

การใช้กาลมานฟิลเตอร์สำหรับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์

DEMAND FORECASTING FOR TELEPHONE LINE USING
KALMAN FILTER

ชัยรัตน์ วงษ์สุวรรณ
CHAIRAT WONGSUWAN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของกรณีศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2549

ISBN 974-15-2231-2

การใช้กาลมานฟิลเตอร์สำหรับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์

DEMAND FORECASTING FOR TELEPHONE LINE USING
KALMAN FILTER

ชัยรัตน์ วงษ์สุวรรณ

CHAIRAT WONGSUWAN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2549

ISBN 974-15-2231-2

**DEMAND FORECASTING FOR TELEPHONE LINE USING
KALMAN FILTER**

CHAIRAT WONGSUWAN

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULLFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATION ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT' S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2006

ISBN 974-15-2231-2

COPYRIGHT2006

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การใช้กาลมานฟิลเตอร์สำหรับการพยากรณ์ความต้องการใช้งาน กลุ่มสายโทรศัพท์
นักศึกษา	นายชัยรัตน์ วงษ์สุวรรณ
รหัสประจำตัว	44061728
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2549
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอถึงวิธีการพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์โดยการใช้ตัวกรองกาลมาน ตัวกรองกาลมานเป็นวิธีซึ่งให้ผลการคำนวณที่ดีในเชิงกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก สำหรับการนำมาใช้เพื่อการประมาณการ เพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการดังกล่าว เราจึงใช้วิธีนี้เพื่อการพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ทั้งในเขตกรุงเทพและแบบทั่วประเทศ ข้อมูลที่นำมาใช้ในการพยากรณ์ประกอบด้วยผลการพยากรณ์ความต้องการในอดีตและข้อมูลจำนวนประชากรระหว่างปี พ.ศ. 2497-2546 (สำหรับเขตกรุงเทพ) และ พ.ศ.2534-2553 (สำหรับทั่วประเทศ) จากนั้นจึงนำผลการทดลองวิธีใหม่นี้ไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากกระบวนการวิเคราะห์ทางสถิติ ซึ่งพบว่าวิธีที่นำเสนอนี้ให้ผลที่มีประสิทธิภาพกว่ามาก อีกทั้งยังใช้การคำนวณที่เรียบง่ายและรวดเร็วกว่า

Thesis Title	Demand Forecasting for Telephone line using Kalman filter.
Student	Mr. Chairat Wongsuwan
Student ID.	44061728
Degree	Master
Programme	Telecommunication Engineering
Year	2006
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr .Paramote Weardkien

ABSTRACT

This paper presents a method of demand forecasting on telephone usage which is based on kalman filtering. The Kalman filter is a method that provides an efficient computational solution in least square sense. It is thus received much attention for estimation purposed technique, it is used to predict the telephone usage demand of Thailand nationwide and only in Bangkok. The data employed in the forecasting process are the former forecasted demand and the number of population during 1954-2003 (for Bangkok area) and 1991-2010 (for nationwide). The result of this method is compared with that of statistical analysis method. It is found that the proposed technique is superior to statistical methods. Furthermore, it employs a simple mathematical process with less computational consumption.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างดีด้วยคำแนะนำจากท่านอาจารย์ รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน เป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความรู้ ความมีจริยธรรม และคุณธรรมที่ท่านได้ประสิทธิ์ประสาทให้แก่ศิษย์ทั้งทางตรงและทางอ้อมตลอดเวลาที่ศึกษาอยู่กับท่าน ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะเป็นแนวทางและแบบอย่างในการทำงาน และการดำเนินชีวิตต่อผู้วิจัยต่อไปในอนาคต

ขอขอบพระคุณ น้อง ๆ เพื่อน ๆ ที่ได้ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือต่อผู้วิจัยมาโดยตลอด ระยะเวลาการศึกษา

ขอขอบพระคุณ คุณแม่ พี่ น้อง และหลาน ที่ได้ให้ความช่วยเหลือทั้งกำลังกายและกำลังใจแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด และขอขอบคุณภรรยา ที่เป็นกำลังใจอันยิ่งใหญ่

ขอขอบคุณบัณฑิตวิทยาลัยที่ได้มอบความเมตตา และความยุติธรรมแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด การศึกษา

และสุดท้ายขอขอบพระคุณทุก ๆ สรรพสิ่งด้วยดวงจิตอันสุดซึ้ง

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้เขียนขออุทิศให้กับบิดาผู้ซึ่งได้จาก
ลูกไปอย่างไม่มีวันกลับ

ชัยรัตน์ วงษ์สุวรรณ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญภาพ.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	2
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	3
1.3 สมมุติฐานของการศึกษา.....	3
1.4 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	3
1.4.1 การถดถอยเชิงเส้นแบบง่าย.....	4
1.4.2 การประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุด.....	4
1.5 ขอบเขตในการทำวิทยานิพนธ์.....	5
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	5
บทที่ 2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.1 เอกสารและผลงานที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองคาถมาน.....	8
2.2 ระเบียบวิธีการพยากรณ์.....	14
2.2.1 เทคนิคการทำให้เรียบ.....	14
2.2.2 การพยากรณ์แบบปรับได้.....	17
2.2.3 อนุกรมเวลาแบบคลาสสิก.....	18
2.2.4 การวิเคราะห์การถดถอย.....	19
2.2.5 การพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ.....	19
2.2.6 อนุกรมเวลา Box-Jenkin.....	20
2.3 เทคนิคการทำให้เรียบ.....	21
2.3.1 ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่.....	21
2.3.2 ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้น.....	29

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.3.3 ตัวแบบฤดูกาล.....	48
2.4 การพยากรณ์แบบปรับได้.....	55
2.4.1 การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบ.....	55
2.4.2 วิธีการพยากรณ์แบบปรับได้ที่ปรับปรุงใหม่.....	65
2.4.3 การพยากรณ์แบบการกรองที่ปรับได้.....	67
บทที่ 3 การวิเคราะห์ความถดถอยและสหสัมพันธ์อย่างง่าย.....	70
3.1 การวิเคราะห์ความถดถอย.....	71
3.2 การวิเคราะห์ความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย.....	72
3.3 สมมุติฐานหรือเงื่อนไขการวิเคราะห์ความถดถอย.....	72
3.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการความถดถอย.....	73
3.4.1 การประมาณค่า β_0 และ β_1 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด.....	73
3.5 การประมาณค่าแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน.....	74
3.6 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์.....	75
3.7 แนวทางการประมาณค่าพารามิเตอร์.....	76
3.8 คุณสมบัติที่พึงปรารถนาของตัวประมาณ.....	79
3.9 ตัวประมาณไม่เอนเอียง.....	80
3.10 ตัวประมาณคงเส้นคงวา.....	82
3.11 ตัวประมาณที่มีความแปรปรวนต่ำสุด.....	84
3.12 วิธีหาตัวประมาณพารามิเตอร์.....	85
3.13 วิธีโมเมนต์.....	86
3.14 ปัญหาในการหาตัวประมาณแบบโมเมนต์.....	86
3.15 คุณสมบัติของตัวประมาณแบบโมเมนต์.....	87
3.16 วิธีภาวน่าจะเป็นสูงสุด.....	87
3.17 วิธีไล่กำลังสองต่ำสุด.....	92
3.18 วิธีของเบส์.....	93
3.19 วิธีมินิแมกซ์.....	94
3.20 วิธีไล่กำลังสองต่ำสุด.....	95

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ตัวทำนาย.....	96
4.1 กล่าวนำ.....	96
4.2 คีสมัททคาลมานฟ้ลเตอร้.....	96
4.2.1 การประมาณกระบวนการ.....	96
4.2.2 การค่านวมของคาลมานฟ้ลเตอร้.....	97
4.2.3 อ้ลกอริทมของค้สมัททคาลมานฟ้ลเตอร้.....	99
4.2.4 ตัวแปรฟ้ลเตอร้และการปรับแต่ง.....	102
บทที่ 5 ผลการว้จ้ย.....	104
บทที่ 6 สรूपผลการว้จ้ย.....	130
เอกสารอ้างอิง.....	132
ภาคผนวก.....	134
ภาคผนวก ก. ความรู้พื้นฐานของทฤษฎีระบบ.....	135
ภาคผนวก ข. สัญญาณสุ่ม.....	140
ภาคผนวก ค. บทพ้ลสูงน้.....	142
ภาคผนวก ง. Program Matlab.....	148
ภาคผนวก จ. ผลการว้เคราะห์ด้วยโปรแกรม SPSS.....	150
ภาคผนวก ฉ. ผลงานว้จ้ยที่ด้รับการตีพิมพ์.....	158
ประวัติผู้เขียน.....	164

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
5.1 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ทั้ง 3 วิธี กับปริมาณเลขหมายที่ติดตั้งจริง ระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	105
5.2 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งทั้ง 3 วิธี ระหว่างปี พ.ศ. 2535-2546.....	106
5.3 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ กับเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	107
5.4 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ทั้ง 3 วิธี ระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	108
5.5 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ กับเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	108
5.6 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์กับการพยากรณ์ เลขหมายติดตั้งทั้ง 3 วิธี ระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	109
5.7 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์จริง กับผลการพยากรณ์ในเขตกรุงเทพฯระหว่างปี พ.ศ.2498-2546.....	110
5.8 แสดงผลการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก.....	120
5.9 แสดงผลการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก โดยวิธีตัวกรองกาลมาน ระหว่างปี พ.ศ.2548-2554.....	122

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
3.1 ความสัมพันธ์ 2 ตัวแปรในรูปเชิงเส้น.....	71
3.2 แสดงค่า β_1 เมื่อ x และ y มีความสัมพันธ์ในรูปเส้นตรง.....	72
3.3 แสดงค่าคลาดเคลื่อน.....	74
3.4 แสดงค่าของ r มีค่า $-1 < r < 1$	76
4.1 การวัดค่าของสัญญาณระบบเชิงเส้นแบบเวลาไม่ต่อเนื่องเมื่อมีสัญญาณรบกวน เข้ามาเกี่ยวข้อง.....	96
4.2 การสร้างระบบจำลองมาเพื่อประมาณ χ_k	98
4.3 รูปแบบการทำงานของฟิลเตอร์แบบกาลมาน.....	100
4.4 การทำงานของกาลมานฟิลเตอร์.....	103
4.5 ความหมายของตัวแปรในสมการดิสครีตกาลมานฟิลเตอร์.....	103
5.1 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้ตู้สายโทรศัพท์ ระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	112
5.2 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้ตู้สายโทรศัพท์ ระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	112
5.3 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้ตู้สายโทรศัพท์ ในเขตกรุงเทพฯระหว่างปี พ.ศ.2498-2546.....	113
5.4 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริง ระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	113
5.5 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริง ระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	114
5.6 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบความต้องการใช้งานตู้สายโทรศัพท์กับเลขหมายติดตั้งจริง ระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	114
5.7 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างระหว่างความต้องการใช้โทรศัพท์ กับเลขหมายติดตั้งปี พ.ศ.2535-2546.....	115
5.8 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้ตู้สายโทรศัพท์ และเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	115
5.9 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการ ใช้ตู้สายโทรศัพท์และเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	116

สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
5.10 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ และเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	116
5.11 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ และเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	117
5.12 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ และเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2535-2546.....	117
5.13 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ และเลขหมายติดตั้งระหว่างปี พ.ศ.2547-2554.....	118
5.14 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดนครนายกกับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	123
5.15 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดปราจีนบุรีกับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	123
5.16 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดสระแก้วกับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	124
5.17 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดชลบุรีกับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	124
5.18 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดฉะเชิงเทรา กับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	125
5.19 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดระยองกับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	125
5.20 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดจันทบุรีกับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	126
5.21 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ ของจังหวัดตราดกับปริมาณเลขหมายโทรศัพท์ที่ติดตั้งจริง.....	126
5.22 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างเลขหมายติดตั้งจริงและการพยากรณ์ความต้องการ ใช้คู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออกเฉียง(micro).....	127
5.23 กราฟแสดงการเปรียบเทียบความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออกเฉียง ระดับจุลภาคและมหภาค.....	128

สารบัญญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
5.24 กราฟแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สาย โทรศัพท์ระดับมหภาคเมื่อเทียบกับเลขหมายที่ติดตั้งจริง.....	128
5.25 กราฟแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สาย โทรศัพท์ระดับจุลภาคเมื่อเทียบกับเลขหมายที่ติดตั้งจริง.....	129

บทที่ 1

บทนำ

จากการศึกษาแนวโน้มนโยบายเทคโนโลยีสารสนเทศแห่งชาตินั้น ทิศทางการเปลี่ยนแปลงของโลกจากยุคสังคมอุตสาหกรรม ไปสู่ยุคแห่งสังคมสารสนเทศ การพัฒนาการสื่อสาร ใน 10 ปีข้างหน้า ตามนโยบายสารสนเทศในการที่จะสร้างและเชื่อมต่อโครงข่ายสื่อสาร โทรคมนาคมให้ครอบคลุมทั้งประเทศทั้งสังคมเมือง และสังคมชนบท

ในการเข้าถึงอย่างเท่าเทียมกัน ความต้องการโทรศัพท์พื้นฐาน ขึ้นอยู่กับปัจจัยหลัก 2 ประการ คือ ปัจจัยทางเศรษฐกิจ และจำนวนประชากร ดังนั้น เมื่อรายได้ประชาชาติต่อหัวเพิ่มขึ้น ความต้องการโทรศัพท์ก็เพิ่มขึ้นเป็นเงาตามตัวด้วย โทรศัพท์พื้นฐานนับเป็นสาธารณูปโภคด้านการสื่อสารที่บ่งบอกถึง ระดับการพัฒนาของประเทศ โดยหากประเทศใดมีจำนวนโทรศัพท์ต่อหน่วยประชากรมาก มักจะเป็นประเทศที่มีระดับการพัฒนาและคุณภาพชีวิตสูงกว่าประเทศที่มีจำนวนโทรศัพท์ ต่อหน่วยประชากรที่ต่ำกว่า

ในปัจจุบันโทรศัพท์มือถือเป็นเครื่องมือในการติดต่อสื่อสารระหว่างบุคคล 2 ฝ่ายเท่านั้น แต่ยังเป็นสื่อในการนำข้อมูล ภาพ เสียง ที่มีประสิทธิภาพด้วยโครงข่ายใยแก้วนำแสง (OPTICAL FIBER) ซึ่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการพัฒนาประเทศได้อย่างมากมาย สำหรับในด้านการเติบโตของโทรศัพท์พื้นฐานประเทศไทยต้องใช้เวลามากหลายสิบปี ในการติดตั้งโทรศัพท์ทั่วประเทศ ประมาณ 2 ล้านเลขหมาย แต่หลังจากที่รัฐบาลได้ให้สัมปทานแก่เอกชนในการติดตั้งโทรศัพท์จำนวน 3 ล้านเลขหมายในปี 2535 และเพิ่มขึ้นอีก 1.1 ล้านเลขหมายในปี 2538 โดยต้องติดตั้งให้แล้วเสร็จภายในเดือนกันยายน 2539 ทำให้ในปี 2539 จะมีโทรศัพท์เพิ่มขึ้นถึง 4.1 ล้านเลขหมายภายในระยะเวลาเพียง 4 ปี เมื่อรวมกับโทรศัพท์ที่ติดตั้งโดย ทศท. เองประมาณ 2 ล้านเลขหมายแล้ว จะมีจำนวนโทรศัพท์ทั้งสิ้นประมาณ 6.7 ล้านเลขหมาย ณ สิ้นปี 2539 เพิ่มขึ้นเฉลี่ยร้อยละ 23 ต่อปี คิดเป็นจำนวน 11.17 เลขหมายต่อประชากร 100 คน ตรงตามเป้าหมายของแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติฉบับที่ 7 ที่กำหนดไว้ว่า เมื่อสิ้นสุดแผนฯ 7 จะต้องมียอดเลขหมายโทรศัพท์ 10 เลขหมาย ต่อประชากร 100 คน ในปี 2539 จากการที่คาดว่าจะมีจำนวนโทรศัพท์พื้นฐานที่มีผู้เช่าประมาณ 4 ล้านเลขหมาย เพิ่มขึ้นจากปีก่อน ร้อยละ 22 ในขณะที่อัตราค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ยังไม่เปลี่ยนแปลง จึงทำให้มูลค่าตลาดรวมในปี 2539 อยู่ที่ประมาณ 64,500 ล้านบาท เพิ่มขึ้นในอัตราชะลอจากปีก่อนเล็กน้อยเป็นร้อยละ 42 เนื่องจากในปี 2538 ปริมาณโทรศัพท์ที่มีผู้เช่าเพิ่มขึ้นในอัตราสูงมากจากภาวะการผันผวนของค่าเงินบาทที่อ่อนค่าลง ประกอบกับมีโครงการอสังหาริมทรัพย์แล้วเสร็จเป็นจำนวนมาก โดยเฉพาะคอนโดมิเนียมและบ้านจัดสรร ขณะที่ปี 2539 ปริมาณความขาดแคลนลดลงและยอดขายอสังหาริมทรัพย์ตกต่ำ ทำให้ปริมาณโทรศัพท์พื้นฐานที่ผู้เช่าเติบโตในอัตราชะลอด้วย

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทฤษฎีการประมาณค่าเข้ามามีบทบาทสำคัญ แบบจำลองกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องสำหรับกระบวนการคาดคะเนที่ให้ผลการคาดคะเนที่มีประสิทธิภาพยังมีไม่มากนัก ซึ่งอาจเป็นผลเนื่องมาจากความยากในการสร้างแบบจำลอง และการประมาณค่าพารามิเตอร์ในระบบเทคนิคการคาดคะเนความต้องการสมัยใหม่จึงเป็นเทคนิคที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองระบบ

เทคนิคการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ที่อาศัยแบบจำลองส่วนใหญ่มักมีการสมมติค่าของตัวแปรสถานะที่เหมาะสมทั้งหมดในระบบที่สนใจ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติส่วนใหญ่มันเป็นไปได้ที่จะทำการวัดค่าตัวแปรสถานะได้ทั้งหมด และยิ่งไปกว่านั้นค่าที่ได้จากการวัดมักจะมีสัญญาณรบกวนแบบสุ่มและ/หรืออาจเกิดความผิดพลาดขึ้นได้ นอกจากนี้แบบจำลองจริงมักจะไม่ทราบและต้องพบกับปัญหาในการเลือกแบบจำลอง

กระบวนการที่มีอยู่อย่างมากมาย ซึ่งแบบจำลองต่าง ๆ ทั้งหมดอาจจะไม่ถูกต้องก็เป็นได้ในสถานการณ์เช่นนี้ สามารถนำเทคนิคการประมาณค่าแบบออนไลน์มาประยุกต์ใช้เพื่อประมาณค่าตัวแปรสถานะที่ไม่ได้วัดหรือวัดไม่ได้ และเพื่อลดผลกระทบของสัญญาณรบกวน เทคนิคการประมาณค่าแบบลำดับ (sequential estimation technique) หรือที่เรียกกันทั่วไปว่า “ตัวกรอง (filter)” ให้ค่าประมาณของค่ากระบวนการจริงจากค่าการวัดของกระบวนการที่มีสัญญาณรบกวน และค่าที่คำนวณได้จากแบบจำลองกระบวนการที่เหมาะสม

การประมาณค่าตัวแปรสถานะที่ไม่ได้วัดหรือวัดไม่ได้จึงเป็นปัญหาใหญ่ โดยเฉพาะการนำเทคนิคการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่ามาใช้ เนื่องจากต้องอาศัยความรู้ความชำนาญทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก เพื่อแก้ไขแบบจำลองและเลือกสุ่มค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมก่อนทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ ทำให้การประมาณค่าประสบผลสำเร็จ

ตัวกรองคาลมาน (Kalman filter) เป็นเทคนิคการประมาณค่าสถานะเทคนิคหนึ่งที่ได้รับ ความสนใจเป็นอย่างมาก มีการนำไปประยุกต์ใช้ในระบบอุตสาหกรรมการผลิตเครื่องบินซึ่งประสบผลสำเร็จ และได้มีการนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาต่าง ๆ อีกมากมาย อาทิเช่น สาขาวิชาการบิน, สาขาวิชาการเดินเรือทางทะเล, สาขาวิชาการสร้างตัวแบบเพื่อศึกษาเรื่องประชากร, สาขาวิชาการผลิต รวมไปถึงงานทางด้านวิศวกรรมโทรคมนาคมด้วย

ขั้นตอนวิธีตัวกรองคาลมานให้ค่าประมาณของตัวแปรระบบซึ่งกำลังถูกควบคุมโดยกระบวนการในการวัดที่เหมาะสม เป็นเทคนิคที่ให้ผลในการคำนวณอย่างมีประสิทธิภาพสามารถประมาณค่าสถานะในอดีต, ปัจจุบันและอนาคตได้ และสามารถประมาณค่าสถานะได้ ถึงแม้ว่าจะไม่ทราบแบบจำลองที่ถูกต้องก็ตาม

แต่อย่างไรก็ตาม การนำตัวกรองคาลมานไปประยุกต์ใช้ในกระบวนการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ค่อนข้างน้อยมาก ทั้งนี้เป็นผลสืบเนื่องมาจากการขาดโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้งานได้ง่าย และเทคนิคการประมาณค่าสถานะและพารามิเตอร์ เป็นเทคนิคที่ต้องอาศัยการ

คำนวณทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างมากและมีการคำนวณที่ค่อนข้างสลับซับซ้อนและหลายขั้นตอน ดังนั้น การคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ครั้งนี้ใช้โปรแกรม Matlab

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อศึกษาขบวนการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ โดยใช้วิธีสหาคาลมานฟิลเตอร์

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบเทคนิคการพยากรณ์ ความต้องการใช้โทรศัพท์โดยใช้วิธีสหาคาลมานฟิลเตอร์ และแบบกระบวนการทางด้านสถิติ

1.2.3 เพื่อให้ค่าประสิทธิภาพ ในการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์มีค่าสูงสุด

1.2.4 เพื่อสร้างตัวแบบสำหรับการคาดการณ์

1.2.5 เพื่อใช้เป็นตัวเลขคาดประมาณในการวางแผนต่อไป

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

การพยากรณ์ความต้องการโทรศัพท์ขึ้นอยู่กับจำนวนประชากรและรายได้ นอกจากนั้น การใช้คาลมานฟิลเตอร์ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์จะให้ผลการพยากรณ์ที่แม่นยำและถูกต้องอีกทั้งยังรวดเร็ว

1.4 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในการวิจัย

จุดเริ่มต้นของทฤษฎีการประมาณค่าแบบดั้งเดิมสามารถอ้างอิงได้จาก R.A. Fisher ผู้ซึ่งเสนอวิธีการประมาณค่าด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งจากการมองปัญหาเชิงทฤษฎีเป็นวิธีทั่วไปที่สำคัญมากที่สุดของการประมาณค่า หัวข้อนี้จะอธิบายวิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบสั้นๆ โดยใช้เครื่องมือของทฤษฎีการประมาณค่าดังที่อธิบายด้านล่างมีผลเฉลยอยู่หลายวิธี ความแตกต่างของแต่ละวิธีสืบเนื่องจากความหลากหลายของสมมุติฐานเกี่ยวกับความน่าจะเป็น และหลักการที่เหมาะสมที่สุด ดังนั้นในหัวข้อนี้ เราจะอธิบายการถดถอยเชิงเส้นแบบง่าย (simple linear regression), ตัวประมาณค่า “กำลังสองน้อยสุด”, และตัวประมาณค่าด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ใน 2 วิธีแรก หลักการที่เหมาะสมที่สุดคือปริมาณสเกลาร์อยู่ในพจน์ฟังก์ชันค่า (cost function) การลดฟังก์ชันทำได้โดยการลดผลรวมของกำลังสองของอนุพันธ์ระหว่างจุดข้อมูลและจุดที่ตรงกันซึ่งได้มาจากผลเฉลย วิธีการประมาณค่าด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีพื้นฐานมาจากการเพิ่มฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function) ในที่นี้ จะใช้สัญลักษณ์ θ มีค่าคงที่

1.4.1 การถดถอยเชิงเส้นแบบง่าย (simple linear regression)

วัตถุประสงค์คือเพื่อพัฒนาแบบจำลอง ซึ่งใช้ในการประมาณค่าผลตอบสนองของกระบวนการและสามารถจัดช่วงระยะเวลาในระหว่างการทำนายค่าประมาณเหล่านี้ การถดถอยเชิงเส้นแบบง่ายช่วยให้วัตถุประสงค์นี้สำเร็จได้ พิจารณาปริมาณสุ่ม Y (คือตัวแปรสุ่ม) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ (เชิงกำหนด) หนึ่งตัวหรือมากกว่านั้น X_1, X_2, \dots, X_m ในการอธิบายที่นี้ สมมติว่าตัวแปรสุ่ม Y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ 1 ตัวเท่านั้น และมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น พจน์เชิงเส้นหมายความว่าค่าเฉลี่ยของ $Y(E\{Y\})$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นกับ X เขียนได้เป็น

$$E\{Y\} = \alpha + \beta X \quad (1.1)$$

เมื่อค่าคงที่ไม่ทราบค่า 2 ค่าคือ α และ β แทนส่วนตัดและความชัน ตามลำดับ ในปัญหาทางกายภาพ ค่าคงที่ α อาจแทนทางขึ้น - ลงเวลา (time ramp) ค่าคงที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้ (หรือพารามิเตอร์ประชากร) ถูกประมาณค่าจากตัวอย่างของค่า Y ที่มีค่าเกี่ยวข้องกับ X (ข้อมูลใช้ในการทดสอบและควบคุมกระบวนการเกือบจะเป็นข้อมูลตัวอย่างเสมอหรือสับเซตของข้อมูลประชากร) ถูกประมาณค่าจากตัวอย่างของค่า Y ที่มีค่าเกี่ยวข้องกับ X (ข้อมูลที่ใช้ในการทดสอบและควบคุมกระบวนการเกือบจะเป็นข้อมูลตัวอย่างเสมอหรือสับเซตของข้อมูลประชากร) ด้วยเหตุนี้ เส้นการถดถอยจริงไม่ทราบ นอกจากนั้นเมื่อการสังเกตทั้งหมดไม่ได้วางอยู่บนเส้นอย่างถูกต้อง มีความคลาดเคลื่อนในค่าประมาณเส้นตรงอยู่บ้างอย่างเห็นได้ชัด เพื่อที่จะจัดการความคลาดเคลื่อนนี้ในสมการของการทำนาย Y เมื่อกำหนดค่า X โดยใช้ความสัมพันธ์

$$Y = \alpha + \beta X + e \quad (1.2)$$

เมื่อ e แทนพจน์ความคลาดเคลื่อน โดยสมมติให้กระจายแบบปกติรอบ ๆ ศูนย์และมีความแปรปรวน σ^2 ค่า e มีการเปลี่ยนแปลงเท่ากันในระดับของ X ทั้งหมดและสมมติให้ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระ สังเกตว่าความแปรปรวนของ e เหมือนกับความแปรปรวนของ Y

แบบจำลอง (1.2) เหมาะสำหรับข้อมูลประชากร (คือเซตของค่า X และ Y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด) ตัวแปรสุ่ม e ถูกนิยามโดย

$$e = Y - (\alpha + \beta X) \quad (1.3)$$

1.4.2 การประมาณค่ากำลังสองน้อยสุด

พิจารณาตัวอย่างแบบง่าย $Y(Y=Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ เท่านั้น ในการอธิบายต่อไปนี้ : เราจะพิจารณาตัวอย่างที่เป็นคู่ (X_j, Y_j) เมื่อ $j = 1, 2, \dots, n$ วิธีทางคณิตศาสตร์วิธีหนึ่งสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์การถดถอย α และ β เป็นวิธีดั้งเดิมของกำลังสองน้อยสุด วิธีของกำลัง

สองน้อยสุดเชิงกำหนดถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์และนักดาราศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) ในบทความอันเป็นที่รู้จักกันดีของเขาคือ “Theoria Motus” ใน 1809 ซึ่งจัดการกับปัญหาของการหาวงโคจร

การประยุกต์วิธีนี้เพื่อหาเส้นโค้งที่เหมาะสมแบบกำลังสองน้อยสุด โดยต้องการที่จะได้อันดับของพหุนามที่พอดีกับชุดของจุดข้อมูลที่ตีที่ที่สุด ซึ่งนี้ได้มาจากคุณสมบัติของการลดผลรวมของอนุพันธ์กำลังสองจากเส้น (คือ $\sum e_i^2$) นั่นคือการเลือกค่าประมาณของ $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\beta}$

1.5 ขอบเขตในการทำวิทยานิพนธ์

1.5.1 วิเคราะห์แบบจำลองที่ได้นำเสนอ โดยใช้วิธีการเลียนแบบ (Simulation) ด้วยการใช้โปรแกรม MATLAB

1.5.2 เปรียบเทียบการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ระดับประเทศในปี พ.ศ. 2534 ถึงปี พ.ศ. 2554 โดยวิธีการวิเคราะห์ทางสถิติและวิธีคิสิกฤษ คาลมาน ฟิลเตอร์

1.5.3 พัฒนาการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ในเขตนครหลวง โดยใช้ข้อมูลตั้งแต่ปี พ.ศ. 2497 ถึงปี พ.ศ. 2554

1.5.4 ข้อมูลด้านประชากร ทำการศึกษาเก็บรวบรวมข้อมูลจากหน่วยงานราชการ คือ สำนักงานกลางทะเบียนราษฎร กรมการปกครองกระทรวงมหาดไทย และสำนักงานคณะกรรมการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ผลการศึกษาและวิจัยค้นคว้า เพื่อทำการปรับปรุงเทคนิคการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะช่วยแก้ปัญหา เทคนิคการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ โดยใช้ข้อมูลในการคาดคะเนเพียงเล็กน้อย โดยมีประโยชน์มากมายดังนี้

1.6.1 เพื่อเป็นประโยชน์ในการวางแผนในการสร้างข่ายสายให้เพียงพอ เพื่อรองรับความต้องการโทรศัพท์ในอนาคต

1.6.2 เพื่อเป็นทางเลือกอีกทางหนึ่ง ในการศึกษาหาปริมาณความต้องการใช้โทรศัพท์ระดับชุมชนสาย

1.6.3 เพื่อพัฒนารูปแบบวิธีการคาดคะเนความต้องการใช้โทรศัพท์ให้มีประสิทธิภาพและถูกต้องมากที่สุด

บทที่ 2

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวกรองกาลมานเป็นเทคนิคการประมาณค่าวิธีหนึ่ง ซึ่งได้รับความสนใจและมีการนำไปประยุกต์ใช้กับสาขาต่าง ๆ มากมาย ดังนั้นเพื่อให้เห็นถึงบทบาทและความสำคัญของตัวกรองกาลมาน เนื้อหาของบทนี้จึงกล่าวถึงความเป็นมาและวัตถุประสงค์ของตัวกรองกาลมาน รวมไปถึงแนวคิดและทฤษฎีเกี่ยวกับการประมาณค่า สำหรับเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีและขั้นตอนวิธีตัวกรองกาลมานจะกล่าวถึงในบทถัดไป

นอกจากนี้ ได้ทำการรวบรวมงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับภาคคะแนนความต้องการ ซึ่งถูกนำไปประยุกต์ใช้กับกระบวนการต่าง ๆ

เทคนิคตัวควบคุมแบบไม่เชิงเส้นส่วนใหญ่มักจะสมมติให้มีการวัดหรือประมาณค่าของตัวแปรสถานะทั้งหมด แต่ในทางปฏิบัตินั้น การวัดค่าตัวแปรสถานะทั้งหมดเป็นไปได้และค่าที่ได้จากการวัดจะมีสัญญาณรบกวนและ/หรืออาจเกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นได้ นอกจากนี้แบบจำลองมักจะไม่ทราบและต้องพบกับปัญหาในการเลือกแบบจำลองกระบวนการที่มีอยู่อย่างมากมาย ซึ่งแบบจำลองต่าง ๆ ทั้งหมดอาจจะไม่ถูกต้องก็ได้ ดังนั้นจึงได้มีการนำเทคนิคการประมาณค่ามาประยุกต์ใช้เพื่อประมาณค่าตัวแปรสถานะที่ไม่ได้วัดหรือวัดไม่ได้และเพื่อลดผลกระทบของสัญญาณรบกวน เทคนิคการประมาณค่าหรือเรียกกันทั่วไปว่า “ตัวกรอง” จะให้ค่าประมาณของค่ากระบวนการจริงจากการวัดกระบวนการที่มีสัญญาณรบกวน และค่าที่คำนวณได้จากแบบจำลองกระบวนการที่เหมาะสม ด้วยเหตุนี้ การประมาณค่าตัวแปรสถานะที่ไม่ได้วัดหรือวัดไม่ได้จึงไม่ใช่ปัญหาเล็ก ๆ แล้ว โดยเฉพาะการนำเทคนิคการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่ามาใช้ ทั้งนี้เนื่องจากต้องอาศัยความรู้ความชำนาญทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างมากเพื่อแก้ไขแบบจำลอง และการเลือกสุ่มค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมก่อนทำการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อให้การประมาณค่าประสบผลสำเร็จ

ขั้นตอนวิธีการประมาณค่าวิธีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้กันอย่างกว้างขวาง คือตัวกรองกาลมาน ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีที่ให้ค่าประมาณของตัวแปรระบบที่กำลังถูกควบคุม โดยค่าการวัดของตัวตรวจจับที่เหมาะสม ทฤษฎีตัวกรองกาลมานเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการวิเคราะห์และการแก้ไขปัญหาการประมาณค่าต่าง ๆ สมการตัวกรองกาลมานหรือขั้นตอนวิธีกาลมานช่วยลดขนาดของหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ โดยให้ค่าประมาณของสัญญาณที่ทันสมัยในช่วงเวลาการวัดโดยปราศจากการเก็บข้อมูลการวัดในอดีต นั่นคือตัวกรองกาลมานมีความยืดหยุ่นเนื่องจากมันสามารถจัดการกับค่าการวัดได้ครั้งละหนึ่งค่าหรือครั้งละหนึ่งชุด ตัวกรองกาลมานเป็นขั้นตอนวิธีการดำเนินการกับข้อมูลแบบเรียกตนเองที่เหมาะสมที่สุด

ทฤษฎีตัวกรองกาลมานเป็นทฤษฎีตัวกรองที่ได้รับการพัฒนาและมีการนำไปประยุกต์ใช้กันอย่างกว้างขวางในระบบเชิงเส้น โดยเฉพาะ การนำเทคนิคการกรองกาลมานไปประยุกต์ใช้กับการกำหนดเส้นทางการบิน, การควบคุมทิศทางและการควบคุม ซึ่งเป็นสาขาแรกที่ได้นำมาใช้ นอกจากนั้น ได้มีการนำไปประยุกต์ใช้กับสาขาต่าง ๆ อาทิเช่น การหาวงโคจร, การติดตามเครื่องบิน, การเคลื่อนที่ของเรือ, อุตสาหกรรมรถยนต์, การควบคุมกระบวนการทางเคมี, การวัดอัตราการไหลในทันทีทันใดและการประมาณค่าและการทำนายตัวแปรที่วัดไม่ได้ในกระบวนการอุตสาหกรรม

ตัวกรองกาลมานมาตรฐานเป็นตัวกรองที่ให้ค่าประมาณเชิงเส้นไม่เอนเอียงตามลำดับที่ดีที่สุด (หรือค่าประมาณที่เหมาะสมที่สุดทั้งหมด) โดยมีสัญญาณรบกวนเป็นแบบเกาส์ ด้วยเหตุนี้กระบวนการสโตแคสติกที่ซับซ้อนจึงมักสมมติให้สัญญาณรบกวนเป็นแบบเกาส์ ซึ่งทำให้การคำนวณทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการประมาณค่าง่ายขึ้น วิธีการประมาณค่าที่รู้จักกันดีมี 3 วิธี คือ (1) วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least-square) , (2) วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum-likelihood) และ (3) วิธีเบย์ (Bayesian method) โดยทั้งสามวิธีให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกัน ถึงแม้ว่าความไว้วางใจ (reliability) จะแตกต่างกัน

ปัจจัยหนึ่งที่สำคัญและทำให้ทฤษฎีการประมาณค่าและการควบคุมประสบความสำเร็จ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ดิจิทัลที่มีความเร็วสูงและมีขนาดหน่วยความจำมากสำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหา

ทฤษฎีสมัยใหม่ของการประมาณค่ามีรากฐานมาจากผลงานชิ้นแรกของ A.W. Kolmogorov และ N. Wiener Kolmogorov, 1941 และ Wiener, 1942 ได้พัฒนาและกำหนดสูตรทฤษฎีการประมาณค่าขั้นพื้นฐานที่สำคัญของการประมาณค่ากำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุดเชิงเส้น (linear minimum mean-square) ซึ่งผลเฉลยของปัญหา Wiener-Kolmogorov เดิมเป็นลักษณะเฉพาะของการกรองสัญญาณรบกวนที่มีเวลาต่อเนื่อง ขณะที่เทคนิคการถดถอยแบบเชิงเส้น (linear regression) ซึ่งอาศัยกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (weighted least-square) หรือหลักการภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นลักษณะเฉพาะของการจัดการกับปัญหาการกรองที่มีเวลาไม่ต่อเนื่อง แต่อย่างไรก็ตามผลเฉลยของ Wiener Kolmogorov ที่อยู่ในรูปสมการอินทิกรัลนั้นใช้ได้กับกระบวนการคงที่ (stationary) เท่านั้น จนกระทั่งต้นปี 1960 เมื่อ R.E. Kalman และต่อมา Kalman และ R. Bucy ได้ทำการพัฒนาต่อจนทำให้ตัวกรอง Kalman-Bucy ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับระบบเชิงเส้นต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็วและได้พยายามที่จะนำไปประยุกต์กับระบบไม่เชิงเส้น ซึ่งผลของความพยายามทำให้มีตัวกรองกาลมานแบบยัดขยาย (extended Kalman filters) เกิดขึ้น

ตัวกรองกาลมานเป็นขั้นตอนวิธีการดำเนินการกับข้อมูลแบบเรียกตนเองที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งให้ค่าประมาณตัวแปร (หรือสถานะ) ของระบบที่กำลังถูกควบคุม โดยการใช้ประโยชน์จากแบบจำลองของระบบ และอาศัยความแตกต่างระหว่างการทำนายจากแบบจำลองกับค่าการวัด ตัวกรองกาลมานจะจัดการกับความคลาดเคลื่อนของระบบและใช้ค่าการวัดที่เหมาะสมทั้งหมดโดย

ไม่คำนึงถึงความถูกต้องของมันในการประมาณค่าปัจจุบันของตัวแปรที่สนใจ โดยอาศัยข้อเท็จจริงดังต่อไปนี้คือ (1) ความรู้เกี่ยวกับแบบจำลองระบบและพลศาสตร์ของเครื่องมือการวัด, (2) ค่าสถิติของสัญญาณรบกวนและความไม่แน่นอน และ (3) ข้อมูลเกี่ยวกับเงื่อนไขตอนเริ่มต้นของตัวแปรหน้าที่หลักของตัวกรองกาลมาน คือการประมาณค่าเวกเตอร์สถานะโดยใช้ตัวตรวจจบบระบบและข้อมูลการวัดที่มีสัญญาณรบกวน ขั้นตอนวิธีตัวกรองกาลมานถูกนำไปใช้กับปัญหาการประมาณค่า 2 ชนิด คือ (1) การกรอง (หรือการปรับปรุงให้ทันสมัย) และ (2) การทำนาย (หรือการแผ่กระจาย) เมื่อเวลาของค่าประมาณของเวกเตอร์ที่ต้องการตรงกับค่าการวัดในอดีต เราเรียกปัญหาการประมาณค่านี้ว่า การกรอง (*filtering*) หรืออาจกล่าวได้ว่า การกรอง คือการประมาณค่าเวกเตอร์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จัดทำด้วยภาคผนวก 5 บท ภาคผนวก ก ประกอบด้วยพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับทฤษฎีระบบ ภาคผนวกนี้นำมาใส่ไว้เพื่อเป็นการทบทวนความรู้สำหรับผู้อ่านที่สนใจ ซึ่งจำเป็นสำหรับการทำความเข้าใจในระบบสโตแคสติกพลวัต หัวข้อที่กล่าวถึงในภาคผนวกนี้เป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเวกเตอร์, เมทริกซ์, ปริภูมิเวกเตอร์และทฤษฎีเซต, ระบบเชิงเส้น และผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้น ภาคผนวก ข กล่าวถึงสัญญาณสุ่มซึ่งประกอบด้วยพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับสัญญาณสุ่ม (สโตแคสติก) โดยเริ่มต้นด้วยคำจำกัดความเกี่ยวกับปริมาณต่าง ๆ เกี่ยวกับสัญญาณสุ่มและการรวมกันของสัญญาณสุ่ม ภาคผนวก ค บทพิสูจน์ ภาคผนวก ง แสดงวิธีการใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งอธิบายขั้นตอนในการใช้งานและช่วยให้การใช้งานสะดวกขึ้น ภาคผนวก จ. ผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SPSS

2.1 เอกสารและผลงานที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองกาลมาน

Kolmogorov, 1930 ได้กำหนดสูตรทฤษฎีของสัจพจน์ความน่าจะเป็น (axiomatic theory of probability) ซึ่งเป็นการค้นพบทฤษฎีของกระบวนการสโตแคสติก และในปี 1941 เขาและ Wiener ได้สร้างทฤษฎีการประมาณค่า (estimation theory) สำหรับระบบพลวัต ในต้นศตวรรษที่ 18 ตระกูลของ Bernoulli, Bayes, Gauss และคนอื่น ๆ ได้ตีพิมพ์บทความเรื่องทฤษฎีความน่าจะเป็นและวิธีกำลังสองน้อยสุดของการประมาณค่าพารามิเตอร์

Japan International Cooperation Agency (JICA) ทำการศึกษา โครงการข่ายโทรคมนาคม (telecommunication Network) ในเขตนครหลวงของไทยในปี 1992 ในส่วนของการคาดคะเนปริมาณการใช้โทรศัพท์แยกเป็น 2 ขั้นตอน คือ

1. การคาดคะเนภาพรวม (macro forecast) คาดคะเนปริมาณการใช้โทรศัพท์รวมในเขตนครหลวง นครปฐม สมุทรสาคร และอยุธยา แบ่งเป็น

- 1.1 ปริมาณการใช้โทรศัพท์ภายในท้องถิ่น (local traffic)
- 1.2 ปริมาณการใช้โทรศัพท์ทางไกลภายในประเทศ (long distance traffic)
- 1.3 ปริมาณการใช้โทรศัพท์ทางไกลระหว่างประเทศ (international traffic)

พบว่าปริมาณการใช้โทรศัพท์ในเขตดังกล่าว มีความสัมพันธ์กับอัตราการเจริญเติบโตของผู้เช่าในเขตนั้นๆ ในรูปสมการ logarithm และปริมาณการใช้โทรศัพท์ทางไกลในประเทศและทางไกลระหว่างประเทศ มีความสัมพันธ์กับค่าอัตราการเจริญเติบโตในรูปสมการเส้นตรง

2. การคาดคะเนรายชุมสาย (micro forecast)

พิจารณาปริมาณการใช้โทรศัพท์ต่อผู้เช่า (traffic per subscriber) ในแต่ละชุมสาย พบว่าอยู่ในช่วง 0.02-0.09 Erang/sub แล้วแต่ว่าอยู่ในเขตธุรกิจ หรือ เขตที่อยู่อาศัย พบว่า ถ้าอยู่ในเขตธุรกิจ ค่าปริมาณการใช้โทรศัพท์ต่อผู้เช่าจะมีค่าสูง

การศึกษาของ JICA ให้แนวคิดในการคาดคะเน ทั้งด้านภาพรวมและรายชุมสายโดยใช้ Logistic Model ในการคาดคะเนอัตราการเจริญเติบโตของโทรศัพท์

2. SCANLAN สัมมนาเรื่อง Modern Methods of Telecommunication Planning ของ ASIA-PASIFIC TELECOMMUNITY (APT) ในปี 1989 ได้สรุปกระบวนการคาดคะเนปริมาณการใช้โทรศัพท์ว่าปริมาณการใช้โทรศัพท์ ขึ้นอยู่กับ ผลกระทบต่อประชากรภายในประเทศ, ปริมาณการค้า, การอพยพย้ายถิ่น, ค่าบริการโทรศัพท์ และอื่นๆ ซึ่งทำให้ผู้ศึกษามองเห็นภาพรวมของปริมาณการใช้โทรศัพท์ว่า ขึ้นอยู่กับปัจจัยทางเศรษฐกิจ และสามารถนำไปใช้ในการวางแผนต่อไป

Chambers และคณะ ในปี 1971 ศึกษาใน Harvard Business Review Planning Series : Part IV เดือน กรกฎาคม-สิงหาคม 1971 หัวข้อเรื่อง “ How to Choose the Right Forecasting Technique” ซึ่งสรุปเทคนิคการคาดคะเนโดยแสดง คุณลักษณะ (characteristics) ของแต่ละวิธี , การแสดงจุดวกกลับ (turning points), รายละเอียดการนำไปใช้ (Typical applications) ข้อมูลที่ต้องการ, ค่าใช้จ่ายในการคาดคะเน, ระยะเวลาในการคาดคะเน พบว่าวิธีการที่เหมาะสมต่อการคาดคะเนปริมาณการใช้โทรศัพท์ คือ ใช้วิธีการทางเศรษฐกิจ ซึ่งเป็นระบบของสมการถดถอยซึ่งขึ้นอยู่กับกันและกัน ค่าพารามิเตอร์ จะถูกประมาณการไปพร้อมๆกัน โดยใช้ข้อมูลการวิเคราะห์ในอดีต ซึ่งเป็นการวิเคราะห์เปรียบเทียบค่าอัตราการเจริญเติบโตจากจุดเริ่มต้น โดยการคาดคะเนจะขึ้นอยู่กับความคล้ายคลึงกันของรูปแบบข้อมูล แล้วนำข้อมูลเหล่านั้นมาทำการวิเคราะห์สมการถดถอย ซึ่งเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม และตัวแปรทางเศรษฐกิจ และคาดคะเนโดยใช้วิธีการกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งแสดงโดยค่าทางสถิติ ความสัมพันธ์จะถูกเลือกโดยการทดสอบอย่างมีเหตุผล ซึ่งการศึกษาของ Chambers และคณะ ทำให้ผู้ศึกษาวิธีการคาดคะเนคัดเลือกวิธีการคาดคะเนได้อย่างเหมาะสมกับลักษณะงาน และข้อมูลที่มีอยู่ โดยมีความถูกต้องแม่นยำ

นิตย์ ฝาม (2528) ศึกษาเกี่ยวกับตัวแบบพยากรณ์อุปสงค์การบริการโทรศัพท์ในประเทศไทยในอนาคต เพื่อดูแนวโน้มความต้องการบริการทางโทรศัพท์ที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยใช้ปัจจัยที่เป็นรายปีตั้งแต่ พ.ศ. 2521-2527 การพยากรณ์เป็นแบบ break down method คือ เลือกหาตัวแบบที่เหมาะสมที่สุดในแต่ละเขตย่อย ทั้งนครหลวงและภูมิภาคแล้วนำค่าพยากรณ์แต่ละเขตย่อยมารวมกันเป็นค่าพยากรณ์ทั่วประเทศ โดยวิธีที่ใช้พยากรณ์แต่ละเขตประกอบด้วย วิธีวิเคราะห์ความถดถอย วิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเส้นตรง เทคนิคทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล 2 ชั้น เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลแบบ 2 พารามิเตอร์(Holt) ผลการคาดคะเนพบว่าในปี 2533 มีความต้องการโทรศัพท์ทั้งสิ้น 1,989,961 เลขหมาย คิดเป็นอัตราการขยายตัวภายใน 6 ปี ร้อยละ 67.2 โดยผลการศึกษานี้สามารถนำมาใช้ประโยชน์ในการศึกษาตัวแบบพยากรณ์รูปแบบต่างๆ

กิตติ สุตันดิวิชยกุล ศึกษาปัญหาการตั้งแบบจำลองในการประมาณสมการเศรษฐกิจในปี 2532 เพื่อศึกษาผลที่เกิดขึ้นในทางปฏิบัติในการเลือกตัวแปรอิสระที่ถูกต้องและไม่ถูกต้องในการพยากรณ์

ประภาศรี ปทุมรัตน์ ศึกษาปัจจัยทางเศรษฐกิจที่มีผลกระทบต่อปริมาณการใช้โทรศัพท์ในเขตนครหลวง และทำการคาดคะเนปริมาณการใช้โทรศัพท์ในเขตนครหลวงทั้งภาพรวมและภาพรายชุมชน ในปี 2537 ผลการศึกษาพบว่า วิธีการปรับข้อมูลที่เหมาะสม คือ เดิมค่าปริมาณการใช้โทรศัพท์โดยทดสอบการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของข้อมูล ปริมาณการใช้โทรศัพท์ ขึ้นอยู่กับดัชนีราคาผู้บริโภคในเขตนครหลวง ปริมาณรถยนต์ที่จดทะเบียน และปริมาณที่อยู่อาศัยที่เพิ่มขึ้น

วารุณี ตรีบำรุงศักดิ์ (2538) ศึกษาการพยากรณ์ด้วยวิธีการถดถอยเชิงเส้นพหุเมื่อตัวแปรตามมีค่าสูญหาย การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสูญหายของตัวแปรตาม ด้วยวิธีค่าเฉลี่ย วิธีสมการถดถอย วิธีอีเอ็ม (EM Algorithm) และวิธีการของฮันท์ (Hunt's Method) ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยได้จากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล และทำการทดลองซ้ำๆ กัน 200 รอบ สำหรับแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดเพื่อประมาณค่าที่สูญหาย และหารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง(RMSE) ของค่าพยากรณ์ด้วยวิธีการทั้ง 4 วิธี ซึ่งผลการวิจัยสรุปได้ว่าถ้าข้อมูลมีขนาดเล็ก (10-20) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานขนาดเล็กไม่ใหญ่นัก วิธีการของฮันท์จะให้ค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่าวิธีอื่นๆ แต่ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนมีขนาดเพิ่มขึ้น วิธีค่าเฉลี่ยจะให้ค่าความคลาดเคลื่อน RMSE ของค่าพยากรณ์ต่ำกว่าวิธีอื่น ส่วนในสถานการณ์ที่ขนาดตัวอย่างขนาดใหญ่วิธีสูญหายจะเหมาะสมเกือบทุกกรณี นั่นคือถ้าขนาดตัวอย่างใหญ่พอ การตัดชุดข้อมูลสูญหายทั้งหมดจะมีผลกระทบน้อยมากกับผลการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุ โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

สหพร กลัดนัม (2541) ศึกษาปัจจัยทางเศรษฐกิจที่มีผลกระทบต่อปริมาณการใช้โทรศัพท์ทางไกลระหว่างประเทศ โดยใช้วิธีการ Multiple Linear Regression การศึกษาวิเคราะห์ได้ใช้

ข้อมูลปัจจัยต่างๆเพื่อหาตัวแปรที่เหมาะสมในการสร้างสมการแบบจำลองสำหรับการคาดคะเนค่ากราฟฟิคในอนาคตล่วงหน้า 4 ปี เพื่อนำมาคำนวณหาจำนวนวงจรและจำนวนอุปกรณ์ DTI ที่เหมาะสม

จากงานวิจัยที่ผ่านมา จะเห็นว่าเทคนิคการพยากรณ์ความต้องการใช้โทรศัพท์โดยใช้ตัวกรองกาลมานไม่มีผู้ใดศึกษา คังนั้นผู้ศึกษาจึงได้สังเกตเห็นถึงความสำคัญของการนำตัวกรองกาลมานไปประยุกต์ใช้เนื่องจากมีขบวนการในการคำนวณง่ายกว่าและใช้ตัวแปรไม่มากนัก ตัวกรองกาลมานได้ถูกพัฒนามากขึ้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับระบบไม่เชิงเส้นได้ แต่เนื่องจากตัวกรองกาลมานเป็นเทคนิคการประมาณค่าสถานะและพารามิเตอร์แบบเรียกตัวเอง ซึ่งเป็นการทำงานแบบวนซ้ำและมีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างซับซ้อน และจำเป็นต้องอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณ

ตัวกรองทำงานได้ดีที่สุดในระบบเชิงเส้น และสมมติให้สัญญาณรบกวนระบบที่มีผลต่อตัวกรองเป็นสีขาวและแบบเกาส์

คุณสมบัติของตัวกรองที่นำไปใช้กับแบบจำลองการประมาณค่าสรุปได้ดังนี้

1. ที่เวลา t ตัวกรองให้ค่าประมาณ $\hat{X}(t)$ ที่ไม่เอนเอียงของเวกเตอร์สถานะ X นั่นคือค่าที่คาดหมายของค่าประมาณเป็นค่าของเวกเตอร์สถานะที่เวลา t
2. ค่าประมาณ เป็นค่าประมาณที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุด
3. ตัวกรองเป็นแบบเรียกตนเอง (recursive) หมายถึงไม่มีการเก็บข้อมูลในอดีต
4. ตัวกรองเป็นเชิงเส้นหรือต้องทำให้เป็นเชิงเส้น ซึ่งการทำให้เป็นเชิงเส้นช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นและสะดวกต่อการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์

ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีตัวกรองกาลมาน เราสร้างแบบจำลองตามข้อสมมติต่อไปนี้

1. เวกเตอร์สถานะ $X(t)$ คงอยู่ในสถานะแวลด้อมแบบสุ่ม (คือ พลศาสตร์ระบบ) ซึ่งเป็นแบบเกาส์มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $Q(t)$ ที่เวลา t
2. เวกเตอร์สถานะที่ไม่ทราบค่าสามารถประมาณค่าได้โดยใช้การสังเกตหรือตัวอย่างข้อมูลที่เป็นฟังก์ชันของเวกเตอร์สถานะ
3. การสังเกตที่จุดเวลา t ถูกรบกวนโดยสัญญาณรบกวนแบบเกาส์ที่ไม่สหสัมพันธ์กัน (uncorrelated) มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $R(t)$ ในระบบเชิงพลวัต

สมการเวลาไม่ต่อเนื่องเชิงเส้นมีรูปแบบเหมือนกับแบบจำลองสถานะของตัวกรองกาลมานที่มีเวลาต่อเนื่อง สามารถหาได้จากแผนแบบต่าง ๆ คือ (1) เทคนิคออยเลอร์, (2) ระเบียบวิธีซิมป์สัน และ (3) ระเบียบวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal method) ในที่นี้ เราขอกล่าวถึงเฉพาะเทคนิคประมาณค่าออยเลอร์แบบข้างหน้า โดย

$$x(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$$

เมื่อ $x(t_k)$ เป็นค่าข้อมูลสุ่มตัวอย่างของสัญญาณเวลาต่อเนื่อง $x(t)$
แทนสมการข้างต้นลงในแบบจำลองสถานะเวลาต่อเนื่อง จะได้

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \approx A(t_k)x(t_k) + B(t_k)u(t_k)$$

ให้ $h = t_{k+1} - t_k = \Delta t$ แล้วแบบจำลองเวลาไม่ต่อเนื่องจะมีรูปแบบเป็น

$$x(t_{k+1}) \approx [I + hA(t_k)]x(t_k) + hB(t_k)u(t_k)$$

ให้ $x(t_k)$ แทน $x(k)$ แล้วเมทริกซ์ A คือ

$$A(k) = I + hA(t_k)$$

และเมทริกซ์ B เป็น

$$B(k) = hB(t_k)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนแบบจำลองสถานะที่มีเวลาไม่ต่อเนื่องแปรเปลี่ยนตามเวลาแบบเชิงเส้นเป็น

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned}$$

สำหรับระบบที่แปรเปลี่ยนตามเวลา เราสามารถเขียนตัวกรองกาลมานในรูปแบบไม่ต่อเนื่องแบบเรียกตนเองได้ดังนี้

$$x(k+1) = A(k+1, k)x(k) + T(k)\xi(k), \quad k=0,1,2,\dots \quad (2.1)$$

$$\xi(k) \sim N(0, Q(k)) \quad (\text{ลำดับแบบเกาส์สีขาวที่มี})$$

$$y(k) = C(k)x(k) + n(k) \quad (2.2)$$

$$n(k) \sim N(0, R(k)) \quad (\text{ลำดับแบบเกาส์สีขาว})$$

$$\hat{X}(k+1|k) = A(k+1, k)\hat{x}(k|k) \quad (2.3)$$

$$P(k+1|k) = A(k+1, k)P(k|k)A^T(k+1, k) + \Gamma(k)Q(k+1)\Gamma^T(k) \quad (2.4)$$

$$\hat{X}(k|k) = \hat{X}(k|k-1) + K(k) \left[y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1) \right] \quad (2.5)$$

$$P(k|k) = [I - K(k)C(k)]P(k|k-1) \quad (2.6)$$

หรือ

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)C(k)P(k|k-1) \quad (2.7)$$

หรือ

$$P(k|k) = [I - K(k)C(k)]P(k|k-1)[I - K(k)C(k)]^T + K(k)RK^T(k) \quad (2.8)$$

$$K(k) = P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (2.9)$$

เมื่อดัชนีบน T แทนทรานสโพสของเมทริกซ์

สมการ (2.1) เรียกว่าสมการสถานะเป็นสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับหนึ่งที่เวลา k ซึ่ง x ค่าหนึ่งคือ $x(k)$ สัมพันธ์กับค่า $x(k+1)$ ถัดไป เวกเตอร์ แทนพารามิเตอร์หรือเวกเตอร์สถานะที่ขึ้นอยู่กับเวลา สมการ (2.1) เป็นแบบจำลองของสถานะจริง สมการ (2.2) เรียกว่าสมการการวัดเป็นแบบจำลองของกระบวนการการวัด $y(k)$ แทนเวกเตอร์การวัดซึ่งประกอบด้วยค่าการวัดสเกลาร์แต่ละค่าที่เวลา k นอกจากนี้ สมการ (2.2) สัมพันธ์กับค่าการวัดเหล่านี้และเวกเตอร์สถานะโดยผ่านเมทริกซ์การวัด $C(k)$ เมื่อ $k \geq 1$ และแทนสัญญาณรบกวนแบบสุ่มด้วย $\eta(k)$ เมื่อ $k \geq 1$

สมการ (2.4) แทนการแผ่กระจายความแปรปรวนร่วม พิจารณาสมการ (2.5) สมการกล่าวว่าค่าประมาณที่ดีที่สุดที่ $t=k$ เท่ากับค่าประมาณทำนายบวกกับความคลาดเคลื่อน (หรือความแตกต่าง) ระหว่างค่าสังเกตและค่าสังเกตประมาณคูณด้วยแฟกเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (หรือเกน) $K(k)$

$K(k)$ เปลี่ยนแปลงตามเวลาและต้องการให้มีค่าเหมาะสมที่สุดเสมอ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของสัญญาณรบกวนการวัด $R(k)$ อย่างมาก ด้วยเหตุนี้ ถ้า $R(k)=1$ แล้วสมาชิกของ $K(k)$ จะมีค่าสัมบูรณ์ลดลงอย่างแน่นอน ถ้าการวัดที่ได้มีสัญญาณรบกวนการวัดเล็กน้อย เมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนครั้งก่อน (นั่นคือ ถ้า R มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ $C(k)P(k|k-1)C^T(k)$) แล้วเกนจะมีค่ามาก และถ้าการวัดถูกรบกวนมากเมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนครั้งก่อน (นั่นคือ ถ้า R มากเมื่อเทียบกับ $C(k)P(k|k-1)C^T(k)$) แล้วเกนมีค่าน้อยและตัวกรองจะสนใจการวัดเล็กน้อย

การประยุกต์ใช้ตัวกรองเชิงเส้นกับระบบจำเพาะ เราต้องระบุแบบจำลองเชิงพลวัต (A, Γ, C) ค่าสถิติของสัญญาณรบกวน (Q, R) และข้อมูลค่าก่อน $(\hat{x}(0), P(0))$ ในกรณีเวลาต่อเนื่องสมมติให้ค่าสถิติครั้งก่อนของกระบวนการสัญญาณรบกวน $\xi(t)$ และ $\eta(t)$ มีค่าเฉลี่ยศูนย์และสีขาว

2.2 ระเบียบวิธีการพยากรณ์

เพื่อให้เห็นถึงแนวความคิดของระเบียบวิธีการพยากรณ์เชิงปริมาณ และเป็นพื้นฐานที่จะศึกษาในรายละเอียดในบทต่อไป จะขอกล่าวถึงระเบียบวิธีการพยากรณ์ที่นิยมใช้กันในปัจจุบันอย่างย่อ ๆ ดังนี้

2.2.1 เทคนิคการทำให้เรียบ (Smoothing Techniques)

ระเบียบวิธีการพยากรณ์ส่วนใหญ่ภายใต้เทคนิคการทำให้เรียบได้รับการพัฒนาขึ้นจากตัวแบบการพยากรณ์ 2 ตัวแบบ คือ ตัวแบบการพยากรณ์แบบค่าเฉลี่ยคงที่ (constant mean model) และตัวแบบพยากรณ์แบบแนวโน้มเชิงเส้น (linear trend model) ตัวแบบการพยากรณ์ทั้ง 2 แบบดังกล่าวอาจมีหรือไม่มีฤดูกาลก็ได้ ในตัวแบบการพยากรณ์แบบค่าเฉลี่ยคงที่ วิธีการทำให้เรียบที่นิยมใช้กันมากคือวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (moving average method) และการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล (exponential smoothing) เป็นวิธีการที่เหมาะสมสำหรับใช้ในการพยากรณ์ระยะสั้น และเหมาะสมสำหรับพยากรณ์ค่าของตัวแปรที่มักจะมีการเปลี่ยนแปลงไม่มากนักในหนึ่งหน่วยเวลา ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) ของข้อมูลในอดีต n ข้อมูล และใช้ค่านี้เป็นค่าพยากรณ์ซึ่งเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\hat{X}_t(1) = \frac{X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-n+1}}{n} \quad (2.10)$$

โดย $\hat{X}_t(1)$ เป็นค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าของ x โดยทำการพยากรณ์ ณ เวลา t และ X_t เป็นค่าสังเกต (observed value) ของ ณ เวลา t

เมื่อสิ้นสุดเวลา $t+1$ ค่าของตัวแปร x ณ เวลา $t+1$ จะเข้ามาโดยจะนำมาใช้แทน X_{t-n+1} ซึ่งเป็นข้อมูลที่ล้าสมัยที่สุด ดังนั้นค่าพยากรณ์ครั้งต่อไปคือ

$$\hat{X}_{t+1}(1) = \frac{X_{t+1} + X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-n+2}}{n} \quad (2.11)$$

จะเห็นว่าการพยากรณ์โดยวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ที่ใช้ข้อมูลในอดีตที่เพิ่งผ่านมา n หน่วยเวลาเท่านั้น และค่าพยากรณ์เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต จึงทำให้วิธีการนี้มีจุดอ่อนที่สำคัญ 2 ประการ คือ

1. ข้อมูลในอดีตที่ผ่านมามากกว่า n หน่วยเวลา จะไม่ได้รับการพิจารณาเลย ดังนั้นค่าของ n จึงควรจะมีค่าที่น้อย เพื่อจะได้ลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่สำคัญอยู่ในขบวนการพยากรณ์ด้วย แต่ในขณะเดียวกันถ้าใช้จำนวนข้อมูลในอดีตมากเกินไปก็จะทำให้ความเฉื่อย (inertia) ของการพยากรณ์สูง ซึ่งหมายความว่าค่าพยากรณ์อาจปรับตัวไม่ทันต่อการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น

2. การที่ใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่าพยากรณ์อาจมีผู้ท้วงติงได้มากเพราะโดยทั่ว ๆ ไป “สาระ” (information) ของข้อมูล ณ เวลา t อาจมีมากกว่า “สาระ” ของข้อมูล ณ เวลา $t-n+1$

เมื่อทำการพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้า ณ เวลา t ดังนั้น การให้น้ำหนักในการเฉลี่ยเท่ากันหมดอาจไม่ถูกต้องก็เป็นได้

การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลได้แก้ไขจุดอ่อนบางอย่างของวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ โดยใช้ค่าพยากรณ์เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลในอดีตทั้งหมดด้วยน้ำหนักในการเฉลี่ยที่ค่อย ๆ ลดลงเมื่อเวลาของข้อมูลห่างออกไปจากปัจจุบันมากขึ้น ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าซึ่งกระทำ ณ เวลา t จะเขียนเป็นสมการเชิงคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\hat{X}_t(1) = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 X_{t-3} + \dots \quad (2.12)$$

โดย α เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบ (smoothing constant) มีค่าระหว่าง 0 กับ 1 ดังนั้น น้ำหนักการเฉลี่ยของข้อมูล X_{t-i} ซึ่งเท่ากับ $\alpha(1-\alpha)^i$ จะมีค่าลดลงเมื่อ i มีค่าสูงขึ้น เพื่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลมากขึ้นสมการ (2.12) อาจเขียนในรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \hat{X}_t(1) &= \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}(1) \\ &= \hat{X}_{t-1}(1) + \alpha \left(X_t - \hat{X}_{t-1}(1) \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ซึ่งจะเห็นว่าค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าที่กระทำ ณ เวลา t มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยโดยน้ำหนักระหว่างข้อมูลกับค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าที่ได้กระทำ ณ เวลา $t-1$ หรือเท่ากับค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าที่กระทำ ณ เวลา $t-1$ บวกกับผลคูณระหว่าง α กับความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา $t-1$

หาก α มีค่าใกล้ 1 ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าปัจจุบันของตัวแปร และหาก α มีค่าใกล้ 0 ค่าพยากรณ์จะไม่คำนึงถึงความผิดพลาดในการพยากรณ์ ณ เวลาที่เพิ่งผ่านมามากนัก ถึงแม้การกำหนดค่าของ α ในการพยากรณ์ไม่อาจกระทำได้ง่ายแต่วิธีทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลเป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากในวงการธุรกิจเพราะเป็นวิธีที่ง่าย และผู้รับผิดชอบอาจใช้ประสบการณ์ช่วยกำหนดค่าของ α ก็ได้

ไม่ว่าจะเป็นการทำให้เรียบแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่หรือแบบเอกซ์โปเนนเชียล เมื่อข้อมูลมีแนวโน้ม ค่าพยากรณ์จะมีลักษณะที่สำคัญดังนี้ ค่าพยากรณ์จะมีแนวโน้มให้ค่าต่ำกว่าความเป็นจริงในกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้มสูงขึ้น และค่าพยากรณ์จะมีแนวโน้มให้ค่าสูงกว่าความเป็นจริงในกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้มลดลง หากพิจารณากันอย่างผิวเผินแล้ว อาจกล่าวว่าการทำให้เรียบแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่หรือแบบเอกซ์โปเนนเชียล มีอาจนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลที่มีแนวโน้มได้ แต่หากพิจารณากันให้ลึกซึ้งแล้วจะเห็นว่า จุดอ่อนเหล่านี้กลับกลายเป็นจุดเด่นของระเบียบวิธีที่อาจใช้ในการชี้แนะว่า ข้อมูลมีแนวโน้มสูงขึ้นหรือลดลงจริง มิใช่เป็นการเปลี่ยนแปลงชั่วคราวเนื่องจากการ

รบกวน เช่น ในกรณีการทำให้เรียบแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ เส้นพยากรณ์เมื่อ h มีค่ามาก จะมีความเฉื่อยสูงกว่าเส้นพยากรณ์เมื่อ h มีค่าน้อย ดังนั้น ในขณะที่ข้อมูลมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในบางครั้งข้อมูลอาจมีค่าต่ำกว่าเส้นพยากรณ์ที่ใช้จำนวนพจน์น้อย แต่ถ้ามีข้อมูลมีค่าลดลงมาต่ำกว่าเส้นพยากรณ์ที่ใช้จำนวนเทอมมาก จะเป็นการชี้แนะว่าข้อมูลกำลังมีแนวโน้มลดลงและในทำนองเดียวกันในขณะที่ข้อมูลมีแนวโน้มลดลง แต่ข้อมูลมีค่าสูงกว่าเส้นพยากรณ์ที่ใช้จำนวนเทอมมาก จะเป็นการชี้แนะว่าแนวโน้มของข้อมูลได้เปลี่ยนทิศทางแล้วกลับกลายเป็นเพิ่มขึ้น

อย่างไรก็ตาม หากข้อมูลที่มีแนวโน้มเป็นเชิงเส้น ตัวแบบการพยากรณ์ที่จะใช้อธิบายข้อมูลก็ควรเป็นตัวแบบการพยากรณ์แบบแนวโน้มเชิงเส้น การพยากรณ์อาจกระทำโดยเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลสองชั้น (double exponential smoothing) หรือเทคนิคการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองชั้น (double moving average) นอกจากนี้ยังมีระเบียบวิธีของ Holt ซึ่งให้ความสำคัญต่อของค่าพยากรณ์สูงในกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้ม โดยใช้แนวความคิดของการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล การพยากรณ์ระดับ (level) ของข้อมูล และความชัน (slope) ซึ่งอาจเขียนได้ดังนี้

$$\hat{b}_{0t} = \alpha X_t + (1 - \alpha) \hat{X}_{t-1}(1) \quad (2.14)$$

$$\hat{b}_{1t} = \beta \left[\hat{b}_{0t} - \hat{b}_{0(t-1)} \right] + (1 + \beta) \hat{b}_{1(t-1)} \quad (2.15)$$

$$\hat{X}_t(1) = \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} \quad (2.16)$$

จะเห็นได้ว่า ทั้งระดับ \hat{b}_{0t} และความชัน \hat{b}_{1t} จะถูกปรับเปลี่ยนแปลงไปตามข้อมูลล่าสุดที่เข้ามาในกรณีที่ข้อมูลมีฤดูกาล Winters ได้แนะนำไว้วิเคราะห์โดยใช้ตัวแบบเชิงคูณ

$$X_t = (b_0 + b_1 t) C_t + \varepsilon_t \quad (2.17)$$

หรือตัวแบบเชิงบวก

$$X_t = b_0 + b_1 t + C_t + \varepsilon_t \quad (2.18)$$

โดย b_0 เป็นส่วนประกอบคงที่ (permanent component) b_1 เป็นส่วนประกอบแนวโน้มเชิงเส้น (linear trend component) C_t เป็นปัจจัยฤดูกาลเชิงคูณ (multiplicative seasonal factor) หรือปัจจัยฤดูกาลเชิงบวก (additive seasonal factor) แล้วแต่กรณี และ ε_t เป็นความรบกวนเชิงสุ่ม แนวทางที่จะเลือกตัวแบบเชิงคูณหรือเชิงบวกนั้น อาจพิจารณาได้โดยสังเกตลักษณะของข้อมูลว่าการเปลี่ยนแปลงในแต่ละฤดูกาลมีขนาดคงที่หรือแปรเปลี่ยนไปตามปัจจัยแนวโน้ม ถ้าการเปลี่ยนแปลงภายในแต่ละฤดูกาลมีขนาดที่ค่อนข้างคงที่ ก็ควรเลือกตัวแบบเชิงบวก แต่ถ้าลักษณะการเปลี่ยนแปลงภายในฤดูกาลแปรเปลี่ยนไปตามปัจจัยแนวโน้ม ก็ให้เลือกตัวแบบเชิงคูณ

การปรับค่าส่วนประกอบที่ ส่วนประกอบแนวโน้มเชิงเส้น และปัจจัยฤดูกาลยังคงใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีพารามิเตอร์อยู่ทั้งหมด 3 ตัวที่เกี่ยวข้องกับการทำให้เรียบที่จะต้องพิจารณาค่ารายละเอียดเกี่ยวกับระเบียบวิธีการพยากรณ์ของ Winters

2.2.2 การพยากรณ์แบบปรับได้ (Adaptive Forecasting)

ในการพยากรณ์แบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล จะเห็นว่าค่าคงที่การทำให้เรียบเมื่อได้ถูกกำหนดค่าที่เหมาะสมแล้วจะมีค่าคงที่ การพยากรณ์จะใช้ค่าพารามิเตอร์นี้ไปคำนวณค่าพยากรณ์จนกว่าจะมีการกำหนดค่าใหม่ ซึ่งอาจทำให้ค่าพยากรณ์ไม่สามารถปรับตนเองไปตามการเปลี่ยนแปลงในสภาพแวดล้อมที่อาจเกิดขึ้นในช่วงที่ยังไม่มีการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ จึงได้มีการเสนอแนวความคิดที่จะปรับค่าพารามิเตอร์ตามลักษณะความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น ทำให้ค่าพยากรณ์มีความอ่อนไหวไปตามการเปลี่ยนแปลงในสภาพแวดล้อมได้

Chow เสนอให้สร้างตัวแบบการพยากรณ์แบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลขึ้นมา 3 ตัวแบบ โดยใช้ค่าคงที่การทำให้เรียบ 3 ค่า ดังนี้ α_0 เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับค่าพยากรณ์ที่จะนำไปใช้งาน ส่วนค่าคงที่การทำให้เรียบอีก 2 ค่า จะกำหนดให้มีค่าต่างจาก α_0 เล็กน้อย

$$\alpha_u = \alpha_0 + \delta \quad (2.19)$$

$$\alpha_r = \alpha_0 - \delta \quad (2.20)$$

โดย δ เป็นค่าบวกซึ่งมักจะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.05 ค่าคงที่การทำให้เรียบจะปรับค่าไปยังทิศทางที่ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบแล้ว (smoothed absolute error) Δ_t มีค่าน้อยที่สุด

$$\Delta_t = \gamma|e_t| + (1 - \gamma)\Delta_{t-1} \quad (2.21)$$

โดย

$$e_t = X_t - X_{t-1}(1) \quad (2.22)$$

และ γ เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกันกับค่าคงที่การทำให้เรียบทั้ง 3 ค่าข้างต้น ในหน่วยเวลาที่ t Δ_t จะมีค่า 3 ค่า ตามความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากค่าพยากรณ์จาก α_0 α_u และ α_r สำหรับการพยากรณ์ในหน่วยเวลาที่ $t+1$ ค่าคงที่การทำให้เรียบ α_0 จะกำหนดให้เท่ากับค่าคงที่การทำให้เรียบของ Δ_t ที่มีค่าน้อยที่สุด และ α_u และ α_r สำหรับการพยากรณ์ในหน่วยเวลาที่ $t+1$ จะคำนวณใหม่ตามสมการ (2.19) และ (2.20) จะเห็นว่าค่าคงที่การทำให้เรียบในการพยากรณ์แบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ปรับค่าตนเอง

ได้ตามความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

ส่วน Trigg-Leach เสนอให้กำหนดค่าคงที่การทำให้เรียบในการพยากรณ์แบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ณ หน่วยเวลา t ให้เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว (smoothed error tracking signal) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\alpha_t = |Q_t / \Delta_t| \quad (2.23)$$

โดย

$$Q_t = \gamma e_t + (1 - \gamma)Q_{t-1} \quad (2.24)$$

วิธีของ Trigg-Leach เป็นที่รู้จักกันในอีกนามว่า ARRSES (adaptive response rate simple exponential smoothing)

2.2.3 อนุกรมเวลาแบบคลาสสิก

อนุกรมเวลาแบบคลาสสิกเป็นวิธีการพยากรณ์ที่อาศัยส่วนประกอบ 4 ประการ คือ ส่วนประกอบแนวโน้ม (trend) ซึ่งเป็นการฉายภาพ (projection) ระยะยาว ส่วนประกอบวัฏจักร (cycle) ซึ่งเป็นลักษณะของการเปลี่ยนแปลงตามวงจร ส่วนประกอบฤดูกาล (seasonal factor) ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาของวงจร และความรบกวนสุ่ม (random disturbance) ดังนั้น ค่าของอนุกรมเวลาอาจเขียนเป็นเชิงบวกได้เท่ากับ

$$X = T+C+S+I \quad (2.25)$$

ซึ่งมีค่าพยากรณ์เท่ากับ

$$\hat{X} = \hat{T} + \hat{C} + \hat{S} \quad (2.26)$$

หรือค่าของอนุกรมเวลาอาจเขียนเป็นเชิงคูณได้เท่ากับ

$$X = TCS+I \quad (2.27)$$

ซึ่งมีค่าพยากรณ์เท่ากับ

$$\hat{X} = \hat{T} \hat{C} \hat{S} \quad (2.28)$$

เมื่อ T คือ ส่วนประกอบแนวโน้ม C เป็นส่วนประกอบวัฏจักร S เป็นดัชนีฤดูกาล (seasonal index) และ I เป็นความรบกวนสุ่ม วิธีการหาส่วนประกอบแนวโน้ม ส่วนประกอบวัฏจักร และดัชนีฤดูกาลอาจหาศึกษาได้จากหนังสืออนุกรมเวลาแบบคลาสสิก

ผู้ที่เคยทำการพยากรณ์ด้วยอนุกรมเวลาแบบคลาสสิกนั้น ย่อมทราบถึงความลำบากใจในการเลือกรูปแบบฟังก์ชันของแนวโน้มและการหาส่วนประกอบวัฏจักร ผู้ที่จะใช้รูปแบบฟังก์ชันของแนวโน้มเป็นโพลีโนเมียล ควรจะทราบถึงความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นได้ และการหาส่วนประกอบวัฏจักรจะต้องมีข้อมูลในอดีตเป็นจำนวนมากเพื่อให้เห็นการซ้ำของวัฏจักร จุดอ่อนที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งของอนุกรมเวลาแบบคลาสสิกคือ โดยเนื้อแท้แล้ววิธีการนี้ไม่ใช่วิธีการเชิงสถิติ การทดสอบนัยสำคัญ (test of significance) ไม่อาจกระทำได้โดยตรง

2.2.4 การวิเคราะห์การถดถอย ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 3 ต่อไป

2.2.5 การพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการพยากรณ์เชิงเศรษฐมิติ (econometric forecasting) ใครจะขอกล่าวถึงการวิเคราะห์การถดถอย (regression analysis) สักเล็กน้อย ในสมการถดถอยนั้น ตัวแปรอิสระจะต้องอยู่ภายนอกอิทธิพลของตัวแปรตามและจะเป็นอิสระต่อกันด้วย ข้อสมมุตินี้ใช้ได้และมีเหตุผลผลในหลาย ๆ สถานการณ์ แต่ในบางสถานการณ์ข้อสมมุตินี้ก็อาจใช้ไม่ได้ เช่น สมมุติว่าปริมาณขายเป็นฟังก์ชันของ GDP (Gross Domestle Product) ราคาขาย และการโฆษณา ถ้าจะพยากรณ์การขายในรูปแบบนี้โดยวิธีการถดถอย ตัวแปรอิสระในที่นี้คือ GDP ราคาขายและการโฆษณา ซึ่งจะต้องอยู่ภายนอกอิทธิพลของการขายและเป็นอิสระระหว่างกันด้วย จะเห็นว่า GDP เป็นตัวแปรอิสระซึ่งไม่ถูกระทบกระเทือนจากปริมาณขาย ราคาขายหรือการโฆษณา แต่ข้อสมมุติดังกล่าวข้างต้นไม่น่าจะใช้ได้กับตัวแปรอิสระ ราคาขายและการโฆษณาเพราะถ้าต้นทุนต่อหน่วยอยู่ในรูปฟังก์ชันกำลังสองระดับการขายที่แตกต่างกันย่อมได้ต้นทุนต่อหน่วยที่แตกต่างกันด้วย และค่าใช้จ่ายในการโฆษณาย่อมมีผลกระทบต่อราคาขายแน่ ในทางกลับกันราคาขายย่อมขึ้นอยู่กับปริมาณขายและปริมาณขายนี้อาจมีผลต่อระดับการโฆษณาก็ได้ จะเห็นว่าในสถานการณ์เช่นนี้แสดงให้เห็นว่าตัวแปรเหล่านี้มีความพึ่งพิงซึ่งกันและกัน (interdependency) และหากความพึ่งพิงซึ่งกันและกันนี้มีมาก การวิเคราะห์การถดถอยก็อาจใช้ไม่ได้ ดังนั้น ในรูปแบบเศรษฐมิติปัญหาดังกล่าวจึงอาจเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ปริมาณขาย} &= f(\text{GDP, ราคาขาย, การโฆษณา}) \\ \text{ต้นทุน} &= f(\text{ระดับการผลิต, ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ}) \\ \text{ค่าใช้จ่ายในการขาย} &= f(\text{การโฆษณา, ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ}) \\ \text{ราคาขาย} &= f(\text{ต้นทุน, ค่าใช้จ่ายในการขาย}) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า แทนที่จะมีเพียงหนึ่งสมการอย่างในการวิเคราะห์การถดถอย แต่มีถึง 4 สมการขั้นตอนจากนี้ไปจะเหมือนกับการวิเคราะห์การถดถอยคือ กำหนดรูปแบบฟังก์ชันในสมการทั้ง 4 แล้ว ประมาณค่าของพารามิเตอร์ทั้งหมดพร้อม ๆ กัน แล้วทดสอบนัยสำคัญของผลลัพธ์และความถูกต้องของข้อสมมุติ จะเห็นว่าความได้เปรียบของการพยากรณ์เศรษฐมิตินี้ เมื่อเปรียบเทียบกับ

การวิเคราะห์การถดถอยที่สำคัญคือ ค่าของตัวแปรอิสระบางตัวถูกกำหนดขึ้นเองภายใต้ตัวแบบทำให้ผู้ใช้ไม่ต้องไปคาดคะเนค่าของตัวแปรอิสระเหล่านั้น หากพิจารณาในแง่นี้ อาจกล่าวได้ว่าความถูกต้องของการพยากรณ์เศรษฐกิจจะดีกว่าการวิเคราะห์การถดถอย แต่ปัญหาที่ต้องกำหนดรูปแบบฟังก์ชันต่าง ๆ ซึ่งเป็นความยุ่งยากของผู้พยากรณ์ด้วยวิธีวิเคราะห์การถดถอยรู้สึกจะยังคงเป็นปัญหาอยู่เช่นเดิม

2.2.6 อนุกรมเวลา Box-Jenkins

ความลำบากในการพยากรณ์ด้วยวิธีอนุกรมเวลาและแบบคลาสสิกเป็นที่ทราบกันดี โดยเฉพาะเมื่ออนุกรมเวลามีได้มีรูปแบบของแนวโน้ม วัฏจักร หรือฤดูกาลที่เด่นชัด การวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบ Box-Jenkins ได้ขจัดปัญหาดังกล่าวให้หมดไป นอกจากนี้ Box-Jenkins ได้เปลี่ยนปรัชญาในการพยากรณ์ใหม่ในแง่ที่ว่า ในการพยากรณ์ด้วยวิธีอื่น ๆ ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ผู้ที่สร้างตัวแบบพยากรณ์จะต้องกำหนดรูปแบบของความสัมพันธ์ขึ้นก่อน จึงจะทำการวิเคราะห์ต่อไปได้ เช่น ในการวิเคราะห์การถดถอยจะต้องกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระ ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิกรูปแบบของแนวโน้มจะต้องกำหนดขึ้น เป็นต้น แต่วิธี Box-Jenkins ไม่มีการกำหนดรูปแบบตายตัวขึ้นก่อนทำการวิเคราะห์ ในระหว่างการวิเคราะห์รูปแบบจะถูกกำหนดขึ้นมาเอง ขั้นตอนของวิธี Box-Jenkins พอสรุปได้ ดังนี้

1. วิเคราะห์สหสัมพันธ์ในตัวเอง (autocorrelation) และสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน (partial autocorrelation) ของข้อมูลในอนุกรมเวลาและผลต่างของข้อมูล
2. ผลการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่ 1 จะใช้ในการเลือกตัวแบบพยากรณ์
3. ประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบและตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ
4. ถ้าผลการตรวจสอบปรากฏว่า ตัวแบบไม่มีความเหมาะสม ผู้วิเคราะห์จะต้องกลับไปขั้นตอนที่ 2 โดยเลือกตัวแบบพยากรณ์ใหม่ โดยอาศัยผลการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่ 1 และการตรวจสอบในขั้นตอนที่ 3 แล้วทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 ใหม่ ถ้าผลการตรวจสอบปรากฏว่ามีความเหมาะสมในตัวแบบ ตัวแบบนี้ก็จะนำไปใช้ในการพยากรณ์

จากขั้นตอนดังกล่าวข้างต้นจะเห็นว่า สหสัมพันธ์ในตัวเองมีความสำคัญต่อวิธีการของ Box-Jenkins เป็นอย่างมาก สหสัมพันธ์ในตัวเองเป็นมาตรการวัดความสัมพันธ์ในค่าของข้อมูลที่เกิดขึ้น ณ เวลาต่าง ๆ ซึ่งจะบ่งถึงโครงสร้างของข้อมูลและลักษณะการเปลี่ยนแปลงในข้อมูล ในกรณีที่ข้อมูลเป็นข้อมูลสุ่มอย่างสมบูรณ์ (completely random) สหสัมพันธ์จะมีค่าเท่ากับศูนย์หมด แต่ถ้าข้อมูลมีความพึ่งพิงต่อกัน สหสัมพันธ์จะมีค่าสูง ดังนั้น เมื่อคำนวณสหสัมพันธ์ในตัวเองของข้อมูลเรียบร้อยแล้ว จะทำให้ทราบถึงโครงสร้างของข้อมูล ซึ่งจะเป็นอย่างมากในการเลือกตัวแบบพยากรณ์ และผลการวิเคราะห์ค่าคงเหลือในการตรวจสอบจะแนะนำการปรับปรุงตัวแบบด้วย

ดังนั้น ถึงแม้ผู้วิเคราะห์ขาดประสบการณ์ แต่ถ้ามีความเข้าใจในเรื่องสหสัมพันธ์ ก็อาจได้ตัวแบบพยากรณ์ที่ดีได้ อนึ่ง ช่วงความเชื่อมั่นของค่าพยากรณ์ก็อาจสร้างขึ้นได้ในวิธีการ Box-

Jenkins เมื่อได้ตัวแบบพยากรณ์แล้ว การพยากรณ์จะเป็นไปได้อย่างง่ายดาย และสามารถกระทำด้วยมือไม่ต้องอาศัยคอมพิวเตอร์ ในปัจจุบันนี้วิธีการ Box-Jenkins เป็นเทคนิคการพยากรณ์ที่ให้ความถูกต้องสูงสุดวิธีหนึ่ง

2.3 เทคนิคการทำให้เรียบ

เทคนิคการทำให้เรียบ (smoothing techniques) เป็นระเบียบวิธีการพยากรณ์ที่ได้รับความนิยมอย่างกว้างขวางในวงการวิชาการ ได้พัฒนาตัวแบบการพยากรณ์มากมายภายใต้แนวความคิดของเทคนิคการทำให้เรียบทำให้มีตัวแบบการพยากรณ์สำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวในลักษณะปราศจากแนวโน้ม ในลักษณะที่มีแนวโน้มและในลักษณะที่มีฤดูกาลทั้งที่มีและไม่มีแนวโน้ม จึงอาจกล่าวได้ว่า ไม่ว่าจะข้อมูลจะมีการเคลื่อนไหวในลักษณะใดจะสามารถหาตัวแบบการพยากรณ์ที่เหมาะสมภายใต้แนวความคิดของเทคนิคการทำให้เรียบสำหรับข้อมูลได้

เทคนิคการทำให้เรียบเป็นการพยากรณ์ภายใต้แนวความคิดที่ว่าพฤติกรรมในอดีตของตนเองมีความเพียงพอที่จะพยากรณ์พฤติกรรมในอนาคตของตนเองได้ ในบทนี้จะจำแนกตัวแบบการพยากรณ์ออกเป็น 3 ประเภทใหญ่ ๆ ตัวแบบการพยากรณ์ประเภทที่ 1 เป็นตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ (constant mean model) ซึ่งมีความเหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวแบบปราศจากแนวโน้มหรือแบบที่ระดับข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างช้า ตัวแบบการพยากรณ์ประเภทที่ 2 เป็นตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้น (linear trend model) ตัวแบบการพยากรณ์ประเภทนี้มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น และบางครั้งอาจมีแนวโน้มลดลง ตัวแบบการพยากรณ์ประเภทที่ 3 เป็นตัวแบบฤดูกาล (seasonality model) ซึ่งเหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวแบบมีฤดูกาล

2.3.1 ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ (Constant Mean Model)

ตัวแบบประเภทนี้พัฒนาขึ้นสำหรับข้อมูลที่เคลื่อนไหวรอบ ๆ ค่าคงที่ค่าหนึ่ง ค่าคงที่ดังกล่าวอาจจะคงที่ตลอดช่วงระยะเวลายาวนาน หรือคงที่เฉพาะในช่วงระยะเวลาหนึ่ง ๆ และเปลี่ยนแปลงอย่างเชื่องช้าจากช่วงระยะเวลาหนึ่งไปยังอีกช่วงระยะเวลาหนึ่ง ดังนั้น ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่จึงจำแนกออกเป็น 2 ตัวแบบ คือ ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะยาว (global constant mean model) และตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะสั้น (local constant mean model)

1. ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะยาว (Global Constant Mean Model)

ตัวแบบนี้อาจเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$X_t = \mu + \varepsilon_t \quad t=1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

ค่าของตัวแปร X ณ เวลา t ประกอบด้วยค่าคงที่ μ และตัวแปรสุ่ม ε ณ เวลา t ε_t เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ ε_t และ ε_k เมื่อ $t \neq k$ ไม่มีความพึ่งพิงต่อกัน แต่มีการแจกแจงแบบเดียวกัน โดยมีค่าคาดหวังเท่ากับศูนย์ และมีค่าความแปรปรวนเป็นค่าคงที่เท่ากับ σ^2

เนื่องจากการพยากรณ์ค่า X_{t+k} อาจกระทำ ณ จุดเวลา $t, t+1, t+2, \dots$ จนถึง $t+k-1$ ซึ่งอาจได้ค่าพยากรณ์ที่แตกต่างกัน จึงควรสร้างสัญลักษณ์ของค่าพยากรณ์ให้ชัดเจนถึงจุดที่กระทำการพยากรณ์และจำนวนหน่วยเวลาล่วงหน้าที่พยากรณ์ ดังนั้น ค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าที่กระทำ ณ จุดเวลา t ของ X_{t+k} จะเขียนแทนด้วย $\hat{X}_t(k)$ เมื่อพิจารณาตัวแบบนี้ให้ถ่องแท้ จากสมการ (2.29) จะพบว่าไม่มีพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าอยู่ 2 ตัว คือ ค่าคงที่ μ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์โดยตรงของตัวแบบ และค่าความแปรปรวน σ^2 ของตัวแปรสุ่ม ε_t ณ จุดเวลา t ข้อมูลที่มีอยู่จะเป็น X_1, X_2, \dots, X_t ซึ่งในค่า X แต่ละค่าจะมีค่า μ ผสมอยู่กับค่าของตัวแปรสุ่ม ε ในการคำนวณค่า $\hat{X}_t(k)$ จะเห็นได้จากสมการ (2.29) ว่าจะต้องประมาณค่าคงที่ μ และค่าของตัวแปรสุ่ม ε_{t+k} เนื่องจาก ε_{t+k} เป็นอิสระกับค่าในอดีตของตัวแปรสุ่ม $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t$ จึงมีอาจพยากรณ์ค่าของตัวแปรสุ่ม ε_{t+k} ได้ ดังนั้น จึงกำหนดให้ค่า ε_{t+k} เท่ากับค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ จากสมการ (2.1) ค่าพยากรณ์ของ X_{t+k} ที่กระทำ ณ จุดเวลา t จึงอาจเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_t(k) = \mu \quad (2.30)$$

การพยากรณ์ค่า X_{t+k} ไม่ว่า k จะมีค่าใด ๆ จะได้ค่า μ เสมอ เนื่องจาก μ เป็นค่าคงที่ที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา คำถามต่อไปก็คือ จะประมาณ μ ได้อย่างไร จากข้อมูลที่มีอยู่ คือ X_1, X_2, \dots, X_t ค่าประมาณที่เหมาะสมที่สุดของ μ ก็คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่มีอยู่ทั้งหมดในขณะนั้น ดังนั้น

$$\hat{X}_t(1) = \frac{\sum_{i=1}^t X_i}{t} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

รูปแบบดังกล่าวข้างต้นเรียกว่า explicit form ซึ่งการหาคำนวณจะเพิ่มขึ้นตามปริมาณข้อมูลที่เพิ่มขึ้น เพื่อมิให้การหาคำนวณจะต้องเพิ่มขึ้นตามปริมาณข้อมูลสมการ (2.31) ควรปรับปรุงใหม่ให้อยู่ในรูปแบบ recurrence ซึ่งจะทำได้หาพยากรณ์ใหม่จากค่าพยากรณ์เดิมกับข้อมูลใหม่ที่เพิ่งเกิดขึ้น ทำให้การหาคำนวณไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณข้อมูล จากสมการ (2.31) $\hat{X}_t(k)$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\hat{X}_t(1) &= \frac{\sum_{i=1}^t X_i}{t} \\ &= \frac{(t-1)\hat{X}_{t-1}(k) + X_t}{t} \quad ; k=1,2,3,\dots\end{aligned}\quad (2.32)$$

ซึ่งจะเห็นว่าค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้า $\hat{X}_t(k)$ ที่กระทำ ณ เวลา t เป็นค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักระหว่างค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าที่กระทำ ณ เวลา $t-1$ กับค่า X_t จึงทำให้การคาดการณ์ไม่ขึ้นอยู่กับการปริมาณข้อมูลเลย

สูตรที่จะใช้คำนวณค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้า ซึ่งกระทำการพยากรณ์ ณ จุดเวลา t อาจเขียนอยู่ในรูปแบบ error correction ซึ่งจะใช้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น ณ จุดเวลา t มาปรับแก้ค่าพยากรณ์ $\hat{X}_t(k)$ ที่ได้กระทำการพยากรณ์ หน่วยเวลาล่วงหน้า ณ เวลา $t-1$ ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในค่าพยากรณ์ ณ จุดเวลา t อาจเขียนได้เป็น

$$e_t = X_t - \hat{X}_{t-1}(1)$$

$$\text{หรือ } X_t = \hat{X}_{t-1}(1) + e_t$$

เมื่อนำค่า X_t ไปแทนค่าในสมการ (2.32) จะได้ผลดังนี้

$$\hat{X}_t(1) = \hat{X}_{t-1}(1) + e_t \quad (2.33)$$

จะเห็นได้ว่า ถ้า t มีค่ามาก ซึ่งหมายถึงมีข้อมูลที่จะนำมาใช้ในการพยากรณ์เป็นจำนวนมาก จะทำให้ความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ (forecast error) มีผลที่จะมาปรับค่าพยากรณ์น้อยมาก ทำให้ค่าพยากรณ์มีความเฉื่อยสูงขึ้นไป ไม่เปลี่ยนแปลงมากนักแม้จะมีข้อมูลใหม่ ๆ เข้ามา

2. ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะสั้น (Local Constant Mean)

ตัวแบบเฉลี่ยคงที่ระยะสั้นมีแนวความคิดคล้ายคลึงกับตัวแบบค่าเฉลี่ยที่ระยะยาว ในแง่ที่ว่า ข้อมูลอนุกรมเวลาเคลื่อนไหวรอบค่าคงที่ค่าหนึ่ง แต่ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะสั้นเห็นว่า ในบางสภาพการณ์ค่าเฉลี่ยคงที่มีได้มีค่าคงที่ตลอดระยะเวลายาวนาน แต่มีค่าคงที่ในช่วงระยะสั้น ๆ (locality) และมีค่าเปลี่ยนแปลงที่ไม่รวดเร็วนัก ดังนั้น ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะสั้น จึงอธิบายได้สมการ 2.34

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (2.34)$$

โดย μ_t เป็นค่าคงที่ในช่วงระยะสั้น และอาจมีค่าเปลี่ยนแปลงได้อย่างเชื่องช้า ส่วน ε_t เป็นความรบกวนสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกัน แต่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเดียวกัน โดยมีค่าคาดหวังเท่ากับศูนย์ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 การพยากรณ์ค่า X_t ในสมการ (2.34) จึงเป็นการพยากรณ์ค่าคงที่ ซึ่งอาจเปลี่ยนแปลงค่าได้คือ μ_t ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการพยากรณ์โดยค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียว (single moving average) และการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลขั้นเดียว (single exponential smoothing)

- ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียว (Single Moving Average)

จากแนวความคิดที่ว่าในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ อนุกรมเวลาเคลื่อนไหวรอบค่าคงที่ค่าหนึ่ง จึงนำไปสู่การพยากรณ์ค่าคงที่นั้น ๆ โดยเฉลี่ยของข้อมูลในช่วงระยะเวลาสั้น ดังกล่าว ดังนั้น ถ้าในช่วงระยะเวลาดังกล่าว มีจำนวนข้อมูลอยู่ n พจน์ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลา ล่วงหน้าที่ทำการพยากรณ์ ณ เวลา t จึงเท่ากับค่าเฉลี่ยของข้อมูล n พจน์

$$\hat{X}_t(1) = \frac{X_{t-n+1} + X_{t-n+2} + \dots + X_t}{n} \quad (2.35)$$

เมื่อเวลาได้เคลื่อนที่ไปถึงหน่วยเวลา $t+1$ ค่าจริงของ x_{t+1} ก็ปรากฏค่าพยากรณ์ ที่กระทำการ ณ เวลา $t+1$ ก็ยังเป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล n พจน์ แต่เป็น n พจน์ล่าสุดโดยเอา x_{t+1} ซึ่งเป็นข้อมูลที่เพิ่งเข้ามาไปแทน x_{t-n+1} ซึ่งได้เข้ามาแล้วตั้งแต่ $t+1$ หน่วยเวลา

$$\hat{X}_{t+1}(1) = \frac{X_{t-n+2} + X_{t-n+3} + \dots + X_t + X_{t+1}}{n}$$

ซึ่งเขียนใหม่ในรูป recurrence ได้เป็น

$$\hat{X}_{t+1}(1) = \hat{X}_t(1) + \frac{X_{t+1} - X_{t-n+1}}{n} \quad (2.36)$$

สมการ (2.36) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าพยากรณ์ใหม่กับค่าพยากรณ์เก่าโดยปรับค่าพยากรณ์เก่าด้วยผลต่างของข้อมูลล่าสุดกับข้อมูลเก่าสุดหารด้วยจำนวนพจน์ที่ใช้ในการหาค่าเฉลี่ย ซึ่งจะเห็นว่า ถ้าจำนวนพจน์ที่ใช้ในการหาค่าเฉลี่ยมีจำนวนมาก ส่วนที่จะปรับค่าพยากรณ์เก่าจะมีค่าน้อยทำให้ค่าพยากรณ์ใหม่มีค่าใกล้เคียงกับค่าพยากรณ์เก่า จึงมีการกล่าวว่าค่าพยากรณ์จะมีค่าเฉื่อยสูง (high inertia) ถ้าพจน์ที่ใช้ในการหาค่าเฉลี่ยมีจำนวนมาก สมการ (2.36) อาจเขียนใหม่ในรูปแบบที่ใช้หาค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ มาปรับแก้ (error correction) ได้ดังนี้

$$\hat{X}_{t+1}(1) = \frac{n+1}{n} \hat{X}_t(1) + \frac{e_{t+1} - X_{t-n+1}}{n} \quad (2.37)$$

- การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลชั้นเดียว (Single Exponential Smoothing)

การหาค่าเฉลี่ยด้วยวิธีการเคลื่อนที่นั้นได้ให้น้ำหนักของข้อมูลที่หน่วยเวลาต่างๆเท่า ๆ กัน ซึ่งอาจมีข้อโต้แย้งได้มาก ในกรณีที่ข้อมูลไม่มีฤดูกาล ข้อมูลที่หน่วยเวลาใกล้เคียงกับปัจจุบันน่าจะมีสาระที่เป็นประโยชน์ในการประมาณค่าพยากรณ์มากกว่าข้อมูลในอดีตที่ห่างไกล ดังนั้น วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล จึงให้น้ำหนักต่าง ๆ กันสำหรับข้อมูลที่หน่วยเวลาต่าง ๆ โดยจะให้น้ำหนักของข้อมูลลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลตามหน่วยเวลาที่ห่างออกไปในอดีต ลักษณะการให้น้ำหนักกับข้อมูลจะเป็นดังนี้

ข้อมูล	X_1	X_2	X_3	...	X_{t-2}	X_{t-1}	X_t
น้ำหนัก	a^{t-1}	a^{t-2}	a^{t-3}	...	a^2	a^1	a^0

เมื่อ a คือค่าคงที่เรียกว่า ปัจจัยส่วนลด (discounting factor) และ $0 < a < 1$ ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้า เมื่อทำการพยากรณ์ ณ เวลา t ของวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลชั้นเดียว จึงเป็นค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก ดังนี้

$$\hat{X}_t(1) = \frac{\sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r}}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r} \quad (2.38)$$

การหาคำนวณการพยากรณ์ในสมการ (2.38) จะเพิ่มอย่างรวดเร็ว เมื่อหน่วยเวลาเพิ่มขึ้น ดังนั้น เพื่อให้การคำนวณมากขึ้นตามหน่วยเวลาที่เพิ่มขึ้น

$$\text{ให้ } S_t = \sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r} \quad (2.39)$$

$$W_t = \sum_{r=0}^{t-1} a^r \quad (2.40)$$

จากคำนิยามในสมการ (2.39) ความสัมพันธ์ระหว่าง S_t กับ S_{t-1} อาจเขียนได้เป็น

$$S_t = a S_{t-1} + X_t \quad (2.41)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$W_t = a W_{t-1} + 1 \quad (2.42)$$

โดยกำหนดให้ s_0 และ w_0 มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น สูตรในรูปแบบ recurrence สำหรับค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้า เมื่อทำการพยากรณ์ ณ เวลา t จึงเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_t(1) = S_t / W_t \quad (2.43)$$

พิจารณาสมการ (2.40) ให้ละเอียด อาจกล่าวได้ว่า w_t เป็นผลบวกอนุกรมเรขาคณิต ค่า w_t เมื่อ t มีค่ามาก จะมีค่าเท่ากับ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_t = \frac{1}{1-a} \quad (2.44)$$

ดังนั้น กรณีที่ t มีค่าสูง ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าในสมการ (2.44) จะประมาณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ให้ } \hat{X}_t(1) &= (1-a) \sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r} \\ &= (1-a)(X_t + aX_{t-1} + a^2X_{t-2} + \dots) \\ &= (1-a)X_t + a(1-a)(X_{t-1} + a^2X_{t-2} + \dots) \\ &= (1-a)X_t + \hat{X}_{t-1}(1) \end{aligned} \quad (2.45)$$

ส่วนค่าคาดหมายของค่าพยากรณ์นั้น เมื่อได้พิจารณาสมการ (2.43) แล้ว จะมีค่าเท่ากับ อัตราส่วนของค่าคาดหมายของ s_t กับ w_t ซึ่งค่าคาดหมายของ s_t อาจเขียนได้จากสมการ (2.39) ได้เท่ากับ

$$E(S_t) = \sum_{r=0}^{t-1} a^r \mu_{t-r}$$

ดังนั้น ค่าคาดหมายของค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าจึงมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} E[\hat{X}_t(1)] &= E(S_t) / W_t \\ &= \frac{\sum_{r=0}^{t-1} a^r \mu_{t-r}}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r} \end{aligned} \quad (2.46)$$

ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของค่าคงที่ μ_t ที่อาจเปลี่ยนแปลงได้อย่างเชิงซ้ำ ส่วนค่าคาดหวังของ x_t ซึ่งเขียนได้จากสมการ (2.34) เป็น

$$E(X_t) = \mu_t \quad (2.47)$$

จะเห็นได้ว่า ภายใต้สมมติฐานที่ว่าค่าคงที่ μ_t อาจเปลี่ยนแปลงค่าได้อย่างเชิงซ้ำและในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ ค่าเฉลี่ยของค่าที่ μ_t มีค่าคงที่ μ ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของค่าคงที่ μ_t ในอดีตจึงเป็นค่าประมาณของ μ ที่เหมาะสมและมีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริง อย่างไรก็ตาม หากค่าคงที่ μ_t มีค่าคงที่จริงเท่ากับ μ ค่าคาดหวังของค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้า ในสมการ(2.46) จะกลายเป็น

$$E[\hat{X}_t(1)] = \mu$$

ซึ่งเท่ากับค่าคาดหวังของข้อมูลในสมการ (2.48)

ความแปรปรวนของ $\hat{X}_t(1)$ อาจเขียนได้จากสมการ (2.42) เท่ากับ

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{X}_t(1)] &= \text{Var}\left(\frac{S_t}{W_t}\right) \\ &= \frac{\text{Var}(S_t)}{W_t^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

จากสมการ(2.34) และ (2.38)

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_t) &= E[S_t - E(S_t)]^2 \\ &= E\left[\sum_{r=0}^{t-1} a^r \varepsilon_{t-r}\right]^2 \\ &= \sum_{r=0}^{t-1} a^{2r} \sigma^2 \\ &= \frac{1-a^{2t}}{1-a^2} \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

โดยคำนิยามในสมการ (2.39) w_t เป็นผลรวมของอนุกรมเรขาคณิต t พจน์ จึงอาจเขียนได้เท่ากับ

$$W_t = \frac{1-a^t}{1-a}$$

ดังนั้น ความแปรปรวนของค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าในสมการ (2.48)

จึงกลายเป็น

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{X}_t(1)] &= \frac{(1-a)^2}{(1-a^t)^2} \cdot \frac{1-a^{2t}}{1-a^2} \sigma^2 \\ &= \frac{(1-a)}{(1+a)} \cdot \frac{1+a^t}{1-a^t} \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

และเมื่อ t มีค่ามากขึ้น ความแปรปรวนในสมการ (2.50) จะมีค่าเข้าใกล้

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{X}_t(1)) = \frac{1-a}{1+a} \sigma^2 \quad (2.51)$$

ซึ่งจะเห็นว่าความแปรปรวนของค่าพยากรณ์จากวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลชั้นเดียว จะเข้าไปสู่ค่าคงที่เมื่อดำเนินการพยากรณ์ไปได้ระยะหนึ่ง การที่ความแปรปรวนของค่าพยากรณ์มีค่าคงที่สามารถอธิบายได้จากแนวความคิดของวิธีการพยากรณ์วิธีนี้นั่นคือ เมื่อมีข้อมูลใหม่เข้ามา ข้อมูลเก่าจะมีความสำคัญน้อยลง ดังนั้นถึงแม้ว่าจำนวนข้อมูลในอดีตที่มีอยู่จะมีจำนวนมาก (t มีค่ามาก) ก็ไม่ทำให้สาระของข้อมูลเหล่านั้นที่มาใช้ในการพยากรณ์มีมากขึ้น เนื่องจากน้ำหนักแบบเอกซ์โปเนนเชียล ที่ใช้ในการคำนวณค่าเฉลี่ยจะมีค่าน้อยมากสำหรับข้อมูลในอดีตที่ห่างไกลไปจากปัจจุบัน สาระของข้อมูลในอดีตที่อยู่ใกล้กับปัจจุบัน จะมีอิทธิพลมากต่อค่าพยากรณ์ จึงอาจกล่าวได้ว่าวิธีการที่ใช้ข้อมูลจำนวนมากในการพยากรณ์ จะไม่ทำให้เส้นพยากรณ์ของตัวแบบการพยากรณ์ด้วยวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลมีความละเอียดเพิ่มขึ้น จากสมการ (2.51) จะเห็นว่าเมื่อกำหนดค่าปัจจุบันส่วนลด (discounting factor) a มีค่าใกล้ 1 ความแปรปรวนของค่าพยากรณ์จะมีค่าใกล้ศูนย์ ทั้งนี้เนื่องจากน้ำหนักแบบเอกซ์โปเนนเชียลจะมีค่าลดลงในอัตราที่ช้ามากขึ้นเมื่อ a มีค่าใกล้ 1 มากขึ้น ทำให้สาระของข้อมูลในอดีตที่นำมาใช้ในการพยากรณ์ยังคงมีอยู่มาก ดังนั้น การเพิ่ม a มากขึ้นในวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล จึงเสมือนหนึ่งเป็นการเพิ่มจำนวนพจน์ n ในการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ และในทางตรงกันข้ามการที่ลดค่า a ในวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ก็เสมือนหนึ่งเป็นการลดจำนวนพจน์ n ในการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่

อนึ่ง การที่ความแปรปรวนของค่าพยากรณ์ แปรตรงข้ามกับค่าปัจจัยส่วนลด a ย่อมหมายความว่าความเรียบ (smoothness) ของเส้นพยากรณ์แปรตามค่าปัจจัยส่วนลด ดังนั้น จึงได้มีการนิยามค่าคงที่การทำให้เรียบ (smoothing constant) α ให้มีค่าเท่ากับ $1-a$ เพื่อที่จะได้บ่งชี้ความเรียบของเส้นพยากรณ์ เมื่อนำค่าคงที่การทำให้เรียบตามค่านิยามดังกล่าว ไปแทนค่าปัจจัยส่วนลดในสมการ (2.44) ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าจะเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_t(1) = \alpha X_t + (1 - \alpha) \hat{X}_{t-1}(1) \quad (2.52)$$

ซึ่งเป็นที่รู้จักกันแพร่หลายในเอกสารวิชาการมากกว่าสมการ (2.44)

เมื่อย้อนกลับไปพิจารณาตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะยาว (global constant mean) จะเห็นว่าความแปรปรวนของค่าพยากรณ์ เมื่อมีข้อมูลในอดีตมาก จะมีค่าเข้าสู่ศูนย์ทำเส้นพยากรณ์มีความเอียงสูงขึ้น มีการเคลื่อนไหวเปลี่ยนแปลงช้าลง แต่ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะสั้น (local constant mean) ทั้ง 2 ตัวแบบที่ได้กล่าวมาแล้ว ต่างก็มีค่าความแปรปรวนของค่าพยากรณ์คงที่มีได้ลดลงเข้าสู่ศูนย์เมื่อมีข้อมูลในอดีตมากขึ้น เส้นพยากรณ์ของตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะสั้นจึงมีการเคลื่อนไหวเปลี่ยนแปลงค่าได้ตามปกติ มิได้ขึ้นอยู่กับจำนวนข้อมูลในอดีตแต่ประการใด

ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าจากตัวแบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลในทางปฏิบัติ จะคำนวณโดยใช้สมการ (2.52) แต่สมการนี้จะมีปัญหาที่จุดเริ่มต้น ณ หน่วยเวลาที่หนึ่ง เพราะไม่มีค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าที่จะกระทำ ณ หน่วยเวลาที่ศูนย์ ดังนั้น เพื่อให้สามารถเริ่มต้นการคำนวณได้ จึงนิยามกำหนดให้ค่าพยากรณ์ $\hat{X}_1(1)$ มีค่าเท่ากับ X_1

2.3.2 ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้น (Linear Trend Model)

ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้กับข้อมูลที่มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นและ/หรือลดลง แนวโน้มจะมีลักษณะค่อนข้างคงที่ในช่วงระยะเวลายาว หรือลักษณะของแนวโน้มมีการเปลี่ยนแปลงน้อย เฉพาะในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ เท่านั้นก็ได้ ดังนั้น ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ จึงอาจใช้ได้กับข้อมูลที่มีแนวโน้มที่ไม่ใช่เชิงเส้นก็ได้ เพราะแนวโน้มที่ไม่ใช่เชิงเส้นก็อาจประกอบขึ้นจากแนวโน้มเชิงเส้นหลาย ๆ เส้น ในที่นี้จะกล่าวถึงตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นใน 2 แบบเช่นเดียวกับตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ คือตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาว (global linear trend model) และตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะสั้น (local linear trend model)

1. ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาว (Global Linear Trend Model)

ตัวแบบนี้สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$X_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t \quad (2.53)$$

โดย b_0 = ค่าคาดหมายของข้อมูลที่หน่วยเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$

b_1 = ความลาดชันของแนวโน้ม

ε_t = ความรบกวนสุ่มซึ่งมีค่าคาดหมายเป็นศูนย์ และความแปรปรวนเท่ากับค่าคงที่ σ^2 และเป็นอิสระต่อกัน

จากตัวแบบจะเห็นว่า b_1 เป็นความลาดชันที่มีค่าคงที่ นั่นคือ อัตราการเพิ่มขึ้นหรืออัตราการลดลงของข้อมูล จะไม่เปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ศึกษาและไม่ทราบว่าจะต้องประมาณค่า b_0 เป็นค่าคงที่อีกค่าหนึ่ง ซึ่งไม่ทราบค่า และจะต้องประมาณค่าให้ \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 เป็นค่าประมาณของ b_0 และ b_1 ตามลำดับ เส้นพยากรณ์จะเขียนขึ้นจาก

$$\hat{X}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t \quad (2.54)$$

ความแตกต่างระหว่างข้อมูลจริงกับค่าในเส้นพยากรณ์เรียกว่า ส่วนที่เหลือ (residual) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_t &= X_t - \hat{X}_t \\ &= X_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 t \end{aligned} \quad (2.55)$$

$\hat{\varepsilon}_t$ อาจพิจารณาเป็นค่าประมาณของความรบกวนสุ่ม ε_t ก็ได้ ซึ่งมักจะเป็นเกณฑ์ในการประมาณค่า b_0 และ b_1 ในสมการ (2.53) โดยหลักการแล้ว การประมาณค่า b_0 และ b_1 อาจกระทำได้หลายวิธี แต่วิธีที่นิยมใช้กันคือ วิธีกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด (least square method) นั่นคือ หาค่า \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 ที่ทำให้ผลบวกของ $\hat{\varepsilon}_t^2$ ทั้ง พจน์มีค่าน้อยที่สุด

$$\begin{aligned} \text{ให้ } S &= \sum_{i=1}^t \hat{\varepsilon}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^t \left(X_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 i \right)^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

เงื่อนไขที่ S จะมีค่าน้อยที่สุดก็คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{b}_0} &= -2 \sum_{i=1}^t \left(X_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 i \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^t X_i &= \hat{b}_0 t + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^t i \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{b}_1} &= -2 \sum_{i=1}^t \left(X_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 i \right) i = 0 \\ \sum_{i=1}^t i X_i &= \hat{b}_0 \sum_{i=1}^t i + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^t i^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

สมการที่ (2.57) และ (2.58) เป็นที่รู้จักกันในนามสมการปกติ (normal equations) เพื่อให้การแก้สมการดังกล่าวเพื่อหาค่า \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 ง่ายขึ้น จะทำการปรับค่าของหน่วยเวลาใหม่เพื่อให้ผลบวกของค่าของหน่วยเวลาใหม่เป็นศูนย์ ดังนั้น สมการ (2.57) และ (2.58) จะกลายเป็น

$$\sum_j X_j = \hat{b}_0 t \quad (2.59)$$

$$\sum_j jX_j = \hat{b}_0 \sum_j j^2 \quad (2.60)$$

ซึ่งค่าประมาณของ b_0 และ b_1 เขียนได้เท่ากับ

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= \sum_j X_j / t \\ &= \bar{X} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\hat{b}_1 = \sum_j jX_j / \sum_j j^2 \quad (2.62)$$

ดังนั้น เส้นพยากรณ์จึงเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_{T-1}(1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 T \quad (2.63)$$

โดย T เป็นหน่วยเวลาที่นับจากจุดเริ่มต้นใหม่

เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของการประมาณค่า b_0 และ b_1 จึงต้องศึกษาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 จากสมการ (2.61) ค่าคาดหมายของ \hat{b}_0 อาจเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} E(\hat{b}_0) &= E(\bar{X}) \\ &= E\left[\frac{\sum_j (b_0 + b_1 j + \varepsilon_j)}{t}\right] \\ &= b_0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

จากสมการ (2.62) ค่าคาดหมายของ \hat{b}_1 อาจเขียนได้เท่ากับ

$$E(\hat{b}_1) = E\left[\frac{\sum_j j(b_0 + b_1 j + \varepsilon_j)}{\sum_j j^2}\right] = b_1 \quad (2.65)$$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า ตัวประมาณ \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 เป็นค่าประมาณที่ไม่เียงแฉ ความแปรปรวนของ \hat{b}_0 อาจเขียนได้จากสมการ (2.61) และ (2.64) ได้เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\hat{b}_0) &= E(\hat{b}_0 - b_0)^2 \\
 &= E\left[\frac{\sum_j (b_0 + b_1 j + \varepsilon_j)}{t} - b_0\right]^2 \\
 &= \frac{1}{t^2} E\left[\sum_j \varepsilon_j\right]^2 \\
 &= \frac{1}{t^2} \sum_j E[\varepsilon_j^2] \\
 &= \sigma^2 / t
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

ความแปรปรวนของ \hat{b}_1 อาจเขียนได้จากสมการ (2.62) และ (2.65) ได้เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\hat{b}_1) &= E(\hat{b}_1 - b_1)^2 \\
 &= E\left[\frac{\sum_j j(b_0 + b_1 j + \varepsilon_j)}{\sum_j j^2} - b_1\right]^2 \\
 &= \frac{1}{\left(\sum_j j^2\right)^2} E\left[\sum_j j\varepsilon_j\right]^2 \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sum_j j^2}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าหากข้อมูลมีจำนวนมาก ความแปรปรวนของ \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 จะลดน้อยลงยิ่งผลให้ ค่าคะเน \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 มีความแม่นยำสูงขึ้น ซึ่งจะสะท้อนต่อไปยังเส้นพยากรณ์มีความแม่นยำสูงขึ้นด้วย ค่าคาดหมายของค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าทีกระทำ ณ เวลา t ซึ่งจุดเวลา $t+k$ คือจุด T ในจุดเริ่มต้นใหม่มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 E(X_t(k)) &= E(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 T) \\
 &= b_0 + b_1 T
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าคาดหมายของข้อมูล $E(X_T)$ ดังนั้น ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าที่กระทำ ณ เวลา t จึงมีค่าเท่ากับศูนย์

$$E[e_t(k)] = 0 \quad (2.69)$$

ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง อาจเขียนได้กับค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= E[e_t^2(k)] \\ &= \text{Var}[e_t(k)] \end{aligned} \quad (2.70)$$

ทั้งนี้เพราะค่าคาดหมายของ $e_t(k)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ สมการ (2.70) อาจเขียนใหม่ในรูปของผลต่างระหว่างค่าจริงของข้อมูลกับค่าพยากรณ์ได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \text{Var}\left[\left(b_0 - \hat{b}_0\right) + \left(b_1 - \hat{b}_1\right)T + \varepsilon_T\right] \\ &= \text{Var}\left(\hat{b}_0\right) + T^2 \text{Var}\left(\hat{b}_1\right) + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{t} + \frac{T^2 \sigma^2}{\sum_j j^2} + \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{T^2}{\sum_j j^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

เมื่อกระทำการพยากรณ์หลายหน่วยเวลาล่วงหน้า ซึ่งหมายความว่า T มีค่ามากขึ้น จะเห็นได้ว่า MSE ในสมการ (2.71) จะมีค่ามากขึ้น ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นของค่าพยากรณ์เมื่อพยากรณ์ล่วงหน้าหลายหน่วยเวลา จะกว้างกว่าช่วงความเชื่อมั่นของค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้า แต่หากข้อมูลมีจำนวนมากขึ้น ซึ่งหมายถึง t มีค่ามากขึ้น MSE ของค่าพยากรณ์ที่พยากรณ์ล่วงหน้า k หน่วยเวลา จะมีค่าลดน้อยลง ซึ่งยังผลให้ช่วงความเชื่อมั่นแคบลง

การวิเคราะห์ดังกล่าวข้างต้นเป็นการวิเคราะห์ในรูปแบบ explicit จึงควรปรับการวิเคราะห์ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบ recurrence เพื่อความสะดวกในการคำนวณ \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 ในสมการปกติ (2.57) และ (2.58) ซึ่งเป็นค่าประมาณการที่คำนวณ ณ หน่วยเวลา t จึงควรระบุให้ชัดเจน โดยเปลี่ยนแปลงสัญลักษณ์ \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 ในสมการปกติ (2.57) และ (2.58) เป็น \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ตามลำดับ โดยกำหนดให้

$$\hat{b}_{0t} = \hat{b}_{0(t-1)} + \Delta \hat{b}_{0t} \quad (2.72)$$

$$\hat{b}_{1t} = \hat{b}_{1(t-1)} + \Delta \hat{b}_{1t} \quad (2.73)$$

ดังนั้น สมการปกติ (2.57) และ (2.58) ในรูปแบบ recurrence อาจเขียนได้เป็น

$$\sum_{i=1}^{t-1} X_i + X_t = \left(\hat{b}_{0(t-1)} + \Delta \hat{b}_{0t} \right) t + \left(\hat{b}_{1(t-1)} + \Delta \hat{b}_{1t} \right) \left(\sum_{i=1}^{t-1} i + t \right) \quad (2.74)$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} iX_i + tX_t = \left(\hat{b}_{0(t-1)} + \Delta \hat{b}_{0t} \right) \left(\sum_{i=1}^{t-1} i + t \right) + \left(\hat{b}_{1(t-1)} + \Delta \hat{b}_{1t} \right) \left(\sum_{i=1}^{t-1} i^2 + t^2 \right) \quad (2.75)$$

เนื่องจากค่า $\hat{b}_{0(t-1)}$ และ $\hat{b}_{1(t-1)}$ เป็นค่าที่ทำให้ผลบวกของ $\hat{\varepsilon}_i^2$ ตั้งแต่ $i=1$ ถึง $i=(t-1)$ มีค่าต่ำสุด สมการ (2.74) และ (2.75) จึงกลายเป็น

$$X_t = \hat{b}_{0(t-1)} + t\Delta \hat{b}_{0t} + t\Delta \hat{b}_{1(t-1)} + \Delta \hat{b}_{1t} \sum_{i=1}^t i \quad (2.76)$$

$$tX_t = t\hat{b}_{0(t-1)} + \Delta \hat{b}_{0t} \sum_{i=1}^t i + t^2 \hat{b}_{1(t-1)} + \Delta \hat{b}_{1t} \sum_{i=1}^t i^2 \quad (2.77)$$

ค่า $\hat{b}_{0(t-1)} + t\Delta \hat{b}_{1(t-1)}$ เป็นค่าพารามิเตอร์ X_t ที่กระทำ ณ หน่วยเวลา $(t-1)$ สมการ (2.76) และ (2.77) จึงอาจเขียนในรูปของความคลาดเคลื่อนได้เป็น

$$t\Delta \hat{b}_{0t} + \sum_{i=1}^t i\Delta \hat{b}_{1t} = e_t \quad (2.78)$$

$$\sum_{i=1}^t i\Delta \hat{b}_{0t} + \sum_{i=1}^t i^2 \Delta \hat{b}_{1t} = te_t \quad (2.79)$$

ค่า $\Delta \hat{b}_{0t}$ และ $\Delta \hat{b}_{1t}$ จึงเขียนได้เท่ากับ

$$\begin{aligned} \Delta \hat{b}_{0t} &= \frac{e_t \sum_{i=1}^t i^2 - te_t \sum_{i=1}^t i}{D_t} \\ &= \frac{t(1-t^2)e_t}{6D_t} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\Delta \hat{b}_{1t} = \frac{t(t-1)e_t}{2D_t} \quad (2.81)$$

โดย

$$\begin{aligned}
 D_t &= t \sum_{i=1}^t i^2 - \left(\sum_{i=1}^t i^2 \right)^2 \\
 &= t \left(\sum_{i=1}^{t-1} i^2 + t^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{t-1} i + 1 \right)^2 \\
 &= D_{t-1} + \frac{t(t-1)(2t-1)}{6}
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

ค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าที่กระทำ ณ เวลา t อาจเขียนได้เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_t(k) &= \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t}(t+k) \\
 &= \hat{X}_{t-1}(1) + \Delta \hat{b}_{0t} + k \hat{b}_{1t} + t \Delta \hat{b}_{1t}
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า เส้นพยากรณ์ที่กระทำ ณ หน่วยเวลา t เมื่อลากย้อนกลับไปในอดีต อาจไม่ผ่านค่าพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลาต่าง ๆ ที่มีใช้เวลา t เพราะจุดตัดที่แกน เมื่อ $t=0$ และความลาดชันที่ประมาณค่า ณ หน่วยเวลา t จะถูกปรับเปลี่ยนด้วย $\Delta \hat{b}_{0t}$ และ $\Delta \hat{b}_{1t}$ ในสมการ (2.80) และ (2.81) ตามลำดับ

การคำนวณตามสมการ (2.72) และ (2.73) จะต้องมีค่าเริ่มต้นสำหรับ \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ในการปฏิบัติ จะกำหนดให้

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_{0t} &= X_1 \\
 \hat{b}_{1t} &= 0 \\
 D_1 &= 0
 \end{aligned}$$

2. ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะสั้น (Local Linear Trend Model)

ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาวนั้นต้องอยู่บนสมมติฐานที่ว่าแนวโน้มของข้อมูลมีลักษณะเชิงเส้นและไม่เปลี่ยนแปลงเป็นระยะเวลานาน ซึ่งอาจไม่เป็นจริงในบางกรณีที่เกิดขึ้นในโลกแห่งความเป็นจริง แนวโน้มของข้อมูลอาจไม่เป็นเชิงเส้นแต่อาจประมาณได้ด้วยแนวโน้มเชิงเส้นหลาย ๆ เส้นที่มีความลาดชันที่แตกต่างกัน จึงอาจกล่าวได้ว่าในช่วงระยะเวลาด้าน (Locality of time) แนวโน้มของข้อมูลมีลักษณะเชิงเส้นและคงที่ เพื่อตอบสนองต่อข้อมูลที่มีแนวโน้มที่อาจไม่เป็นเชิงเส้นดังกล่าว จึงได้พัฒนาตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะสั้นขึ้นโดยความลาดชันของเส้นพยากรณ์สามารถปรับเปลี่ยนได้ ในที่นี้จะกล่าวถึงตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะสั้น โดยมีวิธีการ 4 วิธี คือ วิธีการของ Holt วิธีการกำลังสองต่ำสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Discounted Least

Squares) วิธีการเคลื่อนที่ที่สองชั้น (Double Moving Average) และวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล สองชั้น (Double Exponential Smoothing)

2.1) วิธีการของ Holt (Holt's Method)

ในตัวแทนแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาวพารามิเตอร์ b_0 และ b_1 จะกำหนดค่าให้เท่ากับ \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 ตามสมการ (2.61) และ (2.62) ซึ่งมีค่าคงที่ วิธีการของ Holt มีแนวความคิดที่จะปรับค่า \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 ตามลักษณะของข้อมูลที่ไหลเข้ามาโดยวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล เนื่องจากข้อมูล อาจมีความลาดชันแตกต่างกันที่หน่วยเวลาต่าง ๆ การนิยาม b_0 ดังในตัวแทนแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาว ซึ่งเป็นค่าของอนุกรมที่จุดเริ่มต้นของการนับเวลา (time origin) อาจมีความไม่เหมาะสมและเกิดความสับสนได้ง่าย เมื่อหน่วยเวลาเคลื่อนห่างไกลออกจากจุดเริ่มต้น การเปลี่ยนแปลงความลาดชัน อาจทำให้ค่าของ b_0 เปลี่ยนแปลงอย่างมากมาได้ จึงเห็นควรที่จะนิยาม b_{0t} เป็นระดับ (level) ของข้อมูล ณ จุดเวลา t และ b_{1t} เป็นความลาดชันของข้อมูล ณ จุดเวลา t ดังนั้น ตัวแบบ ณ จุดเวลา t จึงเขียนได้เป็น

$$X_{t+k} = b_{0t} + b_{1t}k + \varepsilon_{t+k} \quad (2.84)$$

ตามวิธีการของ Holt ระดับของข้อมูลจะประมาณค่าโดยวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยค่าคงที่การทำให้เรียบ α

$$\hat{b}_{0t} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}(1) \quad (2.85)$$

แนวความคิดที่จะประมาณความลาดชันของข้อมูล ณ จุดเวลา t อาจมีได้หลายแนวความคิด แนวความคิดหนึ่งจะตั้งอยู่บนพื้นฐานของสมการ (2.84) กล่าวคือ เมื่อ $k = 0$ และ $k = -1$ สมการ (2.84) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} X_t &= b_{0t} + \varepsilon_t \\ X_{t-1} &= b_{0t} + b_{1t} + \varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

ผลต่างของสมการทั้ง 2 จะเขียนได้เท่ากับ

$$X_t - X_{t-1} = b_{1t} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \quad (2.86)$$

ซึ่งมีค่าคาดหวังเท่ากับ

$$E(X_t - X_{t-1}) = b_{1t} \quad (2.87)$$

ดังนั้น ผลต่าง $X_t - X_{t-1}$ น่าจะใช้เป็นค่าประมาณของ b_{1t} ได้ แต่เมื่อพิจารณาสมการ (2.86) ให้ถ่องแท้ จะเห็นว่าผลต่าง $X_t - X_{t-1}$ มีความแปรปรวนเป็น 2 เท่าของความแปรปรวนของความรบกวนสุ่ม จึงอาจทำให้การประมาณค่า b_{1t} ด้วยผลต่าง $X_t - X_{t-1}$ มีความคลาดเคลื่อนได้มาก

แนวความคิดในการประมาณค่า b_{1t} อีกแนวหนึ่งก็คือ ใช้ค่านิยามของ b_{0t} และ b_{1t} ซึ่งทำให้อาจเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ได้

$$b_{0t} = b_{0(t-1)} + b_{1(t-1)} \quad (2.88)$$

ดังนั้น ความลาดชันล่าสุดของข้อมูลที่อาจทราบได้ ณ จุดเวลา t ก็คือความลาดชันที่เกิดขึ้น ณ จุดเวลา $t-1$ $b_{1(t-1)}$ ซึ่งอาจประมาณค่าได้จาก

$$\hat{b}_{1(t-1)} = \hat{b}_{0t} - \hat{b}_{0(t-1)} \quad (2.89)$$

การประมาณค่า b_{1t} จึงอาจใช้แนวความคิดของการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยค่าคงที่การทำให้เรียบ

$$\hat{b}_{1t} = \beta \left(\hat{b}_{0t} - \hat{b}_{0(t-1)} \right) + (1 - \beta) \hat{b}_{1(t-1)} \quad (2.90)$$

เนื่องจาก b_{1t} เป็นความลาดชันซึ่งมักจะไม่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ค่าคงที่การทำให้เรียบ β จึงไม่ควรมีค่ามากให้ค่า \hat{b}_{1t} ในสมการ(2.90) เปลี่ยนแปลงช้า

เมื่อสามารถประมาณค่า \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ตามสมการ (2.85) และ (2.90) ตามลำดับ k ค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าที่พยากรณ์ ณ เวลา t จึงอาจเขียนได้เป็น

$$\hat{x}_t(k) = \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} k \quad (2.91)$$

สูตรที่ใช้ประมาณค่าระดับของข้อมูลในสมการ (2.85) อาจเขียนได้ใหม่ในรูปของการปรับแก้ด้วยความคลาดเคลื่อน (error correction form) ได้เป็น

$$\hat{b}_{0t} = \hat{X}_{t-1}(1) + \alpha e_t \quad (2.92)$$

ซึ่งเมื่อแทน $\hat{X}_{t-1}(1)$ ด้วยสมการ (2.91) ได้เป็น

$$\hat{b}_{0t} = \hat{b}_{0(t-1)} + \hat{b}_{1(t-1)} + \alpha e_t \quad (2.93)$$

เมื่อนำค่าผลต่าง $\hat{b}_{0t} - \hat{b}_{0(t-1)}$ ในสมการ(2.93) ไปแทนในสมการ (2.90) จะได้สูตรที่ใช้ประมาณค่าความลาดชันในรูปการปรับแก้ด้วยความคลาดเคลื่อน ดังนี้

$$\hat{b}_{1t} = \hat{b}_{1(t-1)} + \alpha\beta e_t \quad (2.94)$$

การเริ่มต้นการคำนวณ \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ตามสมการ (2.93) และ (2.94) ตามลำดับจะต้องทราบค่า \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} เมื่อ $t = 0$ ซึ่งค่าทั้ง 2 นี้ อาจประมาณค่าโดยวิธีการที่กล่าวในตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาว แต่ควรกระทำด้วยความรอบคอบ โดยการคัดเลือกข้อมูลจำนวนหนึ่งในช่วงแรกจากข้อมูลทั้งหมดเท่านั้น มิใช่ นำข้อมูลทั้งหมดประมาณค่า \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 จากตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาว ทั้งนี้เพราะแนวโน้มระยะยาวอาจมีทิศทางตรงข้ามกับแนวโน้มระยะสั้นก็ได้ ตามสมมติฐานของตัวแบบแนวโน้มระยะสั้นที่ยอมให้ความลาดชันในช่วงระยะเวลาหนึ่งอาจเปลี่ยนแปลงไปจากช่วงระยะเวลาที่ผ่านมาได้ ดังนั้น ในทางปฏิบัติมักจะนิยมที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} \hat{b}_{01} &= X_1 \\ \hat{b}_{11} &= 0 \\ \hat{X}_1(1) &= \hat{b}_{01} + \hat{b}_{11} \\ &= X_1 \end{aligned}$$

เพื่อมิต้องใช้ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาวประมาณค่าเริ่มต้น อนึ่งหากข้อมูลมีจำนวนพอสมควรเพื่อใช้ทดสอบตัวแบบพหุการณธ์ อิทธิพลของค่าเริ่มต้นที่มีผลต่อค่าพยากรณ์ ณ ระยะเวลาสุดท้ายจะน้อยมาก เพราะน้ำหนักที่ใช้ในการถ่วงเป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียล

- วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Discounted Least Squares)

ในตัวแบบ Global Trend การหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ b_0 และ b_1 ใช้วิธีที่ทำให้ผลบวกของความคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์กำลังสองมีค่าต่ำสุด นั่นคือ

$$\text{minimize } S = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i^2$$

โดย ε_i เป็นผลต่างระหว่างข้อมูลจริง ณ เวลา i กับค่าบนเส้นพยากรณ์ ณ จุดเวลาเดียวกัน วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ b_0 และ b_1 ดังกล่าว ให้น้ำหนักแก่ความคลาดเคลื่อน ณ เวลาต่าง ๆ เท่ากันหมด ซึ่งอาจจะไม่เหมาะสมสำหรับข้อมูลแนวโน้มมีลักษณะคงที่ในระยะสั้น ๆ และอาจเปลี่ยนทิศทางได้ สำหรับข้อมูลที่มีลักษณะเช่นนั้น น้ำหนักที่ให้แก่ความคลาดเคลื่อนที่ใกล้กับ

ปัจจุบัน ควรมากกว่าน้ำหนักที่ให้แก่วความคลาดเคลื่อนที่ห่างไกลจากปัจจุบัน ดังนั้น จึงได้มีการนำน้ำหนักแบบเอกซ์โปเนนเชียลมาใช้ในการกำหนดน้ำหนักให้แก่วความคลาดเคลื่อนเกณฑ์ที่ใช้ในการประมาณค่า b_0 และ b_1 จึงกลายเป็น

$$\min S = \sum_{r=0}^t a^r \hat{\varepsilon}_{t-r}^2 \quad (2.95)$$

โดย a มีค่าระหว่าง 0 กับ 1 ($0 < a < 1$) เกณฑ์ในสมการ (2.95) เป็นที่รู้จักกันในนามเกณฑ์กำลังสองต่ำสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (discounted least squares criterion) จากสมการ (2.84) ε_{t-r} อาจเขียนได้เป็น

$$\hat{\varepsilon}_{t-r} = x_{t-r} - \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} r \quad (2.96)$$

เมื่อนำค่า $\hat{\varepsilon}_{t-r}$ จากสมการ (2.96) ไปแทนค่าในสมการ (2.95) จะได้ผลดังนี้

$$S = \sum_{r=0}^t a^r \left(X_{t-r} - \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} r \right)^2 \quad (2.97)$$

เงื่อนไขที่ทำให้ S มีค่าต่ำสุด อาจเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{b}_{0t}} &= -2 \sum_{r=0}^{t-1} a^r \left(X_{t-r} - \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} r \right) = 0 \\ \hat{b}_{0t} \sum_{r=0}^{t-1} a^r - \hat{b}_{1t} \sum_{r=0}^{t-1} r a^r &= \sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r} \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{b}_{1t}} &= 2 \sum_{r=0}^{t-1} a^r \left(X_{t-r} - \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} r \right) r = 0 \\ \hat{b}_{0t} \sum_{r=0}^{t-1} r a^r - \hat{b}_{1t} \sum_{r=0}^{t-1} r^2 a^r &= \sum_{r=0}^{t-1} r a^r X_{t-r} \end{aligned} \quad (2.99)$$

จากสมการ (2.98) และ (2.99) \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} อาจเขียนได้เท่ากับ

$$\hat{b}_{0t} = \frac{\sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r} - \sum_{r=0}^{t-1} r^2 a^r X_{t-r} + \sum_{r=0}^{t-1} r a^r X_{t-r} - \sum_{r=0}^{t-1} r a^r}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r - \sum_{r=0}^{t-1} r^2 a^r + \left(\sum_{r=0}^{t-1} r a^r \right)^2} \quad (2.100)$$

$$\hat{b}_{1t} = \frac{\sum_{r=0}^{t-1} a^r \sum_{r=0}^{t-1} r a^r X_{t-r} - \sum_{r=0}^{t-1} r a^r \sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r}}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r - \sum_{r=0}^{t-1} r^2 a^r + \left(\sum_{r=0}^{t-1} r a^r \right)^2} \quad (2.101)$$

การคำนวณค่า \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ตามสมการ (2.100) และ (2.101) ตามลำดับ มีความไม่เหมาะสมและเป็นภาระมาก เมื่อต้องคำนวณค่า \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} หลาย ๆ หน่วยเวลา จึงควรที่จะปรับสูตรการคำนวณค่า \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} เป็นสูตรแบบ recurrence เพื่อมิให้ภาระการคำนวณเพิ่มขึ้นตามปริมาณข้อมูล

$$\text{ให้} \quad W_t = \sum_{r=0}^{t-1} a^r \quad (2.102)$$

ซึ่งอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$W_t = 1 + aW_{t-1} \quad (2.103)$$

$$\text{ให้} \quad A_t = \sum_{r=0}^{t-1} r a^r \quad (2.104)$$

ซึ่งกระจายออกได้เป็น

$$\begin{aligned} A_t &= a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \dots + (t-1)a^{t-1} \\ &= a(1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + (t-1)a^{t-2}) \\ &= a(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{t-2}) + a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + (t-2)a^{t-2} \\ &= a(W_{t-1} + A_{t-1}) \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\text{ให้} \quad B_t = \sum_{r=0}^{t-1} r^2 a^r \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned}
&= a + 2^2 a^2 + 3^2 a^3 + 4^2 a^4 + \dots + (t-1)^2 a^{t-1} \\
&= a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{t-1} + a^2 + 2^2 a^3 + 3^2 a^4 + \dots + (t-2)^2 a^{t-1} \\
&= aW_{t-1} + 2aA_{t-1} + aB_{t-1} \\
&= a(W_{t-1} + A_{t-1}) + (A_{t-1} + B_{t-1}) \\
&= A_t + a(A_{t-1} + B_{t-1})
\end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\text{ให้} \quad Y_t = \sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}
&= X_t + aX_{t-1} + a^2 X_{t-2} + \dots + a^{t-1} X_1 \\
&= X_t + a(X_{t-1} + a^2 X_{t-2} + \dots + a^{t-2} X_1) \\
&= X_t + aY_{t-1}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\text{ให้} \quad Z_t = \sum_{r=0}^{t-1} ra^r X_{t-r} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
&= aX_{t-1} + 2a^2 X_{t-2} + 3a^3 X_{t-3} + \dots + (t-1)a^{t-1} X_1 \\
&= a(X_{t-1} + aX_{t-2} + a^2 X_{t-3} + \dots + a^{t-2} X_1 + aX_{t-2} + 2a^2 X_{t-3} + \dots + (t-2)a^{t-2} X_1) \\
&= a(Y_{t-1} + Z_{t-1})
\end{aligned} \tag{2.111}$$

ค่าเริ่มต้นของสัญลักษณ์เหล่านี้ตามคำจำกัดความ คือ

$$W_1 = 1$$

$$A_1 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$Y_1 = X_1$$

$$Z_1 = 0$$

ดังนั้น เมื่อนำ w_t , A_t , B_t , Y_t และ Z_t ไปแทนค่าในสมการปกติ (2.98) และ (2.99) จะได้

$$\begin{aligned}
W_t \hat{b}_{0t} - A_t \hat{b}_{1t} &= Y_t \\
A_t \hat{b}_{0t} - A_t \hat{b}_{1t} &= Z_t
\end{aligned} \tag{2.112}$$

ซึ่งจากการแก้สมการ 2 สมการนี้ ได้ผลได้ดังนี้

$$\hat{b}_{0t} = C_t (B_t Y_t - A_t Z_t) \quad (2.113)$$

$$\hat{b}_{1t} = C_t (A_t Y_t - W_t Z_t)$$

โดย

$$C_t = 1/(B_t W_t - A_t^2) \quad (2.114)$$

จะเห็นได้ว่า ณ จุดเวลา t มีข้อมูล X_t เข้ามาใหม่ 1 ค่า การคำนวณค่า w_t ตามสมการ (2.103) A_t ตามสมการ (2.105) B_t ตามสมการ (2.107) Y_t ตามสมการ (2.109) และ Z_t ตามสมการ (2.111) สามารถกระทำได้ง่าย เมื่อระยะเวลาผ่านไปนาน ค่า w_t , A_t , B_t และ C_t จะเข้าใกล้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} w &= \lim_{t \rightarrow \infty} W_t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{t-1} a^r \\ &= \frac{1}{1-a} \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \rightarrow \infty} A_t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{t-1} r a^r = \frac{a}{(1-a)^2} \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{t \rightarrow \infty} B_t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{t-1} r^2 a^r = \frac{a}{(1-a)^2} \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (B_t W_t - A_t^2) \\ &= \frac{a(1+a)}{(1-a)^3} \cdot \frac{1}{1-a} - \frac{a^2}{(1-a)^4} = \frac{a}{(1-a)^4} \end{aligned} \quad (2.118)$$

- ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองชั้น (Double Moving Average)

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า หากข้อมูลมีแนวโน้มขึ้น ค่าที่คำนวณจากวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียว จะมีค่าต่ำกว่าข้อมูลจริง แต่ก็มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเช่นกัน และหากข้อมูลมีแนวโน้มลดลง ค่าที่คำนวณจากวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียว จะมีค่าสูงกว่าข้อมูลจริง โดยมีแนวโน้มลดลงเช่นเดียวกับข้อมูล ดังนั้น ในกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรงหากนำค่าที่คำนวณได้จากวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียวมาคำนวณด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่อีกครั้งในลักษณะเดียวกัน ค่าที่คำนวณด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่อีกครั้งเมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียว จะมีลักษณะเดียวกันกับค่าที่คำนวณด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียวเมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลจริง จึงมีแนวความคิดที่จะนำผลต่างระหว่างที่คำนวณด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองชั้นกับค่าที่คำนวณด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียวมาปรับแก้ค่าพยากรณ์

ตัวแบบข้อมูลที่มีแนวโน้มเชิงเส้นอาจอธิบายได้ด้วยสมการ

$$X_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t \quad (2.119)$$

ค่าที่คำนวณด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียว ณ เวลา t อาจเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} M_{1t} &= \frac{X_{t-n+1} + \dots + X_t}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left[\{b_0 + b_1(t-n+1) + \varepsilon_{t-n+1}\} + \{b_0 + b_1(t-n+2) + \varepsilon_{t-n+2}\} + \dots + \{b_0 + b_1 t + \varepsilon_t\} \right] \\ &= b_0 + b_1 t - \frac{n-1}{2} b_1 + \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_{t-r} \end{aligned} \quad (2.120)$$

เนื่องจากค่าคาดหมายของการรบกวนสุ่มมีค่าเท่ากับศูนย์ พจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการ (2.120) จึงอาจกำหนดให้ค่าเท่ากับศูนย์ได้ ดังนั้นค่าประมาณของ b_0 และ b_1 จึงอาจเขียนได้จากสมการ (2.120) ได้เป็น

$$M_{1t} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t - \frac{n-1}{2} \hat{b}_1 \quad (2.121)$$

ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองชั้น ณ เวลา t ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของค่าพยากรณ์ด้วยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียวล่าสุด n ค่า จึงเขียนได้เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 M_{2t} &= \frac{M_{1(t-n+1)} + M_{1(t-n+2)} \dots + M_{1t}}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \left[\left\{ \hat{b}_0 + \hat{b}_1(t-n+1) - \frac{n-1}{2} \hat{b}_1 \right\} + \left\{ \hat{b}_0 + \hat{b}_1(t-n+2) - \frac{n-1}{2} \hat{b}_1 \right\} + \dots + \left\{ \hat{b}_0 + \hat{b}_1 - \frac{n-1}{2} \hat{b}_1 \right\} \right] \\
 &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t - (n-1) \hat{b}_1 \tag{2.122}
 \end{aligned}$$

เมื่อลบสมการ (2.121) ด้วยสมการ (2.122) จะได้ผลลัพธ์

$$\hat{b}_1 = \frac{2}{n-1} (M_{1t} - M_{2t}) \tag{2.123}$$

ค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าที่พยากรณ์ ณ เวลา t อาจเขียนได้จากสมการ (2.119) เป็น

$$\hat{X}_t(k) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(t+k) = \hat{X}_t(0) + k \hat{b}_1$$

โดย $\hat{X}_t(0)$ คือ ค่าพยากรณ์ระดับของข้อมูล ณ เวลา t หรืออีกนัยหนึ่งคือจุดเริ่มต้นของเส้นพยากรณ์ที่พยากรณ์ ณ เวลา t นั้นเอง ดังนั้น เพื่อมิให้เกิดความสับสนในสัญลักษณ์จึงให้

$$\hat{b}_{0t} = \hat{X}_t(0) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t \tag{2.124}$$

เมื่อแทนค่า $\hat{b}_0 + \hat{b}_1 t$ จากสมการ (2.122) ลงในสมการ (2.124) จะได้ผลลัพธ์

$$\hat{b}_{0t} = M_{2t} + (n-1) \hat{b}_1$$

ซึ่งเมื่อนำค่า \hat{b}_1 จากสมการ (2.123) มาแทนแล้ว สมการจะกลายเป็น

$$\hat{b}_{0t} = 2M_{1t} - M_{2t} \tag{2.125}$$

เนื่องจากความลาดชันในสมการ (2.123) มีค่าเปลี่ยนแปลงตามค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียว และสองขั้นที่คำนวณ ณ เวลา t จึงเห็นควรที่จะปรับสัญลักษณ์ \hat{b}_1 เพื่อให้แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงที่อาจเกิดขึ้นได้ตามหน่วยเวลาเป็น \hat{b}_{1t}

$$\hat{b}_{1t} = \frac{2}{n-1} (M_{1t} - M_{2t}) \tag{2.126}$$

ดังนั้น ค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาล่วงหน้าพยากรณ์ ณ เวลา t จึงอาจเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_t(k) = \hat{b}_{0t} + k \hat{b}_{1t} \quad (2.127)$$

- การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลสองชั้น (Double Exponential Smoothing)

วิธีนี้อาจรู้จักกันในอีกชื่อว่าการทำให้เรียบเชิงเส้นแบบเอกซ์โปเนนเชียลของ

Brown (Brown's Linear Exponential Smoothing) ซึ่งมีแนวความคิดทำนองเดียวกันกับวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองชั้น ในกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้มที่อาจเปลี่ยนแปลงได้ดังในสมการ (2.72) ค่าที่คำนวณด้วยการทำให้เรียบชั้นเดียว ณ เวลา t อาจเขียนได้เท่ากับ

$$S_{1t} = \frac{\sum_{r=0}^{t-1} a^r X_{t-r}}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r} = \frac{\sum_{r=0}^{t-1} a^r (b_{0t} - b_{1t}r + \varepsilon_{t-r})}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r}$$

ซึ่งมีค่าคาดหวังเท่ากับ

$$E(S_{1t}) = b_{0t} - b_{1t} \frac{\sum_{r=0}^{t-1} ra^r}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r} \quad (2.128)$$

เมื่อ t มีค่ามาก สัมประสิทธิ์ของ b_{1t} จะมีค่าเข้าใกล้ $a/(1-a)$ ดังนั้น เมื่อ t มีค่ามาก สมการ (2.128) จึงกลายเป็น

$$E(S_{1t}) = b_{0t} - \frac{a}{1-a} b_{1t} \quad (2.129)$$

จึงอาจกล่าวได้ว่าค่าที่คำนวณด้วยการทำให้เรียบชั้นเดียวในกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรง จะมีค่าต่ำกว่าจุดเริ่มต้นของเส้นพยากรณ์ด้วยจำนวน $ab_{1t}/(1-a)$ และในกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้มลดลงเป็นเส้นตรง ค่าที่คำนวณด้วยการทำให้เรียบชั้นเดียว จะมีค่าสูงกว่าจุดเริ่มต้นของเส้นพยากรณ์ด้วยจำนวน $ab_{1t}/(1-a)$ เช่นกัน ดังนั้น การประมาณ b_{0t} จึงอาจเขียนได้จากสมการ (2.129) เป็น

$$\hat{b}_{0t} = S_{1t} + \frac{a}{1-a} b_{1t} \quad (2.130)$$

เมื่อนำค่าที่ได้คำนวณไว้ทำให้เรียบอีกครั้ง จะได้ค่าที่คำนวณด้วยการทำให้เรียบสองชั้นเป็น

$$S_{1t} = \frac{\sum_{r=0}^{t-1} a^r S_{1(1-r)}}{\sum_{r=0}^{t-1} a^r} \quad (2.131)$$

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วในกรณีที่มีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ค่าพยากรณ์ก็มีแนวโน้มเป็นเส้นตรง เช่นกัน แต่จะสูงกว่าหรือต่ำกว่าข้อมูลจริงด้วยจำนวนหนึ่งขึ้นอยู่กับแนวโน้มของข้อมูลจะลดลงหรือเพิ่มขึ้น ดังนั้น S_{2t} เมื่อเปรียบเทียบกับ S_{1t} จึงเหมือนกับ S_{1t} เมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลจริง

$$\begin{aligned} S_{1t} &= S_{2t} + \frac{a}{1-a} \hat{b}_{1t} \\ \text{ให้ } \hat{b}_{1t} &= \frac{1-a}{a} (S_{1t} - S_{2t}) \end{aligned} \quad (2.132)$$

เมื่อแทนค่า \hat{b}_{1t} ในสมการ (2.132) ลงในสมการ (2.130) จะได้ผลลัพธ์

$$\hat{b}_{0t} = 2S_{1t} - S_{2t} \quad (2.133)$$

ค่าพยากรณ์ k หน่วยเวลาด่วงหน้าที่ยพยากรณ์ ณ เวลา t จึงเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_t(k) = \hat{b}_{0t} + k \hat{b}_{1t} \quad (2.134)$$

การคำนวณค่า \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} เมื่อ $t = 0$ ตามสมการ (2.133) และ (2.132) ตามลำดับ จะต้องทราบค่า S_{10} และ S_{20} ซึ่ง Brown ได้เสนอแนะให้กำหนดค่า S_{10} และ S_{20} ดังนี้

$$S_{10} = \hat{b}_0 - \frac{a}{1-a} \hat{b}_1 \quad (2.135)$$

$$S_{10} = \hat{b}_0 - \frac{2a}{1-a} \hat{b}_1 \quad (2.136)$$

โดย \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 เป็นค่าที่ได้จากตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาว อนึ่งการใช้ตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะยาว มีประมาณค่าเริ่มต้นของการคำนวณค่าพยากรณ์ของตัวแบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลสองชั้น ซึ่งเป็นตัวแบบแนวโน้มเชิงเส้นระยะสั้น ต้องกระทำด้วยความรอบคอบ ดังที่ได้กล่าวไว้ในกรณีวิธีการ Holt เมื่อหลีกเลี่ยงปัญหาที่อาจเกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงทิศทางของแนวโน้มในกรณีที่มีข้อมูลจำนวนมาก ค่าเริ่มต้นการพยากรณ์มักนิยมกำหนดดังนี้

$$S_{10} = X_1 \quad (2.137)$$

$$S_{21} = S_{11} \quad (2.138)$$

สูตรที่นิยมใช้กันมากจะอยู่ในรูปของค่าที่การทำให้เรียบ α ซึ่งมีค่าเท่ากับ $1-a$ สมการ (2.132) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{b}_{1t} = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_{1t} - S_{2t}) \quad (2.139)$$

$$S_{1t} = \alpha X_t + (1-\alpha)S_{1(t-1)} \quad (2.140)$$

$$S_{2t} = \alpha S_{1t} + (1-\alpha)S_{2(t-1)} \quad (2.141)$$

เนื่องจากวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลสองชั้นกับวิธีการของ Holt ต่างก็ตั้งอยู่บนพื้นฐานของการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล โดยวิธีการของ Holt ใช้ค่าคงที่การทำให้เรียบ 2 ค่า เป็นอิสระต่อกัน ค่าคงที่การทำให้เรียบค่าหนึ่งสำหรับระดับข้อมูล ส่วนอีกค่าหนึ่งสำหรับความลาดชัน แต่วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลสองชั้นใช้ค่าคงที่การทำให้เรียบเพียงค่าเดียว จึงควรที่จะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง 2 วิธีการนี้

สมการ (2.139) อาจเขียนได้ใหม่ในรูปของ error-correction ได้เป็น

$$\begin{aligned} \hat{b}_{1t} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} [\alpha X_t + (1-\alpha)S_{1(t-1)}] - \frac{\alpha}{1-\alpha} [\alpha S_{1t} + (1-\alpha)S_{2(t-1)}] \\ &= \frac{\alpha^2}{1-\alpha} X_t + \alpha(S_{1(t-1)} - S_{2(t-1)}) - \frac{\alpha^2}{1-\alpha} S_{1t} \\ &= \hat{b}_{1(t-1)} + \alpha^2 (X_t - \hat{b}_{0(t-1)} - \hat{b}_{1(t-1)}) \\ &= \hat{b}_{1(t-1)} + \alpha^2 e_t \end{aligned} \quad (2.142)$$

สมการ (2.130) อาจเขียนใหม่ในรูปของ error-correction ได้เป็น

$$\begin{aligned}\hat{b}_{0t} &= S_{1t} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_{1t} \\ &= \alpha X_t + (1-\alpha)S_{1(t-1)} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\hat{b}_{1(t-1)} + \alpha^2 e_t \right)\end{aligned}$$

เมื่อนำค่า $S_{1(t-1)}$ ในสมการ (2.130) มาแทนแล้ว \hat{b}_{0t} จะกลายเป็น

$$\begin{aligned}\hat{b}_{0t} &= \alpha X_t + (1-\alpha) \left(\hat{b}_{0(t-1)} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_{1(t-1)} \right) + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{b}_{1(t-1)} + (1-\alpha)\alpha e_t \\ &= \hat{b}_{0(t-1)} + \hat{b}_{1(t-1)} + \alpha \left[X_t - \hat{b}_{0(t-1)} - \hat{b}_{1(t-1)} \right] + (1-\alpha)\alpha e_t \\ &= \hat{b}_{0(t-1)} + \hat{b}_{1(t-1)} + \alpha(2-\alpha)e_t\end{aligned}\quad (2.143)$$

เพื่อเปรียบเทียบ \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ในสมการ (2.143) และสมการ (2.142) ตามลำดับกับ \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ในกรณีวิธีการของ Holt ในสมการ (2.93) และ (2.90) จะเห็นว่าได้ผลการพยากรณ์จะเหมือนกันถ้า

$$\alpha_h = \alpha(2-\alpha) \quad (2.144)$$

$$\beta_h = \frac{\alpha}{2-\alpha} \quad (2.145)$$

โดย α_h และ β_h เป็นค่าคงที่ที่ทำให้เรียบในวิธีการของ Holt ดังนั้น จึงอาจกล่าวได้ว่า วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลสองชั้นเป็นกรณีพิเศษของวิธีการ Holt โดยกำหนดค่าคงที่ที่ทำให้เรียบ α_h และ β_h ต้องเป็นไปตามสมการ (2.144) และ (2.145) ตามลำดับ

2.3.3 ตัวแบบฤดูกาล (Seasonal Model)

วิธีการพยากรณ์ที่ได้กล่าวมาข้างต้น นี้ เป็นวิธีการพยากรณ์สำหรับข้อมูลที่ไม่มีฤดูกาล แต่ในโลกแห่งความเป็นจริง ในบางกรณีข้อมูลมีฤดูกาล ซึ่งหมายความว่าข้อมูลที่อยู่ห่างไกลจากปัจจุบันอาจมีสาระที่เป็นประโยชน์ต่อการพยากรณ์มากกว่าข้อมูลที่อยู่ใกล้กับปัจจุบัน ซึ่งทำให้การพึ่งพิงของข้อมูลมิได้เป็นไปตามข้อสมมติของตัวแบบที่ได้กล่าวมาแล้ว ในบทนี้จึงจำเป็นต้องพัฒนาตัวแบบฤดูกาลขึ้นมาเพื่อใช้กับข้อมูลที่มีฤดูกาล

ข้อมูลที่มีฤดูกาลอาจมีหรือไม่มีแนวโน้มก็ได้เช่นเดียวกันกับกรณีข้อมูลที่ไม่มีฤดูกาล และการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลภายในฤดูกาลอาจมีขนาดคงที่ เป็นอิสระกับเวลา หรือลักษณะการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลภายในฤดูกาลอาจแปรตามแนวโน้มก็ได้ Winters ได้พัฒนาวิธีการพยากรณ์

สำหรับข้อมูลที่มีฤดูกาลด้วยวิธีการทำให้เรียบขั้นเดียว โดยใช้ค่าคงที่การทำให้เรียบ 3 ค่า ค่าหนึ่งสำหรับพยากรณ์ระดับข้อมูล อีกค่าสำหรับพยากรณ์ความลาดชัน และค่าสุดท้ายสำหรับพยากรณ์ดัชนีฤดูกาล (seasonal index) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในปัจจุบันในนามวิธีการของ Winters เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลภายในฤดูกาลอาจแปรตามแนวโน้มหรือไม่แปรตามแนวโน้ม จึงจำเป็นที่จะต้องมีความสัมพันธ์เชิงคูณ (multiplicative model) และความสัมพันธ์เชิงบวก (additive model) เพื่อรองรับการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลภายในฤดูกาลดังกล่าว

1. ตัวแบบเชิงคูณ (Multiplicative Model)

ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงของข้อมูลภายในฤดูกาลแปรตามแนวโน้มของข้อมูลตัวแบบเชิงคูณของ Winters ซึ่งเขียนได้เป็น

$$X_t = (b_0 + b_1 t)C_t + \varepsilon_t \quad (2.146)$$

มีความเหมาะสมที่จะใช้อธิบายความเคลื่อนไหวของข้อมูล พจน์ $b_0 + b_1 t$ จะอธิบายส่วนที่เป็นแนวโน้มที่มีอยู่ในข้อมูล C_t ซึ่งเป็นดัชนีฤดูกาลจะอธิบายการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลภายในฤดูกาล และ ε_t คือ ความรบกวนสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน แต่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเดียวกัน โดยมีค่าคาดหวังเท่ากับศูนย์ และความแปรปรวนคงที่ σ^2 ถ้าฤดูกาลของข้อมูลมีความยาวเท่ากับ L หน่วยเวลา ผลบวกของดัชนีฤดูกาลทั้ง L ค่า จะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ L

$$\sum_{j=1}^L C_j = L \quad (2.147)$$

เมื่อแนวโน้มเพิ่มขึ้นระดับของข้อมูลก็สูงขึ้นด้วย ยังผลให้การเปลี่ยนแปลงภายในฤดูกาลของตัวแบบเชิงคูณก็จะมีขนาดใหญ่ขึ้นตามไปด้วย และเมื่อแนวโน้มลดลง ทำให้ $b_0 + b_1 t$ มีค่าลดลง ตัวแบบเชิงคูณจึงมีขนาดการเปลี่ยนแปลงภายในฤดูกาลเล็กลงด้วย

Winters ได้แยกการพยากรณ์ออกเป็น 3 ส่วน คือ ส่วนที่หนึ่งเป็นระดับข้อมูล ซึ่งใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ b_0 , ระดับข้อมูลนี้เป็นส่วนของข้อมูลที่ไม่มีอิทธิพลของฤดูกาลเข้ามาเกี่ยวข้อง ค่าพยากรณ์ของระดับข้อมูลหนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้าที่พยากรณ์ ณ เวลา $t-1$ คือ $\hat{b}_{0(t-1)} + \hat{b}_{1(t-1)}$ โดย $\hat{b}_{0(t-1)}$ เป็นค่าพยากรณ์ของระดับข้อมูลและ $\hat{b}_{1(t-1)}$ เป็นค่าพยากรณ์ความลาดชัน ทั้ง 2 ค่าพยากรณ์นี้ พยากรณ์ ณ เวลา $t-1$ และเมื่อเวลาได้เคลื่อนมาอยู่ ณ เวลา t จะทราบค่าข้อมูล X_t แต่ข้อมูล X_t นี้ยังอยู่ภายใต้อิทธิพลของฤดูกาล จึงจำเป็นต้องขจัดอิทธิพลของฤดูกาลออกเพื่อทราบถึงระดับของข้อมูล โดยจะใช้ดัชนีฤดูกาลที่จุดเวลาเดียวกันในฤดูกาลที่แล้ว ดังนั้น ภายใต้แนวความคิดการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ค่าพยากรณ์ของระดับข้อมูลที่พยากรณ์ ณ เวลา t จึงเขียนได้เป็น

$$\hat{b}_{0t} = \alpha \frac{X_t}{C_{t-L}} + (1-\alpha) \left[\hat{b}_{0(t-1)} + \hat{b}_{1(t-1)} \right] \quad (2.148)$$

โดย α เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบ

ส่วนที่สองเป็นการพยากรณ์ความลาดชัน ซึ่งจะใช้วิธีการของ Holt คือ เป็นค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักระหว่างผลต่างของระดับข้อมูลกับความลาดชันที่พยากรณ์ในหน่วยเวลาที่ผ่านมา

$$\hat{b}_{1t} = \beta \left(\hat{b}_{0t} - \hat{b}_{0(t-1)} \right) + (1-\beta) \hat{b}_{1(t-1)} \quad (2.149)$$

อีกนัยหนึ่งอาจกล่าวได้ว่าการพยากรณ์ความลาดชันใช้วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล โดยประมาณความลาดชันปัจจุบันด้วยผลต่างระหว่าง \hat{b}_{0t} กับ $\hat{b}_{0(t-1)}$ ค่าคงที่การทำให้เรียบ β ในสมการ (2.149) ไม่ควรที่จะมีค่ามากนัก เพราะการเปลี่ยนแปลงความลาดชันของข้อมูลมักจะ เป็นไปอย่างเชื่องช้า

ส่วนที่สาม คือ ดัชนีฤดูกาล ซึ่งการพยากรณ์ยังคงใช้วิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล

$$\hat{C}_t = \gamma \frac{X_t}{\hat{b}_{0t}} + (1-\gamma) \hat{C}_{t-L} \quad (2.150)$$

อัตราส่วน X_t / \hat{b}_{0t} เป็นสาระเกี่ยวกับดัชนีฤดูกาล ณ เวลา t และ γ เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบ ซึ่งมักจะมีค่าน้อยกว่า β

ค่าพยากรณ์ τ หน่วยเวลาล่วงหน้าที่พยากรณ์ ณ เวลา t จึงอาจเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_t(\tau) = \left(\hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} \tau \right) \hat{C}_{t-L+\tau} \quad (2.151)$$

การคำนวณค่าพยากรณ์ระดับข้อมูลในสมการ (2.148) ความลาดชันในสมการ (2.149) และดัชนีฤดูกาล ในสมการ (2.150) จะต้องทราบค่าเริ่มต้น \hat{b}_{00} และ \hat{b}_{10} และดัชนีฤดูกาล ทั้ง L ค่า สมมุติมีข้อมูลอยู่ mL หน่วยเวลา กล่าวคือ มีข้อมูลอยู่ m ฤดูกาล และฤดูกาลมีความยาว L หน่วยเวลา ถ้า \bar{X}_i เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลในฤดูกาลที่ i จะเห็นว่าในช่วงระยะเวลา $(m-1)L$ หน่วยเวลา การเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยของฤดูกาล จะเท่ากับ $\bar{X}_m - \bar{X}_1$ Winters จึงได้แนะนำ ให้ใช้ ค่าเริ่มต้นของ \hat{b}_{1t} เท่ากับ

$$\hat{b}_{10} = \frac{\bar{X}_m - \bar{X}_1}{(m-1)L} \quad (2.152)$$

โดยสมมติให้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในฤดูกาลหนึ่งเป็นค่าที่กึ่งกลางฤดูกาล ระดับข้อมูล ณ จุดเริ่มต้น \hat{b}_{00} จึงเขียนได้เท่ากับ

$$\hat{b}_{00} = \bar{X}_1 - \frac{L+1}{2} \hat{b}_{10} \quad (2.153)$$

ค่าประมาณเบื้องต้นของดัชนีฤดูกาลที่หน่วยเวลา $t, t = 1, 2, \dots, mL$ จะคำนวณจากอัตราส่วนของ X_t กับเส้นแนวโน้มที่ผ่านค่าเฉลี่ยของข้อมูลในฤดูกาลหนึ่งที่จุดกึ่งกลางฤดูกาล โดยมีความลาดชันเท่ากับ \hat{b}_{10}

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{X_t}{\bar{X}_i - [(L+1)/2 - j] \hat{b}_{10}} \quad t = 1, 2, \dots, mL \quad (2.154)$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่าง t กับ i และ j เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} t &= (i-1)L + j & i &= 1, 2, \dots, m \\ & & j &= 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (2.155)$$

ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณของดัชนีฤดูกาลที่หน่วยเวลา j นับจากต้นฤดูกาล อาจเขียนได้เท่ากับ

$$\bar{C}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{C}_{(i-1)L+j} \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2.156)$$

ซึ่งเมื่อปรับให้ผลบวกของดัชนีฤดูกาลทั้ง L ค่ามีค่าเท่ากับ L ค่าดัชนีฤดูกาลที่จะใช้ในการพยากรณ์ จึงเท่ากับ

$$\hat{C}_j = \bar{C}_j \frac{L}{\sum_{j=1}^L \bar{C}_j} \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2.157)$$

2. ตัวแบบเชิงบวก (Additive Model)

ตัวแบบเชิงบวกของ Winters อาจเขียนได้เป็น

$$X_t = b_0 + b_1 t + C_t + \varepsilon_t \quad (2.158)$$

จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงภายในฤดูกาลในตัวแบบเชิงบวกมีขนาดคงที่ มิได้พึ่งพิงต่อแนวโน้มของข้อมูล ซึ่งแตกต่างไปจากตัวแบบเชิงคูณที่ได้กล่าวมาแล้ว ในกรณีนี้จะกำหนดให้ผลบวกของดัชนีฤดูกาลทั้ง L ค่าในหนึ่งฤดูกาล มีค่าเท่ากับศูนย์

$$\sum_{i=1}^L C_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.159)$$

โดย C_{ij} เป็นค่าดัชนีฤดูกาลในฤดูที่ i และหน่วยเวลาที่ j ในฤดูกาลนั้น ซึ่งอาจเขียนเป็นค่าดัชนีฤดูกาลที่หน่วยเวลา t ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & C_t = C_{ij} \\ \text{โดยที่} \quad & t = (i-1)L + j \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & j = 1, 2, \dots, L \end{aligned}$$

การพยากรณ์ยังคงแยกออกเป็นสามส่วนเช่นเดียวกับกรณีตัวแบบเชิงคูณ โดยการพยากรณ์ระดับของข้อมูลจะเขียนได้เท่ากับ

$$\hat{b}_{0t} = \alpha \left[X_t - \hat{C}_{t-L} \right] + (1 - \alpha) \left[\hat{b}_{0(t-1)} + \hat{b}_{1(t-1)} \right] \quad (2.160)$$

ความลาดชันที่พยากรณ์ ณ จุดเวลา t ยังคงเหมือนกับกรณีตัวแบบเชิงคูณ

$$\hat{b}_{1t} = \beta \left(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1} \right) + (1 - \beta) \hat{b}_{1(t-1)} \quad (2.161)$$

ส่วนการพยากรณ์ดัชนีฤดูกาล ณ เวลา t ในกรณีนี้จะเขียนได้เป็น

$$\hat{C}_t = \gamma \left(X_t - \hat{b}_{0t} \right) + (1 - \gamma) \hat{C}_{t-L} \quad (2.162)$$

ค่าพยากรณ์ τ หน่วยเวลาล่วงหน้าที่พยากรณ์ ณ เวลา t จึงเขียนได้เท่ากับ

$$\hat{X}_t(\tau) = \hat{b}_{0t} + \hat{b}_{1t} \tau + \hat{C}_{t-L+\tau} \quad (2.163)$$

เช่นเดียวกับกรณีตัวแบบเชิงคูณ การคำนวณค่าพยากรณ์ \hat{b}_{0t} ในสมการ (2.160) ในสมการ \hat{b}_{1t} (2.161) และ \hat{C}_t ในสมการ (2.162) จะต้องทราบค่าเริ่มต้น ซึ่งในกรณีนี้จะประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least squares method)

สมมติมีข้อมูลอยู่ m ฤดูกาล และความยาวของฤดูกาลเท่ากับ L หน่วยเวลา ดัชนีฤดูกาลที่จะใช้ในการพยากรณ์ตามสมการ (2.162) นั้น จะประมาณค่าจากข้อมูลทั้ง mL จำนวน โดยกำหนดให้ดัชนีฤดูกาลที่หน่วยเวลาเดียวกัน เมื่อนับจากต้นฤดูกาลมีค่าเท่ากัน

$$C_j = C_{L+j} = \dots = C_{(m-1)L+j} \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2.164)$$

ดังนั้น ข้อมูล X_t ในสมการ (2.158) จึงกลายเป็น

$$X_t = b_0 + b_1 t + C_{(i-1)L+j} + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, mL \quad (2.165)$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่าง t กับ i และ j ยังคงเป็นไปตามสมการ (2.155)

แนวทางการประมาณค่าเริ่มต้นก็คือ การกำหนดค่า \hat{b}_0, \hat{b}_1 และ $\hat{C}_j, j = 1, 2, \dots, L$ เพื่อให้ทำให้ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทั้ง mL ค่า มีค่าต่ำสุด

$$\begin{aligned} E &= \sum_{t=1}^{mL} (X_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 t - \hat{C}_{(i-1)L+j})^2 \\ &= \sum_{t=1}^{mL} (X_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 t - \hat{C}_i)^2 \end{aligned} \quad (2.166)$$

ซึ่งเงื่อนไขที่ค่าต่ำสุดของ E จะเกิดขึ้นอาจจะเขียนได้เป็น

$$mL\hat{b}_0 - \hat{b}_1 \sum_{t=1}^{mL} t + m \sum_{j=1}^{mL} \hat{C}_j = \sum_{t=1}^{mL} X_t \quad (2.167)$$

$$\hat{b}_0 \sum_{t=1}^{mL} t + \hat{b}_1 \sum_{t=1}^{mL} t^2 + \sum_{t=1}^{mL} \hat{C}_j = \sum_{t=1}^{mL} tX_t^2 \quad (2.168)$$

$$m\hat{b}_0 - \hat{b}_1 \sum_{t=1}^{mL} [(i-1)L + j] + m\hat{C}_j = \sum_{t=1}^m X_{(i-1)L+j} \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2.169)$$

จากสมการ (2.169) \hat{C}_j เขียนได้เป็น

$$\hat{C}_j = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m X_{(i-1)L+j} - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 \{j + (m-1)L/2\} \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2.170)$$

เนื่องจากผลบวกของดัชนีฤดูกาลทั้ง L ค่าในหนึ่งฤดูกาล มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังในสมการ (2.159) สมการ (2.167) จึงกลายเป็น

$$mL\hat{b}_0 + \frac{mL(mL+1)}{2}\hat{b}_1 = \sum_{t=1}^{mL} X_t \quad (2.171)$$

และสมการ (2.168) จะเหลือเพียง

$$\frac{mL(mL+1)}{2}\hat{b}_0 + \frac{mL(mL+1)(2mL+1)}{6}\hat{b}_1 + \sum_{j=1}^L mj\hat{C}_j = \sum_{t=1}^{mL} tX_t \quad (2.172)$$

พจน์ $\sum_{j=1}^L mj\hat{C}_t$ อาจเขียนได้จากสมการ (2.170) มีค่าเท่ากับ

$$\sum_{j=1}^L mj\hat{C}_t = \sum_{j=1}^L \sum_{j=1}^m jX_{(t-1)L+j} - \frac{mL(L+1)}{2} \hat{b}_0 - \frac{mL(L+1)(3mL+L+2)}{12} \hat{b}_1 \quad (2.173)$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในสมการ (2.172) แล้ว จะได้ผลลัพธ์

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-1)L^2}{2} \hat{b}_0 + \frac{m(m-1)L^2[(4m+1)L+3]}{12} \hat{b}_1 \\ &= \sum_{t=1}^{mL} tX_t - \sum_{j=1}^L \sum_{j=1}^m jX_{(t-1)L+j} \end{aligned} \quad (2.174)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (2.174) โดยต้องแก้แล้ว จะพบว่าพจน์สุดท้ายขวามืออาจเขียนใหม่ในรูปของ X_{ij} ซึ่งเป็นค่า X_t ในฤดูกาลที่ i ณ หน่วยเวลา j ในฤดูกาลนั้น

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-1)L^2}{2} \hat{b}_0 + \frac{m(m-1)L^2[(4m+1)L+3]}{12} \hat{b}_1 \\ &= \sum_{t=1}^{mL} tX_t - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^m jX_{ij} \end{aligned} \quad (2.175)$$

หากหารทั้งสองข้างของสมการ (2.171) ด้วย mL แล้ว สมการ (2.171) จะกลายเป็น

$$\hat{b}_0 = \bar{X}_t - \frac{mL+1}{2} \hat{b}_1 \quad (2.176)$$

โดยที่ \bar{X}_t เป็นค่าเฉลี่ย X_t ทั้ง mL ค่า เมื่อนำค่า \hat{b}_0 ในสมการ (2.176) ไปแทนในสมการ (2.174) แล้ว จะพบว่า \hat{b}_1 มีค่าเท่ากับ

$$\hat{b}_1 = \frac{12}{m(m^2-1)L^3} \left[\sum_{t=1}^{mL} tX_t - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^m jX_{ij} \right] - \frac{6\bar{X}_t}{(m+1)L} \quad (2.177)$$

เมื่อนำค่า \hat{b}_1 ในสมการ (2.177) กลับไปแทนค่าในสมการ (2.176) \hat{b}_0 มีค่าเท่ากับ

$$\hat{b}_0 = \frac{(4mL+L+3)\bar{X}_t}{(m+1)L} - \frac{6(mL+1)}{m(m^2-1)L^3} \left[\sum_{t=1}^{mL} tX_t - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^m jX_{ij} \right] \quad (2.178)$$

ดังนั้น เมื่อทราบค่า \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 จากสมการ (2.178) และ (2.177) ตามลำดับแล้ว คำนี ฤดูกาลเชิงบวก $\hat{C}_j : j = 1, 2, \dots, L$ ก็สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.170) ซึ่งจะกำหนดให้เป็น ค่าดัชนีฤดูกาลที่เพิ่งผ่านไป เพื่อใช้ในการพยากรณ์ในสมการ (2.163) ค่า \hat{b}_0 และ \hat{b}_1 ที่คำนวณได้ จะกำหนดเป็นค่าเริ่มต้นของระดับข้อมูล \hat{b}_{00} และค่าเริ่มต้นของความลาดชัน \hat{b}_{10} เพื่อใช้ในการ พยากรณ์ค่า \hat{b}_{0t} และ \hat{b}_{1t} ตามสมการ (2.160) และ (2.161) ตามลำดับ

อนึ่ง อาจพิสูจน์ได้ว่า ผลบวกของค่าดัชนีฤดูกาลที่คำนวณจากสมการ (2.170) ทั้ง L มีค่า เท่ากับศูนย์ โดยใช้ผลลัพธ์ของสมการ (2.171) จึงไม่จำเป็นต้องปรับค่าดัชนีดังเช่นในกรณีตัวแบบ เชิงคูณ

2.4 การพยากรณ์แบบปรับได้

ในตัวแบบต่าง ๆ ภายใต้นิวความคิดการทำให้เรียบ จะเห็นว่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการ พยากรณ์เมื่อได้กำหนดค่าแล้ว จะมีค่าคงที่มีอาจปรับเปลี่ยนค่าได้ จนกว่าจะมีการพิจารณา ค่าพารามิเตอร์ใหม่ ซึ่งจะกระทำเป็นครั้งคราวโดยอาจใช้ความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ เป็น เกณฑ์ที่จะให้มีการทบทวนค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบการพยากรณ์ การทบทวนค่าพารามิเตอร์ ของตัวแบบในลักษณะนี้ หมายความว่าจะต้องมีความคลาดเคลื่อนที่มีนัยสำคัญเกิดขึ้นเป็นช่วง ระยะเวลาหนึ่ง หรือมีความคลาดเคลื่อนที่มีนัยสำคัญมากเกิดขึ้น จึงจะมีการทบทวนพิจารณา ค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ ความยืดหยุ่นของตัวแบบการพยากรณ์ที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์จึงไม่มี จนกว่าจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าโดยผู้ที่กระทำการพยากรณ์ ในกรณีที่ผู้ทำการพยากรณ์มีความ รับผิดชอบในตัวแบบการพยากรณ์ หลาย ๆ ตัวแบบ ภาระของผู้ที่กระทำการพยากรณ์ในการที่ จะต้องติดตามคอยทบทวนค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบจะมีมาก อาจทำให้การทบทวนไม่ทันการ ดังนั้น จึงมีแนวความคิดที่จะสร้างตัวแบบการพยากรณ์ที่มีความสามารถปรับค่าพารามิเตอร์เองได้ (adaptive forecasting model) ซึ่งในที่นี้กล่าวถึงการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบโดยวิธีการของ Chow และวิธีการของ Trigg & Leach และการพยากรณ์แบบการกรองที่ปรับได้ (adaptive filtering) นอกจากนี้ ยังได้เสนอวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียวแบบปรับจำนวนพจน์ (adaptive moving average) และวิธีการพยากรณ์ที่ปรับปรุงจากวิธีการของ Chow ซึ่งทั้ง 2 วิธีเป็นวิธีการ พยากรณ์ใหม่ที่ได้พัฒนาขึ้น

2.4.1 การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบ

เมื่อกล่าวถึงตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่ระยะสั้น (local constant mean model)

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (2.179)$$

โดยค่าเฉลี่ย μ_t อาจมีการเปลี่ยนแปลงค่า แต่การเปลี่ยนแปลงเป็นไปอย่างเชื่องช้า และ ε_t คือ ความรบกวนสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และมีค่าคาดหวังเท่ากับศูนย์ ภายใต้ตัวแบบนี้ระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายวิธีหนึ่ง คือ เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ซึ่งมีค่าพยากรณ์ดังนี้

$$\hat{X}_t(1) = \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_{t-1}(1) \quad (2.180)$$

โดย α เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบ (smoothing constant) ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 จะเห็นได้ว่าการกำหนดค่าคงที่การทำให้เรียบ มีอิทธิพลสูงต่อความถูกต้องของค่าพยากรณ์ เมื่อกำหนดค่าคงที่การทำให้เรียบมีค่าน้อย คือ ใกล้ศูนย์ ค่าพยากรณ์จะพึ่งพิงข้อมูลในอดีตมาก ทำให้มีความเฉื่อยสูง จึงเหมาะสมกับข้อมูลที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว และเมื่อกำหนดค่าคงที่การทำให้เรียบมีค่ามาก คือ ใกล้หนึ่ง ค่าพยากรณ์จะมีการปรับค่าอย่างรวดเร็วตามข้อมูลที่เพิ่งเกิดขึ้น แต่จะต้องระวังไม่ให้ค่าพยากรณ์ปรับค่าไปตามความรบกวนสุ่ม ε_t มิฉะนั้นจะทำให้ค่าพยากรณ์ขาดเสถียรภาพในทางปฏิบัติ การกำหนดค่าคงที่การทำให้เรียบ มักจะใช้ข้อมูลในอดีตมาเป็นแนวทางในการกำหนดค่า และเมื่อได้กำหนดค่าแล้ว ค่าคงที่การทำให้เรียบจะมีค่าคงที่ และจะใช้ค่านี้ในการพยากรณ์ไประยะหนึ่ง แล้วจึงพิจารณาค่าคงที่การทำให้เรียบที่ใช้อยู่ยังคงมีความเหมาะสมหรือไม่

Chow และ Trigg & Leach มีแนวความคิดที่คล้ายกันคือต้องการให้ค่าคงที่การทำให้เรียบปรับค่าตนเองไปตามการเปลี่ยนแปลงในข้อมูล แต่การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบกระทำภายใต้หลักการที่แตกต่างกัน

1. การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบตามวิธีของ Chow

Chow ได้แนะนำให้คำนวณค่าพยากรณ์การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ตามสมการ (2.180) โดยใช้ค่าคงที่การทำให้เรียบ 3 ค่า คือ α_0 เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบกรณีฐาน (nominal value) α_u เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบกรณีสูง (upper value) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\alpha_u = \alpha_0 + \delta \quad (2.181)$$

และ α_l เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบกรณีต่ำ (lower value) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\alpha_l = \alpha_0 - \delta \quad (2.182)$$

โดยกำหนดให้ค่า δ เท่ากับ 0.05 ดังนั้น วิธีการของ Chow จึงมีค่าพยากรณ์อยู่ 3 ค่าตามค่าคงที่การทำให้เรียบ และค่าพยากรณ์ที่คำนวณจากค่าคงที่การทำให้เรียบกรณีฐานจะเป็นค่าพยากรณ์ที่นำไปใช้งาน ในกรณีนี้จะมีความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ 3 ค่า คือ

$$|e_{t+1}(\alpha_0)| = |X_{t+1} - \hat{X}_t(\alpha_0, 1)| \quad (2.183)$$

$$|e_{t+1}(\alpha_u)| = |X_{t+1} - \hat{X}_t(\alpha_u, 1)| \quad (2.184)$$

$$|e_{t+1}(\alpha_t)| = |X_{t+1} - \hat{X}_t(\alpha_t, 1)| \quad (2.185)$$

เพื่อให้ค่าพยากรณ์มีเสถียรภาพพอสมควร การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบจะกระทำบนพื้นฐานของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ซึ่งในที่นี้จะใช้ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบแล้ว (smoothed absolute error)

$$\Delta_t = \gamma|e_t| + (1-\gamma)\Delta_{t-1} \quad (2.186)$$

โดย γ เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ มีค่าระหว่างศูนย์กับหนึ่ง ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบแล้ว จะมี 3 ค่าตามความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น จากค่าคงที่การปรับให้เรียบ α_0, α_u และ α_t ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบตามค่านิยมในสมการ (2.186) อาจเขียนใหม่ในรูปของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ในอดีตได้เป็น

$$\Delta_t = \gamma \sum_{j=0}^{t-1} (1-\gamma)^j |e_{t-j}| + (1-\gamma)^t |e_0| \quad (2.187)$$

ซึ่งจะเห็นว่า ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบแล้ว เป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ในอดีต ค่าคงที่การทำให้เรียบ γ ไม่ควรกำหนดให้มีค่าสูงมากนักเพื่อให้ Δ_t สะท้อนความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในอดีตย้อนหลังพอสมควร

ค่าคงที่การทำให้เรียบจะปรับค่าไปยังทิศทางที่ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบแล้ว มีค่าน้อยที่สุดตามหลักการดังนี้

1. ถ้า $\Delta_t(\alpha_0)$ มีค่าไม่มากกว่า $\Delta_t(\alpha_u)$ และ $\Delta_t(\alpha_t)$ ให้ยังคงใช้ค่าคงที่การทำให้เรียบปัจจุบันในการพยากรณ์ครั้งต่อไป

2. ถ้า $\Delta_t(\alpha_0)$ มีค่ามากกว่า $\Delta_t(\alpha_u)$ แต่ไม่มากกว่า $\Delta_t(\alpha_t)$ ให้ปรับค่าคงที่การทำให้เรียบในการพยากรณ์ครั้งต่อไป ดังนี้

$$\alpha_0 = \alpha_u \quad (2.188)$$

$$\alpha_u = \alpha_0 + \delta \quad (2.189)$$

$$\alpha_t = \alpha_0 - \delta \quad (2.190)$$

3. ถ้า $\Delta_t(\alpha_0)$ มีค่ามากกว่า $\Delta_t(\alpha_t)$ แต่ไม่มากกว่า $\Delta_t(\alpha_u)$ ค่าคงที่ทำให้เรียบในการพยากรณ์ครั้งต่อไป ดังนี้

$$\alpha_0 = \alpha_t \quad (2.191)$$

$$\alpha_u = \alpha_0 + \delta \quad (2.192)$$

$$\alpha_t = \alpha_0 - \delta \quad (2.193)$$

4. ถ้า $\Delta_t(\alpha_0)$ มีค่ามากกว่าทั้ง $\Delta_t(\alpha_u)$ และ $\Delta_t(\alpha_t)$ ให้พิจารณาดังนี้ ถ้า $\Delta_t(\alpha_u)$ มีค่าน้อยกว่า $\Delta_t(\alpha_t)$ ให้ α_0, α_u และ α_t เป็นไปตามสมการ (2.188), (2.189), และ (2.190) ตามลำดับ มิฉะนั้นให้ α_0, α_u และ α_t เป็นไปตามสมการ (2.191), (2.192), และ (2.193) ตามลำดับ

จากประสบการณ์ที่นำวิธีการพยากรณ์ของ Chow ไปใช้ในการพยากรณ์ พบว่า การกำหนดค่าสูงสุดของค่าคงที่ทำให้เรียบ α_{\max} และค่าต่ำสุดของค่าคงที่ทำให้เรียบ α_{\min} ไว้เพื่อป้องกันมิให้มีการปรับค่าคงที่ทำให้เรียบจนกระทั่ง α_u มีค่าเท่ากับหนึ่ง หรือ α_t มีค่าเท่ากับศูนย์ จะทำให้ค่า MSE ของค่าพยากรณ์ลดลง หาก α_u มีค่าเท่ากับ α_{\max} แล้ว และการปรับค่าคงที่ทำให้เรียบ ยังคงเรียกร้องให้ปรับตามสมการ (2.188), (2.189), และ (2.190) อีก ซึ่งจะ ทำให้ α_u มีค่าเกินค่า α_{\max} จะไม่มีการปรับค่าคงที่ทำให้เรียบ ให้สูงขึ้นอีก การพยากรณ์จะคำนวณจากค่าเดิมทั้ง 3 ค่า ของค่าคงที่ทำให้เรียบ และในทำนองเดียวกัน หาก α_t มีค่าเท่ากับ α_{\min} แล้ว และการปรับค่าคงที่ทำให้เรียบ ยังต้องกระทำตามสมการ (2.191), (2.192) และ (2.193) อีกรั้งจะไม่มีการปรับค่าคงที่ทำให้เรียบให้ลดลงอีก และการพยากรณ์จะคำนวณจากค่าเดิมทั้ง 3 ค่า ของค่าคงที่ทำให้เรียบเช่นกัน การกำหนดค่าเหมาะสมให้แก่ α_{\max} และ α_{\min} อาจเป็นหนทางหนึ่งที่ลดความเคลื่อนไหวในค่าพยากรณ์ได้อีกด้วย

2. การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วยอัตราการตอบสนองที่ปรับได้ (adaptive response rate)

การปรับค่าคงที่ทำให้เรียบโดยวิธีการของ Trigg & Leach นั้น จะกระทำในหลักการที่พยายามเพิ่มค่าให้แก่ค่าคงที่ทำให้เรียบ เมื่อมีความคลาดเคลื่อนสูง ทั้งนี้เพื่อให้ค่าพยากรณ์มีโอกาสในการปรับตนเองได้เร็วขึ้น โดยพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว (smoothed error) Q_t ซึ่งนิยามให้มีค่าเท่ากับ

$$Q_t = \gamma e_t + (1 - \gamma)Q_{t-1} \quad (2.194)$$

โดย e_t เป็นค่าคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์ ณ เวลา t และ γ เป็นค่าคงที่การทำให้เรียบ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 สมการ (2.194) อาจเขียนใหม่ในรูป

$$Q_t = \gamma \sum_{j=0}^{t-1} (1-\gamma)^j e_{t-j} + (1-\gamma)^t e_0 \quad (2.195)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่า Q_t เป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของความคลาดเคลื่อน ดังนั้น ถ้าค่าพยากรณ์ไม่เอียงแฉง (unbias) Q_t จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และเพื่อให้ Q_t สะท้อนความคลาดเคลื่อนในอดีตที่ผ่านมาค่าคงที่การทำให้เรียบ γ ไม่ควรกำหนดให้มีค่าสูงมากนัก

Trigg & Leach ได้แนะนำให้ปรับค่าคงที่การทำให้เรียบที่ใช้ในการพยากรณ์บนพื้นฐานของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว (smoothed error tracking signal) ซึ่งนิยามให้เท่ากับ

$$Q_t / \Delta_t \quad (2.196)$$

โดย Δ_t เป็นความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบแล้ว (smoothed absolute error) ตามที่นิยามไว้ในสมการ (2.196) จะเห็นได้ว่า Q_t / Δ_t มีค่าอยู่ระหว่าง -1 กับ 1 ทั้งนี้เพราะค่าสัมบูรณ์ของ Q_t จะมีค่าเกิน Δ_t ไม่ได้ ถ้าค่าพยากรณ์มีค่าสูงกว่าค่าจริงเป็นระยะเวลานานอย่างต่อเนื่อง หรือมีค่าต่ำกว่าค่าจริงเป็นระยะเวลานานอย่างต่อเนื่อง จะมีผลให้ Q_t มีค่าสัมบูรณ์เข้าใกล้ Δ_t ซึ่งจะทำให้ $|Q_t / \Delta_t|$ มีค่าสูงขึ้น สภาพที่ค่าพยากรณ์สูงกว่าหรือต่ำกว่าค่าจริงเป็นระยะเวลานานอย่างต่อเนื่อง ไม่ใช่สภาพของค่าพยากรณ์ที่ดี ในกรณีนี้ค่าคงที่การทำให้เรียบควรปรับปรุงให้มีค่าสูงขึ้น เพื่อให้ค่าพยากรณ์ตามค่าจริงได้รวดเร็วมากขึ้น ค่าพยากรณ์ที่ดีควรมีค่าสูงกว่าค่าจริงสลับอย่างสุมกับมีค่าต่ำกว่าค่าจริง ในสภาพเช่นนี้ Q_t จะมีค่าสัมบูรณ์น้อย และจะลอยห่างออกจาก Δ_t จึงทำให้ $|Q_t / \Delta_t|$ มีค่าลดลง ในกรณีนี้ค่าคงที่การทำให้เรียบควรมีค่าลดลงเพื่อให้ค่าพยากรณ์มีเสถียรภาพสูงขึ้น ดังนั้น Trigg & Leach จึงแนะนำให้กำหนดค่าคงที่การทำให้เรียบในการพยากรณ์ ณ จุดเวลา t มีค่าเท่ากับ

$$\alpha_t = |Q_t / \Delta_t| \quad (2.197)$$

ซึ่งจะทำให้ค่าคงที่การทำให้เรียบมีการปรับค่าตนเองตามการเปลี่ยนแปลงในข้อมูล การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบในลักษณะนี้ จึงเป็นที่รู้จักกันในนามการปรับแบบอัตราตอบสนองที่ปรับได้ (adaptive response rate) เพื่อป้องกันมิให้ค่าพยากรณ์ปรับตนเองตามข้อมูลที่เพิ่งเกิดขึ้นเร็วเกินไป จึงมีการกำหนดค่าสูงสุดของค่าคงที่การทำให้เรียบไว้เท่ากับ α_{\max} และให้ค่าคงที่การทำให้เรียบปรับเปลี่ยนค่าดังนี้

$$\alpha_t = \alpha_{\max} |Q_t / \Delta_t| \quad (2.198)$$

อย่างไรก็ตาม การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบตามสมการ (2.198) นั้น จะไม่ปรับเต็มที่ตาม สัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว แม้ในกรณีที่สัญญาณมีค่าต่ำกว่า α_{\max} จึงอาจ เป็นการเพิ่มความเชื่อใจในค่าพยากรณ์เกินความจำเป็น และยิ่งไปกว่านั้น ในกรณีที่สัญญาณมีค่าต่ำ อยู่แล้ว ค่าคงที่การทำให้เรียบที่ปรับตามสมการ (2.198) จะต้องมีค่าต่ำกว่าค่าสัญญาณอีก ดังนั้น เพื่อแก้ไขจุดอ่อนในการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบตามสมการ (2.198) ค่าคงที่การทำให้เรียบจะ ปรับค่าโดยกำหนดค่า α_{\max} และ α_{\min} ไว้ในทำนองเดียวกันกับที่ได้อธิบายไว้ในกรณีของ Chow ดังนี้

1. ถ้า $|Q_t / \Delta_t|$ มีค่าอยู่ระหว่างค่าต่ำสุด α_{\min} และค่าสูงสุด α_{\max} ให้ปรับค่า α_t ตาม สมการ (3.19)
 2. ถ้า $|Q_t / \Delta_t|$ มีค่าน้อยกว่า α_{\min} ให้ $\alpha_t = \alpha_{\min}$
 3. ถ้า $|Q_t / \Delta_t|$ มีค่ามากกว่า α_{\max} ให้ $\alpha_t = \alpha_{\max}$
- และหากกำหนดค่าเหมาะสมให้แก่ α_{\max} และ α_{\min} อาจพบว่าความคลาดเคลื่อนในค่าพยากรณ์จะมีค่าลดลงได้

3. การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบในกรณีที่มีมากกว่า 1 ตัว

การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบตามวิธีการของ Chow และตามวิธีของ Trigg & Leach เป็นการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบในกรณีที่ตัวแบบการพยากรณ์มีพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว แต่ตัวแบบการพยากรณ์อาจมีพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัวก็เป็นได้ เช่น ตัวแบบการพยากรณ์ของ Holt มีค่าคงที่การทำให้เรียบตัวหนึ่ง สำหรับระดับของข้อมูล และอีกตัวสำหรับความลาดชันของข้อมูล ตัวแบบการพยากรณ์ของ Winters มีพารามิเตอร์สามตัวพารามิเตอร์สองตัวจะใช้สำหรับระดับและความลาดชันของข้อมูลเหมือนกับกรณีตัวแบบการพยากรณ์ของ Holt ส่วนค่าคงที่การทำให้เรียบตัวที่สามใช้สำหรับฤดูกาลของข้อมูล เป็นต้น การที่จะปรับเปลี่ยนค่าคงที่การทำให้เรียบที่ใช้สำหรับความลาดชันนั้น จะต้องกระทำด้วยความระมัดระวังอย่างยิ่ง เพราะการเปลี่ยนแปลงความลาดชันรวดเร็วเกินไปอาจทำให้ค่าพยากรณ์ไม่มีเสถียรภาพ ดังนั้นในทางปฏิบัติอาจจะมีเพียงพอแล้ว ที่ปรับค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับระดับของข้อมูลเพียงตัวเดียวตามวิธีการของ Chow หรือวิธีการของ Trigg & Leach ส่วนค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับความลาดชันหรือฤดูกาลนั้น อาจไม่จำเป็นต้องมีการปรับค่าด้วยตนเอง

อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ประสงค์จะปรับค่าคงที่การทำให้เรียบหลายค่าก็อาจใช้ เทคนิคการพยากรณ์ที่ปรับตนเองได้ (Self-Adaptive Forecasting Technique - SAFT) ซึ่ง Robert & Reed เป็นผู้พัฒนาขึ้น โดยขยายแนวความคิดของ Chow มาประยุกต์ใช้ในกรณีที่ตัวแบบการพยากรณ์มีพารามิเตอร์หลายตัว

ระเบียบวิธีของ Robert & Reed จะกำหนดให้ค่าคงที่การทำให้เรียบแต่ละตัวมี 3 ค่า คือ ค่าฐาน (nominal) ค่าสูง (upper value) และค่าต่ำ (lower value) ในลักษณะเดียวกันกับวิธีของ Chow ดังนั้น เมื่อมีพารามิเตอร์ k ตัว ค่าพยากรณ์ที่จะต้องพิจารณาจะมีอยู่ทั้งหมด $2^k + 1$ ค่า โดยเป็นค่าพยากรณ์ที่คำนวณจากค่าสูงและ/หรือค่าต่ำของพารามิเตอร์ 2^k ค่า และค่าพยากรณ์อีกหนึ่งค่าจะเป็นค่าพยากรณ์ที่คำนวณจากค่าฐานของพารามิเตอร์ เพื่อให้เห็นการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบในลักษณะที่เป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น ให้พิจารณากรณีมีพารามิเตอร์ 2 ตัว เช่น ในระเบียบวิธีการที่พยากรณ์ของ Holt ซึ่งมีค่าคงที่การทำให้เรียบ α สำหรับการพยากรณ์ระดับ b_0 และค่าคงที่การทำให้เรียบ β สำหรับการพยากรณ์ความลาดชัน b_1 ในการพยากรณ์ครั้งหนึ่ง ๆ จะมีค่าพยากรณ์ที่จะต้องพิจารณาอยู่ 5 ค่า ดังนี้คือ

1. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_0, \beta_0) =$ ค่าพยากรณ์ที่ 1 คำนวณจากค่าฐานของพารามิเตอร์
2. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_l, \beta_l) =$ ค่าพยากรณ์ที่ 2 คำนวณจากค่าต่ำของพารามิเตอร์ทั้ง 2 ค่า
3. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_l, \beta_u) =$ ค่าพยากรณ์ที่ 3 คำนวณจากค่าต่ำของ α และค่าสูงของ β
4. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_u, \beta_l) =$ ค่าพยากรณ์ที่ 4 คำนวณจากค่าสูงของ α และค่าต่ำของ β
5. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_u, \beta_u) =$ ค่าพยากรณ์ที่ 5 คำนวณจากค่าสูงของพารามิเตอร์ทั้ง 2 ค่า

ในระเบียบวิธีของ Robert & Reed นั้น เมื่อกำหนดค่าชุดหนึ่งสำหรับพารามิเตอร์แล้ว จะใช้ค่าเหล่านี้ในการพยากรณ์ไประยะหนึ่งก่อนจึงจะพิจารณาความเหมาะสมของค่าพารามิเตอร์ ทั้งนี้เพื่อให้ค่าพยากรณ์มีเสถียรภาพมากขึ้น ให้ n เป็นจำนวนครั้งที่ใช้ค่าพารามิเตอร์ชุดหนึ่งในการพยากรณ์ก่อนที่จะมีการพิจารณาเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ และให้ E_{ij} เป็นความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของค่าพยากรณ์ที่ i ในการพยากรณ์ครั้งที่ j สำหรับค่าพารามิเตอร์ชุดหนึ่ง ๆ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของค่าพยากรณ์ที่ i สำหรับพารามิเตอร์ ชุดนี้ จึงมีค่าเท่ากับ

$$\bar{E}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_{ij} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2.199)$$

ผลกระทบต่อความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์จากการเปลี่ยนค่าคงที่การทำให้เรียบ α จากค่าสูง α_u เป็นค่าต่ำ α_l อาจเขียนได้โดยประมาณเท่ากับ

$$E_\alpha = \frac{1}{2} [(\bar{E}_4 + \bar{E}_5) - (\bar{E}_2 + \bar{E}_3)] \quad (2.200)$$

และในทำนองเดียวกัน ผลกระทบต่อความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์จากการเปลี่ยนค่าคงที่การทำให้เรียบ β จากค่าสูง β_u เป็นค่าต่ำ β_l จะเท่ากับ

$$E_\beta = \frac{1}{2} \left[(\bar{E}_3 + \bar{E}_5) - (\bar{E}_2 + \bar{E}_4) \right] \quad (2.201)$$

จะเห็นได้ว่า ถ้า E_α มีค่าเป็นบวก ข่อมเป็นการแสดงให้เห็นว่า ค่าพยากรณ์เมื่อใช้ค่าต่ำของ α มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าค่าพยากรณ์เมื่อใช้ค่าสูงของ α และถ้า E_α มีค่าเป็นลบ ค่าพยากรณ์เมื่อใช้ค่าสูงของ α มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าค่าพยากรณ์เมื่อใช้ค่าต่ำของ α ข้อความในลักษณะทำนองเดียวกันกับที่ได้กล่าวเกี่ยวกับ α ข้างต้นนี้สามารถใช้ได้กับกรณีค่าคงที่การทำให้เรียบ β ด้วย ดังนั้น E_α และ E_β จึงอาจใช้เป็นแนวทางให้มีการเปลี่ยนค่าคงที่การทำให้เรียบได้ในทางปฏิบัติเกณฑ์ที่จะใช้ในการตัดสินใจจะปรับเปลี่ยนค่าคงที่การทำให้เรียบ คือช่วงความเชื่อมั่น 99% ของผลกระทบ ซึ่งโดยประมาณเท่ากับ

$$\left[-3\hat{\sigma}_e / \sqrt{n}, 3\hat{\sigma}_e / \sqrt{n} \right]$$

โดย $\hat{\sigma}_e$ เป็นค่าประมาณของความเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อน ถ้า E_α มีค่าน้อยกว่า $-3\hat{\sigma}_e / \sqrt{n}$ ค่าคงที่การทำให้เรียบเพิ่มค่าตามวิธีการของ Chow คือ

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_u \\ \alpha_u &= \alpha_0 + \delta \\ \alpha_f &= \alpha_0 - \delta \end{aligned}$$

และถ้า E_α มีค่ามากกว่า $-3\hat{\sigma}_e / \sqrt{n}$ ค่าคงที่การทำให้เรียบจะลดค่าลง คือ

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_f \\ \alpha_u &= \alpha_0 + \delta \\ \alpha_f &= \alpha_0 - \delta \end{aligned}$$

การปรับเปลี่ยนค่าคงที่การทำให้เรียบ β ก็กระทำในลักษณะทำนองเดียวกันกับกรณีค่าคงที่การทำให้เรียบ α แต่ใช้ E_β แทน E_α

ในกรณีที่ตัวแบบการพยากรณ์มีพารามิเตอร์ 3 ตัว เช่น ในระเบียบวิธีของ Winters ในการพยากรณ์รอบหนึ่ง ๆ จะมีค่าพยากรณ์ทั้งหมด $2^3 + 1 = 9$ ตัว ที่จะต้องพิจารณา

1. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ค่าพยากรณ์ที่ 1 คำนวณจากค่าฐานของพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว
2. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$ ค่าพยากรณ์ที่ 2 คำนวณจากค่าต่ำของพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว
3. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_t, \beta_t, \gamma_u)$ ค่าพยากรณ์ที่ 3 คำนวณจากค่าต่ำของ α และ β และค่าสูงของ γ
4. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_t, \beta_u, \gamma_t)$ ค่าพยากรณ์ที่ 4 คำนวณจากค่าต่ำของ α และ γ และค่าสูงของ β

5. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_t, \beta_u, \gamma_u)$ ค่าพยากรณ์ที่ 5 จำนวนจากค่าต่ำของ α และค่าสูงของ β และ γ
6. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_u, \beta_t, \gamma_t)$ ค่าพยากรณ์ที่ 6 จำนวนจากค่าสูงของ α และค่าต่ำของ β และ γ
7. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_u, \beta_t, \gamma_u)$ ค่าพยากรณ์ที่ 7 จำนวนจากค่าสูงของ α และ γ และค่าต่ำของ β
8. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_u, \beta_u, \gamma_t)$ ค่าพยากรณ์ที่ 8 จำนวนจากค่าสูงของ α และ β และค่าต่ำของ γ
9. $\hat{X}_t(\tau, \alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ ค่าพยากรณ์ที่ 9 จำนวนจากค่าสูงของพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว

การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบในกรณีพารามิเตอร์ 3 ตัว จะกระทำในลักษณะทำนองเดียวกันกับกรณีพารามิเตอร์ 2 ตัว โดยคำนวณผลกระทบต่อความคลาดเคลื่อนจากการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบจากค่าสูงเป็นค่าต่ำดังนี้

$$E_\alpha = \frac{1}{4} \left[(\bar{E}_6 + \bar{E}_7 + \bar{E}_8 + \bar{E}_9) - (\bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \bar{E}_4 + \bar{E}_5) \right] \quad (2.202)$$

$$E_\beta = \frac{1}{4} \left[(\bar{E}_4 + \bar{E}_5 + \bar{E}_8 + \bar{E}_9) - (\bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \bar{E}_6 + \bar{E}_7) \right] \quad (2.203)$$

$$E_\gamma = \frac{1}{4} \left[(\bar{E}_3 + \bar{E}_5 + \bar{E}_7 + \bar{E}_9) - (\bar{E}_2 + \bar{E}_4 + \bar{E}_6 + \bar{E}_8) \right] \quad (2.204)$$

และความเชื่อมั่น 99% ของผลกระทบในกรณีนี้ จะเท่ากับ

$$\left[-3\hat{\sigma}_e / \sqrt{2n}, 3\hat{\sigma}_e / \sqrt{2n} \right]$$

รายละเอียดการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบ α, β และ γ จะกระทำในทำนองเดียวกันกับที่ได้กล่าวมาแล้วในกรณีที่ตัวแบบมีพารามิเตอร์ 2 ตัว

4. ตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียวแบบปรับจำนวนพจน์ (Adaptive Moving Average)

เมื่อศึกษาแนวความคิดของ Chow เกี่ยวกับข้อเสนอแนะในการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบในการพยากรณ์ตามระเบียบวิธีการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลแล้ว ก็อาจใช้แนวความคิดของ Chow ดังกล่าวในการสร้างตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียวแบบปรับจำนวนพจน์ได้ โดยสร้างตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียว 3 ตัวแบบ ตัวแบบที่ใช้พยากรณ์ใช้จำนวนพจน์เท่ากับ N ตัวแบบที่ใช้เปรียบเทียบอีก 2 ตัวแบบ ใช้จำนวนพจน์เท่ากับ $N_t = N - \delta_N$ และ $N_u = N + \delta_N$ ค่า δ_N จะเป็นค่าที่ใช้ปรับจำนวนพจน์ N ในตัวแบบที่ใช้พยากรณ์ จึงต้องเป็นค่าตัวเลขเต็ม และไม่ควรมีค่ามาก ในกรณีที่ N มีค่าน้อย δ_N จะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 ทั้งนี้ เพื่อให้ค่าพยากรณ์มีเสถียรภาพ ความคลาดเคลื่อนของตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียวทั้ง 3 ตัวแบบ คือ

$$e_{t+1}(N) = \hat{X}_{t+1} - \hat{X}_t(N, 1) \quad (2.205)$$

$$e_{t+1}(N_u) = \hat{X}_{t+1} - \hat{X}_t(N_u, 1) \quad (2.206)$$

$$e_{t+1}(N_t) = \hat{X}_{t+1} - \hat{X}_t(N_t, 1) \quad (2.207)$$

จะนำไปคำนวณความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ทำให้เรียบแล้ว ตามสมการ (2.186) ซึ่งจะใช้เป็นฐานในการปรับจำนวนพจน์ในตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียว ดังนี้

1. ถ้า $\Delta_t(N)$ มีค่าไม่มากกว่า $\Delta_t(N_u)$ และ $\Delta_t(N_t)$ ให้ยังคงใช้จำนวนพจน์ N ในการพยากรณ์ครั้งต่อไป

2. ถ้า $\Delta_t(N)$ มีค่ามากกว่า $\Delta_t(N_u)$ แต่ไม่มากกว่า $\Delta_t(N_t)$ ให้ปรับจำนวนพจน์ในการพยากรณ์ครั้งต่อไปนี้

$$N = N_u \quad (2.208)$$

$$N_u = N + \delta_N \quad (2.209)$$

$$N_t = N - \delta_N \quad (2.210)$$

3. ถ้า $\Delta_t(N)$ มีค่ามากกว่า $\Delta_t(N_t)$ แต่ไม่มากกว่า $\Delta_t(N_u)$ ให้ปรับจำนวนพจน์ในการพยากรณ์ครั้งต่อไปดังนี้

$$N = N_t \quad (2.211)$$

$$N_u = N + \delta_N \quad (2.212)$$

$$N_t = N - \delta_N \quad (2.213)$$

4. ถ้า $\Delta_t(N)$ มีค่ามากกว่าทั้ง $\Delta_t(N_u)$ และ $\Delta_t(N_t)$ ให้พิจารณาดังนี้ ถ้า $\Delta_t(N_u)$ มีค่าน้อยกว่า $\Delta_t(N_t)$ ให้ปรับค่า N, N_u และ N_t ตามสมการ (2.208), (2.209) และ (2.210) ตามลำดับ มิฉะนั้น ให้ปรับค่า N, N_u และ N_t ตามสมการ (2.211), (2.212) และ (2.213) ตามลำดับ

เพื่อป้องกันมิให้มีการปรับจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณค่าเฉลี่ยมากเกินไป หรือน้อยเกินไป ดังที่ได้เสนอแนะไว้ใน การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบตามวิธีของ Chow และตามวิธีของ Trigg & Leach จึงควรกำหนดจำนวนพจน์มากที่สุด N_{\max} และจำนวนพจน์น้อยที่สุด N_{\min} ที่จะใช้ในการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ N_{\max} และ N_{\min} ควรมีค่าซึ่งทำให้ผลต่าง $(N_{\max} - N)$ และ $(N - N_{\min})$ หาดด้วย δ_N ลงตัว โดย N คือ จำนวนพจน์เริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณเมื่อตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ขั้นเดียวมีการปรับจำนวนพจน์ที่ใช้คำนวณค่าเฉลี่ยสูงขึ้นเรื่อย ๆ เพื่อเพิ่มความเฉื่อยในค่า

พยากรณ์จนถึงค่า $N_{\max} - \delta_N$ และยังคงเรียกร้องให้ปรับจำนวนพจน์ให้สูงขึ้นอีก ในกรณีนี้จะปรับค่า N, N_u และ N_t ดังนี้

$$N = N_{\max} \quad (2.214)$$

$$N_u = N_{\max} \quad (2.215)$$

$$N_t = N - \delta_N \quad (2.216)$$

ซึ่งจะทำให้จำนวนพจน์ในตัวแบบพยากรณ์เท่ากับจำนวนพจน์มากที่สุดที่กำหนดไว้ และเท่ากับจำนวนพจน์ในตัวแบบเปรียบเทียบทางสูงอีกด้วย ในทางตรงข้าม เมื่อตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ชั้นเดียวมีการปรับจำนวนพจน์ที่ใช้คำนวณค่าเฉลี่ยลดลงเรื่อย ๆ เพื่อให้ค่าพยากรณ์มีการปรับค่ารวดเร็วขึ้นจนถึงค่า $N_{\min} - \delta_N$ และยังคงเรียกร้องให้ปรับจำนวนพจน์ลงอีก ในกรณีนี้จะปรับค่า N, N_u และ N_t ดังนี้

$$N = N_{\min} \quad (2.217)$$

$$N_u = N + \delta_N \quad (2.218)$$

$$N_t = N_{\min} \quad (2.219)$$

ซึ่งจะทำให้จำนวนพจน์ในตัวแบบพยากรณ์เท่ากับจำนวนพจน์น้อยที่สุดที่กำหนดไว้ และเท่ากับจำนวนพจน์ในตัวแบบเปรียบเทียบทางด้านอีกด้วย ในกรณีที่ N ถูกปรับลดลงมาจนเท่ากับ N_{\min} และกำหนดค่า N_{\min} ให้เท่ากับหนึ่ง ตัวแบบการพยากรณ์จะกลายเป็นตัวแบบการพยากรณ์แบบ naive คือ ค่าพยากรณ์หนึ่งหน่วยเวลาล่วงหน้า มีค่าเท่ากับค่าปัจจุบัน ส่วน N_{\max} ไม่ควรกำหนดให้มีค่ามากนัก เพราะจะทำให้ค่าพยากรณ์มีความเฉื่อยมากเกินไป และเมื่อค่าจริงมีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน ตัวแบบจะต้องใช้ระยะเวลาหนึ่งในการปรับค่า N ที่เหมาะสม โดยปรับลดได้ δ_N ต่อหน่วยเวลาดำเนินการ แต่ถ้ากำหนดให้ δ_N มีค่ามาก ตัวแบบจะสามารถปรับตัวได้อย่างรวดเร็วจนบางครั้งอาจทำให้ค่าพยากรณ์ขาดเสถียรภาพได้ ดังนั้น การกำหนดค่าที่เหมาะสมสำหรับ N_{\min}, N_{\max} และ δ_N จะต้องคำนึงถึงลักษณะการเคลื่อนไหวของข้อมูลด้วย

2.4.2 วิธีการพยากรณ์แบบปรับได้ที่ปรับปรุงใหม่

การพยากรณ์ตามวิธีการของ Chow ต้องใช้ตัวแบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลถึง 3 ตัวแบบ ทำให้มีภาระมากในการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการของ Trigg & Leach ซึ่งใช้ตัวแบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลเพียงตัวแบบเดียว โดยให้ค่าคงที่การทำให้เรียบปรับ

ค่าเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว จุดเด่นของวิธีการของ Chow คือ ความมีเสถียรภาพของค่าคงที่การทำให้เรียบ โดยให้ค้อย ๆ ปรับครั้งละ 0.05 ดังนั้น หากนำแนวความคิดของ Trigg & Leach มาปรับปรุงในวิธีการของ Chow ก็จะสามารถพยากรณ์ ด้วยตัวแบบการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลเพียงตัวแบบเดียว การเพิ่มขึ้นและการลดลงในค่า สัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว ทำให้ค่าคงที่การทำให้เรียบในตัว แบบการพยากรณ์การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลมีค่าสูงขึ้นและลดลงตามลำดับ เมื่อเป็น เช่นนั้น การปรับค่าคงที่การทำให้เรียบตามวิธีการเดิมของ Chow ก็อาจสามารถปรับปรุงใหม่เพื่อ ลดภาระการคำนวณได้ดังนี้

1. กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว ณ เวลา t มี ค่าสูงขึ้น ค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา t จะถูกปรับให้มีค่าสูงขึ้น 0.05
2. กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ดังกล่าวมีค่าลดลง ค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา t จะถูกปรับให้มีค่าลดลง 0.05
3. กรณีที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้ เรียบแล้ว ณ เวลา t จะไม่มีการปรับค่าคงที่การทำให้เรียบสำหรับการพยากรณ์ที่กระทำ ณ t เวลา แต่ประการใด

วิธีการพยากรณ์ดังกล่าวข้างต้น ซึ่งเป็นการบูรณาการแนวความคิดของ Chow และ Trigg & Leach จึงขอเรียกสั้น ๆ ว่า วิธีการ CTL (Chow, Trigg & Leach) การใช้ตัวแบบการทำให้เรียบ แบบเอกซ์โปเนนเชียลเพียงตัวแบบเดียว ทำให้ภาระการคำนวณลดลงได้อย่างมีนัยสำคัญ การใช้ การเพิ่มขึ้นและลดลงในค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว มาปรับ ค่าคงที่การทำให้เรียบครั้งละ 0.05 ตามวิธีการของ Chow ทำให้ค่าคงที่การทำให้เรียบมีเสถียรภาพ ไม่ปรับค่าอย่างรวดเร็วดังในวิธีการ Trigg & Leach

แนวความคิดการใช้การเพิ่มขึ้นและลดลงในค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาด เคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว ยังอาจนำมาประยุกต์ในกรณีของตัวแบบการพยากรณ์ด้วยค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ ชั้นเดียวแบบปรับจำนวนพจน์ได้ด้วย กล่าวคือ

1. กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว ณ เวลา t มี ค่าสูงขึ้น จำนวนพจน์ที่ใช้ในการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา t จะถูกปรับลดลงด้วย δ_N
2. กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ดังกล่าวมีค่าลดลง จำนวนพจน์ที่ใช้ในการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา t จะถูกปรับเพิ่มขึ้นด้วย δ_N
3. กรณีที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้ เรียบแล้ว ณ เวลา t จะไม่มีการปรับจำนวนพจน์ที่ใช้ในการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา t

วิธีการพยากรณ์ด้วยค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบปรับจำนวนพจน์ โดยใช้การเพิ่มขึ้นและลดลง ในค่าสัมบูรณ์ของสัญญาณติดตามความคลาดเคลื่อนที่ทำให้เรียบแล้ว จะขอเรียกสั้น ๆ ว่า วิธีการ AMA-TL (Adaptive Moving Average-Trigg & Leach)

2.4.3 การพยากรณ์แบบการกรองที่ปรับได้ (Adaptive Filtering)

ในตัวแบบต่าง ๆ ภายใต้อัลกอริทึมการทำให้เรียบ อาจสรุปได้ว่า ค่าพยากรณ์จะเขียนได้ใน พจน์ของข้อมูลในอดีต n ตัว ได้ดังนี้

$$\hat{X}_t(1) = W_0 X_t + W_1 X_{t-1} + \dots + W_{n-1} X_{t-n+1} \quad (2.220)$$

โดย W_i เป็นสัมประสิทธิ์ที่มีค่าคงที่ เช่น ในตัวแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ W_i มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{n}$ เป็นต้น ตัวแบบการพยากรณ์แบบการกรองที่ปรับได้ จะมีค่าพยากรณ์อยู่ในรูปสมการ (2.220) เช่นกัน แต่โดยสัมประสิทธิ์ W_i ไม่เป็นค่าคงที่ แต่สามารถปรับค่าให้สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของ ข้อมูลได้ จึงทำให้ค่าพยากรณ์จากตัวแบบการพยากรณ์แบบการกรองที่ปรับได้มีความยืดหยุ่นมาก

Wheelwright & Makridakis ได้นำแนวความคิดของ Widrow มาใช้ในการปรับค่า สัมประสิทธิ์ W_i บนพื้นฐานของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ W_i อาจปรับเปลี่ยนค่าได้ตามหน่วยเวลาที่เคลื่อนไป จึงควรจะปรับสัมประสิทธิ์ของสัมประสิทธิ์ในสมการ (2.220) ใหม่ เพื่อให้สะท้อนถึงการเปลี่ยนค่าของ W_i ตามหน่วยเวลา ดังนี้

$$\hat{X}_t(1) = W_{0t} X_t + W_{1t} X_{t-1} + \dots + W_{(n-1)t} X_{t-n+1} \quad (2.221)$$

โดย W_{it} เป็นสัมประสิทธิ์ของ X_{t-i} ในการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา t สัมประสิทธิ์ในสมการ (3.43) จะถูกปรับค่าเพื่อให้ความคลาดเคลื่อนกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง Widrow ได้สร้าง อัลกอริทึมในการปรับค่าสัมประสิทธิ์เพื่อบรรลุเป้าหมายดังกล่าว โดยให้ค่าสัมประสิทธิ์ $W_{i(t+1)}$ ที่จะใช้ในการพยากรณ์ที่กระทำ ณ เวลา $t+1$ มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} W_{i(t+1)} &= W_{it} - k \frac{\partial e_{t+1}^2}{\partial W_{it}} \\ &= W_{it} + 2ke_{t+1} X_{t-i} \end{aligned} \quad (2.222)$$

โดย k เป็นค่าคงที่ในการเรียน (learning constant) ซึ่งมีค่าเป็นบวก การกำหนดค่า จะมีอิทธิพลมาก ต่อการลู่เข้าสู่ค่าอุดมคติของสัมประสิทธิ์ ถ้ากำหนดค่าต่ำเกินไป การปรับค่าของสัมประสิทธิ์จะ ช้า ทำให้ลู่เข้าสู่ค่าอุดมคติช้า แต่ถ้ากำหนดค่าสูงเกินไป การปรับค่าสัมประสิทธิ์อาจรวดเร็ว

เกิน ไปจนขาดเสถียรภาพ อาจไม่ลู่เข้าสู่ค่าอุดมคติได้ Makridakis & Wheelwright ได้แนะนำให้ กำหนดค่าคงที่ในการเรียนอยู่ระหว่างศูนย์กับ $\frac{1}{n}$ เพื่อให้เกิดเสถียรภาพในการลู่เข้าสู่ค่าอุดมคติ

$$0 < k < \frac{1}{n} \quad (2.223)$$

โดยปรับข้อมูลและความคลาดเคลื่อนเป็นข้อมูลมาตรฐาน และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standardized data and standardized error) ดังนี้

$$\begin{aligned} W_{i(t+1)} &= W_{it} + 2k \frac{e_{t+1}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} X_{t-i}^2}} \frac{X_{t-i}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} X_{t-i}^2}} \\ &= W_{it} + \frac{2ke_{t+1}X_{t-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} X_{t-i}^2} \end{aligned} \quad (2.224)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (2.222) และ (2.223) ให้ละเอียด อาจกล่าวได้ว่าในกรณีที่ไม่ได้ปรับ ข้อมูลให้เป็นข้อมูลมาตรฐาน ค่าคงที่ในการเรียนควรมีอยู่ระหว่างช่วง

$$0 < k < \frac{1}{n \left[\max_{t \geq n} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t-i}^2 \right]} \quad (2.225)$$

ซึ่งในทางปฏิบัติ มักจะกำหนดค่าคงที่ในการเรียน k ให้มีค่าใกล้เคียงกับค่าสูงสุดในสมการ (2.225) เพื่อให้ค่าสัมประสิทธิ์ลู่เข้าสู่ค่าอุดมคติอย่างรวดเร็ว และมีเสถียรภาพ และใช้สมการ (2.222) ในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของค่าพยากรณ์

การคำนวณค่าอุดมคติของสัมประสิทธิ์ เพื่อใช้ในการพยากรณ์จะกระทำเป็นรอบ ๆ (iteration) ก่อนที่จะเริ่มต้นการคำนวณจะต้องกำหนดค่าคงที่ในการเรียน k จำนวนพจน์ที่ใช้ในการพยากรณ์ ตามสมการ (2.220) และค่าเริ่มต้นของสัมประสิทธิ์ทั้ง n ค่า เมื่อได้กำหนดค่า เริ่มต้นเหล่านี้เสร็จเรียบร้อยแล้ว การคำนวณในรอบหนึ่ง ๆ จะเป็นดังนี้

1. คำนวณค่าพยากรณ์โดยใช้สมการ (2.221)
2. เคลื่อนหน่วยเวลาไป 1 หน่วยเวลา
3. ถ้าหน่วยเวลายังไม่เกินหน่วยเวลาสุดท้ายของข้อมูลให้ไปคำนวณในขั้นตอนที่ 4 มิฉะนั้นเป็นการสิ้นสุดของรอบ
4. คำนวณความคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์
5. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ทั้ง n ค่าด้วยสมการ (2.222)

6. กลับไปคำนวณในขั้นตอนที่ 1

เมื่อสิ้นสุดการคำนวณในรอบหนึ่ง ๆ จะต้องประเมินผลเพื่อกำหนดว่าสมควรที่จะเริ่มต้นคำนวณใหม่ในรอบถัดไปหรือไม่ เกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจที่จะเริ่มต้นคำนวณใหม่หรือไม่ อาจมีได้หลายเกณฑ์ เช่น เปรียบเทียบค่า MSE ของค่าพยากรณ์ในรอบปัจจุบันกับรอบที่แล้วลดลง อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์เมื่อสิ้นสุดรอบกับค่าสัมประสิทธิ์เมื่อเริ่มต้นรอบทั้ง n ค่าว่ามีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ หรือเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

$$ARE = \frac{\sum_i |e_i|}{\sum_i |X_i|} \quad (2.226)$$

ในรอบปัจจุบันกับรอบที่แล้วลดลงอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ เป็นต้น ถ้าเปรียบเทียบค่าเหล่านี้ปรากฏว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญให้ใช้ค่าสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้เมื่อสิ้นสุดรอบเป็นค่าเริ่มต้นของสัมประสิทธิ์ในรอบใหม่ และดำเนินการคำนวณซ้ำตามขั้นตอนที่ได้กล่าวมาแล้ว มิฉะนั้นจะถือว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้เมื่อสิ้นสุดรอบเป็นค่าสุดท้ายและจะใช้เพื่อการพยากรณ์ต่อไป

บทที่ 3

การวิเคราะห์ความถดถอยและสหสัมพันธ์อย่างง่าย (Simple Regression Analysis and Correlation)

3.1 การวิเคราะห์ความถดถอย (Regression Analysis)

เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะประมาณหรือพยากรณ์ค่าของตัวแปรตัวหนึ่งจากตัวแปรตัวอื่น ๆ ที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรที่ต้องการพยากรณ์ โดยจะต้องมีการกำหนดหรือทราบค่าตัวแปรอื่น ๆ ล่วงหน้า เช่น ถ้าทราบความสัมพันธ์ระหว่างยอดขายกับค่าโฆษณาแล้ว จะทำให้สามารถประมาณ / พยากรณ์ยอดขายเมื่อกำหนดหรือทราบงบประมาณในการโฆษณา และจะศึกษาถึงการเปลี่ยนแปลงของยอดขายเมื่องบประมาณในการโฆษณาเปลี่ยนแปลงไป โดยอาศัยหลักการของการวิเคราะห์ความถดถอย การวิเคราะห์ความถดถอยมี 2 ประเภท คือ

1. การวิเคราะห์ความถดถอยอย่างง่าย
2. การวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุ

เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว หรือลักษณะที่สนใจศึกษา 2 ลักษณะ โดยที่ต้องทราบค่าของตัวแปรตัวหนึ่งหรือต้องกำหนดค่าของตัวแปรตัวหนึ่งไว้ล่วงหน้า เช่น ถ้าศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างรายจ่ายกับรายได้ ยอดขายกับค่าโฆษณา ฯลฯ ซึ่งจะต้องทราบหรือกำหนดรายได้ และค่าโฆษณาไว้ล่วงหน้า เช่น ทราบว่าเงินเดือนพนักงานทำความสะอาดของบริษัทแห่งหนึ่งเป็น 2,000, 2,500, 3,000, 3,500, และ 4,000 บาท ผู้วิเคราะห์จะต้องสอบถามพนักงานทำความสะอาดที่มีเงินเดือนดังกล่าวถึงรายจ่ายต่อเดือน จึงจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างรายได้อับรายจ่ายได้ หรือในการหาความสัมพันธ์ระหว่างยอดขาย กับค่าโฆษณาจะต้องทราบถึงงบประมาณในการโฆษณาที่บริษัทกำหนดไว้หรือใช้ไปจริง แล้วจึงจะทราบถึงยอดขาย โดยจะเรียกว่ารายได้ และค่าโฆษณา ซึ่งเป็นตัวแปรที่ต้องกำหนดค่าไว้ล่วงหน้าว่า ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) และมักจะใช้สัญลักษณ์ x ส่วนยอดขายกับรายจ่ายจะเรียกว่า ตัวแปรตาม (Dependent Variable) และใช้สัญลักษณ์ y ซึ่งหมายถึง ยอดขายเป็นตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับค่าโฆษณา และรายจ่ายเป็นตัวแปรที่ขึ้นกับรายได้

วัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์ความถดถอยและสหสัมพันธ์

การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ มีวัตถุประสงค์ดังนี้

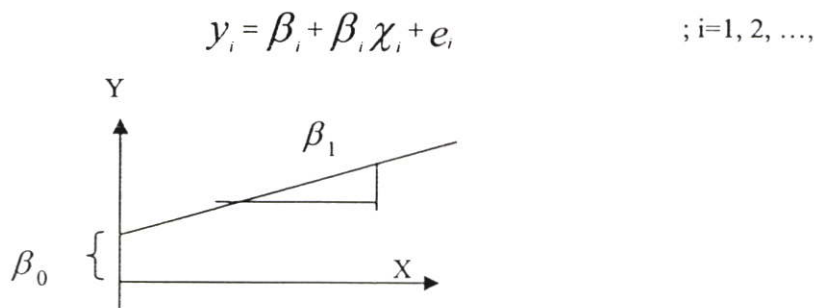
1. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรว่ามีความสัมพันธ์กันมากน้อยเพียงใด ถ้า x และ y มีความสัมพันธ์กันมากแสดงว่าถ้า x มีค่าเปลี่ยนแปลงไปจะมีผลกระทบต่อค่าของ y เป็นอย่างมาก

2. ใช้ความสัมพันธ์ที่วิเคราะห์ได้มาประมาณค่าหรือพยากรณ์ค่า y ในอนาคต เมื่อกำหนดค่า x

สำหรับการหารูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร y และ x นั้นในขั้นแรกจะนำเอาข้อมูลของตัวแปรทั้งสองมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ ซึ่งจะเรียกกราฟนี้ว่า แผนภาพการกระจาย (Scatter Diagram) ผู้วิเคราะห์จะต้องพิจารณาจากแผนภาพการกระจายว่าความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสองจะอยู่ในรูปแบบใด เช่น เส้นตรง พาราโบลา เส้นโค้ง ฯลฯ โดยที่จะต้องสามารถเขียนความสัมพันธ์อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้

3.2 การวิเคราะห์ความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression Analysis)

เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว ที่ความสัมพันธ์อยู่ในรูปเชิงเส้น ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปสมการเชิงเส้นได้ดังนี้



รูปที่ 3.1 ความสัมพันธ์ 2 ตัวแปร ในรูปเชิงเส้น

โดยที่ y คือตัวแปรตาม (Dependent Variable) เนื่องจากค่าของ y ขึ้นอยู่กับค่าของ x

x = ตัวแปรอิสระ (Independent Variable)

β_0 = ส่วนตัดแกน y หรือ คือค่าของ y เมื่อ x มีค่าเป็นศูนย์

e = ความคลาดเคลื่อนอย่างสุ่ม (random error)

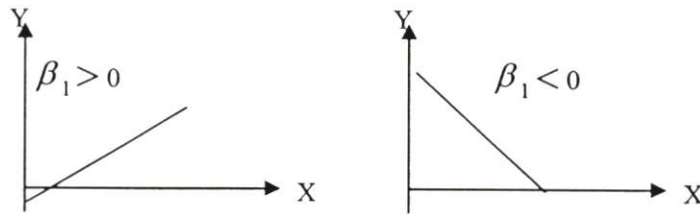
β_1 = ความชัน (slope) ของเส้นตรง ซึ่งเป็นค่าที่แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Y

เมื่อ x เปลี่ยนไป 1 หน่วย และจะเรียก β_1 ว่าสัมประสิทธิ์ความถดถอย (Regression Coefficient) ค่าของ β_1 อาจจะเป็น

1. $\beta_1 > 0$ แสดงว่า x และ y มีความสัมพันธ์ในทางเดียวกันคือถ้า x เพิ่ม y จะเพิ่มด้วย แต่ถ้า x ลดลง y จะลดลงด้วย

2. $\beta_1 < 0$ แสดงว่า x และ y มีความสัมพันธ์ในทางตรงข้ามกันคือถ้า x เพิ่ม y จะลดลง แต่ถ้า x ลดลง y จะเพิ่มขึ้น

3. β_1 มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ แสดงว่าค่า x และ y มีความสัมพันธ์กันน้อย
4. $\beta_1 = 0$ แสดงว่า x และ y ไม่มีความสัมพันธ์กัน



รูปที่ 3.2 แสดงค่า β_1 เมื่อ x และ y มีความสัมพันธ์ในรูปเส้นตรง

หน่วยของ β_0 และ β_1 จะมีหน่วยเหมือนกับหน่วยของ Y ดังตัวอย่างเช่น

1. ให้ $y =$ ยอดขาย มีหน่วยเป็นล้านบาท และ x เป็นค่าโฆษณาที่มีหน่วยเป็นแสนบาท จะทำให้ β_0 และ β_1 มีหน่วยเป็นล้านบาท
2. ให้ y เป็นจำนวน (หน่วย) สินค้าที่ขายได้ และ x เป็นราคาขายต่อหน่วย (บาท) จะได้ β_0 และ β_1 มีหน่วยเป็นจำนวนสินค้าที่ขายได้ เช่น x เป็นราคาขายทีวีต่อเครื่อง (บาท) y เป็นจำนวนทีวีที่ขายได้ (เครื่อง) β_0 และ β_1 จะมีหน่วยเป็นเครื่อง

3.3 สมมติฐานหรือเงื่อนไขของการวิเคราะห์ความถดถอย

1. ค่า x จะต้องเป็นค่าที่กำหนดไว้ล่วงหน้าหรือทราบค่า
2. ความคลาดเคลื่อน e_i เป็นตัวแปรที่มี ค่าเฉลี่ย = 0 หรือ $E(e_i) = 0$ ค่าแปรปรวนของ e_i มีค่าเท่ากันทุกค่าของ i และมีค่าเท่ากับค่าแปรปรวนของ y

$$V(e_i) = V(y) = \sigma_{y,x}^2 = \sigma^2$$
3. e_i และ θ_j เป็นอิสระกัน นั่นคือ $Cov(e_i, \theta_j) = E(e_i, \theta_j) = 0; i \neq j$
4. θ_j มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และค่าแปรปรวน σ^2 นั่นเอง

$$\theta_j \sim \text{normal}(0, \sigma^2)$$

จากข้อสมมติข้างต้น จะได้ว่า

$$y_i \sim \text{normal}(E(Y_i), \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } E(y_i) &= E(\beta_0 + \beta_1 x_i + e_i) \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_i + E(e_i) \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_i \quad \text{เนื่องจาก } E(e_i) = 0 \end{aligned}$$

3.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการความถดถอย

เมื่อพิจารณาจากแผนภาพการกระจาย ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y แล้วพบว่า x และ y สัมพันธ์กันในรูปเส้นตรง จะต้องกำหนดค่า β_0 และ β_1 ซึ่งจะทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ว่ามีความสัมพันธ์ตามกันหรือตรงข้ามกันและความสัมพันธ์นั้นมากหรือน้อยเพียงใด ถ้า β_1 มีค่ามากกว่าแสดงว่า y มีความสัมพันธ์กับ X มากด้วย

การที่จะหาค่า β_0 และ β_1 ได้จำเป็นต้องทราบค่า x และ y ทุกค่าที่ได้เกิดขึ้นแล้วในอดีตเช่น ถ้า $x =$ รายได้ของคนกรุงเทพมหานคร (กทม.) $y =$ รายจ่ายของคนกทม. การหาค่า β_0 และ β_1 จะต้องทราบถึงรายได้และรายจ่ายของคนกทม. ทุกคน ซึ่งเป็นไปได้ยากในทางปฏิบัติเราจึงใช้ข้อมูลตัวอย่างขนาด n ในการประมาณค่า β_0 และ β_1 ดังนั้นค่าประมาณของ y คือ

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

หรือ $\hat{y}_i = a + bx_i$

โดยที่ $\hat{\beta}_0 = a$, $\hat{\beta}_1 = b$

3.4.1 การประมาณค่า β_0 และ β_1 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

การประมาณค่า β_0 และ β_1 ด้วย a และ b ตามลำดับขั้น มีเป้าหมายเพื่อให้ความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า y_i ด้วย \hat{y}_i มีค่าต่ำสุด โดยใช้วิธีที่เรียกว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Method) ซึ่งเป็นวิธีที่ต้องการหาค่า a และ b ที่ทำให้ผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด

$$\text{เนื่องจาก } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$$

หรือ $\hat{y}_i = a + bx_i$

$$\therefore y_i - \hat{y}_i = e_i$$

$$\text{ผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง} = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

ดังนั้นวิธีกำลังสองน้อยที่สุดคือการหาค่า a และ b ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^n e_i^2$ มีค่าต่ำสุด การที่ประมาณค่า β_0 และ β_1 ด้วยค่า a และ b โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะทำให้

1. ผลรวมของค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า y_i ด้วย \hat{y}_i เป็นศูนย์ คือ

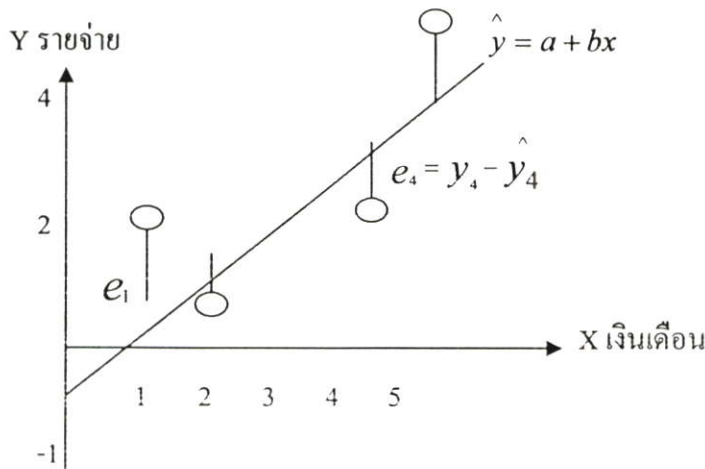
$$\sum (y_i - \hat{y}_i) = \sum e_i = 0$$

2. จุด (x, \bar{y}) เป็นจุดที่อยู่บนเส้นความถดถอย

3. $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ มีค่าต่ำสุด

3.5 การประมาณค่าแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

ในการประมาณค่า $y = \beta_0 + \beta_1 x + e$ ด้วย $\hat{y} = a + bx$ ซึ่งจะเกิดค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณ y_i ด้วย \hat{y}_i เป็น $e = y_i - \hat{y}_i$ ดังแสดงในรูป



รูปที่ 3.3 แสดงค่าคลาดเคลื่อน

จากหัวข้อที่ 3.3 ได้ว่า $e_i \sim \text{normal}(0, \sigma^2)$

และ $Y_i \sim \text{normal}(E(Y_i), \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= V(y_i) = V(e_i) = E(e_i - E(e_i))^2 \\ &= E(e_i - 0)^2 = E(e_i)^2 = E(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sigma_{y,x}^2 \end{aligned}$$

การใช้สัญลักษณ์ $\sigma_{y,x}^2$ หมายถึงค่าแปรปรวนของ Y ที่เกิดขึ้นเนื่องจากอิทธิพลของ X โดยทั่วไปจะใช้สัญลักษณ์ σ^2 แทน $\sigma_{y,x}^2$

ค่าประมาณของ $\sigma_{y,x}^2$ คือ $S_{y,x}^2$ หรือ S^2 โดยที่ $S^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$ หรือ

$$S^2 = \frac{SSE}{n-2}$$

3.6 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient)

จากหัวข้อที่ 3.1-3.5 เป็นการวิเคราะห์เพื่อหาความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y และเป็นการทดสอบว่า x และ y มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ โดยการทดสอบสัมประสิทธิ์ความถดถอย (β_1) โดยใช้ตัวประมาณ (b) ซึ่งไม่สามารถระบุได้ว่า x และ y มีความสัมพันธ์กันมากหรือน้อย เนื่องจากค่า b ที่ได้มีหน่วยตามค่าของ y เช่น y มีหน่วยเป็นบาท ค่า b จะมีหน่วยเป็นบาทด้วย แต่ถ้าค่า y มีหน่วยเป็นล้านบาท ค่า b จะมีหน่วยเป็นล้านบาทด้วย การที่ค่า b ที่มีหน่วยเป็นบาทมีค่ามากกว่าค่า b ที่มีหน่วยเป็นล้านบาท ไม่ได้หมายความว่าความสัมพันธ์ x และ y ที่ y มีหน่วยเป็นบาทจะมีความสัมพันธ์กันมากกว่ากรณีที่ y มีหน่วยเป็นล้านบาท นั่นคือการที่กำหนดให้หน่วยของ y แตกต่างกัน จะทำให้ค่า b แตกต่างกันด้วย (x และ y ไม่จำเป็นต้องมีหน่วยเหมือนกัน)

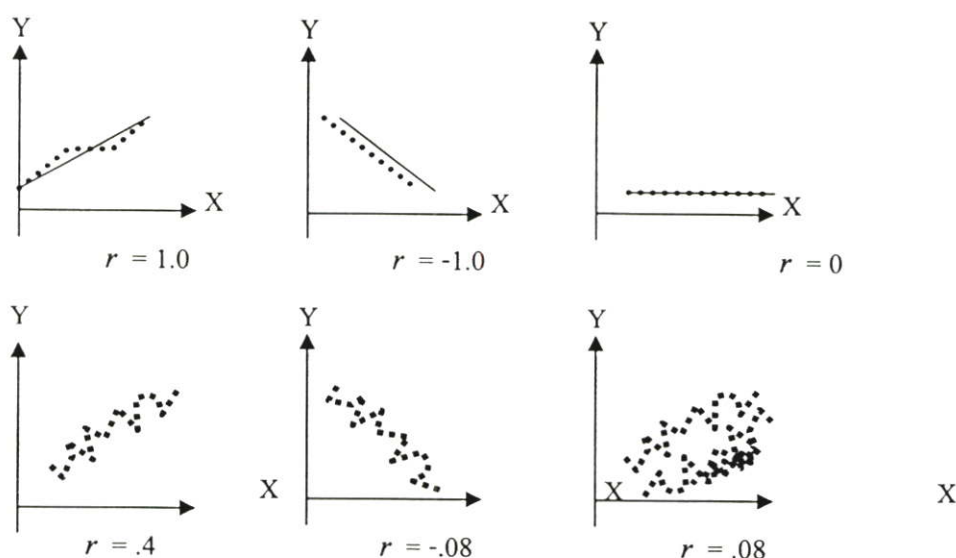
สำหรับสถิติที่ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ว่ามากหรือน้อยนั้นจะเรียกว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (ρ) ซึ่งในกรณีที่ค่าของ y ขึ้นกับ x เพียงตัวเดียวจะเรียกว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อย่างง่าย (Simple Correlation Coefficient) โดยที่ ρ จะไม่มีหน่วย จึงสามารถใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่าง y และ x ได้ว่ามีความสัมพันธ์มากหรือน้อยเพียงใด เนื่องจากค่า ρ จะมีค่าสูงสุดเป็น 1 และต่ำสุดเป็น -1

นอกจากนั้นความถดถอยและสหสัมพันธ์ยังมีวิธีการในการเก็บข้อมูลที่แตกต่างกัน คือ สำหรับเรื่องความถดถอยตัวแปรอิสระ x จะต้องถูกกำหนดไว้ล่วงหน้า ในขณะที่เป็นตัวแปรตามหรือ y เป็นตัวแปรสุ่ม แต่สหสัมพันธ์นั้นทั้ง x และ y จะเป็นตัวแปรสุ่มทั้งคู่

เนื่องจากเราใช้ข้อมูลตัวอย่าง จึงประมาณค่า ρ ด้วยค่า r โดยที่ r คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ตัวอย่าง

ความหมายของค่า r

1. ค่า r เป็นลบ แสดงว่า x และ y มีความสัมพันธ์ในทิศทางตรงข้าม คือถ้า x เพิ่มขึ้น ลด แต่ถ้า x ลด y จะเพิ่ม
2. ค่า r เป็นบวกแสดงว่า x และ y มีความสัมพันธ์ในทางเดียวกัน คือ ถ้า x เพิ่มขึ้น จะเพิ่มด้วย แต่ถ้า x ลด y จะลดลงด้วย
3. ถ้า r มีค่าเข้าใกล้ 1 หมายถึง x และ y สัมพันธ์ในทิศทางเดียวกันและมีความสัมพันธ์กันมาก
4. ถ้า r มีค่าเข้าใกล้ -1 หมายถึง x และ y สัมพันธ์ในทิศทางตรงกันข้ามและมีความสัมพันธ์กันมาก
5. ถ้า $r = 0$ แสดงว่า x และ y ไม่มีความสัมพันธ์กัน
6. ถ้า r เข้าใกล้ 0 แสดงว่า x และ y มีความสัมพันธ์กันน้อย



รูปที่ 3.4 แสดงค่าของ r ที่มีค่า $-1 < r < 1$

ในทางปฏิบัติที่พิจารณาว่าตัวแปร x และ y มีความสัมพันธ์กันมากหรือน้อย จะพิจารณาจากค่า r (ไม่ใช่จากค่า b) เนื่องจาก r ไม่มีหน่วย และมีขอบเขตคือมีต่ำสุด = -1 ค่าสูงสุด = 1 นอกจากนั้น r และ b จะมีเครื่องหมายเดียวกัน คือ เป็นบวกเหมือนกันหรือเป็นลบเหมือนกัน เนื่องจากทั้ง r และ b เป็นค่าแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ สำหรับเมื่อมี 2 ตัวแปร

$$\begin{aligned} \text{สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์} &= \sqrt{\text{สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ}} \\ \text{หรือ} \quad r &= \sqrt{r^2} \end{aligned}$$

3.7 แนวทางการประมาณค่าพารามิเตอร์

เมื่อต้องการศึกษาธรรมชาติของประชากรหนึ่ง ผู้ศึกษาต้องทราบว่าใช้ตัวแปรสุ่มใดแสดงธรรมชาติของประชากรนั้น สมมติว่าผู้ศึกษาจะใช้ตัวแปรสุ่ม x ในการแสดงคุณสมบัติของประชากร x อาจจะเป็นตัวแปรสุ่มมิติเดียว หรือหลายมิติ (เวกเตอร์) ก็ได้ ในการนี้การแจกแจงความน่าจะเป็นของ x มีความสำคัญ นำไปสู่ธรรมชาติหรือคุณสมบัติของประชากรได้ เช่น ทำให้ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรได้ โดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันการแจกแจง (ความน่าจะเป็น) หรือฟังก์ชันความหนาแน่น (ของความน่าจะเป็น) ของตัวแปรสุ่ม มักขึ้นอยู่กับค่าของพารามิเตอร์ตัวหนึ่งหรือมากกว่า พารามิเตอร์ดังกล่าวมักเป็นตัวไม่ทราบค่า ดังนั้นการประมาณ

ค่าพารามิเตอร์จึงเป็นสิ่งที่ควรศึกษา เมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ได้แล้ว จะทำให้ผู้ศึกษาสามารถประมาณพารามิเตอร์อื่น ๆ ที่สนใจได้อีก เช่น ถ้าตัวแปรสุ่ม x มีฟังก์ชันการแจกแจงขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ θ สิ่งที่แสดงคุณสมบัติบางประการของประชากรมักเป็นฟังก์ชันของ θ ด้วย เช่น ค่าเฉลี่ยของประชากรหรือค่าคาดหวัง และความแปรปรวนของประชากร $\mu = E(X)$ ก็จะเป็นฟังก์ชันของ $\sigma^2 = E(X - \mu)^2$ การประมาณค่าของ θ จึงทำให้ผู้ศึกษาสามารถประมาณ μ และ σ^2 ได้อีกด้วย

ในการประมาณพารามิเตอร์นั้น ต้องใช้ข้อมูลหรือค่าสังเกตจากตัวอย่าง กล่าวคือ จะใช้สถิติบางตัว มาเป็นตัวประมาณพารามิเตอร์ที่สนใจ ในการนี้จะต้องใช้ตัวอย่างสุ่ม เนื่องจากจะทำให้เราได้ข้อมูลโดยไม่ใช้ความรู้สึก ความเห็น ความชอบ ความเชื่อมั่น (ที่อาจผิด) หรือความเอนเอียงที่อาจมีของผู้ศึกษา หรือผู้ทำหน้าที่เก็บรวบรวมข้อมูล สามารถวัดระดับความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณได้ นอกจากนี้ทฤษฎีสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลล้วนมีพื้นฐานมาจากการใช้ตัวอย่างสุ่มทั้งสิ้น ดังนั้นหากใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่มีใช้ตัวอย่างสุ่มแล้ว อาจทำให้ผู้ศึกษาไม่สามารถใช้วิธีการทางสถิติที่มีผู้พัฒนาขึ้นมาแล้วอย่างถูกต้องได้ ไม่สามารถวัดระดับความคลาดเคลื่อนของการประมาณ ผลการศึกษาอาจไม่ใกล้เคียงความเป็นจริง ที่เราจะศึกษาต่อไปจึงอาศัยตัวอย่างสุ่มเป็นพื้นฐานสำคัญ

นิยาม 1. ให้ x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ θ ที่ไม่ทราบค่า เซตของ θ (ซึ่งอาจเป็นเวกเตอร์ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ ในกรณีทั่วไป) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเรียกว่า **ปริภูมิพารามิเตอร์** (Parameter space) และมักแทนด้วย Ω

ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x)$ ที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ θ เรามักเขียนฟังก์ชันนั้นในรูป $f(x, \theta)$ หรือ $f(x|\theta)$ ดังนั้น เซต $\{f(x; \theta) : \theta \in \Omega\}$ จึงหมายถึง **วงศ์** (Family) ของฟังก์ชันความหนาแน่นของ x ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ถ้า $f(x)$ มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ได้แก่

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < X < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma^2 > 0$$

ในกรณีนี้ปริภูมิพารามิเตอร์ คือ

$$\Omega = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

หรือส่วนบนของระนาบนั้นเอง

ถ้า x มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน $\sigma^2 = \sigma_0^2 =$ ค่าคงที่ที่ทราบค่า

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-\mu)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty$$

ในกรณีนี้ปริภูมิพารามิเตอร์ คือ

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\mu, \sigma_0^2) : -\infty < \mu < \infty\} \\ &= \{\mu : -\infty < \mu < \infty\}\end{aligned}$$

หรือเส้นจำนวนจริงนั่นเอง

ถ้า x มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน σ^2

$$f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}, -\infty < x < \infty$$

ในกรณีนี้ปริภูมิพารามิเตอร์ คือ

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\} \\ &= \{\sigma^2 : \sigma^2 > 0\}\end{aligned}$$

หรือครึ่งขวาของเส้นจำนวนจริงนั่นเอง

การประมาณค่า (Estimation) ในที่นี้ก็คือ การใช้ข้อมูลจากตัวอย่างสุ่ม ในรูปของค่าสถิติเพื่อจะประมาณ หรือคาดหมายว่าพารามิเตอร์ θ ควรจะมีค่าเท่าใดหรืออยู่ในช่วงใด มีการสร้างตัวประมาณ หรือสูตร (ฟังก์ชัน) ที่ใช้ในการหาค่าประมาณ การดำเนินการประมาณพารามิเตอร์จึงมี 2 แนวทางด้วยกัน คือ

1) **การประมาณด้วยจุด (Point estimation)** หมายถึง การประมาณพารามิเตอร์ออกมาเป็นค่าเดียวหรือจุดเดียว

นิยาม 2. ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$

ตัวประมาณ (Estimator) ของ θ คือ ฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$
ค่าประมาณ (Estimate) ของ θ คือ ค่าหนึ่งของตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของ θ นั่นคือ ถ้า $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ เป็นข้อมูลจากตัวอย่างสุ่ม x_1, \dots, x_n ค่าประมาณของ θ คือ $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$

คำว่าตัวประมาณและค่าประมาณพารามิเตอร์ θ มีความแตกต่างกัน เช่นเดียวกับคำว่า ฟังก์ชันและค่าของฟังก์ชัน ตัวประมาณเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม แต่ค่าประมาณเป็นค่าของ ฟังก์ชันหรือค่าของตัวประมาณนั่นเอง

ตัวประมาณฟังก์ชันที่บอกหลักเกณฑ์หรือสูตรที่ใช้ในการหาค่าประมาณ

การประมาณด้วยจุด เป็นการค้นหาตัวประมาณที่เหมาะสม เพื่อให้ประมาณพารามิเตอร์ การหาค่าประมาณกระทำเมื่อได้มีการเก็บรวบรวมข้อมูลมาแล้ว

อย่างไรก็ตาม มีผู้ใช้คำว่าค่าประมาณในความหมายของตัวประมาณด้วย แต่ไม่มีใครใช้ตัว ประมาณในความหมายของค่าประมาณเลย

2) การประมาณด้วยช่วง (Interval estimation) หมายถึง การประมาณพารามิเตอร์ θ ออกมาเป็นหลายค่า มักเป็นช่วง(ของจำนวนจริง) หรือเซตของจุดหลายจุด เรียกว่า ช่วงความ เชื่อมั่น (Confidence interval) หรือเซตความเชื่อมั่น (Confidence set) ช่วงหรือเซตดังกล่าวได้มา โดยอาศัยตัวประมาณ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ ของ θ มีการใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นของ $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นหรือเซตความเชื่อมั่น และใช้ข้อความที่เกี่ยวกับความ น่าจะเป็นประกอบด้วย

3.8 คุณสมบัติที่พึงปรารถนาของตัวประมาณ

ในการประมาณพารามิเตอร์ด้วยจุด เป็นการใช้ฟังก์ชัน $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ ของตัวอย่างสุ่ม X_1, \dots, X_n ซึ่งอาจใช้ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติที่พึงปรารถนาบางประการเป็นตัวประมาณของ θ การ พิจารณาคูสมบัติของ $\hat{\theta}$ ส่วนใหญ่อาศัยการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่าง ในหลายกรณีจะมี $\hat{\theta}$ ที่ อาจใช้ได้หลายตัวหรือหลายฟังก์ชัน จึงควรมีหลักเกณฑ์ที่ใช้พิจารณาคูสมบัติที่พึงปรารถนาของ ตัวประมาณ เพื่อให้เลือกใช้ตัวประมาณให้เหมาะสม แต่หลักเกณฑ์ที่ใช้เลือกตัวประมาณที่เหมาะสม มีอยู่หลายหลักเกณฑ์ ตัวประมาณตัวหนึ่งอาจมีคุณสมบัติที่พึงปรารถนาได้หลายประการด้วย

นักสถิติมีวิธีการหาตัวประมาณที่เหมาะสมอยู่หลายวิธี ดังจะพิจารณาต่อไป บางครั้งการใช้สามัญสำนึกอาจนำไปสู่ตัวประมาณที่มีคุณสมบัติที่พึงปรารถนาบางประการด้วยซ้ำ เช่น ในการ แจกแจงแทบทุกชนิดมักใช้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็นตัวประมาณของค่าเฉลี่ยของประชากร และ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างมักมีคุณสมบัติที่พึงปรารถนาหลายประการ หลายครั้งวิธีการหา ตัวประมาณ ของค่าเฉลี่ยของประชากรก็ให้ผลเป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างด้วย อย่างไรก็ตามยังมีตัวประมาณอื่น ๆ ของค่าเฉลี่ยของประชากรอีก เช่น อาจใช้มัธยฐานตัวอย่าง ค่ากึ่งกลางพิสัยตัวอย่าง ค่าฐานนิยม ตัวอย่าง ฯลฯ ในการประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร จึงควรเลือกใช้ตัวประมาณให้เหมาะสมกับ สถานการณ์ และมีคุณสมบัติที่พึงปรารถนาบางประการ

คุณสมบัติที่พึงปรารถนาของตัวประมาณที่อาจใช้เป็นเกณฑ์ในการประเมินการเลือกใช้ให้เหมาะสมมีหลายประการ ที่จะพิจารณาต่อไปได้แก่

- 1) ความไม่เอนเอียง (Unbiased ness)
- 2) ความคงเส้นคงวา หรือความไม่ขัดแย้งกัน (Consistency)
- 3) ความพอเพียง (Sufficiency)
- 4) ความมีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance)
- 5) ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency)
- 6) ความมีความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด (Minimum mean squared error)
- 7) ความขึ้นยง หรือความไม่เปลี่ยนแปลง (Invariance)

3.9 ตัวประมาณไม่เอนเอียง

นิยาม 3. ตัวประมาณ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง (Unbiased estimator) ของพารามิเตอร์ θ ก็ต่อเมื่อ

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

$\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณเอนเอียง (Biased estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ และเรียกผลต่าง $E(\hat{\theta}) - \theta$ ว่าค่าเอนเอียง (Bias) ของ $\hat{\theta}$ ในการประมาณ θ

วิธีการหาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ทำได้หลายวิธี เช่น

1) ใช้สามัญสำนึก โดยเลือกตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของ θ มาตัวหนึ่ง แล้วหาค่าคาดหมายของตัวประมาณนั้น ถ้า $E(\hat{\theta}) = a\theta + b$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงที่และ $a \neq 0$ เราอาจปรับแก้ได้

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{a}(\hat{\theta} - b)$$

เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ

2) ใช้คุณสมบัติของตัวประมาณของ θ ที่ได้มาโดยวิธีการหนึ่ง (ตามรูปแบบ) ที่เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ เช่น ตัวแบบเชิงเส้นอย่างง่ายของ Y บน X ที่ $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ ภายใต้อัสมมติฐาน ตัวประมาณแบบกำลังสองต่ำสุด (Least squares estimators) ของ α และ β เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง

3) เลือกตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของ θ มาตัวหนึ่ง แล้วหา $E(\hat{\theta})$ ถ้าได้ $E(\hat{\theta}) = \theta$ แสดงว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ แต่ถ้า $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ พยายามหาตัวประมาณไม่เอนเอียงของค่าเอนเอียง $b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$ นำมาปรับแก้ $\hat{\theta}$ จะได้ตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ

4) หาวิธีการลดค่าเอนเอียงของ $\hat{\theta}$ ลง เช่น ใช้วิธีแจคไนฟ์ (Jackknife) ตามแบบของ เควนูลล์ (Quenouille) ที่จะกล่าวต่อไป

ตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ ถ้ามี อาจมีได้หลายตัวก็ได้

ทฤษฎีบทที่ 1. ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรหนึ่งที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว

$$1) \hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i \text{ ที่ } \sum_{i=1}^n a_i = 1 \text{ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ } \mu \text{ ที่มีความแปรปรวน } \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$2) \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ } \mu \text{ ที่มีความแปรปรวน } \frac{\sigma^2}{n}$$

$$3) S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ } \sigma^2 \text{ ที่มีความแปรปรวน } \frac{1}{n} \left[\mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right] \text{ เมื่อ } \mu_4 = E(X - \mu)^4 \text{ คือ โมเมนต์ที่ 4 รอบ } \mu \text{ ของประชากร}$$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ และ $V(\hat{\theta})$ มากกว่า 0 แล้ว $\sqrt{\hat{\theta}}$ เป็นตัวประมาณเอนเอียงของ $\sqrt{\theta}$

พิสูจน์ จากอสมการ โคชี-ชวอาร์ท¹ (Cauchy-Schwartz inequality)

$$E(\sqrt{\hat{\theta}}) \cdot E(\sqrt{\hat{\theta}}) \leq E(\sqrt{\hat{\theta}} \cdot \sqrt{\hat{\theta}}) = 0$$

$$\text{เราได้ } E(\sqrt{\hat{\theta}}) \leq \sqrt{\theta} \text{ ซึ่งจะเป็นสมการเมื่อ } V(\hat{\theta}) = 0$$

¹ อสมการนี้กล่าวว่าถ้า เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ ซึ่งอสมการจะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ สำหรับค่าคงที่บางตัว

ดังนั้น $E\sqrt{\hat{\theta}} \neq \sqrt{\theta}$ หรือ $\sqrt{\hat{\theta}}$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของ $\sqrt{\theta}$

ในบางกรณีอาจไม่มีตัวประมาณไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์เลขก็ได้ เช่นเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซองที่มีพารามิเตอร์ θ เราสามารถหาตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ ได้ (คือ \bar{X}) แต่จะไม่มีตัวประมาณไม่เอนเอียงของ $\frac{1}{\theta}$

ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณเอนเอียงของ θ โดยใช้ตัวอย่างขนาด n เควนบูลล์ ได้เสนอวิธีการหาตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ จาก $\hat{\theta}$ ที่มีค่าเอนเอียงต่ำลงวิธีหนึ่ง วิธีการของเควนบูลล์เป็นดังนี้

ให้ $\hat{\theta}_{n-1}$ เป็นค่าประมาณที่คิดจากค่า $n-1$ ค่าของตัวอย่างสุ่ม X_1, \dots, X_n โดยใช้ตัวประมาณ $\hat{\theta}_n$ (รูปเดียวกัน)

ให้ $\hat{\theta}_{n-1}$ เป็นค่าเฉลี่ย (เลขคณิต) ของ $\hat{\theta}_{n-1}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (ซึ่ง $\hat{\theta}_{n-1}$ จะมีทั้งสิ้น n ค่า) และให้

$$\hat{\theta}_n^* = n\hat{\theta}_n - (n-1)\hat{\theta}_{n-1}$$

ผลปรากฏว่า $\hat{\theta}_n^*$ มีค่าเอนเอียงน้อยกว่า $\hat{\theta}_n$

ในทำนองเดียวกัน

$$\hat{\theta}_n^* = \frac{n^2 \hat{\theta}_n + (n-1)^2 \hat{\theta}_{n-1}}{n^2 - (n-1)^2}$$

จะมีค่าเอนเอียงน้อยกว่า $\hat{\theta}_n$ ในการประมาณ θ

3.10 ตัวประมาณคงเส้นคงวา

นิยาม 4 ให้ $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณของ θ ที่มาจากตัวอย่างขนาด n เราถือว่า $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวา หรือตัวประมาณไม่ขัดแย้งกัน (Consistent estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}_n$ ลู่เข้าในความน่าจะเป็น (Converge in probability or converge stochastically) ไปหา θ นั่นคือ เมื่อ ϵ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \hat{\theta}_n - \theta \right| \geq \epsilon \right] = 0$$

หรือเมื่อ ϵ และ δ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จะมีจำนวนเต็มบวกที่ถ้า n มากกว่า N แล้ว

$$P\left[\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geq \epsilon\right] \leq \delta$$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ จากตัวอย่างขนาด n และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta$$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} V\left(\hat{\theta}_n\right) = 0$$

แล้ว $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้าประชากรมีโมเมนต์ที่ K คือ $\mu'_k = E(X^k)$ และความแปรปรวนของ X^k เป็นจำนวนจำกัดแล้วโมเมนต์ที่ k ของตัวอย่าง $M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ μ'_k

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้า $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ แล้ว $\theta_1 + \theta_2$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ และ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ_1, θ_2

ทฤษฎีบทที่ 6 ผลบวกและผลคูณของตัวประมาณคงเส้นคงวาจำนวนหนึ่งเป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของผลบวกและผลคูณของพารามิเตอร์ที่สมนัยกัน

ทฤษฎีบทที่ 7 พหุนาม (Polynomial) ของโมเมนต์ตัวอย่างเป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของพหุนามเดียวกันของโมเมนต์ประชากร

นิยาม 5 ตัวประมาณ $\hat{\theta}_n$ ของพารามิเตอร์ θ ที่ได้จากตัวอย่างสุ่มขนาด n เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาในความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean squared error consistent estimator) หรือตัวประมาณคงเส้นคงวาในค่าเฉลี่ยกำลังสอง (Consistent estimator in quadratic mean) ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2 = 0$$

ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้า $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาในความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของพารามิเตอร์ θ แล้ว $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ

นิยาม 6 ตัวประมาณ $\hat{\theta}_n$ ของพารามิเตอร์ θ ที่ได้จากตัวอย่างสุ่มขนาด n เป็นตัวประมาณที่ดีที่สุดและแจกแจงเชิงกำกับแบบปกติ (Best asymptotically normal-BAN estimator) ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ ที่มีการแจกแจงเชิงกำกับแบบปกติและมีความแปรปรวนต่ำที่สุด

ตัวประมาณ $\hat{\theta}_n$ ของ θ ที่มีคุณสมบัตินี้ จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข 3 ประการ คือ

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \hat{\theta}_n - \theta \right| > \epsilon \right] = 0 \text{ เมื่อ } \epsilon > 0$$

2) เมื่อ $n \rightarrow \infty$ แล้ว $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ มีการแจกแจงใกล้ปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน σ^2 (ที่ขึ้นอยู่กับ θ)

3) ถ้า $\hat{\theta}_n^*$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ ที่ $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)$ มีการแจกแจงใกล้ปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน σ^{*2} เมื่อ $n \rightarrow \infty$ แล้ว $\sigma^2 \leq \sigma^{*2}$

3.11 ตัวประมาณที่มีความแปรปรวนต่ำสุด

นิยาม 7 ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของพารามิเตอร์ θ เป็นตัวประมาณที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum variance estimator - MVE) หรือตัวประมาณที่ดีที่สุด (Best estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}$ มีความแปรปรวนมากกว่าความแปรปรวนของตัวประมาณอื่นใดของ θ

ในการเปรียบเทียบความแปรปรวนของตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ ควรเปรียบเทียบกับความแปรปรวนของตัวประมาณของ θ ที่มีคุณสมบัติอื่น ๆ เหมือน ๆ กัน ที่นิยมพิจารณากันมาก ได้แก่ ความแปรปรวนของตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ θ หรือตัวประมาณที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของค่าสังเกตและไม่เอนเอียงของ θ

นิยาม 8 ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของพารามิเตอร์ θ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด หรือเป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (Minimum variance unbiased estimator - MVUE) หรือเป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (Best unbiased estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ ที่มีความแปรปรวนต่ำสุดในบรรดาตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ ด้วยกัน

นิยาม 9 ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของพารามิเตอร์ θ เป็นตัวประมาณเชิงเส้นดีที่สุดในไม่เอนเอียง (Best linear unbiased estimator-BLUE) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}$ เป็นฟังก์ชันกำลังที่หนึ่งของตัวอย่างสุ่มที่ไม่เอนเอียงของ θ และมีความแปรปรวนต่ำสุดในบรรดาตัวประมาณที่เป็นฟังก์ชันกำลังที่หนึ่งของตัวอย่างสุ่มและไม่เอนเอียงของ θ ด้วยกัน

ความแปรปรวนของตัวประมาณบางตัวของพารามิเตอร์ θ จะมีค่าขอบเขตต่ำ (Lower bound) ภายใต้เงื่อนไขบางประการที่จะพิจารณาภายหลัง ค่าขอบเขตล่างเป็นค่าต่ำสุดของความแปรปรวนของตัวประมาณใดๆ ของ θ

นิยาม 10 ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของ θ เป็นตัวประมาณที่มีความแปรปรวนถึงค่าขอบเขตต่ำสุด (Minimum variance bound estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}$ มีความแปรปรวนต่ำที่สุดและเท่ากับค่าขอบเขตล่างของความแปรปรวนของตัวประมาณใดๆ ของ θ

ทฤษฎีบทที่ 9 ถ้ามีตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุดของพารามิเตอร์ θ แล้ว จะต้องไม่มีตัวเดียว

3.12 วิธีหาตัวประมาณพารามิเตอร์

ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta), \theta \in \Omega$ ในที่นี้ให้ถือว่าทราบรูปของฟังก์ชัน f แต่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ θ โดยที่ Ω เป็นปริภูมิพารามิเตอร์ บางครั้งอาจถือว่า $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ k ตัวที่ θ , แต่ละตัวเป็นจำนวนจริง นั่นคือถือว่าปริภูมิพารามิเตอร์ \square เป็นปริภูมิยูคลิเดียนที่มีมิติ k

นักสถิติต้องการหาสถิติ (ฟังก์ชัน) $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ ของตัวอย่างสุ่ม X_1, \dots, X_n ที่ใช้ประมาณ θ หรือฟังก์ชันของ θ เช่น $g_1(\theta), g_2(\theta), \dots, g_r(\theta)$ เป็นต้น

มีผู้เสนอวิธีการที่ใช้หา $\hat{\theta}$ ไว้หลายวิธี แต่ละวิธีมักใช้สามัญสำนึกหรือมีเหตุผลประกอบ ในที่นี้จะพิจารณาวิธีหาตัวประกอบ $\hat{\theta}$ ต่อไปนี้

1. วิธีโมเมนต์ (Method of moment)
2. วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Method of maximum likelihood)
3. วิธีไคกำลังสองต่ำสุด (Method of minimum chi-square)
4. วิธีระยะห่างต่ำสุด (Method of minimum distance)
5. วิธีของเบส์ (Method of Bayes)
6. วิธีมินิแมกซ์ (Method of minimax)
7. วิธีกำลังสองต่ำสุด (Method of least squares)
8. วิธีของพิทมัน (Method of Pitman)

3.13 วิธีโมเมนต์

วิธีการ การหาตัวประมาณด้วยวิธีโมเมนต์ ทำได้ง่ายมาก เป็นวิธีการหาตัวประมาณของพารามิเตอร์เก่าแก่ที่สุด นำเสนอครั้งแรกโดยคาร์ลเพียร์สัน (Karl Pearson) เมื่อประมาณปี ค.ศ. 1894 วิธีการนี้มักให้ตัวประมาณได้เสมอในหลายกรณี และมักจะทำให้ได้ตัวประมาณที่ยังปรับปรุงให้ดีขึ้นได้อีก แต่เป็นการเริ่มต้นที่ดีในกรณีที่วิธีอื่นทำให้หาตัวประมาณได้ยาก

แนวความคิดที่นำมาใช้หาตัวประมาณด้วยวิธีโมเมนต์ ได้แก่ การถือว่าโมเมนต์ตัวอย่างเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของโมเมนต์ของประชากรที่สมนัยกัน และฟังก์ชันของโมเมนต์ตัวอย่างก็อาจใช้เป็นตัวประมาณฟังก์ชันที่สมนัยกันของพารามิเตอร์ได้

ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \underline{\theta}), \underline{\theta} \in \Omega$ ซึ่งมีโมเมนต์ที่ k คือ อาจหา $\mu'_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x; \underline{\theta}) dx$ ได้ อันจะทำให้มีโมเมนต์ที่ 1, 2, ...,

$k-1$ ด้วย

นิยาม 11 เมื่อประชากรมีฟังก์ชันความหนาแน่นขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ และมีโมเมนต์ที่ k คือ μ'_k และให้โมเมนต์ที่ k ของตัวอย่างเป็น $M'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ ตัวประมาณแบบโมเมนต์ ของ $\theta_1, \dots, \theta_k$ คือค่าของพารามิเตอร์เหล่านี้ในเทอมของค่าสังเกต X_1, \dots, X_n ที่ได้จากการแก้สมการ

$$\mu'_j = M'_j \quad j = 1, 2, \dots, k$$

3.14 ปัญหาในการหาตัวประมาณแบบโมเมนต์

การใช้วิธีโมเมนต์หาตัวประมาณพารามิเตอร์ หรือฟังก์ชันของพารามิเตอร์เป็นจุดเริ่มต้นที่ดี แต่ผลที่ได้อาจไม่เป็นตัวประมาณที่มีคุณภาพพึงปรารถนาเสมอไปในการหาตัวประมาณอาจประสบปัญหาเกี่ยวกับการแก้สมการได้ ซึ่งอาจได้ใช้การประมาณด้วยตัวเลขให้ได้ค่าใกล้เคียงในบางกรณี

ในการประมาณฟังก์ชันของพารามิเตอร์ เช่น $g_1(\theta_1, \dots, \theta_k), g_2(\theta_1, \dots, \theta_k), \dots, g_r(\theta_1, \dots, \theta_k)$ โดยวิธีโมเมนต์ อาจดำเนินการได้หลายทาง

1. ใช้วิธีโมเมนต์หาตัวประมาณของ $\theta_1, \dots, \theta_k$ คือให้ $\mu'_j = M'_j, j = 1, \dots, k$ แล้วแก้สมการหาค่าของ θ_j ในเทอมของค่าสังเกตเป็นตัวประมาณ $\hat{\theta}_j$ ของ $\theta_j, j = 1, \dots, k$ แล้วใช้ $\hat{\theta}_j$ ในการประมาณ g_1, \dots, g_r คือ $\hat{g}_1 = g_1(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k), \dots, \hat{g}_r = g_r(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$

2. ใช้โมเมนต์ $\mu'_j = E(X^j)$, $j = 1, 2, \dots, k$ ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของ g_1, \dots, g_r คือ $\mu'_j = \mu'_j(g_1, \dots, g_r)$, $j = 1, \dots, k$ แล้วหา g_1, \dots, g_r จากสมการ $\mu'_j(g_1, \dots, g_r) = M'_j$ ในเทอมของค่าสังเกตเป็นตัวประมาณแบบโมเมนต์ของ g_1, \dots, g_r
วิธีการทั้งสองที่กล่าวนี้ ไม่จำเป็นต้องให้ผลลัพธ์เดียวกัน

3.15 คุณสมบัติของตัวประมาณแบบโมเมนต์

ตัวประมาณพารามิเตอร์ที่ได้มาโดยวิธีโมเมนต์มีคุณสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ

1. โดยทั่วไปตัวประมาณแบบโมเมนต์เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวา เนื่องจากตัวประมาณแบบนี้เป็นฟังก์ชันของโมเมนต์ตัวอย่าง และโมเมนต์ตัวอย่างเป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของโมเมนต์ของประชากร
2. ภายใต้เงื่อนไขทั่วไป ตัวประมาณแบบโมเมนต์มีการแจกแจงเชิงกำกับแบบปกติ (Asymptotically normal)
3. ตัวประมาณแบบโมเมนต์อาจเอนเอียงหรือไม่เอนเอียงก็ได้ หากเป็นตัวประมาณเอนเอียง อาจลดค่าเอนเอียงลงได้ เช่น ใช้วิธีแจกโนไฟตามแบบของแควนูลส์ที่กล่าวมาแล้ว
4. ค่าเอนเอียงของตัวประมาณแบบโมเมนต์มักมีค่าน้อย (ในอันดับหรือขนาด $n-1$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมักอยู่ในรูป c/\sqrt{n}
5. ตัวประมาณแบบโมเมนต์มักมีประสิทธิภาพต่ำ บางครั้งอาจได้ตัวประมาณแบบโมเมนต์ที่ขัดแย้งกับความรู้สึก หรือสามัญสำนึก

3.16 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีการ การประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (เป็นวิธีการที่ใช้กันแพร่หลายมากที่สุด) มีแนวความคิดมานานตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ 18 คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Karl Friedrich Gauss 1777-1855) และแดเนียล เบนูลลี (Daniel Bernoulli) ได้ใช้วิธีการนี้มาแล้ว ต่อมาในศตวรรษที่ 20 โรนัลด์ ไรล์เมอร์ ฟิชเชอร์ (Ronald Aylmer Fisher 1890-1962) ได้ทำการศึกษาคุณสมบัติของวิธีการนี้ ทำให้มีผู้ใช้กว้างขวางขึ้น และถือว่าวิธีการนี้เป็นผลงานของ ฟิชเชอร์ โดยเขาได้นำเสนองานเกี่ยวกับวิธีการนี้ในปี ค.ศ. 1912 พร้อมทั้งมีการปรับปรุงแก้ไขส่วนที่เกี่ยวข้องให้เหมาะสมขึ้นอีกด้วย นักสถิติคนอื่น ๆ ก็มีส่วนทำให้วิธีการนี้เป็นที่นิยมแพร่หลายยิ่งขึ้นด้วย

นิยาม 12. ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของตัวอย่างสุ่ม คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นรวม $L = L(\theta; x_1, \dots, x_n) = L(\theta)$ ของตัวอย่างสุ่มนั้นที่ถือว่าเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ นั่นเอง

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

นิยาม 13. ค่าของพารามิเตอร์ θ ในเทอมของค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่ม X_1, \dots, X_n ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด เรียกว่า ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood estimator-MLE) ของ θ นั่นคือค่าของ θ คือ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ เป็น MLE ของ θ ก็ต่อเมื่อ $L(\hat{\theta}) = L(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$ มีค่าสูงสุด

วิธีหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีการหาค่าของพารามิเตอร์ θ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $L(\theta)$ สูงสุด ในการนี้มีข้อควรสังเกตดังต่อไปนี้

1. เป้าหมายในการหา MLE ของ θ คือการหาค่า θ เรียกว่า $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ ที่ทำให้

$$L(\hat{\theta}; x_1, \dots, x_n) \geq L(\theta; x_1, \dots, x_n)$$

เมื่อ $\theta \in \Omega$ และ $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$

2. ถ้าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น $L(\theta)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (Differentiable function) เมื่อเทียบกับ θ อาจใช้อนุพันธ์หา MLE ของ θ ได้ เมื่อเรนจ์ของ $f(x; \theta)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ θ และ θ อยู่ในช่วงจำนวนจริงช่วงหนึ่ง ในกรณีดังกล่าว $\hat{\theta}$ คือรากของสมการ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

เงื่อนไขพอเพียง(Sufficient condition) ที่ $\hat{\theta}$ ทำให้ $L(\hat{\theta}) \geq L(\theta)$, $\theta \in \Omega$ คือ

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0 \quad \text{เมื่อ } \theta = \hat{\theta}$$

3. การใช้อนุพันธ์หา MLE ในหลายกรณีใช้ $\ln L$ จะสะดวกกว่าที่จะใช้ L ควรสังเกตว่า

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

และ $L > 0$ ดังนั้น เมื่อให้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$$

เราจะได้ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ด้วย นอกจากนั้น เมื่อ

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0$$

ก็จะทำให้ $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$ ด้วย

นิยาม 14. สมการที่ใช้หา MLE คือ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ หรือ $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ เราเรียกว่า **สมการภาวะ**

น่าจะเป็น (Likelihood equation)

4. ในบางกรณี อาจไม่สามารถใช้อนุพันธ์ในการหา MLE เช่นเมื่อเรนจ์ของ $f(x; \theta)$ ขึ้นอยู่กับ θ

คุณสมบัติของตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีคุณสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ ซึ่งจะรวบรวมนำเสนอไว้บางประการต่อไปนี้

1. ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นของพารามิเตอร์ θ เป็นฟังก์ชันของสถิติพอเพียงของ θ (ซึ่งจะพิสูจน์ให้เห็นจริงภายหลัง)
2. ในกรณีที่มีตัวประมาณซึ่งมีความแปรปรวนต่ำสุดเท่าค่าขอบเขตล่างของพารามิเตอร์ θ ตัวประมาณนั้นอาจหาได้โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (ซึ่งจะพิสูจน์ให้เห็นจริงภายหลัง)
3. ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดอาจมีได้มากกว่า 1 ตัว

ทฤษฎีบทที่ 10 ถ้า $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ θ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} P[\hat{\theta}_n = \theta] = 1$

ทฤษฎีบทที่ 11 ภายใต้เงื่อนไขธรรมดา ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ ที่คงเส้นคงวาแล้ว มีได้เพียงตัวเดียว $\hat{\theta}$

ทฤษฎีบทที่ 12 ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ θ และมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นอันดับที่ 1 และ 2 เทียบกับ θ ในช่วงที่กลุ่มค่าแท้จริง θ_0 ของ θ และ $R^2(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2$ ต่างจาก 0 เมื่อ θ อยู่ในช่วงดังกล่าว แล้ว $\hat{\theta}$ มีการแจกแจงเชิงกำกับแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย θ_0 และความแปรปรวน $1/R^2(\theta_0)$

ปัญหาในการหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ในการหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ θ เราจะพยายามหาค่าของ θ ในเทอมของค่าสังเกต X_1, \dots, X_n

ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น $L(\theta)$ มีค่าสูงสุด เมื่อใช้อนุพันธ์ นักสถิติจะหาค่าของ θ ดังกล่าว จากสมการภาวะน่าจะเป็น $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ หรือ $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ คือหาจุดวิกฤต (Critical point) ที่จะทำให้ L สูงสุดนั่นเอง บางครั้งการแก้สมการดังกล่าวอาจทำได้ยากเช่นเมื่อสมการภาวะน่าจะเป็นเป็นสมการระดับชั้นสูง ๆ หรือเป็นสมการซับซ้อน

ในบางกรณี ไม่อาจใช้อนุพันธ์เพื่อหาค่าของพารามิเตอร์ θ ในเทอมของค่าสังเกต X_1, \dots, X_n ได้เช่นเมื่อ L หรือ $\ln L$ เป็นฟังก์ชันของ θ ที่หาอนุพันธ์ไม่ได้ หรือเมื่อเรนจ์ของฟังก์ชันขึ้นอยู่กับ θ หรืออนุพันธ์ไม่มี θ อยู่ด้วย จึงต้องใช้วิธีการอื่น ๆ เช่นการสังเกตว่า $L(\theta)$ จะสูงสุดได้เมื่อไร หรือการเปรียบเทียบค่าของ $L(\theta)$ เมื่อค่าของ θ เปลี่ยนไป

แม้ในกรณีที่ใช้อนุพันธ์ในการหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ควรมีการตรวจสอบเงื่อนไขพอเพียงที่ค่าของ θ นั้นจะทำให้ $L(\theta)$ สูงสุด มิใช่ให้ค่าต่ำที่สุด

ในกรณีที่ใช้อนุพันธ์ในการหา θ ที่ทำให้ $L(\theta)$ มีค่าสูงสุด แต่ไม่อาจแก้สมการภาวะน่าจะเป็น หรือแก้ได้ยาก อาจใช้การประมาณ (Approximation) ค่าของ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ โดยอาศัยค่าสังเกต $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ ตามวิธีการของนิวตัน (Newton's approximation) ได้เมื่อ n มีค่ามาก

ทฤษฎีบทที่ 13 ค่าประมาณของรากของสมการภาวะน่าจะเป็น $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ ได้แก่

$$\hat{\theta} = \theta_0 + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0}^{-1} v(\hat{\theta})$$

$$\text{โดยที่ } v(\hat{\theta}) = -1 / E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right)$$

พิสูจน์ จากอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้ คือ

$$0 = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)_{\theta=\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} + \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right) \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta^*}$$

เมื่อ θ^* อยู่ระหว่าง $\hat{\theta}$ กับ θ_0 ซึ่งเป็นค่าที่แท้จริงของ θ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\theta^* = \theta_0] = 1$$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} = E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right) \right] = 1$$

หรือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{\partial^2 \ell_{nL}}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{v(\hat{\theta})} \right] = 1$$

ดังนั้น เมื่อ n มีค่ามาก จะได้

$$0 = \left(\frac{\partial \ell_{nL}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} - \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right) \frac{1}{v(\hat{\theta})}$$

หรือ

$$0 = \theta_0 \left(\frac{\partial \ell_{nL}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} \cdot v(\hat{\theta})$$

โดยที่

$$v(\hat{\theta}) = -1 / E \left(\frac{\partial^2 \ell_{nL}}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{E \left(\frac{\partial \ell_{nL}}{\partial \theta} \right)^2}$$

ให้ θ_0 เป็นค่าประมาณเริ่มต้นของ $\hat{\theta}$ ค่าของ $\hat{\theta}$ ที่หาได้ในรอบแรกจะใช่เป็น θ_0 ในรอบที่ 2 เช่นนี้ซ้ำ ๆ ได้หลายรอบ จนกระทั่งได้ค่าของ $\hat{\theta}$ ที่ค่อนข้างนิ่ง คือ มีค่าต่างจากค่าที่หาได้ในรอบก่อนไม่มากนัก

ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์หลายตัว ในกรณีที่พารามิเตอร์ θ เป็นเวกเตอร์ $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ อาจหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $\theta_1, \dots, \theta_k$ ที่ปรากฏอยู่ในฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$ ได้ โดยใช้หลักเกณฑ์เดิม นอกจากนั้นตัวแปรสุ่มแต่ละตัวของตัวอย่างสุ่ม ยังอาจเป็นเวกเตอร์ได้ด้วย

นิยาม 15. เมื่อ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$ ค่าของ $\theta_1, \dots, \theta_k$ ในเทอมของค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่มที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น $L(\theta_1, \dots, \theta_k)$ มีค่าสูงสุด เรียกว่า ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ของ $\theta_1, \dots, \theta_k$ นั่นคือ $\hat{\theta}_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \hat{\theta}_k(x_1, \dots, x_n)$ เป็น MLE ของ $\theta_1, \dots, \theta_k$ ตามลำดับ ก็ต่อเมื่อ $L(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ มีค่าสูงสุด

เงื่อนไขจำเป็นที่ทำให้ $L(\theta_1, \dots, \theta_k)$ สูงสุด ได้แก่ $\frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, j = 1, \dots, k$ หรือที่สมมูลกันก็คือ $\frac{\partial \ln L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, j = 1, \dots, k$ และเงื่อนไขพอเพียงที่จะได้ L สูงสุดได้แก่ การที่เมตริกซ์ $\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)$ เป็นเมตริกซ์นิเสธแน่ (Negative definite matrix) ขนาด $k \times k$

เมื่อสามารถใช้อนุพันธ์ในการหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ $\theta_1, \dots, \theta_k$ ได้เราเรียกกระบวนการ $\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0$ หรือ $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0$ ว่า ระบบสมการภาวะน่าจะเป็น

3.17 วิธีไคกำลังสองต่ำสุด

นิยาม 16. ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นดังกล่าว มีการแบ่งกัน (Partition) S ออกเป็น $S_1 \cup S_2, \dots, \cup S_k$ โดยที่ $S_i \cap S_j = \Phi$ เมื่อ $i \neq j$ ให้ $P_j = P_j(\theta)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ X_i มีค่าอยู่ใน $S_i, \sum_{j=1}^k P_j = 1$ ให้ n_j เป็นจำนวน X_i ในตัวอย่างมีค่าตกอยู่ใน $S_i, \sum_{j=1}^k n_j = n$ ค่าของ θ ในเทอมของค่าสังเกตที่ทำให้

$$X^2 = n \sum_{j=1}^k \left[\frac{n_j}{n} - P_j(\theta) \right]^2 / P_j(\theta) \quad (1)$$

มีค่าต่ำสุด ที่เรียกว่า ตัวประมาณแบบไคกำลังสองต่ำสุด (Minimum chi-squares estimator) ของ θ รูปอื่นของ X^2 ใน (1) ได้แก่

$$X^2 = \sum_{j=1}^k \left[n_j - np_j(\theta) \right]^2 / np_j(\theta) \quad (2)$$

และฟังก์ชันการแจกแจงของตัวอย่าง คือ

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \frac{n_0}{n} & \text{เมื่อ } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

ฟังก์ชันระยะห่างระหว่าง $F(x; \theta)$ กับ $F_n(x)$ คือ

$$d(F(x; \theta), F_n(x)) = \sup_x |F(x; \theta) - F_n(x)|$$

ดังนั้น $d(F(x; \theta), F_n(x))$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $1 - \theta = \frac{n_0}{n}$ หรือ $\theta = 1 - \frac{n_0}{n} = \frac{n_1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

นั่นคือ ตัวประมาณแบบระยะห่างต่ำสุด คือ $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}$

3.18 วิธีของเบย์

แนวความคิด สถิติตามแนวของเบย์ (Bayesian approach) แตกต่างจากสถิติตามแนวเดิม (Classical approach) ในแนวเดิม การประมาณพารามิเตอร์ θ มักถือว่าเริ่มจากการสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ และถือว่าพารามิเตอร์ θ เป็นค่าคงที่ แต่ไม่ทราบค่า แต่ในแนวของเบย์จะมีความพยายามใช้ความรู้เดิมหรือข้อมูลเดิมเกี่ยวกับ θ ให้เป็นประโยชน์ในการประมาณ θ ให้ได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นจึงถือว่า θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นรูปใดรูปหนึ่ง

ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta) = f(x|\theta)$ โดยที่ θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ

ในที่นี้ เราถือว่า $f(x|\theta)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไข (Conditional probability density function) ของตัวแปรสุ่ม เมื่อกำหนดให้ว่า $\Theta = \theta$

นิยาม 17. ให้ตัวแปรสุ่ม Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่น $g(\theta)$ ซึ่งเรียกว่า **ฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่ม** (Prior or initial probability density function) ของ Θ

ให้ $h(\theta|X_1, \dots, X_n)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่น แบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่ม Θ เมื่อกำหนดให้ว่า $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ มักเรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันความหนาแน่นภายหลัง** (Posterior probability density function) หรือ **ฟังก์ชันความหนาแน่นปรับแก้** (Revised probability density function) ของ Θ

ในที่นี้ ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X_1, \dots, X_n เมื่อกำหนดให้ว่า $\Theta = \theta$ ได้แก่

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

อาจหาฟังก์ชันความหนาแน่นภายหลังของ Θ ได้จากฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่มต้น และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไขของตัวอย่างสุ่ม โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไข

ให้ Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่มต้นเป็น $g(\theta)$

ดังนั้น ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X_1, \dots, X_n และ Θ ได้แก่

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta)g(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)g(\theta)$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X_1, \dots, X_n (ไม่มีเงื่อนไข คือ $f(x_1, \dots, x_n | \theta)g(\theta)$) $d\theta$

ดังนั้น ฟังก์ชันความหนาแน่นภายหลังของ Θ ได้แก่

$$h(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n | \theta)g(\theta)}{\int f(x_1, \dots, x_n | \theta)g(\theta)d\theta} \quad (3.33)$$

หรือ

$$h(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)g(\theta)}{\int \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)g(\theta)d\theta} \quad (3.34)$$

ตัวประมาณแบบเบส์ภายหลัง

นิยาม 18 ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x|\theta)$ โดยที่ θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่มต้น $g(\theta)$

ตัวประมาณแบบเบส์ภายหลัง (Posterior Bayes estimator) ของฟังก์ชัน $t(\theta)$ ของ θ เทียบกับฟังก์ชันเริ่มต้น $g(\theta)$ ได้แก่ $\hat{t}(\theta) = E(t(\Theta) | X_1, \dots, X_n)$ นั่นคือ

$$\hat{t}(\theta) = \int t(\theta)h(\theta | x_1, \dots, x_n)d\theta$$

หรือ

$$\hat{t}(\theta) = \frac{\int t(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)g(\theta)d\theta}{\int \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)g(\theta)d\theta}$$

3.19 วิธีมินิแมกซ์

ในการประมาณค่าของพารามิเตอร์ โดยการพิจารณาฟังก์ชันสูญเสีย มักต้องการตัวประมาณที่มีความสูญเสียต่ำ สิ่งที่เราพิจารณาจึงได้แก่ ค่าคาดหวังของความสูญเสีย หรือการเสี่ยง นั่นเอง

นิยาม 19 ตัวประมาณ $T_1(X_1, \dots, X_n)$ ของ $g(\theta)$ ดีกว่า ตัวประมาณ $T_2(X_1, \dots, X_n)$ ก็ต่อเมื่อ $R(\theta, T_1) \leq R(\theta, T_2)$ ทุกค่า θ และ $R(\theta, T_1) < R(\theta, T_2)$ อย่างน้อย θ ค่าหนึ่ง

ตัวประมาณ $T_1(X_1, \dots, X_n)$ ของ $g(\theta)$ เป็นตัวประมาณที่ยอมรับได้ ก็ต่อเมื่อไม่มีตัวประมาณใดของ $g(\theta)$ ที่ดีกว่า $T_1(X_1, \dots, X_n)$

นิยาม 20 ตัวประมาณ $T_0(X_1, \dots, X_n)$ ของ $g(\theta)$ เป็นตัวประมาณแบบมินิแมกซ์ (Minimax Estimator) ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, T_0) \leq \sup_{\theta \in \Omega} R(\theta, T) \quad (3.43)$$

ไม่ว่า $T_1(X_1, \dots, X_n)$ จะเป็นตัวประมาณใด ๆ ของ $g(\theta)$

ตัวประมาณแบบมินิแมกซ์ จึงเป็นตัวประมาณที่มีการเสี่ยงสูงสุด ต่ำกว่าหรือเท่ากับการเสี่ยงสูงสุดของตัวประมาณใด ๆ ของฟังก์ชันของพารามิเตอร์ที่สนใจ

ทฤษฎีบทที่ 14 ถ้า $T_0(X_1, \dots, X_n)$ เป็นตัวประมาณแบบเบสส์ของ $t(\theta)$ ที่มีการเสี่ยง คงที่ แล้ว T_0 เป็นตัวประมาณแบบมินิแมกซ์ของ $t(\theta)$

3.20 วิธีกำลังสองต่ำสุด

แนวความคิดและวิธีการหาตัวประมาณแบบกำลังต่ำสุด วิธีการนี้เป็นวิธีการสำคัญมีรากฐานมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้น (Theory of linear estimation) โดยไม่จำเป็นต้องทราบรูปการแจกแจงความน่าจะเป็น แต่อาศัยผลต่างระหว่างค่าสังเกตและค่าคาดหมายเป็นสำคัญ วิธีการนี้คิดขึ้นโดย คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Karl Friedrich Gauss 1777-1855) และ อังเดร อังเดรเยวิช มาร์คอฟ (Andrei Andreevich Markov 1856-1922)

นิยาม 21 ให้ X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรหนึ่งที่มีค่าคาดหมาย $E(X)$ ค่าของพารามิเตอร์ในเทอมของค่าสังเกตที่ทำให้ผลบวกของกำลังที่ 2 ของผลต่างระหว่างค่าสังเกตกับค่าคาดหมายต่ำสุด จะเรียกว่า **ตัวประมาณแบบกำลังสองต่ำสุด** (Least-squares estimator) ของพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง

นั่นคือ ตัวประมาณแบบกำลังสองต่ำสุดของพารามิเตอร์ θ (อาจเป็นเวกเตอร์) ที่ปรากฏอยู่ในค่าคาดหมาย $E(X)$ ได้แก่ ค่าของ θ ในเทอมของค่าสังเกต ที่ทำให้

$$Q = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X_i))^2$$

ต่ำที่สุด

มักหาตัวประมาณดังกล่าว โดยการใช้อนุพันธ์กล่าวคือ ใช้

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$$

และเรียกสมการ ว่า **สมการปกติ** (Normal equation(s))

บทที่ 4

ตัวทำนาย

4.1 กล่าวนำ

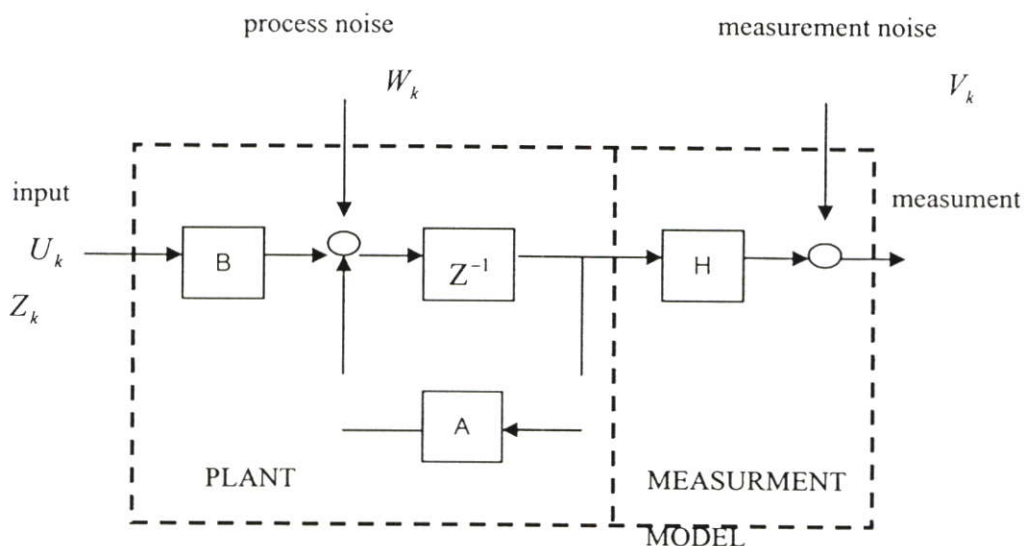
ในบทนี้เราจะได้นำเสนอ อัลกอริทึมที่ใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ซึ่งมีชื่อเรียกว่า ดิสกรีทคาลมานฟิลเตอร์ (Discrete Kalman filter) และคุณสมบัติของแบบจำลองการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ ซึ่งมีรูปแบบการพยากรณ์ในลักษณะคล้ายคลึงตัวเอง

4.2 ดิสกรีทคาลมานฟิลเตอร์

คาลมานฟิลเตอร์เป็นกลุ่มสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งให้ประสิทธิภาพต่อการแก้ปัญหาการคำนวณแบบวนซ้ำด้วยวิธีการ least-squares ตัวฟิลเตอร์นี้จะมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการใช้งานในหลาย ๆ รูปแบบ โดยจะสนับสนุนต่อการประมาณเหตุการณ์สถานะในอดีต ปัจจุบัน และอนาคต และสามารถที่จะทำงานได้ในสถานะที่เรารู้ไม่ทราบลักษณะที่แน่นอนของระบบแบบจำลอง

4.2.1 การประมาณกระบวนการ

คาลมานฟิลเตอร์จะกล่าวถึงปัญหาโดยทั่วไป ของความพยายามที่จะประมาณสถานะ x_k ของตัวควบคุมกระบวนการเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete-time controlled process) ซึ่งกำหนดโดยสมการความแตกต่างสโตแคสติกลักษณะเชิงเส้น (linear stochastic difference equation)



รูปที่ 4.1 การวัดค่าของสัญญาณระบบเชิงเส้นแบบเวลาไม่ต่อเนื่องเมื่อมีสัญญาณรบกวนเข้ามาเกี่ยวข้อง

จากรูปที่ 4.1 เราสามารถแสดงสมการความแตกต่างสโตแคสติกแบบเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\mathcal{X}_k = A_k \mathcal{X}_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1} \quad (4.1)$$

เมื่อ \mathcal{X}_k แทนสถานะที่เวลา k

u_k แทนสัญญาณอินพุต

w_{k-1} แทนการรบกวนของกระบวนการที่สถานะ $k-1$

A_k แทนเมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานะที่ k กับ $k-1$

B_k แทนเมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์กันกับตัวควบคุมทางเข้า u_k ที่สถานะ \mathcal{X}_k

ตัวแปรสุ่ม w_k แทนการรบกวนของกระบวนการ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ ($\overline{w_k} = 0$) และมีค่าโควาเรียนเท่ากับ Q_k ($\overline{w_k w_k^T} = Q_k$) ในการวัดสัญญาณนั้น กำหนดให้ค่าที่วัดได้เป็น Z_k จะได้สมการดังนี้ คือ

$$z_k = H_k \mathcal{X}_k + v_k \quad (4.2)$$

ค่า z_k ที่วัดได้จะขึ้นอยู่กับค่าปัจจุบันของ \mathcal{X}_k เมตริกซ์ H_k จะสัมพันธ์กันกับสถานะของการวัด z_k การวัดนี้มีค่าการรบกวน แทนการรบกวนของการวัดมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ ($\overline{v_k} = 0$) จะมีค่าโควาเรียนเท่ากับ R_k ($\overline{v_k v_k^T} = R_k$) โดยตัวแปร w_k และ v_k เป็นอิสระซึ่งกันและกัน นั่นคือจะไม่เกี่ยวข้องกันเลย และเป็นกระบวนการรบกวนสีขาวแบบคงที่ (stationary white noise process) ซึ่งมีสัญลักษณ์ คือ

$$w_k = (0, Q), \quad (4.3)$$

$$v_k = (0, R) \quad (4.4)$$

ในทางปฏิบัติแล้วเมตริกซ์โควาเรียนการรบกวนของกระบวนการ Q_k และเมตริกซ์โควาเรียนการรบกวนของการวัด R_k จะแสดงถึงความน่าเชื่อถือของระบบและการวัด ซึ่งอาจจะวัดมีค่าเปลี่ยนแปลงที่แต่ละจังหวะเวลา (step time) หรือแต่ละการวัด ตามลำดับ

4.2.2 การคำนวณของกาลมานฟิลเตอร์

เรานิยาม $\hat{\mathcal{X}}_k^- \in \mathcal{X}$ (สังเกตที่เครื่องหมายลบ) เป็นการประมาณสถานะข้างหน้าทีลำดับ k และ $\hat{\mathcal{X}}_k \in \mathcal{X}$ เป็นการประมาณสถานะข้างหลังทีลำดับ k กำหนดให้การวัดเป็น z_k เราสามารถนิยามความผิดพลาดของการประมาณข้างหน้าและข้างหลัง คือ

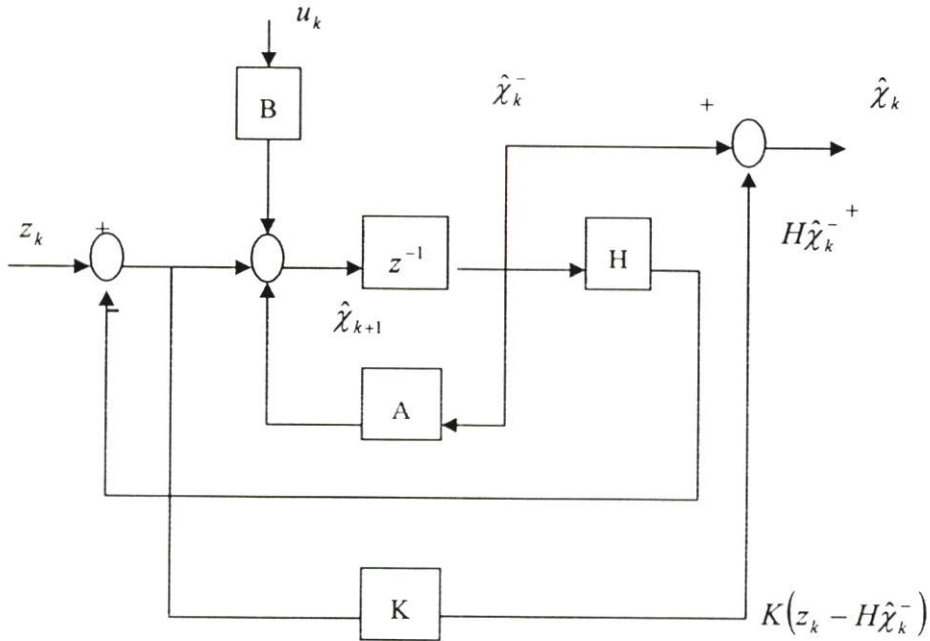
$$\ell_k^- = \mathcal{X}_k - \hat{\mathcal{X}}_k^-, \quad \ell_k = \mathcal{X}_k - \hat{\mathcal{X}}_k$$

ความแปรปรวนร่วมของการประมาณข้างหน้าที่เกิดพลาด คือ

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (4.5)$$

และความแปรปรวนร่วมของการประมาณข้างหลังที่เกิดพลาด คือ

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (4.6)$$



รูปที่ 4.2 การสร้างระบบจำลองมาเพื่อประมาณ x_k

การได้มาของสมการกาลมานฟิลเตอร์นั้น เริ่มต้นด้วยจุดมุ่งหมายที่จะสร้างสมการ ซึ่งคำนวณการประมาณสถานะข้างหลัง \hat{x}_k โดยการรวมแบบเชิงเส้นของการประมาณข้างหน้า \hat{x}_k^- และน้ำหนัก (weighted) ที่แตกต่างกันระหว่างการวัดค่าจริง z_k และการทำนายการวัด $H_k \hat{x}_k^-$ ซึ่งสมการที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.2

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \quad (4.7)$$

เมตริกซ์ ในสมการที่ (4.7) เรียกว่า อัตราขยายกาลมาน (Kalman gain : K) หรือตัวประกอบของความกลมกลืน (blending factor) ซึ่งมีค่าโควาเรียนซ์ข้างหลังที่เกิดพลาดในสมการที่ (4.6) ต่ำที่สุด (ภาคผนวก ค) และสามารถที่จะทำให้สมบูรณ์ได้โดย แทนสมการที่ (4.7) ลงในนิยามข้างบนสำหรับค่า e_k แล้วแทนลงในสมการที่ (4.6) ทำการหาค่าความคาดหว้ง (Expectation) โดย

ผลลัพธ์ที่ได้จากการทำนายจะเกี่ยวข้องกับค่า K_k ให้ผลลัพธ์มีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการหาค่า K_k จะได้

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\ &= \frac{P_k^- H_k^T}{H_k P_k^- H_k^T + R_k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

จากสมการที่ (4.8) เราพบว่า ขณะที่ค่าโควาริเียนการวัดที่ผิดพลาด R_k มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ อัตราขยายกาลมาน K_k จะมีน้ำหนักของสิ่งที่เหลืออยู่อย่างมาก ๆ โดยเฉพาะเมื่อ

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H_k^{-1}$$

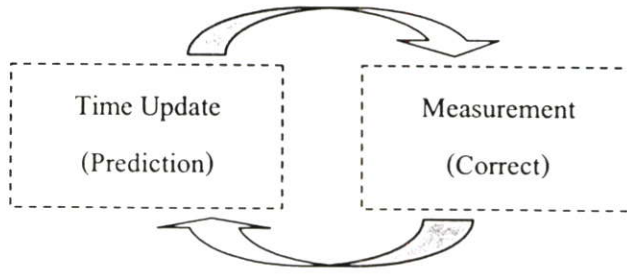
หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าโควาริเียนของการประมาณข้างหน้าผิดพลาด P_k^- มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ อัตราขยายกาลมาน K_k จะมีน้ำหนักของสิ่งที่เหลืออยู่น้อยมาก เมื่อ

$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0$$

วิธีการอย่างหนึ่งของการคิดเกี่ยวกับน้ำหนักของ K_k นั่นคือโควาริเียนการวัดที่ผิดพลาด R_k มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ การวัดค่าจริง z_k จะมีความน่าเชื่อถือมาก ๆ ขณะที่การวัดการทำนาย $H_k \hat{x}_k^-$ จะมีความน่าเชื่อถือน้อยมาก หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ โควาริเียนของการประมาณข้างหน้าผิดพลาด P_k^- มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ การวัดค่าจริง z_k จะมีความน่าเชื่อถือน้อยมาก ขณะที่การวัดการทำนาย $H_k \hat{x}_k^-$ จะมีความน่าเชื่อถือสูงมาก

4.2.3 อัลกอริทึมของดีสครีทกาลมานฟิลเตอร์

ฟิลเตอร์แบบกาลมานจะมีวิธีการทำงาน โดยอาศัยรูปแบบหนึ่งของการควบคุมการป้อนกลับของสัญญาณ (feedback control) ซึ่งวิธีการก็คือ ตัวฟิลเตอร์นี้จะประมาณสถานะของขบวนการขณะใดขณะหนึ่ง หลังจากนั้นจะนำไปป้อนกลับในรูปแบบของการวัดค่าสัญญาณรบกวน ซึ่งสมการสำหรับกาลมานฟิลเตอร์จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ สมการปรับเวลา (time update) และ สมการปรับการวัด (measurement update) สมการปรับเวลา ก็คือ ตัวที่ตอบสนองต่องานล่วงหน้าที่สถานะปัจจุบัน และโควาริเียนของการประมาณที่ผิดพลาด เพื่อให้ได้มาซึ่งการประมาณล่วงหน้าของช่วงเวลาต่อไป ส่วนสมการปรับการวัดจะตอบสนองต่อการป้อนกลับคือ การวัดครั้งใหม่จะถูกรวมเข้ากับการประมาณ เพื่อให้ได้มาซึ่งการปรับปรุงการประมาณล่วงหน้า โดยสมการปรับเวลาสามารถเรียกได้ว่าเป็น “สมการตัวทำนาย” (Predictor) และสมการปรับการวัดจะเรียกว่าเป็น “สมการตรวจแก้” (Corrector) ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.3 รูปแบบการทำงานของฟิลเตอร์แบบคาลมาน

สมการปรับเวลา

$$\hat{\chi}_k^- = A_k \hat{\chi}_{k-1} + B_k u_{k-1} \quad (4.9)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_k \quad (4.10)$$

สมการปรับการวัด

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (4.11)$$

$$\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{\chi}_k^-) \quad (4.12)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (4.13)$$

โดยที่

- $\hat{\chi}_k^-$ คือ การประมาณการสถานะข้างหน้าหรือค่าทำนายก่อนการปรับการวัด
- $\hat{\chi}_k$ คือ การประมาณการสถานะข้างหลังหรือผลการทำนายที่มีการปรับการวัดแล้ว
- P_k^- คือ โควาเรียนของการประมาณการข้างหน้าที่ผิดพลาด
- P_k คือ โควาเรียนของการประมาณการข้างหลังที่ผิดพลาด
- R_k คือ โควาเรียนการรบกวนของการวัด
- Q_k คือ โควาเรียนการรบกวนของกระบวนการ
- A_k คือ เมทริกคองที่สัมพันธ์กับสถานะที่เวลา k ไปยัง $k+1$
- H_k คือ เมทริกคองที่สัมพันธ์กับสถานะของการวัด
- B_k คือ เมทริกคองที่สัมพันธ์กับการควบคุมทางเข้า

สมการที่ (4.9) ถึง สมการที่ (4.13) เป็นสมการรูปแบบทั่วไปของคาลมานฟิลเตอร์ เมื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ เนื่องจากเป็นการทำนายค่า

แบบสุ่ม 1 มิติ ดังนั้นค่าคงที่ A_k, B_k และ H_k จึงมีค่าเท่ากับ 1 และไม่มีตัวควบคุมทางเข้าค่า u_k จึงเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการรูปแบบโดยทั่วไปของกาลมานฟิลเตอร์สามารถลดรูปได้เป็น

สมการปรับเวลา

$$\hat{\chi}_k^- = \hat{\chi}_{k-1} \quad (4.14)$$

$$P_k^- = P_{k-1} + Q_k \quad (4.15)$$

สมการปรับการวัด

$$K_k = \frac{P_k^-}{P_k^- + R_k} \quad (4.16)$$

$$\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_k^- + K(z_k - \hat{\chi}_k^-) \quad (4.17)$$

$$P_k = (I - K_k)P_k^- \quad (4.18)$$

เมื่อ

$$z_k = \chi_k + v_k \quad (4.19)$$

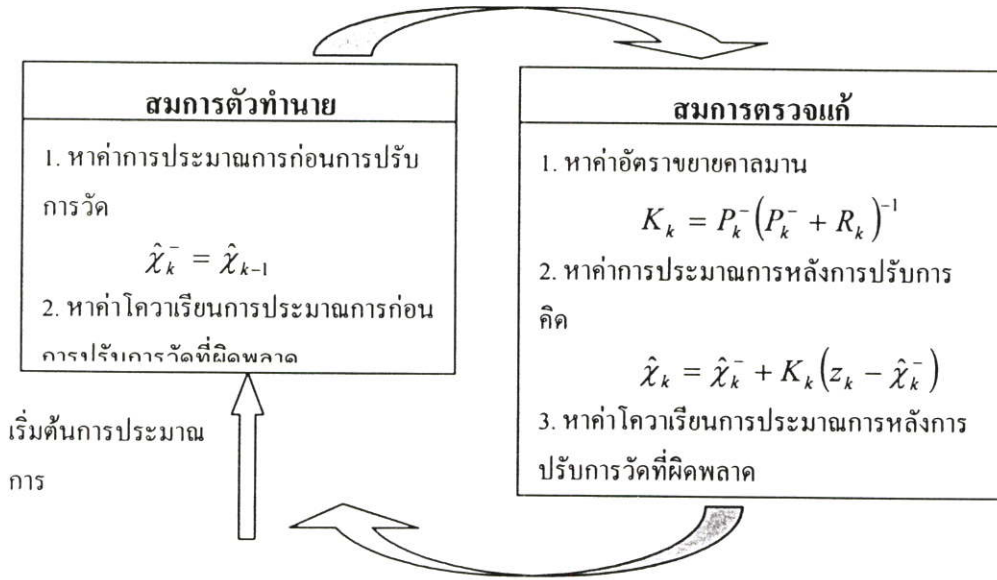
โดยที่ z_k คือ ค่าพยากรณ์ของความต้องการใช้งานโทรศัพท์จริง χ_k รวมกับค่าความคลาดเคลื่อน v_k
 $\hat{\chi}_k^-$ คือ ค่าการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ก่อนมีการปรับการวัด
 $\hat{\chi}_k$ คือ ผลการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์หลังมีการปรับการวัดแล้ว

สิ่งแรกที่ต้องกระทำก่อนการปรับการวัดคือ การคำนวณอัตราขยายกาลมาน โดยที่ค่า K_k คูได้จากสมการที่ (4.16) ลำดับต่อมาคือการวัดค่าจริงของกระบวนการซึ่งจะรวมมากับการรบกวนของการวัดเพื่อหาค่า z_k ดังสมการที่ (4.19) และหลังจากนั้นจึงสร้างการประมาณสถานะข้างหลัง หรือก็คือการทำนายที่มีการปรับการวัดแล้ว โดยการรวมการวัด เข้ากับสมการที่ (4.17) ต่อไปคือการหาค่าความแปรปรวนร่วมของการประมาณการข้างหลังที่ผิดพลาดด้วยสมการที่ (4.18) ขั้นตอนสุดท้ายคือ การหาค่าการทำนายก่อนการปรับการวัด และค่าความแปรปรวนร่วมของการประมาณการข้างหน้าที่ผิดพลาดด้วยสมการที่ (4.14) และสมการที่ (4.15) ตามลำดับ หลังจากแต่ละช่วงเวลาและคู่ของสมการปรับการวัด กระบวนการก็จะถูกทำซ้ำด้วยการประมาณกระบวนการดังก่อน

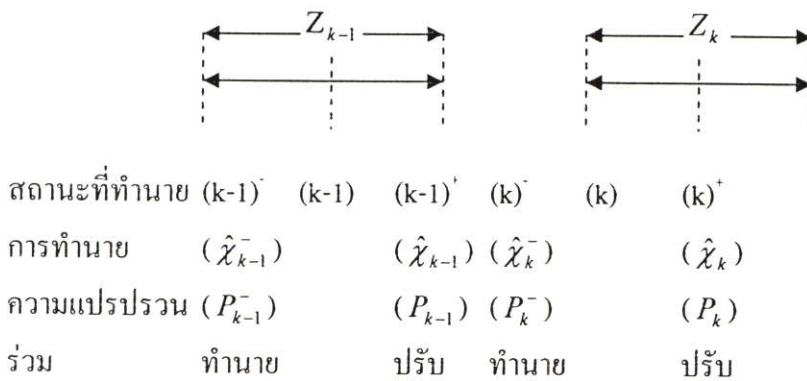
หน้านี้ เพื่อที่จะทำนายด้วยการประมาณล่วงหน้าใหม่ วิธีการนี้คือหนึ่งในขบวนการของฟิลเตอร์แบบคาลมาน ซึ่งจะเหมาะในการใช้และเป็นไปได้จริงกว่าการทำงานของฟิลเตอร์แบบเวินเนอร์ (Weiner) ซึ่งถูกออกแบบให้เป็นตัวควบคุมข้อมูลทุกตัวแบบตรง ๆ ฟิลเตอร์แบบคาลมานจะเข้ามาแทนเงื่อนไขของการประมาณปัจจุบันในการวัดค่าในอดีต

4.2.4 ตัวแปรฟิลเตอร์และการปรับแต่ง

ในการสร้างฟิลเตอร์ที่แท้จริงนั้น โควาเรียนการรบกวนของการวัด R_k เป็นการวัดข้างหน้าต่อการทำงานของฟิลเตอร์ การวัดค่าความแปรปรวนร่วมของการวัดที่ผิดพลาด R_k สามารถกระทำได้จริง เนื่องจากเราต้องการวัดกระบวนการ (ในขณะที่ฟิลเตอร์ทำงาน) อย่างไรก็ตาม เราควรทำการวัดค่าในอดีตแบบสุ่ม เพื่อที่จะกำหนดค่าความแปรปรวนของการรบกวนการวัด การกำหนดค่าความแปรปรวนร่วมของการรบกวนในกระบวนการ Q_k นั้น โดยทั่วไปแล้วกระทำได้ยากมาก ด้วยเหตุที่เราไม่มีความสามารถเฝ้ามองกระบวนการที่เรากำลังประมาณได้โดยตรง บางครั้งความสัมพันธ์ของแบบจำลองกระบวนการสามารถสร้างผลลัพธ์ให้เป็นที่ยอมรับได้ ถ้าป้อนค่าความไม่แน่นอนเพียงพอให้กับกระบวนการโดยการเลือกค่า Q_k แน่นอนที่สุดในกรณีนี้ ความหวังอย่างหนึ่งต่อการวัดกระบวนการก็คือ ความน่าเชื่อถือนั่นเอง ในกรณีอีกอันหนึ่ง เรามีเหตุผลที่สำคัญต่อการเลือกตัวแปร บ่อยครั้งที่สมรรถนะของฟิลเตอร์จะดีกว่า ซึ่งสามารถที่จะทำได้โดยการปรับแต่งตัวแปรฟิลเตอร์ Q_k และ R_k การปรับ แต่งกระทำแบบการวัดค่าในอดีต ด้วยการปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรทั้งสอง ซึ่งคาลมานฟิลเตอร์ในกระบวนการทั่วไปจะอ้างถึงระบบการแยกแยะ ในการเลือกค่าตัวแปรนั้น เราสังเกตว่าภายใต้เงื่อนไขที่ Q_k และ R_k เป็นค่าคงที่แท้จริง ทั้งค่าความแปรปรวนร่วมของการประมาณหลังการปรับการวัดที่ผิดพลาด P_k และอัตราขยายคาลมาน K_k จะมีเสถียรภาพอย่างรวดเร็ว ในกรณีที่ตัวแปรเหล่านี้สามารถคำนวณได้ โดยให้การทำงานของฟิลเตอร์เป็นแบบการคำนวณค่าในอดีตหรือกำหนดค่าสถานะคงตัวของ P_k อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติแล้วความผิดพลาดของการวัดจะไม่มีค่าเหลืออยู่



รูปที่ 4.4 การทำงานของกาลมานฟิลเตอร์



รูปที่ 4.5 ความหมายของตัวแปรในสมการดีสครีตกาลมานฟิลเตอร์

ในรูปที่ 4.5 จะแสดงถึงความหมายของตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการของดีสครีตกาลมานฟิลเตอร์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ส่วนด้วยกันคือ ส่วนของสมการของการทำนายและส่วนของสมการปรับการวัด ดังมีขั้นตอนการทำนายและการปรับการทำนายดังรูปที่ 4.4

บทที่ 5

ผลการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ และผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริง โดยวิธีวิเคราะห์ทางสถิติ กับวิธีตัวกรองคาลมาน การพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริงนั้น ถูกนำไปใช้ด้วยวิธีทางสถิติที่เรียกว่า กระบวนการถดถอย ซึ่งโดยปกติแล้วมีความจำเป็นต้องใช้จำนวนประชากรของแต่ละปีเพื่อทำการพยากรณ์ ซึ่งข้อมูลดังกล่าวเป็นที่รู้จักกันว่ายากที่จะได้มา ซึ่งข้อมูลที่ชัดเจน ฉะนั้นตัวกรองคาลมานจึงถูกใช้เพื่อการพยากรณ์จำนวนประชากร ซึ่งโดยสรุปงานวิจัยนี้มีหลักการศึกษาสามวิธีในการเปรียบเทียบผลการพยากรณ์ดังต่อไปนี้

- (1) แบบจำลองเชิงถดถอย
- (2) ตัวกรองคาลมานเชิงถดถอย
- (3) ตัวกรองคาลมาน

ซึ่งเทคนิคที่ 1 นั้น เป็นการวิเคราะห์ทางด้านสถิติที่เรียกว่า Multiple linear Regression ซึ่งนำข้อมูลทางด้าน ปริมาณความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์(Demand)คือปริมาณเลขหมายติดตั้งปีก่อนหน้านั้นรวมกับปริมาณความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์จากการยื่นคำขอใช้ ณ ปีนี้, จำนวนประชากรแหล่งที่มาของข้อมูลคือ สำนักงานสถิติแห่งชาติ และ รายได้(ผลิตภัณฑ์มวลรวม) แหล่งที่มาสำนักงานคณะกรรมการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ(สศช) ส่วนวิธีที่ 2 เป็นวิธีพยากรณ์ทางสถิติ ซึ่งจำนวนประชากรทำการวิเคราะห์โดยวิธีตัวกรองคาลมานหลังจากนั้นนำมาวิเคราะห์ทางสถิติด้วยโปรแกรม SPSS ส่วนวิธีที่ 3 ใช้วิธีของตัวกรองคาลมาน ข้อมูลดิบ ซึ่งได้แก่ ปริมาณความต้องการใช้โทรศัพท์, ปริมาณเลขหมายติดตั้งจริง และจำนวนประชากรจากทั่วประเทศระหว่างปี พ.ศ.2534-2554 ซึ่งได้ถูกใช้ในการพยากรณ์เพื่อให้ได้มาซึ่งข้อมูลของปี พ.ศ. 2547-2554 ซึ่งได้ทำการทดลองทดสอบผลการพยากรณ์ของทั้ง 3 วิธีด้วยข้อมูลจริง จากปี พ.ศ. 2535-2546 ผลการพยากรณ์ดังแสดงในตารางที่ 5. 1

ตารางที่ 5.1 แสดงการเปรียบเทียบความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์กับการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีต่างๆทั้ง 3 วิธี ระหว่างปี พ.ศ.2535-2546(ที่มาภาคผนวก จ.2)

ปี พ.ศ.	demand(1)	method(1)	error(m1-d1)	method(2)	error(m2-d1)	method(3)	Error(m3-d1)
2535	3429000	3070367	11.68	2515656	36.31	3391000	1.12
2536	4117133	3468660	18.70	3428568	20.08	4109000	0.02
2537	4381489	4021465	8.95	4005872	9.38	4379000	0.06
2538	4614739	4287158	7.64	4279600	7.83	4612000	0.06
2539	5187337	4764580	8.87	4752072	9.16	5181000	0.12
2540	5467696	5274213	3.67	5260216	3.94	5465000	0.05
2541	5606933	5747378	2.44	5734872	2.23	5605000	0.03
2542	5655354	5889718	3.98	5885568	3.91	5655000	0.01
2543	5968145	6047727	1.32	6043544	1.25	5965000	0.05
2544	6621748	6350100	4.28	6342024	4.41	6615000	0.10
2545	7903485	7293095	8.37	7268040	8.74	7889000	0.18
2546	8493036	7726331	9.92	7714304	10.09	8486000	0.08

Demand (1) = ปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์

Method (1) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

Method(2) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

Method (3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

Error (m1-d1) = %ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์กับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

Error (m2-d1) = %ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์กับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิง ถดถอย

Error (m3-d1) = %ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์กับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

จากตารางที่นำเสนอทั้งหมดนี้เป็นการเปรียบเทียบให้เห็นถึงการพยากรณ์ความต้องการใช้โทรศัพท์กับความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์จริง จึงทำให้ผู้วิจัยนำข้อมูลปริมาณเลขหมายติดตั้งจริง, จำนวนประชากร และรายได้ นำมาหาความสัมพันธ์เพื่อหาสมการการพยากรณ์โดยวิธีทั้ง 3 วิธีคือ

- (a) แบบจำลองเชิงถดถอย
- (b) ตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย
- (c) ตัวกรองกาลมาน

ซึ่งเทคนิค a นั้น เป็นการวิเคราะห์ทางด้านสถิติที่เรียกว่า Multiple linear Regression ซึ่งนำข้อมูลทางด้าน ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์, จำนวนประชากร และ รายได้(ผลิตภัณฑ์มวลรวม) ส่วนเทคนิค b เป็นวิธีพยากรณ์ทางสถิติ ซึ่งจำนวนประชากรทำการวิเคราะห์โดยวิธีตัวกรองกาลมานหลังจากนั้นนำมาวิเคราะห์ทางสถิติด้วยโปรแกรม SPSS ส่วนเทคนิค c ใช้วิธีของตัวกรองกาลมาน ข้อมูลดิบ ซึ่งได้แก่ เลขหมายติดตั้งจริง และจำนวนประชากรจากทั่วประเทศระหว่างปี พ.ศ.2534-2554 ซึ่งได้ถูกใช้ในการพยากรณ์เพื่อให้ได้มาซึ่งข้อมูลของปี พ.ศ.2547-2554 ซึ่งได้ทำการทดลองทดสอบผลการพยากรณ์ของทั้ง 3 วิธีด้วยข้อมูลจริง จากปี พ.ศ.2535-2546 ผลการพยากรณ์ได้แสดงให้เห็นถึงการเปรียบเทียบเป็นดังนี้

ตารางที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์จริงกับการพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีต่างๆทั้ง 3 วิธี ระหว่างปี พ.ศ.2535-2546 (รายละเอียดในภาคผนวก จ.3)

ปี พ.ศ.	lc	method(a)	error(a)-(lc)	method(b)	error(b)-(lc)	method(c)	Error(c)-(lc)
2535	3004002	2972376	1.06	2432143	23.51	3137000	4.24
2536	3549678	3360275	5.64	3321229	6.88	4224000	15.96
2537	3946272	3898652	1.22	3883466	1.62	4340000	9.07
2538	4228137	4157411	1.70	4150050	1.88	4747000	10.93
2539	4820175	4622373	4.28	4610191	4.55	5069000	4.91
2540	5085464	5118705	0.65	5105073	0.38	5244000	3.02
2541	5060055	5579520	9.31	5567341	9.11	5404000	6.36
2542	5086240	5718146	11.05	5714104	10.99	5631000	9.67
2543	5519819	5872031	6.00	5867957	5.93	5813000	5.04
2544	6000695	6166513	2.69	6158647	2.56	6487000	7.49
2545	7365238	7084896	3.96	7060495	4.32	7648000	3.69
2546	7970245	7506825	6.17	7495112	6.34	8331000	4.33

Lc (Line Connect) = ปริมาณเลขหมายติดตั้งจริง

Method(a) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิง ถดถอย

Method(b) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน เจริงถดถอย

Method (c) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

Error (a)-(lc) = %ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงกับการพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์ เจริง ถดถอย

Error (b)-(lc) = %ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงกับการพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน เจริงถดถอย

Error © -(lc) = %ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงกับการพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

ตารางที่ 5.3 แสดงการเปรียบเทียบความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์กับเลขหมายติดตั้งจริงระหว่างปี พ.ศ. 2535-2546(ข้อมูลได้มาจาก บ.ทีโอที จำกัดมหาชน)

ปี พ.ศ.	demand	lc	Diff
2535	3429000	3004002	12.39
2536	4117133	3549678	13.78
2537	4381489	3946272	9.93
2538	4614739	4228137	8.38
2539	5187337	4820175	7.08
2540	5467696	5085464	6.99
2541	5606933	5060055	9.75
2542	5655354	5086240	10.06
2543	5968145	5519819	7.51
2544	6621748	6000695	9.38
2545	7903485	7365238	6.81
2546	8493036	7970245	6.16

Demand = ปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์

Lc(line connect) = ปริมาณเลขหมายติดตั้งจริง

Diff = %ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์และเลขหมายติดตั้งจริง

ตารางที่ 5.4 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีต่างๆ ทั้ง 3 วิธี ระหว่างปี พ.ศ.2547-2554

พ.ศ.	method(1)	method(2)	method(3)
2547	8141122	8129992	8625000
2548	8537985	8527480	9024000
2549	8921776	8911136	9425000
2550	9279903	9270040	9827000
2551	9626063	9616568	10229000
2552	9956540	9947808	10631000
2553	10271939	10263760	11032000
2554	11162464	10564424	11408000

Method (1) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

Method(2) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

Method (3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

ตารางที่ 5.5 แสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีต่างๆ ทั้ง 3 วิธี ระหว่างปี พ.ศ.2547-2554

ปี พ.ศ.	method(a)	method(b)	method(c)
2547	7910791	7899951	8596000
2548	8297296	8287065	8947000
2549	8671071	8660708	9327000
2550	9019851	9010245	9725000
2551	9356976	9347729	9845000
2552	9678828	9670324	10524000
2553	9985996	9978030	10852000
2554	10853278	10270847	11134000

Method(a) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิง ถดถอย

Method(b) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน เชิงถดถอย

Method (c) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

เพื่อให้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้นจึงนำมาสร้างตารางที่ 5.6 เปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งทั้ง 3 วิธี ซึ่งจะเห็นได้ว่าทั้ง 3 วิธีการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งมีความใกล้เคียงกันมาก

ตารางที่ 5.6 เปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งทั้ง 3 วิธี ตั้งแต่ปี พ.ศ.2547-2554

ปี พ.ศ.	method(1)	method(a)	method(2)	method(b)	method(3)	method©
2547	8141122	7910791	8129992	7899951	8625000	8596000
2548	8537985	8297296	8527480	8287065	9024000	8947000
2549	8921776	8671071	8911136	8660708	9425000	9327000
2550	9279903	9019851	9270040	9010245	9827000	9725000
2551	9626063	9356976	9616568	9347729	10229000	9845000
2552	9956540	9678828	9947808	9670324	10631000	10524000
2553	10271939	9985996	10263760	9978030	11032000	10852000
2554	11162464	10853278	10564424	10270847	11408000	11134000

Method(1) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

Method(2) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

Method(3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

Method(a) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิง ถดถอย

Method(b) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน เชิงถดถอย

Method (c) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

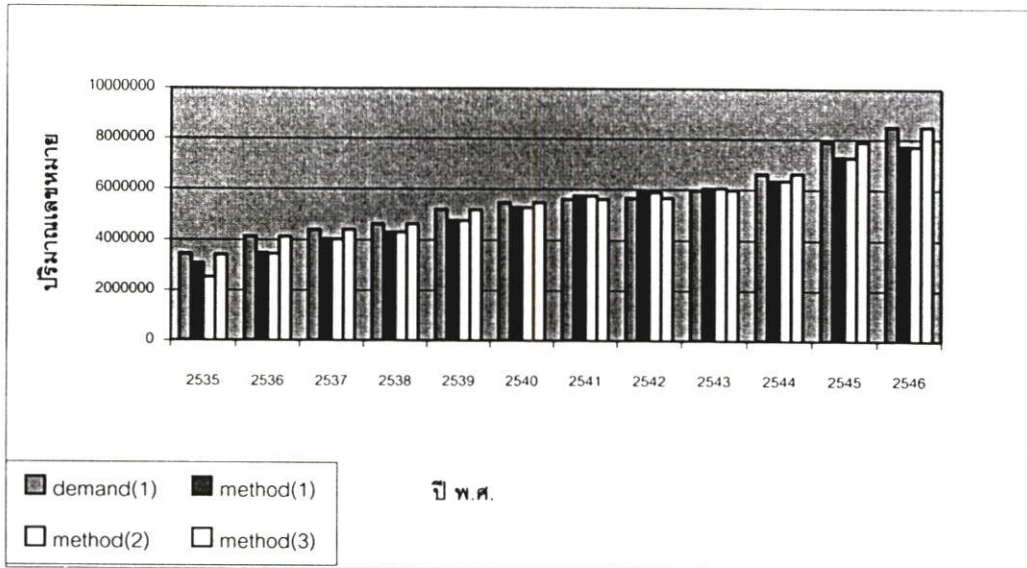
จากที่กล่าวมาข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าวิธีที่ 3 ให้ผลที่โดดเด่นกว่าวิธีที่ 1 และ 2 จึงได้นำไปพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในเขตกรุงเทพมหานครนำผลมาเปรียบเทียบกับปริมาณเลขหมายที่ติดตั้งจริง โดยพยากรณ์ระหว่างปี พ.ศ. 2498-2546 ผลการพยากรณ์ดังตารางที่ 5.7

ตารางที่ 5.7 แสดงการเปรียบเทียบความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ทั้งจริงกับผลการพยากรณ์
ในเขตกรุงเทพฯระหว่างปี พ.ศ. 2498-2546

ปี พ.ศ.	demand	method(3)	ปี พ.ศ.	Demand	method(3)
2498	10703	10100	2522	379017	372400
2499	11986	11900	2523	442052	438200
2500	14093	14000	2524	501722	498200
2501	17309	17100	2525	565325	561600
2502	22006	21700	2526	652782	647700
2503	24893	24700	2527	685907	683800
2504	27306	27200	2528	705641	704400
2505	28799	28700	2529	805800	800200
2506	30618	30500	2530	871509	867500
2507	35064	34800	2531	1007280	999500
2508	39155	38900	2532	1246380	1232600
2509	42060	41900	2533	1681273	1656300
2510	43861	43800	2534	2031439	2010500
2511	48170	47900	2535	2304432	2288100
2512	56395	55900	2536	2691375	2668900
2513	66384	65800	2537	2700192	2698400
2514	105550	103300	2538	2557395	2565300
2515	127291	126000	2539	2678715	2672400
2516	133440	133000	2540	2799299	2792200
2517	141115	140700	2541	2814247	2813000
2518	170302	168700	2542	2865266	2862400
2519	179830	179200	2543	2983718	2977000
2520	195223	194300	2544	3250255	3235000
2521	265011	261100	2545	4065840	4019500
			2546	4362655	4343500

Method (3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

จากตารางที่ 5.1-5.4 เพื่อให้เห็นภาพได้ชัดเจนว่าวิธีที่ 3 โคດเด่นกว่าวิธีที่ 1 และ 2 จึงนำเสนอเป็นกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ ระหว่างปี พ.ศ.2535-2546 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ (รูปที่ 5.1) สำหรับกราฟรูปที่ 5.2 เป็นกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ ทั้งประเทศระหว่างปี พ.ศ.2547-2554 และรูปที่ 5.3 เป็นกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบของการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในเขตกรุงเทพมหานครระหว่างปี พ.ศ.2498-2546 โดยวิธี ตัวกรองคาลมาน และ รูปที่ 5.4 เป็นกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงทั้ง 3 วิธีตั้งแต่ปี พ.ศ. 2535-2546 รูปที่ 5.5 แสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งทั้ง 3 วิธี ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2547-2554 รูปที่ 5.6 เป็นกราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งตั้งแต่ปี พ.ศ. 2535-2546 รูปที่ 5.7 กราฟแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์และเลขหมายติดตั้งตั้งแต่ปี พ.ศ.2535-2546 นอกจากนั้นยังแสดงให้เห็นถึงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งตั้งแต่ปี 2535-2546 ทั้ง 3 วิธี ดังรูปที่ 5.8,5.10,5.12 ตามลำดับ และเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งตั้งแต่ปี 2547-2554 ทั้ง 3 วิธี ดังรูปที่ 5.9,5.11,5.13 ตามลำดับ



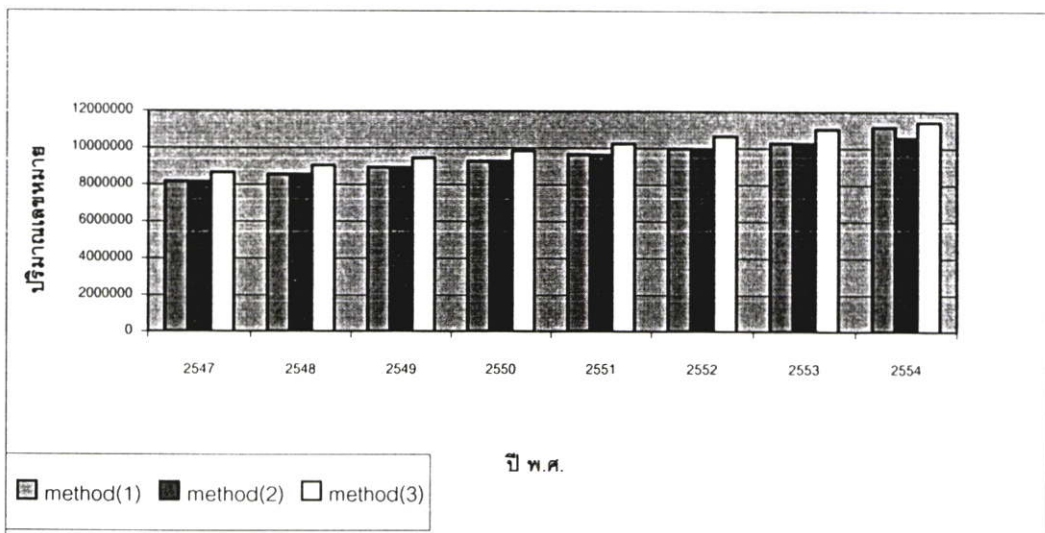
รูปที่ 5.1 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์กับตัวเลขพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ทั้ง 3 มิติ ตั้งแต่ ปี พ.ศ.2535-2546

Demand(1) = ปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์

Method(1) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

Method(2) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

Method(3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

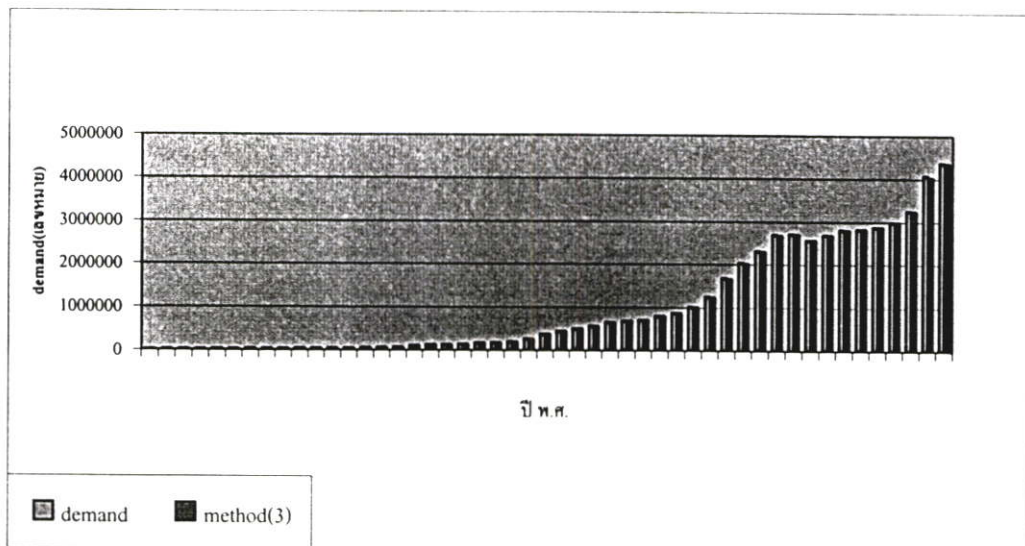


รูปที่ 5.2 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้เลขหมายโทรศัพท์ทั้ง 3 วิธี ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2547-2554

Method(1) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

Method(2) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

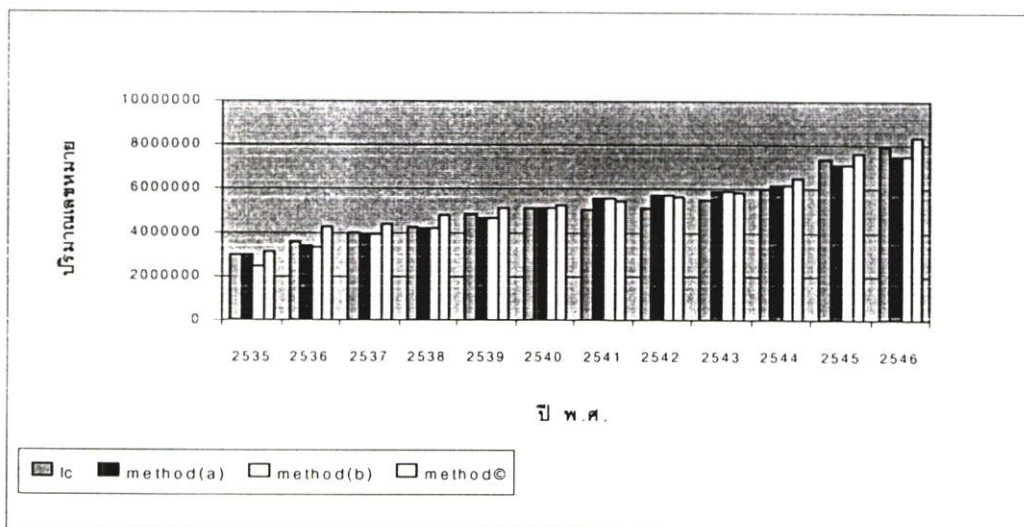
Method(3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน



รูปที่ 5.3 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์
ในเขตกรุงเทพฯ ระหว่างปี พ.ศ.2498-2546

Demand = ปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์

Method(3) = ปริมาณการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน



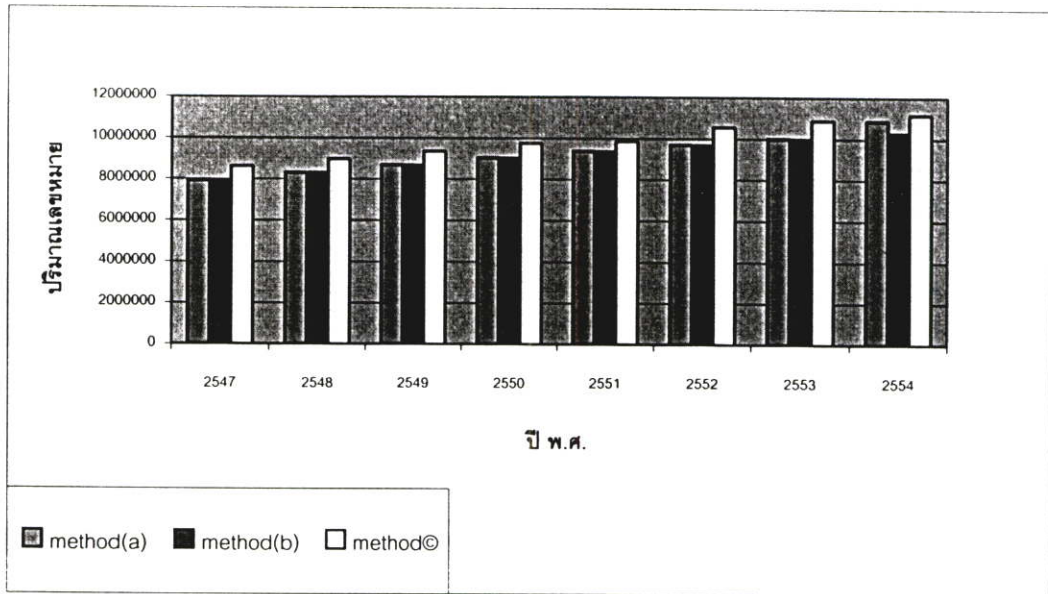
รูปที่ 5.4 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงและการพยากรณ์เลขหมาย
ติดตั้งด้วยวิธีต่างๆ ตั้งแต่ปี พ.ศ.2535-2546

Lc (Line Connect)= ปริมาณเลขหมายติดตั้งจริง

Method(a) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิง ถดถอย

Method(b) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

Method (c) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

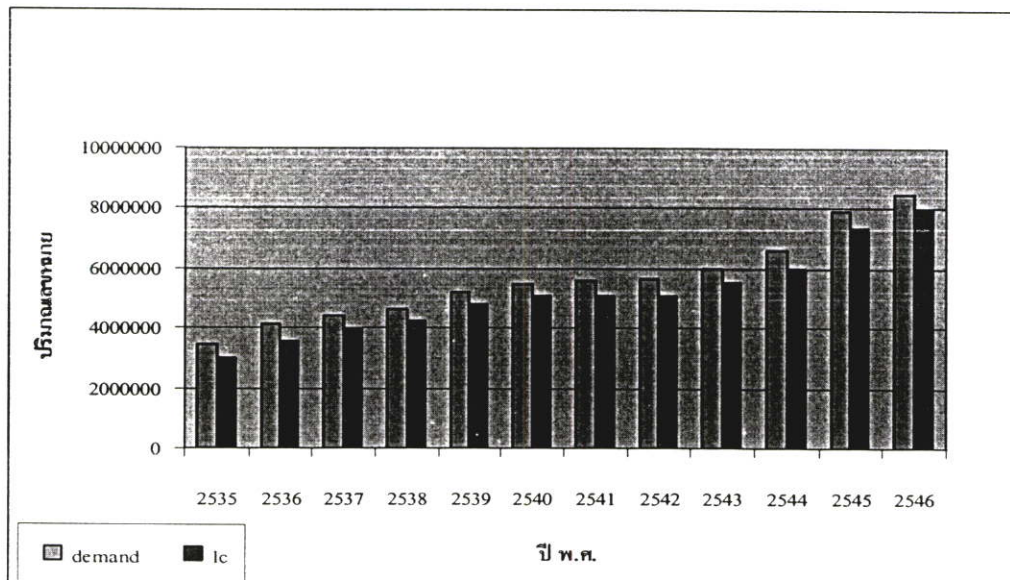


รูปที่ 5.5 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริงทั้ง 3 วิธีตั้งแต่ปี พ.ศ.2547-2554

Method (a) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิง ถดถอย

Method(b) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

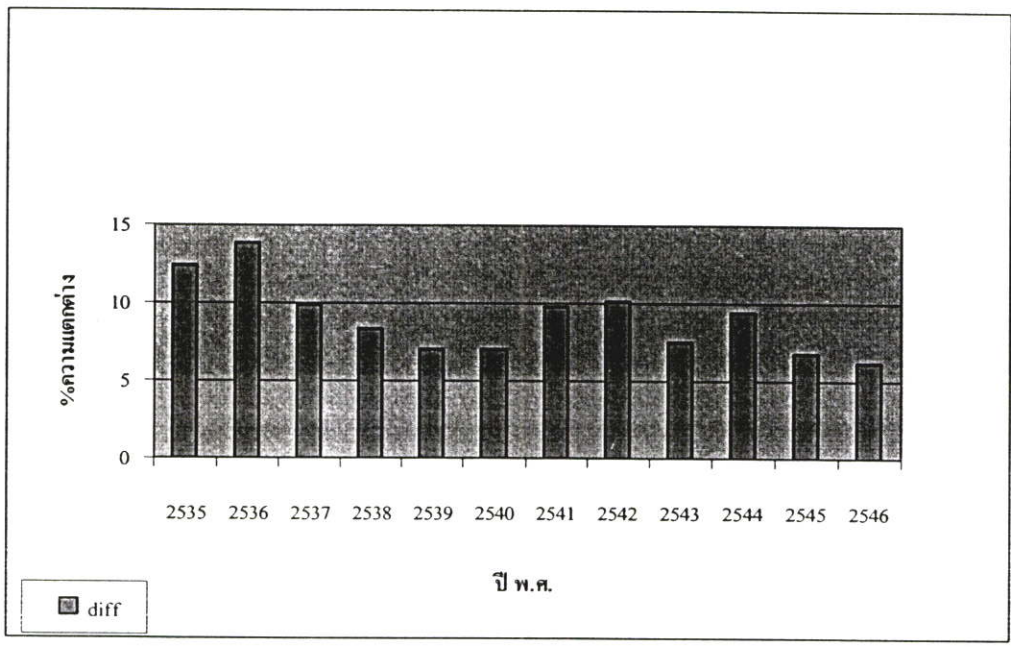
Method (c) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน



รูปที่ 5.6 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์จริงกับปริมาณ เลขหมายติดตั้ง ตั้งแต่ปี พ.ศ.2535-2546

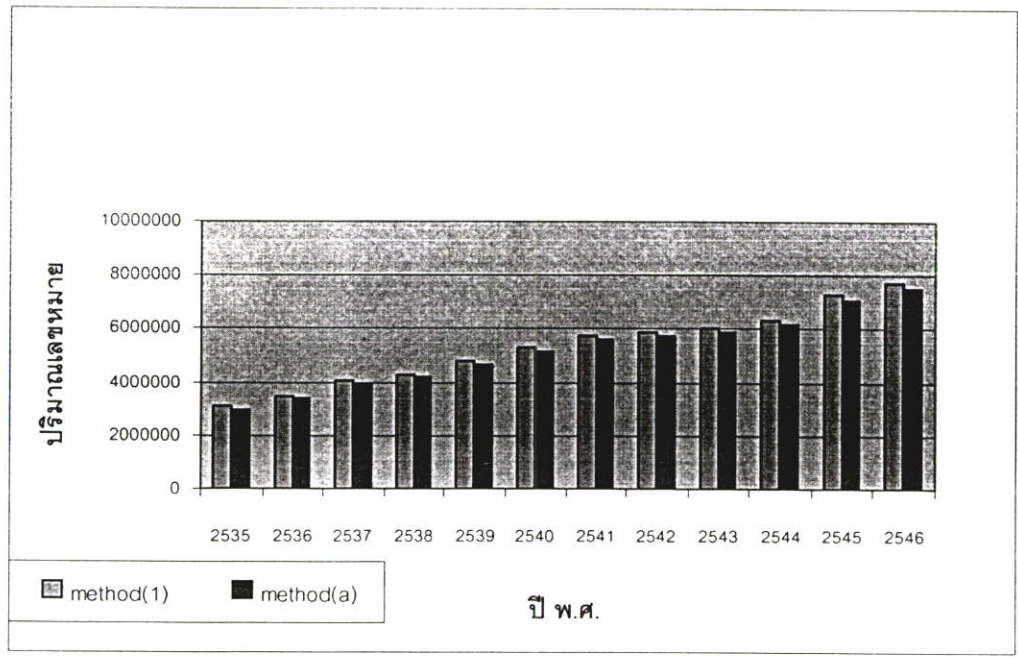
Demand = ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์

Lc (Line Connect) = เลขหมายติดตั้งจริง



รูปที่ 5.7 กราฟแสดงเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างระหว่างปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์กับปริมาณเลขหมายติดตั้ง

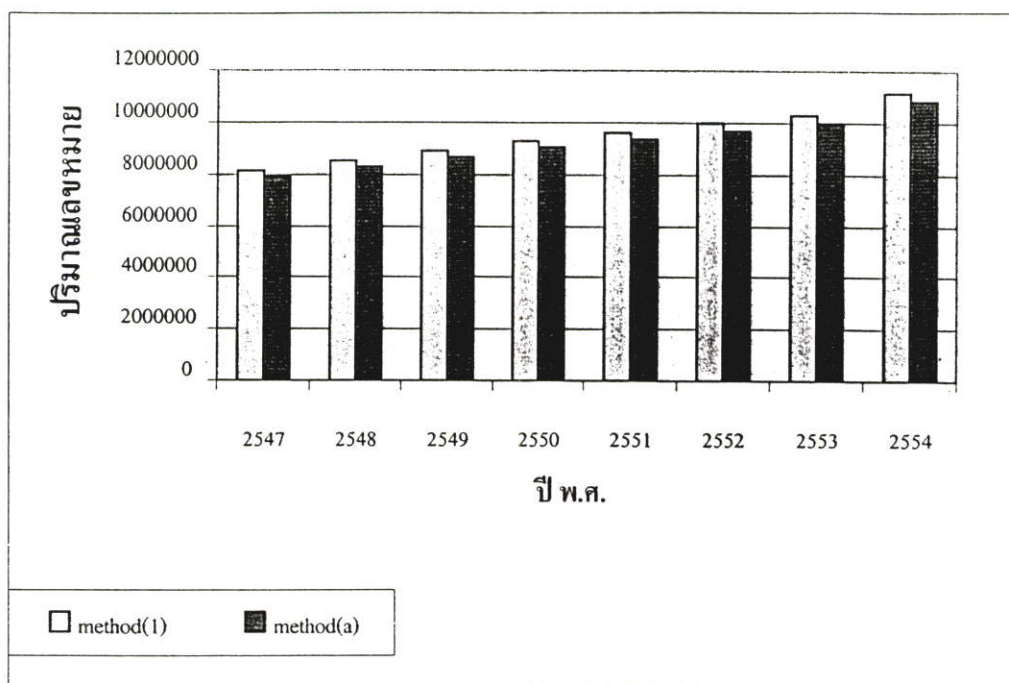
Diff = ความคลาดเคลื่อนระหว่างปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์กับเลขหมายติดตั้งจริง



รูปที่ 5.8 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้ง ตั้งแต่ปี พ.ศ.2535-2545

Method (1) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

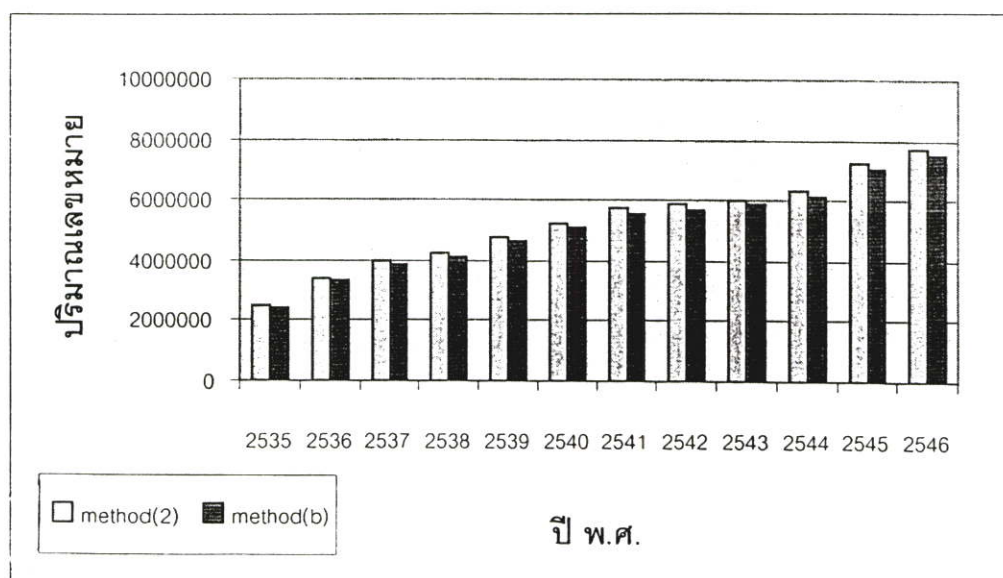
Method (a) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิง ถดถอย



รูปที่ 5.9 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริง ตั้งแต่ปี พ.ศ.2547-2554

Method (1) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย

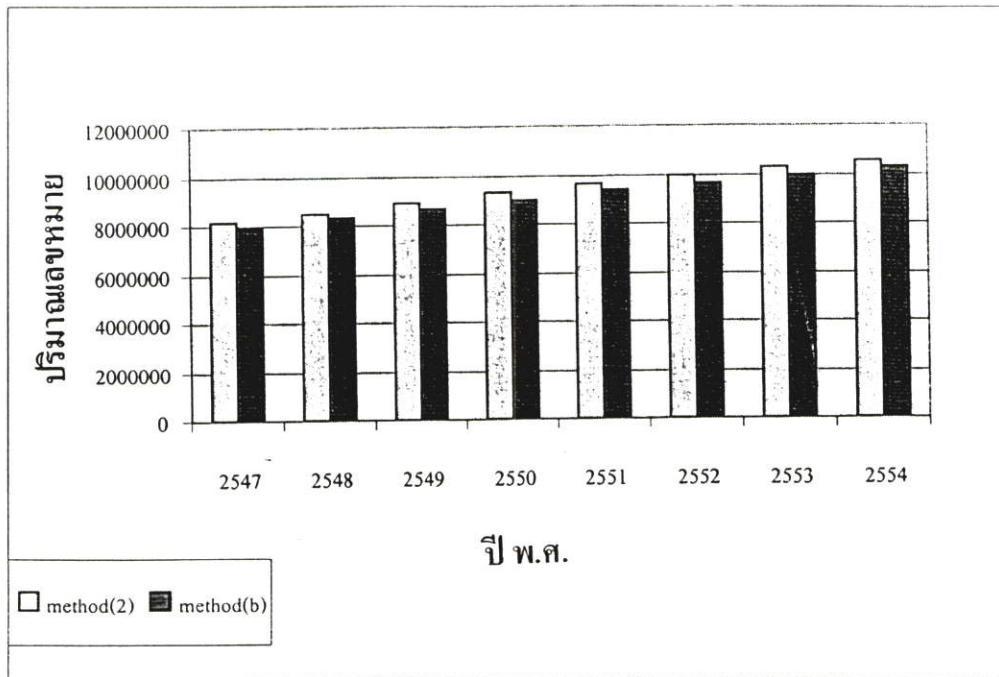
Method (a) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยการวิเคราะห์เชิงถดถอย



รูปที่ 5.10 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบเลขหมายพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์กับตัวเลขพยากรณ์เลขหมายติดตั้ง ตั้งแต่ปี พ.ศ.2535-2546

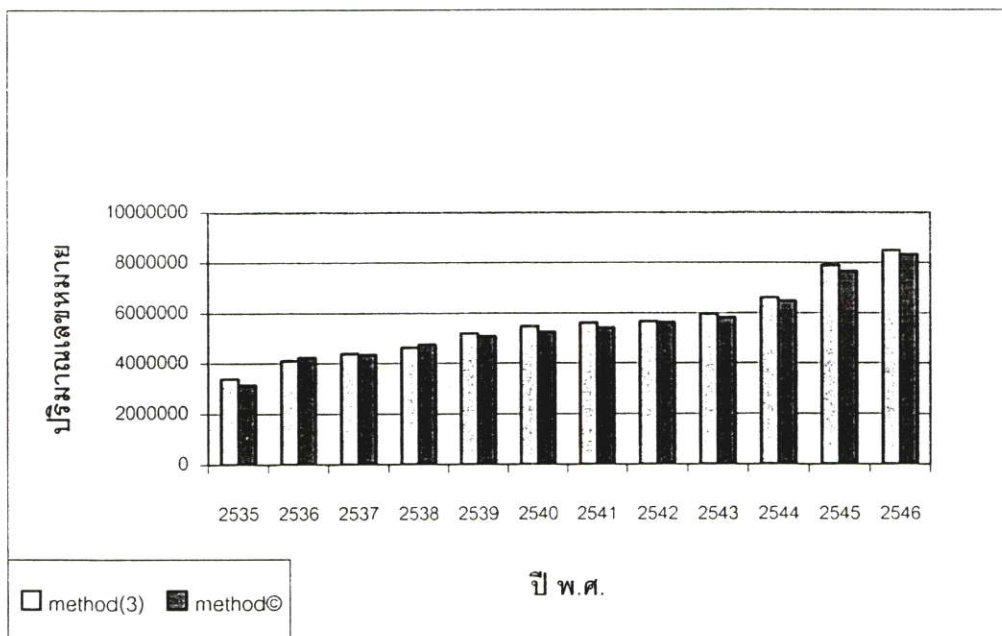
Method (2) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย

Method (b) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย



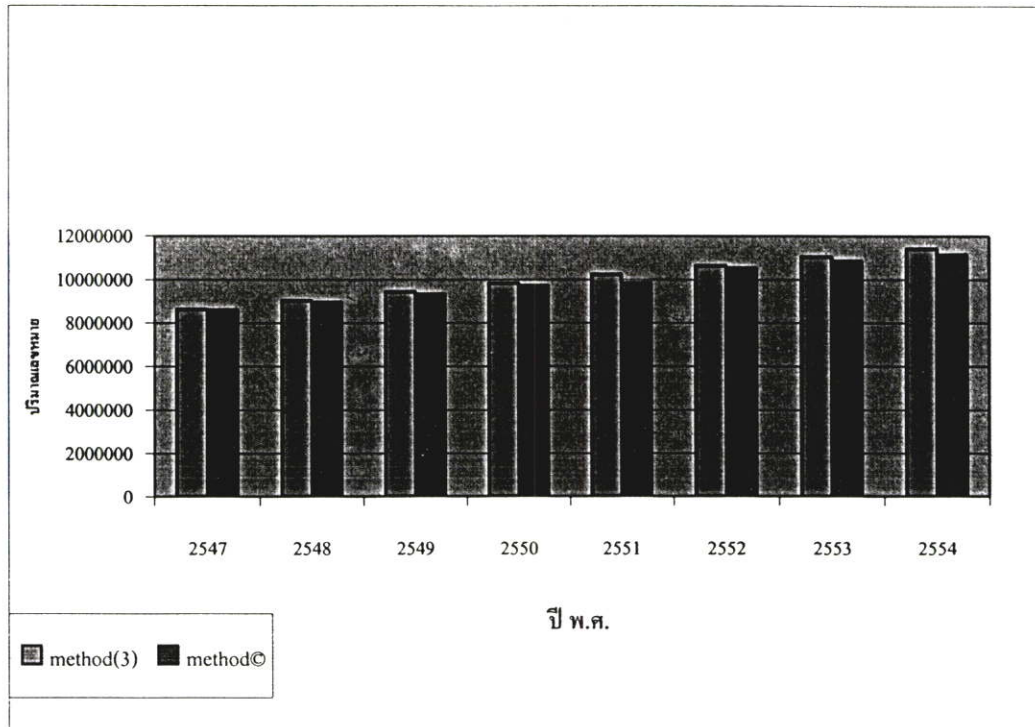
รูปที่ 5.11 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริงตั้งแต่ปี พ.ศ.2547-2554

Method (2) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย
 Method (b) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย



รูปที่ 5.12 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบเลขหมายการพยากรณ์ความต้องการใช้โทรศัพท์ กับ การพยากรณ์เลขหมายติดตั้งตั้งแต่ปี พ.ศ.2535-2546

Method (3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน
 Method (c) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน



รูปที่ 5.13 กราฟแสดงผลการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ และการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งจริงตั้งแต่ปี พ.ศ.2547-2554

Method (3) = การพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

Method (c) = การพยากรณ์ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

นอกจากนี้ในวิจัยฉบับนี้ยังทำเป็นกรณีศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในเขตจังหวัดภาคตะวันออก ซึ่งประกอบด้วยจังหวัดนครนายก, ปราจีนบุรี, สระแก้ว, ชลบุรี, ฉะเชิงเทรา, ระยอง, จันทบุรี และตราด โดยอาศัยข้อมูลจากปริมาณการติดตั้งจริงตั้งแต่ปี พ.ศ. 2536-2545 โดยวิธีการศึกษาใช้วิธีตัวกรองกาลมานระดับจังหวัด (micro) และระดับภาค (macro) ซึ่งผลเป็นที่น่าพอใจอย่างยิ่ง ดังแสดงในตารางที่ 5.8 ซึ่งเป็นตารางแสดงผลการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก สำหรับ actual คือ ปริมาณเลขหมายที่ติดตั้งจริง method (3) คือการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ โดยวิธีตัวกรองกาลมานของแต่ละจังหวัด micro method (3) เป็นผลรวมการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ระดับจังหวัดในภาคตะวันออก และ macro คือ การพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์โดยวิธีตัวกรองกาลมาน

สำหรับตารางที่ 5.9 แสดงผลการพยากรณ์ปริมาณความต้องการใช้งานสายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก โดยวิธีตัวกรองกาลมานระหว่างปี พ.ศ. 2548-2554 ตอนสุดท้ายของตารางเป็นการ

เปรียบเทียบระหว่างผลการพยากรณ์ระหว่าง micro กับ macro รวมทั้งการหาความคลาดเคลื่อนทั้ง 2 วิธี ซึ่งจะเห็นว่าแตกต่างกันไม่มากนัก

เพื่อให้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้นจึงพิจารณาได้จากกราฟรูปที่ 5.14-5.21 โดยพิจารณาจากการเปรียบเทียบความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์วิธีตัวกรองกาลมาน (method 3) กับปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์จริง (Actual Demand) ปีพ.ศ.2536-2547 ของแต่ละจังหวัดในเขตภาคตะวันออกเฉียง

ตารางที่ 5.8 แสดงผลการพยากรณ์ความต้องการใช้ตู้สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก

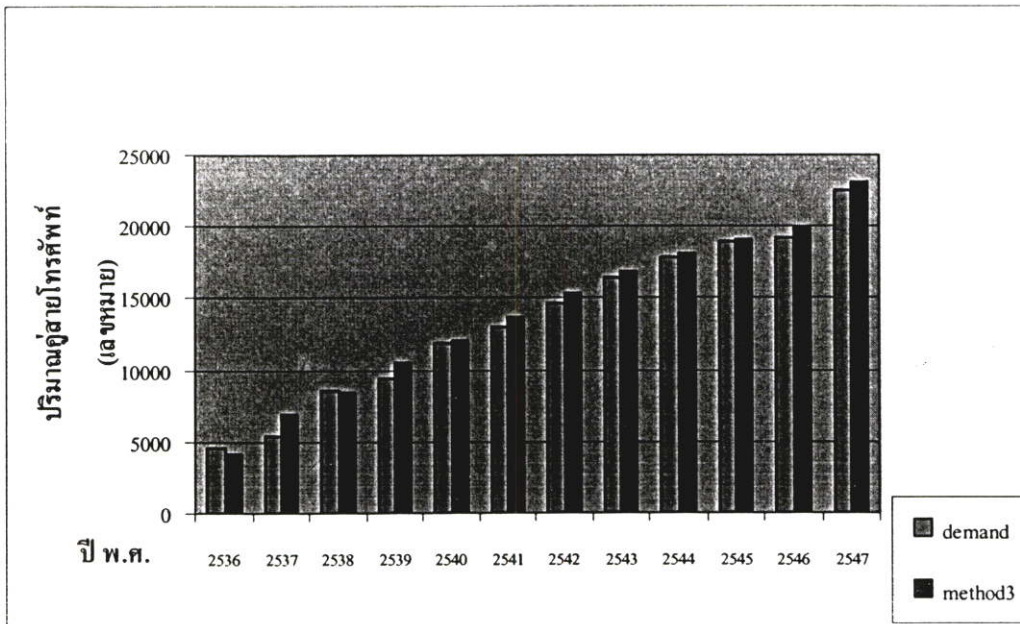
จังหวัด	method(3)												
	2536	2537	2538	2539	2540	2541	2542	2543	2544	2545	2546	2547	
นครนายก													
actual	4507	5429	8553	9434	11824	13040	14635	16390	17830	18872	19166	22484	
method(3)	4159	6863	8451	10535	12083	13660	15347	16882	18112	19065	19856	23084	
ปราจีนบุรี													
actual	5526	7248	9195	11158	16370	17067	18698	20869	21315	23061	25767	27589	
method(3)	5454	7756	9857	13882	15850	17610	19624	20669	21247	23512	25263	28863	
สระแก้ว													
actual	4237	5186	5612	7817	11179	12301	12333	14393	14819	15721	16056	18328	
method(3)	3959	4976	6731	9480	11223	11909	13444	14294	15176	15896	16792	19071	
ชลบุรี													
actual	58650	74325	108069	121361	139265	148947	153983	175179	171734	181991	192420	201403	
method(3)	56330	88170	108670	127580	140780	148940	165160	169220	177110	186530	198590	219800	
ฉะเชิงเทรา													
actual	11482	15541	28097	31684	40520	43361	47747	53912	54273	58186	59217	60974	
method(3)	11621	21760	27890	35695	40433	44953	50490	52828	56139	58120	59495	61460	
ระยอง													
actual	20292	27611	40324	44558	53645	60276	62118	71182	72861	78902	79100	80214	
method(3)	20630	32750	40040	48450	55760	59690	66790	70540	75710	77860	79310	81580	
จันทบุรี													
actual	11235	13661	21804	25274	33357	35387	37822	43354	44336	46700	48024	50047	
method(3)	10444	17435	22277	29124	32995	35978	40537	42885	45243	46942	47599	49118	

ตารางที่ 5.8 (ต่อ)

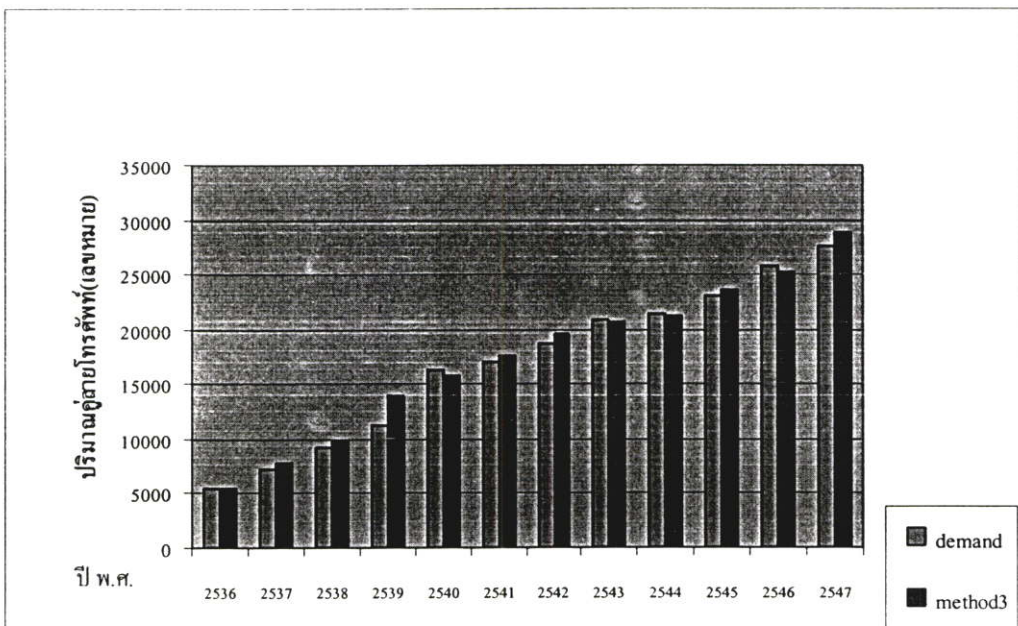
จังหวัด	method(3)												
	2536	2537	2538	2539	2540	2541	2542	2543	2544	2545	2546	2547	
ตราด													
actual	4483	4964	7651	8473	11683	12405	12569	14832	13887	16438	17756	19512	
method(3)	3875	6199	7603	10125	11534	12174	13817	13860	15453	16713	17512	19760	
รวมภาคตะวันออก													
actual	120412	153965	229305	259759	317843	342784	359905	410111	411055	439871	457506	480551	
micro method(3)	116472	185909	231519	284871	320658	344914	385209	401178	424190	444638	464417	502736	
macro	76980	168380	224610	282200	319640	344520	385060	401130	425070	445120	467020	493920	

ตารางที่ 5.9 แสดงผลการพยากรณ์ปริมาณความต้องการใช้ตู้สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออกเฉียงเหนือโดยวิธีถ่วงรอกตามระหว่างปี พ.ศ.2548-2554

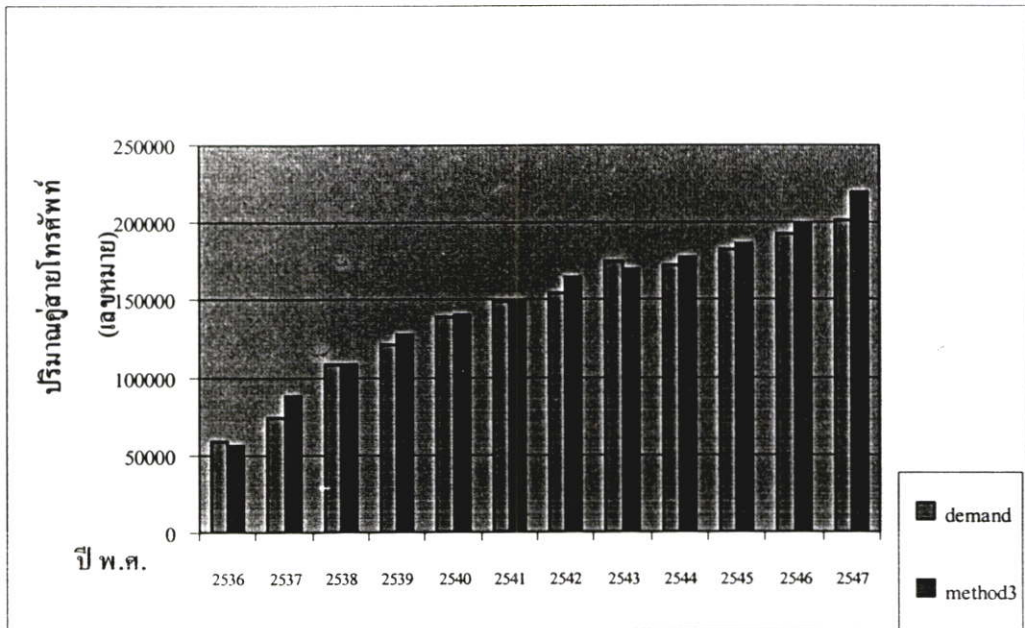
จังหวัด	method(3)								
	2548	2549	2550	2551	2552	2553	2554		
นครนายก	25333	27378	29663	33421	36766	40896	44970		
ปราจีนบุรี	32155	36679	38942	48367	51434	54430	56709		
สระแก้ว	20733	23306	24798	36500	39639	42224	45162		
ชลบุรี	247600	268960	289970	357650	379650	402070	420530		
ฉะเชิงเทรา	62729	64983	66751	73680	75811	78249	82166		
ระยอง	83700	85980	88880	96880	98690	108380	117410		
จันทบุรี	50868	53081	55195	62916	64696	66859	69005		
ตราด	21874	23873	25909	27949	30256	31759	33982		
รวม(micro)	544992	584240	620108	737363	776942	824867	869934		
macro	517910	553190	584740	625140	713040	771070	822860		
error	27082	31050	35368	112223	63902	53797	23616		
%error	4.97	5.31	5.70	15.22	8.22	6.52	5.41		



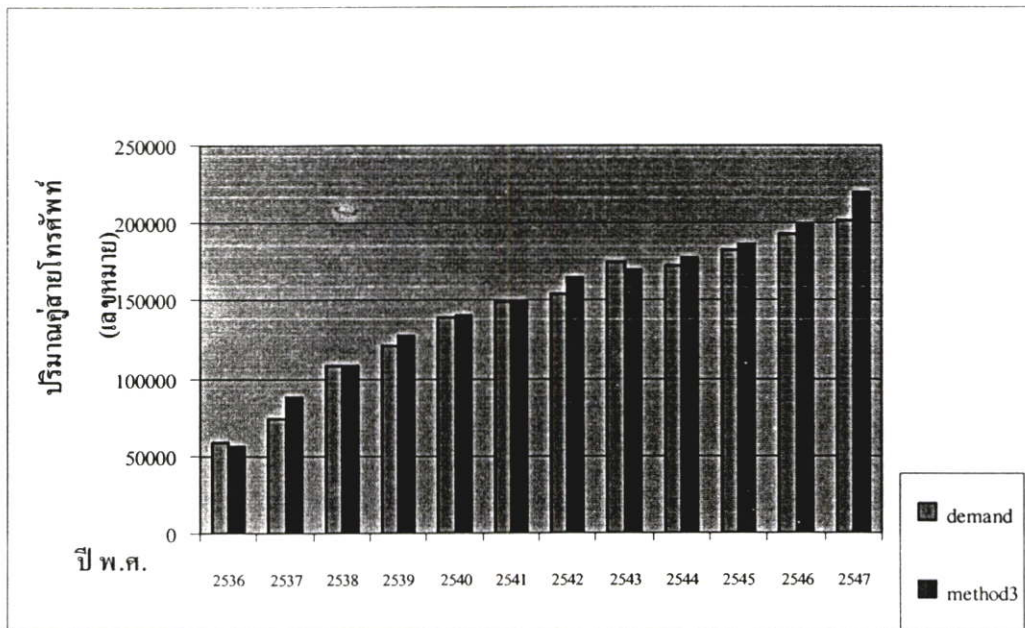
รูปที่ 5.14 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของจังหวัดนครนายก กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง



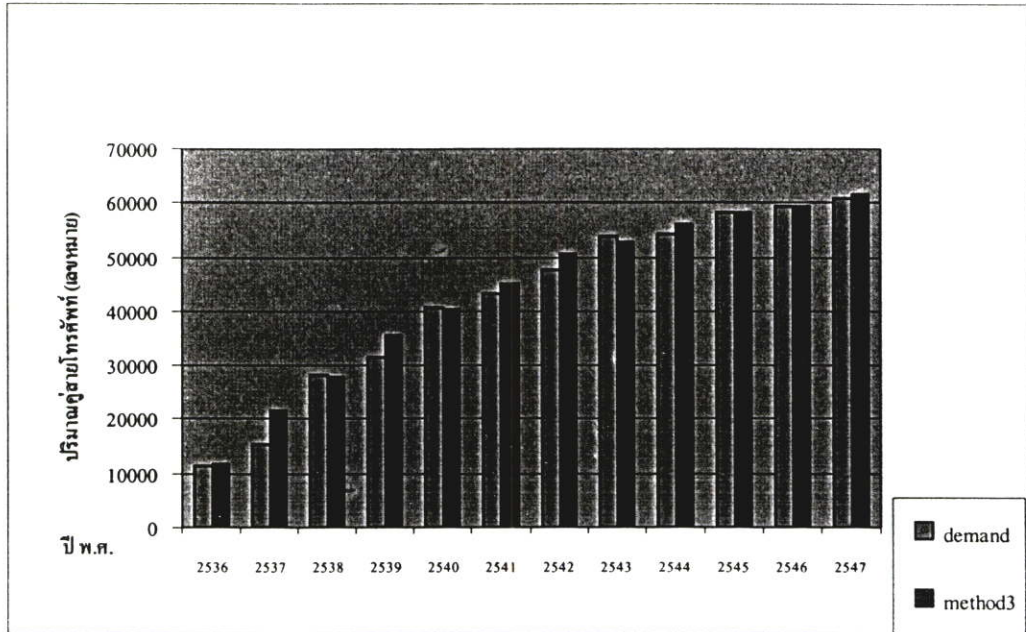
รูปที่ 5.15 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของจังหวัดปราจีนบุรี กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง



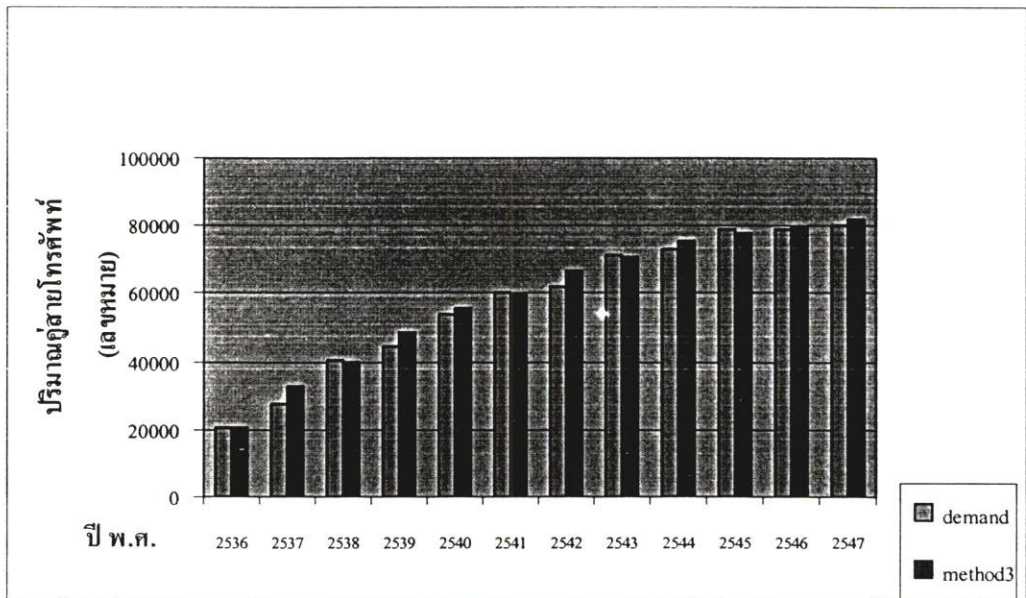
รูปที่ 5.16 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของจังหวัด สระแก้ว กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง



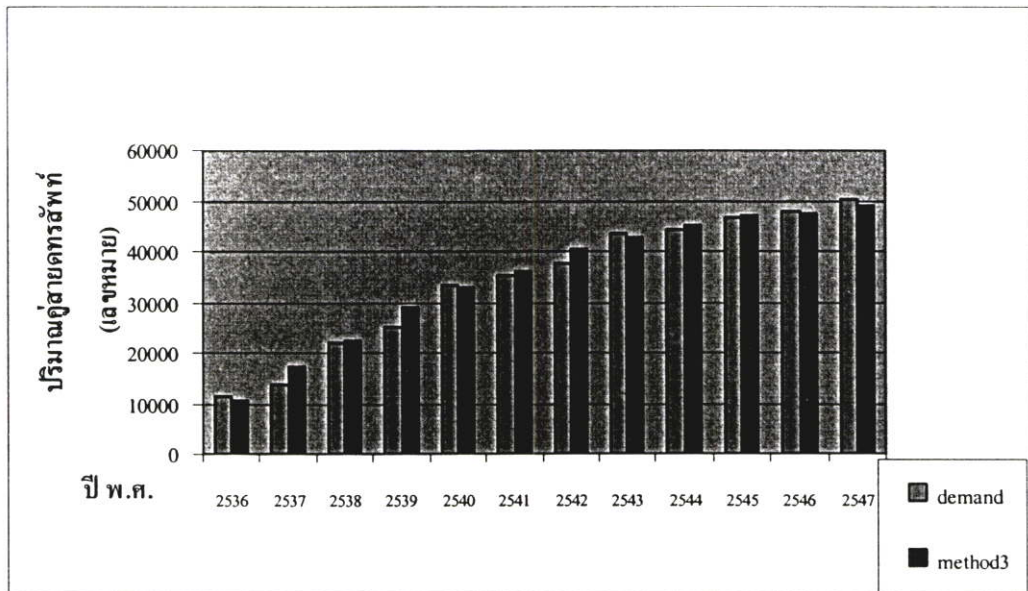
รูปที่ 5.17 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของ จังหวัดชลบุรี กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง



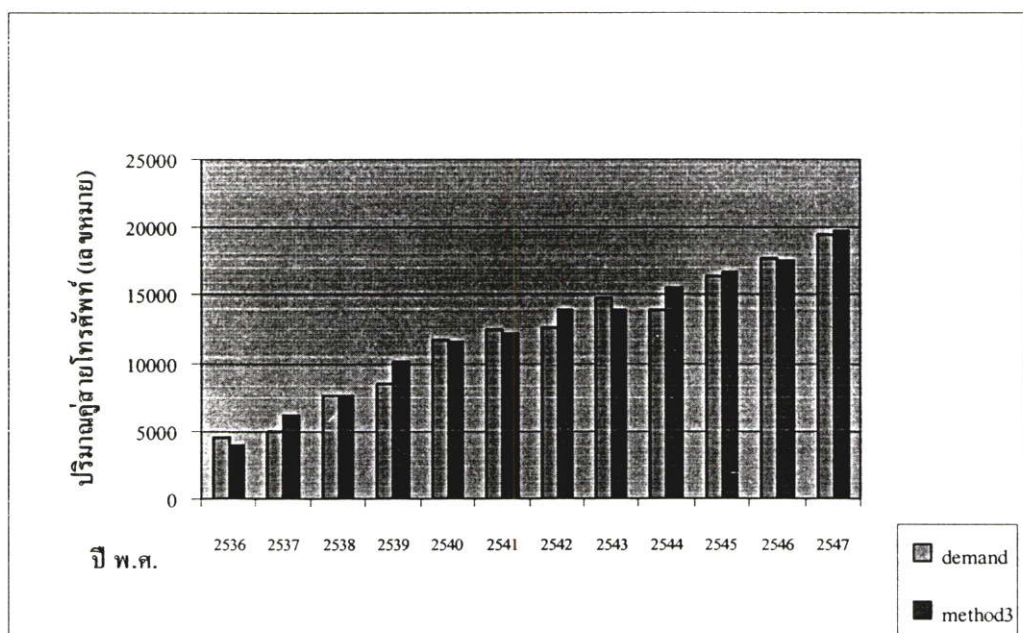
รูปที่ 5.18 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของจังหวัดพะเยา กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง



รูปที่ 5.19 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของจังหวัดระยอง กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง

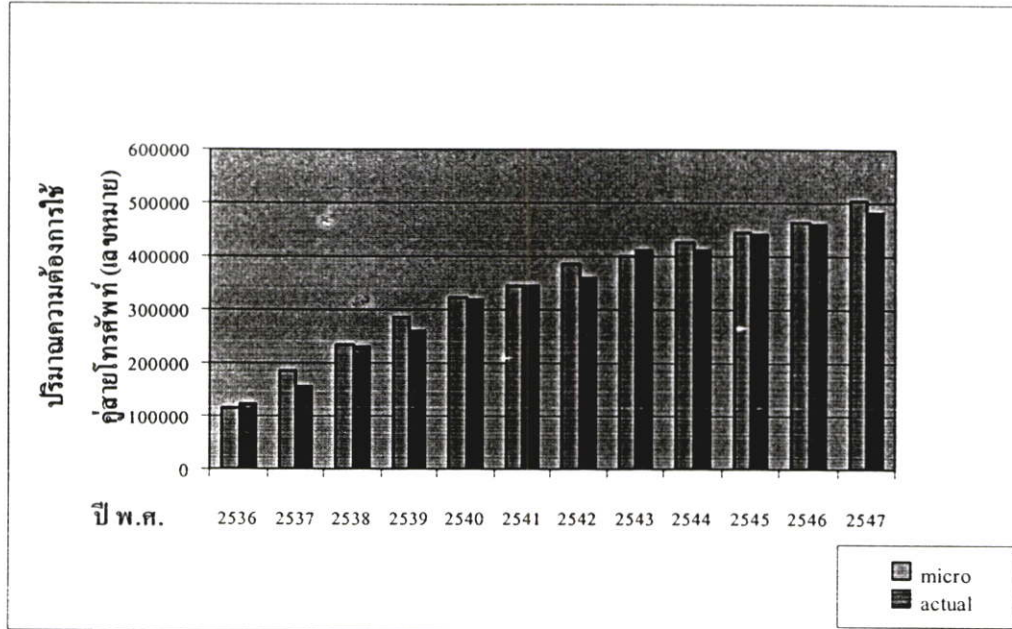


รูปที่ 5.20 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของจังหวัดจันทบุรี กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง



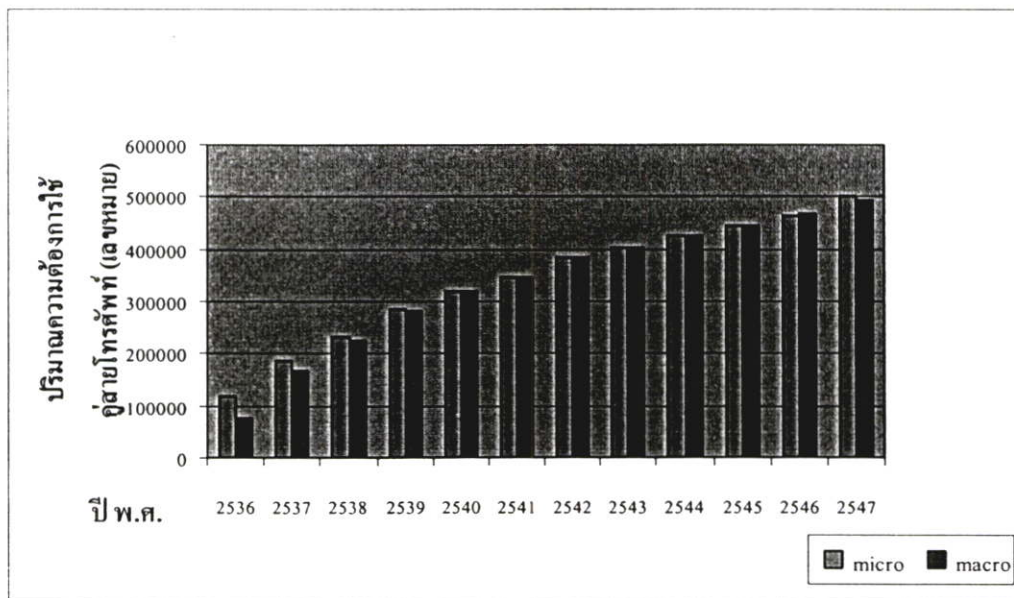
รูปที่ 5.21 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ของจังหวัดตราด กับความต้องการใช้โทรศัพท์จริง

กราฟรูปที่ 5.22 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างเลขหมายติดตั้งจริงและการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก (micro) ซึ่งเกิดจากผลรวมของการพยากรณ์ระดับจังหวัด โดยวิธีตัวกรองกาลมาน ตั้งแต่ปี พ.ศ.2536-2547



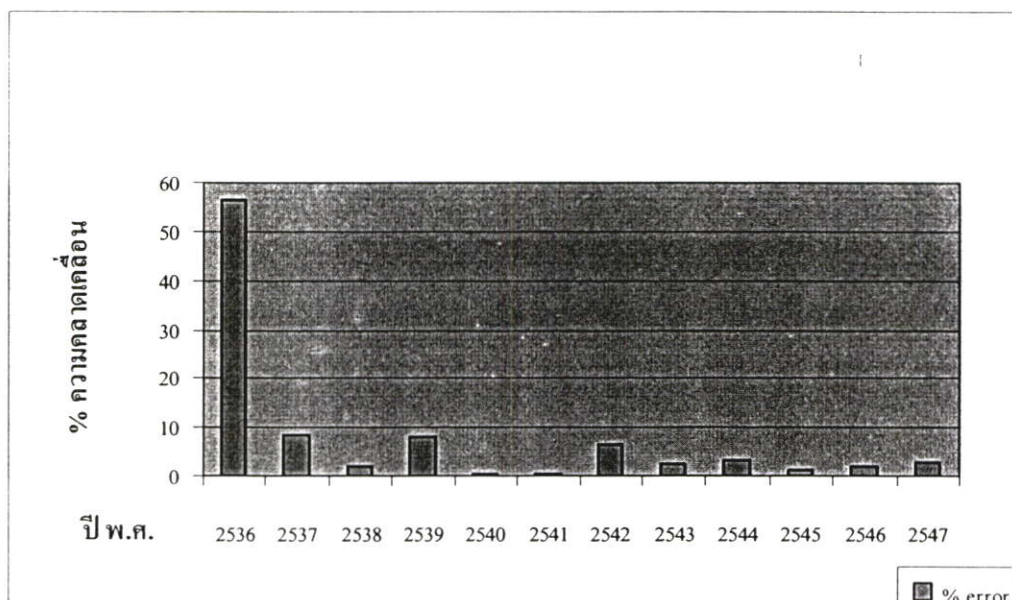
รูปที่ 5.22 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างเลขหมายติดตั้งจริงและการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก (micro)

กราฟรูปที่ 5.23 แสดงการเปรียบเทียบปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออกระดับจุลภาค(micro) และมหภาค(macro) ซึ่งระดับจุลภาค เป็นผลรวมของการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ โดยวิธีตัวกรองกาลมาน และ มหภาคเป็นการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ระดับภาคตะวันออก

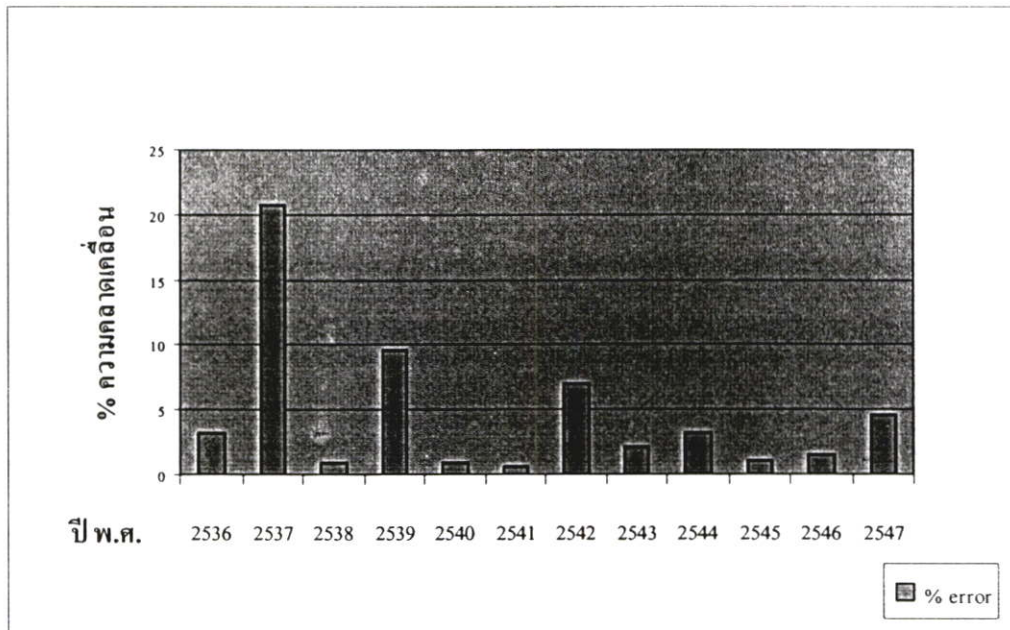


รูปที่ 5.23 กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์ในภาคตะวันออก ระดับจุลภาคและมหภาค

นอกจากนั้นเพื่อให้เห็นภาพเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ความต้องการใช้ งานคู่สายโทรศัพท์ระดับมหภาคและระดับจุลภาคเมื่อเปรียบเทียบกับปริมาณที่ติดตั้งจริงในภาค ตะวันออก ระหว่างปี พ.ศ. 2536-2547 ดังแสดงในรูปที่ 5.24-5.25 ตามลำดับ



รูปที่ 5.24 กราฟแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ความต้องการใช้คู่สาย โทรศัพท์ระดับมหภาคเมื่อเทียบกับปริมาณเลขหมายที่ติดตั้งจริง



รูปที่ 5.25 กราฟแสดงเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์
ระดับจุลภาคกับปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงในภาค

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัย

ตัวกรองกาลมานเป็นเทคนิคที่รู้จักกันดีซึ่งใช้หลักการของการทำให้ค่าเฉลี่ยผลต่างกำลังสองมีค่าต่ำสุด ซึ่งโดยปกติแล้วตัวกรองกาลมานเป็นเครื่องมือสำหรับการวิเคราะห์และการแก้ปัญหาประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่รู้จักหนึ่งตัวขึ้นไป จึงสามารถนำไปใช้กับการกรอง การปรับ และการพยากรณ์ ดังนั้นวิชานี้จึงนำตัวกรองกาลมานมาใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ ซึ่งจะเห็นได้ว่ากระบวนการของวิธีนี้เรียบง่ายและไม่ยุ่งยากเมื่อเทียบกับวิธีวิเคราะห์ทางสถิติ นอกจากนั้นยังใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยกว่า หลักการของวิธีนี้จะถูกนำเสนอในบทที่ 2,3 และ 4

การพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์นั้นถูกนำไปศึกษา 3 วิธีในการเปรียบเทียบผลการพยากรณ์ดังต่อไปนี้คือ

1. แบบจำลองเชิงถดถอย
2. ตัวกรองกาลมานเชิงถดถอย
3. ตัวกรองกาลมาน

ในการวิเคราะห์แบบจำลองเชิงถดถอยนั้นซึ่งใช้โปรแกรม SPSS นั้นได้ตั้งสมมุติฐานว่าปริมาณความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ขึ้นอยู่กับจำนวนประชากร และ รายได้ ผลปรากฏว่าเมื่อทำการวิเคราะห์เชิงถดถอยโดยใช้วิธี Stepwise ใน Multiple regression ผลปรากฏว่าปริมาณความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ (Y) นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนประชากรเพียงอย่างเดียว (X) โดยมีความสัมพันธ์กันดังนี้คือ

$$Y = -3.9 \cdot 10^7 + 0.728 X$$

ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นได้ 95 % ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.00 สรุปได้ว่า จำนวนประชากร (X) มีค่าเพิ่มขึ้น ปริมาณความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ (Y) จะเพิ่มขึ้นตามด้วย โดยมีสัมประสิทธิ์แห่งการตัดสินใจ (R^2) 95.5 %

และนอกจากนั้นผู้วิจัยยังได้ศึกษาเกี่ยวกับการพยากรณ์เลขหมายติดตั้งกับปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงในการวิเคราะห์แบบจำลองเชิงถดถอยนั้นซึ่งใช้โปรแกรม SPSS นั้นได้ตั้งสมมุติฐาน

ว่าปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ขึ้นอยู่กับจำนวนประชากร และ รายได้ ผลปรากฏว่า เมื่อทำการวิเคราะห์เชิงถดถอยโดยใช้วิธี Stepwise ใน Multiple regression ผลปรากฏว่าปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ (Y) นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนประชากรเพียงอย่างเดียว (X) โดยมีความสัมพันธ์กันดังนี้คือ

$$Y = -3.8 \cdot 10^7 + 0.709 X$$

ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นได้ 95 % ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.00 สรุปได้ว่า จำนวนประชากร (X) มีค่าเพิ่มขึ้น ปริมาณเลขหมายติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ (Y) จะเพิ่มขึ้นตามด้วย โดยมีสัมประสิทธิ์แห่งการตัดสินใจ (R^2) 94.9 %

ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้าในกรณีที่ต้องการให้ประสิทธิภาพในการวางแผนงานพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ให้ถูกต้อง และการวางแผนโครงข่ายให้พอเพียงกับความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์นั้น สามารถใช้ปริมาณความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์แทนได้ ซึ่งจากการวิเคราะห์จะเห็นได้ว่าปริมาณเลขหมายติดตั้งโทรศัพท์ในช่วงปี พ.ศ. 2535-2546 นั้นมีความแตกต่างกับปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์โดยเฉลี่ยเพียง 9.01 % กล่าวคือ ตั้งแต่ช่วงปี พ.ศ. 2543-2547 ปริมาณการติดตั้งคู่สายโทรศัพท์นั้นมีค่าใกล้เคียงกับปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์มากซึ่งอยู่ในช่วง 5-9 % เพราะหน่วยงานที่รับผิดชอบจะต้องตอบสนองต่อลูกค้าให้ได้ทันที และนอกจากนี้จากการพยากรณ์การพยากรณ์ความต้องการใช้โทรศัพท์ใน method (1) กับ (a) method (2) กับ (b) และ method (3) กับ (c) แตกต่างกันไม่มากนัก

ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอวิธีการใหม่ซึ่งใช้หลักของตัวกรองกาลมานสำหรับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ ซึ่งพบว่าเป็นวิธีที่มีกระบวนการที่เรียบง่ายกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีเชิงถดถอย โดยไม่จำเป็นต้องอาศัยข้อมูลดิบจำนวนมากตัวแปรและมหาศาล อีกทั้งยังใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยกว่า จากข้อมูลดิบของปี พ.ศ. 2534-2546 เราได้เปรียบเทียบผลการพยากรณ์จากวิธีเชิงถดถอยกับวิธีที่นำเสนอ อีกทั้งนำเสนอเป็นกรณีศึกษาเกี่ยวกับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ระดับจังหวัด และระดับภาค โดยศึกษาภาคตะวันออก ได้แก่ จังหวัดนครนายก, ปราจีนบุรี, สระแก้ว, ชลบุรี, ฉะเชิงเทรา, ระยอง, จันทบุรีและตราด ซึ่งผลสรุปได้ว่าวิธีที่นำเสนอโดยหลักตัวกรองกาลมานนั้น ได้ผลดีกว่ามากเมื่อเทียบกับวิธีเชิงถดถอย จึงสามารถสรุปได้ว่าวิธีที่นำเสนอนี้เป็นตัวเลือกที่ให้ผลดีสำหรับการใช้กาลมานฟิลเตอร์สำหรับการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์

เอกสารอ้างอิง

- [1] กิตติ สุตันตวิณชัยกุล. 2532. “ปัญหาการตั้งแบบจำลองในการประมาณสมการเศรษฐมิติ” กรุงเทพมหานคร : วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [2] นิตย์ ฝาม. 2528. “การศึกษาตัวแบบพยากรณ์อุปสงค์การบริการ โทรศัพท์ในประเทศไทย”. กรุงเทพมหานคร : วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [3] วารุณี ตรีบำรุงศักดิ์. 2538. “การพยากรณ์ด้วยวิธีการถดถอยเชิงเส้นพหุเมื่อตัวแปรตามมีค่าสูญหาย.” วิทยานิพนธ์ภาควิชาสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย , จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- [4] วิจิต หล่อจระชุมห้กุล , จิราวัลย์ จิตรถเวช. “เทคนิคการพยากรณ์”โครงการตำราวิชาการสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ ครั้งที่ 3. ปี 2548. หน้า 1-330
- [5] ประชุม สุวัตถิ. 2545. “สถิติอนุমান.” โครงการตำราวิชาการสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ ครั้งที่ 3. ปี 2545. หน้า 2-82
- [6] ประภาศรี ปทุมรัตน์. 2537 . “ การคาดคะเนปริมาณการใช้โทรศัพท์ในเขตนครหลวง.” วิทยานิพนธ์ ปริญญาโทคณะเศรษฐศาสตร์, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [7] สหพร กลัดนั้ม. 2541. “ การคาดคะเนปริมาณการใช้โทรศัพท์ทางไกลระหว่างประเทศ .” วิทยานิพนธ์ ปริญญาโทคณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [8] R.G. Brown and P. Y.C. Hwang, Introduction to Random Signals and (2004 - 2010) Applied Kalman Filtering, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1983, pp. 175-178.
- [9] B. Sridhar, P. Smith, R.E. Suorsa, and B. Hussien, “Multirate and Telephone Usage Demand event-driven Kalman filters for helicopter flight”, IEEE Mag. Control Systems, vol.13, 4, Aug. 1993, pp. 26-33.
- [10] S.-S. Xiong and Z.-Y. Zhou, “Neural filtering of colored noise based on Kalman filter structure”, IEEE Trans. Instrumentation and Measurement, vol.52, 3, June 2003, pp. 742-747.
- [11] W. Du and P. Driessen, “Speech enhancement based on Kalman filtering and EM algorithm”, IEEE Conf. Communications, Computers and Signal Processing, May 1991, pp. 142-145.
- [12] M. Efe, D.P. Atherton, and J.A. Bather, “Adaptive Kalman filters for manoeuvring target tracking”, IEE Colloquium Target Tracking and Data Fusion, June 1998, pp. 4/1-4/7.

- [13] A.C. Harvey, *Forecasting structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Great Britain, 1990.
- [14] R.E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems", *ASME Trans. Basic Engineering*, March 1960, pp. 35-45.
- [15] G. Welch and G. Bishop, *An introduction to the Kalman filter*, TR 95041, Department of Computer Science, UNC-Chapel Hill, March 2002.
- [16] The International Telegraph and Telephone Consultative Committee, *Telephone Network and ISDN Recommendation E.401-E.880*, 1989.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ความรู้พื้นฐานของทฤษฎีระบบ

ทฤษฎีระบบ

ภาคผนวกนี้ประกอบด้วยเนื้อหาทั่วไปของทฤษฎีระบบที่จำเป็นสำหรับเข้าใจสูตรของระบบสโตแคสติกพลวัต

ก.1 พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ก.1.1 เวกเตอร์

เวกเตอร์ คือแถวตั้ง (column) ของสมาชิก n ตัว เมื่อ $n = 1$ เป็น *สเกลาร์* เวกเตอร์แถวนอน คือ เวกเตอร์แถวตั้งสลับเปลี่ยน (column vector transposed) ที่มีมิติ $1 \times n$

$$X^T = [x_1 \dots x_n] \quad (\text{ก.1})$$

การดำเนินการบนเวกเตอร์ คือการบวกและการคูณ โดยค่าคงที่

$$x + y = [x_i + y_i] \quad kx = [kx_i] \quad (\text{ก.2})$$

เมตริก (matrix) ของเวกเตอร์คือความยาวของเวกเตอร์ ค่าประจำแบบยูคลิด (Euclidean norm) คือ

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} \quad (\text{ก.3})$$

อนุพันธ์ของเวกเตอร์และอินทิกรัลของเวกเตอร์คือ

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= [dx_1/dt \dots dx_n/dt]^T \\ \int x(t)dt &= [\int x_1 dt \dots \int x_n dt]^T \end{aligned} \quad (\text{ก.4})$$

สมมติว่าเวกเตอร์ เป็นฟังก์ชันของเวลา

ก.1.2 เมตริกซ์

เมตริกซ์ คือ แถวลำดับ (array) $m \times n$ ที่มีสมาชิก a_{ij} โดยที่ $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$

$$A = \{a_{ij}\} \quad (\text{ก.5})$$

การดำเนินการบนเมตริกซ์ คือ การบวก, การคูณและการคูณด้วยค่าคงที่

$$\begin{aligned} A + B &= B + A = \{a_{ij} + b_{ij}\} \\ AB &\neq BA = \left\{ \sum_k a_{ik} b_{kj} \right\} \\ kA &= Ak = \{ka_{ij}\} \end{aligned} \quad (\text{ก. 6})$$

การหาอนุพันธ์เมตริกซ์และการอินทิเกรต คือ

$$dA(t)/dt = \{da_{ij}/dt\} \quad (\text{ก. 7})$$

$$\int A(t)dt = \left\{ \int a(t)_{ij} dt \right\} \quad (\text{ก. 8})$$

เมตริกซ์เอกลักษณ์ คือ

$$I = \{\delta_{ij}\} \text{ เมื่อ } \delta_{ij} \text{ คือ ครอเนกเคอร์เคลตา} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (\text{ก. 9})$$

ตัวกำหนด (determinant) ของเมตริกซ์จัตุรัส (n×n) เป็นสเกลาร์

$$\det[A] = |A| = \sum_{i=1}^n \dots \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 1 \dots j}}^n [a_{1i} a_{2l} \dots a_{ni}] \quad (\text{ก. 10})$$

เมตริกซ์ที่มี $\det[A] = 0$ เรียกว่าเมตริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

ตัวสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ คือ

$$A^T = \{a_{ij}\} \quad (\text{ก. 11})$$

ตัวผกผัน (adjoint) ของเมตริกซ์ (ใช้สัญลักษณ์ $Adj[A]$) คือเมตริกซ์ที่จัดรูปโดยการแทนที่แต่ละสมาชิก a_{ij} โดยตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยที่จัดรูปโดยการลบแถวอนที่ i และแถวตั้งที่ j ของ A และคูณด้วย $(-1)^{i-j}$ (โคแฟกเตอร์) และสลับเปลี่ยนผลลัพธ์

การทำเมตริกซ์ผกผัน (matrix inverse) ของเมตริกซ์จัตุรัสถูกนิยามได้เป็น

$$A^{-1} = |A|^{-1} Adj[A] \quad AA^{-1} = I \quad (\text{ก. 12})$$

ผลบวกเฉียง (trace) ของเมตริกซ์ คือผลรวมของพจน์แนวทแยงมุม

$$\text{Trace}[A] = \text{Tr}[A] = \sum_i a_{ii} \quad (\text{ก. 13})$$

สังเกตว่า

$$\text{Trace}[aa^T] = a^T a$$

ถ้าตัวผกผัน (inverse) ของเมตริกซ์ไม่ได้มีอยู่ เพราะว่าไม่ได้เป็นจัตุรัสหรือค่าลำดับชั้น (rank) ของเมตริกซ์น้อยกว่าค่ามากที่สุด แล้วอาจจะแทนด้วยตัวผกผันเทียม (pseudoinverse)

$$A^\# = (A^T A)^{-1} = A^T \quad (\text{ก. 14})$$

สังเกตว่า $AA^\#A = A$ และ $(A^\#A)^T = A^\#A$

สมการลักษณะเฉพาะของเมตริกซ์ คือ

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \quad (\text{ก. 15})$$

ผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะให้ค่าเจาะจง (eigenvalue) $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_n$

ค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์ $\text{rank}[A]$ คือขนาดของตัวกำหนดไม่เป็นศูนย์สูงสุดของ A

การแปลงแบบคล้าย (similarity transformation) T บน A โดยที่หา T^{-1} ได้ (ไม่เอกฐาน) ให้เมตริกซ์ B มีค่าเจาะจงเหมือนกัน

$$TAT^{-1} = B$$

เวกเตอร์เจาะจง (eigenvalue) ของเมตริกซ์ $A \ n \times \ n$ (e_i) เกี่ยวข้องกับค่าเจาะจง มีสมการคือ

$$\lambda_i e_i = A e_i$$

เมตริกซ์ $E = \{e_i\}$ ประกอบด้วยเวกเตอร์เจาะจงของ A เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐานและมีเงื่อนไขคือ

$$AE = EA \quad \text{เมื่อ } A = \text{diag} \{ \lambda_i \}$$

ทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน (Cayley-Hamilton Theorem) กล่าวว่า การแทนที่ λ ด้วย A ในสมการลักษณะเฉพาะ (ก. 15) ให้

$$f(A) = 0$$

สิ่งนี้นำไปสู่ค่าจำกัดความของเมตริกซ์ลักษณะเฉพาะ

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots$$

พหุนามเอกพันธ์กำลังสอง (quadratic form) ถูกนิยามเป็น

$$x^T A x = \sum_y a_{ij} x_i x_j$$

ค่าประจำของเมตริกซ์ถูกนิยามเป็น

$$\|A\| = \max_x \|Ax\| / \|x\| = \sqrt{\lambda_1}$$

เมื่อ λ_1 คือค่าเฉพาะมากที่สุดของ A

เกรเดียนต์ (Gradient) ของ $z(x)$

$$\text{สเกลาร์ } x \quad \partial z / \partial x = a \text{ (สเกลาร์)} \quad \partial^2 z / \partial x^2 = A \text{ เมตริกซ์เฮสเซียน}$$

(Hessian matrix)

$$\text{เวกเตอร์ } x \quad \partial z / \partial x = A \text{ (เมตริกซ์)} \quad \text{ยาโคเบียน (Jacobian)}$$

$$\text{เมตริกซ์ } x \quad \partial z / \partial x = B \text{ (เมตริกซ์)}$$

ก.1.3 ปริภูมิเวกเตอร์

ปริภูมิเวกเตอร์ คือเซตที่สมาชิกเป็นไปตามกฎของการบวกและการคูณด้วยค่าคงที่ ปริภูมิเวกเตอร์เมตริก (metric vector space) เป็นเรื่องหนึ่งที่มีเมตริกเกี่ยวข้องกับ ปริภูมิเวกเตอร์เมตริกปกติส่วนใหญ่ คือยูคลิด (Euclidean) ซึ่งเกี่ยวข้องกับค่าประจำแบบยูคลิด (ก.3)

ก. 1.4 ทฤษฎีเซต

เซต ประกอบด้วยสมาชิกที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน การดำเนินการต่อไปนี้ : การผนวก (union ใช้สัญลักษณ์ \cup), การตัดกัน (intersection ใช้สัญลักษณ์ \cap), ส่วนเติมเต็ม (complement ใช้สัญลักษณ์ $\bar{}$) และผลรวมอนันต์ (infinite summation ใช้สัญลักษณ์ \bigcup_i^∞), เซตว่าง (null set ใช้สัญลักษณ์ \emptyset), ปริภูมิทั้งหมด (whole space) ถูกนิยามเป็น

$$A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bigcup_i^\infty A, \emptyset, S$$

ทฤษฎีบท ก. 1 เดอมอร์แกน (DeMorgan)

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \overline{B} \text{ และ } \overline{(AB)} = \overline{A} + \overline{B}$$

เมตริกซ์ $\mu(A)$ อาจจะเกี่ยวข้องกับปริภูมิเวกเตอร์ ทฤษฎีความน่าจะเป็นตัวอย่างตามแบบของปริภูมิ $\{S, F, P\}$

ภาคผนวก ข

สัญญาณสุ่ม (Random Signal)

ข. 1 คำจำกัดความของปริมาณสัญญาณสุ่ม

ข.1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

สำหรับตัวอย่างสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา $x(t)$ n ตัวอย่าง เกิดขึ้นที่เวลา t_1, t_2, \dots, t_n และมีค่าที่สอดคล้องกัน x_1, x_2, \dots, x_n ค่าเฉลี่ยเลขคณิตอย่างง่ายมีค่าเท่ากับผลบวกของค่าทั้งหมดหารด้วยจำนวนของตัวอย่าง

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

ถ้าต้องการเดาค่าของ x มีค่าเป็นเท่าไร ณ เวลาที่กำหนดไว้ (เนื่องจากขาดรายละเอียดเกี่ยวกับสัญญาณ $x(t)$) แล้วบางทีค่าเฉลี่ยนี้เป็นการเดาที่ดีที่สุดที่สามารถทำได้ ดังนั้นมักเรียกว่า “ค่าคาดหวัง (expected หรือ expectation)” ของ x (แทนด้วย $E[x]$) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างทั้งหมด

$$E[x] = \bar{x}$$

ข. 1.2 ความแปรปรวน

ความแปรปรวนเป็นอีกปริมาณหนึ่งที่ต้องการในการวิเคราะห์ต่อไป ซึ่งเป็นการวัดความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นเมื่อมีการเดาค่าของสัญญาณจากค่าเฉลี่ยของสัญญาณ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับการกระจายของตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ (นั่นคือ x_1, x_2, \dots, x_n) รอบค่าเฉลี่ยของตัวอย่างว่าเป็นเช่นใด ความแปรปรวนมีค่าน้อยแสดงว่า ตัวอย่างส่วนใหญ่อยู่ใกล้กับค่าเฉลี่ย ดังนั้นค่าเฉลี่ยของสัญญาณในช่วงเวลาทั้งหมดเป็นค่าที่น่าเป็นจริงของสัญญาณ ณ เวลานี้ อีกด้านหนึ่ง ความแปรปรวนมีค่าสูงหมายความว่า ตัวอย่างสัญญาณแต่ละค่ากระจัดกระจายออกไปเป็นวงกว้างในแต่ละด้านของค่าเฉลี่ย ดังนั้นค่าเฉลี่ยไม่ได้เป็นค่าที่ดีที่สุดนำไปสู่ค่าสัญญาณที่น่าเป็นจริงที่เวลาใด ๆ และดังนั้นค่ามีความไม่แน่นอน

นิยามของความแปรปรวน คือกำลังสองของค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร σ_x ซึ่งเป็นรากของกำลังสองเฉลี่ย (root-mean-square) ของค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็นดังนี้

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

ดังนั้น

$$\text{ความแปรปรวน} = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \right] - \bar{x}^2$$

หรือในพจน์ของค่าคาดหวัง

$$\sigma_x^2 = E[(x - \bar{x})^2] = E[x^2] - \bar{x}^2 = E[x^2] - \{E[\bar{x}]\}^2$$

ความแปรปรวนของชุดของค่าการวัด (หรือชุดของตัวอย่างสัญญาณ) คือค่าเฉลี่ยกำลังสองของค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของชุดของแต่ละตัวอย่างทั้งหมด ถ้าความแปรปรวนเป็นศูนย์แล้วสัญญาณต้องเท่ากับค่าเฉลี่ยของมันทุก ๆ ตัวอย่าง

ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 4 ตัวกรองคาลมานเป็นตัวประมาณค่าที่มีความแปรปรวนน้อยสุด (minimum-variance estimator) ในที่นี้ ความแปรปรวนคือความผิดพลาดระหว่างค่าที่ประมาณกับค่าจริงของเวกเตอร์สเตตของระบบ ดังนั้นตัวกรองคาลมานทำให้ความไม่แน่นอนในค่าประมาณสเตตน้อยลงเมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณค่าแบบอื่น ๆ ในลักษณะนี้ บางครั้งอาจกล่าวได้ว่าเป็นตัวประมาณค่าสเตตที่ได้ผลดีที่สุด (optimal state estimator)

ภาคผนวก ค

บทพิสูจน์

$$X_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k \quad (1)$$

X_{k+1} แทนสถานะที่เวลา

$$Z_k = H_k X_k + V_k \quad (2)$$

W_k = การรบกวนของกระบวนการ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ (เมตริกซ์ $n \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

X_k = แทนสถานะที่เวลา k (เมตริกซ์ $n \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Φ_k = เมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานะที่ k กับ $k+1$ (เมตริกซ์ $n \times n$)

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1n} \\ \vdots & & \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Z_k = ค่าที่ได้ในการวัด (เมตริกซ์ $m \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

H_k = เมตริกซ์คงที่ที่สัมพันธ์กับสถานะของการวัด (เมตริกซ์ $m \times n$)

$$= \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1m} \\ \vdots & & \\ H_{m1} & \dots & H_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

v_k = แทนการรบกวนของกระบวนการ (เมตริกซ์ $m \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

จากนิยาม

Covariance matrix สำหรับ W_k และ v_k

$$E[w_k w_i^T] = \begin{cases} Q_k; i = k \\ 0; i \neq k \end{cases} \quad (3)$$

$$E[v_k v_i^T] = \begin{cases} R_k; i = k \\ 0; i \neq k \end{cases} \quad (4)$$

$$E[w_k v_i^T] = 0 \quad \text{for all } k \text{ and } i \quad (5)$$

พิจารณาให้ละเอียดยิ่งขึ้น

$$\begin{aligned} E[w_k w_i^T] &= E \begin{bmatrix} w_1 w_1^T & w_1 w_2^T & \dots & w_1 w_n^T \\ w_2 w_1^T & w_2 w_2^T & \dots & w_2 w_n^T \\ \vdots & & & \\ w_n w_1^T & w_n w_2^T & \dots & w_n w_n^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E[w_1 w_1^T] & E[w_1 w_2^T] & \dots & E[w_1 w_n^T] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & E[w_n w_n^T] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \emptyset_k & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \emptyset_k & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \emptyset_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เช่นเดียวกัน จะได้ $E[v_k v_k^T]$

ความผิดพลาดของการประมาณข้างหน้าและข้างหลัง คือ

$$\ell_n^- = X_k - \hat{X}_k^- \quad (6)$$

ความแปรปรวนร่วมของการประมาณข้างหน้าที่เกิดพลาด

$$\begin{aligned} P_k^- &= E[\ell_k^- \ell_k^{-T}] \\ &= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)^T\right] \end{aligned} \quad (7)$$

การประมาณสถานะข้างหลัง \hat{X}_k โดยการรวมแบบเชิงเส้น ของการประมาณข้างหน้า \hat{X}_k^- และน้ำหนัก (weighted) ที่แตกต่างกันระหว่างการวัดค่าจริง Z_k และการทำนายการวัด $H_k \hat{X}_k^-$

$$\hat{X}_k = X_k^- + K_k \left(Z_k - H_k \hat{X}_k^- \right) \quad (8)$$

$K_k =$ อัตราการขยายกาลมาน (Kalman gain : K)

$$\begin{aligned} P_k &= E[\ell_k \ell_k^T] \\ &= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k\right)\left(X_k - \hat{X}_k\right)^T\right] \end{aligned} \quad (9)$$

แทนสมการที่ (2) คือ $Z_k = H_k X_k + v_k$ ลงในสมการที่ 8 ได้

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k \left(H_k X_k + v_k - H_k \hat{X}_k^- \right) \\ P_n &= E\left[\left\{\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k \left(H_k X_k + v_k - H_k \hat{X}_k^-\right)\right\}\left\{\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k \left(H_k X_k + v_k - H_k \hat{X}_k^-\right)\right\}^T\right] \\ &= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k H_k X_k - K_k v_k + K_k H_k \hat{X}_k^- \left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k H_k \left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k v_k\right]^T\right] \\ &= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k H_k \left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k v_k \left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)^T - \left(X_k - \hat{X}_k^-\right)^T H_k^T K_k^T - v_k^T K_k^T\right]\right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & \left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T - \left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T H_k^T K_k^T - \left(X_k - \hat{X}_k \right) v_k^T K_k^T - \\ & E \left[K_k H_k \left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T + K_k H_k \left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T H_k^T K_k^T + K_k H_k \left(X_k - \hat{X}_k \right) v_k^T K_k^T - \right. \\ & \left. H_k v_k \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T + K_k v_k \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T H_k^T K_k^T + K_k v_k v_k^T K_k^T \right] \\ & = P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T - 0 - K_k H_k P_k^- + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + 0 - 0 + 0 + K_k R_k K_k^T \\ & = P_k^- \left(I - H_k^T K_k^T \right) - K_k H_k P_k^- \left(I - H_k^T K_k^T \right) + K_k R_k K_k^T \\ & = \left(P_k^- - K_k H_k P_k^- \right) \left(I - H_k^T K_k^T \right) + K_k R_k K_k^T \\ & = \left(I - K_k H_k \right) P_k^- \left(I - K_k H_k \right)^T + K_k R_k K_k^T \end{aligned} \right] \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dA} [\text{trace}(AB)] = B^T, \quad (AB \text{ must be square}) \quad (12)$$

$$\frac{d}{dA} [\text{trace}(ACA^T)] = 2AC, \quad (C \text{ must be square}) \quad (13)$$

ซึ่ง derivative of a scalar with respect to a matrix is defined as

$$\frac{ds}{dA} = \begin{bmatrix} \frac{ds}{da_{11}} & \frac{ds}{da_{12}} & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \quad (14)$$

เพื่อเป็นการง่าย จากสมการที่ (11) จะไม่ได้ Subscript จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
P & = (I - KH)P^-(I - KH)^T + KRK^T \\ & = (IP^- - KHP^-)(I - H^T K^T) + KRK^T \\ & = P^- - P^- H^T K^T - KHP^- + KHP^- H^T K^T + KRK^T \\ & = P^- - KHP^- - P^- H^T K^T + K(HP^- H^T + R)K^T \quad (15)
\end{aligned}$$

เทอมที่ 2 และเทอมที่ 3 เป็น linear in เทอม K

ในการ minimize trace of P เพราะว่าเป็นการประมาณค่าที่มี sum of mean square error ต่ำ

* trace ของ KHP⁻ และ P⁻H^TK^T เท่ากัน

$$\therefore \frac{d}{dk} \text{trace} P = 0 - 2(HP^-)^T + 2K(HP^-H^T + R) \quad (16)$$

derivative equal to zero

$$\begin{aligned} -2(HP^-)^T + 2K(HP^-H^T + R) &= 0 \\ 2K(HP^-H^T + R) &= 2(HP^-)^T \\ K &= P^-H^-(HP^-H^T + R)^{-1} \\ \therefore K_k &= P_k^-H_k^T(H_kP_k^-H_k^T + R_k)^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

จากสมการที่ (11)

$$P_n = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= (P_k^- - K_k H_k P_k^-) (I - H_k^T K_k^T) + K_k R_k K_k^T \\ &= P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T - K_k H_k P_k^- + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + K_k R_k K_k^T \\ &= P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T - K_k H_k P_k^- + K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T \end{aligned} \quad (19)$$

นำค่า K_k ในสมการที่ (17) ลงในสมการที่ (19)

$$\begin{aligned} &= P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T - P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^- + P_k^- H_k^T K_k^T \\ &= P_k^- - P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^- \end{aligned} \quad (20)$$

แทนค่า K_k

$$\begin{aligned} &= P_k^- - K_k H_k P_k^- \\ &= (I - K_k H_k) P_k^- \end{aligned} \quad (21)$$

$$\hat{X}_{k+1}^- = \hat{\Phi}_k \hat{X}_k \quad (22)$$

ทำนองเดียวกัน ค่าผิดพลาด

$$\begin{aligned} \ell_{k+1}^- &= X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} \\ &= (\hat{\Phi}_k X_k + w_k) - \hat{\Phi}_k \hat{X}_k \\ &= \hat{\Phi}_k X_k - \hat{\Phi}_k \hat{X}_k + w_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{O}_k \left(X_k - \hat{X}_k \right) + w_k \\
&= \mathcal{O}_k \ell_k + w_k
\end{aligned} \tag{23}$$

ค่า $E[w_k \ell_k^T] = 0$ เพราะว่า uncorrelated

$$\begin{aligned}
P_{k+1}^- &= E[\ell_{k+1}^- \ell_{k+1}^{-T}] \\
&= E[(\mathcal{O}_k \ell_k + w_k)(\mathcal{O}_k \ell_k + w_k)^T] \\
&= E[(\mathcal{O}_k \ell_k + w_k)(\ell_k^T \mathcal{O}_k^T + w_k^T)] \\
&= E[\mathcal{O}_k \ell_k \ell_k^T \mathcal{O}_k^T + \mathcal{O}_k \ell_k w_k^T + w_k \ell_k^T \mathcal{O}_k^T + w_k w_k^T] \\
&= E[\mathcal{O}_k \ell_k \ell_k^T \mathcal{O}_k^T] + E[\mathcal{O}_k \ell_k w_k^T] + E[w_k \ell_k^T \mathcal{O}_k^T] + E[w_k w_k^T] \\
&= \mathcal{O}_k P_k \mathcal{O}_k^T + 0 + 0 + Q_k \\
&= \mathcal{O}_k P_k \mathcal{O}_k^T + Q_k
\end{aligned} \tag{24}$$

ภาคผนวก ง

Program Matlab

```

clear all;
close all;
Q = 0.01;
R = 0.01;
sigw = sqrt(Q);
sigv = sqrt(R);
ui= [2915366 3124543 3219879 3312435 3429000 3557821 3623421 3891234 4117133 4154361
4201345 4301432 4381489 4401876 4423156 4512301 4614739 4723415 4812342 4991876 5187337
5201867 5254315 5372435 5467696 5497123 5504328 5529871 5606933 5612398 5623987 5641987
5655354 5670123 5704357 5890143 5968145 5973425 5993425 6613054 6621748 6650143 6693458
7038799 7903485 8015987 8295487 8335365 8493036 8603456 8804357 8934657 9105150 9305468
9404256 9560435 9732888 9830234 9903452 9994536 10373970 10507432 10700033 10988989
11095388 11236358 11406573 11700045 11818280 11944537 12054389 12308977 12568323
12703452 12804535 13032577 13336981 13501876 13701863 13903425 14125478]

n=length(ui);
x=zeros(1,n);
xhatdat=zeros(1,n);
z=zeros(1,n);
xhatK=zeros(1,n);
P=zeros(1,n);
Phat=zeros(1,n);
K=zeros(1,n);
residual=zeros(1,n);
h=1;a=1;
for k=2:n;
    P(k)=P(k-1)+1;
    x(k)=ui(k);

```

```
z(k)=x(k)+sigv*randn;  
xhatdat(k) = a*xhatK(k-1);  
Phat(k) = a*a*P(k-1)+Q;  
K(k)=h*Phat(k)/(h*h*Phat(k)+R);  
zhat(k)=xhatdat(k)*h;  
residual(k)=z(k)-zhat(k);  
xhatK(k)=xhatdat(k)+K(k)*residual(k);  
P(k)=Phat(k)-K(k)*h*Phat(k);  
end;  
plot(P,xhatdat,P,ui)
```

ภาคผนวก จ

ผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SPSS

ตารางที่ จ.1 แสดงปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์, เลขหมายติดตั้ง, จำนวนประชากร และรายได้

year	lc	demand	pop	gdp
2535	3004002	3429000	56961030	2111862
2536	3549678	4117133	57788965	2282572
2537	3946272	4381489	58336072	2473937
2538	4228137	4614739	59095419	2695054
2539	4820175	5187337	59460382	2933168
2540	5085464	5467696	60116182	3095041
2541	5060055	5606933	60816227	3051710
2542	5086240	5655354	61466178	2722125
2543	5519819	5968145	61661701	2836454
2544	6000695	6621748	61878746	2961258
2545	7365238	7903485	62294094	3014560
2546	7970245	8493036	63589416	3111026

แหล่งที่มา

Lc = ปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงซึ่งได้มาจากส่วน โครงข่ายโทรคมนาคม บ.ทีโอที จำกัด (มหาชน)

demand = ปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในปีก่อนหน้านั้นรวมกันปริมาณค่าขอใช้โทรศัพท์ ณ ปีนี้ ซึ่งได้มาจาก ส่วน โครงข่ายโทรคมนาคม บ.ทีโอที จำกัด (มหาชน)

Pop = จำนวนประชากรซึ่งข้อมูลได้มาจากสำนักงานสถิติแห่งชาติ

GDP = รายได้ประชาชาติ ซึ่งข้อมูลได้มาจากสำนักงานพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ

ตารางที่ จ.2 แสดงจำนวนประชากรตั้งแต่ปี พ.ศ.2547-2554

year	pop(1)	pop(2)
2547	64754289	64739000
2548	65299430	65285000
2549	65826616	65812000
2550	66318548	66305000
2551	66794042	66781000
2552	67247995	67236000
2553	67681235	67670000
2554	68904483	68083000

แหล่งที่มา

Pop(1) = จำนวนประชากรที่ได้มาจากการคาดคะเนของสำนักงานคณะกรรมการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ

Pop(2) = จำนวนประชากรที่ได้มาจากการคาดคะเนด้วยวิธีตัวกรองกาลมาน

จ.1 การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์กับจำนวนประชากรและรายได้

ผลการศึกษาเป็นดังนี้

Regression

Variables Entered/Removed^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	POP	.	Stepwise (Criteria: Probabilit y-of-F-to-e nter <= .050, Probabilit y-of-F-to-r emove >= .100).

a. Dependent Variable: DEMAND

ตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กับปริมาณความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์นั้นได้แก่จำนวนประชากร (POP)

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.977 ^a	.955	.951	330677.8

a. Predictors: (Constant), POP

ความเป็นไปได้ของการพยากรณ์เมื่อตัวแปรทั้งหมดนำมาวิเคราะห์มีความแม่นยำในการพยากรณ์ถึง 95.5%

ANOVA^b

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.3E+13	1	2.3E+13	213.221	.000 ^a
	Residual	1.1E+12	10	1.1E+11		
	Total	2.4E+13	11			

a. Predictors: (Constant), POP

b. Dependent Variable: DEMAND

ตาราง ANOVA เป็นการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ

$H_0: \rho = 0$ ตัวแปรอิสระทุกตัวไม่สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้โทรศัพท์ได้

$H_1: \rho \neq 0$ ตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ได้

P(ความน่าจะเป็น) ที่ได้จากการคำนวณ=0.000 ถ้ากำหนด α ระดับนัยสำคัญ=0.05 ดังนั้นค่า P น้อยกว่าค่า α จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ยอมรับ H_1

สรุปได้ว่าตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์ได้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ 0.05

ค่า P(ความน่าจะเป็น) ของประชากร= 0.000 ซึ่งน้อยกว่า $\alpha = 0.05$ ดังนั้นตัวแปรด้านประชากรสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ปริมาณความต้องการใช้งานกลุ่มสายโทรศัพท์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-3.9E+07	3036139		-12.744	.000
	POP	.728	.050	.977	14.602	.000

a. Dependent Variable: DEMAND

โดยสมการการพยากรณ์เป็นดังนี้คือ

$$\text{Demand} = -3.9 \times 10^7 + 0.728 \text{ POP}$$

Excluded Variables^b

Model		Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics
						Tolerance
1	GDP	-.080 ^a	-.649	.532	-.211	.312

a. Predictors in the Model: (Constant), POP

b. Dependent Variable: DEMAND

ตารางนี้จะเห็นได้ว่าค่า GDP นั้นมีค่าความน่าจะเป็น 0.532 ซึ่งมากกว่าค่า 0.05 ตัวแปรนี้ไม่สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์

จ.2 การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงกับจำนวนประชากรและรายได้มีผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

Regression

Variables Entered/Removed^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	POP		Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).

a. Dependent Variable: LC

ตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กับปริมาณการติดตั้งคู่สายโทรศัพท์นั้น ได้แก่ จำนวนประชากร

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.974 ^a	.949	.944	344035.2

a. Predictors: (Constant), POP

ความเป็นไปได้ของการพยากรณ์เมื่อนำตัวแปรทั้งหมดมาวิเคราะห์มีค่าแม่นยำในการพยากรณ์ 94.9%

ANOVA^b

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.2E+13	1	2.2E+13	186.937	.000 ^a
	Residual	1.2E+12	10	1.2E+11		
	Total	2.3E+13	11			

a. Predictors: (Constant), POP

b. Dependent Variable: LC

ตาราง ANOVA เป็นการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ

$H_0: \rho = 0$ ตัวแปรอิสระทุกตัวไม่สามารถนำมาพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งค่าสายโทรศัพท์ที่ได้

$H_1: \rho \neq 0$ ตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งค่าสายโทรศัพท์ที่ได้

P(ความน่าจะเป็น) ที่ได้จากการคำนวณ = 0.000 ถ้ากำหนด ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ ดังนั้นค่า P น้อยกว่า α จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ยอมรับ H_1

สรุปได้ว่า ตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งค่าสายโทรศัพท์ได้อย่างมีนัยสำคัญ 0.05

ค่า P (ความน่าจะเป็น) ของประชากร 0.000 ซึ่งน้อยกว่า $\alpha = 0.05$ ดังนั้นตัวแปรอิสระด้านประชากรสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งค่าสายโทรศัพท์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ α ระดับ 0.05

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-3.8E+07	3158781		-12.040	.000
	POP	.709	.052	.974	13.672	.000

a. Dependent Variable: LC

โดยสมการการพยากรณ์เป็นดังนี้ คือ

$$\text{Line Connect (LC)} = -3.8 \times 10^7 + 0.709 \times \text{POP}$$

Excluded Variables^b

Model		Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics
						Tolerance
1	GDP	-.033 ^a	-.243	.814	-.081	.312

a. Predictors in the Model: (Constant), POP

b. Dependent Variable: LC

ตารางนี้จะเห็นได้ว่าค่า GDP นั้นมีความน่าจะเป็น 0.814 ซึ่งมากกว่าค่า $\alpha = 0.05$ ตัวแปรนี้ไม่สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์

จ.3 การหาความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานกับโทรศัพท์เคลื่อนที่

ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

Regression

Variables Entered/Removed^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	MOBILE		Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter \leq .050, Probability-of-F-to-remove \geq .100).

a. Dependent Variable: FIX

ความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.878 ^a	.770	.745	627204.37

a. Predictors: (Constant), MOBILE

ความเป็นไปได้ในการพยากรณ์มีความแม่นยำ 77.0%

ANOVA^b

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1.2E+13	1	1.2E+13	30.166	.000 ^a
	Residual	3.5E+12	9	3.9E+11		
	Total	1.5E+13	10			

a. Predictors: (Constant), MOBILE

b. Dependent Variable: FIX

สำหรับตาราง ANOVA เป็นการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ

$H_0: \rho = 0$ ตัวแปรอิสระทุกตัวไม่สามารถนำมาใช้พยากรณ์ได้

$H_1: \rho \neq 0$ ตัวแปรอิสระบางตัวนำมาใช้ในการพยากรณ์ได้

P(ความน่าจะเป็น) ที่ได้จากการคำนวณได้ 0.000 ถ้ากำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$

ดังนั้นค่า P มีค่าน้อยกว่า α จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ยอมรับ H_1 สรุปได้ว่าตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ได้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	4592108	235111.9		19.532	.000
	MOBILE	.215	.039	.878	5.492	.000

a. Dependent Variable: FIX

ดังนั้น สมการความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่เป็นอย่างนี้

$$\text{FIX} = 4592108 + 0.215 * \text{MOBILE}$$

จ. 4 การศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่

ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

Correlations

Correlations

		FIX	MOBILE
Pearson Correlation	FIX	1.000	.878**
	MOBILE	.878**	1.000
Sig. (2-tailed)	FIX	.	.000
	MOBILE	.000	.
N	FIX	11	11
	MOBILE	11	11

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

ผลที่ได้จากการหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานกับโทรศัพท์เคลื่อนที่ในช่วงปี พ.ศ.2535-2546 มีค่าเท่ากับ 0.878 ซึ่งมีค่าเป็นบวก และมีค่าใกล้ 1 สามารถแปลผลได้ว่า ปริมาณความต้องการใช้โทรศัพท์พื้นฐานกับโทรศัพท์เคลื่อนที่ที่มีความสัมพันธ์กันสูงและไปในทิศทางเดียวกัน ข้อมูลที่นำมาใช้วิเคราะห์ ประกอบด้วย fix คือ ปริมาณเลขหมายโทรศัพท์พื้นฐาน และ Mobile คือ ปริมาณเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่

year	mobile	fix
2535	164637	3429000
2536	289939	4117133
2537	764849	4381489
2538	1253716	4614739
2539	1716719	5187337
2540	1973600	5467696
2541	1897643	5606933
2542	2356523	5655354
2543	3473913	5968145
2544	8012759	6621748
2545	17434294	7903485

แหล่งที่มาข้อมูล โทรศัพท์เคลื่อนที่ (mobile) และ โทรศัพท์พื้นฐาน (fix) ได้มาจากส่วนวางแผน
โครงข่าย บ.ทีโอที จำกัด (มหาชน)

ภาคผนวก ง
ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

C. Wongsuwan et. al. "Demand Forecasting on Telephone Usage Based on Kalman Filtering." IEEE ICICS 2005. 6-9 December 2005, Bangkok. Thailand.

C o n f e r e n c e G u i d e

2005 Fifth International Conference on
Information, Communications and Signal Processing

ICICS 2005

6-9 December 2005, Bangkok, Thailand

Co-Organised by :
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (Thailand)
Nanyang Technological University (Singapore)



**NANYANG
TECHNOLOGICAL
UNIVERSITY**

Technical Co-Sponsors :

IEEE

Demand Forecasting on Telephone Usage Based on Kalman Filtering

Chairat Wongsuwan, Jeerasuda Koseeyaporn, and Paramote Wardkein
Telecommunication Department, Faculty of Engineering,
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Ladkrabang, Bangkok, THAILAND 10520
E-mail: jeerasuda@telecom.kmitl.ac.th, pramote@telecom.kmitl.ac.th

Abstract—This paper presents a method of demand forecasting on telephone usage which is based on Kalman filtering. The Kalman filter is a method that provides an efficient computational solution in least square sense. It is thus received much attention for estimation purpose. In order to visualize the efficiency of the proposed technique, it is used to predict the telephone usage demand of Thailand nationwide and only in Bangkok. The data employed in the forecasting process are the former forecasted demand and the number of population during 1954 – 2003 (for Bangkok area) and 1991 – 2010 (for nationwide). The result of this method is compared with that of statistical analysis method. It is found that the proposed technique is superior to statistical methods. Furthermore, it employs a simple mathematical process with less computational consumption.

Index Terms—Kalman filtering, signal estimation, prediction.

I. INTRODUCTION

SIGNAL modeling is an attractive topic and plays an important role in many fields such as analyzing in stock market, forecasting water level in dam, forecasting car sales volume, weather forecasting or even in telephone usage demand. In many applications, it is preferable to select the model parameters so as to minimize a sum of error magnitude criterion. Unfortunately, there does not exist a closed form solution for minimize error in this sense. In the mean time, another criterion is based on minimize a sum of squared error criterion. This technique often leads to satisfactory results and has a closed form solution to the interested problem. Therefore, least squared error (LSE) modeling has been widely used in various of data analysis problem.

Kalman filtering is one of well-known techniques, which is based on least squared error minimization. Basically, Kalman filtering behaves as a tool to analyze and solve the problem of estimation that has either one or more unknown variables at a time. It can be applied for filtering problem, smoothing and also for prediction [1]. Therefore, it is widely applied in many fields [2]-[5]. In [6], the forecasting structural time series models and the Kalman filter were written. It is thus initiating the idea to apply the concept of the Kalman filtering for forecasting in telephone usage demand in this work.

Recently, some works had been done on telephone usage demand forecasting [7]-[9]. However, these works were based on complicated concepts and employed enormous

volume of data and many factors to obtain the most accurate result. It is noted that [7] and [8] forecasted telephone usage demand in Bangkok area. However, a method had been done in [7] to recovery some missing raw data used in the process. For [9], it employed to predict oversea telephone usage demand. Basically, [7]-[9] were done by using raw data to model the regression equation. It can be said that these methods were based on using statistical analysis and were considered to be heuristic methods. Namely, various regression models had been examined where the model providing the most accurate result was selected. The process of these works thus were time consumption. In addition, the model which is suitable for forecasting demand in one area (e.g. Bangkok) may not work well to do so in other area.

In this paper, a new approach for forecasting telephone usage demand is proposed. The process for forecasting of using this method is much simpler than those approaches [7]-[9]. In addition, the computational consumption of this method is quite less. The concept of the proposed technique will be given in section II. Later, the prediction results of forecasting telephone usage demand in Bangkok and nationwide of using the proposed technique compared with linear regression model are given in section III. Finally, the section IV is devoted to the conclusion.

II. PRINCIPLE

A. Linear Regression Model

In this work, a linear regression model is selected to be a method of statistical analysis. Let us define y_k be a predicted telephone usage demand of k^{th} year in which a linear regression model is

$$y_k = a + bx_k \quad (1)$$

where a, b are modeling parameters and x_k is the number of population in k^{th} year. Based on the concept of signal

estimation, the modeling parameters a, b are selected so that least squared error is minimized.

B. Proposed technique

Since Kalman had published his famous paper describing a recursive solution to the discrete-data linear filtering problem [10], the Kalman filter has been extensively used in many applications. A good overview on an introduction to the Kalman filter can be found in [11] in which the Kalman filtering concept will be briefly given as follows. In the Kalman filtering, the general problem of estimating the state $x \in R^n$ of a discrete-time controlled process is governed by the following equation

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_{k-1} \quad (2)$$

where A is transition matrix of prediction system, B is matrix of optional control input, u_k and w_k represent the state input and process noise, respectively.

In addition, a measurement $z \in R^m$ of the state is

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (3)$$

where H is transition matrix of measurement system and v_k is the measurement noise.

By employing a form of feedback control, the Kalman filter estimates the process state at some time and then obtains feedback in the form of measurements. With this in mind, the Kalman filtering equations are classified into two groups

1. time update equations (prediction)

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (4)$$

$$\bar{P}_k = AP_{k-1}A^T + Q \quad (5)$$

where \hat{x}_k is priori estimate of the state, \bar{P} is priori estimate error covariance, and Q is process noise variance.

2. measurement update equations (correction)

$$K_k = \bar{P}_k H^T (H\bar{P}_k H^T + R)^{-1} \quad (6)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - H\hat{x}_k) \quad (7)$$

$$P_k = (I - K_k H)\bar{P}_k \quad (8)$$

where K_k is Kalman gain, \hat{x}_k is posteriori estimate of the state, and P_k is posteriori estimate error covariance.

Based on the general Kalman filtering equations, they are therefore applied for a problem of forecasting telephone usage

demand. In this work, the parameters A , B , and H are set to be one whereas the process has no input (u_k is zero). Hence, the general Kalman filtering equations (2)-(8) are respectively simplified to be

$$x_k = x_{k-1} + w_{k-1} \quad (9)$$

$$z_k = x_k + v_k \quad (10)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} \quad (11)$$

$$\bar{P}_k = P_{k-1} + Q \quad (12)$$

$$K_k = \frac{\bar{P}_k}{(\bar{P}_k + R)} \quad (13)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - \hat{x}_k) \quad (14)$$

$$P_k = (1 - K_k)\bar{P}_k. \quad (15)$$

In this case, z_k shown in (10) is composed of the prediction value of actual telephone usage demand x_k and the measurement noise v_k . This described method will be implemented by using MATLAB in the next section.

Additionally, the Kalman filtering technique is applied with regression method mentioned in previous subsection. Basically, by using a regression model, the number of population in each year is required in the prediction process. This information is difficult to be accurately obtained. Therefore, the Kalman filtering is instead applied to predict the number of population. In summary, there are three approaches to be compared the prediction results in this paper which are

- (1) Regression method
- (2) Regression based Kalman filtering
- (3) Kalman filtering technique

Therewith these techniques, they will be implemented by MATLAB program, which the results are illustrated in the following section.

III. PREDICTION RESULTS

To visualize the forecasting results, these three methods are implemented by using MATLAB program. Raw data (actual demand, number of population) obtained from nationwide during 1991 – 2010 are employed in the forecasting process. It is noted that, however, raw data during 2004 – 2010 are the expected number given by the Office of the National Economic and Social Development Board (NESDB) of Thailand. With the actual data during 1991- 2003 [12], they were employed to examine the prediction efficiency of the three techniques. The prediction results are illustrated in Fig. 1. It is seen that method(3) is outperformed comparing to method(1) and method(2). The comparison of forecasting

error among these methods are shown in Fig. 2. and also in Table I. where the amount of error is calculated by

$$\% error = 100 \times \left(\frac{|actual\ demand - forecasting\ demand|}{actual\ demand} \right) \tag{16}$$

In addition, forecast telephone usage demand in Bangkok area is also implemented. However, due to the difficulty to obtain number of population in some years during 1954 – 2003, the result of using method(1) and method(2) therefore cannot be provided, only method(3) will be examined. The comparison prediction results and corresponding prediction error between actual demand and forecasting demand obtained by method (3) are depicted in Fig. 4. and 5., respectively.

IV. CONCLUSION

In this paper, a new technique, which is based on Kalman filtering, for forecasting telephone usage demand is presented. The proposed technique is found to be a simple procedure. Contrarily to a regression method, enormous raw data are not necessary for the proposed approach to predict the demand. In addition, it is less consumption in computational time. Based on raw data from year 1991 – 2002, the prediction results of using regression technique and proposed approach are compared. With the obtained results, it is found that a proposed method based on Kalman filter is superior to the linear regression technique. The proposed approach thus provides an alternative and efficient tool for forecasting telephone usage demand.

Comparison of Percentage of Nationwide Forecasting Error (1992 - 2003)

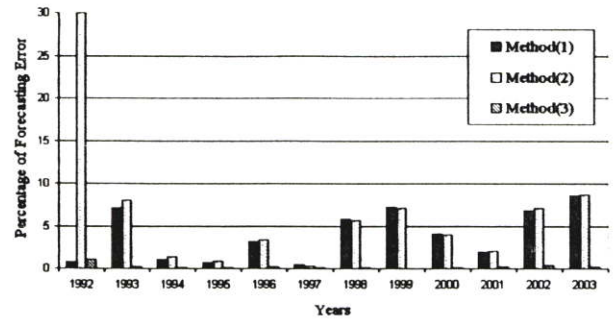


Fig. 2. Comparison of percentage of nationwide forecasting error during 1992 – 2003.

Comparison of Nationwide Telephone Usage Demand Forecasting (2004 - 2010)

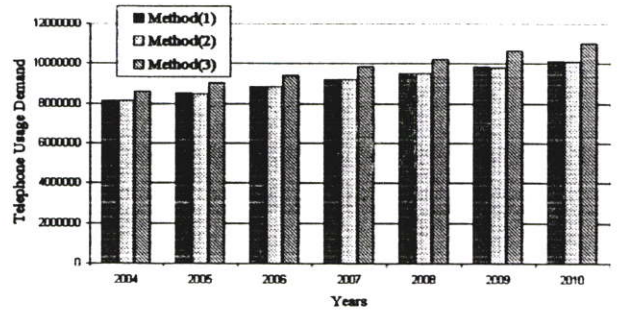


Fig. 3. Comparison of nationwide telephone usage demand forecasting during 2004 – 2010.

Comparison of Nationwide Telephone Usage Demand Forecasting (1992 - 2003)

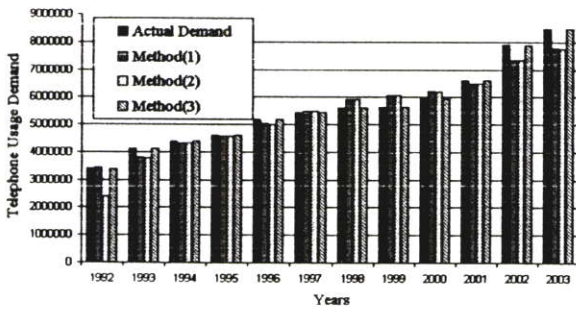


Fig. 1. Comparison of nationwide telephone usage demand forecasting during 1992 – 2003.

Table I. Comparison of percentage of nationwide forecasting error

Year	Method(1)	Method(2)	Method(3)
1992	0.75	29.95	1.11
1993	7.13	8.03	0.20
1994	1.05	1.38	0.06
1995	0.73	0.88	0.06
1996	3.16	3.39	0.24
1997	0.50	0.26	0.10
1998	5.82	5.61	0.07
1999	7.24	7.17	0.02
2000	4.07	4.01	0.10
2001	1.97	2.08	0.21
2002	6.82	7.12	0.36
2003	8.57	8.70	0.17

REFERENCES

- [1] R.G. Brown and P. Y.C. Hwang, Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1983, pp. 175-178.
- [2] B. Sridhar, P. Smith, R.E. Suorsa, and B. Hussien, "Multirate and event-driven Kalman filters for helicopter flight", *IEEE Mag. Control Systems*, vol.13, 4, Aug. 1993, pp. 26-33.
- [3] S.-S. Xiong and Z.-Y. Zhou, "Neural filtering of colored noise based on Kalman filter structure", *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, vol.52, 3, June 2003, pp. 742-747.
- [4] W. Du and P. Driessen, "Speech enhancement based on Kalman filtering and EM algorithm", *IEEE Conf. Communications, Computers and Signal Processing*, May 1991, pp. 142-145.
- [5] M. Efe, D.P. Atherton, and J.A. Bather, "Adaptive Kalman filters for manoeuvring target tracking", *IEE Colloquium Target Tracking and Data Fusion*, June 1998, pp. 4/1-4/7.
- [6] A.C. Harvey, *Forecasting structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Great Britain, 1990.
- [7] V. Tribamrungsak, *Forecasting using regression on polynomial line with lost value variable*, Master thesis, Chulalongkorn University, 1995.
- [8] P. Pathumrat, *Prediction of telephone usage volume in Bangkok*, Master thesis, Faculty of Economics, Kasetsart University, 1994.
- [9] S. Kladnim, *Prediction of oversea telephone usage*, Master thesis, Faculty of Economics, Kasetsart University, 1998.
- [10] R.E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems", *ASME Trans. Basic Engineering*, March 1960, pp. 35-45.
- [11] G. Welch and G. Bishop, *An introduction to the Kalman filter*, TR 95-041, Department of Computer Science, UNC-Chapel Hill, March 2002.
- [12] The International Telegraph and Telephone Consultative Committee, *Telephone Network and ISDN Recommendation E.401-E.880*, 1989.

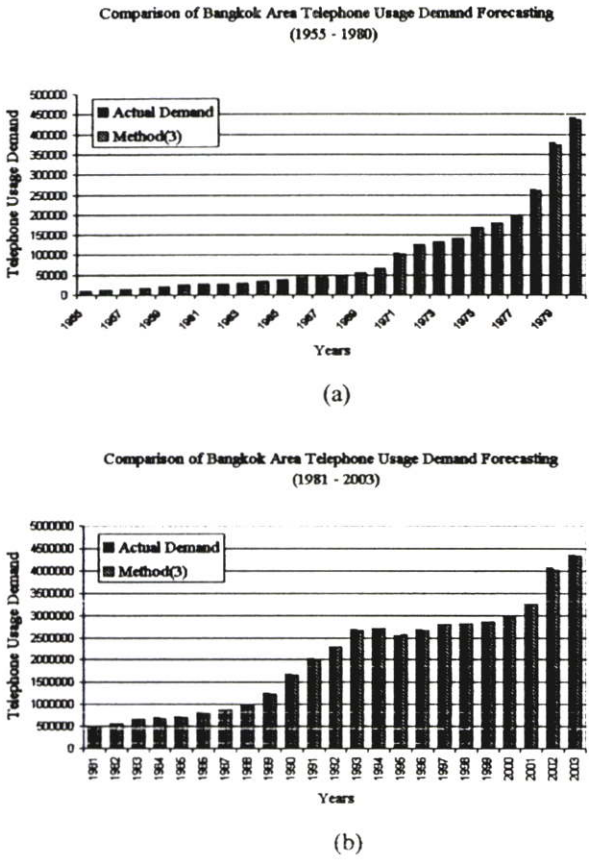


Fig. 4. Comparison of Bangkok area telephone usage demand (a) during 1955 – 1980 (b) during 1981-2003

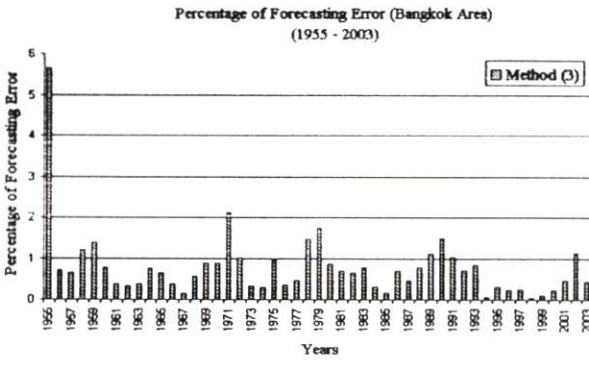


Fig. 5. Percentage of forecasting error (Bangkok area) during 1955 – 2003.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายชัยรัตน์	วงษ์สุวรรณ
วัน เดือน ปีเกิด	25	ธันวาคม 2506
ที่อยู่	99/111 ซอย 11 หมู่บ้านชนาสิริ	ถ.รัตนธิเบศร์ ต.บางรักใหญ่ อ. บางบัวทอง จ.นนทบุรี 10500 โทร 0-1825-9121
ประวัติการศึกษา	2527	วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก
	2538	พัฒนบริหารศาสตรมหาบัณฑิต สาขาสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
ประสบการณ์การทำงาน	พ.ศ. 2528-2534	อาจารย์โรงเรียนเซนต์โยเซฟ นครสวรรค์
	พ.ศ. 2534-2535	นักวิทยาศาสตร์การแพทย์ กรมวิทยาศาสตร์การแพทย์ กระทรวงสาธารณสุข
	พ.ศ. 2535-ปัจจุบัน	นักบริหารงาน บ. ทีไอที จำกัด (มหาชน)