับพลังงานที่หามาได้จากสมการไคลน์กอร์ดอน ที่ความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

ตารางที่ 4.8.1 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโฟตอนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีความกว้าง $a = 0.5h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

n	$E'(V = 0.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 1.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 2m_0c^2)$ (eV)
1	9,093,905.09	9,898,227.45	9,474,239.65	4,223,216.11
2	33,681,800.88	37,670,320.34	37,791,677.82	33,312,014.81

3	65,222,759.88	77,746,958.70	80,413,571.85	78,914,282.04
4		122,842,105.37	130,694,124.29	132,272,826.53
5			183,351,611.93	189,043,171.33
6				246,344,559.05

ตารางที่ 4.8.2 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีความกว้าง $a = h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

n	$E'(V = 0.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 1.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 2m_0c^2)$ (eV)
1	3,082,893.46	3,222,168.40	3,109,600.74	1,077,260.86
2	11,993,215.50	12,606,404.46	12,347,767.03	9,355,182.23
3	25,820,618.00	27,360,999.09	27,211,507.35	24,494,968.38
4	43,280,828.09	46,386,962.64	46,685,331.39	44,705,395.72
5	62,499,152.54	68,548,309.66	69,594,770.41	68,466,071.37
6		92,818,068.95	94,926,028.24	94,617,018.71
7		118,163,336.85	121,903,580.79	122,439,653.14
8			149,927,151.61	151,397,737.31
9			178,419,077.92	181,118,260.85
10			205,959,182.03	211,300,498.46
11				241,616,697.23
12				271,252,396.45

ตารางที่ 4.8.3 ตารางเปรียบเทียบระดับพลังงานของอนุภาคโพซอนที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีความกว้าง $a = 2h/m_0c$ และความลึกของบ่อศักย์ $V = 0.5m_0c^2, m_0c^2, 1.5m_0c^2, 2m_0c^2$

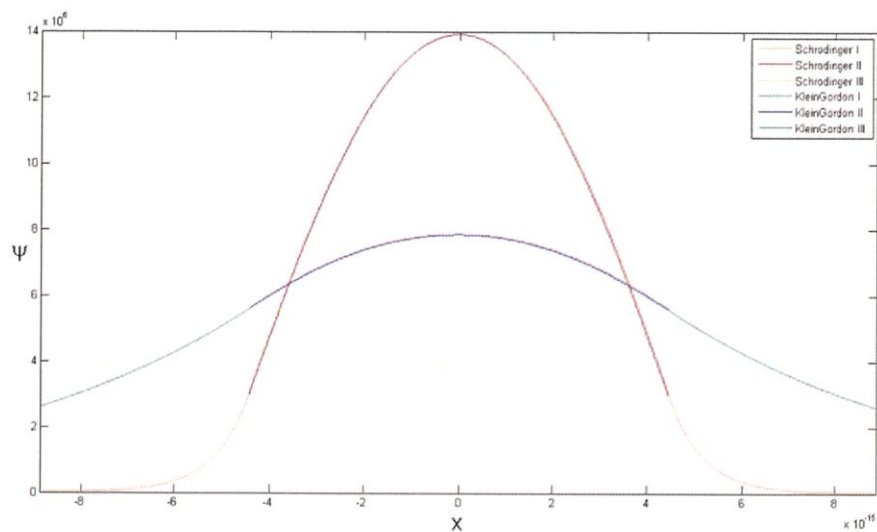
n	$E'(V = 0.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 1.5m_0c^2)$ (eV)	$E'(V = 2m_0c^2)$ (eV)
1	899,241.11	933,057.12	913,145.10	271,428.19
2	3,614,875.18	3,702,568.44	3,634,504.75	2,423,111.66
3	8,016,380.41	8,222,925.54	8,105,817.32	6,616,877.87
4	13,975,544.95	14,362,528.77	14,223,210.82	12,671,826.21

5	21,319,585.76	21,958,215.03	21,841,114.13	20,366,778.18
6	29,857,063.05	30,831,924.71	30,787,076.60	29,470,309.37
7	39,387,810.64	40,805,141.98	40,880,537.84	39,762,309.13
8	49,692,908.13	51,709,277.01	51,948,301.78	51,045,994.06
9	60,472,043.99	63,391,107.53	63,833,880.97	63,152,363.02
10		75,713,914.34	76,401,142.21	71,346,185.98
11		88,554,873.82	89,534,321.31	89,291,461.71
12		101,797,998.41	103,135,944.75	103,111,402.77
13		115,316,656.23	117,123,778.25	117,321,097.89
14		128,906,714.32	131,427,461.73	131,855,989.87
15			145,984,692.67	146,662,614.71
16			160,736,145.90	161,696,151.98
17			175,616,402.55	176,918,272.13
18			190,527,493.99	192,295,210.16
19			205,169,674.34	207,795,584.47
20				223,387,607.95
21				239,033,642.48
22				254,675,498.58
23				270,163,502.29

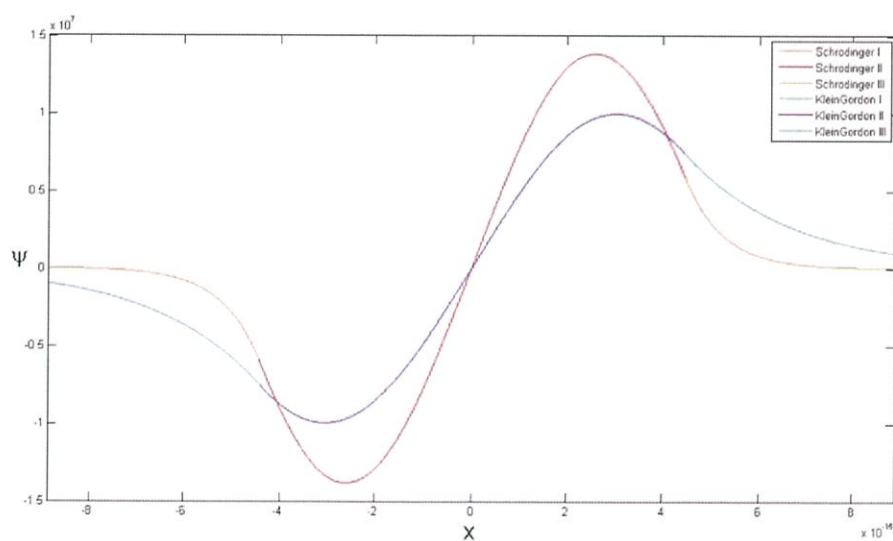
จากหัวข้อที่ 4.3-4.6 เราพบว่า ในกรณีที่บ่อศักย์มีความสูงเท่าๆกัน จำนวนสถานะ จะขึ้นอยู่กับความกว้างของบ่อศักย์ ยิ่งความกว้างของบ่อศักย์ยิ่งมากยิ่งส่งผลให้จำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ได้ยังมีจำนวนมากยิ่งขึ้น

และจากหัวข้อที่ 4.7-4.8 เราพบว่าในกรณีที่ความกว้างของบ่อศักย์มีค่าเท่าๆกัน จำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกขังอยู่ในบ่อศักย์ จะขึ้นอยู่กับความสูงของบ่อศักย์ด้วย คือยิ่งความสูงของบ่อศักย์มีค่าที่สูงมากขึ้น จำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกกักขังอยู่ในบ่อศักย์ก็จะยิ่งมีมากขึ้นด้วยเช่นเดียวกัน

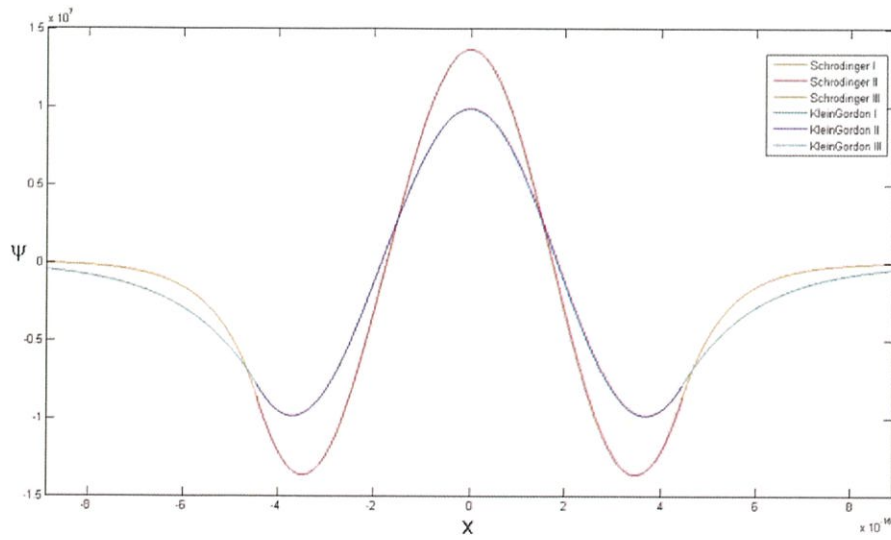
4.9 กราฟแสดงฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอนใน
 ปोटัสกัยที่มีเงื่อนไข $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c$ ที่สถานะต่างๆ



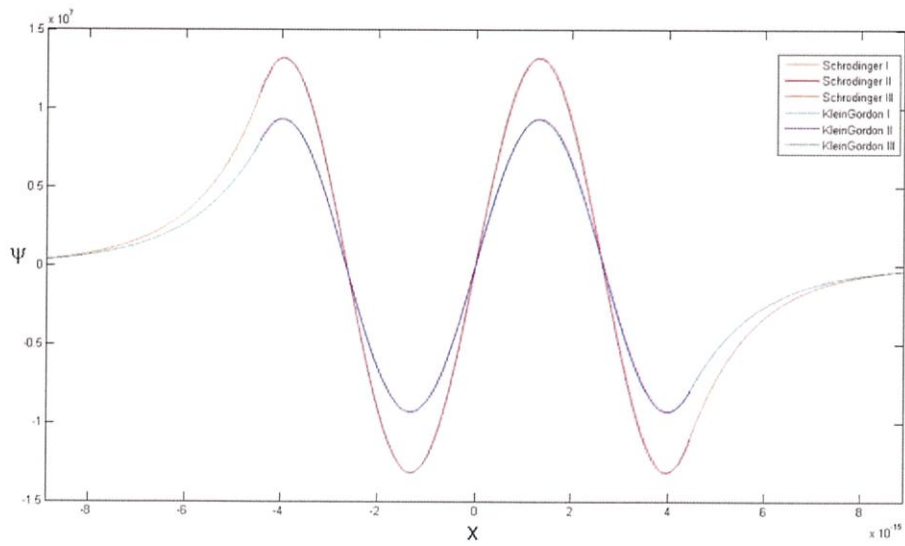
รูปที่ 4.9.1 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะ
 ที่ 1



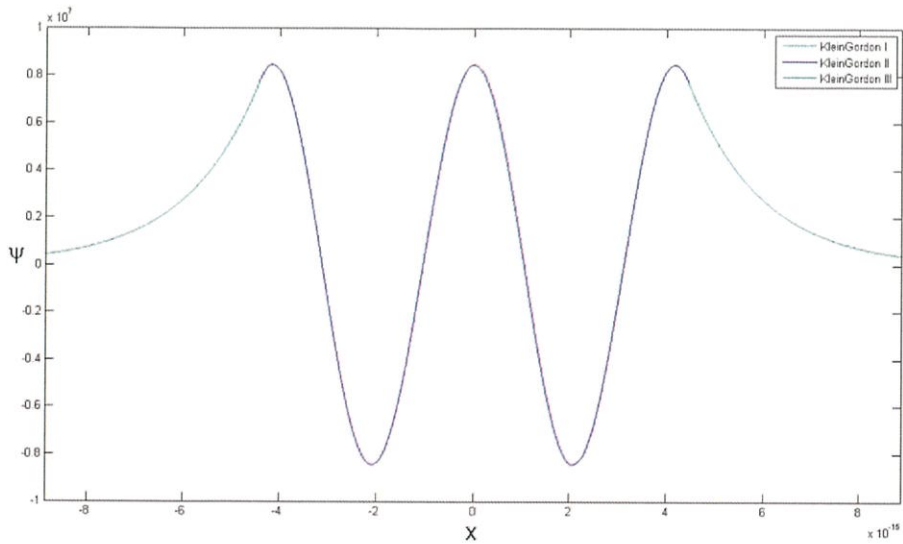
รูปที่ 4.9.2 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะ
 ที่ 2



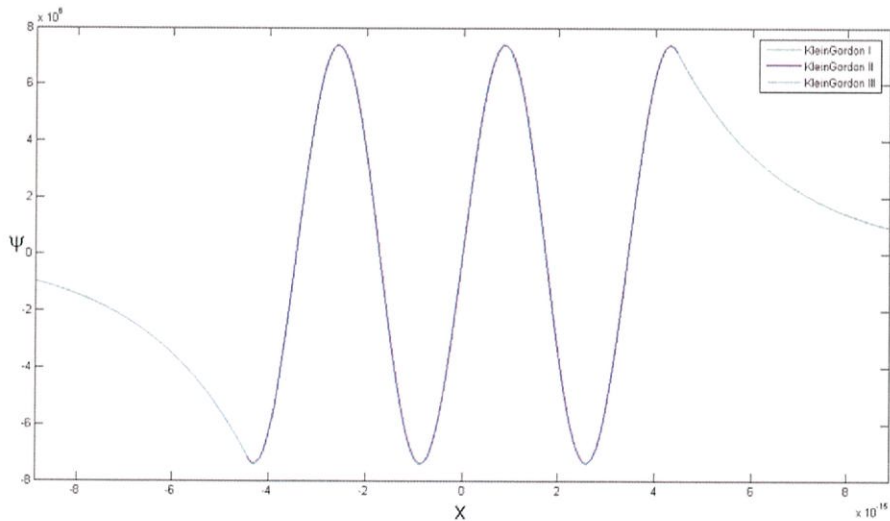
รูปที่ 4.9.3 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 3



รูปที่ 4.9.4 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 4



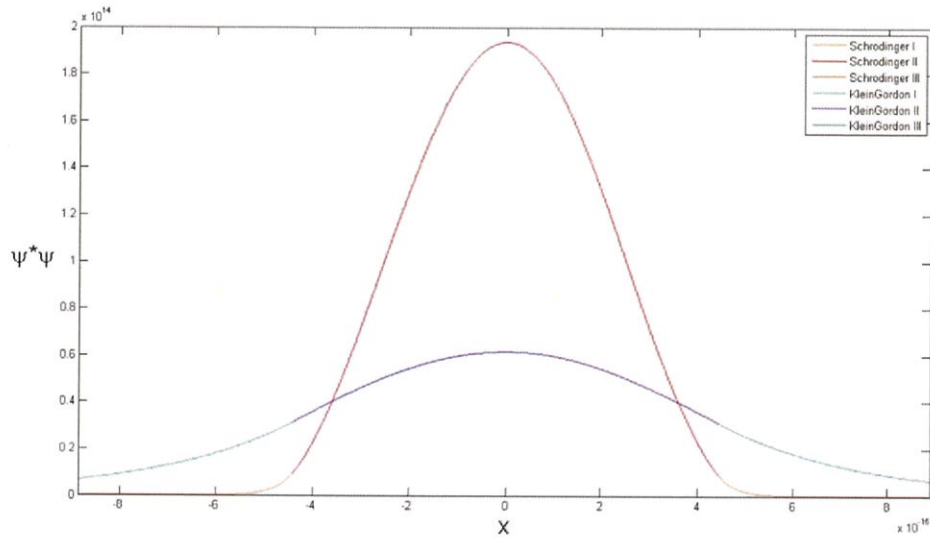
รูปที่ 4.9.5 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 5



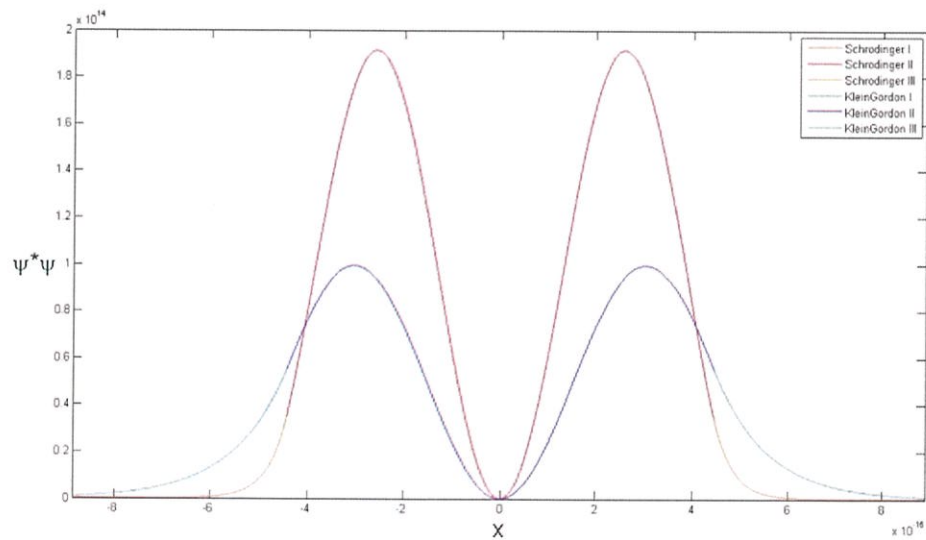
รูปที่ 4.9.6 รูปเปรียบเทียบฟังก์ชันคลื่นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 6

เราพบว่าจากหัวข้อที่ 4.6 ตารางที่ 4.61 อนุภาคที่ถูกขังอยู่ในบ่อศักย์ที่มีเงื่อนไข $V = 2m_0c^2$, $0.5h/m_0c$ สถานะของอนุภาคที่หาได้จากสมการชเรอดิงเงอร์จะมีอยู่ 4 สถานะ และสถานะที่หาได้จากสมการไคลน์กอร์ดอนจะมีอยู่ 6 สถานะ ซึ่งเพราะเหตุนี้ จึงทำให้ฟังก์ชันคลื่นที่หาได้จากสมการชเรอดิงเงอร์มีอยู่ทั้งสิ้นเพียง 4 สถานะตามไปด้วย แสดงให้เห็นได้จากรูปที่ 4.9.1-4.9.6

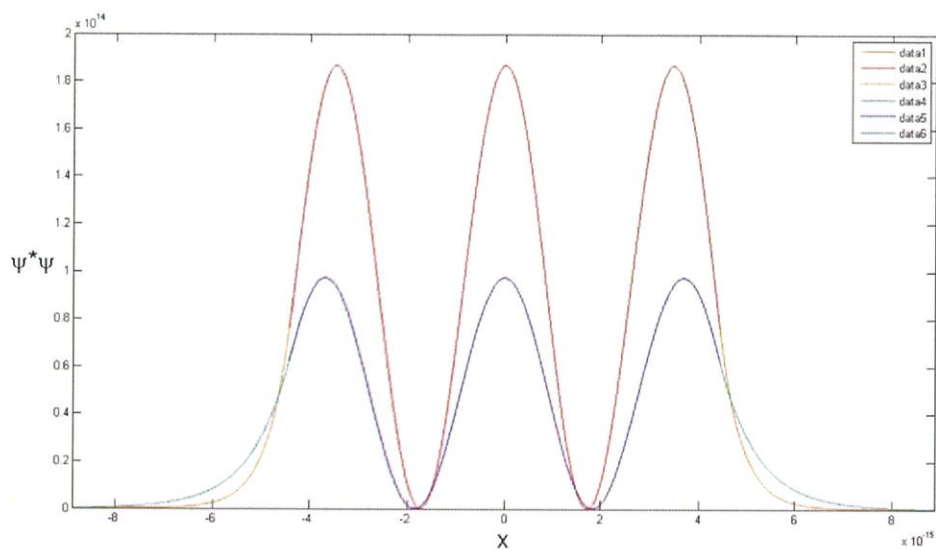
4.10 กราฟแสดงความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (ฟังก์ชันคลื่นกำลัง 2) ที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และสมการไคลน์กอร์ดอนในบ่อศักย์ที่มีเงื่อนไข $V = 2m_0c^2$, $a = 0.5h/m_0c$ ที่สถานะต่างๆ



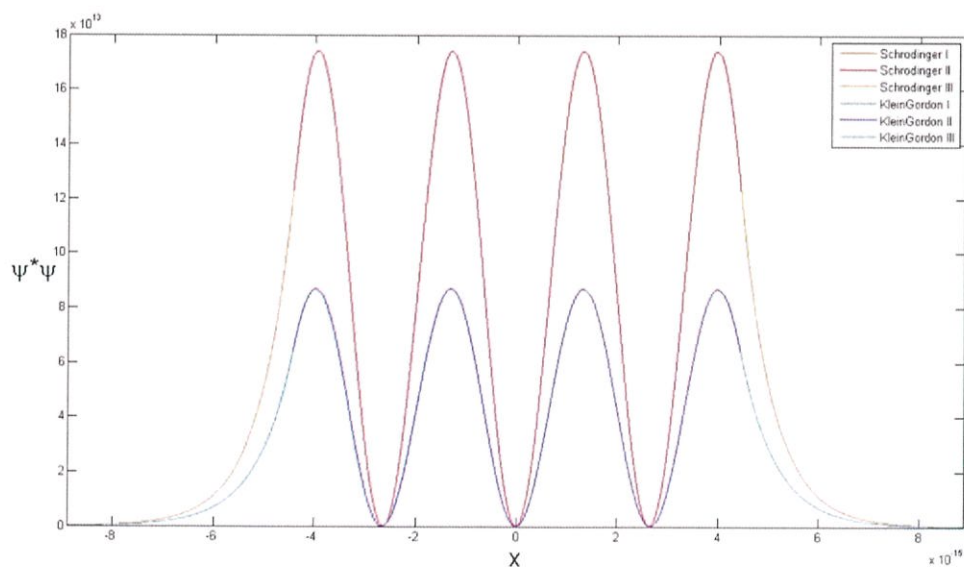
รูปที่ 4.10.1 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 1



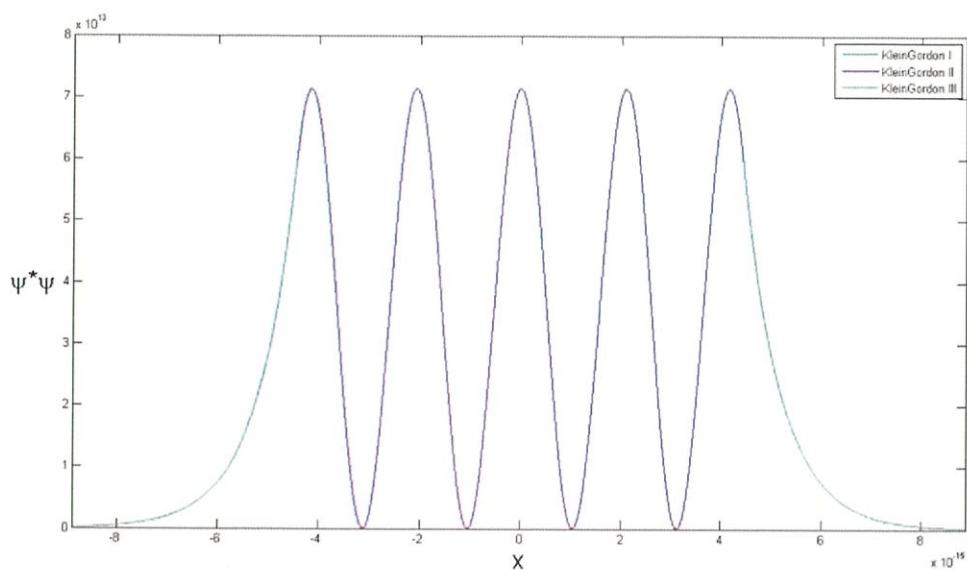
รูปที่ 4.10.2 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 2



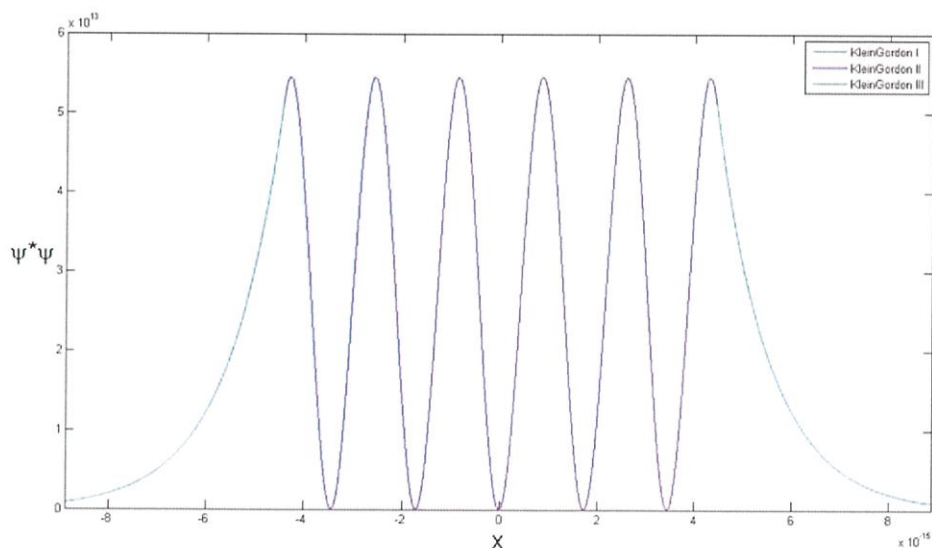
รูปที่ 4.10.3 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 3



รูปที่ 4.10.4 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 4



รูปที่ 4.10.5 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 5



รูปที่ 4.10.6 รูปเปรียบเทียบความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ได้มาจากสมการชเรอดิงเงอร์และไคลน์กอร์ดอนที่สถานะที่ 6

ในหัวข้อที่ 4.10 เราจะพบว่าเมื่อคิดทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ในเงื่อนไข $V = 2m_0c^2$ $a = 0.5h/m_0c$ เราพบว่าอนุภาคจะมีความหนาแน่นของความน่าจะเป็นน้อยกว่ากรณีที่ไม่คิดทฤษฎีสัมพัทธภาพ

บทที่ 5

สรุปผลการทดลอง

1. เมื่อพลังงานศักย์ของบ่อศักย์สูงขึ้นจะทำให้จำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกขังในบ่อศักย์มากขึ้น
2. เมื่อความกว้างของบ่อศักย์กว้างขึ้นจะทำให้จำนวนสถานะของอนุภาคที่ถูกขังในบ่อศักย์มากขึ้น
3. จำนวนสถานะ และพลังงานของอนุภาคในแต่ละระดับพลังงาน ของอนุภาคในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษและไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษ ในกรณีที่ใช้เงื่อนไขที่พบในธรรมชาติ พบว่าจำนวนสถานะและพลังงานของอนุภาคที่ถูกขังอยู่ในบ่อ แทบไม่มีความแตกต่างกัน
4. อนุภาคที่ถูกขังอยู่ในบ่อศักย์ในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษเราพบว่า พลังงานศักย์ที่มากที่สุดที่สามารถขังอนุภาคไว้ได้จะต้องมีค่าไม่เกิน $V = 2m_0c^2$ เพราะจะทำให้สมการที่(51) ได้ค่าออกมาเป็นจำนวนจินตภาพ ซึ่งในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษจะไม่มีขีดจำกัดในการป้อนค่าพลังงานศักย์
5. จำนวนสถานะและพลังงานของอนุภาค ในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษ จะเริ่มมีความแตกต่างจากกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษอย่างเห็นได้ชัดเจน เมื่อ $V > 0.5m_0c^2$ ขึ้นไป(แต่ไม่เกิน $2m_0c^2$) โดยที่เราพบว่าจำนวนสถานะของอนุภาค ในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษ จะมีจำนวนสถานะเพิ่มขึ้น มากกว่ากรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษ
6. ในเงื่อนไขที่ $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c$ ในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษอนุภาคจะมีสถานะที่ถูกขังอยู่ในบ่อศักย์ได้ 4 สถานะ และในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษอนุภาคจะมีสถานะที่ถูกขังอยู่ในบ่อศักย์ได้ 6 สถานะ
7. ในเงื่อนไขที่ $V = 2m_0c^2, a = 0.5h/m_0c$ พบว่าความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคจะในกรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษจะได้ความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ต่ำกว่ากรณีที่ไม่คิดสัมพัทธภาพพิเศษ

เอกสารอ้างอิง

- [1] กลศาสตร์ ควอนตัม ,นรา จิรภัทรพิมล,สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- [2] กลศาสตร์ควอนตัมพื้นฐาน Basic Quantum Mechanics,ศาสตราจารย์ ดร.สิทธิชัย โภไคยอุดม
- [3] RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS WAVE EQUATION Third Edition, Walter Greiner