ปัญหาเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด

MINIMIZING TIME-OF-TRANSIT

ธนกฤษ เมธาชัยรัช

จรุณ ยุติศรี

อรัญญู ทองงาม

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

ปัญหาเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด
MINIMIZING TIME-OF-TRANSIT

ธนกฤษ เมธาชัยรัช
วรุณ ยุติศรี
อรัญญู ทองงาม

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

MINIMIZING TIME-OF-TRANSIT

ARUNYOO THONGNGAM
THANAKRIT MATHACHAIRAT
WARUN YUTISRI

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ปัญหาเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด
	Minimizing Time-of-Transit
ชื่อนักศึกษา	นายธนกฤษ เมธาชัยรัช 53050042
	นางสาววรุณ ยุติศรี 53050105
	นายอรัญญู ทองงาม 53050140
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2556
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตรจารย์ ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.จินดา ไชยช่วย ประธานกรรมการ	
อ.พุทธพร วานิชกร กรรมการ	
รศ.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ปัญหาเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด Minimizing Time-of-transit
ชื่อนักศึกษา	นายธนกฤษ เมธาชัยรัช 53050042 นางสาววรุณ ยุติศรี 53050105 นายอรัญญู ทองงาม 53050140
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2556
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ ดร. สิริพร แฮนน่า วินเทอร์

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษนี้ คณะผู้จัดทำต้องการหาเส้นทาง (ในแนวดิ่ง) เพื่อที่จะไปถึงจุดหมาย โดยสมมติให้จุดสองจุด คือ A และ B อยู่บนระนาบในแนวตั้ง โดยที่จุด A อยู่สูงกว่าจุด B และไม่ได้อยู่ตรงกับจุด B และจุด A จะเชื่อมต่อกับจุด B ด้วยเส้นโค้ง โดยกำหนดว่ามีการเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก ต้องการให้ใช้เวลาในการเคลื่อนที่ให้น้อยที่สุด และในแต่ละเส้นทางมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน เส้นโค้งจะมีลักษณะอย่างไร โดยในความเป็นจริงแล้ว อาจจะมีหลายเส้นทางที่ทำให้ไปถึงจุดหมายได้ ไม่ว่าจะเป็นเส้นตรง หรือเส้นโค้งลักษณะต่างๆ ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงทำการเปรียบเทียบการเดินทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นโค้งในลักษณะต่างๆ และพิจารณาว่าเส้นทาง ใดที่ใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด โดยทางคณะผู้จัดทำได้นำการเคลื่อนที่แบบบราชิสโตโครน (brachistotochone) ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ และจะพิจารณาในกรณีที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น และพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้ MATLAB เพื่อช่วยในการคำนวณ ผลที่ได้ จากการศึกษานี้ทำให้ทราบว่าการเคลื่อนที่ที่เป็นไปตามเส้นโค้งที่เรียกว่า ไซคลอยด์ (cycloid) นั้นใช้เวลาในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด

Title	MINIMIZING TIME-OF-TRANSIT
Students	Mr.Thanakrit Maythachairat 53050042
	Ms.Warun Yutisri 53050105
	Mr.Arunyoo Thongngam 53050140
Degree	Bachelor of Science
Major	Applied Mathematics
Academic Year	2013
Adviser	Ass.Prof.Pakkinee Chitsakul
	Dr.Siripawn H. Winter

ABSTRACT

In this special project, we look at paths from A to B where both points are on a vertical plane, with A not lower than B and not directly above B. We calculate the travel times in which a particle moving from A to B by gravity for a certain number of paths. We aim to find the path with the shortest travel time. Using the Brachistochrone curve in real space, we wrote a program with Matlab to find the solution. The results show that a segment of a cycloid gives the shortest time.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องปัญหาเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด ให้ประสบผลสำเร็จไปด้วยดี ซึ่งจะสำเร็จได้เนื่องจากได้รับคำแนะนำ และตอบคำถามต่างๆ ในการศึกษาปัญหาพิเศษในครั้งนี้จึงใคร่ขอขอบพระคุณทุกท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือ คือ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล ดร.ศิริพร แฮนน่า วินเทอร์ อ.จินดา ไชยช่วย และอ.พุทธพร วานิชกร ซึ่งท่านบุคคลเหล่านี้ได้เป็นคณะกรรมการ และอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษนี้ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือในส่วนของคำแนะนำ และเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ ทั้งในเรื่องของการเรียบเรียงข้อมูล และการหาข้อมูล รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ กำลังใจ และคำแนะนำจนการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี ร่วมทั้งรุ่นพี่นักศึกษาปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ให้การสนับสนุนข้อมูล เพื่อนๆ และน้องๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

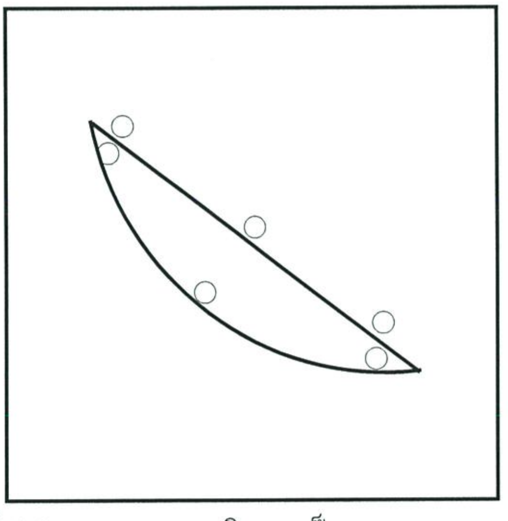
สารบัญตาราง

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ถ้าเดินทางโดยใช้ความเร็วคงที่จากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง เส้นทางที่ใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด คือเส้นทางที่ใช้ระยะทางสั้นที่สุดระหว่างตำแหน่งทั้งสอง แต่อย่างไรก็ตามการเดินทางโดยทั่วไปอาจจะใช้ความเร็วที่ไม่คงที่ตลอดเวลา โดยที่ความเร็วจะขึ้นอยู่กับวิถีในการเคลื่อนที่ด้วย ดังนั้นปัญหาการหาระยะทางในการเดินทางที่สั้นที่สุด และปัญหาเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุดจึงไม่ใช่ปัญหาเดียวกัน

ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาการหาเส้นทางการเดินทางให้ไปถึงจุดหมาย โดยใช้เวลาในการเดินทางให้น้อยที่สุด โดยการเดินทางที่เริ่มจากจุดเริ่มต้นเดียวกันอาจมีเส้นทางหลายเส้นทางที่ไปถึงจุดหมายปลายทาง เช่น เป็นเส้นตรง หรือเส้นโค้ง ดังรูปที่ 1.1 ผู้วิจัยจึงต้องการศึกษาดูว่าการเดินทางตามเส้นตรง หรือเส้นโค้ง ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก เส้นทางใดจะใช้ระยะเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด



รูปที่ 1.1 ภาพแสดงการเดินทางเป็นทางตรง และทางโค้ง

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อศึกษาหาเส้นทางที่เราสามารถเดินทาง โดยใช้ระยะเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด เพื่อที่จะไปถึงจุดหมายตามที่เราต้องการ

1.2.2 เป็นแนวทางในการประยุกต์กับปัญหาการเคลื่อนที่ เช่น การปล่อยดาวเทียมสู่วงโคจรของโลก

1.2.3 เป็นพื้นฐานในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ในเรื่องการเคลื่อนที่

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ผู้วิจัยจะศึกษาหาวิธีที่เราเดินทางไปถึงจุดหมายโดยที่ใช้ระยะเวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก โดยใช้ความรู้เรื่องการแปรผันของแคลคูลัส (Calculus of variation)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถหาเส้นทางการเดินทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุด

1.4.2 สามารถสร้างโปรแกรมสำเร็จรูปที่ช่วยในการคำนวณค่า

1.4.3 ได้องค์ความรู้พื้นฐานในการทำวิจัยขั้นสูงต่อไป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาหาข้อมูล และกำหนดหัวข้อโครงงาน

1.5.2 ศึกษา และทำความเข้าใจเกี่ยวกับบราชิสโตโครน (Brachistochrone)

1.5.3 ศึกษาการหาผลเฉลยปัญหาการหาค่าเหมาะสม โดยใช้สมการออยเลอร์ (Euler’s equation)

1.5.4 ศึกษาการหาผลเฉลย โดยผลต่างจำกัดของออยเลอร์ (Euler’s finite Difference Method)

1.5.5 เขียนโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลย

1.5.6 สรุปผลการศึกษา และจัดทำรูปเล่ม

1.5.7 นำเสนอผลงาน

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

9 เดือน

ระยะเวลาดำเนินงานตามแผนงานแสดงไว้ในตารางที่ 1.1

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินงาน								
	ปี 2556							ปี 2557	
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1. ศึกษาหาข้อมูล และกำหนดหัวโครงงาน	↔								
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับบราชิสโตโครน (Brachistochrone)		↔	↔						
3. ศึกษาการหาผลเฉลยปัญหาการหาค่าเหมาะสมโดยใช้สมการออยเลอร์ (Euler's equation)		↔	↔	↔					
4. ศึกษาการหาผลเฉลยโดยผลต่างจำกัดของออยเลอร์ (Euler's finite Difference Method)			↔	↔	↔				
5. เขียนโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลย					↔	↔	↔		
6. สรุปผลการศึกษา และจัดทำรูปเล่ม								↔	
7. นำเสนอผลงาน									↔

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

บทที่ 2

บทนิยาม และความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้กล่าวถึงความรู้เบื้องต้นสำหรับงานวิจัย ได้แก่ สมการออยเลอร์ และการหาผลเฉลยโดยผลต่างจำกัด

2.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมการออยเลอร์

นิยาม 2.1.1 ฟังก์ชัน (function) หมายถึง ปริมาณที่เปลี่ยนแปลงได้ โดยขึ้นอยู่กับตัวแปรต้น นิยมแทนด้วย f ถ้า x เป็นตัวแปรต้น แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x

นิยาม 2.1.2 ฟังก์ชันนอล (functional) หมายถึง ปริมาณที่เปลี่ยนแปลงได้โดยขึ้นอยู่กับฟังก์ชันที่กำหนด นิยมแทนด้วย J นั่นคือ ถ้ากำหนดฟังก์ชันแล้ว จะสามารถหาฟังก์ชันนอลได้ ถ้า y เป็นฟังก์ชัน แล้ว $J[y]$ จะเป็นฟังก์ชันนอลของ y

นิยาม 2.1.3 ให้ $J[y]$ เป็นฟังก์ชันนอล ถ้า y เปลี่ยนเป็น $y+h$ แล้ว ฟังก์ชันนอล คือ $J[y+h]$

ข้อสังเกต ให้ $\Delta J[h]=J[y+h]-J[y]$ เป็นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอลที่สมนัยกับการเปลี่ยนแปลง h ของตัวแปรต้น y ถ้า y กำหนดแน่นอนแล้ว $\Delta J[h]$ จะอยู่ในรูปแบบ

$$\Delta J[h]=\eta[h]+\varepsilon|h| \tag{2.1.1}$$

เมื่อ $\eta[h]$ เป็นฟังก์ชันนอลเชิงเส้น และ $\varepsilon \to 0$ เมื่อ $|h| \to 0$

แล้วเรียก $J[y]$ ว่าเป็นฟังก์ชันนอลที่หาอนุพันธ์ได้

และเรียก $\eta[h]$ ว่าเชิงอนุพันธ์ของ $J[y]$ เขียนแทนด้วย $\delta J[h]$ นั่นคือ

$$\delta J[h]=\eta[h] \tag{2.1.2}$$

ดังนั้น เชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันนอล $J[y]$ คือฟังก์ชันนอล $\eta[h]$ ของ $\Delta J[h]$ นั่นเอง

จากสมการที่ (2.1.1) และ (2.1.2) จะได้

$$\Delta J[h]=\delta J[h]+\varepsilon|h| \tag{2.1.3}$$

บทตั้ง 2.1.1 ถ้า β เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ และถ้า

$$\int_a^b \beta h dx = 0 \tag{2.1.4}$$

สำหรับทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง h ซึ่ง $h(a)=h(b)=0$

แล้ว $\beta=0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[a,b]$

พิสูจน์ สมมติ $\beta \neq 0$ แบ่งเป็น 2 กรณี คือ กรณี $\beta>0$ และ กรณี $\beta<0$

จะเริ่มด้วยการพิสูจน์กรณี $\beta>0$ ณ บางจุด ในช่วง $[a,b]$

ให้ $\beta>0$ ในช่วง $[x_1,x_2]$ ซึ่งเป็นช่วงย่อยที่อยู่ในช่วง $[a,b]$ ถ้าให้

$$h=\begin{cases}(x-x_1)(x_2-x) & ;x\in[x_1,x_2]\\ 0 & ;x\notin[x_1,x_2]\end{cases}$$

แล้ว $h(a)=h(b)=0$ และ $\beta(x-x_1)(x_2-x)>0$ ในช่วง (x_1,x_2) ทำให้

$$\int_a^b \beta h dx = \int_{x_1}^{x_2} \beta(x-x_1)(x_2-x)dx > 0$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ (2.1.4)

ดังนั้น ที่สมมติ $\beta \neq 0$ เป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $\beta=0$ ในช่วง $[a,b]$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน กรณีที่ $\beta<0$ □

บทตั้ง 2.1.2 ถ้า $\xi[h]$ เป็นฟังก์ชันนอล

และถ้า $\dfrac{\xi[h]}{|h|}\to 0$ เมื่อ $|h|\to 0$ แล้ว $\xi[h]=0$ สำหรับทุก h

พิสูจน์ สมมติ $\xi[h_0]\neq 0$ สำหรับบาง $h_0\neq 0$

ให้ $h_n=\dfrac{h_0}{n}$ และ $\lambda=\dfrac{\xi[h_0]}{|h_0|}\neq 0$

แล้ว $|h_n|\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$

และ $\lim\limits_{|h_n|\to 0}\dfrac{\xi[h_n]}{|h_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\xi\left[\frac{h_0}{n}\right]}{\left|\frac{h_0}{n}\right|}=\lambda\neq 0$ ซึ่งขัดกับสมมติฐานข้างต้น

ดังนั้น $\xi[h]=0$ สำหรับทุก h □

ทฤษฎีบท 2.1.1 ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันนอลที่หาอนุพันธ์ได้นั้นมีเพียงหนึ่งเดียว

พิสูจน์ สมมติค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันนอล $J[y]$ คือ $\eta_1[h]$ และ $\eta_2[h]$ แล้ว

$$\Delta J[h] = \eta_1[h] + \varepsilon_1 |h| \tag{2.1.5}$$

และ

$$\Delta J[h] = \eta_2[h] + \varepsilon_2 |h| \tag{2.1.6}$$

ซึ่ง ε_1 และ $\varepsilon_2 \to 0$ เมื่อ $|h| \to 0$

นำ $(2.1.5)-(2.1.6)$ จะได้

$$\eta_1[h] - \eta_2[h] = \varepsilon_2 |h| - \varepsilon_1 |h|$$

หรือ

$$\frac{\eta_1[h] - \eta_2[h]}{|h|} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

เนื่องจาก ε_1 และ $\varepsilon_2 \to 0$ เมื่อ $|h| \to 0$

ดังนั้น $\dfrac{\eta_1[h] - \eta_2[h]}{|h|} \to 0$ เมื่อ $|h| \to 0$

จาก บทตั้ง 2.1.2 จะได้

$$\eta_1[h] - \eta_2[h] = 0$$

สำหรับทุกค่า h นั่นคือ

$$\eta_1[h] = \eta_2[h]$$

แสดงว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันนอลมีเพียงหนึ่งเดียว □

ทฤษฎีบท 2.1.2 เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการมีค่าสุดขีดของฟังก์ชันนอล คือ

$$\delta J[h]=0 \tag{2.1.7}$$

พิสูจน์ ให้ $J[y]$ มีค่าต่ำสุด $y=y_0$ (2.1.8)

จาก $(2.1.3)$ $\triangle J[h]=\delta J[h]+\varepsilon|h|$ ซึ่ง $\varepsilon\to 0$ เมื่อ $|h|\to 0$

เนื่องจาก $|h|\to 0$ แสดงว่า $|h|$ มีค่าน้อยมาก

ดังนั้น $\triangle J[h]$ และ $\delta J[h]$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกัน

สมมติ $\delta J[h]\neq 0$ สำหรับบาง h_0 แล้วสำหรับ $\beta>0$

ถ้า $\delta J[-\beta h_0]=-\delta J[\beta h_0]$ แล้ว $\triangle J[-\beta h_0]$ จะต้องมีเครื่องหมายลบด้วย

โดยที่ $\triangle J[h]$ อาจมีเครื่องหมายเป็นบวกหรือลบก็ได้ สำหรับ $|h|$ ที่มีค่าน้อยๆ

ซึ่งขัดแย้งกับ $(2.1.8)$

$$\triangle J[h]=J[y_0+h]-J[y_0]\geq 0$$

สำหรับทุก $|h|\to 0$

ดังนั้น $\delta J[h]=0$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ $J[y]$ มีค่าสูงสุด □

ทฤษฎีบท 2.1.3 (สมการออยเลอร์) ให้ $F(x,y,y')$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องอันดับที่สอง เมื่อเทียบกับตัวแปรทุกตัว โดย y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์มีความต่อเนื่องและเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

$$y(a)=A, y(b)=B \tag{2.1.9}$$

ซึ่งทำให้ฟังก์ชันนอล

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \tag{2.1.10}$$

มีค่าสุดขีด

แล้วฟังก์ชัน y ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $(2.1.9)$ และทำให้ $(2.1.10)$ มีค่าสุดขีด เป็นไปตามสมการ

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')=0 \tag{2.1.11}$$

เรียก $(2.1.11)$ ว่า**สมการออยเลอร์ (Euler's equation)**

พิสูจน์ สมมติให้ y เป็นฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $(2.1.10)$ มีค่าสุดขีด และให้ y มีส่วนเปลี่ยนแปลง h นั่นคือ $y+h$ และเป็นไปตามเงื่อนไข $(2.1.9)$ นั่นคือ

$$y(a)+h(a)=A \text{ และ } y(b)+h(b)=B$$

จาก $(2.1.9)$ $\qquad y(a)=A$ และ $y(b)=B$

ดังนั้น $\qquad h(a)=0$ และ $h(b)=0$ $\qquad$ (2.1.12)

เมื่อ y มีส่วนเปลี่ยนแปลง h จะได้ส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล $(2.1.10)$ คือ

$$\begin{aligned}\triangle J[y] &= J[y+h]-J[y] \\ &= \int_a^b F(x,y+h,y'+h')\,dx - \int_a^b F(x,y,y')\,dx \\ &= \int_a^b \left[F(x,y+h,y'+h') - F(x,y,y')\right]dx\end{aligned}$$

โดยกระจายอนุกรมเทย์เลอร์กับพจน์แรกจะได้

$$\begin{aligned}\triangle J[y] = \int_a^b \Big[\Big\{F(x,y,y') &+ F_y(x,y,y')h \\ &+ F_{y'}(x,y,y')h' + \ldots\Big\} - F(x,y,y')\Big]dx \\ = \int_a^b \left[F_y(x,y,y')h + F_{y'}(x,y,y')h'\right]dx + \ldots\end{aligned}$$

จาก $(2.1.3)$ $\triangle J[h] = \delta J[h] + \varepsilon|h|$ ดังนั้น

$$\delta J[y] = \int \left[F_y(x,y,y')h + F_{y'}(x,y,y')h'\right]dx$$

โดยเทคนิคการอินทิเกรตแบบแยกส่วนกับพจน์ที่สอง จะได้

$$\begin{aligned}\delta J[y] = \int_a^b \left[F_y(x,y,y')h - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')h\right]dx \\ + \left[F_{y'}h\right]_{x=a}^{x=b}\end{aligned}$$

จาก $(2.1.12)$ จะได้

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[F_y(x,y,y')h - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')h\right]dx$$

จากทฤษฎีบท 2.1.2 ฟังก์ชันนอลมีค่าสุดขีดเมื่อ $\delta J[h] = 0$ ดังนั้น

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[F_y(x,y,y')h - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')h\right]dx = 0$$

จากบทตั้ง 2.1.1 จะได้

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y') = 0 \qquad \square$$

ซึ่งสมการออยเลอร์เป็นสมการที่สำคัญที่จะนำมาใช้ในงานวิจัยนี้

สมการของออยเลอร์ สามารถขยายได้ในรูปแบบอื่น ดังนี้

จาก $F(x,y,y')$ สามารถหา $F_y(x,y,y')$ และ $F_{y'}(x,y,y')$ ได้

และ $$\frac{dF_{y'}}{dx}=\frac{\partial F_{y'}}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=F_{xy'}+F_{yy'}y'+F_{y'y'}y''$$

แทนใน (2.1.11)

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0 \tag{2.1.13}$$

หรือ $$y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}+F_{xy'}-F_y=0 \tag{2.1.14}$$

สมการ (2.1.13) คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ดังนั้นคำตอบทั่วไป ต้องขึ้นกับค่าคงที่สองตัวใดๆ ถ้ากำหนดเงื่อนไขขอบเขตมาให้แล้ว จะได้ผลเฉลยเฉพาะโดยทั่วไปแล้ว ปัญหาค่าขอบเขต

$$\begin{aligned} F_y-\frac{d}{dx}F_{y'} &= 0 \\ y(a)=A, y(b) &= B \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

ไม่จำเป็นต้องมีผลเฉลยเสมอไป และถ้าผลเฉลยหาค่าได้ ไม่จำเป็นต้องมีค่าเดียว

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1.1**</u> บนเส้นโค้งใด ฟังก์ชันนอลที่กำหนด ให้ค่าสุดขีด

เมื่อ $J[y]=\int_1^2\left(y'^2-2xy\right)dx; y(1)=0,\ y(2)=-1$

<u>**วิธีทำ**</u> $F(x,y,y')=(y')^2-2xy$

จะได้ $F_x=-2y \Rightarrow F_{xy'}=0$

$F_y=-2x \Rightarrow F_{yy'}=0$

$F_{y'}=2y' \Rightarrow F_{y'y'}=2$

สมการของออยเลอร์อยู่ในรูปแบบ : $y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}+F_{xy'}-F_y=0$

$$2y''+2x=0 \Rightarrow y''=-x$$

$$y'=\frac{-x^2}{x}+c_1$$

$$y=\frac{-x^3}{6}+c_1x+c_2$$

จากเงื่อนไขขอบเขต ได้ระบบสมการเชิงเส้นสำหรับ c_1 และ c_2 ดังนี้

จาก $y(1)=0$ จะได้

$$\frac{-1}{6}+c_1+c_2=0$$

$$c_1+c_2=\frac{1}{6}$$

จาก $y(2)=-1$ จะได้

$$\frac{-8}{6}+2c_1+c_2=-1$$

$$2c_1+c_2=-1+\frac{8}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ดังนั้น $c_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},\ c_2=0$

นั่นคือ ค่าสุดขีดสามารถหาได้บนเส้น $y=\frac{x}{6}\left(1-x^2\right)$ □

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.2</u> จงหาเส้นโค้ง ซึ่งให้ค่าปลายสุดของฟังก์ชันนอล $J[y]=\int_1^3 (3x-y)\,y\,dx$

ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $y(1)=1,\ y(3)=4\frac{1}{2}$

<u>วิธีทำ</u> $F(x,y,y')=(3x-y)y=3xy-y^2$

จะได้ $F_x=3y \Rightarrow F_{xy'}=0$

$F_y=3x-2y \Rightarrow F_{yy'}=0$

$F_{y'}=0 \Rightarrow F_{y'y'}=0$

สมการของออยเลอร์อยู่ในรูปแบบ : $y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}+F_{xy'}-F_y=0$

$$-(3x-2y)=0$$

$$y=\frac{3}{2}x$$

จาก $y(1)=1$ แทน $x=1$ จะได้ $y=\frac{3}{2}\neq 1$ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไข

จาก $y(3)=4\frac{1}{2}$ แทน $x=3$ จะได้

$$y=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

ดังนั้น ปัญหาการแปรผันที่กำหนดนี้ไม่มีผลเฉลย □

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1.3**</u> จงหาเส้นโค้งซึ่งให้ค่าปลายสุดของฟังก์ชันนอล $J[y]=\int_{0}^{2\pi}\left((y')^2-y^2\right)dx$

ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $y(0)=1,\ y(2\pi)=1$

<u>**วิธีทำ**</u> $F(x,y,y')=(y')^2-y^2$

จะได้ $F_x=0 \Rightarrow F_{xy'}=0$

$F_y=-2y \Rightarrow F_{yy'}=0$

$F_{y'}=2y' \Rightarrow F_{y'y'}=2$

สมการของออยเลอร์อยู่ในรูปแบบ : $y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}+F_{xy'}-F_y=0$

$$2y''+2y=0$$

$$y''+y=0$$

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

จาก $y(0)=1$ จะได้ $1=c_1\cos(0)+c_2\sin(0)\Rightarrow c_1=1$

จาก $y(2\pi)=1$ จะได้ $1=c_1\cos(2\pi)+c_2\sin(2\pi)\Rightarrow c_1=1$

นั่นคือ $c_1=1$ แล้ว c_2 มีค่าใดๆ ก็ได้ ใน $c_2=c$ ค่าคงที่

$y=\cos x+c\sin x$

ดังนั้น ปัญหาการแปรผันมีผลเฉลยไม่จำกัด □

2.2 การหาผลเฉลยโดยผลต่างจำกัด

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำผลต่างสืบเนื่อง (finite difference) มาใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันนอลโดยตรง จึงเรียกวิธีนี้ว่าวิธีตรง (direct method)

การหาผลเฉลยโดยวิธีการนี้ จะหาสุดขีดของฟังก์ชันนอล

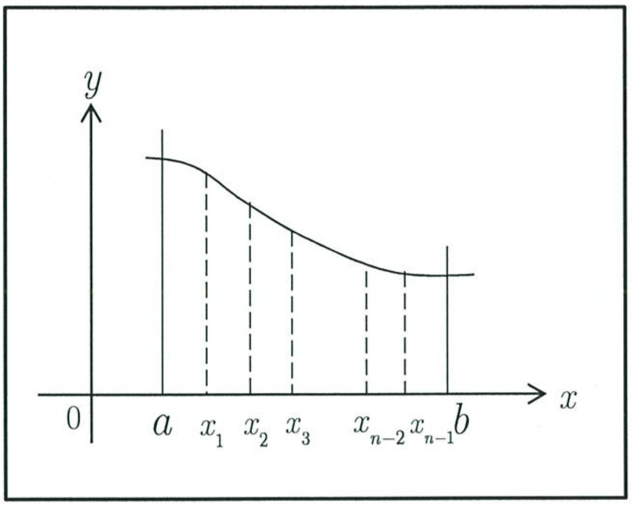
$$J[y]=\int_{a}^{b}F(x,y,y')\,dx \qquad (2.2.1)$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $y(a)=A,\ y(2.2.1)=B$ (2.2.2)

โดยการพิจารณาว่า $J[y]$ เป็นฟังก์ชันนอลของอนุกรมกำลังอนันต์ $y(x)$ โดย

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

ผลเฉลยของ $(2.2.1)$ ที่เป็นไปตาม $(2.2.2)$ อาจเขียนเป็นเส้นกราฟได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ภาพแสดงกราฟผลเฉลยโดยแบ่งเป็น n จุด

ถ้าแบ่งเส้นกราฟผลเฉลยเป็น n จุด จะได้จุดแบ่งคือ

$$x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \dots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$$

เมื่อ $\Delta x = \dfrac{b-a}{n},\ x_0 = a$ และ $x_n = b$

โดยการลากเส้นตรงเชื่อมแต่ละจุด ณ $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ บนเส้นกราฟ จะได้เส้นหลายเหลี่ยม และประมาณค่า $J[y]$ ด้วย $P(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$

- ประมาณอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $y'(x)$ โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (forward difference)

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_a^b F(x, y, y')\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \\ &= P(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \end{aligned}$$

และ $P(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ จะมีค่าสุดขีดถ้า

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial y_2} = 0,\ \dots,\ \frac{\partial P}{\partial y_{n-1}} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_1}=\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_1}\left[F\left(x_0,y_0,\frac{y_1-y_0}{\Delta x}\right)+F\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_1}{\Delta x}\right)+F\left(x_2,y_2,\frac{y_3-y_2}{\Delta x}\right)+\ldots\right]$$

$$=F_{y_1}\left(x_0,y_0,\frac{y_1-y_0}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\Delta x}\right)+F_{y_1}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_1}{\Delta x}\right)+F_{y_1}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_1}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)$$

$$=F_{y_1}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_1}{\Delta x}\right)-\frac{F_{y_1}\left(x_0,y_0,\frac{y_1-y_0}{\Delta x}\right)-F_{y_1}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_1}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$=F_{y_1}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_1}{\Delta x}\right)-\frac{1}{\Delta x}\left(F_{y_1}\left(x_0,y_0,\frac{y_1-y_0}{\Delta x}\right)-F_{y_1}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_1}{\Delta x}\right)\right)$$

$$=F_{y_1}-\frac{\Delta F_{y_1'}}{\Delta x}=0$$

ในรูปทั่วไป $F_{y_i}-\dfrac{\Delta F_{y_i'}}{\Delta x}=0$

ถ้า $n\to\infty$ แล้ว $\Delta x\to 0^+$ จะได้สมการออยเลอร์

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

- ประมาณอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $y'(x)$ โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward difference)

$$y'(x_i)\approx\frac{y(x_i)-y(x_{i-1})}{\Delta x}=\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}$$

ดังนั้น

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n}F\left(x_i,y_i,\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

$$=P(y_{-1},\,y_0,\,y_1,\,\ldots,\,y_{n-2},\,y_{n-1})$$

และ $P(y_{-1},\,y_0,\,y_1,\,\ldots,\,y_{n-2},\,y_{n-1})$ จะมีค่าสุดขีดถ้า

$$\frac{\partial P}{\partial y_0}=0,\ \frac{\partial P}{\partial y_1}=0,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y_{n-2}}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_0} = \frac{\partial}{\partial y_0}\left[\sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_0}\left[F\left(x_0, y_0, \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}\right) + F\left(x_1, y_1, \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}\right) + F\left(x_2, y_2, \frac{y_2 - y_1}{\Delta x}\right) + \ldots\right]$$

$$= F_{y_0}\left(x_0, y_0, \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}\right) + F_{y_0}\left(x_0, y_0, \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\Delta x}\right) + F_{y_0}\left(x_1, y_1, \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)$$

$$= F_{y_0}\left(x_0, y_0, \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y_0}\left(x_1, y_1, \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}\right) - F_{y_0}\left(x_0, y_0, \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$= F_{y_0}\left(x_0, y_0, \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}\right) - \frac{1}{\Delta x}\left(F_{y_0}\left(x_1, y_1, \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}\right) - F_{y_0}\left(x_0, y_0, \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x}\right)\right)$$

$$= F_{y_0} - \frac{\Delta F_{y_0'}}{\Delta x} = 0$$

ในรูปทั่วไป $F_{y_i} - \dfrac{\Delta F_{y_i'}}{\Delta x} = 0$

ถ้า $n \to \infty$ แล้ว $\Delta x \to 0^+$ จะได้สมการออยเลอร์

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

- ประมาณอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $y'(x)$ โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (centered difference)

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$$

ดังนั้น

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}\right)$$

$$= P(y_{-1}, y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$$

และ $P(y_{-1}, y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ จะมีค่าสุดขีดถ้า

$$\frac{\partial P}{\partial y_0} = 0, \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial P}{\partial y_n} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_0}=\frac{\partial}{\partial y_0}\left[\sum_{i=0}^{n-1}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta x}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_0}\left[F\left(x_0,y_0,\frac{y_1-y_{-1}}{2\Delta x}\right)+F\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_0}{2\Delta x}\right)+F\left(x_2,y_2,\frac{y_3-y_1}{2\Delta x}\right)+\dots\right]$$

$$=F_{y_0}\left(x_0,y_0,\frac{y_1-y_{-1}}{2\Delta x}\right)+F_{y_0}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_0}{2\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{2\Delta x}\right)$$

$$=F_{y_0}\left(x_0,y_0,\frac{y_1-y_{-1}}{2\Delta x}\right)-\frac{F_{y_0}\left(x_1,y_1,\frac{y_2-y_0}{2\Delta x}\right)}{2\Delta x}$$

$$=F_{y_0}-\frac{F_{y_0}}{2\Delta x}=0$$

ดังนั้น ไม่สามารถจัดรูปอยู่ในสมการออยเลอร์

$$F_{y_i}-\frac{\Delta F_{y_i'}}{\Delta x}=0$$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.2.1**</u> จงหาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล

$$J[y]=\int_0^1\left[(y')^2+2y\right]dx \tag{2.2.3}$$

เมื่อ $y(0)=y(1)=0$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\Delta x=\dfrac{1-0}{5}=0.2$ และให้

$$y_0=y(0)=0,\ y_1=y(0.2),\ y_2=y(0.4),$$

$$y_3=y(0.6),\ y_4=y(0.8),\ y_5=y(1)=0$$

จากสูตรการประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า

$$y_k'=y'(x_k)\approx\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}$$

ดังนั้น

$$y'(0)=\frac{y_1-0}{0.2}$$

$$y'(0.2)=\frac{y_2-y_1}{0.2}$$

$$y'(0.4)=\frac{y_3-y_2}{0.2}$$

$$y'(0.6) = \frac{y_4 - y_3}{0.2}$$

$$y'(0.8) = \frac{0 - y_4}{0.2}$$

โดยการแทนอินทิกรัลด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \left[f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b) \right] \triangle x$$

เนื่องจาก $f = (y')^2 + 2y$

แล้ว $$P(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \Big[\left[(y'(0))^2 + 2y_0 \right] + \left[(y'(0.2))^2 + 2y_1 \right] + \left[(y'(0.4))^2 + 2y_2 \right] + \left[(y'(0.6))^2 + 2y_3 \right] + \left[(y'(0.8))^2 + 2y_4 \right] \Big] \triangle x$$

$$= \left[\left[\frac{y_1}{0.2} \right]^2 + \left[\frac{y_2 - y_1}{0.2} \right]^2 + 2y_1 + \left[\frac{y_3 - y_2}{0.2} \right]^2 + 2y_2 + \left[\frac{y_4 - y_3}{0.2} \right]^2 + 2y_3 + \left[\frac{-y_4}{0.2} \right]^2 + 2y_4 \right] 0.2$$

และอาจจะมีเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสุดขีดคือ $\dfrac{\partial P}{\partial y_i} = 0$

ต่อไปจะได้ระบบสมการเพื่อหาค่า y_1, y_2, y_3, y_4 โดย

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{y_1}{0.02} - \frac{y_2 - y_1}{0.02} + 2 \quad = 0$$

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{0.02} - \frac{y_3 - y_2}{0.02} + 2 = 0$$

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_3} = \frac{y_3 - y_2}{0.02} - \frac{y_4 - y_3}{0.02} + 2 = 0$$

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_4} = \frac{y_4 - y_3}{0.02} + \frac{y_4}{0.02} + 2 \quad = 0$$

หรือ
$$\begin{aligned}
2y_1 - y_2 &= -0.04 \\
-y_1 + 2y_2 - y_3 &= -0.04 \\
-y_2 + 2y_3 - y_4 &= -0.04 \\
-y_3 + 2y_4 &= -0.04
\end{aligned}$$

โดยการหาผลเฉลยของระบบสมการ

ให้
$$2y_1 - y_2 = -0.04 \quad (2.2.4)$$
$$-y_1 + 2y_2 - y_3 = -0.04 \quad (2.2.5)$$
$$-y_2 + 2y_3 - y_4 = -0.04 \quad (2.2.6)$$
$$-y_3 + 2y_4 = -0.04 \quad (2.2.7)$$

จาก $(2.2.4)$; $y_2 = 2y_1 + 0.04$

แทน y_2 ลงใน $(2.2.5)$; $-y_1 + 2(2y_1 + 0.04) - y_3 = -0.04$
$$-y_1 + 4y_1 + 0.08 - y_3 = -0.04$$
$$3y_1 - y_3 = -0.12 \quad (2.2.8)$$

จาก $(2.2.7)$; $y_4 = \dfrac{y_3 - 0.04}{2}$

แทน y_4 ลงใน $(2.2.8)$; $-y_2 + 2y_3 - \left(\dfrac{y_3 - 0.04}{2}\right) = -0.04$
$$-y_2 + 2y_3 - \frac{y_3}{2} + 0.02 = -0.04$$
$$-y_2 + \frac{3}{2}y_3 = -0.06$$

แทน $y_2 = 2y_1 + 0.04$; $-2y_1 + \dfrac{3}{2}y_3 = -0.02 \quad (2.2.9)$

จาก $6y_1 - 3y_3 = -0.24 \quad (2.2.10)$

จาก $(2.2.9)\times 3$; $-2y_1 + \dfrac{3}{2}y_3 = -0.06 \quad (2.2.11)$

นำ $(2.2.10)+(2.2.11)$; $\dfrac{5}{2}y_3 = -0.30$
$$y_3 = -0.12$$

แทน $y_3 = -0.12$ ใน $(2.2.8)$ จะได้ $3y_1 - (-0.12) = -0.12$
$$3y_1 = -0.24$$
$$y_1 = -0.08$$

แทน $y_3=-0.12$ ใน $(2.2.4)$ จะได้ $-(-0.12)+2y_4 = -0.04$

$$2y_4 = -0.16$$

$$y_4 = -0.08$$

แทน $y_1=-0.08$ ใน $(2.2.4)$ จะได้ $2(-0.08)-y_2 = -0.04$

$$y_2 = -0.12$$

ดังนั้น $y_1=-0.08,\ y_2=-0.12,\ y_3=-0.12,\ y_4=-0.08$

ผลเฉลยจริง (exact solution) ของฟังก์ชันนอล $(2.2.3)$

จาก $F(x,y,y')=(y')^2+2y$

จะได้ว่า $F_y=2$ และ $F_{y'}=2y'$

จากสมการของออยเลอร์

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

จะได้ว่า

$$2-\frac{d}{dx}(2y')=0$$

$$\frac{d}{dx}(2y')=2$$

$$\frac{d}{dx}(y')=1$$

หาปริพันธ์เทียบ x ทั้งสองข้าง; $y'=x+c_1$

หาปริพันธ์เทียบ x ทั้งสองข้าง; $y=\dfrac{x^2}{2}+c_1x+c_2$ $(2.2.12)$

แทนเงื่อนไข $y(0)=0$ ใน $(2.2.12)$; $c_2=0$

จะได้ว่า $y=\dfrac{x^2}{2}+c_1x$ $(2.2.13)$

แทนเงื่อนไข $y(1)=0$ ใน $(2.2.13)$; $0=\dfrac{1}{2}+c_1$

$$c_1=-\frac{1}{2}$$

ดังนั้นผลเฉลย คือ $y=\dfrac{x^2-x}{2}$

จะพบว่าเมื่อแทน $x=0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$ จะได้เท่ากับผลเฉลยโดยประมาณ □

จากตัวอย่างที่ 2.2.1 สามารถประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

ให้ $\triangle x = \dfrac{1-0}{5} = 0.2$ และให้

$$y_{-1} = y(0) = 0,\ y_0 = y(0.2),\ y_1 = y(0.4),$$

$$y_2 = y(0.6),\ y_3 = y(0.8),\ y_4 = y(1) = 0$$

จากสูตรการประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

$$y_k{}' = y'(x_k) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{\triangle x}$$

ดังนั้น

$$y'(0) = \frac{y_0 - 0}{0.2}$$

$$y'(0.2) = \frac{y_1 - y_0}{0.2}$$

$$y'(0.4) = \frac{y_2 - y_1}{0.2}$$

$$y'(0.6) = \frac{y_3 - y_2}{0.2}$$

$$y'(0.8) = \frac{0 - y_3}{0.2}$$

โดยการแทนอินทิกรัลด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \left[f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)\right]\triangle x$$

เนื่องจาก $f = (y')^2 + 2y$

แล้ว
$$\begin{aligned}
P(y_{-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}) &= \Big[\left[(y'(0))^2 + 2y_{-1}\right] + \left[(y'(0.2))^2 + 2y_0\right] \\
&\quad + \left[(y'(0.4))^2 + 2y_1\right] + \left[(y'(0.6))^2 + 2y_2\right] \\
&\quad + \left[(y'(0.8))^2 + 2y_3\right]\Big]\triangle x \\
&= \Bigg[\left[\frac{y_0}{0.2}\right]^2 + \left[\frac{y_1 - y_0}{0.2}\right]^2 + 2y_0 \\
&\quad + \left[\frac{y_2 - y_1}{0.2}\right]^2 + 2y_1 + \left[\frac{y_3 - y_2}{0.2}\right]^2 + 2y_2 \\
&\quad + \left[\frac{-y_3}{0.2}\right]^2 + 2y_3\Bigg]0.2
\end{aligned}$$

และอาจจะมีเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสุดขีดคือ $\frac{\partial P}{\partial y_i}=0$

ต่อไปจะหาระบบสมการเพื่อหาค่า y_0, y_1, y_2, y_3 โดย

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_0}=\frac{y_0}{0.02}-\frac{y_1-y_0}{0.02}+2 \quad =0$$

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_1}=\frac{y_1-y_0}{0.02}-\frac{y_2-y_1}{0.02}+2=0$$

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_2}=\frac{y_2-y_1}{0.02}-\frac{y_3-y_2}{0.02}+2=0$$

$$\frac{1}{0.2}\frac{\partial P}{\partial y_3}=\frac{y_3-y_2}{0.02}+\frac{y_3}{0.02}+2 \quad =0$$

หรือ

$$\begin{aligned} 2y_0-y_1 &= -0.04 \\ -y_0+2y_1-y_2 &= -0.04 \\ -y_1+2y_2-y_3 &= -0.04 \\ -y_2+2y_3 &= -0.04 \end{aligned}$$

โดยการหาผลเฉลยของระบบสมการ

ให้

$$2y_0-y_1=-0.04 \tag{2.2.14}$$

$$-y_0+2y_1-y_2=-0.04 \tag{2.2.15}$$

$$-y_1+2y_2-y_3=-0.04 \tag{2.2.16}$$

$$-y_2+2y_3=-0.04 \tag{2.2.17}$$

จาก (2.2.14); $y_1=2y_0+0.04$

แทน y_1 ลงใน (2.2.15); $-y_0+2(2y_0+0.04)-y_2=-0.04$

$$-y_0+4y_0+0.08-y_2=-0.04$$

$$3y_0-y_2=-0.12 \tag{2.2.18}$$

จาก (2.2.17); $y_3=\frac{y_2-0.04}{2}$

แทน y_3 ลงใน (2.2.18); $-y_1+2y_2-\left(\frac{y_2-0.04}{2}\right)=-0.04$

$$-y_1+2y_2-\frac{y_2}{2}+0.02=-0.04$$

$$-y_1+\frac{3}{2}y_2=-0.06$$

แทน $y_1 = 2y_0 + 0.04;$ $\qquad -2y_0 + \frac{3}{2}y_2 = -0.02 \qquad (2.2.19)$

จาก $(2.2.18)\times 2;$ $\qquad 6y_0 - 3y_2 = -0.24 \qquad (2.2.20)$

จาก $(2.2.19)\times 3;$ $\qquad -2y_0 + \frac{3}{2}y_2 = -0.06 \qquad (2.2.21)$

นำ $(2.2.20)+(2.2.21);$ $\qquad \frac{5}{2}y_2 = -0.30$

$$y_2 = -0.12$$

แทน $y_2 = -0.12$ ใน $(2.2.18)$ จะได้ $\qquad 3y_0 - (-0.12) = -0.12$

$$3y_0 = -0.24$$

$$y_0 = -0.08$$

แทน $y_2 = -0.12$ ใน $(2.2.17)$ จะได้ $-(-0.12) + 2y_3 = -0.04$

$$2y_3 = -0.16$$

$$y_3 = -0.08$$

แทน $y_0 = -0.08$ ใน $(2.2.14)$ จะได้ $\qquad 2(-0.08) - y_1 = -0.04$

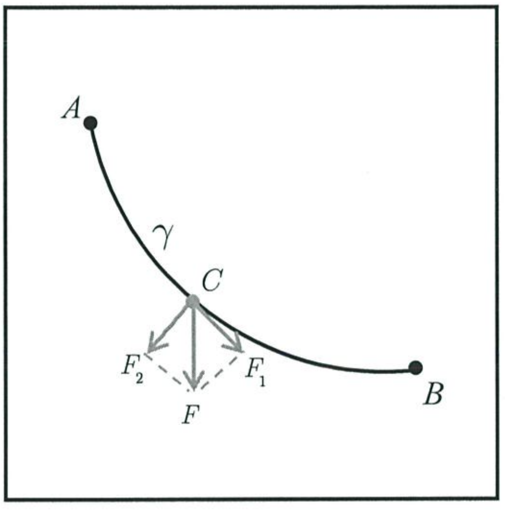
$$y_1 = -0.12$$

ดังนั้น $\quad y_0 = -0.08,\ y_1 = -0.12,\ y_2 = -0.12,\ y_3 = -0.08$ $\quad \square$

ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะมีค่าเท่ากับการหาผลเฉลยโดยวิธีผลต่างจำกัด

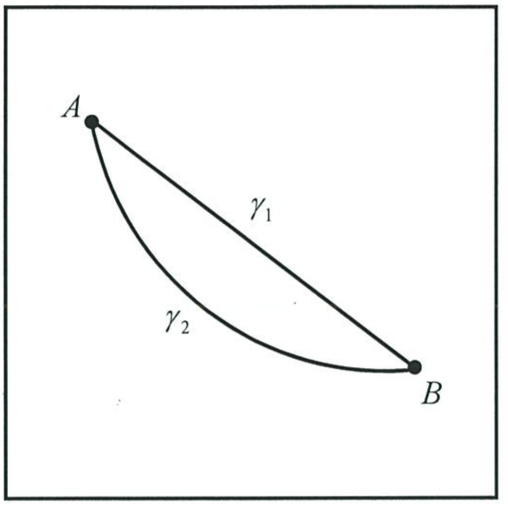
บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

ในปี 1969 โยฮันน์ แบร์นูลลี (Johann Bernoulli) ได้แสดงปัญหา โดยการสมมติให้จุดสองจุด คือ A และ B อยู่บนระนาบในแนวตั้ง โดยที่ จุด A อยู่สูงกว่าจุด B และไม่ได้อยู่ตรงกับจุด B แต่จุด A จะเชื่อมต่อกับจุด B ด้วยเส้นโค้ง γ ดังรูปที่ 3.1 และ สมมติเส้นโค้ง γ มีลักษณะคล้ายเส้นลวด ปล่อยลูกปัดให้เคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B ตามเส้นโค้ง γ โดยไม่มีแรงอื่นมากระทำกับลูกปัด นอกจากแรงโน้มถ่วง ดังนั้นจึงต้องการหารูปทรงของ γ ที่ทำให้เวลาในการเคลื่อนที่ของลูกปัดน้อยที่สุดจากจุด A ไปยังจุด B ปัญหานี้เรียกว่า ปัญหาเส้นทางลงเร็วที่สุด หรือ ปัญหาบราชิสโตโครน



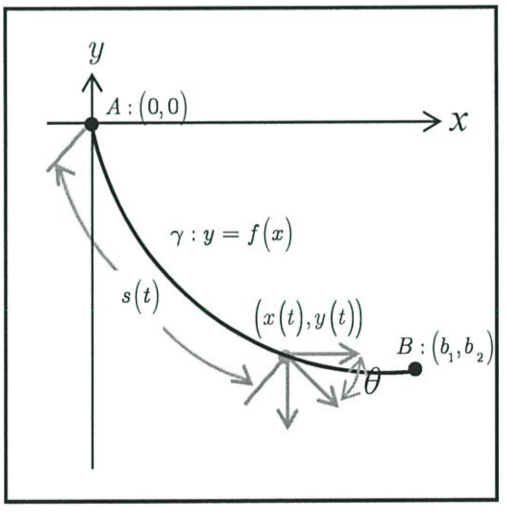
รูปที่ 3.1 ภาพแสดงการแตกแรงของเวกเตอร์

จากรูปที่ 3.1 จะพบว่าที่จุด C บนเส้นโค้ง γ เวกเตอร์ของแรงโน้มถ่วง F ($F = mg$ เมื่อ m เป็นมวลของลูกปัด และ g เป็นค่าความเร่งจากแรงโน้มถ่วงของโลก) จะสามารถแตกแรงนี้ออกเป็น 2 ส่วน คือ F_1 ซึ่งอยู่ในแนวเดียวกับเส้นโค้ง γ ที่จุด C และ F_2 ตั้งฉากกับ γ ที่จุด C แต่เส้น F_2 ลูกปัดไม่สามารถเคลื่อนที่ไปได้ เป็นเพียงการแตกแรงเท่านั้น ซึ่งในแต่ละจุด C ของเส้นโค้ง γ เวกเตอร์ F จะเท่ากัน ซึ่ง F_1 และ F_2 ขึ้นอยู่กับความชันของเส้นโค้ง γ ที่จุด C เส้นโค้งที่ชัน F_1 มีขนาดใหญ่ ทำให้ลูกปัดเคลื่อนที่ได้เร็ว ดังนั้นเป็นไปได้ว่าถ้าส่วนของเส้นตรง γ_1 อยู่ระหว่างจุด A และจุด B สามารถสร้างเส้นโค้ง γ_2 ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ภาพแสดงเส้นโค้งระหว่างจุด A และจุด B

แบร์นูลลีได้แสดงให้เห็นว่า การเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B โดยเมื่อปล่อยลูกปัดจากจุด A พร้อมกัน ลูกปัดที่ถูกปล่อยไปตาม γ_2 จะใช้ระยะเวลาในการเดินทางน้อยกว่าลูกปัดที่ถูกปล่อยไปตาม γ_1



รูปที่ 3.3 ภาพแสดงเส้นโค้ง γ เป็นกราฟของฟังก์ชัน f

ต้องการหารูปร่างของเส้นโค้ง γ โดยที่ลูกปัดเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก และสามารถคำนวณเวลาในการเคลื่อนที่สำหรับรูปร่างของเส้นโค้ง γ ที่มีลักษณะแตกต่างกัน

ให้ A มีระบบพิกัดเป็น $(0,0)$ ตามระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) (x,y) ดังรูปที่ 3.3

ให้เส้นโค้ง γ เป็นกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ โดยที่ $f(x)\le 0$

ให้ t แทนเวลา โดยที่ $t=0$ เป็นเวลาเริ่มต้นที่ลูกปัดถูกปล่อยออกจากจุดเริ่มต้นคือ A

ให้ $s=s(t)$ เป็นระยะทางที่ลูกปัดเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง γ เป็นระยะเวลา t

ให้ $v=v(t)$ เป็นความเร็วที่ลูกปัดเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง γ เป็นระยะเวลา t

สมมติให้ f สามารถหาอนุพันธ์ได้ ระยะทางที่ลูกปัดเคลื่อนที่สามารถหาได้โดย

$$s(t)=\int_0^{x(t)}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du$$

และ $v(t)=s'(t)$ โดยทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of calculus) และกฎลูกโซ่ (Chain Rule) ดังนั้น

$$v(t)=\sqrt{1+f'\left(x(t)\right)^2}\,x'(t) \tag{3.1.1}$$

จากสมมติฐานกำหนดให้ไม่มีแรงเสียดทาน ณ เวลา t ใดๆ ดังนั้นพลังงานรวมมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งโดยพลังงานจลน์ คือ $\frac{1}{2}mv^2$ และพลังงานศักย์คือ mgh เมื่อ h คือ ความสูงของแกน x นั่นคือ (จาก $f(x)\le 0$)

$$\frac{1}{2}mv^2+mgf(x)=0$$

เมื่อ

$$v=\sqrt{-2gf(x)} \tag{3.1.2}$$

จาก $(3.1.1)$ และ $(3.1.2)$ จะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$\sqrt{-2gf(x)}=\sqrt{1+f'(x)^2}\,\frac{dx}{dt}$$

สามารถหาผลเฉลยสมการนี้โดยเทคนิคการแยกตัวแปร และการหาปริพันธ์ ถ้า T เป็นช่วงเวลา โดยจัดสมการใหม่จะได้

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{-f(x)}}\,dx$$

$$T=\int_0^T dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{b_1}\sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{-f(x)}}\,dx \tag{3.1.3}$$

จาก $(3.1.3)$ โดยการสมมติว่า B อยู่ที่พิกัด $(1,-1)$ และความเร่งของแรงโน้มถ่วงของโลก คือ $g=9.8$ แล้วส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม A และ B คือ $y=f(x)=-x$ และสามารถคำนวณเวลาในการเดินทาง

$$T_L=\frac{1}{\sqrt{19.6}}\int_0^1\sqrt{\frac{2}{x}}\,dx=0.638877$$

ถ้า γ เป็นส่วนวงกลมที่สัมผัสกับเส้นสัมผัสแนวตั้งที่ A แล้ว

$$f(x)=-\sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

แล้วนำไปแทนใน $(3.1.3)$ จะได้

$$T_S=\frac{1}{\sqrt{19.6}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt[4]{\left(2x-x^2\right)^3}}\,dx=0.592262$$

จะพบว่าเมื่อลูกปัดเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งลูกปัดจะเคลื่อนที่เร็วกว่าการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง แสดงให้เห็นว่าระยะทางที่สั้นที่สุด อาจจะไม่ใช่เส้นทางที่ใช้เวลาในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด ถ้า γ เป็นส่วนโค้งของพาราโบลาที่สัมผัสกับเส้นสัมผัสแนวตั้งที่จุด A แล้ว $f(x)=-\sqrt{x}$ และหาปริพันธ์ของสมการ $(3.1.3)$ จะได้

$$T_P=\frac{1}{2\sqrt{19.6}}\int_0^1\frac{\sqrt{1+4x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx=0.584395$$

ซึ่งได้เวลาในการเคลื่อนที่น้อยกว่าส่วนของวงกลมเล็กน้อย นั่นคือ โค้งพาราโบลานี้อาจเป็นคำตอบปัญหาบราชิสโตโครน ที่จุด $A:(0,0)$ ไป $B:(1,-1)$ ซึ่งจะพิจารณาในลำดับถัดไปว่าโค้งพาราโบลานี้เป็นปัญหาบราชิสโตโครนจริงหรือไม่

3.1 ปัญหาบราชิสโตโครน (Brachistochrone)

ต้องการหาฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนอลมีค่าน้อยที่สุด

$$T = J[f] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{-f(x)}}\,dx \qquad (3.1.4)$$

โดยมีเงื่อนไข $f(0)=0$ และ $f(b_1)=b_2<0$

ค่าที่น้อยที่สุดของ T จะเป็นไปตามสมการออยเลอร์ $(2.1.11)$ โดย $F = F(y(x), y'(x))$

จากสมการ $(2.1.14)$ คือ $y''F_{y'y'} + y'F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0$

ถ้า $F = F(y, y')$ นั่นคือ $F_x = 0$ และ $F_y, F_{y'}$ มีค่า แทนลงใน $(2.1.14)$ จะได้

$$y''F_{y'y'} + y'F_{yy'} - F_y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial y} - y''\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} - y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} - y''\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} - y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} - y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} - y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial x}\frac{dx}{dx} - y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} - y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} - y'\left(\frac{\partial F_{y'}}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}\right) - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} - y'\frac{dF_{y'}}{dx} - F_{y'}\frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'F_{y'}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = 0$$

$$F - y'F_{y'} = C \qquad (3.1.5)$$

จาก $(3.1.4)$ ฟังก์ชันนอลคือ $I(x, f(x), f'(x)) = \dfrac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{-f(x)}}$

ให้ $y = f(x)$ และ $z = f'(x)$ แทนลงใน $(3.1.5)$

จะได้

$$I - zI_z = C_0$$

$$\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{-y}} - z\frac{z}{\sqrt{2g}\sqrt{-y\left(1+z^2\right)}} = C_0$$ เมื่อ C_0 เป็นค่าคงที่

$$\frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{-y\left(1+z^2\right)}} = C_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{-y\left(1+z^2\right)}} = \sqrt{2g}C_0$$

$$\sqrt{-y\left(1+z^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2g}C_0}$$

$$-y\left(1+z^2\right) = \frac{1}{2gC_0^{\ 2}}$$

$$y\left(1+z^2\right) = -\frac{1}{2gC_0^{\ 2}}$$

$$y\left(1+z^2\right) = C$$ เมื่อ $C = -\frac{1}{2gC_0^{\ 2}}$ เป็นค่าคงที่

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาบราชิสโตโครน คือผลเฉลยของ $y = f\left(x\right)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = C \qquad (3.1.6)$$

ที่ตรงตามเงื่อนไขขอบเขตทั้งสอง $f\left(0\right) = 0$ และ $f\left(b_1\right) = b_2$

จาก $(3.1.6)$ สามารถหาปริพันธ์ได้โดยการแยกตัวแปร

$$y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = C$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$$

$$\sqrt{\frac{y}{C-y}}dy = dx$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้าง $$\int\sqrt{\frac{y}{C-y}}dy = \int dx$$

$$\int\sqrt{\frac{y}{C-y}}dy = x \qquad (3.1.7)$$

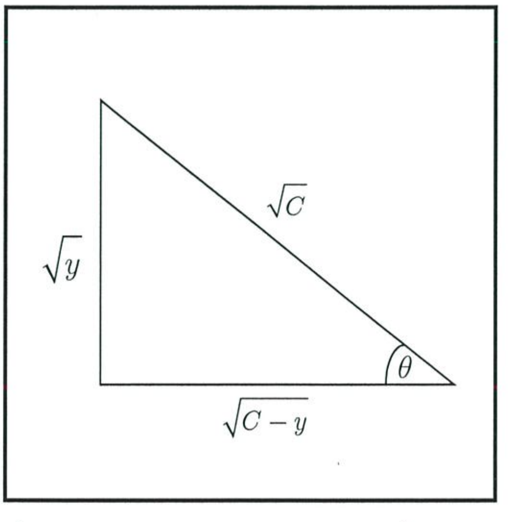
คำนวณปริพันธ์ $\int\sqrt{\frac{y}{C-y}}dy$

ให้ $y = C\sin^2\theta \qquad dy = 2C\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

จะได้
$$\int \sqrt{\frac{y}{C-y}}dy = \int \sqrt{\frac{C\sin^2\theta}{C-C\sin^2\theta}}(2C\sin\theta\cos\theta)d\theta$$
$$= 2C\int \sqrt{\frac{C\sin^2\theta}{C(1-\sin^2\theta)}}(\sin\theta\cos\theta)d\theta$$
$$= 2C\int \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}(\sin\theta\cos\theta)d\theta$$
$$= 2C\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\sin\theta\cos\theta)d\theta$$
$$= 2C\int \sin^2\theta\, d\theta$$
$$= 2C\int \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= C\int (1-\cos 2\theta)d\theta$$
$$= C\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]$$
$$= C\left[\theta - \sin\theta\cos\theta\right]$$

จาก
$$y = C\sin^2\theta$$
$$\frac{y}{C} = \sin^2\theta$$
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{y}{C}}$$

ดังนั้น
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{C}}$$



รูปที่ 3.4 ภาพแสดงด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากรูปที่ 3.4 จะได้ว่า $\cos\theta = \sqrt{\frac{C-y}{C}}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{C-y}{C}}\right)$$

ดังนั้น

$$\int \sqrt{\frac{y}{C-y}}dy = C\left[\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{C-y}{C}}\right) - \left(\sqrt{\frac{y}{C}}\right)\left(\sqrt{\frac{C-y}{C}}\right)\right]$$

$$= C\left[\cos^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{y}{C}}\right) - \frac{\sqrt{Cy-y^2}}{C}\right]$$

$$= C\cos^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{y}{C}}\right) - \sqrt{Cy-y^2}$$

แทนในสมการ $(3.1.7)$ จะได้

$$x = C\cos^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{y}{C}}\right) - \sqrt{Cy-y^2}$$

จากรูปที่ 3.3 $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ กับแกนในแนวราบ หรือ แกน x นั่นเอง จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ และให้ค่าคงที่ C ใน $(3.1.6)$ มีค่า $-2R$ (เราต้องการ $R>0$ ดังรูปที่ 3.3 และแสดง $y<0$) จาก $(3.1.6)$ สามารถจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$y\sec^2\theta = -2R$$

หรือ

$$y = -2R\cos^2\theta = -R\left(1+\cos(2\theta)\right) \tag{3.1.8}$$

ดังนั้น

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta} = \cot(\theta)\left(2R\sin(2\theta)\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(4R\sin\theta\cos\theta) = 2R\left(1+\cos(2\theta)\right)$$

นำมาหาปริพันธ์ จะได้ $x = 2R\theta + R\sin(2\theta) + S$ ให้ $u = 2\theta$ และจาก $(3.1.8)$ จะได้สมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equations)

$$x = R(u+\sin u) + S$$

$$y = -R(1+\cos u) \tag{3.1.9}$$

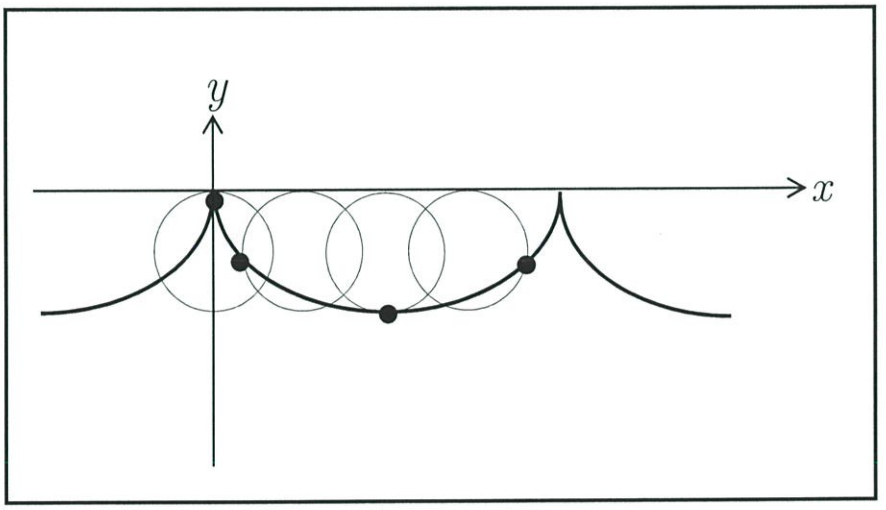
สำหรับ γ ถ้า u_0 เป็นค่าของ u ซึ่ง $\left(x(u_0), y(u_0)\right)=(0,0)$ เพราะฉะนั้น R จะไม่เป็นศูนย์ จากสมการที่สองใน (3.1.9) กำหนดให้ $\cos(u_0)=-1$ ให้ $u_0=-\pi$ ด้วยเหตุนี้จากสมการ ที่หนึ่งใน (3.1.9) $S=\pi R$ โดยการหารของทั้งสองสมการใน (3.1.9) จะเห็นว่าค่าของ $u_1>u_0$ ของ u สำหรับ$\left(x(u_1), y(u_1)\right)=(b_1,b_2)$ เป็นไปตาม $q_0(u_1)=-\dfrac{b_1}{b_2}>0$ เมื่อ

$$q_0(u)=\frac{u+\sin u+\pi}{1+\cos u}$$

ถ้าเราทำการเปลี่ยนตัวแปร ให้ $u=\theta-\pi$ สำหรับทุกๆ u ใน (3.1.9) (เมื่อ $S=\pi R$) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= R(\theta-\sin\theta) \\ y &= -R(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ภาพแสดงไซคลอยด์

3.2 วิธีแก้ปัญหาบราชิสโตโครน

เส้นโค้งที่เชื่อมจุด $A:(0,0)$ และจุด $B:(b_1,b_2)$ คือ γ ใน $(3.1.9)$ สำหรับ $0 \le \theta \le \theta_1$ เมื่อ θ_1 เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของ

$$q(\theta)=\frac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\frac{b_1}{b_2}$$

$(3.1.11)$

ใน $(0,2\pi)$ และ

$$R=\frac{-b_2}{1-\cos\theta_1} \tag{3.1.12}$$

คำนวณระยะเวลาที่ลูกปัดจะล่นลงจาก $A:(0,0)$ ถึง $B:(1,-1)$ ตามบราชิสโตโครน และเทียบกับเวลาการเคลื่อนที่สำหรับส่วนของเส้นตรง และโค้งพาราโบลา กำหนดให้ $g=\frac{1}{2}$ โดยแทน $x=\alpha(v),\ \ y=\beta(v)$ ใน $(3.1.3)$ หรืออื่น ๆ ที่มาจาก $(3.1.3)$ อยู่ใน γ จะแสดงโดยสมการอิงตัวแปรเสริม $(x,y)=\big(\alpha(v),\beta(v)\big)$ ดังนั้น

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{v_0}^{v_1}\frac{\sqrt{\alpha'(v)^2+\beta'(v)^2}}{\sqrt{-\beta(v)}}dv \tag{3.1.13}$$

สำหรับสมการอิงตัวแปรเสริม $(3.1.10)$ จะได้ $\alpha(v)=R(v-\sin v)$ และ $\beta(v)=-R(1-\cos v)$ ดังนั้น $\frac{d\alpha}{dv}=R(1-\cos v)$ และ $\frac{d\beta}{dv}=-R\sin v$ แทนใน $(3.1.13)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\alpha'(v)^2+\beta'(v)^2}}{\sqrt{-2g\beta(v)}} &= \frac{\sqrt{\big(R(1-\cos v)\big)^2+(-R\sin v)^2}}{\sqrt{-2g\big(-R(1-\cos v)\big)}} \\
&= \frac{\sqrt{R^2\left(1-2\cos v+\cos^2 v+\sin^2 v\right)}}{\sqrt{2gR(1-\cos v)}} \\
&= \frac{\sqrt{R^2(2-2\cos v)}}{\sqrt{2gR(1-\cos v)}} \\
&= \frac{\sqrt{2R^2(1-\cos v)}}{\sqrt{2gR(1-\cos v)}}
\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{g}}$$

$$=\sqrt{\frac{R}{9.8}}$$

$$=\sqrt{\frac{R}{9.8}}$$

และให้ $v_0=0$ และ $v_1=\theta_1$ จะได้ $T=\int_0^{\theta_1}\sqrt{\frac{R}{9.8}}\,dv=\sqrt{\frac{R}{9.8}}\,\theta_1$ เมื่อ θ_1 เป็นการแก้ปัญหาของ $\frac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=1$ ในช่วง $(0,2\pi)$ โดยใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วง

หา θ_1 จากสมการ $\frac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=1$ โดยใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วง กำหนดร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ $\varepsilon_s=0.005\%$ และคำนวณร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ (ε_a) จนถึง $|\varepsilon_a|<\varepsilon_s$

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ $f(\theta)=\theta-\sin\theta+\cos\theta-1=0$

<u>ครั้งที่</u> 1

<u>ขั้นตอน</u> 1 เลือก x_l และ x_u ตรวจสอบค่าฟังก์ชัน 2 ค่าที่มีเครื่องหมายแตกต่างกัน คือ

$f(x_l)f(x_u)<0$ จะได้ $f(1)f(2.5)=(-0.30117)(0.10038)<0$

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r=\frac{x_l+x_u}{2}=\frac{1+2.5}{2}=1.75$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$f(x_l)f(x_u)=f(1)f(1.75)=(-0.30117)(-0.41223)>0$

ดังนั้น $x_l=x_r=1.75$ กลับไปขั้นตอน 2

<u>ครั้งที่</u> 2

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r=\frac{x_l+x_u}{2}=\frac{1.75+2.5}{2}=2.125$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(1.75)f(2.125)=(-0.41223)(-0.25159)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.125$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.125-1.75}{2.125}\right| \times 100\% = 17.65\%$$

<u>ครั้งที่</u> 3

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.125+2.5}{2} = 2.3125$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(1.75)f(2.3125)=(-0.25159)(-0.10036)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.3125$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.3125-2.125}{2.3125}\right| \times 100\% = 8.12\%$$

<u>ครั้งที่</u> 4

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.3125+2.5}{2} = 2.40625$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(2.3125)f(2.40625)=(-0.10036)(-0.00619)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.40625$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.40625-2.3125}{2.40625}\right| \times 100\% = 3.90\%$$

<u>ครั้งที่</u> 5

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.40625+2.5}{2} = 2.453125$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(2.40625)f(2.45312)=(-0.00619)(0.04554)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.453125$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.453125-2.40625}{2.453125}\right| \times 100\% = 1.91\%$$

<u>ครั้งที่</u> 6

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.40625 + 2.453125}{2} = 2.4296875$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u) = f(2.40625)f(2.42968) = (-0.00619)(0.01929) > 0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.42968$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.42968 - 2.453125}{2.42968}\right| \times 100\% = 0.96\%$$

<u>ครั้งที่</u> 7

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.40625 + 2.42968}{2} = 2.41796$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u) = f(2.40625)f(2.41796) = (-0.00619)(0.00645) > 0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.41796$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.41796 - 2.42968}{2.41796}\right| \times 100\% = 0.48\%$$

<u>ครั้งที่</u> 8

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.40625 + 2.41796}{2} = 2.41210$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u) = f(2.40625)f(2.41210) = (-0.00619)(0.00010) > 0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.41210$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.41210 - 2.41796}{2.41210}\right| \times 100\% = 0.24\%$$

<u>ครั้งที่</u> 9

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.40625 + 2.41210}{2} = 2.40917$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(2.40625)f(2.40917)=(-0.00619)(-0.00304)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.40917$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a|=\left|\frac{2.40917-2.41210}{2.40917}\right|\times 100\% = 0.12\%$$

<u>ครั้งที่</u> 10

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r=\frac{x_l+x_u}{2}=\frac{2.40917+2.41210}{2}=2.41064$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(2.40917)f(2.41064)=(-0.00304)(-0.00147)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.41064$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a|=\left|\frac{2.41064-2.40917}{2.41064}\right|\times 100\% = 0.06\%$$

<u>ครั้งที่</u> 11

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r=\frac{x_l+x_u}{2}=\frac{2.41064+2.41210}{2}=2.41137$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(2.41064)f(2.41137)=(-0.00147)(-0.00068)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.41137$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a|=\left|\frac{2.41137-2.41064}{2.41137}\right|\times 100\% = 0.03\%$$

<u>ครั้งที่</u> 12

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r=\frac{x_l+x_u}{2}=\frac{2.41137+2.41210}{2}=2.41174$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u)=f(2.41137)f(2.41174)=(-0.00068)(-0.0028)>0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.41174$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a|=\left|\frac{2.41174-2.41137}{2.41174}\right|\times 100\% = 0.02\%$$

<u>ครั้งที่</u> 13

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.41174 + 2.41210}{2} = 2.41192$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$f(x_l)f(x_u) = f(2.41174)f(2.41192) = (-0.00028)(-0.00009) > 0$$

ดังนั้น $x_l = x_r = 2.41192$ กลับไปขั้นตอน 2

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.41192 - 2.41174}{2.41192}\right| \times 100\% = 0.007\%$$

<u>ครั้งที่</u> 14

<u>ขั้นตอน</u> 2 ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{2.41192 + 2.41210}{2} = 2.41201$$

<u>ขั้นตอน</u> 3 ตรวจสอบเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r)$ เพื่อทำตามเงื่อนไขในขั้นตอน 3 จะได้

$$\begin{aligned} f(x_l)f(x_u) &= f(2.41192)f(2.41201) \\ &= (-0.00009)(-0.000007) > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x_u = x_r = 2.41201$

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{2.41201 - 2.41192}{2.41201}\right| \times 100\% = 0.004\%$$

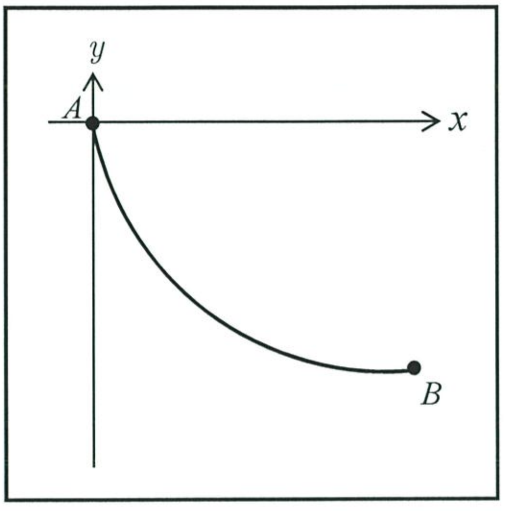
จะพบว่าค่า $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ดังนั้น จากการประมาณค่าโดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะได้ค่า $\theta_1 = 2.41201$

และ R กำหนดโดย (3.1.12) จะได้ $R = 0.57292$

ดังนั้น

เส้นโค้งแบบบราชิสโตโครน : $T = 0.58319$

สำหรับบราชิสโตโครน เส้นทางระหว่าง $A:(0,0)$ และ $B:(b_1,b_2)$ ซึ่งอยู่ระหว่าง π ถึง 2π ดังรูปที่ 3.6 เป็นจริงสำหรับทุกจุด $B:(b_1,b_2)$ ที่ $b_2 > -\frac{2}{\pi}b_1$



รูปที่ 3.6 ภาพแสดงเส้นโค้งบราชิสโตโครน

บทที่ 4
ผลการวิจัย และอภิปรายผล

4.1 การหาเวลาในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด

จากการวิเคราะห์การคำนวณการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด โดยที่ลูกปัดเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก และสามารถคำนวณเวลาในการเคลื่อนที่สำหรับรูปร่างของเส้นโค้งที่มีลักษณะแตกต่างกัน โดยที่ให้ A มีระบบพิกัดเป็น $(0,0)$ และ B อยู่ที่พิกัด $(1,-1)$ และความเร่งของแรงโน้มถ่วงของโลกคือ $g = 9.8$ และกำหนดสมการการเคลื่อนที่แบบส่วนของเส้นตรง ส่วนของวงกลมที่สัมผัสเส้นโค้ง โค้งพาราโบลา และการเคลื่อนที่แบบบราชิสโตโครนเป็นฟังก์ชันที่นำไปแทนค่าในสมการหลัก คือ

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{-f(x)}}\, dx$$

เพื่อหาผลเฉลย และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด

4.1.1 ตารางการเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของสมการส่วนของเส้นตรง ส่วนของวงกลมที่สัมผัสเส้นโค้ง โค้งพาราโบลา และการเคลื่อนที่แบบบราชิสโตโครน

เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่			
ส่วนของเส้นตรง $f(x) = -x$	**ส่วนของวงกลม** $f(x) = -\sqrt{1-(x-1)^2}$	**พาราโบลา** $f(x) = -\sqrt{x}$	**บราชิสโตโครน**
0.638877	0.592262	0.584395	0.583181

ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของสมการส่วนของเส้นตรง ส่วนของวงกลม และพาราโบลา และการคำนวณเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่โดยใช้บราชิสโตโครน

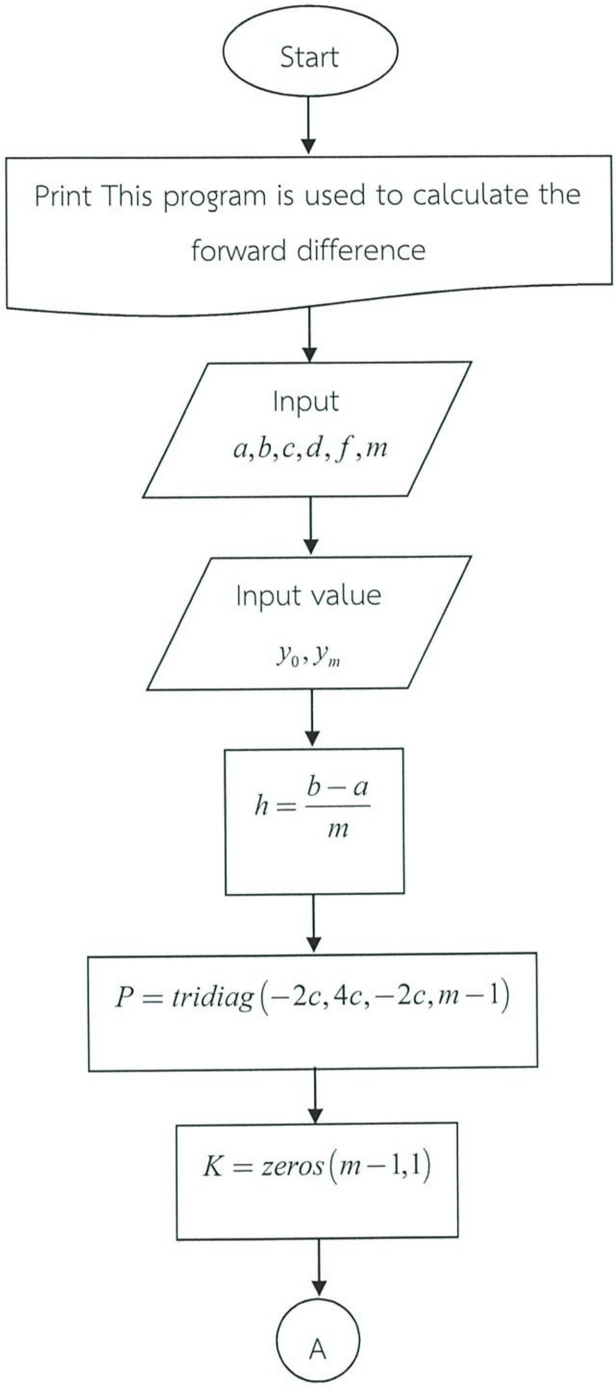
4.2 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมการหาผลเฉลยโดยผลต่างจำกัด

ในการคำนวณนั้นสมการจะอยู่ในรูปแบบ $f(x)=c(y')^2+dy+e$ ต้องมีการรับค่า

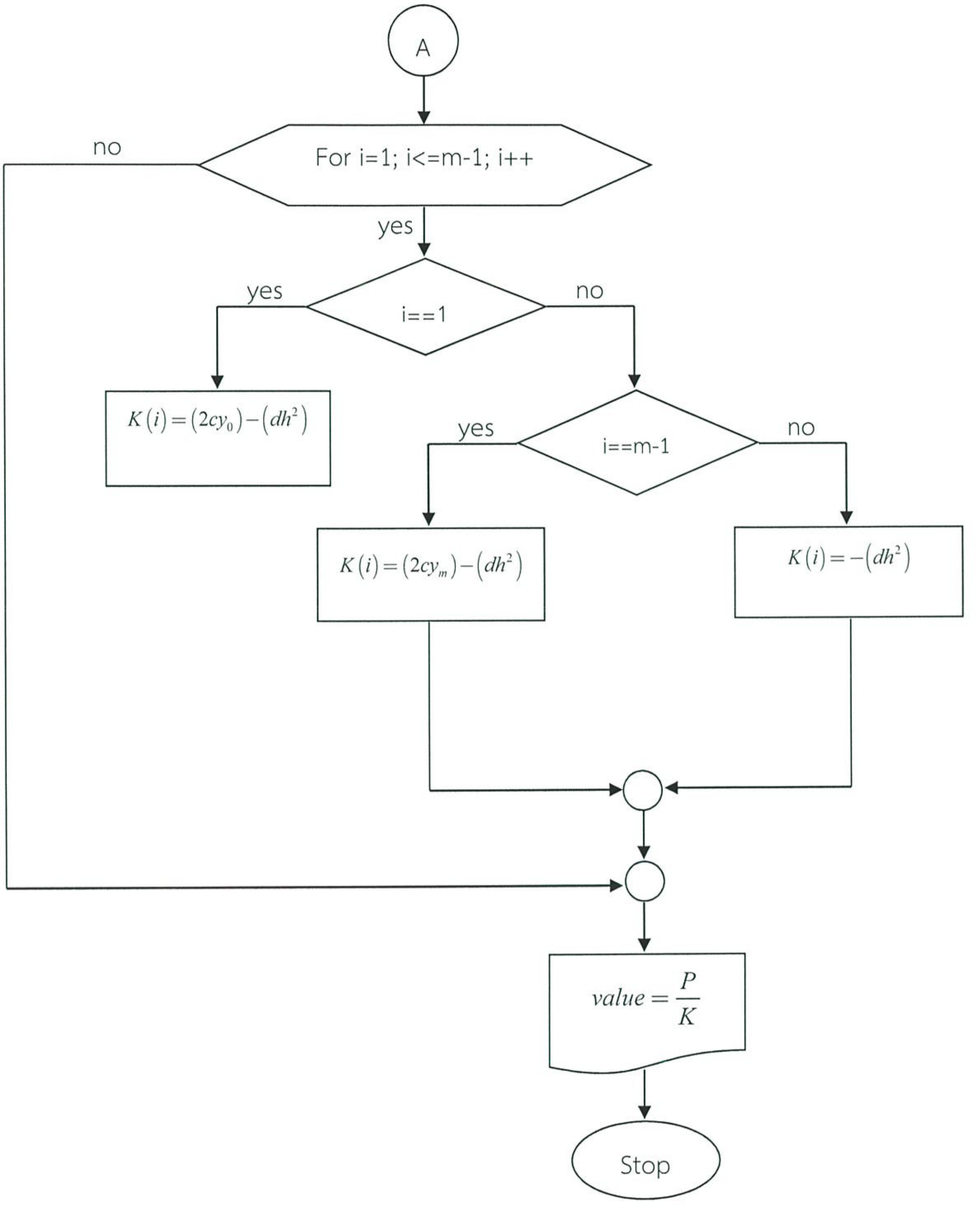
- ขอบซ้าย
- ขอบขวา
- ค่าขอบซ้าย
- ค่าขอบขวา
- สัมประสิทธิ์หน้า y'
- สัมประสิทธิ์หน้า y
- ค่าคงที่
- จำนวน grid

เพื่อใช้ในการคำนวณหา

- การประมาณค่าสุดขีดของฟังก์ชันนอล



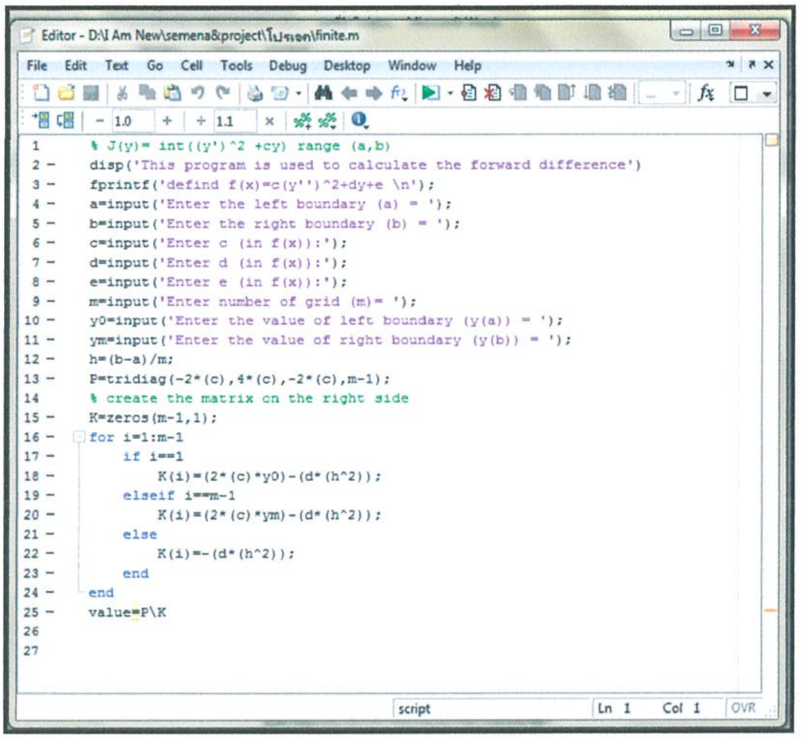
รูปที่ 4.1 ภาพแสดงผังงานแสดงการคำนวณการหาผลเฉลยโดยผลต่างจำกัด



รูปที่ 4.1 ภาพแสดงผังงานแสดงการคำนวณการหาผลเฉลยโดยผลต่างจำกัด (ต่อ)

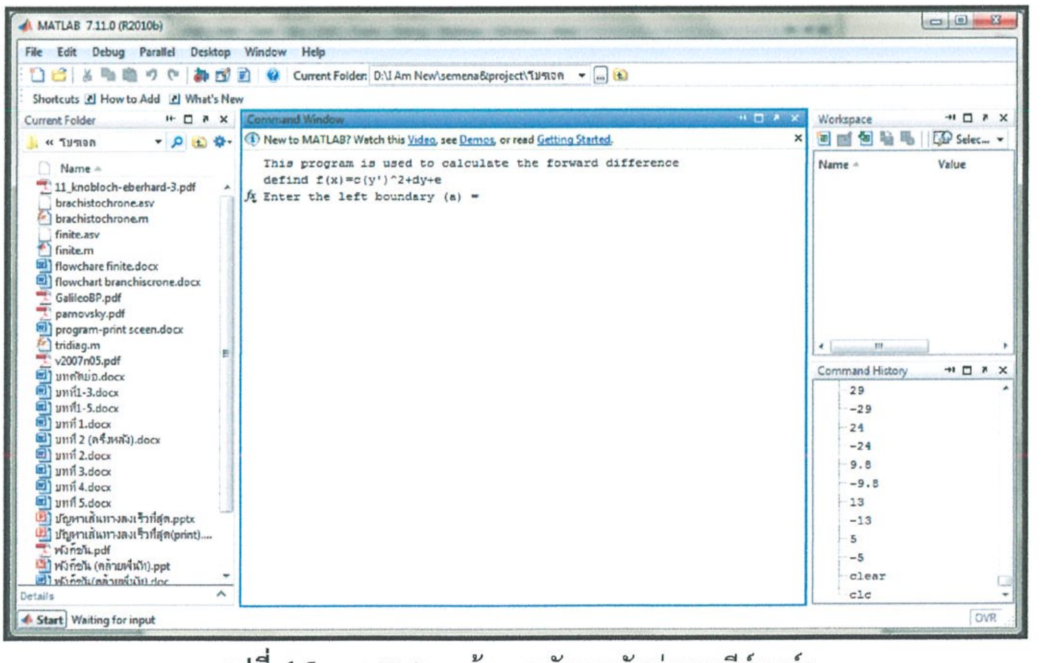
4.3 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมการหาผลเฉลยโดยผลต่างจำกัด

เมื่อเข้าสู่หน้าจอของโปรแกรม จะเป็นโปรแกรมการคำนวณการประมาณค่าโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า



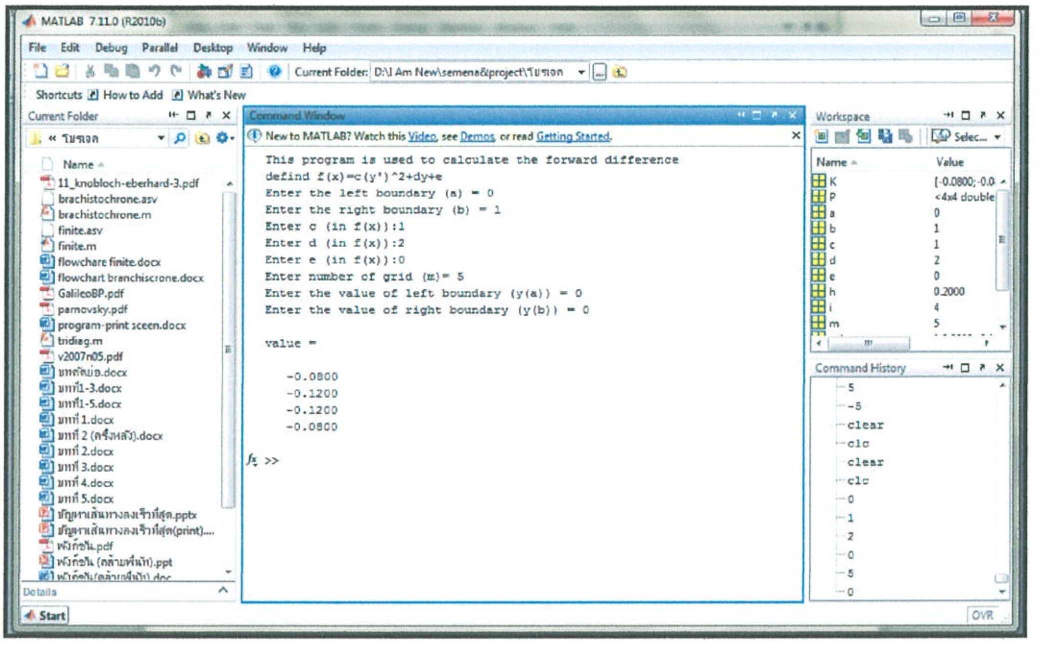
รูปที่ 4.2 ภาพแสดงหน้าจอหลักของโปรแกรมการประมาณค่า

กดปุ่ม จะเข้าสู่หน้าจอการทำงานของโปรแกรมเพื่อรับค่าต่างๆ



รูปที่ 4.3 ภาพแสดงหน้าจอหลักการรับค่าทางคีย์บอร์ด

กดปุ่ม Enter บนคีย์บอร์ด เมื่อใส่ค่าที่โปรแกรมต้องการ และจะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นการประมาณค่าของปัญหาการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันนอล



รูปที่ 4.4 ภาพแสดงหน้าจอหลักการรับค่าทางคีย์บอร์ด และผลลัพธ์

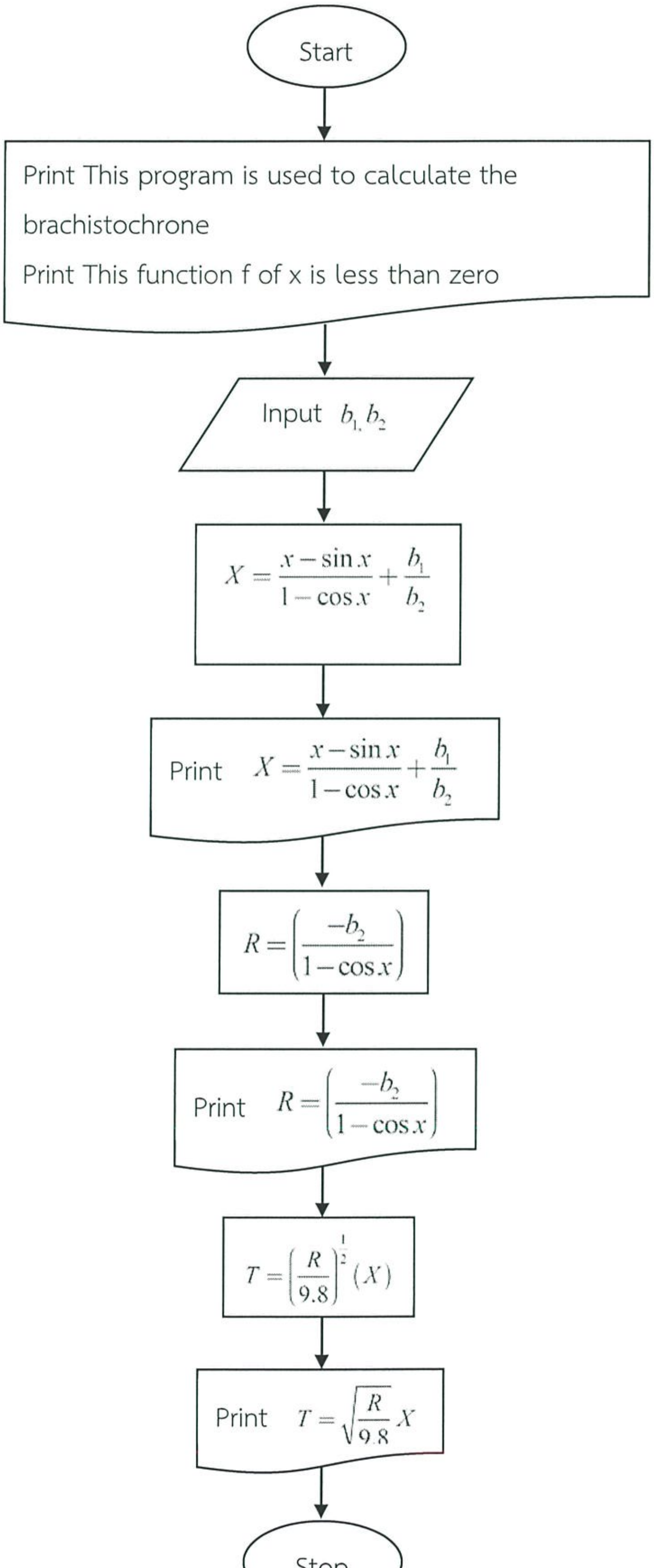
4.4 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด

ในการคำนวณนั้นต้องมีการรับค่า

- ระยะทางตามแนวแกน x
- ระยะทางตามแนวแกน y

เพื่อใช้ในการคำนวณหา

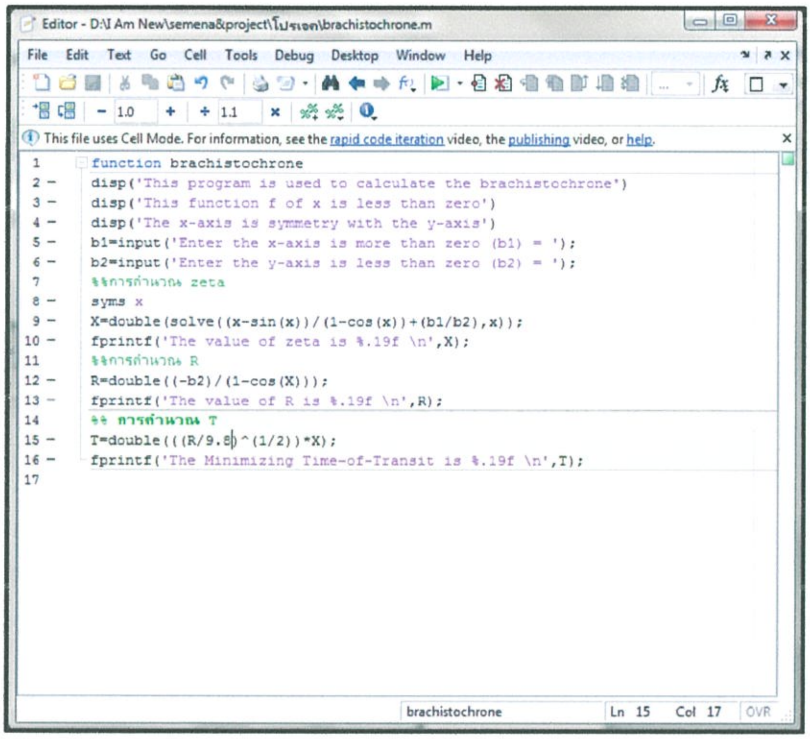
- มุมที่ใช้ในการเคลื่อนที่
- รัศมีของวงกลมที่เคลื่อนที่ไป
- เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด



รูปที่ 4.5 ภาพแสดงผังงานแสดงการคำนวณการหาเวลาที่น้อยที่สุดในการเคลื่อนที่

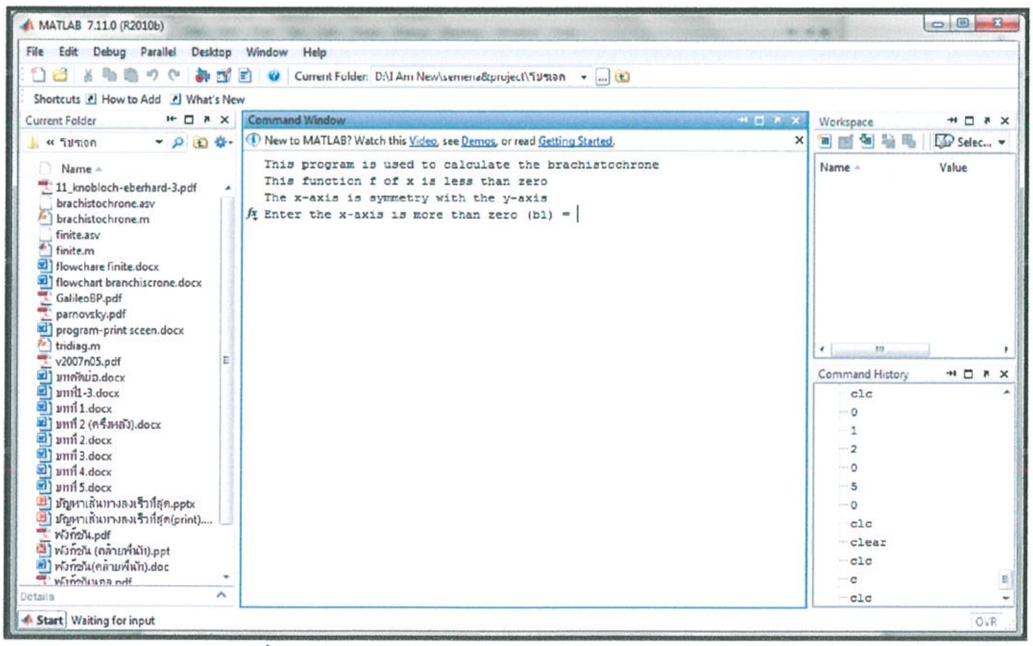
4.5 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด

เมื่อเข้าสู่หน้าจอของโปรแกรม จะเป็นโปรแกรมการคำนวณการหาเวลาที่ในการเคลื่อนน้อยที่สุด



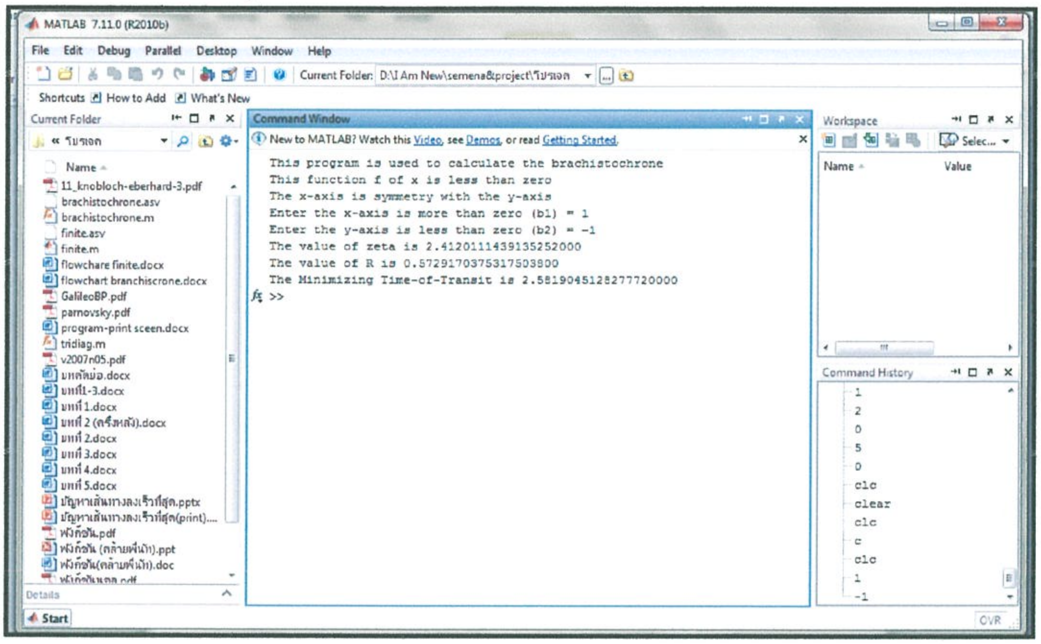
รูปที่ 4.6 ภาพแสดงหน้าจอหลักของโปรแกรมการประมาณค่า

กดปุ่ม จะเข้าสู่หน้าจอการทำงานของโปรแกรมเพื่อรับค่าต่างๆ



รูปที่ 4.7 ภาพแสดงหน้าจอหลักการรับค่าทางคีย์บอร์ด

กดปุ่ม Enter บนคีย์บอร์ด เมื่อใส่ค่าที่โปรแกรมต้องการ และจะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด



รูปที่ 4.8 ภาพแสดงหน้าจอหลักการรับค่าทางคีย์บอร์ด และผลลัพธ์

4.6 ตัวอย่างการหาผลเฉลยโดยใช้ผลต่างจำกัด

4.6.1 ตัวอย่างที่ 1 หาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

$$J[y]=\int_0^2\left(2(y')^2+2y\right)dx$$

เมื่อ $y(0)=0,\ y(2)=0$

<u>**วิธีทำ**</u> $\Delta x=\dfrac{2-0}{5}=0.4$ และให้

$$y_0=y(0)=0\ ,y_1=y(0.4)\ ,y_2=y(0),$$
$$y_3=y(1.3)\ ,y_4=y(1.6)\ ,y_5=y(2)=0$$

จากสูตรการประมาณค่าอนุพันธ์ใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า

$$y_k'=y'(x_k)\approx\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}$$

ดังนั้น $$y'(0)=\frac{y_1-0}{0.4}$$

$$y'(0.4)=\frac{y_2-y_1}{0.4}$$

$$y'(0.8)=\frac{y_3-y_2}{0.4}$$

$$y'(1.2)=\frac{y_4-y_3}{0.4}$$

$$y'(1.6)=\frac{0-y_4}{0.4}$$

โดยการแทนอินทิกรัลด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \left[f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)\right]\triangle x$$

เนื่องจาก $f=2(y')^2+2y$

แล้ว

$$P(y_0,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},y_n)=\Big[\left[2(y'(0))^2+2y\right]+\left[2(y'(0.4))^2+2y_1\right]+\left[2(y'(0.8))^2+2y_2\right]$$

$$+\left[2(y'(1.2))^2+2y_3\right]+\left[2(y'(1.6))^2+2y_4\right]\Big]\Delta x$$

$$=\left[\left[2\left(\frac{y_1}{0.4}\right)^2\right]+\left[2\left(\frac{y_2-y_1}{0.4}\right)^2+2y_1\right]+\left[2\left(\frac{y_3-y_2}{0.4}\right)^2+2y_2\right]\right.$$

$$\left.+\left[2\left(\frac{y_4-y_3}{0.4}\right)^2+2y_3\right]+\left[2\left(\frac{-y_4}{0.4}\right)^2+2y_4\right]\right]0.4$$

และอาจจะมีเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสุดขีด คือ $\dfrac{\partial P}{\partial y_i}=0$

ต่อไปจะได้ระบบสมการเพื่อหาค่า y_1,y_2,y_3,y_4 โดย

$$\frac{1}{0.4}\frac{\partial P}{\partial y_1}=\frac{y_1}{0.04}-\frac{y_2-y_1}{0.04}+2 \quad =0$$

$$\frac{1}{0.4}\frac{\partial P}{\partial y_2}=\frac{y_2-y_1}{0.04}-\frac{y_3-y_2}{0.04}+2=0$$

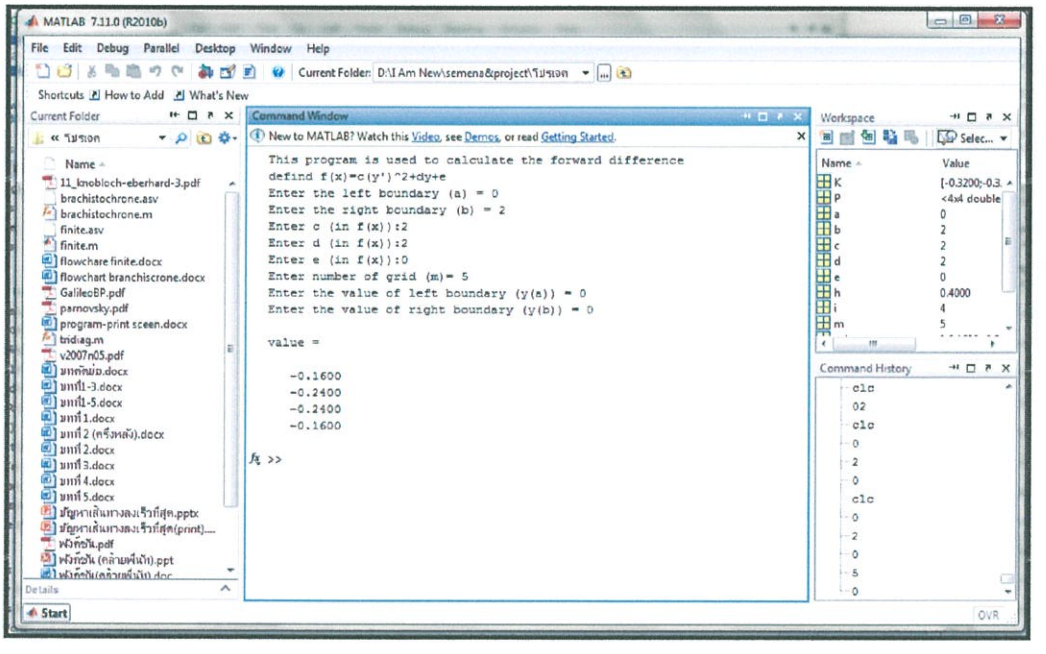
$$\frac{1}{0.4}\frac{\partial P}{\partial y_3}=\frac{y_3-y_2}{0.04}-\frac{y_4-y_3}{0.04}+2=0$$

$$\frac{1}{0.4}\frac{\partial P}{\partial y_4}=\frac{y_4-y_3}{0.04}-\frac{y_4}{0.04}+2 \quad =0$$

หรือ
$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &= -0.08 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 &= -0.08 \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 &= -0.08 \\ -y_3 + 2y_4 &= -0.08 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y_1 = -0.16,\ y_2 = -0.24,\ y_3 = -0.24,\ y_4 = -0.16$ □

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.9 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลตัวอย่างที่ 1

4.6.2 ตัวอย่างที่ 2 หาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

$$J[y] = \int_0^3 \left[3(y')^2 + 4y\right] dx$$

เมื่อ $y(0) = 1,\ y(3) = 0$

__วิธีทำ__ ให้ $\Delta x = \dfrac{3-0}{5} = 0.6$ และให้

$$y_0 = y(0) = 0, y_1 = y(0.6), y_2 = (1.2),$$
$$y_3 = y(1.8), y_4 = y(2.4), y_5 = y(3) = 0$$

จากสูตรการประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า

$$y_k' = y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}$$

ดังนั้น

$$y'(0) = \frac{y_1 - 0}{0.6}$$

$$y'(0.6) = \frac{y_2 - y_1}{0.6}$$

$$y'(1.2) = \frac{y_3 - y_2}{0.6}$$

$$y'(1.8) = \frac{y_4 - y_3}{0.6}$$

$$y'(2.4) = \frac{0 - y_4}{0.6}$$

โดยการแทนอินทิกรัลด้วยสูตรสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b f(2.4)\,dx \simeq \left[f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)\right]\Delta x$$

เนื่องจาก $f = 3(y')^2 + 2y$

แล้ว

$$P(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = \left[\left[3(y'(0))^2 + 4y_0\right] + \left[3(y'(0.6))^2 + 4y_1\right] + \left[3(y'(1.2))^2 + 4y_2\right]\right.$$

$$\left. + \left[3(y'(1.8))^2 + 4y_3\right] + \left[3(y'(2.4))^2 + 4y_4\right]\right]\Delta x$$

$$= \left[\left[3\left(\frac{y_1}{0.6}\right)^2\right] + \left[3\left(\frac{y_2 - y_1}{0.6}\right)^2 + 4y_1\right] + \left[3\left(\frac{y_3 - y_2}{0.6}\right)^2 + 4y_2\right]\right.$$

$$\left.\left[3\left(\frac{y_4 - y_3}{0.6}\right)^2 + 4y_3\right] + \left[3\left(\frac{-y_4}{0.6}\right)^2 + 4y_4\right]\right]0.6$$

และอาจจะมีเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสุดขีด คือ $\dfrac{\partial P}{\partial y_i} = 0$

ต่อไปจะได้ระบบสมการเพื่อหาค่า y_1, y_2, y_3, y_4 โดย

$$\frac{1}{0.6}\frac{\partial P}{\partial y_1}=\frac{y_1}{0.06}-\frac{y_2-y_1}{0.06}+4 \quad =0$$

$$\frac{1}{0.6}\frac{\partial P}{\partial y_2}=\frac{y_2-y_1}{0.06}-\frac{y_3-y_2}{0.06}+4=0$$

$$\frac{1}{0.6}\frac{\partial P}{\partial y_3}=\frac{y_3-y_2}{0.06}-\frac{y_4-y_3}{0.06}+4=0$$

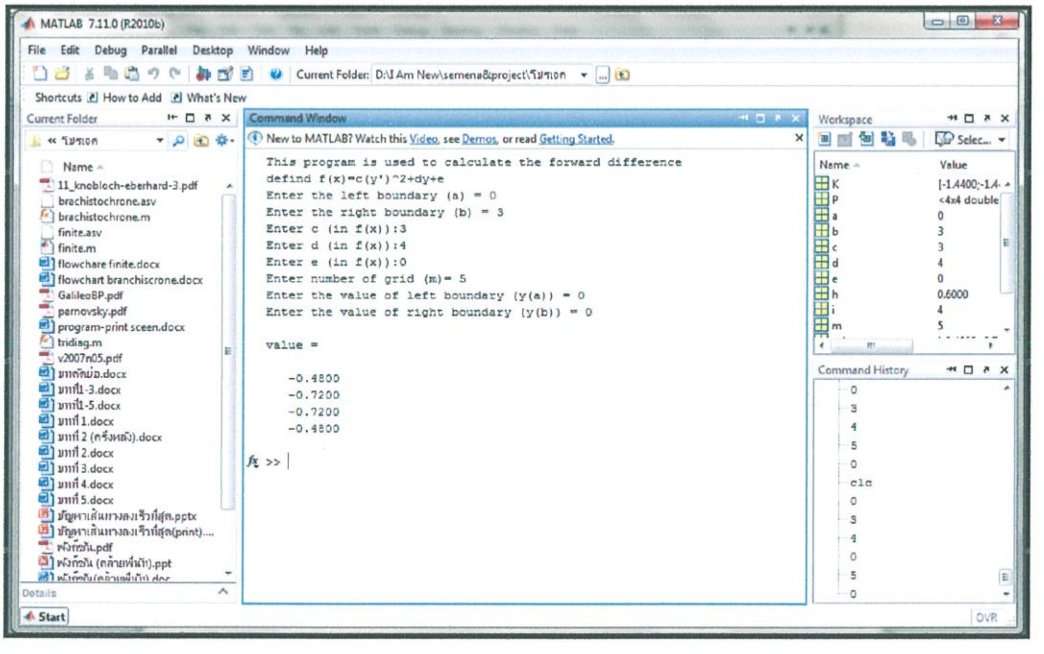
$$\frac{1}{0.6}\frac{\partial P}{\partial y_4}=\frac{y_4-y_3}{0.06}-\frac{y_4}{0.06}+4 \quad =0$$

หรือ

$$\begin{aligned}
2y_1-y_2 &= -0.24\\
-y_1+2y_2-y_3 &= -0.24\\
-y_2+2y_3-y_4 &= -0.24\\
-y_3+2y_4 &= -0.24
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y_1=-0.48,\ y_2=-0.72,\ y_3=-0.72,\ y_4=-0.48$ □

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.10 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในการหาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลตัวอย่างที่ 2

4.6.3 ตัวอย่างที่ 3 หาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

$$J[y]=\int_0^4\left[(y')^2+9y+2\right]dx$$

เมื่อ $y(0)=y(4)=0$

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ $\Delta x=\dfrac{4-0}{5}=0.8$ และให้

$$y_0=y(0)=0, y_1=y(0.8), y_2=(1.6),$$
$$y_3=y(2.4), y_4=y(3.2), y_5=y(4)=0$$

จากสูตรการประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า

$$y_k'=y'(x_k)\approx\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}$$

ดังนั้น
$$y'(0)=\frac{y_1-0}{0.8}$$
$$y'(0.8)=\frac{y_2-y_1}{0.8}$$
$$y'(1.6)=\frac{y_3-y_2}{0.8}$$
$$y'(2.4)=\frac{y_4-y_3}{0.8}$$
$$y'(3.2)=\frac{0-y_4}{0.8}$$

โดยการแทนอินทิกรัลด้วยสูตรสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b f(x)dx\simeq\left[f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)\right]\Delta x$$

เนื่องจาก $f=(y')^2+9y+2$

แล้ว
$$\begin{aligned}P(y_0,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},y_n)=&\Big[\left[(y'(0))^2+9y_0+2\right]+\left[(y'(0.8))^2+9y_1+2\right]\\&+\left[(y'(1.6))^2+9y_2+2\right]+\left[(y'(2.4))^2+9y_3+2\right]\\&+\left[(y'(3.2))^2+9y_4+2\right]\Big]\Delta x\end{aligned}$$

$$= \left[\left[\left(\frac{y_1}{0.8} \right)^2 + 2 \right] + \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{0.8} \right)^2 + 9y_1 + 2 \right] \right.$$

$$+ \left[\left(\frac{y_3 - y_2}{0.8} \right)^2 + 9y_2 + 2 \right] + \left[\left(\frac{y_4 - y_3}{0.8} \right)^2 + 9y_3 + 2 \right]$$

$$\left. + \left[\left(\frac{-y_4}{0.8} \right)^2 + 9y_4 + 2 \right] \right] 0.8$$

และอาจจะมีเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสุดขีด คือ $\dfrac{\partial P}{\partial y_i} = 0$

ต่อไปจะได้ระบบสมการเพื่อหาค่า y_1, y_2, y_3, y_4 โดย

$$\frac{1}{0.8}\frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{y_1}{0.32} - \frac{y_2 - y_1}{0.32} + 9 \quad = 0$$

$$\frac{1}{0.8}\frac{\partial P}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{0.32} - \frac{y_3 - y_2}{0.32} + 9 = 0$$

$$\frac{1}{0.8}\frac{\partial P}{\partial y_3} = \frac{y_3 - y_2}{0.32} - \frac{y_4 - y_3}{0.32} + 9 = 0$$

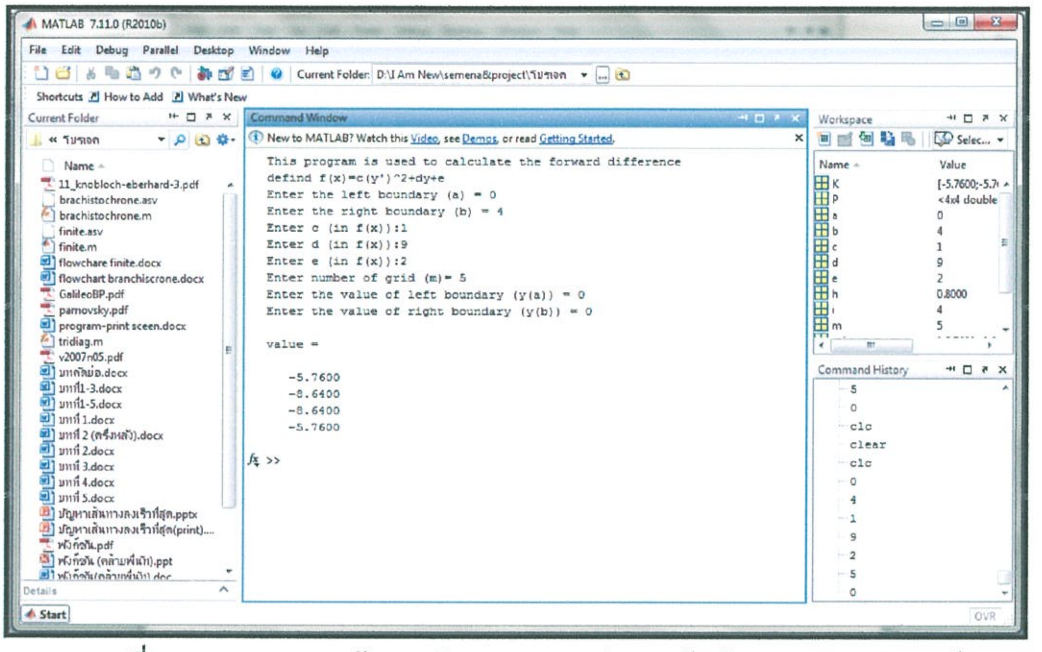
$$\frac{1}{0.8}\frac{\partial P}{\partial y_4} = \frac{y_4 - y_3}{0.32} - \frac{y_4}{0.32} + 9 \quad = 0$$

หรือ

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 \qquad\qquad &= -2.34 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \qquad &= -2.34 \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 &= -2.34 \\ -y_3 + 2y_4 &= -2.34 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y_1 = -5.76,\ y_2 = -8.64,\ y_3 = -8.64,\ y_4 = -5.76$ □

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.11 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลตัวอย่างที่ 3

4.6.4 ตัวอย่างที่ 4 หาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

$$J[y]=\int_0^1\left[2(y')^2+7y+9\right]dx$$

เมื่อ $y(0)=y(1)=0$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\Delta x=\dfrac{1-0}{7}=0.14$ และให้

$$y_0=y(0)=0, y_1=y(0.14), y_2=y(0.28), y_3=y(0.42),$$

$$y_4=y(0.56), y_5=y(0.7), y_6=y(0.84), y_7=y(1)=0$$

จากสูตรการประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า

$$y_k'=y'(x_k)\approx\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}$$

ดังนั้น
$$y'(0)=\frac{y_1-0}{0.14}$$
$$y'(0.14)=\frac{y_2-y_1}{0.14}$$
$$y'(0.28)=\frac{y_3-y_2}{0.14}$$
$$y'(0.42)=\frac{y_4-y_3}{0.14}$$
$$y'(0.56)=\frac{y_5-y_4}{0.14}$$
$$y'(0.7)=\frac{y_6-y_5}{0.14}$$
$$y'(0.84)=\frac{0-y_6}{0.14}$$

โดยการแทนอินทอกรัลด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \left[f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)\right]\Delta x$$

เนื่องจาก $f=2(y')^2+7y+9$

แล้ว
$$\begin{aligned}P(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) &= \Big[\left[2(y'(0))^2+7y_0+9\right]+\left[2(y'(0.14))^2+7y_1+9\right]\\ &+\left[2(y'(0.28))^2+7y_2+9\right]+\left[2(y'(0.42))^2+7y_3+9\right]\\ &+\left[2(y'(0.56))^2+7y_4+9\right]+\left[2(y'(0.7))^2+7y_5+9\right]\\ &+\left[2(y'(0.84))^2+7y_6+9\right]\Big]\Delta x\\ &=\Bigg[\left[2\left(\frac{y_1}{0.14}\right)^2+9\right]+\left[2\left(\frac{y_2-y_1}{0.14}\right)^2+7y_1+9\right]\\ &+\left[2\left(\frac{y_3-y_2}{0.14}\right)^2+7y_2+9\right]+\left[2\left(\frac{y_4-y_3}{0.14}\right)^2+7y_3+9\right]\\ &+\left[2\left(\frac{y_5-y_4}{0.14}\right)^2+7y_4+9\right]+\left[2\left(\frac{y_6-y_5}{0.14}\right)^2+7y_5+9\right]\\ &+\left[\frac{-y_6}{0.14}\right]^2+7y_6+9\Bigg]0.14\end{aligned}$$

และอาจจะมีเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสุดขีดคือ $\dfrac{\partial P}{\partial y_i} = 0$

ต่อไปจะได้ระบบสมการเพื่อหาค่า $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, y_5, y_6$ โดย

$$\frac{1}{0.14}\frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{y_1}{0.0049} - \frac{y_2 - y_1}{0.0049} + 7 = 0$$

$$\frac{1}{0.14}\frac{\partial P}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{0.0049} - \frac{y_3 - y_2}{0.0049} + 7 = 0$$

$$\frac{1}{0.14}\frac{\partial P}{\partial y_3} = \frac{y_3 - y_2}{0.0049} - \frac{y_4 - y_3}{0.0049} + 7 = 0$$

$$\frac{1}{0.14}\frac{\partial P}{\partial y_4} = \frac{y_4 - y_3}{0.0049} - \frac{y_5 - y_4}{0.0049} + 7 = 0$$

$$\frac{1}{0.14}\frac{\partial P}{\partial y_5} = \frac{y_5 - y_4}{0.0049} - \frac{y_6 - y_5}{0.0049} + 7 = 0$$

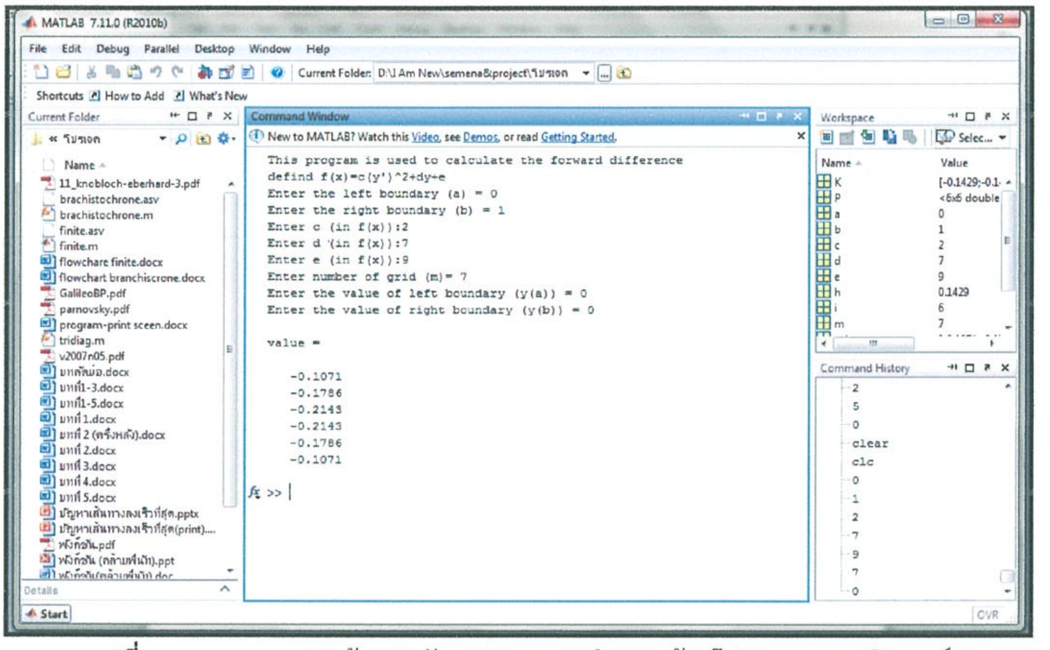
$$\frac{1}{0.14}\frac{\partial P}{\partial y_6} = \frac{y_6 - y_5}{0.0049} - \frac{y_6}{0.0049} + 7 = 0$$

หรือ

$$\begin{aligned}
2y_1 - y_2 \qquad\qquad\qquad &= -0.0343 \\
-y_1 + 2y_2 - y_3 \qquad\qquad &= -0.0343 \\
-y_1 + 2y_2 - y_3 \qquad\qquad &= -0.0343 \\
-y_2 + 2y_3 - y_4 \qquad &= -0.0343 \\
-y_3 + 2y_4 - y_5 \quad &= -0.0343 \\
-y_4 + 2y_5 - y_6 &= -0.0343 \\
-y_5 + 2y_6 &= -0.0343
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y_1 = -0.1029,\ y_2 = -0.1715,\ y_3 = -0.2058,\ y_4 = -0.2058,$
$y_5 = -0.1715,\ y_6 = -0.1029$ □

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.12 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในการหาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลตัวอย่างที่ 4

4.6.5 ตัวอย่างที่ 5 หาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

$$J[y]=\int_0^8\left[7(y')^2+2y+4\right]dx$$

เมื่อ $y(0)=y(8)=0$

__วิธีทำ__ ให้ $\Delta x=\dfrac{8-0}{3}=2.67$ และให้

$$y_0=y(0)=0, y_1=y(2.67), y_2=(5.34), y_3=y(8)=0$$

จากสูตรการประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า

$$y_k'=y'(x_k)\approx\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}$$

ดังนั้น

$$y'(0)=\frac{y_1-0}{2.67}$$

$$y'(2.67)=\frac{y_2-y_1}{2.67}$$

$$y'(5.34)=\frac{y_3-y_2}{2.67}$$

โดยการแทนอินทิกรัลด้วยสูตรสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \left[f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)\right]\triangle x$$

เนื่องจาก $f = 7\left(y'\right)^2 + 2y + 4$

แล้ว $P\left(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\right) = \left[\left[7y'(0)^2 + 2y_0 + 4\right] + \left[7\left(y'(2.67)\right)^2 + 2y_1 + 4\right]\right.$

$$\left. + \left[7\left(y'(5.34)\right)^2 + 2y_2 + 4\right]\right]\Delta x$$

$$= \left[\left[7\left(\frac{y_1}{2.67}\right)^2 + 4\right] + \left[7\left(\frac{y_2 - y_1}{2.67}\right)^2 + 2y_1 + 4\right]\right.$$

$$\left. + \left[7\left(\frac{y_3 - y_2}{2.67}\right)^2 + 2y_2 + 4\right]\right]2.67$$

และอาจจะมีเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสุดขีด คือ $\dfrac{\partial P}{\partial y_i} = 0$

ต่อไปจะได้ระบบสมการเพื่อหาค่า y_1, y_2 โดย

$$\frac{1}{2.67}\frac{\partial P}{\partial y_1} = \frac{y_1}{0.51} - \frac{y_2 - y_1}{0.51} + 2 = 0$$

$$\frac{1}{2.67}\frac{\partial P}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{0.51} - \frac{y_3 - y_2}{0.51} + 2 = 0$$

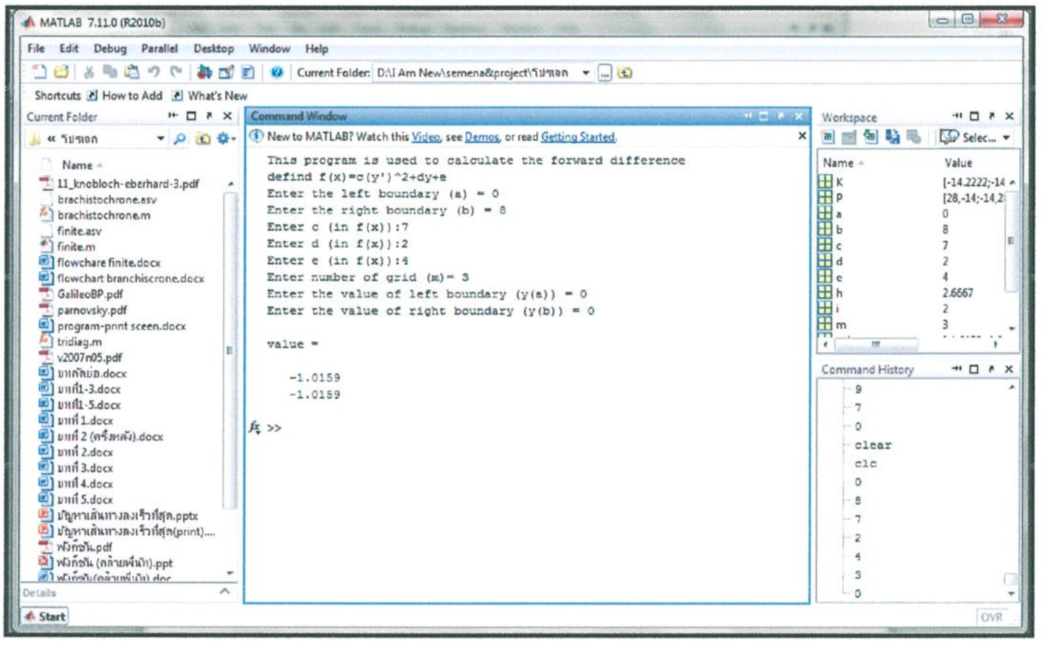
หรือ

$$2y_1 - y_2 = -1.02$$

$$-y_1 + 2y_2 = -1.02$$

ดังนั้น $y_1 = -1.02,\ y_2 = -1.02$ □

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.13 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาค่าประมาณของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลตัวอย่างที่ 5

4.7 ตารางการเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณโดยการวิเคราะห์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับ การหาผลเฉลยโดยใช้ผลต่างจำกัด

ตัวอย่าง	ค่าจากการคำนวณโดยการวิเคราะห์	ค่าจากการคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์
4.6.1	$y_1 = -0.16, y_2 = -0.24,$ $y_3 = -0.24, y_4 = -0.16$	$y_1 = -0.16, y_2 = -0.24,$ $y_3 = -0.24, y_4 = -0.16$
4.6.2	$y_1 = -0.48, y_2 = -0.72,$ $y_3 = -0.72, y_4 = -0.48$	$y_1 = -0.48, y_2 = -0.72,$ $y_3 = -0.72, y_4 = -0.48$
4.6.3	$y_1 = -5.76, y_2 = -8.64,$ $y_3 = -8.64, y_4 = -5.76$	$y_1 = -5.76, y_2 = -8.64,$ $y_3 = -8.64, y_4 = -5.76$
4.6.4	$y_1 = -0.1029, y_2 = -0.1715,$ $y_3 = -0.2058, y_4 = -0.2058,$ $y_5 = -0.1715, y_6 = -0.1029$	$y_1 = -0.1071, y_2 = -0.1786,$ $y_3 = -0.2143, y_4 = -0.2143,$ $y_5 = -0.1786, y_6 = -0.1071$
4.6.5	$y_1 = -1.02, y_2 = -1.02$	$y_1 = -1.0159, y_2 = -1.0159$

ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณโดยการวิเคราะห์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์การหาผลเฉลยโดยใช้ผลต่างจำกัด

จากตารางที่ 4.2 การเปรียบเทียบระหว่างการวิเคราะห์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการหาผลเฉลยโดยใช้ผลต่างจำกัด จะสังเกตเห็นว่า เมื่อคำนวณโดยการวิเคราะห์ ค่าที่ได้จะมีความแตกต่างเล็กน้อยกับการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งในความเป็นจริงแล้วค่าที่ได้จากการคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะได้ค่าที่ละเอียด แม่นยำมากกว่า และมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการคำนวณจากการวิเคราะห์ เพราะถ้าเราพิจารณาทศนิยมตำแหน่งมากขึ้น การคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะให้ค่าที่ละเอียดกว่า

4.8 ตัวอย่างการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด

4.8.1 ตัวอย่างที่ 1 หาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด โดยที่ $A:(0,0)$ ไป $B:(5,-5)$

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

แทนลงใน $T=\sqrt{\dfrac{R}{9.8}}\,\theta_1$

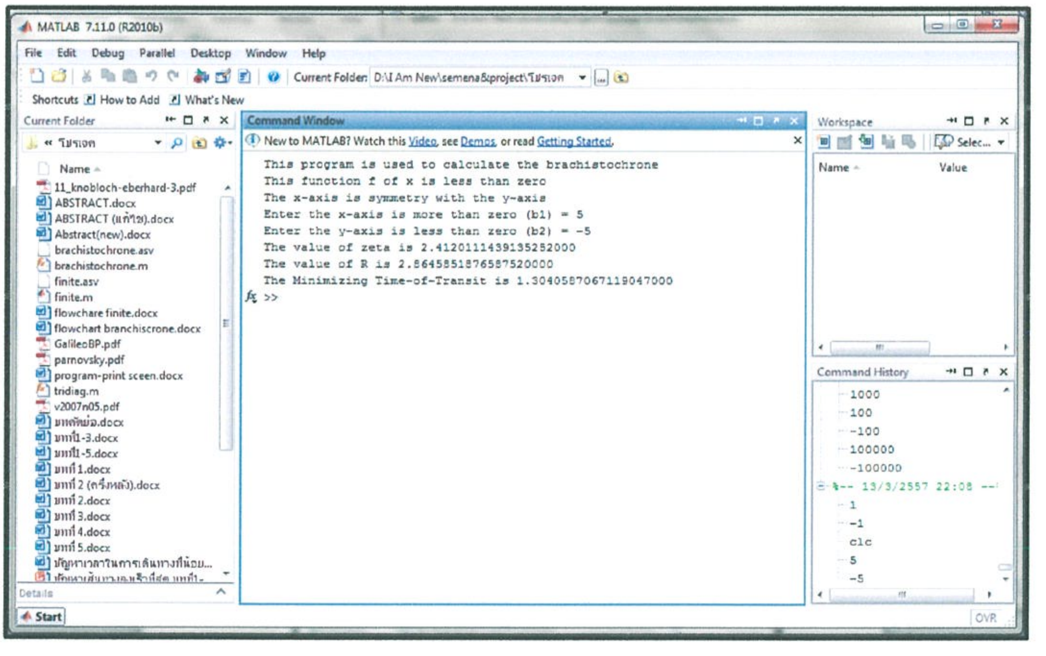
โดยที่ θ_1 คือ $\dfrac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\dfrac{b_1}{b_2}=1$ และ $R=\dfrac{-b_2}{1-\cos\theta_1}$

คำนวณ θ_1 โดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงในบทที่ 3 โดยที่ $b_1=5$ และ $b_2=-5$ ดังนั้น $\theta_1=2.4120$

คำนวณ R โดยการแทนค่า $b_2=-5$ และ $\theta_1=2.4120$ ดังนั้น $R=2.8646$

ดังนั้น $T=1.3041$

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.14 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด ตัวอย่างที่ 1

4.8.2 ตัวอย่างที่ 2 หาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด โดยที่ $A:(0,0)$ ไป $B:(13,-13)$

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

แทนลงใน $T=\sqrt{\dfrac{R}{9.8}}\theta_1$

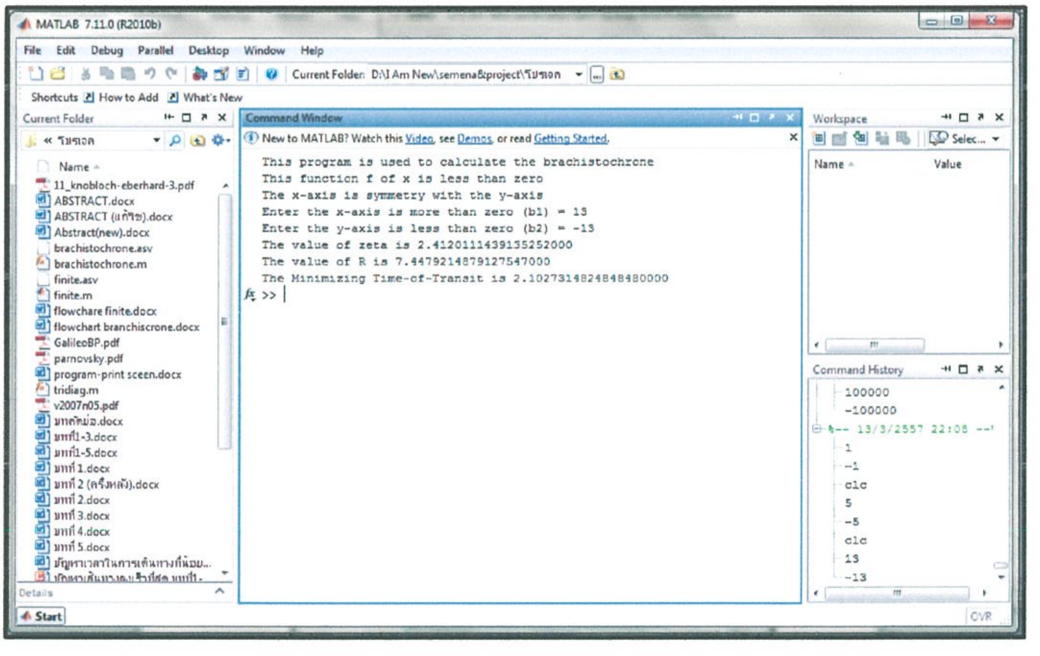
โดยที่ θ_1 คือ $\dfrac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\dfrac{b_1}{b_2}=1$ และ $R=\dfrac{-b_2}{1-\cos\theta_1}$

คำนวณ θ_1 โดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงในบทที่ 3 โดยที่ $b_1=13$ และ $b_2=-13$ ดังนั้น $\theta_1=2.4120$

คำนวณ R โดยการแทนค่า $b_2=-13$ และ $\theta_1=2.4120$ ดังนั้น $R=7.4480$

ดังนั้น $T=2.1027$

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.15 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด ตัวอย่างที่ 2

4.8.3 ตัวอย่างที่ 3 หาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุดโดยที่ $A:(0,0)$ **ไป** $B:(9.8,-9.8)$

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

แทนลงใน $T=\sqrt{\dfrac{R}{9.8}}\,\theta_1$

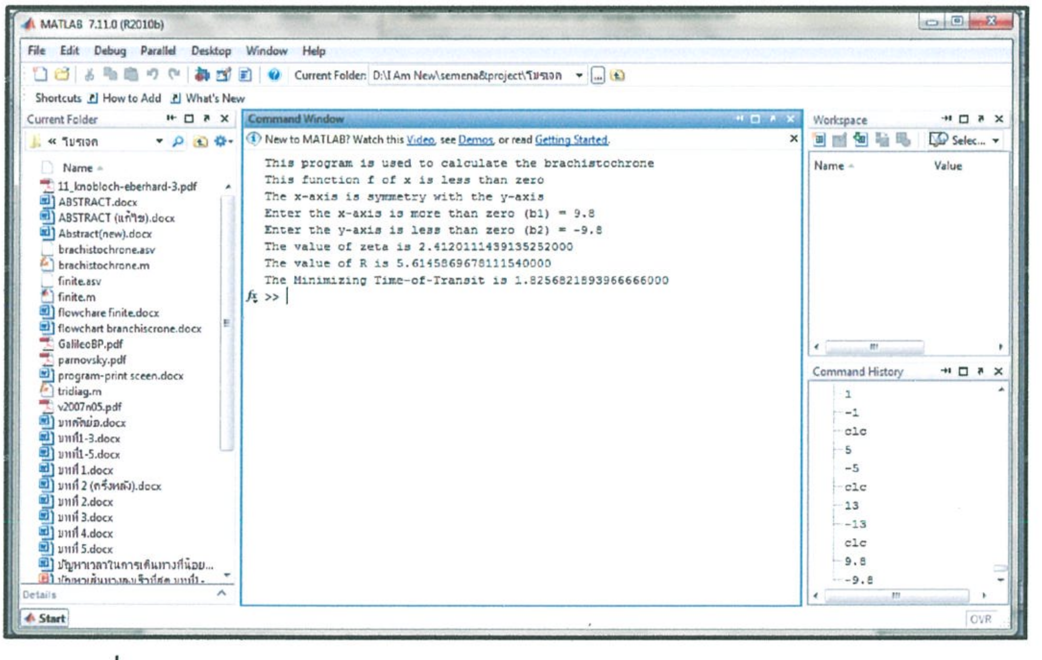
โดยที่ θ_1 คือ $\dfrac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\dfrac{b_1}{b_2}=1$ และ $R=\dfrac{-b_2}{1-\cos\theta_1}$

คำนวณ θ_1 โดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงในบทที่ 3 โดยที่ $b_1=9.8$ และ $b_2=-9.8$ ดังนั้น $\theta_1=2.4120$

คำนวณ R โดยการแทนค่า $b_2=-9.8$ และ $\theta_1=2.4120$ ดังนั้น $R=5.6146$

ดังนั้น $T=1.8257$

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.16 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด ตัวอย่างที่ 3

4.8.4 ตัวอย่างที่ 4 หาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด โดยที่ $A:(0,0)$ **ไป** $B:(24,-24)$

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

แทนลงใน $T=\sqrt{\dfrac{R}{9.8}}\,\theta_1$

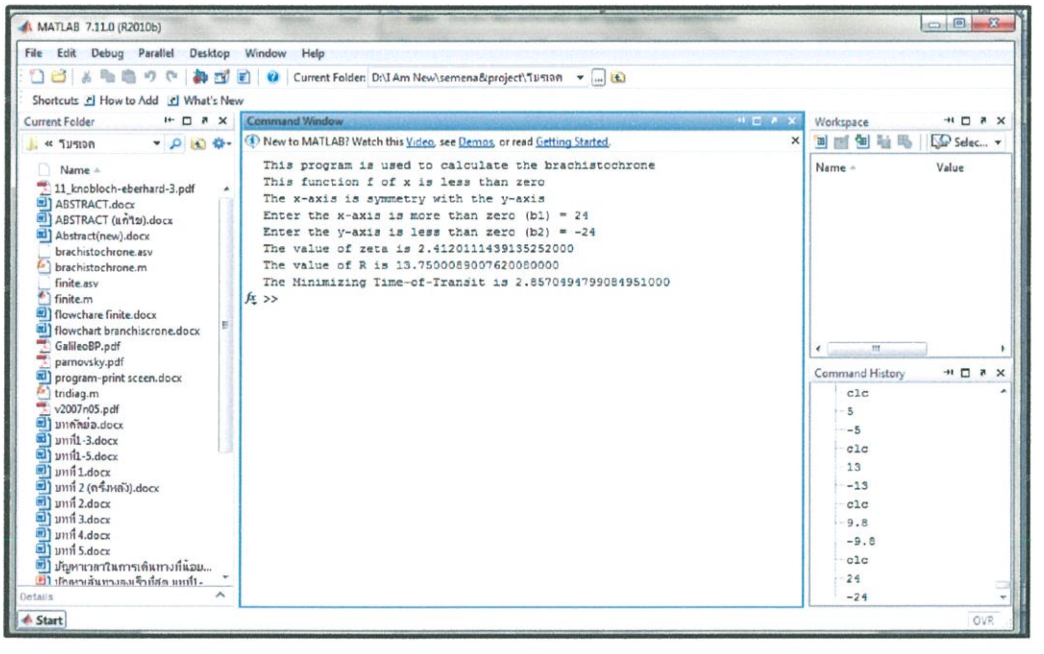
โดยที่ θ_1 คือ $\dfrac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\dfrac{b_1}{b_2}=1$ และ $R=\dfrac{-b_2}{1-\cos\theta_1}$

คำนวณ θ_1 โดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงในบทที่ 3 โดยที่ $b_1=24$ และ $b_2=-24$ ดังนั้น $\theta_1=2.4120$

คำนวณ R โดยการแทนค่า $b_2=-24$ และ $\theta_1=2.4120$ ดังนั้น $R=13.7501$

ดังนั้น $T=2.8571$

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.17 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด ตัวอย่างที่ 4

4.8.5 ตัวอย่างที่ 5 หาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด โดยที่ $A:(0,0)$ **ไป** $B:(29,-29)$

(1) การคำนวณโดยการวิเคราะห์

แทนลงใน $T=\sqrt{\frac{R}{9.8}}\theta_1$

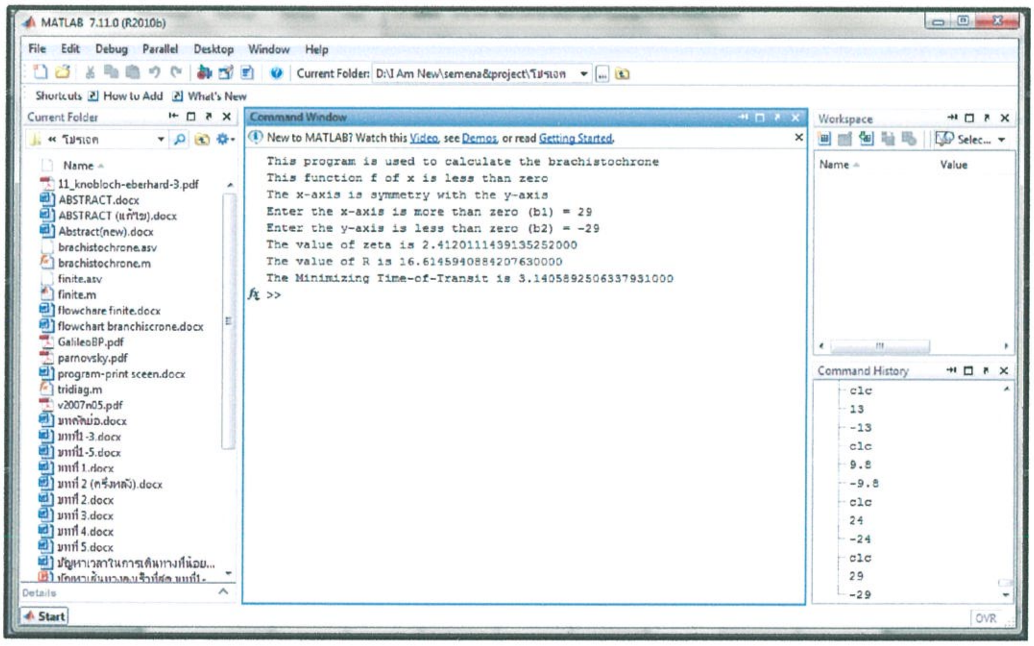
โดยที่ θ_1 คือ $\frac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\frac{b_1}{b_2}=1$ และ $R=\frac{-b_2}{1-\cos\theta_1}$

คำนวณ θ_1 โดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงในบทที่ 3 โดยที่ $b_1=29$ และ $b_2=-29$ ดังนั้น $\theta_1=2.4120$

คำนวณ R โดยการแทนค่า $b_2=-29$ และ $\theta_1=2.4120$ ดังนั้น $R=16.6147$

ดังนั้น $T=3.1406$

(2) โดยวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4.18 ภาพแสดงหน้าจอหลักแสดงผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด ตัวอย่างที่ 5

4.9 การเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณโดยการวิเคราะห์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์การหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด

ตัวอย่าง	ค่าจากการคำนวณโดยการวิเคราะห์			ค่าจากการคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์		
	θ_1	R	T	θ_1	R	T
4.7.1	2.4120	2.8646	1.3041	2.4120	2.8645	1.3040
4.7.2	2.4120	7.4480	2.1027	2.4120	7.4479	2.1027
4.7.3	2.4120	5.6146	1.8257	2.4120	5.6145	1.8256
4.7.4	2.4120	13.7501	2.5871	2.4120	13.7500	2.8570
4.7.5	2.4120	16.6147	3.1406	2.4120	16.6145	3.1405

ตารางที่ 4.3 ตารางแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณโดยการวิเคราะห์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์การหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด

จากตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณโดยการวิเคราะห์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ของการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด สังเกตเห็นว่า ค่าที่คำนวณโดยการวิเคราะห์จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการคำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่ในการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในวิธีนี้พิจารณาทศนิยมเพียง 4 ตำแหน่ง ทำให้ไม่สามารถเห็นค่าที่ละเอียดได้ชัดเจน แต่ในความเป็นจริงค่าที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะมีความแม่นยำมากกว่าค่าที่ได้จากการคำนวณโดยการวิเคราะห์

บทที่ 5
สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานวิจัย

5.1.1. จากผลงานวิจัยครั้งนี้ สามารถนำผลต่างสืบเนื่อง มาใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันนอลโดยตรง ซึ่งการหาผลเฉลยนี้ จะหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันนอล คือ

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข

$$y(a)=A,\ y(b)=B$$

โดยที่สมการจะอยู่ในรูปแบบ $f(x)=(cy')^2+dy+e$ และประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง $y'(x)$ โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า และจากสมการ ทำให้ทราบว่า ค่าประมาณของปัญหาการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันนอลในการคำนวณโดยการวิเคราะห์ และการคำนวณจากโปรแกรม มีค่าใกล้เคียงกัน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากไม่ได้พิจารณาโดยใช้ค่าผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่

5.1.2. จากผลงานวิจัยครั้งนี้ สามารถสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ ด้วยการคำนวณในบทที่ 3 ทำให้ได้สมการที่แทนเวลาในการเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด T โดยเริ่มต้นจากจุด $(0,0)$ ไปยัง ณ ตำแหน่งแกน (x,y) ใดๆ คือ

$$T=\sqrt{\frac{R}{9.8}}\,\theta_1$$

เมื่อ θ_1 คือ $\dfrac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\dfrac{b_1}{b_2}$ ในช่วง $(0,2\pi)$

R คือ $R=\dfrac{-b_2}{1-\cos\theta_1}$ ในช่วง $(0,2\pi)$

และจากสมการ ทำให้ได้เวลาที่การเคลื่อนที่ที่น้อยที่สุด โดยที่เราสามารถกำหนดระยะทางตามแนวแกน (x,y) โดยให้มีขนาดที่สมมาตรกัน และเคลื่อนที่ตามแรงโน้มถ่วงของโลก ทำให้เราทราบว่า ค่าของเวลาที่ได้จากสมการโดยการคำนวณโดยการวิเคราะห์ กับค่าของเวลาที่ได้จากสมการโดยการคำนวณจากโปรแกรมมีค่าใกล้เคียงกัน

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 จากการสร้างสมการในการคำนวณได้ศึกษาการหาผลต่างสืบเนื่อง ในกรณีที่สมการอยู่ในรูปแบบ $f(x)=(cy')^2+dy+e$ และเป็นการคำนวณแบบผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ซึ่งผู้วิจัยไม่ได้พิจารณากรณีที่สมการอยู่ในรูปแบบอื่นๆ หรือการคำนวณแบบผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง จึงทำให้การคำนวณนี้มีรูปแบบที่ไม่ครอบคลุมในทุกกรณี หรืออาจจะทำให้ในบางกรณีมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ดังนั้น จึงควรมีการศึกษากรณีอื่นๆ เพื่อวิเคราะห์แนวทางในการพัฒนาโปรแกรมการคำนวณในอนาคตต่อไป

5.2.2 จากการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่น้อยที่สุด จะสามารถหาได้เพียงแค่แนวแกน (x,y) มีขนาดที่สมมาตรกัน จึงทำให้การคำนวณนี้มีรูปแบบที่ไม่ครอบคลุมทุกกรณี ดังนั้น จึงควรมีการศึกษากรณีอื่นๆ เพื่อวิเคราะห์แนวทางในการพัฒนาโปรแกรมการคำนวณในอนาคตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] คู่มือการติดตั้ง MATLAB. (5 มีนาคม 2557). Available URL : http://www.icit.kmutnb.ac.th/KM/doc/km_manual_MATLAB_Client.pdf

[2] ดร.ปริญญา สงวนสัตย์ (2553). MATLAB ฉบับสมบูรณ์. พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรี:บริษัท ไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด

[3] ผศ.ดร.กาญจนา คำนึงกิจ. (2554). การวิเคราะห์เชิงตัวเลข. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ:โรงพิมพ์ หจก.มีน เซอร์วิส ซัพพลาย

[4] Douglas S. Shafer. (2007). The branchist0chrone:Historical Gateway to the calculus of Variations, MATerials MATem`atics, Volum 2007, treball no. 5, 14 pp. ISSN: 1887-1097

ภาคผนวก

การเตรียมพร้อมก่อนการใช้โปรแกรม MATLAB แบบ Concurrent Network Installation(Client)

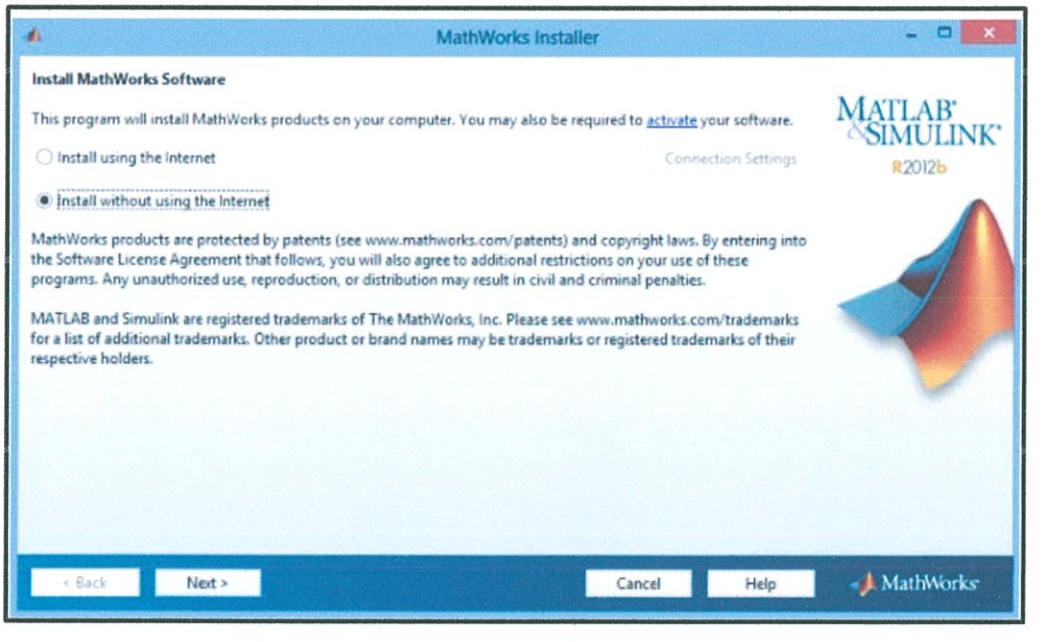
การติดตั้งโปรแกรมที่เครื่อง client

1. ให้ Double Click file setup.exe

(For Win32 CD Drive:\setup, For Win64 CD Drive:\bin\Win64\setup)

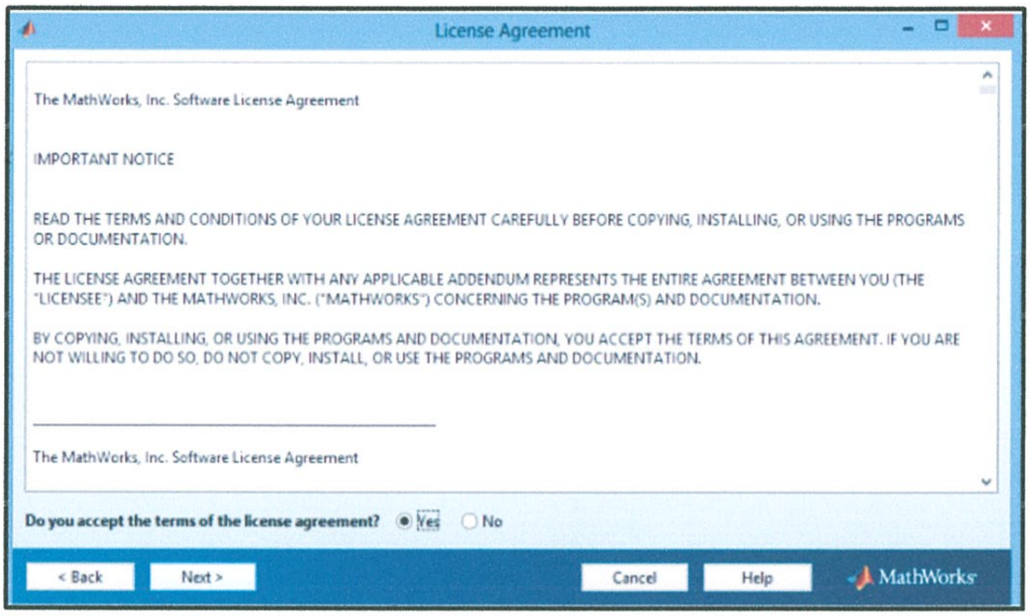
รูปที่ 1 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

2. หลังจากนั้นให้เลือก Install without using the Internet หลังจากนั้นให้กด Next



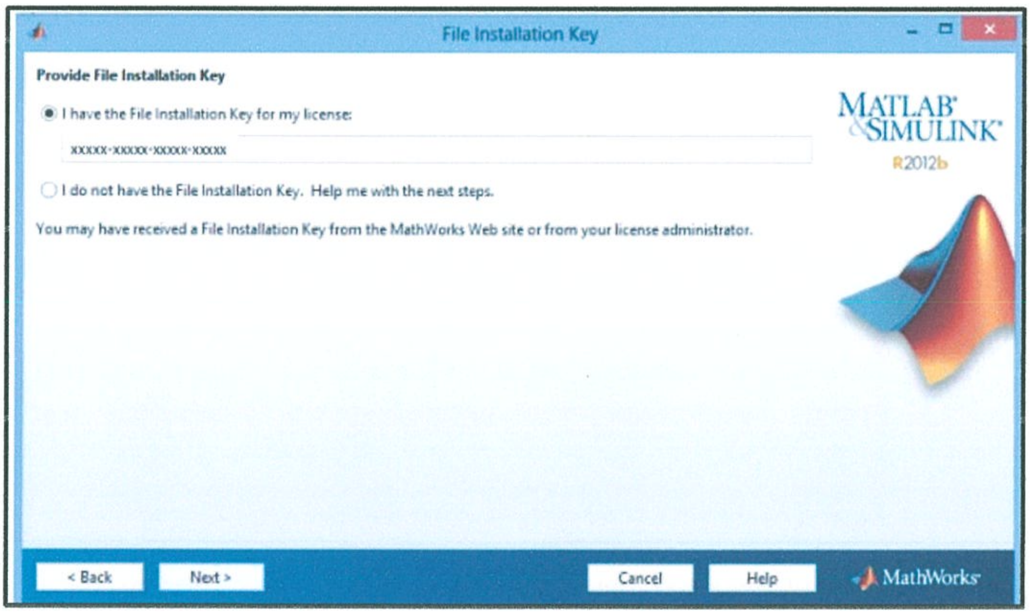
รูปที่ 2 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

3. ให้ ตอบ Yes ใน หน้าต่าง License Agreement หลังจากนั้นให้กด Next



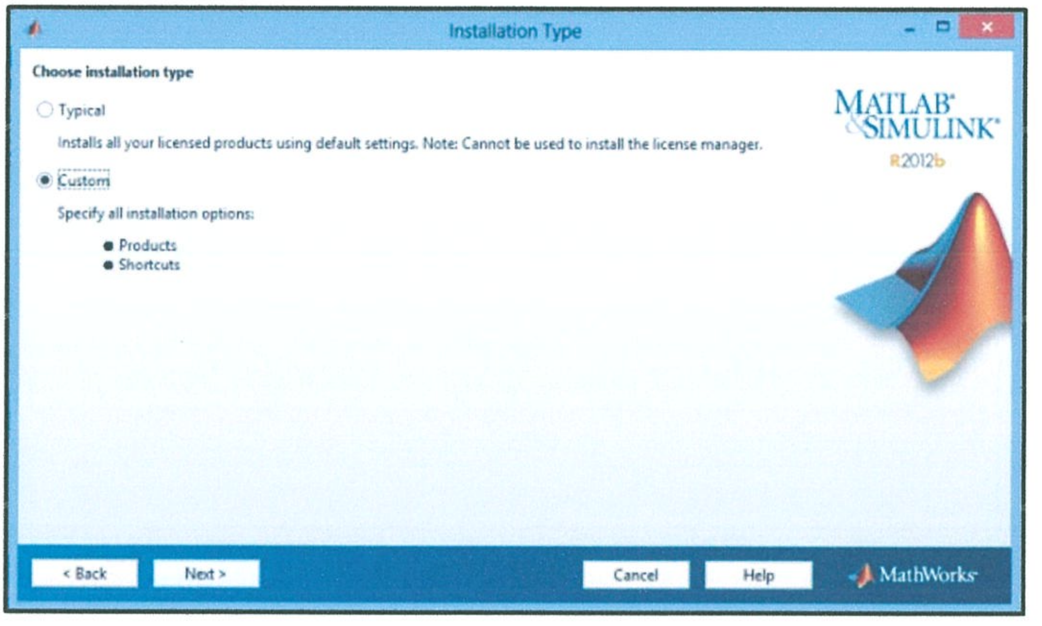
รูปที่ 3 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

4. เลือก I have the File Installation Key for my license แล้วป้อนตัวเลข Installation Key ที่ใน file FIK.txt ที่ได้รับทาง email ใส่ในช่องว่าง ดังรูป หลังจากนั้นให้กด Next



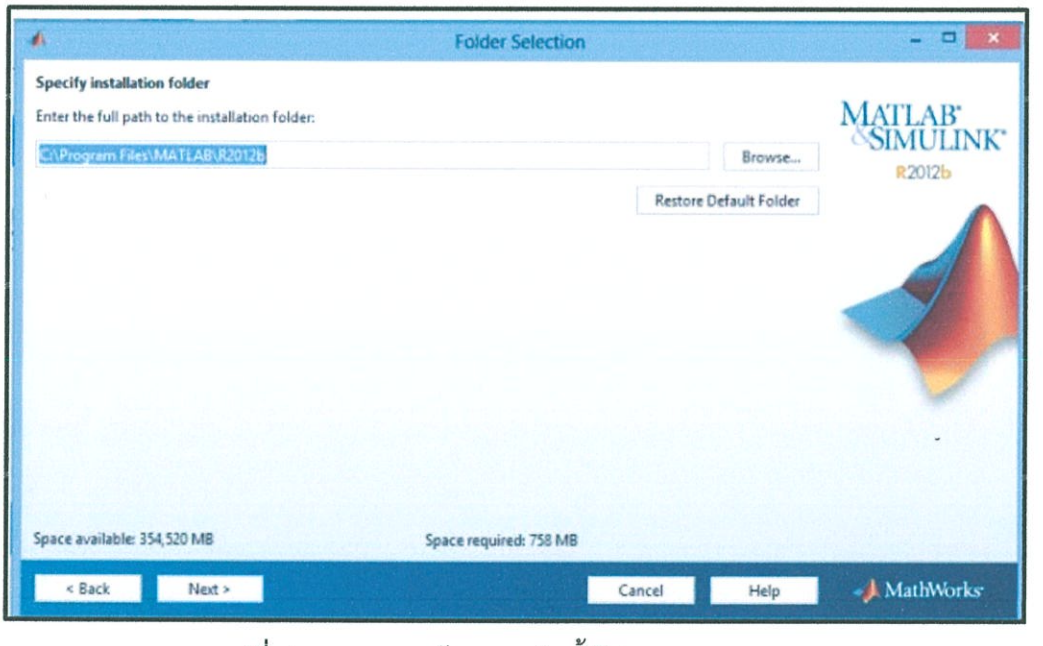
รูปที่ 4 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

5. กดเลือกการติดตั้งแบบ Custom แล้วทำการกด Next



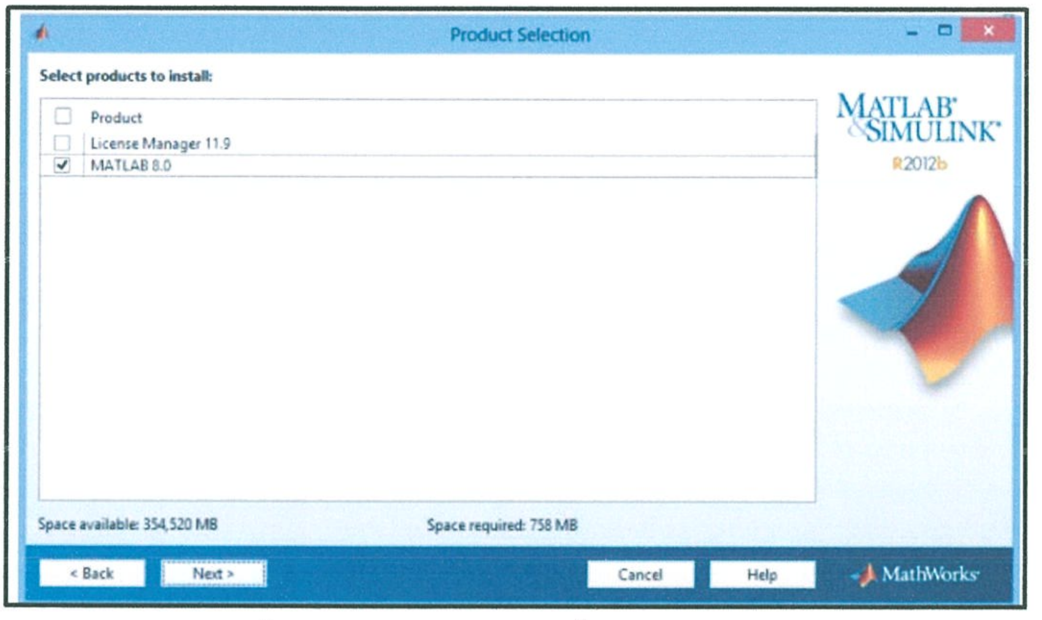
รูปที่ 5 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

6. ให้ทำการ เลือก folder เพื่อติดตั้งโปรแกรม ดังรูป แล้วทำการกด Next



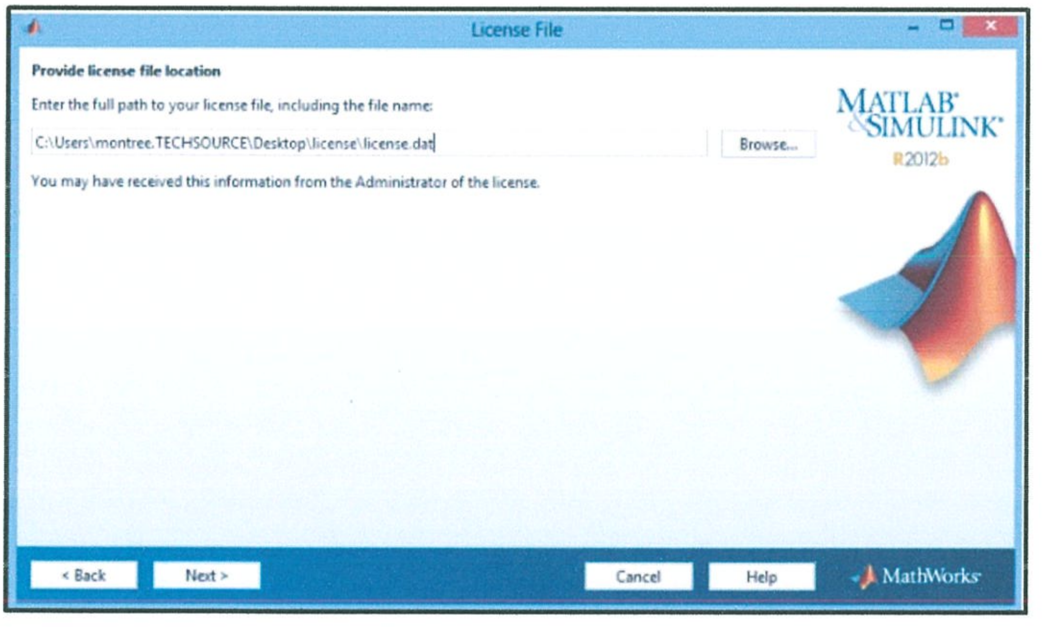
รูปที่ 6 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

7. ให้ทำการเลือกติดตั้ง MATLAB และ toolboxที่ต้องการติดตั้ง (อย่าเลือก License Manager) หลังจากนั้นกดปุ่ม Next



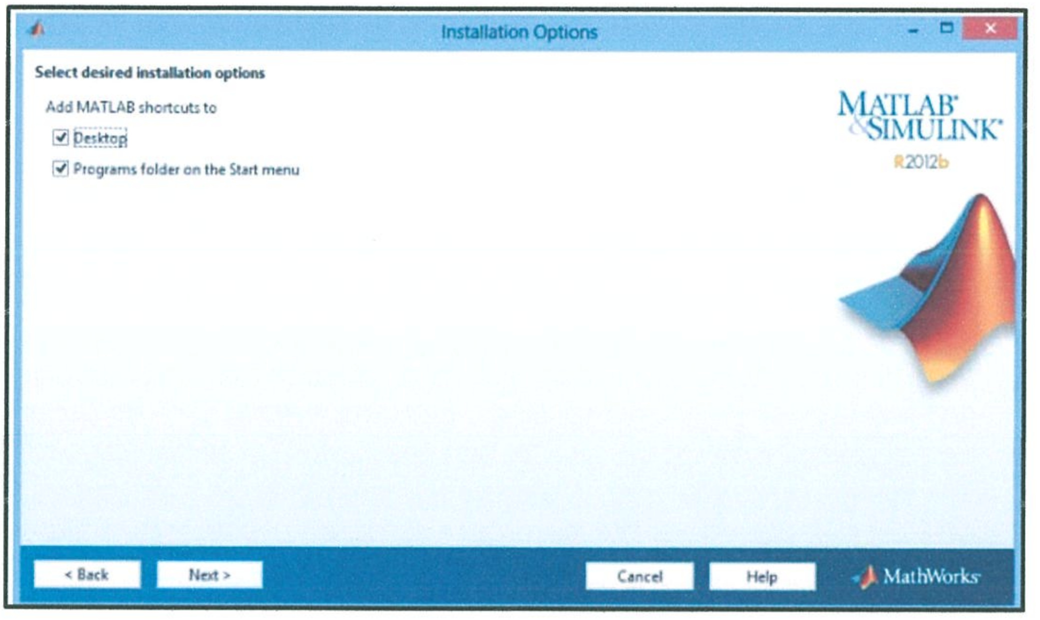
รูปที่ 7 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

8. หลังจากนั้นให้ทำการ Browse License.dat file ที่ได้รับจากเครื่อง server (ซึ่งจะอยู่ที่ CD Drive:\License file\License.dat) หลังจากนั้นให้ทำการกด Next



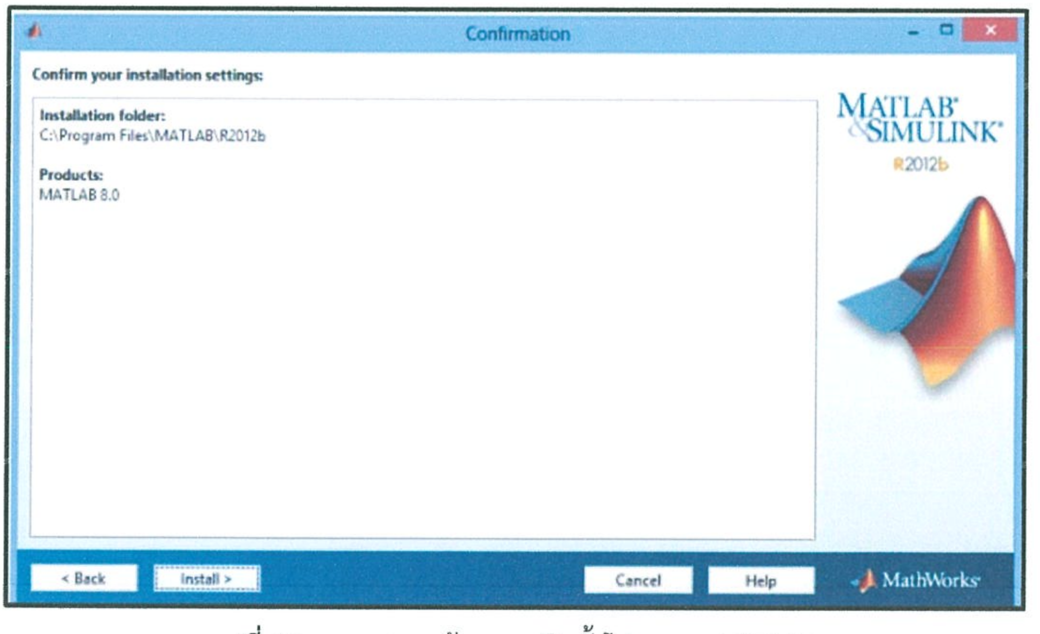
รูปที่ 8 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

9. ให้ทำการเลือก location ของไอคอน MATLAB



รูปที่ 9 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

10. ให้กด Install เพื่อ ทำการติดตั้งโปรแกรม



รูปที่ 10 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB

11. เมื่อทำการติดตั้งเสร็จให้กดปุ่ม Finish

รูปที่ 11 ภาพแสดงหน้าจอการติดตั้งโปรแกรม MATLAB