โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

COMPUTER PROGRAM FOR SOLUTION OF LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

กิตติกาญจน์ กาไผ่
ณัฐวุฒิ อัศวมาชัย
วรวุฒิ จิรประพันธ์

โครงงานพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2556

โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

COMPUTER PROGRAM FOR SOLUTION OF LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

กิตติกาญจน์ จาไผ่
ณัฐวุฒิ อัศวมาชัย
วรวุฒิ จิรประพันธ์

โครงงานพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

COMPUTER PROGRAM FOR SOLUTION OF LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kitikan Japai

Nuttawut Assawamachai

Worrawut Chirapraphun

A SPECIAL PROJECT SUMITED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อโครงงานปัญหาพิเศษ	โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น Computer program for solution of linear system of Differential equations.
ชื่อนักศึกษา	นายกิตติกาญจน์ จาไผ่ 53050004 นายณัฐวุฒิ อัศวมาชัย 53050035 นายวรวุฒิ จิรประพันธ์ 53050103
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล อ. เทิดขวัญ ช้างเผือก

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ ประธานกรรมการ	
อ.จินดา ไชยช่วย กรรมการ	
รศ.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อ.เทิดขวัญ ช้างเผือก กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อโครงงานปัญหาพิเศษ	โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น		
ชื่อนักศึกษา	นายกิตติกาญจน์	จาไผ่	53050004
	นายณัฐวุฒิ	อัศวมาชัย	53050035
	นายวรวุฒิ	จิรประพันธ์	53050103
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต		
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
ปีการศึกษา	2556		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล อ. เทิดขวัญ ช้างเผือก		

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาระบบการทำงานในร่างกายของมนุษย์ เช่น ระบบการย่อย ระบบการหายใจที่เลือดแลกออกซิเจนจากปอด ซึ่งมีการแลกเปลี่ยนจากระบบภายนอกร่างการเป็นระบบภายในร่างกาย โดยผู้วิจัยต้องการศึกษาการแพร่ของสารผ่านเนื้อเยื่อ เพื่อที่จะสร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการแพร่ของสารผ่านเนื้อเยื่อ โดยใช้ Runge-Kutta 4^{th} order ในการหาผลเฉลยและจัดทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อนำไปแก้โมเดลทางคณิตศาสตร์นอกจากนี้ยังนำผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมไปเปรียบเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป และ เปรียบเทียบกับการหาผลเฉลยด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอีกด้วย

Special Problem Title	Computer program for solution of linear system of Differential equations.
Student	Mr. Kitikan Japai 53050004 Mr. Nuttawut Assawamachai 53050035 Mr. Worrawut Chirapraphun 53050103
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2013
Advisor	Assoc. Prof. Pakkinee Chitsakul Miss.Thurdkwan Changpuek

ABSTRACT

In this special problem, we study about the human body system such as digestion system, respiratory system that blood from lung to exchange oxygen, which the exchange of the external system is a system within the body. And we require to study the diffusion of substance through the tissues. In order to create mathematical modeling related to the diffusion. We use the Runge-Kutta 4^{th} order to find the solution and build computer program to solve mathematical model. In addition to we take the solution to compare with MATLAB Programing and analytic solution

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นให้ประสบผลสำเร็จและผ่านไปได้ด้วยดีต้องกล่าวขอบคุณบุคคลเหล่านี้ คือ รศ. ภิคินี ชิตสกุล อ.เทิดขวัญ ช้างเผือก ดร.ศิริพร แฮนน่า วินเทอร์ และ อ.จินดา ไชยช่วย ซึ่งท่านบุคคลเหล่านี้ได้เป็นคณะกรรมการ และอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษนี้ และ ช่วยให้คำปรึกษาและตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้ขอขอบคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทั้งในด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ เจ้าหน้าที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ช่วยอำนวยเรื่องการเบิกอุปกรณ์ต่างๆและขอกราบขอบคุณบิดา-มารดา ที่ให้การสนับสนุนทางด้านการศึกษาและกำลังใจตลอดมา สุดท้ายนี้ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆที่ช่วยเหลือและให้คำแนะนำจนปัญหาพิเศษนี้เสร็จสมบูรณ์

นายกิตติกาญจน์ จาไผ่
นายณัฐวุฒิ อัศวมาชัย
นายวรวุฒิ จิรประพันธ์

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ

สารบัญตาราง

บทที่ 1
บทนำ

1.1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาทางชีววิทยามีรูปแบบที่แตกต่างกันมากมาย เช่น ระบบการย่อย ที่เกี่ยวกับการไหลของเลือดไปเลี้ยงเนื้อเยื่อต่างๆ ระบบหายใจที่เลือดแลกเปลี่ยนออกซิเจนจากปอด ซึ่งเป็นการแลกเปลี่ยนจากระบบภายนอกร่างกายเข้าไปยังระบบภายในร่างกาย ในขบวนการเหล่านี้มีการดำเนินการไป ไม่เพียงแต่เป็นกระบวนการทางกายภาพ แต่เป็น กระบวนการทางเคมีด้วย โดยผู้วิจัยต้องการศึกษาการสร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาคำตอบของปัญหาอัตราการแพร่ของสารที่เข้าสู่ร่างกาย นอกจากนี้ผู้วิจัยต้องการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ง่ายต่อการหาอัตราการแพร่ของสารที่เข้าสู่ร่างกาย โดยโปรแกรมที่สร้างขึ้นนี้สามารถใช้งานได้ง่าย

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงานวิจัย

1. เพื่อศึกษาหาอัตราการแพร่ของสารผ่านเนื้อเยื่อในร่างกายมนุษย์
2. เพื่อศึกษาวิธีการแพร่ของสารที่ผ่านเนื้อเยื่อในร่างการแต่ละแบบ เช่น one-compartment
3. เพื่อสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ช่วยให้ง่ายต่อการคำนวณหาอัตราการแพร่ของสาร
4. เพื่อเปรียบเทียบการทำงานของโปรแกรมที่สร้างขึ้นกับโปรแกรมสำเร็จรูป

1.3. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รู้วิธีการแพร่ของสารในร่างกายมนุษย์
2. ได้รู้อัตราการแพร่ของสารที่ผ่านเนื้อเยื่อในร่างกายมนุษย์
3. ได้รู้วิธีการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์
4. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นง่ายต่อการใช้งานและสามารถนำไปใช้ได้จริง
5. ได้รู้ถึงประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นเมื่อเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป

1.4. ขอบเขตของปัญหา

ศึกษาหาวิธีการแพร่ของสารในร่างกายมนุษย์และหาอัตราการแพร่ของสารที่ผ่านเนื้อเยื่อในร่างการมนุษย์ แล้วสร้างสมการทางคณิตศาสตร์และใช้ความรู้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ มาช่วยในการหาคำตอบของสมการ สร้างโปรแกรมเพื่อให้ง่ายต่อการใช้งานแล้วนำมาเปรียบเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาหาวิธีการแพร่ของสารในร่างกายมนุษย์
2. วิเคราะห์วิธีการแพร่และกำหนดตัวแปร
3. สร้างสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อหาอัตราการแพร่
4. สร้างโปรแกรมจากสมการ
5. นำโปรแกรมที่ได้มาเปรียบเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป
6. จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ
7. นำเสนอรายงานวิจัย

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

6 เดือน

ระยะเวลาดำเนินงานตามแผนงานแสดงไว้ในตารางที่ 1.1

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินงาน								
	ปี 2556							ปี 2557	
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1.ศึกษาหาวิธีการแพร่ของสารในร่างกายมนุษย์									
2.วิเคราะห์วิธีการแพร่และกำหนดตัวแปร									
3.สร้างสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อหาอัตราการแพร่									
4.สร้างโปรแกรมจากสมการและโปรแกรมที่ได้มาเปรียบเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป									
5. จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษและนำเสนอรายงานวิจัย									

ตาราง 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ระบบสมการเชิงเส้น

ตัวอย่างของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น เช่น

$$x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + \sin t$$

$$y'(t) = 4x(t) - 5y(t) + \cos(t^2) + t$$

เมื่อ $x(t), y(t)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่าที่เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

ตัวอย่าง 2.1 จงแสดงให้เห็นจริง $x = e^t$, $y = e^{2t}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$x'(t) = x + 2y - 2e^{2t} \tag{2.1}$$

$$y'(t) = 3x + 2y - 3e^t \tag{2.2}$$

ผลเฉลย จะแสดงว่า $x = e^t$, $y = e^{2t}$ สอดคล้องกับทั้ง (2.1) และ (2.2)

แทน $x = e^t, y = e^{2t}$ ใน (2.1) จะได้

$$(e^t)' = e^t + 2e^{2t} - 2e^{2t} \quad \text{หรือ} \quad e^t = e^t$$

ขณะที่แทน $x = e^t$, $y = e^{2t}$ ใน (2.2) จะได้

$$(e^{2t})' = 3e^t + 2e^{2t} - 3e^t \quad \text{หรือ} \quad 2e^{2t} = 2e^{2t}$$

ดังนั้น $x = e^t$, $y = e^{2t}$ เป็นผลเฉลยของระบบ สมการ

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$3x''(t) + 3y'(t) + 3x(t) + 5y(t) = 3 \tag{2.3}$$

$$x''(t) + y'(t) + x(t) + 2y(t) = t \tag{2.4}$$

เนื่องจากระบบสมการเป็นอนุพันธ์อันดับสองของ x และอนุพันธ์หนึ่งของ y ผลเฉลยมีตัวคงค่าใดๆ 3 ตัว คูณสมการ (2.4) ด้วย 3 แล้วลบด้วย (2.3) จะได้ระบบใหม่ที่มีผลเฉลยเดียวกันคือ

$$y(t) = 3t - 3 \tag{2.5}$$

$$x''(t) + y'(t) + x(t) + 2y(t) = t \tag{2.6}$$

แทน $y(t)$ ใน (2.6)

$$y(t) = 3 - 3t \tag{2.7}$$

$$x''(t) + x(t) = -5t + 3 \tag{2.8}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์หาผลเฉลยของ x จาก (2.7) ได้ผลลัพธ์คือ

$$x(t) = -5t + 3 + c_1 \cos t + c_2 \sin t \tag{2.9}$$

$$y(t) = 3t - 3 \tag{2.10}$$

ข้อสังเกต มีค่าคงที่ใดๆ 2 ตัวเท่านั้นในผลเฉลย และไม่มีค่าคงที่ในส่วนของผลเฉลย y

การพิจารณาจำนวนของค่าคงตัวใดๆ

ขั้นตอนของการพิจารณาจำนวนของค่าคงตัวใดๆในระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

1. เขียนระบบสมการใหม่โดยใช้ตัวดำเนินการ D ให้ D แทนอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระและ $D'' = \dfrac{d''}{dt''}$ ดังนั้นจากตัวอย่าง 2.2 จะได้

$$\begin{aligned} (3D^2+3)x + (3D+5)y &= 3 \\ (D^2+1)x + (D+2)y &= t \end{aligned} \tag{2.11}$$

2. หาตัวกำหนดของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ ให้คิดว่า D เป็นตัวแปรจาก (2.11) จะได้

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} 3D^2+3 & 3D+5 \\ D^2+1 & D+2 \end{bmatrix} &= (3D^2+3)(D+2) - (3D+5)(D^2+1) \\ &= D^2+1 \end{aligned}$$

3. ระดับขั้นพหุนามใน D ที่เป็นผลลัพธ์ของข้อ 2 คือ จำนวนตัวคงค่าใดๆ จากตัวอย่าง D^2+1 เป็นพหุนามใน D มีระดับขั้น 2 ดังนั้น $(2.3),(2.4)$ มีตัวคงค่าใดๆ 2 ตัวในผลเฉลยทั่วไปซึ่งสังเกตได้จาก $(2.9),(2.10)$

ถ้าตัวกำหนดเป็นศูนย์ระบบสมการเรียกว่า ลดรูป (degenerate) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3 พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$x' + y' + 2x + 2y = e^t \qquad (2.12)$$

$$2x + 2y = e^t \qquad (2.13)$$

หรือสมมูลกับ
$$(D+2)x + (D+2)y = e^t$$

$$2x + 2y = e^t$$

เพราะว่า
$$\det\begin{bmatrix} D+2 & D+2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2(D+2) - 2(D+2) = 0$$

ระบบสมการนี้คือตัวลดรูปจึงไม่มีผลเฉลยถ้า (2.13) แทนใน (2.12) จะพบข้อขัดแย้งซึ่ง $(x+y)' = 0$ ดังนั้น $x+y$ เป็นค่าคงตัว แต่จาก (2.13) มี ซึ่งขัดแย้งกัน $2x+2y=e^t$ และระบบสมการที่ไม่มีผลเฉลยนี้ เรียกว่า ไม่ต้องกัน (inconsistent)

2.1.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเรียกว่าเป็นแบบชัดแจ้ง (explicit) ถ้าอยู่ในรูปแบบ

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

มีตัวแปรตามคือ $x_1,\ldots,x_n$ มีฟังก์ชัน a_{ij} เมื่อ $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$ เป็นสัมประสิทธิ์ และมี $f_1,\ldots,f_n$ เป็นฟังก์ชันอินพุทหรือฟังก์ชันบังคับ เมื่อแทนด้วยเมทริกซ์จะได้

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, a(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t)\cdots a_{1n}(t) \\ a_{12}(t)\cdots a_{2n}(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)\cdots a_{nn}(t) \end{bmatrix}, f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

และจากแคลคูลัสจะได้

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

แล้วเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{2.15}$$

หรือ

$$x' = Ax + f \tag{2.16}$$

ตัวอย่างของระบบสมการ เช่น

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 5x_2(t) + \cos(t) \\ x_2'(t) &= tx_1(t) + 3x_2(t) + 6x_3(t) + \sin(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) - e^t x_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

ในตัวอย่างนี้

$$\begin{aligned} &a_{11} = 3,\ a_{12} = -5,\ a_{13} = 0,\ f_1(t) = \cos t \\ &a_{21} = t,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 6,\ f_2(t) = \sin t \\ &a_{31} = 1,\ a_{32} = 0,\ a_{33} = -e^t,\ f_3(t) = 0 \end{aligned}$$

เมื่อเขียนรูปแบบเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ t & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

ทฤษฎีบท 2.1 การมีผลเฉลยและมีผลเฉลยเดียวของระบบสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

สมมติระบบสมการแบบชัดแจ้ง (12) โดย $f_1(t),\ldots,f_n(t)$ และ $a_{ij}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง ให้ I อยู่ในช่วง t_0 และให้ $x_{10},\ldots,x_{n0}$ เป็นจำนวนจริง n จำนวน แล้วจะมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ ของ (12) สำหรับทุก t บนช่วง I ซึ่ง

$$x_1(t) = x_{10},\ \ x_2(t_0) = x_{20},\ldots,x_n(t_0) = x_{n0}$$

ตัวอย่าง 2.4 จากทฤษฎีบท 2.1.1.1 ระบบสมการ

$$x' = 3x - 2y + e^{t}$$

$$y' = -2x + 5y - e^{3t}$$

โดยที่ $x(0) = 4$, $y(0) = 5$ ผลเฉลย $x(t), y(t)$ มีเพียงผลเฉลยเดียวสำหรับทุก t

ตัวอย่าง 2.5 จงเขียนระบบสมการ

$$\begin{aligned} &x''' + 2x' - 3y'' + y = 1 \\ &x + 2y'' - y = t \end{aligned} \qquad (2.19)$$

ให้เป็นระบบสมการอันดับหนึ่ง

ผลเฉลย จาก (2.19) มีอนุพันธ์อันดับสามของ x และอนุพันธ์อันดับสองของ y

ดังนั้น ให้ $u = x', v = x'' = u', w = y'$

วิธีหนึ่งในการเขียน (2.19) ใหม่ คือ

$$v' + 2u - 3w' + y = 1$$

$$x + 2w' - y = t$$

$$x' - u = 0$$

$$u' - v = 0$$

$$y' - w = 0$$

2.2 การหาผลเฉลยของระบบสมการ

2.2.1 วิธีการกำจัด

ระบบสมการพีชคณิต

$$x + y = 3 \tag{2.20}$$

$$2x + y = 5 \tag{2.21}$$

ในการหาผลเฉลยนั้น จะคูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวแล้วบวกกับอีกสมการหนึ่ง เพื่อให้ตัวแปรที่เหลือมีเพียงตัวเดียว สมมติว่าเป็น x เมื่อแทน x ในอีกสมการจะได้ y

สำหรับวิธีการในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นก็สามารถทำได้ ทำนองเดียวกันนี้ สมมติว่ามีสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 2 สมการที่ทีตัวแปรตาม 2 ตัวคือ $x(t), y(t)$ ระบบสมการอาจเขียนได้ดังนี้

$$L_1 x + L_2 y = f_1 \tag{2.22}$$

$$L_3 x + L_4 y = f_2 \tag{2.23}$$

เมื่อ L_1, L_2, L_3, L_4 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ และ f_1, f_2 เป็นฟังก์ชันของ t สมมติว่า f_1, f_2 เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ได้

ตัวอย่าง 2.6 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$x'' + 3x' + y'' = t \tag{2.24}$$

$$x' + 3x + y'' + y' = e^{2t} \tag{2.25}$$

เขียนให้สมการอยู่ในรูป $(2.22), (2.23)$ ได้ดังนี้

$$(D^2 + 3D)x + D^2 y = t \tag{2.26}$$

$$(D+3)x + (D^2 + d)y = e^{2t} \tag{2.27}$$

เมื่อ $L_1 = D^2 + 3D, \quad L_2 = D^2, \quad L_3 = D + 3, \quad L_4 = D^2 + D$

และ $f_1 = t, \quad f_2 = e^{2t}$

การหาผลเฉลยของระบบสมการ $(2.22),(2.23)$ โดยทำให้เหลือตัวแปรเพียงตัวเดียว อีกวิธีหนึ่งที่ทำได้คือคูณ (2.22) ด้วย L_3 และคูณ (2.23) ด้วย L_1 จะได้

$$L_3L_1x + L_3L_2y = L_3f_1 \tag{2.28}$$

$$L_1L_3x + L_1L_4y = L_1f_2 \tag{2.29}$$

แต่ $L_1L_3 = L_3L_1$ เพราะว่า L_3, L_1 มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้น (2.28) ลบด้วย (2.29) จะได้สมการที่มี y เท่านั้น

$$(L_3L_2 - L_1L_4)y = L_3f_1 - L_1f_2$$

ประยุกต์ใช้วิธีดังกล่าวกับ $(2.26),(2.27)$ โดยคูณ (2.27) ด้วย $L_1 = D^3 + 3D$ และคูณ (2.26) ด้วย $L_2 = D + 3$ จะได้

$$\begin{aligned}(D+3)(D^2+3D)x + (D+3)D^2y &= (D+3)t \\ &= 1+3t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D^2+3D)(D+3)x + (D^2+3)(D^2+D) &= (D^2+3D)e^{2t} \\ &= 4e^{2t} + 6e^{2t} \\ &= 10e^{2t}\end{aligned}$$

สมการแรกลบด้วยสมการสองจะได้

$$-(D^3 + 3D^5)y = 1 + 3t - 10e^{2t}$$

นั่นคือ
$$y''' + 3y^{(5)} = 10e^{2t} - 1 - 3t$$

หา y โดยใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$y = \frac{e^{2t}}{4} - \frac{t^4}{24} + c_1 + c_2t + c_3t + c_4e^{-3t} \tag{2.30}$$

ซึ่งมีตัวคงค่าใดๆ 4 ตัว เมื่อแทน y ในสมการหนึ่งจากโจทย์ที่ให้ (2.24) หรือ (2.25) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ใน x เท่านั้น ถ้าแทน (2.30) ใน (2.25) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งใน x ซึ่งมีตัวคงค่าเพิ่มอีก 1 ค่า ดังนั้นตัวคงค่าทั้งหมดเป็น 5 ตัว

ในอีกทางหนึ่งถ้าแทน y จาก (2.30) ใน (2.24) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ2 ใน x ซึ่งตัวคงค่าเพิ่มอีก 2 ตัว ดังนั้นตัวคงค่าทั้งหมด 6 ตัว จะเห็นว่าขึ้นอยู่กับการทำซึ่งตัวคงค่าใดๆ จะเป็น 5 หรือ 6 ตัว จำนวนตัวคงค่าใดๆ ทั้งหมดที่ถูกต้องคือ 4 ตัว เพราะว่า $(L_3L_2 - L_1L_4) = L - D^4 - 3D^3$ เป็นอันดับ4

เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวเมื่อกลับไปพิจารณา $(2.26),(2.27)$ และสังเกตเห็นว่า $D^2 + 3D = D(D+3)$ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์หน้า x เหมือนกันทั้งสองสมการ จึงคูณ (2.27) ด้วย D จะได้ระบบสมการใหม่ คือ

$$(D+3D)x + \qquad D^2y - 1 \tag{2.31}$$

$$D(D+3)x + D(D^2+D)y = De^{2t} = 2e^{2t} \tag{2.32}$$

ถ้า $(2.2.1.13)$ ลบด้วย $(2.2.1.12)$ จะได้

$$D^3y = 2e^{2t} - t$$

โดยการหาปริพัธ์ 3 ครั้งจะได้

$$y = \frac{e^{2t}}{4} - \frac{t^4}{24} + +c_1t^2 + c_2t + c_3 \tag{2.33}$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นตัวคงค่าใดๆ แทน (2.33) ใน (2.25) จะได้สมการเชิงินุพันธ์อันดับ 1 ใน x

$$x' + 3x = \frac{-e^{2t}}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - 2c_1t - (c_2 + 2c_1) \tag{2.34}$$

ใช้การเทียบสัมประสิทธิ์ เริ่มจากหาสมการลักษณะเฉพาะ คือ $r+3$ และมีรากเดียวคือ $r = -3$ ดังนั้น

$$x_h = c_4e^{-3t}$$

และ x_p อยู่ในรูป

$$x_p = A + Bt + Ct^2 + Et^3 + Fe^{2t}$$

แทนใน (2.34) ได้

$$(B+2Ct+3Et^2+2Fe^{2t})+3(A+Bt+Ct^2+Et^3+Fe^{2t})$$

$$=-\frac{e^{2t}}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}-2c_1t-(c_2+2c_1)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ $t=1$: $B+3A=-(c_2+2c_1)$

t : $2C+3B=-2c_1$

t^2 : $3E+3C=\dfrac{1}{2}$

t^3 : $3E=\dfrac{1}{6}$

e^{2t} : $5F=-\dfrac{1}{2}$

การหา A,B,C,E,F นั้นเริ่มจาก

$$F=-\frac{1}{10}$$

$$E=\frac{1}{18}$$

$$C=\frac{1}{6}-E=\frac{1}{9}$$

$$B=-\frac{2}{3}C-\frac{2}{3}c_1=-\frac{2}{27}-\frac{2}{3}c_1$$

$$A=-\frac{1}{3}B-\frac{1}{3}(c_2+2c_1)$$

$$=\frac{2}{81}-\frac{4}{9}c_1-\frac{1}{3}c_2$$

ผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$y=\frac{e^{2t}}{4}+\frac{t^4}{24}+c_1t^2+c_2t+c_3 \qquad (2.35)$$

$$x=\frac{2}{81}-\frac{4}{9}c_1-\frac{1}{3}c_2-\left(\frac{2}{27}+\frac{2}{3}c_1\right)t+\frac{t^2}{9}+\frac{t^3}{18}-\frac{e^{2t}}{10}+c_4e^{-3t} \qquad (2.36)$$

ซึ่งมีจำนวนตัวคงค่าใดๆ ถูกต้องคือ 4 ตัว

สรุปวิธีการกำจัด

วิธีการกำจัดสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 2 สมการและมีตัวแปร 2 ตัว

1) เริ่มเขียนสมการในรูปแบบ (2)

$$L_1 x + L_2 y = f_1 \tag{2.37}$$

$$L_3 x + L_4 y = f_2 \tag{2.38}$$

2) คูณ (2.37) และ/หรือ (2.38) ด้วยตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เพื่อให้ 2 สมการมีสัมประสิทธิ์ ของ x หรือ y เหมือนกัน (มักคูณ (2.37) ด้วย L_3 และคูณ (2.38) ด้วย L_1 หรือ คูณ (2.37) ด้วย L_4 และคูณ (2.38) ด้วย L_2)

3) ลบสมการหนึ่งจากอีกสมการหนึ่งเพื่อให้เหลือตัวแปรเดียวจากนั้นหาผลเฉลยของสมการ

4) แทนผลเฉลยที่ได้จากข้อ 3 ในสมการหนึ่งของงระบบสมการที่ให้มาเริ่มต้น จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของตัวแปรอื่น แล้วหาผลเฉลย

5) ถ้าจำนวนตัวคงค่าใดๆเหมือนอันดับของ $L_1L_4 - L_2L_3$ จะได้ผลเฉลยทั่วไป

6) ถ้าจำนวนตัวคงค่าใดๆ มากกว่าอันดับของ $L_1L_4 - L_2L_3$ แทน x, y ที่หาได้จาก 3) และ 4) ในสมการเชิงอนุพันธ์ที่ให้มาตอนต้น ไม่ใช้ข้อ 4) เพื่อกำจัดตัวคงค่าส่วนเกิน

7) ถ้าให้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นมา ก็ใช้เงื่อนไขนั้นเพื่อกำจัดตัวคงค่าที่เหลืออยู่

2.2.2 การแปลงลาปลาซ

วิธีการกำจัดเป็นวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ยังมีวิธีการอื่นอีกคือผลการแปลงลาปลาซ ซึ่งมีข้อได้เปรียบเพราะไม่ต้องกังวลเกี่ยวกับจำนวนค่าคงตัวใดๆ และจะใช้ตัวอย่างจากหัวข้อ 2 มาแสดง

ตัวอย่าง 2.7 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$$x' = x + 10y, \quad x(0) = 0 \tag{2.39}$$

$$y' = -x - y, \quad y(0) = 1 \tag{2.40}$$

ผลเฉลย หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของ (2.39) และ (2.40)

$$sX - x(0) = X + 10Y$$

$$sY - y(0) = -X - Y$$

เมื่อ $X(s) = \mathscr{L}\left[x(t)\right], Y = \mathscr{L}\left[y(t)\right]$ โดยใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นใน (1) และจัดเทอมใหม่

$$(s-1)X - 10Y = 0 \tag{2.41}$$

$$X + (s+1)Y = 1 \tag{2.42}$$

มีหลายวิธีในการหาผลเฉลยของ X, Y วิธีหนึ่งคือกฎของคราเมอร์ ในกรณีนี้หา X หรือ Y ในสมการหนึ่งได้แล้วแทนค่าในอีกสมการหนึ่ง จาก (2.41) เขียน Y ในเทอมของ X

$$Y = \frac{1}{10}(s-1)X \tag{2.43}$$

และแทนใน (2.42) จะได้

$$X + \frac{1}{10}(s+1)(s-1)X = 1$$

$$\left[1 + \frac{1}{10}\left(s^2 - 1\right)X\right] = 1$$

$$\frac{s^2+9}{10}X = 1$$

หรือ

$$X = \frac{10}{s^2+9} = \frac{10}{3}\frac{3}{s^2+9} \tag{2.44}$$

ดังนั้น

$$x(t) = \frac{10}{3}\sin 3t \tag{2.45}$$

การหา $y(t)$ นั้นให้แทน (2.44) ใน (2.43) จะได้ $Y(s)$ แล้วใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผัน หรือแทน (2.45) ใน (2.39) จะได้ $y(t)$ ในกรณีนี้ทำแบบหลังให้ผลลัพธ์เร็วกว่า จาก (1a) และ (2.45)

$$y(t)=\frac{1}{10}x'-\frac{1}{10}x=\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t$$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$4x'+4x+y'=1,\quad x(0)=2 \tag{2.46}$$

$$3x'+y'-y=t,\quad y(0)=-6 \tag{2.47}$$

โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

ผลเฉลย หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง

$$4\big(sX-x(0)\big)+4X+sY-y(0)=\frac{1}{s}$$

$$3\big(sX-x(0)\big)+\big(sY-y(0)\big)-Y=\frac{1}{s^2} \tag{2.48}$$

โดยใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $x(0)=2$, $y(0)=-6$ และรวมเทอมจะได้

$$4(s+1)X+sY=\frac{1}{s}+2=\frac{1+2s}{s} \tag{2.49}$$

$$3sX+(s-1)Y=\frac{1}{s^2} \tag{2.50}$$

หาผลเฉลยของ (2.49) สำหรับ Y

$$Y=\frac{1+2s}{s^2}-\frac{4(s+1)}{s}X \tag{2.51}$$

แทนใน (2.50) จะได้สมการใน X

$$3sX+(s-1)\left[\frac{1+2s}{s^2}-\frac{4(s+1)}{s}X\right]=\frac{1}{s^2} \tag{2.52}$$

$$\left(-s^2+4\right)X=\frac{1}{s}\left(2+s-s^2\right)$$

และ

$$X=\frac{2s^2-s-2}{s\left(s^2-4\right)}=\frac{2s^2-s-2}{s(s-2)(s+2)} \tag{2.53}$$

โดยการแยกเศษส่วนย่อยให้

$$X=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+2}$$

เมื่อ $$2s^2-s-2=A(s-2)(s+2)+Bs(s+2)+Cs(s-2) \tag{2.54}$$

แทนค่าที่ $s=0$ จะได้ $A=\frac{1}{2}$

แทนค่าที่ $s=2$ จะได้ $B=\frac{1}{2}$

แทนค่าที่ $s--2$ จะได้ $C-1$

ฉะนั้น $$X(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s-2}+\frac{1}{s+2}$$

ดังนั้น $$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}+e^{-2t} \tag{2.55}$$

การหา $y(t)$ นั้นแทน $X(s)$ จาก (2.53) ใน (2.51) จะได้ $Y(s)$ แล้วใช้การแปลงลาปลาซผกผัน แต่ในกรณีนี้ใช้วิธีแทน (2.55) ใน (2.46) แล้วหาปริพันธ์เพื่อหา y ซึ่งให้ผลลัพธ์เร็วกว่าจาก (2.46)

$$y'=1-4x'-4x=-1-6e^{2t}+4e^{-2t}$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้าง

$$y=-t-3e^{2t}-2e^{-2t}+c_1$$

ใช้เงื่อนไข $y(0)=-6$ หา c_1 ได้

$$-6=y(0)=-3-2+c_1 \qquad \text{หรือ} \qquad c_1=-1$$

ฉะนั้นผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}+e^{-2t}$$

$$y=-1-t-3e^{2t}-2e^{-2t}$$

2.3 การหาผลเฉลยโดยประมาณโดยใช้วิธีรุงเงคุตตา

วิธีของรุงเคุตตาจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าวิธีออยเลอร์และวิธีออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว โดยมีวิธีการดัง ต่อไปนี้

สำหรับ $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ โดยที่ f มีคำตอบที่เป็นไปได้อย่างเดียว (unique) บนช่วงที่มี x_0

อยู่ด้วย การหาค่าประมาณ $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ ที่ $x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$ โดยที่ $n = 0, \ldots, N-1$

จะได้สูตร

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

โดยที่

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

เมื่อ h คือ step side

n คือ จำนวนรอบที่ n ; n=0,1,2,...

หมายเหตุ วิธีของรุงเงและคุตตาสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 นี้มักเรียกว่าวิธีของรุงเงคุตตาอันดับ 4

ตัวอย่าง 2.9 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ $y' = x + y$ เมื่อ $y(0) = 0$ โดยใช้วิธีของรุงเงคุตตา โดย $h = 0.2$

จากสมการ $y' = x + y$ เมื่อ $y(0) = 0$ และ $h = 0.2$

ในที่นี้ $f(x+y) = x + y$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$= 0.2(x_n + y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$= 0.2x_n\left[\left\{x_n + \frac{1}{2}(0.2)_1\right\} + y_n + \frac{0.2}{2}(x_n + y_n)\right]$$

$$= 0.2\ (x_n + y_n) + 0.02$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$= 0.2\left[\left\{x_n + \frac{1}{2}(0.2)\right\} + y_n + \frac{0.22}{2}(x_n + y_n) + \frac{0.22}{2}\right]$$

$$= 0.2\{1.11(x_n + y_n) + 0.11\}$$

$$= 0.222(x_n + y_n) + 0.022$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$= 0.2\{(x_n + 0.2, y_n + 0.222)(x_n + y_n) + 0.022\}$$

$$= 0.2\{1.222(x_n + y_n) + 0.022\}$$

$$= 0.2444(x_n + y_n) + 0.0444$$

จาก $$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\{0.2\left(x_n + y_n\right) + 0.44\left(x_n + y_n\right) + 0.04$$

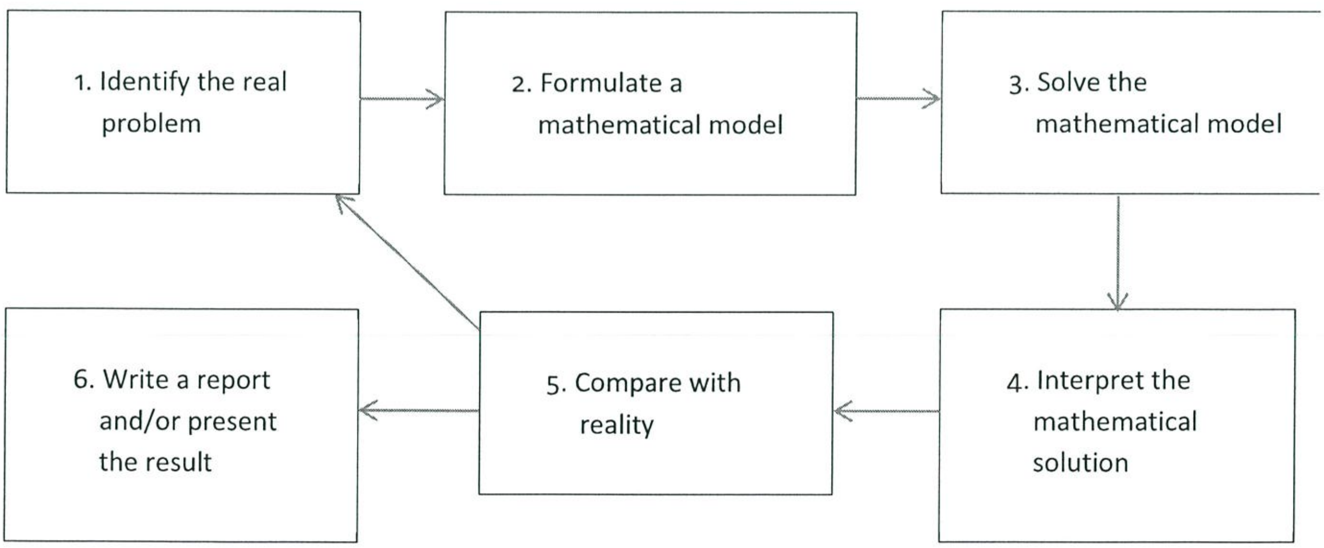
$$+0.444\left(x_n + y_n\right) + 0.044 + 0.2444\left(x_n + y_n\right) + 0.0444\}$$

$$= y_n + 0.2214\left(x_n + y_n\right) + 0.0214$$

2.4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โลกแห่งความเป็นจริง มีกิจกรรมที่ต้องดำเนินการเป็นจำนวนมาก ซึ่งในแต่ละกิจกรรมจะมีลักษณะงาน ขนาด และความเสี่ยง ในการดำเนินการที่แตกต่างกันกิจกรรมขนาดใหญ่ที่ใช้เงินลงทุนสูง กิจกรรมที่ไม่สามารถลองผิดลองถูกได้ หรือกิจกรรมที่มีความเสี่ยงสูงมีผลกระทบต่อชีวิตและทรัพย์สินของผู้คนจำนวนมาก กิจกรรมลักษณะนี้จะต้องดำเนินการด้วยความระมัดระวัง ต้องมีการศึกษาข้อมูลเบื้องต้น มีการออกแบบหรือสร้างตัวแบบ (model) เพื่อศึกษาผลลัพธ์ และวางแผนการดำเนินการที่รอบคอบก่อนนำไปดำเนินการจริง เพื่อลดความเสี่ยง ประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายในการดำเนินการ คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่มีบทบาทในการเตรียมการในเรื่องนี้ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง คือ การนำมาใช้ในการสร้างตัวแบบ

โลกของคณิตศาสตร์ เป็นโลกของนามธรรมที่มีการดำหนดสัญลักษณ์แทนนามธรรมเหล่านั้น มีการนิยามข้อตกลงต่าง ๆ เพื่อใช้ในการศึกษาระบบ และพิสูจน์ผลที่ได้เป็นกฎหรือทฤษฎีเพื่อการนำไปใช้ ดังนั้นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จึงจัดว่าเป็นการจำลองสิ่งที่อยู่ในโลกแห่งความเป็นจริง ให้เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปนามธรรม และใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์หาคำตอบของตัวแบบเพื่อนำผลกลับไปประยุกต์ใช้กับโลกแห่งความเป็นจริง ซึ่งสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 แสดงขั้นตอนการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา (Identify the real problem)

การทำความเข้าใจปัญหาเป็นขั้นตอนแรกในการสร้างตัวแบบ ต้องวิเคราะห์ให้ทราบว่าปัญหาคืออะไร มีอะไรบ้างที่เกี่ยวข้องกับปัญหา มีคำถามมากมายที่ต้องทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาในสถานการณ์จริง เช่น ปัญหานี้ต้องการทราบอะไร มีวัตถุประสงค์และเป้าหมายอะไร จะตัดสินผลที่ออกมาอย่างไร แหล่งข้อมูลมาจากไหนเชื่อถือได้หรือไม่ มีคำตอบเป็นแบบเดียวหรือไม่ จำแนกปัญหาว่าเป็น แบบมีคำตอบแน่นอน (deterministic) หรือแบบมีคำตอบไม่แน่นอน (stochastic) ต้องใช้การสร้างสถานการณ์จำลอง (simulation) หรือไม่ คำถามหรือคำตอบ ดังกล่าวมาแล้วต้องนิยาม กำหนดขอบเขตให้ตรงประเด็นและชัดเจน

ขั้นที่ 2 สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Formulate a mathematical model)

ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จากปัญหาที่ได้วิเคราะห์หรือทำให้ชัดเจนแล้วในขั้นที่ 1 ทดลองสร้างตัวแบบที่ซับซ้อนน้อยที่สุดก่อน เขียนแผนภาพตามความเหมาะสม เขียนรายการปัจจัยที่เกี่ยวข้อง รวบรวมข้อมูลและทดสอบเนื้อหารายละเอียด อธิบายพฤติกรรมของตัวแปร รวบรวมข้อมูลเพิ่มเติมถ้าจำเป็น แสดงตัวแปรแต่ละตัวด้วยสัญลักษณ์ที่เหมาะสมพร้อมทั้งกำหนดหน่วย กำหนดข้อสมมติที่ต้องการสร้าง เขียนความสัมพันธ์และสมการของตัวแปรในโจทย์ โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น การเป็นสัดส่วน ความสัมพันธ์เชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ความสัมพันธ์จากการทดลอง หลักการ input-output กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน สมการเชิงผลต่างและสมการเชิงอนุพันธ์ เมทริกซ์ ความน่าจะเป็น การกระจายเชิงสถิติ เป็นต้น

ขั้นที่ 3 หาผลลัพธ์ของตัวแบบ (Solve the mathematical model)

การหาคำตอบทางคณิตศาสตร์ของตัวแบบ อาจจะใช้วิธีเกี่ยวกับพีชคณิต หรือใช้วิธีเชิงตัวเลข ใช้แคลคูลัสและกราฟ เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่เหมาะสม หาค่าตัวของตัวแปรที่ต้องการ อาจจะเป็นรูปแบบตารางหรือรูปภาพ

ขั้นที่ 4 แปลความหมายของผลลัพธ์ (Interpret the mathematical solution)

ขั้นตอนนี้เป็นการแปลความหมาย และตรวจสอบผลลัพธ์ที่หาได้ จากวิธีการเชิงคณิตศาสตร์ เช่น พิจารณาค่าของตัวแปรที่หาได้ ว่ามีเครื่องหมาย และขนาดถูกต้องหรือไม่ มีค่าเพิ่มหรือลดตามที่ควรจะเป็นหรือไม่ พิจารณาค่ามากและค่าน้อยของตัวแปรเพื่อตรวจสอบพฤติกรรมความไวต่อสิ่งกระตุ้น ได้คำตอบที่ดีที่สุดตามที่คาดไว้หรือไม่ หรือต้องเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้น

ขั้นที่ 5 ตรวจสอบผลลัพธ์กับข้อมูลจริง (Compate with reality)

ผลลัพธ์ที่ได้สามารถตรวจสอบกับข้อมูลจริงได้หรือไม่ คำตอบเชิงคณิตศาสตร์มีความหมายหรือไม่ การทำนายสอดคล้องกับข้อมูลจริงหรือไม่ ประเมินตัวแบบที่สร้างขึ้นว่าได้ครบตามวัตถุประสงค์หรือไม่ ตัวแบบสามารถปรับปรุงให้ดีขึ้นได้อีกหรือไม่ ผลลัพธ์ที่ได้ก่อนหน้านี้ ชี้ให้เห็นว่าต้องคำนวณหาค่าตัวแปรจากตัวแบบที่ปรับปรุงใหม่เพื่อความแม่นยำที่ดีกว่าหรือไม่ ถ้าต้องการทำใหม่ก็ต้องกลับไปเริ่มที่ขั้นที่ 1 หรือถ้าไม่ต้องก็ให้ไปที่ขั้นที่ 6 ขั้นตอนนี้สำคัญมาก เพราะมีบ่อยครั้งที่ต้องสร้างตัวแบบหลายรอบก่อนที่จะได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

ขั้นที่ 6 เขียนรายงาน (Write a report)

การเขียนรายงานต้องทราบว่าเขียนเพื่อใคร ผู้อ่านต้องการทราบอะไร ต้องการรายละเอียดในรายงานมากน้อยเพียงใด จะสร้างรายงานอย่างไร จึงจะทำให้ลักษณะที่สำคัญชัดเจน และผลที่ต้องการทราบปรากฏอยู่ ขั้นตอนนี้อาจจะไม่ต้องทำ ถ้าไม่ทราบว่าจะเขียนให้ใครอ่าน

การจำแนกตัวแบบ เราสามารถจำแนกตัวแบบออกได้ดังนี้

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) หรือตัวแบบนามธรรม (Abstract Model) เป็นตัวแบบที่กระกอบด้วยสัญลักษณ์ มักอยู่ในรูปสมการ อสมการหรือฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์
2. ตัวแบบรูปธรรม (Physical Model) เป็นตัวแบบที่สามารถจับต้องได้ เช่น แบบจำลองอาคาร แบบหุ่นจำลองต่างๆ
3. ตัวแบบรูปภาพ (Visual Model) เป็นตัวแบบลักษณะรูปภาพที่สามารถมองเห็นได้ เช่น กราฟ แผนที่ แบบแปลน ลายแทง

เราจะกล่าวถึงเฉพาะตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เท่านั้น ซึ่งสามารถจำแนกออกตามลักษณะได้ 3 ลักษณะ คือ

1. จำแนกตามกาลเวลา ซึ่งจำแนกได้เป็นตัวแบบสถิติ กับตัวแบบพลวัต (Static and Dynamic) ตัวแบบสถิติ เป็นตัวแบบที่ไม่เกี่ยวข้องกับเวลา ส่วนตัวแบบพลวัตเป็นตัวแบบที่มีเวลามาเกี่ยวข้อง คำตอบของตัวแบบขึ้นอยู่กับช่วงเวลา
2. จำแนกตามความแน่นอน ซึ่งจำแนกได้เป็น ตัวแบบแน่นอนกับตัวแบบความน่าจะเป็น (Deterministic and Probabilistic) ตัวแบบแน่นอน เป็นตัวแบบที่มีข้อมูลนำเข้าที่แน่นอนซึ่งทำให้คำตอบของตัวแบบมีผลที่แน่นอน ส่วนตัวแบบความน่าจะเป็น เป็นตัวแบบที่ข้อมูลนำเข้าอย่างน้อย 1 ตัว อยู่ในรูปตัวแปรสุ่ม ซึ่งคำตอบของตัวแบบจะได้ในเชิงการคาดคะเน

3. จำแนกตามความต่อเนื่อง ซึ่งจำแนกได้เป็น ตัวแบบต่อเนื่อง กับตัวแบบไม่ต่อเนื่อง (Continuous and Discrete) ตัวแบบต่อเนื่อง เป็นตัวแบบที่มีข้อมูลนำเข้าต่อเนื่องตลอดเวลา เช่น การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ ส่วนตัวแบบไม่ต่อเนื่องเป็นตัวแบบที่มีข้อมูลนำเข้าไม่ต่อเนื่อง เช่น จำนวนลูกค้าที่มาใช้บริการของธนาคาร จะเปลี่ยนแปลงเมื่อมีลูกค้าเข้าหรือออกจากธนาคารเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2.10 การเปลี่ยนแปลงจำนวนประชากร ผู้ล่า & เหยื่อ

สมมุติฐาน ให้ X_1 เป็นประชากรของเหยื่อ ณ เวลา t ใดๆ

X_2 เป็นประชากรผู้ล่า ณ เวลา t ใดๆ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของเหยื่อ คือ $\dfrac{dX_1}{dt} = a_{11}X_1 - a_{12}X_2$

เมื่อ a_{11} เป็นผลต่างของอัตราการเกิด และ อัตราการตายของเหยื่อ

$a_{12} > 0$ การเพิ่มของประชากรผู้ล่าจะลดอัตราการเปลี่ยนแปลงของเหยื่อ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของผู้ล่า คือ $\dfrac{dX_2}{dt} = a_{21}X_1 - a_{22}X_2$

เมื่อ $a_{21} > 0$ จำนวนประชากรของเหยื่อที่เพิ่มจะทำให้จำนวนประชากรผู้ล่าเพิ่มขึ้นด้วย

a_{22} เป็นผลต่างของอัตราการเกิดและอัตราการตาย

ถ้าไม่มีเหยื่อ $a_{22} \geq 0$ เนื่องจากผู้ล่าหมดไป

$X_1(0) = B_1$ จำนวนประชากรของเหยื่อเมื่อเริ่มต้น

$X_2(0) = B_2$ จำนวนประชากรของผู้ล่าเมื่อเริ่มต้น

ถ้า $a_{11} = 2, \quad a_{12} = 5, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 4$

สมการทางคณิตศาสตร์ $$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

หาผลเฉลย $$(2-\lambda)(-4-\lambda)+10 = (\lambda+1)^2+1 = 0$$

$\lambda = -1+i$ แล้วเวคเตอร์เจาะจงคือ $\begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix}$

จะได้ $$\begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} = e^{-t}\begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix}(\cos t + i\sin t)$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 5\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{bmatrix} e^{-t}$$

เมทริกซ์หลักมูล คือ $U(t)=\begin{bmatrix} 5e^{-t}\cos t & 5e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(3\cos t+\sin t) & e^{-t}(3\sin t+\cos t) \end{bmatrix}$

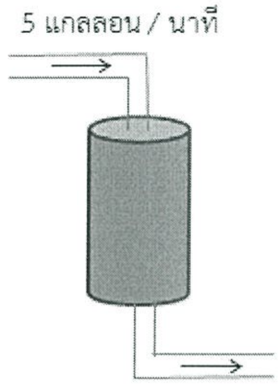
ผลเฉลย คือ $X(t)=U(t)C$ เมื่อ $C=\begin{bmatrix} 0.2B_1 \\ 0.6B_1-B_2 \end{bmatrix}$ จาก $X_1(0)=B_1$, $X_2(0)=B_2$

ผลเฉลยคือ $X_1(t)=B_1e^{-t}(\cos t+3\sin t)-5B_2e^{t}\sin t$

$X_2(t)=2B_1e^{-t}\sin t-B_2e^{-t}(3\sin t-\cos t)$

ตัวอย่างที่ 2.11 ถังใบหนึ่งบรรจุน้ำเกลือ 100 แกลลอน ซึ่งมีเกลือหนัก 10 ปอนด์ละลายอยู่ ถ้าปล่อยให้น้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้น 2 ปอนด์/แกลลอน ไหลเข้าไปในถังใบนี้ด้วยอัตรา 5 แกลลอน/นาที และคนให้ส่วนผสมเข้ากันแล้วปล่อยให้น้ำเกลือไหลออกจากถังด้วยอัตรา 4 แกลลอน/นาที จงหาปริมาณของเกลือในถัง ณ เวลา t ใดๆ และจำนวนเกลือในถังเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 2.2 แสดงโจทย์ปัญหา ตัวอย่างที่ 2.4.2

สมมติ จำนวนเกลือในถัง ณ เวลา t ใดๆ คือ $x(t)$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของเกลือในถัง $\frac{dx}{dt} = x_1 - x_2$

เมื่อ x_1 คืออัตราที่เกลือเข้าถังเป็น ปอนด์/นาที

x_1 = (5 แกลลอน/นาที)(2 ปอนด์/แกลลอน) = 10 ปอนด์/นาที

x_2 คืออัตราที่เกลือออกจากถังเป็น ปอนด์/นาที

x_2 = (4 แกลลอน/นาที)($\frac{x}{100}$ ปอนด์/แกลลอน) = $\frac{4x}{100}$ (ปอนด์/นาที)

สมการทางคณิตศาสตร์

$$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{4x}{100} = \frac{1000 - 4x}{100}$$

หาผลเฉลย

$$\frac{dx}{1000 - 4x} = \frac{dt}{100}$$

$$\ln|1000 - 4x| = -\frac{4}{100}t + C$$

$t = 0, x = 10 \Rightarrow C = \ln(960)$

$$\ln|1000-4x| = -\frac{4}{100}t + \ln(960)$$

$$1000-4x = 960e^{-\frac{t}{25}}$$

$$x = 250-240e^{-\frac{t}{25}}$$

$$t=10 \Rightarrow x = 250-240e^{-\frac{10}{25}} \approx 89.123$$

ปริมาณเกลือในถัง ณ เวลาใด ๆ คือ $x = 250-240e^{-\frac{t}{25}}$
เมื่อเวลาผ่านไป 10 นาทีในถังมีเกลือ 89.123 ปอนด์

2.5 ความรู้พื้นฐานทางด้านคอมพิวเตอร์

1.โปรแกรม Editplus

Editplus คือโปรแกรม text editor ตัวหนึ่ง คล้ายกับโปรแกรม Notepad, Dreamweaver (ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นทั้งโปรแกรมสำเร็จรูปในการสร้างเว็บเพจด้วย) ที่ใช้ในการพัฒนาสคริปต์โปรแกรมต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น เขียนและแก้ไข Source code ในการสร้างเว็บเพจ ด้วยภาษา HTML, PHP, Java เป็นต้น เป็น tools ที่รันบน windows เท่านั้น

ข้อดีของ Editplus

- สามารถใช้กับภาษาไทยได้

- แยกคำสั่งต่างๆ ด้วยการแสดงสีที่ไม่เหมือนกัน ทำให้เราสามารถตรวจสอบได้ง่ายว่า เราพิมพ์ผิดที่คำสั่งไหน

- เปิดไฟล์ได้ทีละหลายๆไฟล์พร้อมกัน

- สามารถค้นหาและแทนที่ (Find & Replace) ข้อความเดียวกันได้ทีละหลายๆไฟล์พร้อมกัน

- สามารถค้นหาข้อความที่ต้องการ ว่าปรากฏอยู่ในไฟล์ไหนบ้าง (แสดงหมายเลขบรรทัดด้วย) ในไดเรคทอรี่เดียวกัน

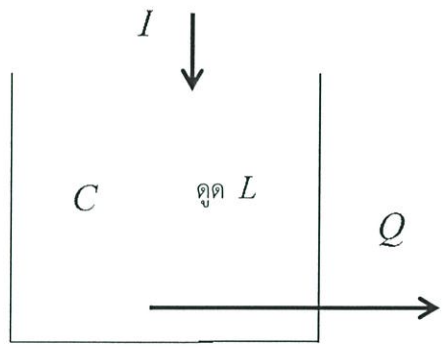
2. โปรแกรม MATLAB

MATLAB เป็นภาษาที่มีประสิทธิภาพสูงใช้สำหรับคำนวณทางด้านเทคนิค ตัวโปรแกรม ได้รวมเอาความสามารถในการคำนวณ, การดูและติดตามข้อมูลต่างๆ รวมทั้งการเขียนโปรแกรม ไว้ในรูปแบบที่ง่ายต่อการใช้งาน โดยที่ปัญหาและวิธีการหาคำตอบ จะแสดงโดยใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ตามปกติ

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

3.1 The One-Compartment Mixed Case

ปัญหานี้จะเป็นปัญหาการแพร่ของสารเข้าสู่เซลล์ เพียงเซลล์โดย ในช่วงเวลาสั้นๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณสาร ΔQ ที่แพร่เข้าสู่เซลล์ในช่วงเวลา Δt ด้วยอัตราที่คงที่ I แปรไปตามความเข้มข้น C และ ที่ถูกดูดซับเข้าไปในเซลล์ L



$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I - CL$$

$$\Delta Q = \Delta t\left(I - CL\right)$$

$$moles = \sec\left(\frac{moles}{\sec} - \frac{moles/\sec}{mole/cm^3}\, moles/cm^3\right)$$

โดยการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นจะแปลไปตาม $\Delta Q / V$

เมื่อ V คือ ปริมาตรของเซลล์ที่สารได้ผ่าน

ดังนั้น

$$\Delta C = \frac{\Delta Q}{V} = \frac{\Delta t\left(I - LC\right)}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{V}\left(I - LC\right) \qquad (3.1)$$

เมื่อเราพิจารณาในกระบวนการทางเคมี จะได้ ΔQ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณสาร A ที่เหลือจากการเปลี่ยนไปของสาร B

เมื่อ k_1, k_2 คือค่าคงที่ในการเปลี่ยนจากสาร A เป็นสาร B

$$\Delta Q = \Delta t\left(k_1 A - k_2 B\right)$$

$$\Delta C = \frac{\Delta Q}{V} = \frac{\Delta t\left(k_1 A - k_2 B\right)}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{V}\left(k_1 A - k_2 B\right)$$

จากสมการ (3.1) จะพิจารณา 3 กรณีคือ

1.Steady-state case จะมีอัตราการแพร่ I คงที่

2.Time-dependent case ความเข้มข้น C จะเท่ากับ 0 เมื่อเวลาที่ t เท่ากับ 0

3.Impulse case ความเข้มข้น C ไม่เท่ากับ 0 และค่า I เท่ากับ 0

3.1.1 Steady-state case ในกรณีนี้ ค่า dC/dt มีค่าเท่ากับ 0

จากสมการที่ (3.1) แทนค่า $dC/dt = 0$ จะได้

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{V}\left(I - LC\right)$$

$$0 = \frac{1}{V}\left(I - LC\right) = \left(I - LC\right)$$

$$I = LC$$

ดังนั้น $\quad C_{ss} = \dfrac{I}{L}$

3.1.2 Time-dependent case ในกรณีนี้ $C(0)=0$ มีอัตราการแพร่เข้าสู่เซลล์คงที่และความเข้มข้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา

จากสมการที่ (3.1)

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{V}\left(I - LC\right)$$

โดยการแปลงแบบลาปลาซ

$$\mathscr{L}\left[\frac{dC}{dt}\right] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{V}(I-LC)\right]$$

$$= \mathscr{L}\left[\left(\frac{I}{V}-\frac{LC}{V}\right)\right]$$

$$= \mathscr{L}\left[\frac{I}{V}\right]-\mathscr{L}\left[\frac{LC}{V}\right]$$

$$sg(s)-C(0)=\frac{I}{sV}-\frac{L}{V}g(s)$$

$$\left(s+\frac{L}{V}\right)g(s)=\frac{I}{Vs}-C(0)$$

เมื่อ $C(0)=0$ จะได้

$$\left(s+\frac{L}{V}\right)g(s)=\frac{I}{Vs}$$

$$g(s)=\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)} \tag{3.2}$$

โดยการแปลงลาปลาซผกผันของ $g(s)$ จะได้

$$\mathscr{L}^{-1}\left[g(s)\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right]$$

จาก

$$\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}=\frac{A}{Vs}+\frac{B}{s+\frac{L}{V}} \tag{3.3}$$

$$I = A\left(s+\frac{L}{V}\right)+B(Vs)$$

$$I = (A+BV)s+\left(\frac{AL}{V}\right)$$

$$\therefore \quad A+BV=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{AL}{V} = I$$

$$A = \frac{IV}{L} \tag{3.5}$$

แทน (3.5) ใน (3.4) จะได้

$$\frac{IV}{L} + BV = 0$$

$$B = -\frac{IV}{L} \times \frac{1}{V}$$

$$= -\frac{I}{L} \tag{3.6}$$

แทน (3.5) ใน (3.6) ใน (3.3) จะได้ $\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)} = \frac{IV}{LVs} + \frac{-I}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}$

$$= \frac{I}{Ls} + \frac{-I}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}$$

$$= \frac{I}{L}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{L}{V}}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{L}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{L}{V}}\right)\right]$$

$$= \frac{I}{L}\left(1 - e^{-(L/V)t}\right)$$

เพราะฉะนั้น จาก $\mathscr{L}^{-1}\left[g(s)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right]$

ดังนั้น $C(t) = \frac{I}{L}\left(1 - e^{-(L/V)t}\right)$

3.1.3 Impulse case ในกรณีนี้ไม่มีอัตราการแพร่ของสารเข้าสู่เซลล์ และความเข้มข้นเริ่มต้นไม่เป็น 0

จากสมการที่ (3.1)

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{V}(I - LC)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{dC}{dt}\right] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{V}(I - LC)\right]$$

$$sg(s) - C(0) = \frac{I}{sV} - \frac{L}{V}g(s)$$

$$\left(s + \frac{L}{V}\right)g(s) = \frac{I}{Vs} - C(0)$$

เมื่อ ค่า I เท่ากับ 0 แต่ $C(0)$ ไม่เท่ากับ 0 จะได้

$$g(s) = \frac{C(0)}{s + (L/V)} \qquad (3.7)$$

หาผกผันลาปลาสของ $g(s)$ จะได้

$$\mathscr{L}^{-1}\left[g(s)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{C(0)}{s + (L/V)}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[C(0)\right] \; \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + (L/V)}\right]$$

$$C(t) = C(0)e^{-(L/V)t}$$

ทั้ง 3 กรณีที่กล่าวมาแล้วนี้ อัตราการแพร่ I เริ่มต้นที่เวลาเท่ากับ 0 ถ้าเราต้องการให้อัตราการแพร่ I เริ่มต้นก่อนเวลาที่ 0 ในกรณีนี้จะกำหนดให้ ค่าความเข้มข้นใหม่ ณ เวลาเริ่มต้นเป็น

$$C(0) = C_{ss}' = I'/L \qquad (3.8)$$

จากสมการ (3.1)

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{I}{V} - \frac{L}{V}C(t), \qquad t > 0$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{dC(t)}{dt}\right] = \mathscr{L}\left[\frac{I}{V} - \frac{L}{V}C(t)\right]$$

$$sg(s)-C(0)=\frac{I}{sV}-\frac{L}{V}g(s)$$

จาก (3.8) จะได้
$$sg(s)-\frac{I'}{L}=\frac{I}{sV}-\frac{L}{V}g(s)$$

$$g(s)=\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}+\frac{I'}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[g(s)\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I'}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right]$$

จาก
$$\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}=\frac{A}{Vs}+\frac{B}{s+\frac{L}{V}} \qquad (3.9)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้
$$I=A\left(s+\frac{L}{V}\right)+B(Vs)$$

$$I=(A+BV)s+\left(\frac{AL}{V}\right)$$

$$\therefore \quad A+BV=0 \qquad (3.10)$$

$$\frac{AL}{V}=I$$

$$A=\frac{IV}{L} \qquad (3.11)$$

แทน (3.11) ใน (3.10) จะได้

$$\frac{IV}{L}+BV=0$$

$$B=-\frac{IV}{L}\times\frac{1}{V}$$

$$=-\frac{I}{L} \qquad (3.12)$$

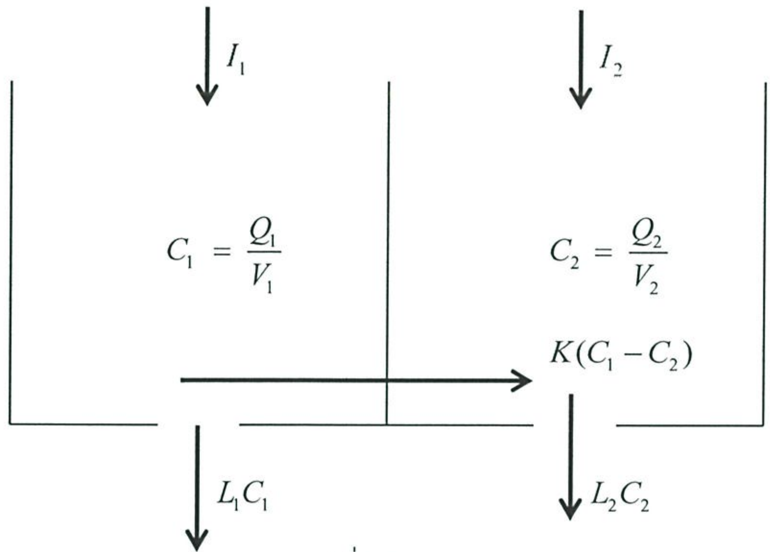
แทน (3.5) ใน (3.12) ใน (3.9) จะได้
$$\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)} = \frac{IV}{LVs} + \frac{-I}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}$$
$$= \frac{I}{Ls} + \frac{-I}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}$$
$$= \frac{I}{L}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{L}{V}}\right)$$

เพราะฉะนั้น จาก
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{L}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{L}{V}}\right)\right]$$
$$= \frac{I}{L}\left(1-e^{-(L/V)t}\right)$$

จาก
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I'}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right] = \frac{I'}{L}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right]$$
$$= \frac{I'}{L}e^{-(L/V)t}$$

ดังนั้น
$$\mathscr{L}^{-1}\left[g(s)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I}{Vs\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{I'}{L\left(s+\frac{L}{V}\right)}\right]$$
$$C(t) = \frac{I}{L}\left(1-e^{-(L/V)t}\right) + \frac{I'}{L}e^{-(L/V)t} \qquad (3.13)$$

3.2 The Two-Compartment Problem



รูปที่3.2

โดยทั่วไป two –compartment เป็นปัญหาเกี่ยวกับการแพร่ของสารผ่านเซลล์สองเซลล์ที่มีการเชื่อมต่อ หรือ ทำงานร่วมกัน ดังรูปที่3.2

โดยที่ I_1, I_2 คือ อัตราการแพร่ของสาร

C_1, C_2 คือ ค่าความเข้มข้นของสาร

$\frac{Q_1}{V_1}, \frac{Q_2}{V_2}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณสาร/ปริมาตรภายในเซลล์

$K(C_1 - C_2)$ คือ ค่าความเข้มข้นที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการแพร่ระหว่างทั้งสองเซลล์

L_1C_1, L_2C_2 คือ ค่าความเข้มข้นที่สูญเสียจากการที่สารซึมออกภายนอกเซลล์

สมมุติให้ V_1 และ V_2 มีค่าคงที่ การเปลี่ยนแปลงปริมาณของ Q_1 และ Q_2 ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้นๆคือ

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= \Delta t(I_1 - L_1C_1 - K(C_1 - C_2)) \\ \Delta Q_2 &= \Delta t(I_2 - L_2C_2 - K(C_2 - C_1)) \end{aligned} \tag{3.14}$$

จาก $\Delta C = \dfrac{\Delta Q}{V}$ จะได้ว่า

$$\Delta C_1 = \frac{\Delta t}{V_1}(I_1 - L_1C_1 - K(C_1 - C_2))$$

$$\Delta C_2 = \frac{\Delta t}{V_2}(I_2 - L_2C_2 - K(C_2 - C_1))$$

โดยการหารด้วย Δt และ เทคลิมิต Δt เข้าใกล้ 0 จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{V_1}(I_1 - L_1C_1 - K(C_1 - C_2)) \tag{3.15}$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{\Delta t}{V_2}(I_2 - L_2C_2 - K(C_2 - C_1)) \tag{3.16}$$

จากสมการ (3.14) พิจารณา 2 กรณี

3.2.1 Steady-state case อัตราการแพร่ I คงที่ ค่า dC/dt มีค่าเท่ากับ 0

จากสมการ (3.15) และ (3.16) แทนค่า $\frac{dC_1}{dt}, \frac{dC_2}{dt}=0$ แก้สมการหาค่า C_1, C_2

$$\frac{1}{V_1}\left(I_1 - L_1C_1 - K\left(C_1 - C_2\right)\right) = 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{V_2}\left(I_2 - L_2C_2 - K\left(C_2 - C_1\right)\right) = 0 \tag{3.18}$$

จาก (3.17)

$$\left(I_1 - L_1C_1 - K\left(C_1 - C_2\right)\right) = 0$$

$$-C_1L_1 - KC_1 + KC_2 + I_1 = 0$$

$$-C_1\left(L_1 + K\right) + C_2K + I_1 = 0 \tag{3.19}$$

จาก (3.18)

$$\left(I_2 - L_2C_2 - K\left(C_2 - C_1\right)\right) = 0$$

$$KC_1 - C_2L_2 - KC_2 + I_2 = 0$$

$$C_1K - C_2\left(L_2 + K\right) + I_2 = 0 \tag{3.20}$$

$(3.19)\times\left(\frac{L_2+K}{K}\right);$

$$\frac{-C_1\left(L_1+K\right)\left(L_2+K\right)}{K} + C_2\left(L_2+K\right) + \frac{I_1\left(L_2+K\right)}{K} = 0 \tag{3.21}$$

$(3.2.0)+(3.21);$

$$C_1K - \frac{C_1\left(L_1+K\right)\left(L_2+K\right)}{K} + I_2 + I_1\frac{\left(L_2+K\right)}{K} = 0$$

$$C_1\left(\frac{K^2 - L_1L_2 - L_1K - L_2K - K^2}{K}\right) + \frac{I_2K + I_1L_2 + I_1K}{K} = 0$$

$$-C_1\left(L_1L_2 + L_1K + L_2K\right) + I_2K + I_1L_2 + I_1K = 0$$

$$I_2K + I_1L_2 + I_1K = C_1\left(L_1L_2 + L_1K + L_2K\right)$$

$$\frac{I_1L_2 + KI_1 + KI_2}{L_1L_2 + KL_1 + KL_2} = C_1$$

$$(3.20)\times\left(\frac{L_1+K}{K}\right); \qquad C_1\left(L_1+K\right)+\frac{C_2\left(L_2+K\right)\left(L_1+K\right)}{K}+\frac{I_2\left(L_1+K\right)}{K}=0 \qquad (3.22)$$

$$(3.19)+(3.22); \qquad C_2K-\frac{C_2\left(L_2+K\right)\left(L_1+K\right)}{K}+I_1+\frac{I_2\left(L_1+K\right)}{K}=0$$

$$C_2\left(\frac{K^2-L_1L_2-L_1K-L_2K-K^2}{K}\right)+\frac{I_1K+I_2L+I_2K}{K}=0$$

$$-C_2\left(L_1L_2+L_1K+L_2K\right)+I_1K+I_2L_1+I_2K=0$$

$$I_1K+I_2L_1+I_2K=C_2\left(L_1L_2+L_1K+L_2K\right)$$

$$\frac{I_2L_1+KI_1+KI_2}{L_1L_2+KL_1+KL_2}=C_2$$

จะได้ว่า

$$C_{1\,ss}=\frac{I_1L_2+K(I_1+I_2)}{L_1L_2+K(L_1+L_2)}$$

$$C_{2\,ss}=\frac{I_2L_1+K(I_1+I_2)}{L_1L_2+K(L_1+L_2)} \qquad (3.23)$$

3.2.2 Time-dependent case อัตราการแพร่ I คงที่ ค่า $C_1\left(0\right), C_2(0)=0$
แยกออกเป็น 3กรณีย่อย

3.2.2.1 ค่าคงที่การแพร่ K มีค่าน้อยมาก

เพื่อให้ง่ายต่อการหาผลเฉลยในระบบสมการ จะกำหนดว่า สมการแรกมีค่าคงที่การแพร่ K มีค่าน้อยมาก ทำให้ตัดพจน์ที่มีค่า K มาเกี่ยวข้องออกไปได้

จากสมการ (3.15) ตัดพจน์ที่มีค่า K เกี่ยวข้องออกไป

$$\frac{dC_1(t)}{dt}+\frac{L_1}{V_1}C_1(t)=\frac{I_1}{V_1} \qquad C_1(0)=0$$

หาผลเฉลย โดยใช้ ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating Factors)

จาก $$y'+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$$

หาตัวประกอบปริพันธ์

$$\begin{aligned} u &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int \frac{L_1}{V_1}dt} \\ &= e^{\frac{L_1}{V_1}t} \end{aligned}$$

หาผลเฉลยจาก

$$uy=\int uQ\left(x\right)dx$$

จะได้

$$e^{\frac{L_1}{V_1}t} y = \int e^{\frac{L_1}{V_1}t} \frac{I_1}{V_1} dt$$

$$e^{\frac{L_1}{V_1}t} y = \frac{I_1}{V_1} \cdot \frac{V_1}{L_1} e^{\frac{L_1}{V_1}t} + c$$

$$e^{\frac{L_1}{V_1}t} y = \frac{I_1}{L_1} e^{\frac{L_1}{V_1}t} + c$$

$$y = \frac{I_1}{L_1} + ce^{-\frac{L_1}{V_1}t} \tag{3.24}$$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0$

$$y(0) = \frac{I_1}{L_1} + ce^{-\frac{L_1}{V_1}(0)}$$

$$0 = \frac{I_1}{L_1} + ce^{0}$$

$$0 = \frac{I_1}{L_1} + c$$

$$c = -\frac{I_1}{L_1}$$

นำ c ที่ได้ไปแทนในสมการ (3.24) จะได้

$$y(t) = \frac{I_1}{L_1} - \frac{I_1}{L_1} e^{-\frac{L_1}{V_1}t}$$

$$= \frac{I_1}{L_1}\left(1 - e^{-\frac{L_1}{V_1}t}\right)$$

$$C_1(t) = \frac{I_1}{L_1}(1 - e^{-(L_1/V_1)t}) \tag{3.25}$$

แทนค่า $C_1(t)$ ที่ได้ ลงในสมการ (3.16) เพื่อหาค่า $C_2(t)$ และใช้ การแปลงลาปลาซ หาผลเฉลย

$$\mathscr{L}\left[\frac{dC_2(t)}{dt}+\frac{L_2+K}{V_2}C_2(t)\right]=\mathscr{L}\left[\frac{KI_1}{L_1V_2}(1-e^{-(L_1/V_1)t})\right]$$

$$(s+a)g_2=\frac{KI_1}{L_1V_2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+b})$$

กำหนดให้ $a=\dfrac{K+L_2}{V_2}$ และ $b=\dfrac{L_1}{V_1}$

$$g_2=\frac{KI_1}{L_1V_2}\left[\frac{1}{s(s+a)}-\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right]$$

$$=\frac{KI_1}{L_1V_2}\left(\frac{b}{s(s+a)(s+b)}\right)$$

หาลาปลาซผกผัน ของ g_2

$$\mathscr{L}^{-1}[g_2]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{KI_1}{L_1V_2}\left(\frac{b}{s(s+a)(s+b)}\right)\right]$$

จะได้

$$C_2(t)=\frac{KI_1}{L_1V_2a}\left(1+\frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{a-b}\right)$$

$$=\frac{KI_1}{L_1\left(K+L_2\right)}\left(\frac{a(1-e^{-bt})-b(1-e^{-at}}{a-b}\right) \qquad (3.26)$$

ผลเฉลยที่ได้ยังคงมีความซับซ้อน จึงแยกออกเป็น2กรณี คือ $a>b$ หรือ $b>a$

กรณี $a>b$ หรือ $\dfrac{K+L_2}{V_2}>\dfrac{L_1}{V_1}$

$$C_2(t)=\frac{KI_1}{L_1\left(K+L_2\right)}\left(1-e^{-(L_1/V_1)t}\right) \qquad (3.27)$$

กรณี $b > a$ หรือ $\frac{L_1}{V_1} > \frac{K+L_2}{V_2}$

$$C_2(t) = \frac{KI_1}{L_1\left(K+L_2\right)}\left(1-e^{-[(K+L_2)/V_2)]t}\right)$$

3.2.2.2 ค่าคงที่การแพร่ K มีค่ามากๆ

จากสมการ (3.14) ใช้การแปลงลาปลาซ หาผลเฉลย จะได้

$$V_1 s g_1 = -L_1 g_1 - K g_1 + K g_2$$

$$V_2 s g_2 = -L_2 g_2 - K g_2 + K g_1$$

กำหนดตัวแปรใหม่ เพื่อให้ง่ายต่อการหาผลเฉลย

$$k_1 = \frac{K}{V_1}\ ,\ k_2 = \frac{K}{V_2}\ ,\ l_1 = \frac{L_1+K}{V_1}\ \ ,\ l_2 = \frac{L_1+K}{V_1}\ \ ,\ r_1 = \frac{I_1}{V_1} \tag{3.28}$$

จะได้

$$g_1(s+l_1) - k_1 g_2 = \frac{r_1}{s}$$

$$-k_2 g_1 + (s+l_2) g_2 = 0$$

แก้สมการหาค่า g_1 , g_2

$$g_1 = \frac{r_1 + r_2 l_2 / s}{s^2 + \left(l_1 + l_2\right)s + l_1 l_2 - k_1 k_2}$$

$$g_2 = \frac{r_1 k_2 / s}{s^2 + \left(l_1 + l_2\right)s + l_1 l_2 - k_1 k_2}$$

หาลาปลาซผกผัน ของ g_1 , g_2

$$C_2(t) = \frac{r_1 k_2}{a-b}\left[\frac{1-e^{-bt}}{b} - \frac{1-e^{-bt}}{a}\right] \tag{3.29}$$

$$C_1(t) = r_1 \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b} + \frac{l_2}{k_2} C_2(t) \tag{3.30}$$

และพบว่า
$$C_1(t) = \frac{l_2}{k_2} C_2(t) + \frac{l_2}{k_2} \frac{dC_2}{dt} \tag{3.31}$$

$$a = \frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

$$b = \frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

$$p = l_1 + l_2 = \frac{K + L_1}{V_1} + \frac{K + L_2}{V_2} = a + b$$

$$q = l_1 l_2 - k_1 k_2 = \frac{L_1 L_2 + K(L_1 + L_2)}{V_1 V_2} = ab$$

3.2.2.3 เวลา t มีค่ามากๆ

จากสมการ (3.23)

$$C_2(\infty) = \frac{r_1 k_2}{ab} = \frac{I_1 K}{L_1 L_2 + K(L_1 + L_2)}$$

$$C_1(\infty) = \frac{l_2}{k_2} = \frac{I_1(K + L_2)}{L_1 L_2 + K(L_1 + L_2)}$$

ค่าคงที่การแพร่ K มีค่ามาก เมื่อเทียบกับผลรวมของ $(L_1 + L_2)$

จะพบว่า
$$p \approx \frac{K}{V_1} + \frac{K}{V_2} = K \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} \quad , \quad q = \frac{K(L_1 + L_2)}{V_1 V_2}$$

$$\frac{4q}{p^2} = \frac{4K(L_1 + L_2) V_1 V_2}{K^2 (V_1 + V_2)^2} < \frac{2(L_1 + L_2)}{K} < 1$$

เนื่องจาก K มากกว่า $(L_1 + L_2)$ และ $(V_1 + V_2)^2$ มากกว่า $2V_1 V_2$ ดังนั้นทำการหาค่าประมาณ a และ b

$$b = \frac{q}{p} = \frac{L_1 + L_2}{V_1 + V_2}$$

$$a = p - b = \frac{K(V_1+V_2)}{V_1V_2} - \frac{L_1+L_2}{V_1+V_2}$$

$$= \frac{K(V_1+V_2)^2 - V_1V_2(L_1+L_2)}{V_1V_2\left(V_1+V_2\right)}$$

เนื่องจาก รากที่สองของ V_1+V_2 มากกว่า ผลคูณของ V_1V_2 จะได้ว่า

$$a = K\frac{V_1+V_2}{V_1V_2} \tag{3.32}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{K(V_1+V_2)^2}{V_1V_2(L_1+L_2)} > 1$$

ดังนั้น จะพบว่า $a > b$ ประมาณค่าหา C_1 และ C_2

$$C_2(t) = \frac{r_1k_2}{ab}\left(1-e^{-bt}\right) = C_2\left(\infty\right)\left(1-e^{-bt}\right)$$

$$= \frac{I_1}{L_1+L_2}\{1-e^{-\left[(L_1+L_2)/(v_1+v_2)\right]t}\} \tag{3.33}$$

จากสมการ (3.31) ประมาณค่าหา $C_1(t)$

$$C_1(t) = \frac{K+L_2}{K}C_2(t) + \frac{r_1}{a}e^{-bt}$$

จากสมการ (3.30) แทนค่า l_2 และ k_2 จะได้

$$C_1 - C_2 = \frac{L_2}{K}C_2 + r_1\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b} \approx \frac{L_2}{K}C_2 + \frac{r_2}{a}e^{-bt} \tag{3.34}$$

จากสมการ (3.29) เนื่องจาก $a > b$ จะได้

$$\frac{C_2(t)}{C_2(\infty)} = 1 - e^{-bt} \;\; , \;\; e^{-bt} = 1 - \frac{C_2(t)}{C_2(\infty)}$$

หาค่าผลต่าง $C_1 - C_2$

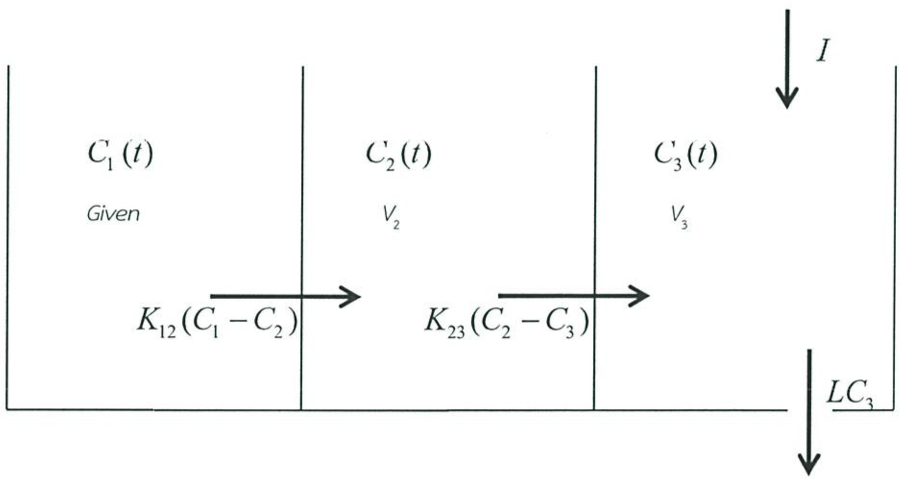
$$C_1(t) - C_2(t) = \frac{r_1}{a} e^{-bt} = \frac{I_1 V_2}{K(V_1 + V_2)} \left(1 - \frac{C_2(t)}{C_2(\infty)} \right)$$

เนื่องจาก C_2 มีค่าน้อยมาก จะได้

$$C_1 - C_2 = \frac{I_1 V_2}{K(V_1 + V_2)} \qquad (3.35)$$

3.3 A Simple Three-Compartment Problem

ในตัวอย่างก่อนหน้านั้นเป็นการสันนิษฐานว่า Input เป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งตอนนี้เราจะมาพิจารณากรณีที่แตกต่างกันออกไปนั่นคือการให้ความเข้มข้นคงที่โดยวิธี Diffusing barrier สิ่งที่พูดถึงสามารถแสดงเป็นแผนภาพดังรูปที่ 3



รูปที่ 3.3

ในกรณีนี้ I โดยปกติจะเป็นปริมาณเชิงลบซึ่งแทนความเข้มข้นที่เสียไป เราเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อธิบายระบบได้ดังนี้

$$V_3 \frac{dC_3}{dt} = I - LC_3 + K_{23}\left(C_2 - C_3\right)$$

$$V_2 \frac{dC_2}{dt} = K_{12}\left(C_1 - C_2\right) - K_{23}\left(C_2 - C_3\right)$$

ซึ่งผลเฉลยสำหรับ C_3 ใน Steady state คือ

$$C_{3\,ss} = \frac{K_{12}K_{23}C_1 + I\left(K_{12}+K_{23}\right)}{\left(K_{12}+K_{23}\right)L + K_{12}K_{23}}$$

ตอนนี้เราจะพิจารณากรณีที่เกี่ยวข้องกับเวลาที่ทุกๆความเข้มข้นที่เริ่มต้นเป็น 0 และ C_1 เป็นค่าคงที่ที่เวลาเริ่มต้น ซึ่งเราต้องใช้ความระมัดระวังเพราะความเข้มข้นที่เสียไปไม่สามารถเกิดขึ้นได้ก่อน

เวลาเริ่มต้นหรือภายในระยะเวลาสั้นๆ เนื่องจากไม่มีอะไรใน Three Compartment ที่จะหายไป เราจึงให้ I เป็น 0 และในขณะที่เราหลีกเลี่ยงปัญหานี้โดยการประมาณที่เหมาะสมสำหรับ I ที่มีความเข้มข้นต่ำ ซึ่งผลเฉลยจะมีความซับซ้อนมาก เราจึงต้องใช้ Numerical Methods ซึ่งได้อธิบายในหัวข้อถัดไป

ใช้การแปลงลาปลาซกับสมการเชิงอนุพันธ์โดยให้ C_1 เป็นค่าคงที่ C_2 และ C_3 เริ่มต้นที่ 0

$$V_3 s g_3 = -Lg_3 + K_{23}\left(g_2 - g_3\right)$$

$$V_2 s g_3 = -Lg_3 + K_{23}\left(g_2 - g_3\right)$$

ผลเฉลยแรกของ g_2

$$g_2 = \frac{g_3}{k_{23}} + \left(V_3 s + L + K_{23}\right)$$

และแทนลงไปในสมการที่ 2

$$g_3 = \frac{K_{12}K_{23}C_1 / V_2V_3}{s\left(s^2 + ps + q\right)}$$

โดยที่

$$p = \frac{L + K_{23}}{V_3} + \frac{K_{12} + K_{23}}{V_2}$$

$$q = \frac{\left(K_{12} + K_{23}\right)L + K_{12}K_{23}}{V_2V_3}$$

ผลเฉลยสุดท้ายคือ

$$C_3\left(t\right) = \frac{1}{ab}\left(1 + \frac{ae^{-bt} - be^{-at}}{b - a}\right)\left(\frac{K_{12}K_{23}C_1}{V_2V_3}\right)$$

จากที่กล่าวมาเป็นการศึกษากรณีที่เวลาเมื่อเริ่มต้นเป็นศูนย์ และความเข้มข้นเมื่อเริ่มต้นมีค่าคงที่ แต่ในความเป็นจริง ความเข้มข้นจะเป็นฟังก์ชันของเวลา โดยจะพิจารณา ความเข้มข้น $C(t)$ เป็นอัตราส่วนกับ Q และ $H(t)$ ที่เป็น unit impulse

นั่นคือ ให้

$$C(t) = QH(t)$$

จากรูป จะมีการflowของสารออกจากเซลล์ จะได้ว่า

$$C(t) = \frac{Q}{V} e^{-(F/V)t}$$

ดังนั้น

$$H(t) = \frac{C(t)}{Q} = \frac{1}{V} e^{-(F/V)t}$$

ซึ่งเราพบว่าความเข้มข้นใน compartment ที่สองเป็นดังนี้

$$C_2(t) = \frac{Q}{V_1 - V_2}\left(e^{-(F/V_1)t} - e^{-(F/V_2)t}\right)$$

ดังนั้น

$$H(t) = \frac{C_2(t)}{Q} = \frac{1}{V_1 - V_2}\left(e^{-(F/V_1)t} - e^{-(F/V_2)t}\right)$$

จากสมการ (3.15) และ (3.16) จะได้

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{L_1 + K}{V_1} C_1 - \frac{K}{V_1} C_2 = \frac{I_1(t)}{V_1}$$
$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{L_2 + K}{V_2} C_2 - \frac{K}{V_2} C_1 = \frac{I_2(t)}{V_2}$$

ให้ I_1 และ I_2 และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$C_1(0) = \frac{Q}{V_1}, \qquad C_2(0) = 0$$
$$\frac{dC_2(0)}{dt} = +\frac{K}{V_2} C_1(0) = +\frac{KQ}{V_1 V_2}$$

ใช้สัญลักษณ์ จากสมการ (3.28) จะได้

$$\frac{dC_1}{dt} + l_1 C_1 - k_1 C_2 = 0\ , \ \ \frac{dC_2}{dt} + l_2 C_2 - k_2 C_1 = 0$$

ตอนนี้เราจะกำจัด C_1 เพื่อให้สมการเหลือแต่ C_2

$$C_1 = \frac{1}{k_2}\left(\frac{dC_2}{dt} + l_2 C_2\right)$$
$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{k_2}\left(\frac{d^2 C_2}{dt^2} + l_2 \frac{dC_2}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2 C_{12}}{dt^2} + (l_1 + l_2)\frac{dC_2}{dt} + (l_1 l_2 - k_1 k_2) C_2 = 0$$

แก้ปัญหานี้โดยวิธี Laplace transform

$$s^2g - sC_2(0) - \frac{dC_2(0)}{dt} + (l_1 + l_2)(sg - C_2(0)) + (l_1l_2 - k_1k_2)g = 0$$

$$g = \frac{KQ}{V_1V_2}\left(\frac{1}{s^2 + (l_1 + l_2)s + (l_1l_2 - k_1k_2)}\right)$$

จะได้

$$C_2(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}\left(\frac{KQ}{V_1V_2}\right)$$

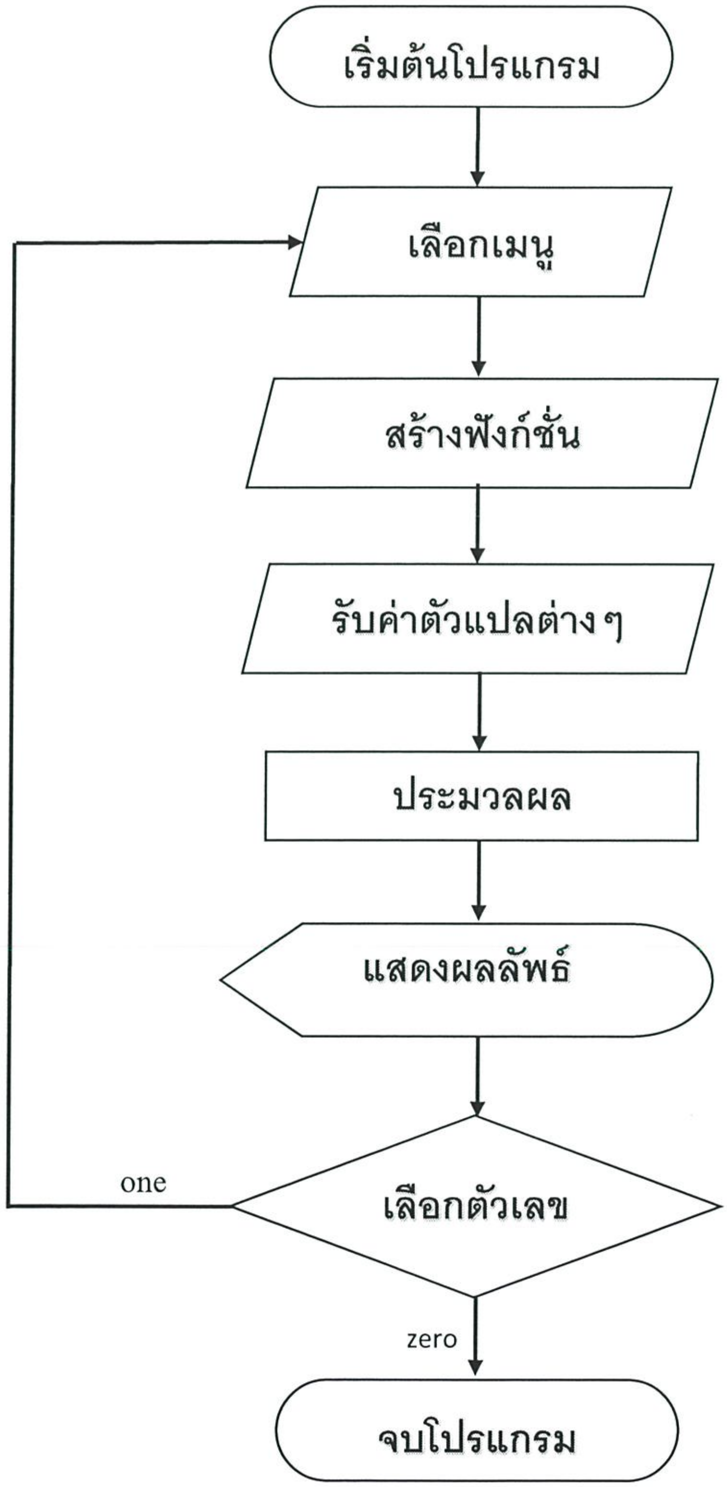
ซึ่ง

$$a = \frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$
$$b = \frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$
$$p = l_1 + l_2$$
$$q = l_1l_2 - k_1k_2$$

$$H(t) = \frac{K}{V_1V_2}\left(\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}\right)$$

บทที่ 4
ผลการดำเนินงานและอภิปรายผล

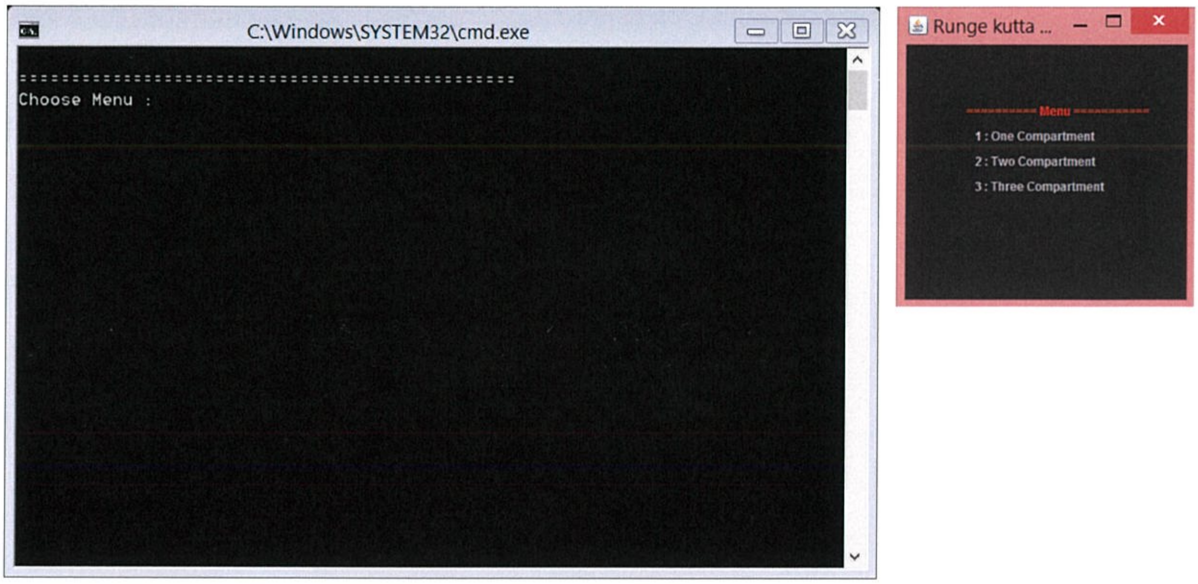
4.1 ผังความคิด (Algorithm of program)



รูปที่ 4.1 ผังความคิด (Algorithm)

4.2 ขั้นตอนการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม

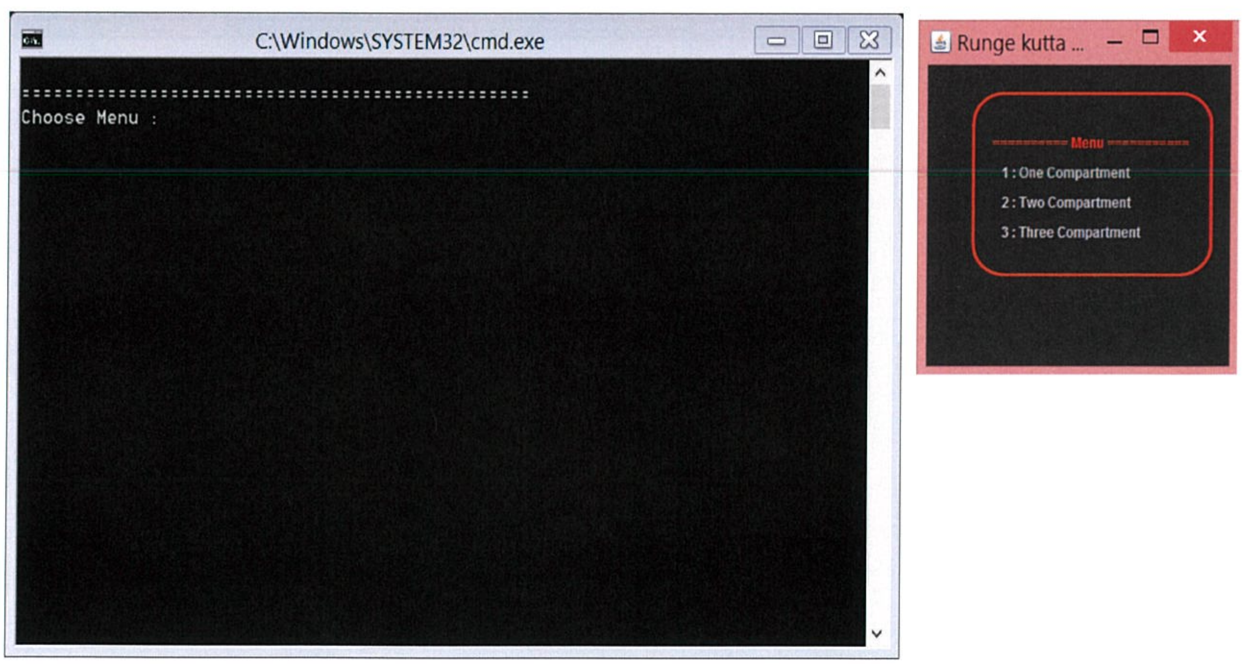
Compartment program เป็นโปรแกรมที่เขียนขึ้นโดยภาษา Java และใช้โปรแกรม Edit plus ในการสร้างเพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในการทำวิจัยปัญหาพิเศษนี้



รูปที่ 4.2 โปรแกรมการแก้สมการ ODE โดยใช้วิธี Runge-Kutta 4^{th} order

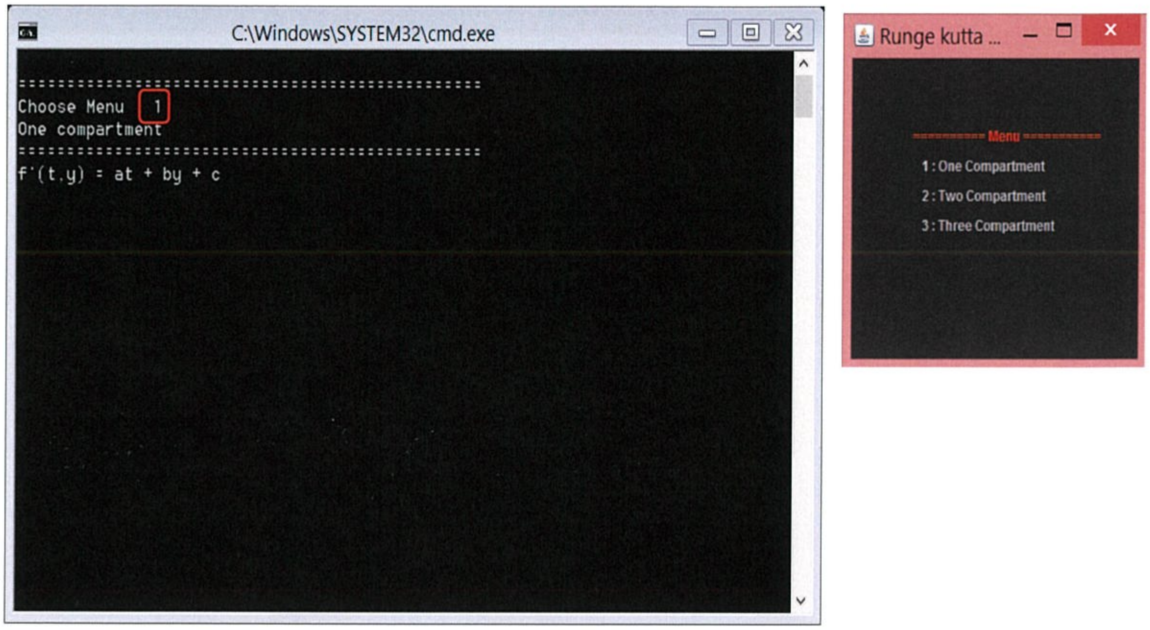
<u>**วิธีการหาผลเฉลยโดยใช้โปรแกรม**</u>

ในการแก้สมการ ODE ด้วยวิธี Runge-Kutta 4^{th} order ผู้ใช้ต้องทำการป้อนค่าให้ตัวแปรต่างๆลงในโปรแกรม โดยมีวิธี ดังนี้



รูปที่ 4.3 แสดงหน้าต่างเมนูเพื่อเลือกใช้โปรแกรม

ขั้นตอนที่ 1 พิมพ์ตัวเลข 1-3 ตามหัวข้อที่ต้องการเลือกใช้ ดังรูป ที่ (4.3)



รูปที่ 4.4 แสดงการเลือกเมนูที่ 1 (One compartment)

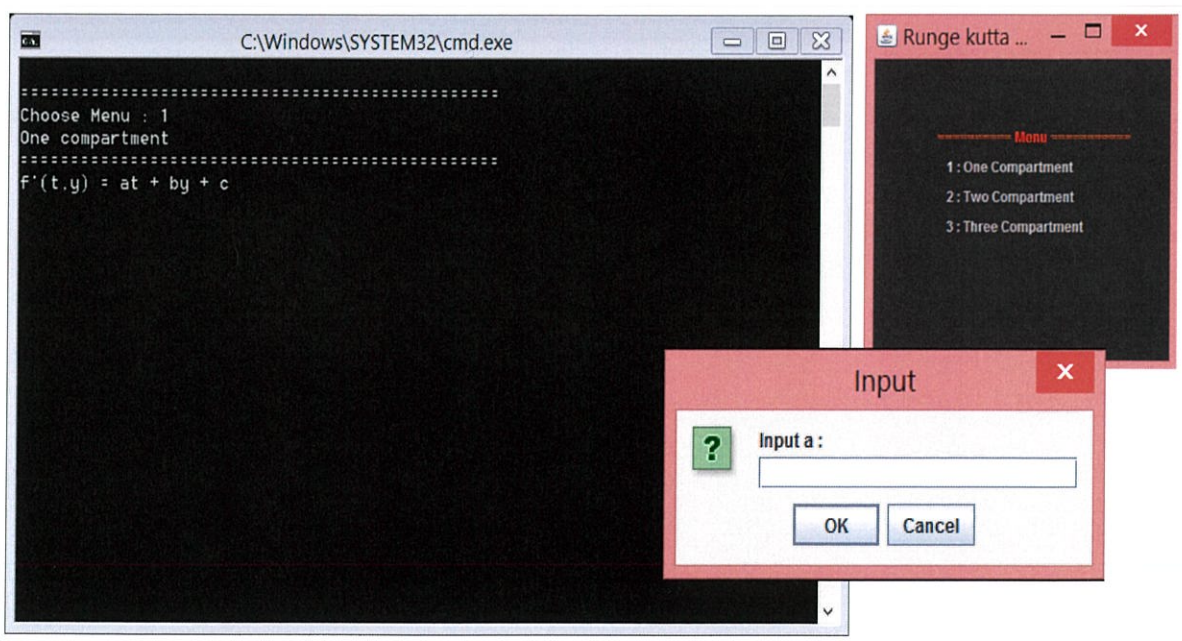
ขั้นตอนที่ 2 จะมีหน้าต่างเด้งขึ้นมาเพื่อให้ผู้ใช้ใส่ค่าตัวแปรแต่ละตัวแล้วกด OK เพื่อสร้างฟังก์ชัน เช่น

Ex ฟังก์ชัน $y' = t + y$

เมื่อ a คือ สัมประสิทธ์หน้าตัวแปล t

b คือ สัมประสิทธ์หน้าตัวแปล y

c คือ ค่าคงที่ใดๆ



รูปที่ 4.5 แสดงการสร้างฟังก์ชั่น

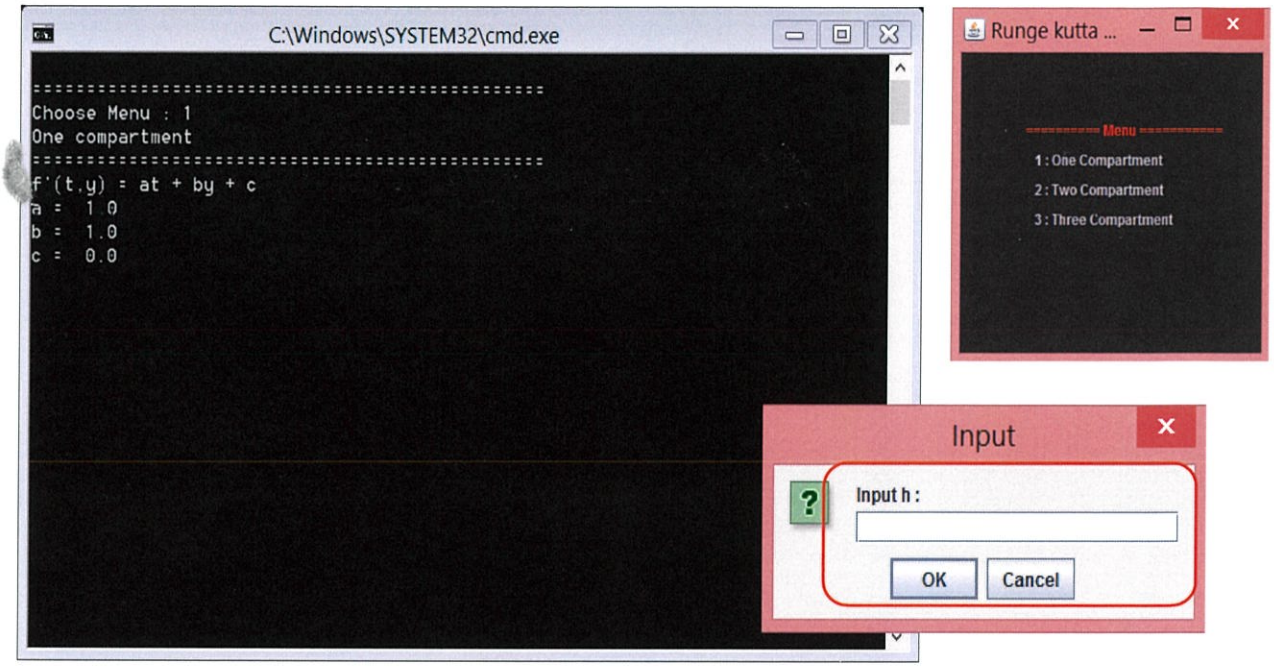
ขั้นตอนที่ 3 ป้อนค่าให้กับตัวแปรเงื่อนไขแต่ละตัวโดยที่

h คือ *Stepsize* ของสมการ

ts คือ ค่าขอบเขตล่าง

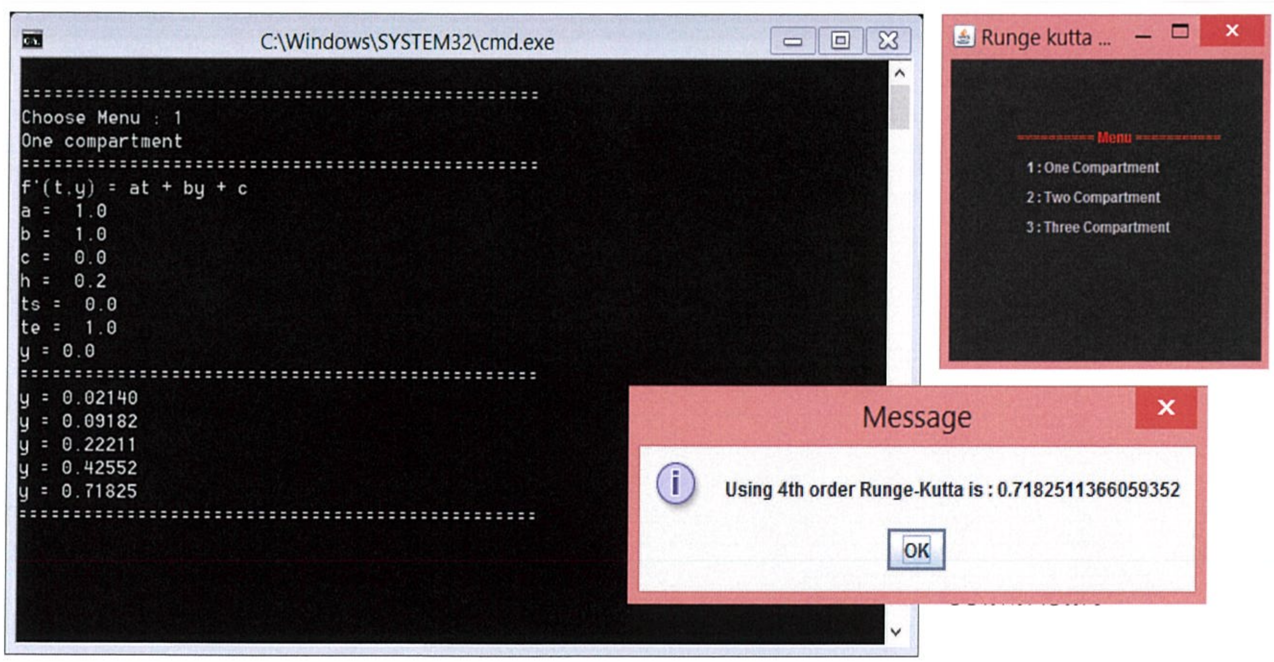
te คือ ค่าขอบเขตบน

y_0 คือ เงื่อนไขเริ่มต้น



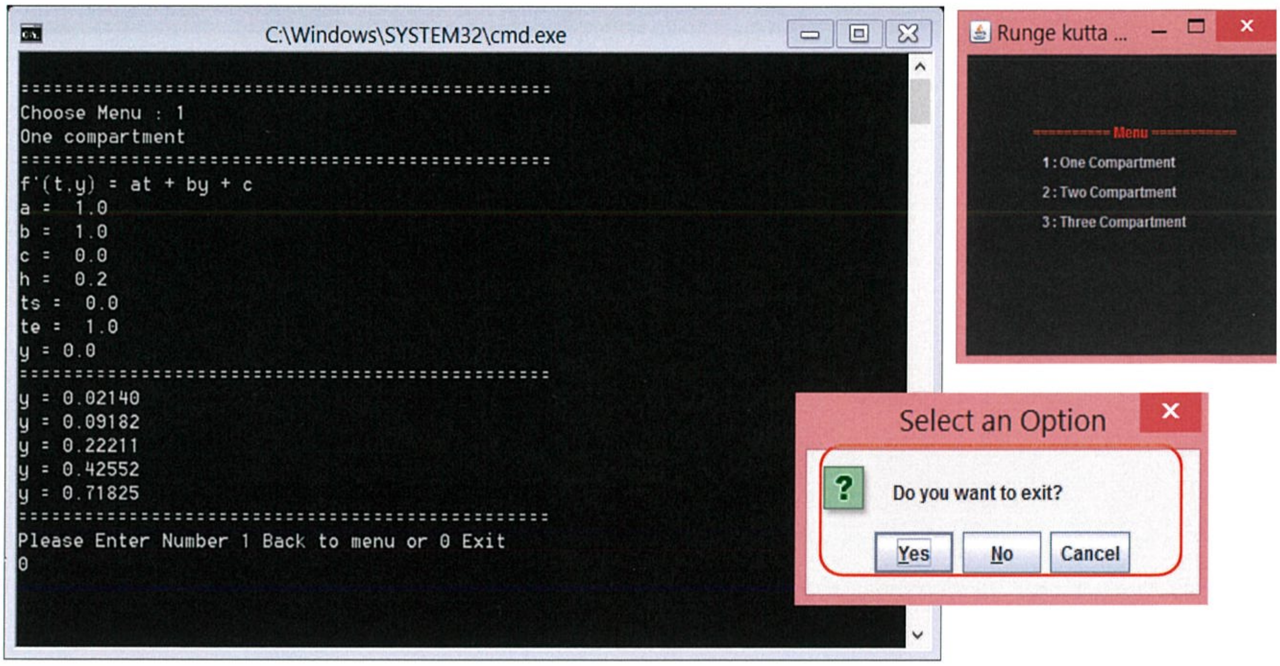
รูปที่ 4.6 แสดงการใส่ค่าตัวแปลที่เป็นเงื่อนไขของสมการ

ขั้นตอนที่ 4 เมื่อทำการป้อนข้อมูลครบแล้วโปรแกรมเริ่มทำการคำนวณค่าและจะแสดงผลลัพธ์ ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 แสดงผลลัพธ์ของสมการ

ขั้นตอนที่ 5 เลือกเมนูใหม่ ป้อนหมายเลข 0 เพื่อออกจากโปรแกรม 1 เพื่อกลับไป



รูปที่ 4.8 แสดงเมนูในการจบโปรแกรม

4.3 วิธีหาผลเฉลยระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

One compartment

วิธีการหาผลเฉลยของสมการ ODE จาก $t=0$ ถึง $t=1$ โดย $h=0.2$

$y' = x + y \qquad y(0) = 0$

Sol^n

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

$$u = e^{\int f(x)dx}$$

$$= e^{\int -1dx}$$

$$= e^{-x}$$

$$e^{-x}y = \int e^{-x}xdx$$

จากวิธีการอินทิเกรตแบบแยกตัวแปร จะได้

$$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$$

$$du = dx \qquad v = -e^{-x}$$

$$\int udv = u \times v - \int vdu$$

$$\int e^{-x}xdx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

แทนค่า

$$e^{-x}y = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$$y = -x - 1 + ce^{x}$$

จาก $y(0)=0;$

$$y(0)=-1+ce^{0}$$
$$0=-1+c$$
$$c=1$$
$$y(x)=-x-1+e^{x}$$

วิธีที่ใช้ / ผลเฉลย	Compartment program	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์	ค่าคลาดเคลื่อน
0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.021400	0.021403	0.000003
0.4	0.091818	0.091825	0.000007
0.6	0.222107	0.222119	0.000012
0.8	0.425521	0.425541	0.000020
1.0	0.718251	0.718282	0.000031

ตารางที่ 4.1 แสดงผลเฉลยและค่าคาดเคลื่อนระหว่าง Compartment program (One compartment) กับระบบสมการเชิงอนุพันธ์

Two compartment

วิธีการหาผลเฉลยของสมการ ODE จาก $t=0$ ถึง $t=1$ โดย $h=0.5$

$$\frac{dy_1}{dt}=-0.5y_1 \qquad (4.1)$$

$$\frac{dy_2}{dt}=4-0.4y_1-0.3y_2 \qquad (4.2)$$

$y_1(0)=4 \qquad y_2(0)=6$

Sol^n

จาก (4.1); $\quad y_1'+0.5y_1=0$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $\quad r+0.5=0$

$r=-0.5$

$\therefore \quad y_1=c_1e^{-0.5t}$

เนื่องจาก $y_1(0)=4$ จะได้ว่า

$4=c_1e^{-0.5(0)}$

$4=c_1$

$y_1=4e^{-0.5t}$

จาก (4.2); $\quad y_2'=4-0.1y_1-0.3y_2$

$y_2'=4-0.1\left(4e^{-0.5t}\right)-0.3y_2$

$y_2'+0.3y_2=4-0.4e^{-0.5t}$

หา y_{2_h} จาก $\quad y_2'+0.3y_2=0$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $\quad r+0.3=0$

$r=-0.3$

$\therefore \quad y_{2_h}=c_2e^{-0.3t}$

หา y_{2_p} จาก $\quad y_2'+0.3y_2=4-0.4e^{-0.5t}$

สมมติ $\quad y_{2_p}=A+Be^{-0.5t}$

$$y'_{2_p} = -0.5e^{-0.5t}$$

แทนค่า $$-0.5Be^{-0.5t} + 0.3\left(A + Be^{-0.5t}\right) = 4 - 0.4e^{-0.5t}$$

$$0.3A + \left(-0.5B + 0.3B\right)e^{-0.5t} + = 4 - 0.4e^{-0.5t}$$

$$0.3A - 0.2Be^{-0.5t} + = 4 - 0.4e^{-0.5t}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

- $0.3A = 4$

$$A = \frac{4}{0.3} = \frac{40}{3}$$

- $-0.2B = -0.4$

$$B = 2$$

$$\therefore \quad y_{2_p} = \frac{40}{3} + 2e^{-0.5t}$$

นั่นคือ $$y_2 = y_{2_h} + y_{2_p}$$

$$= c_2e^{-0.3t} + \frac{40}{3} + 2e^{-0.5t}$$

เนื่องจาก $$y_2(0) = 6$$

$$6 = c_2e^0 + \frac{40}{3} + 2e^0$$

$$c_2 = 6 - 2 - \frac{40}{3}$$

$$= -\frac{28}{3}$$

$$y_2 = -\frac{28}{3}e^{-0.3t} + 2e^{-0.5t} + \frac{40}{3}$$

วิธีที่ใช้ / ผลเฉลย	Compartment program		ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น		ค่าคลาดเคลื่อน	
	$y1$	$y2$	$y1$	$y2$	$y1$	$y2$
0	4.000000	6.000000	4.000000	6.000000	0.0	0.0
0.5	3.115234	6.857670	3.115203	6.857660	0.000021	0.000010
1.0	2.426171	7.632105	2.426122	7.632091	0.000051	0.000014

ตารางที่ 4.2 แสดงผลเฉลยและค่าคาดเคลื่อนระหว่าง Compartment program (Two compartment) กับระบบสมการเชิงอนุพันธ์

4.4 วิธีหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

One Compartment

เขียน function ใน m-file

```
function    Fv=runge1(t,y);
            Fv=t+y;

end
```

รูปที่ 4.9 แสดง การเขียน function ในโปรแกรม

เรียกใช้ function และแสดงผล ในหน้าจอ Command Window

```
Command Window
>> [t,y]=ode45('runge1',[0:0.2:1],[0])

t =

         0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000


y =

         0
    0.0214
    0.0918
    0.2221
    0.4255
    0.7183
```

รูปที่ 4.10 แสดงคำตอบของโปรแกรม

วิธีที่ใช้ / ผลเฉลย	Compartment program	Math lab	ค่าคลาดเคลื่อน
0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.021400	0.021402	0.000002
0.4	0.091818	0.091824	0.000001
0.6	0.222107	0.222118	0.000011
0.8	0.425521	0.425540	0.000019
1.0	0.718251	0.718281	0.000030

ตารางที่ 4.3 แสดงผลเฉลยและค่าคาดเคลื่อนระหว่าง Compartment program (One compartment) กับ MATLAB

Two compartment

เขียน function ใน m-file

```
function   Fv=runge2(t,y);
Fv(1,1)=-0.5*y(1);
Fv(2,1)=4-0.1*y(1)-0.3*y(2);

end
```

รูปที่ 4.11 แสดง การเขียน function ในโปรแกรม

เรียกใช้ function และแสดงผล ในหน้าจอ Command Window

```
Command Window
>> [t,y]=ode45('runge2',[0:0.5:1],[4;6])

t =

         0
    0.5000
    1.0000


y =

    4.0000    6.0000
    3.1152    6.8577
    2.4261    7.6321
```

รูปที่ 4.12 แสดงคำตอบของโปรแกรม

วิธีที่ใช้ / ผลเฉลย	Compartment program		MATLAB		ค่าคลาดเคลื่อน	
	*y*1	*y*2	*y*1	*y*2	*y*1	*y*2
0	4.000000	6.000000	4.000000	6.000000	0.0	0.0
0.5	3.115234	6.857670	3.115203	6.857660	0.000021	0.000010
1.0	2.426171	7.632105	2.426122	7.632091	0.000051	0.000014

ตารางที่ 4.4 แสดงผลเฉลยและค่าคาดเคลื่อนระหว่าง Compartment program (Two compartment) กับ MATLAB

Three compartment

เขียน function ใน m-file

```
function   Fv=runge3(t,y);
Fv(1,1)=y(2);
Fv(2,1)=y(3);
Fv(3,1)=t+4*y(1)-3*y(2)+5*y(3);

end
```

รูปที่ 4.13 แสดง การเขียน function ในโปรแกรม

เรียกใช้ function และแสดงผล ในหน้าจอ Command Window

```
Command Window
>> [t,y]=ode45('runge3',[0:0.5:1],[2;4;1])

t =

         0
    0.5000
    1.0000


y =

    2.0000    4.0000    1.0000
    4.2337    5.4424    7.7612
    9.6395   22.4686   89.6221
```

รูปที่ 4.14 แสดงคำตอบของโปรแกรม

วิธีที่ใช้ / ผลเฉลย	Compartment program			MATLAB			ค่าคลาดเคลื่อน		
	$y1$	$y2$	$y3$	$y1$	$y2$	$y3$	$y1$	$y2$	$y3$
0	2.0000	4.0000	1.0000	2.0000	4.0000	1.0000	0.0	0.0	0.0
0.5	4.1953	5.2708	6.9869	4.2337	5.4424	7.7612	0.0384	0.1716	0.7743
1.0	8.9394	19.3032	75.2790	9.6395	22.4686	89.6221	0.7001	3.1654	14.3431

ตารางที่ 4.5 แสดงผลเฉลยและค่าคาดเคลื่อนระหว่าง Compartment program (Threecompartment) กับ MATLAB

บทที่5

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากปัญหาอัตราการแพร่ของสารเข้าสู่ร่างกายที่ผู้วิจัยได้ศึกษาโดยพิจารณา สามกรณีคือ

1) One-Compartment ศึกษาการแพร่ของสารเข้าสู่เซลล์ เพียงเซลล์เดียว
2) Two-Compartment ศึกษาการแพร่ของสารผ่านเซลล์สองเซลล์ที่มีการทำงานร่วมกัน
3) Three-Compartment ศึกษาการแพร่ของสารผ่านเซลล์สามเซลล์ที่มีการทำงานร่วมกัน

ผู้วิจัยได้พัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยโปรแกรม สามารถแก้สมการอนุพันธ์เชิงเส้น ด้วยวิธี รุงเงคุตตา อันดับสี่ ทั้งแบบ หนึ่งสมการหนึ่งตัวแปร สองสมการสองตัวแปร และสามสมการสามตัวแปร

5.2 การวิจารณ์ผลการวิจัย

จากโปรแกรมที่พัฒนา เมื่อเปรียบเทียบกับ MATLAB พบว่า ค่าที่ได้มีความคาดเคลื่อนในกรณี Three-Compartment ส่วนกรณี One-Compartment และ Two-Compartment ค่าที่ได้มีความใกล้เคียงกัน

5.3 ข้อเสนอแนะ

ค่าคงที่ต่างๆ ที่ใช้ในการหาผลเฉลย เป็นเพียงค่าที่สมมุติขึ้นมา ผู้ที่สนใจจะนำโปรแกรมไปใช้ ควรศึกษา ทำการวิจัย เพื่อให้ได้ค่าที่เหมาะสม และสามารถนำไปใช้ และวิจัยพัฒนาต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] รศ.ดร. พัชรินทร์ เหมโชติ. *“สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ”*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2548

[2] รศ.ดร พัชรินทร์ เหมโชติ. *“พิชคณิตเชิงเส้น”* . พิมพ์ครั้งที่2. กรุงเทพฯ: ประสิทธิ์ภัณฑ์แอนด์พริ้นติ้ง 2549

[3] Mathematical Techniques for Biology and Medicine Dover 0-486-65247-5

[4] Mathematical Modeling Associate Professor Pakkinee Chitsakul, Faculty of Science, KMITL 2553

ภาคผนวก ก.

โค้ดของโปรแกรมที่จัดทำ (Java)

```
import java.util.*;

import javax.swing.*;

import java.awt.Window;

import java.awt.Color;


class RungeKutta extends JFrame  {


    public static void main(String[] args) {

                Scanner kbd = new Scanner(System.in);

                System.out.println("");

                menu();

                System.out.println("Please Enter Number 1 Back to menu or 0
Exit");

                double s = kbd.nextDouble();

                if (s==1)

                { menu();

                } else if (s == 0)

                {       JOptionPane.showConfirmDialog(null, "Do you want to
exit?");

                        System.exit(0);

                }

    }



//Menu
```

```
public static void menu(){
        JFrame frame = new JFrame("Runge kutta order 4 Program");
        frame.setSize(300 , 300);
        frame.setLocation(1000, 180);
        frame.setVisible(true);
        frame.setDefaultCloseOperation(JFrame.EXIT_ON_CLOSE);
        frame.getContentPane().setLayout(null);
        frame.getContentPane().setBackground(Color.DARK_GRAY);

    System.out.println("=======================================
==========");
        JLabel title = new JLabel("========== Menu
===========");
    JLabel menu1 = new JLabel("   "+"1 : One Compartment");
    JLabel menu2 = new JLabel("   "+"2 : Two Compartment");
    JLabel menu3 = new JLabel("   "+"3 : Three Compartment");
        title.setBounds(60, 40, 200, 50);
        title.setForeground(Color.RED);
        frame.getContentPane().add(title);
        menu1.setBounds(60, 60, 164, 60);
        menu1.setForeground(Color.LIGHT_GRAY);
        frame.getContentPane().add(menu1);
        menu2.setBounds(60, 80, 164, 70);
        menu2.setForeground(Color.LIGHT_GRAY);
```

```
                frame.getContentPane().add(menu2);
                menu3.setBounds(60, 100, 164, 80);
                menu3.setForeground(Color.LIGHT_GRAY);
                frame.getContentPane().add(menu3);
        Scanner kbd = new Scanner(System.in);
        System.out.print("Choose Menu : ");
        int a = kbd.nextInt();
        if (a == 1) {
            onecom();
        }
        if (a == 2) {
            twocom();
        }
        if (a == 3) {
            threecom();
        }
         }
//End


// One Compartment
    public static double deriv1(double t, double y1, double y2,double d) {
        return t+y1+y2+d;
    }
```

```
public static void onecom() {
    double k1, k2, k3, k4;
    double xs = 0, xe = 0, t;
            System.out.println("One compartment");

     System.out.println("=========================================
==========");
            System.out.println("f' = ax + by + cz + d");
    Scanner kbd = new Scanner(System.in);
    String a1 = JOptionPane.showInputDialog("Input a : ");
            double a = Double.parseDouble(a1);
            System.out.println("a =  "+ a);
    String b1 = JOptionPane.showInputDialog("Input b : ");
            double b = Double.parseDouble(b1);
            System.out.println("b =  "+ b);
            String c1 = JOptionPane.showInputDialog("Input c : ");
            double c = Double.parseDouble(c1);
            System.out.println("c =  "+ c);
            String d1 = JOptionPane.showInputDialog("Input d : ");
            double d = Double.parseDouble(d1);
            System.out.println("d =  "+ d);
    String h1 = JOptionPane.showInputDialog("Input h : ");
            double h = Double.parseDouble(h1);
            System.out.println("h =  "+ h);
```

```
String xs1 = JOptionPane.showInputDialog("Input xs : ");
        xs = Double.parseDouble(xs1);
        System.out.println("xs =  "+ xs);
String xe1 = JOptionPane.showInputDialog("Input xe : ");
        xe = Double.parseDouble(xe1);
        System.out.println("xe =  "+ xe);
String y1 = JOptionPane.showInputDialog("Input y("+xs+") : ");
        double y = Double.parseDouble(y1);
        System.out.println("y = "+ y);

 System.out.println("=======================================
==========");
for (t = xs; t < xe; t += h) {
   k1 = deriv1(a * t, b * y, c * y,d);
   k2 = deriv1(a * (t + h / 2), b * (y + k1 * h / 2), c * (y + k1 * h /
2),d);
   k3 = deriv1(a * (t + h / 2), b * (y + k2 * h / 2), c * (y + k2 * h /
2),d);
   k4 = deriv1(a * (t + h), b * (y + k3 * h), c * (y + k3 * h),d);
   y += (k1 / 6 + k2 / 3 + k3 / 3 + k4 / 6) * h;
              System.out.printf("y = %.5f \n", y);
}

 System.out.println("=======================================
==========");
```

```
        JOptionPane.showMessageDialog(null,"Using 4th order Runge-Kutta y
is : " + y);


    }
// End


// Two Compartment
    public static double deriv21(double t, double y1, double y2,double d) {
        return t+y1+y2+d;
    }


    public static double deriv22(double t, double y1, double y2,double d) {
        return t+y1+y2+d;
    }


    public static void twocom() {
        double k11, k12, k21, k22, k31, k32, k41, k42;
        double xs = 0, xe = 0, t;
                System.out.println("Two compartment");

        System.out.println("==============================================
==========");
                System.out.println("f1' = at + by + cz + d");
                System.out.println("f2' = a1t + b1y + c1z + d1");
        Scanner kbd = new Scanner(System.in);
```

```
String x11 = JOptionPane.showInputDialog("Input a : ");
        double a1 = Double.parseDouble(x11);
        System.out.println("a =  "+ a1);
String y11 = JOptionPane.showInputDialog("Input b : ");
        double b1 = Double.parseDouble(y11);
        System.out.println("b =  "+ b1);
String z11 = JOptionPane.showInputDialog("Input c : ");
        double c1 = Double.parseDouble(z11);
        System.out.println("c =  "+ c1);
        String d11 = JOptionPane.showInputDialog("Input d : ");
        double d = Double.parseDouble(d11);
        System.out.println("d =  "+ d);
String x12 = JOptionPane.showInputDialog("Input a1 : ");
        double a2 = Double.parseDouble(x12);
        System.out.println("a1 =  "+ a2);
String y12 = JOptionPane.showInputDialog("Input b1 : ");
        double b2 = Double.parseDouble(y12);
        System.out.println("b1 =  "+ b2);
String z12 = JOptionPane.showInputDialog("Input c1 : ");
        double c2 = Double.parseDouble(z12);
        System.out.println("c1 =  "+ c2);
        String d12 = JOptionPane.showInputDialog("Input d1 : ");
        double d1 = Double.parseDouble(d12);
        System.out.println("d1 =  "+ d1);
```

```
        String h1 = JOptionPane.showInputDialog("Input h : ");
                double h = Double.parseDouble(h1);
                System.out.println("h =  "+ h);
        String xs1 = JOptionPane.showInputDialog("Input xs : ");
                xs = Double.parseDouble(xs1);
                System.out.println("xs =  "+ xs);
        String xe1 = JOptionPane.showInputDialog("Input xe : ");
                xe = Double.parseDouble(xe1);
                System.out.println("xe =  "+ xe);
        String y01 = JOptionPane.showInputDialog("Input y1("+xs+") : ");
                double y1 = Double.parseDouble(y01);
                System.out.println("y1 = "+ y1);
        String y02 = JOptionPane.showInputDialog("Input y2("+xs+") : ");
                double y2 = Double.parseDouble(y02);
                System.out.println("y2 = "+ y2);

        System.out.println("==========================================
==========");
        for (t = xs; t < xe; t += h) {
            k11 = deriv21(a1 * t, b1 * y1, c1 * y2,d);
            k12 = deriv22(a2 * t, b2 * y1, c2 * y2,d1);
            k21 = deriv21(a1 * (t + h / 2), b1 * (y1 + k11 * h / 2), c1 * (y2 + k12
* h / 2),d);
            k22 = deriv22(a2 * (t + h / 2), b2 * (y1 + k11 * h / 2), c2 * (y2 + k12
* h / 2),d1);
```

```
            k31 = deriv21(a1 * (t + h / 2), b1 * (y1 + k21 * h / 2), c1 * (y2 + k22
* h / 2),d);
            k32 = deriv22(a2 * (t + h / 2), b2 * (y1 + k21 * h / 2), c2 * (y2 + k22
* h / 2),d1);
            k41 = deriv21(a1 * (t + h), b1 * (y1 + k31 * h), c1 * (y2 + k32 *
h),d);
            k42 = deriv22(a2 * (t + h), b2 * (y1 + k31 * h), c2 * (y2 + k32 *
h),d1);
            y1 += (k11 / 6 + k21 / 3 + k31 / 3 + k41 / 6) * h;
            y2 += (k12 / 6 + k22 / 3 + k32 / 3 + k42 / 6) * h;
            System.out.println("y1 "+"= "+ y1);
            System.out.println("y2 "+"= "+ y2);
        }

System.out.println("=============================================
=====");
        JOptionPane.showMessageDialog(null,"Using 4th order Runge-Kutta y1
is : " + y1);
        JOptionPane.showMessageDialog(null,"Using 4th order Runge-Kutta y2
is : " + y2);
    }
//End

//Three Compartment
    public static double deriv31(double t, double y1, double y2, double y3
,double k1) {
        return t + y1 + y2 +y3 + k1;
```

```
    }

    public static double deriv32(double t, double y1, double y2, double
y3,double k2) {
        return t + y1 + y2 + y3 + k2;
    }

    public static double deriv33(double t, double y1, double y2, double
y3,double k3) {
        return t + y1 + y2 +y3 + k3;
    }

    public static void threecom() {
        double k11, k12, k13, k21, k22, k23, k31, k32, k33, k41, k42, k43;
        double xs = 0, xe = 0, t;
                System.out.println("Three compartment");

         System.out.println("==========================================
==========");
                System.out.println("f1' = a1t + b1y1 + c1y2 + d1y3 + k1");
                System.out.println("f2' = a2t + b2y1 + c2y2 + d2y3 + k2");
                System.out.println("f3' = a3t + b3y1 + c3y1 + d3y3 + k3");
        Scanner kbd = new Scanner(System.in);
        String x11 = JOptionPane.showInputDialog("Input a1 : ");
                double a1 = Double.parseDouble(x11);
```

```
        System.out.println("a1 =  "+ a1);
String y11 = JOptionPane.showInputDialog("Input b1 : ");
        double b1 = Double.parseDouble(y11);
        System.out.println("b1 =  "+ b1);
String z11 = JOptionPane.showInputDialog("Input c1 : ");
        double c1 = Double.parseDouble(z11);
        System.out.println("c1 =  "+ c1);
        String d11 = JOptionPane.showInputDialog("Input d1 : ");
        double d1 = Double.parseDouble(d11);
        System.out.println("d1 =  "+ d1);
        String k111 = JOptionPane.showInputDialog("Input k1 : ");
        double k1 = Double.parseDouble(k111);
        System.out.println("k1 =  "+ k1);
String x12 = JOptionPane.showInputDialog("Input a2 : ");
        double a2 = Double.parseDouble(x12);
        System.out.println("a2 =  "+ a2);
String y12 = JOptionPane.showInputDialog("Input b2 : ");
        double b2 = Double.parseDouble(y12);
        System.out.println("b2 =  "+ b2);
String z12 = JOptionPane.showInputDialog("Input c2 : ");
        double c2 = Double.parseDouble(z12);
        System.out.println("c2 =  "+ c2);
        String d12 = JOptionPane.showInputDialog("Input d2 : ");
        double d2 = Double.parseDouble(d12);
```

```
        System.out.println("d2 =  "+ d2);
        String k122 = JOptionPane.showInputDialog("Input k2 : ");
        double k2 = Double.parseDouble(k122);
        System.out.println("k2 =  "+ k2);
String x13 = JOptionPane.showInputDialog("Input a3 : ");
        double a3 = Double.parseDouble(x13);
        System.out.println("a3 =  "+ a3);
String y13 = JOptionPane.showInputDialog("Input b3 : ");
        double b3 = Double.parseDouble(y13);
        System.out.println("b3 =  "+ b3);
String z13 = JOptionPane.showInputDialog("Input c3 : ");
        double c3 = Double.parseDouble(z13);
        System.out.println("c3 =  "+ c3);
        String d13 = JOptionPane.showInputDialog("Input d3 : ");
        double d3 = Double.parseDouble(d13);
        System.out.println("d3 =  "+ d3);
        String k133 = JOptionPane.showInputDialog("Input k3 : ");
        double k3 = Double.parseDouble(k133);
        System.out.println("k13 =  "+ k3);
String h1 = JOptionPane.showInputDialog("Input h : ");
        double h = Double.parseDouble(h1);
        System.out.println("h =  "+ h);
String xs1 = JOptionPane.showInputDialog("Input xs : ");
        xs = Double.parseDouble(xs1);
```

```
System.out.println("xs =  "+ xs);
String xe1 = JOptionPane.showInputDialog("Input xe : ");
xe = Double.parseDouble(xe1);
System.out.println("xe =  "+ xe);
String y01 = JOptionPane.showInputDialog("Input y1("+xs+") : ");
double y1 = Double.parseDouble(y01);
System.out.println("y1 = "+ y1);
String y02 = JOptionPane.showInputDialog("Input y2("+xs+") : ");
double y2 = Double.parseDouble(y02);
System.out.println("y2 = "+ y2);
String y03 = JOptionPane.showInputDialog("Input y3("+xs+") : ");
double y3 = Double.parseDouble(y03);
System.out.println("y2 = "+ y2);

System.out.println("==================================================");
for (t = xs; t < xe; t += h) {
k11 = deriv31(a1 * t, b1 * y1, c1 * y2, d1 * y3 ,k1);
k12 = deriv32(a2 * t, b2 * y1, c2 * y2, d2 * y3 ,k2);
k13 = deriv33(a3 * t, b3 * y1, c3 * y2, d3 * y3 ,k3);
k21 = deriv31(a1 * (t + h / 2), b1 * (y1 + k11 * h / 2), c1 * (y2 + k12 * h / 2), d1 * (y3 + k13 * h / 2),k1);
k22 = deriv32(a2 * (t + h / 2), b2 * (y1 + k11 * h / 2), c2 * (y2 + k12 * h / 2), d2 * (y3 + k13 * h / 2),k2);
k23 = deriv33(a3 * (t + h / 2), b3 * (y1 + k11 * h / 2), c3 * (y2 + k12 * h / 2), d3 * (y3 + k13 * h / 2),k3);
```

```
k31 = deriv31(a1 * (t + h / 2), b1 * (y1 + k21 * h / 2), c1 * (y2 + k22 * h / 2), d1 * (y3 + k23 * h / 2),k1);

k32 = deriv32(a2 * (t + h / 2), b2 * (y1 + k21 * h / 2), c2 * (y2 + k22 * h / 2), d2 * (y3 + k23 * h / 2),k2);

k33 = deriv33(a3 * (t + h / 2), b3 * (y1 + k21 * h / 2), c3 * (y2 + k22 * h / 2), d3 * (y3 + k23 * h / 2),k3);

k41 = deriv31(a1 * (t + h), b1 * (y1 + k31 * h), c1 * (y2 + k32 * h), d1 * (y3 + k33 * h),k1);

k42 = deriv32(a2 * (t + h), b2 * (y1 + k31 * h), c2 * (y2 + k32 * h), d2 * (y3 + k33 * h),k2);

k43 = deriv33(a3 * (t + h), b3 * (y1 + k31 * h), c3 * (y2 + k32 * h), d3 * (y3 + k33 * h),k3);

y1 += (k11 / 6 + k21 / 3 + k31 / 3 + k41 / 6) * h;

y2 += (k12 / 6 + k22 / 3 + k32 / 3 + k42 / 6) * h;

y3 += (k13 / 6 + k23 / 3 + k33 / 3 + k43 / 6) * h;

System.out.println("y2 "+"= "+ y2);

        System.out.println("y3 "+"= "+ y3);

}


System.out.println("==================================================");

JOptionPane.showMessageDialog(null,"Using 4th order Runge-Kutta y1 is : " + y1);

JOptionPane.showMessageDialog(null,"Using 4th order Runge-Kutta y2 is : " + y2);

JOptionPane.showMessageDialog(null,"Using 4th order Runge-Kutta y2 is : " + y3);
```

```
    }
//End

}
```

ภาคผนวก ข.

โค้ดของโปรแกรม MATHLAB

```
%One compartment

function  Fv=runge1(t,y);

            Fv=t+y;

end

        %[t,y]=ode45('runge1',[0:0.2:1],[0])


%Two compartment

function  Fv=runge2(t,y);

        Fv(1,1)=-0.5*y(1);

        Fv(2,1)=4-0.1*y(1)-0.3*y(2);

end

        %[t,y]=ode45('runge2',[0:0.5:1],[4;6])


%Three compartment

function  Fv=runge3(t,y);

        Fv(1,1)=y(2);

        Fv(2,1)=y(3);

        Fv(3,1)=t+4*y(1)-3*y(2)+5*y(3);

end

        %[t,y]=ode45('runge3',[0:0.5:1],[2;4;1])
```