

การศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริก

THE STUDY OF ISOPERIMETRIC PROBLEM

หทัยกาญจน์ แสนพาน
HATAIKHAN SANPAN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2549

ISBN 974-15-2158-8

การศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริก

THE STUDY OF ISOPERIMETRIC PROBLEM



หทัยกาญจน์ แสนพาน
HATAIKHAN SANPAN

หมู่.....
ทะเบียน..... 63404
เดือน,ปี..... 28 ส.ค. 2549



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2549

ISBN 974-15-2158-8

THE STUDY OF ISOPERIMETRIC PROBLEM

HATAIKHAN SANPAN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF THECHNOLOGY LADKRABANG

2006

ISBN 974-15-2158-8

COPYRIGHT 2006

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABAN

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลเฉลยของปัญหาไอโซเพอริเมตริก
นักศึกษา	นางสาวหทัยกาญจน์ แสนพาน
รหัสประจำตัว	46063703
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2549
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ภักทินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก ซึ่งคือการหาพื้นที่ที่มากที่สุดเมื่อกำหนดความยาวของเส้นกราฟที่ล้อมรอบบริเวณมาให้ โดยศึกษาการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบด้วยวิธีที่แตกต่างกัน การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกที่กำหนดเงื่อนไขพร้อมทั้งแสดงโปรแกรมการคำนวณที่สอดคล้องกับการพิสูจน์ และศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกบน \mathbb{R}^3 ใน สองระนาบ

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาที่มีคุณค่าต่องานวิจัยนี้ จาก รศ.ภคินี ชิตสกุล อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โปธิ์สุข, ผศ.พัชรินทร์ เหมโชติ และ รศ.ดร.ปรีชา ยูพาพิณ กรรมการสอบหัวข้อและโครงร่างวิทยานิพนธ์ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำตลอดจนข้อชี้แนะ จนในที่สุดทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้

ขอขอบคุณ บัณฑิตวิทยาลัยสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้ทุนสนับสนุนการทำวิทยานิพนธ์

ขอขอบคุณ บิดา-มารดา ผู้ให้กำเนิด ให้กำลังใจ และสนับสนุนทางการศึกษามาตลอด

ขอขอบคุณ พี่ ๆ และสมาชิกทุกคนในครอบครัว สำหรับคำปรึกษาและให้ความช่วยเหลือในทุกๆด้าน ตลอดจนกำลังใจที่ดีแก่ผู้วิจัย

ขอขอบคุณ อาจารย์ที่เคารพทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ และถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้กับผู้วิจัย

ขอขอบคุณ เพื่อน ๆ นักศึกษาทุกคนที่ให้คำแนะนำต่างๆ และให้กำลังใจต่อผู้วิจัยอย่างใกล้ชิดเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

หทัยกาญจน์ แสนพาน

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญรูป.....	VI
สารบัญตาราง.....	IX
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญ และที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	4
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	4
1.4 ขั้นตอนการวิจัย.....	4
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.1 ความรู้พื้นฐาน.....	6
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	9
บทที่ 3 วิธีดำเนินงานวิจัย.....	29
3.1 วิธีการวิจัย.....	29
3.2 ขั้นตอนการวิจัย.....	29
3.3 ตารางและแผนการดำเนินงานวิจัย.....	34
บทที่ 4 ผลของงานวิจัย.....	35
4.1 พิสูจน์ปัญหาที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอร์เมตริกโดยกำหนดเงื่อนไข.....	35
4.2 กำหนดเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าผลเฉลยโดยการเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์.....	42
4.3 การเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวในสองระนาบ ของรูปทรงต่างๆเมื่อกำหนดค่าไอโซเพอร์เมตริกโคเมน และปริมาตรเต็ม.....	46

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
4.4 ตัวอย่างปัญหาในชีวิตประจำวันที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก.....	67
บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	68
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	68
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	72
เอกสารอ้างอิง.....	73
ภาคผนวก ก.....	74
ภาคผนวก ข.....	77
ประวัติผู้เขียน.....	108

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 แสดงโดเมน Ω' ซึ่งไม่เป็นคอนเวกซ์.....	12
2.2 แสดงการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด A และจุด B ซึ่งทำให้ Ω' เปลี่ยนเป็น คอนเวกซ์โดเมน Ω	13
2.3 แสดงเส้นโค้งปิดและวงกลมที่อยู่ระหว่างเส้นขนาน.....	14
2.4 แสดงรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ.....	20
4.1 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 1 จุด.....	37
4.2 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 2 จุด อยู่บนวงกลม 1 วง.....	38
4.3 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 2 จุด อยู่บนวงกลม 2 วง.....	38
4.4 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 3 จุด.....	40
4.5 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 3 จุด.....	41
4.6 แสดงหน้าแรกของโปรแกรม.....	42
4.7 แสดงหน้าจอเมื่อเลือก 1 จุด.....	43
4.8 แสดงหน้าจอเมื่อเลือก 2 จุด.....	43
4.9 แสดงหน้าจอเมื่อเลือก 3 จุด.....	44
4.10 แสดงตัวอย่างหน้าจอแสดงผลเมื่อกำหนดจุด 1 จุด และเส้นรอบรูป.....	44
4.11 แสดงตัวอย่างหน้าจอแสดงผลเมื่อกำหนดจุด 2 จุด และเส้นรอบรูป.....	45
4.12 แสดงตัวอย่างหน้าจอแสดงผลเมื่อกำหนดจุด 3 จุด และเส้นรอบรูป.....	45
4.13 แสดงรูปทรงใดๆ ใน \mathbb{R}^3	46
4.14 ลักษณะการตัดรูปทรงต่างๆ ด้วยระนาบ z_1 และ z_2 โดยที่จุดศูนย์กลางแต่ละรูปทรงอยู่ที่ $z = 0$ 48	
4.15 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็ม ของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -0.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน.....	49
4.16 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็ม ของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 0.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน.....	49
4.17 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็ม ของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -0.75$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน.....	50
4.18 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็ม ของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 0.75$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน.....	50

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
ข.22 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.30 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย..97	
ข.23 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.31 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย..98	
ข.24 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.32 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย..99	
ข.25 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.33 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย 100	
ข.26 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.32 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย 101	
ข.27 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.33 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย 102	
ข.28 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.34 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย 103	
ข.29 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.35 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย 104	
ข.30 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.36 เมื่อปริมาตรเต็ม 100 หน่วย 105	
ข.31 แสดงความสูงที่อัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิวที่มากที่สุดเปลี่ยนจาก ทรงกระบอก เป็นทรงกลม เมื่อปริมาตรเต็มเป็น 100 หน่วย และ รัศมี 2.879025694 หน่วย.....106	
ข.32 แสดงความสูงที่อัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิวที่มากที่สุด เปลี่ยนจาก ทรงกลม พารา โบลอยด์ และกรวย ตามลำดับ เมื่อปริมาตรเต็มเป็น 100 หน่วย และรัศมี 2.879025694 หน่วย..107	

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

สำหรับปัญหาคณิตศาสตร์ทางด้านเรขาคณิตที่เกี่ยวกับเส้นโค้งปิดและพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปิด ในชีวิตประจำวันเราได้พบเห็นมากมาย ยกตัวอย่างเช่น หากเรามีพื้นที่ 1 ไร่ ต้องการที่จะล้อมรั้ว เราจะต้องล้อมรั้วเป็นรูปแบบใดจึงจะใช้อุปกรณ์ในการล้อมรั้วน้อยที่สุด หรือถ้ามีเส้นเชือกอยู่หนึ่งเส้นที่มีความยาวจำกัดจะสามารถล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดเท่าใด เป็นต้น ซึ่งปัญหาที่มีลักษณะเช่นนี้ในทางคณิตศาสตร์ เรียกว่า ปัญหาความไม่เท่ากันของเส้นรอบรูป หรือ ปัญหาไอโซ-เพอริเมตริก (Isoperimetric Problem)

ปัญหาไอโซเพอริเมตริก (Isoperimetric Problem) เกิดขึ้นในสมัยกรีกโบราณ [1] ทำให้ชื่อของปัญหานี้มาจากคำในภาษากรีกโบราณ 3 คำ ดังนี้

isos มีความหมายว่า เหมือนกัน , เท่ากัน (same)

peri มีความหมายว่า รอบ ๆ , ในบริเวณ (around)

และ metron มีความหมายว่า วัด , หาค่า (measure)

โดยที่ perimeter มาจาก “peri” + “metron” ซึ่งหมายถึง ความยาวโค้งระหว่างขอบเขตของบริเวณปิดล้อม

โดยปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบนี้ ได้กล่าวถึง ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นโค้งปิด (เส้นรอบรูปหรือเส้นรอบวง) บนระนาบ กับพื้นที่ซึ่งถ้ากำหนดความยาวเส้นโค้งปิดใดๆ บนระนาบหนึ่งเส้น เส้นโค้งปิดนั้นจะเป็นรูปใดที่ทำให้ภายในเส้นโค้งปิดมีพื้นที่ที่มากที่สุด (หรืออาจกล่าวได้ว่า ถ้ากำหนดพื้นที่ขึ้นมา เราสามารถหาความยาวที่น้อยที่สุดของเส้นโค้งปิด บนพื้นที่ที่ปิดล้อมพื้นที่ที่กำหนดให้ได้)

1.1.1 ประวัติของปัญหาไอโซเพอริเมตริก

ปัญหาไอโซเพอริเมตริกเป็นที่รู้จักเมื่อ 900 ปีก่อนคริสตกาล การประยุกต์ใช้ของปัญหานี้ ได้ถูกค้นพบในนวนิยายเกี่ยวกับการผจญภัย และความกล้าหาญของเจ้าหญิง Dido และการก่อตั้งเมือง Carthage ซึ่งประพันธ์โดย Aeneid [1]

เจ้าหญิง Dido เธอมีทักษะด้านการบริหารธุรกิจ และความสามารถทางคณิตศาสตร์มาก[2] เธอมีสามีชื่อ Sichaeus ซึ่งเป็นผู้ที่มีฐานะมั่งคั่ง ร่ำรวยมาก พี่ชายของเจ้าหญิง Dido ที่ชื่อ Pygmalion ซึ่งเป็นเจ้าชายแห่งเมือง Tyre ตั้งอยู่ในราชอาณาจักร Phoenicia (เป็นอาณาจักรโบราณ

ในแถบทะเลเมดิเตอร์เรเนียน ในปัจจุบันนี้รู้จักในชื่อของ ซีเรีย เลบานอน และอิสราเอล โดย Tyre (คือ เลบานอน) Pygmalion พยายามจะครอบครองสมบัติของ Sichaecus และหมายจะเอาชีวิตของเธอ โดยสังหารชีวิตของ Sichaecus ด้วยเหตุนี้เจ้าหญิง Dido และหมู่คณะชาว Tyrians จำนวนหนึ่ง ได้รวบรวมของที่มีค่าแล้วจึงหนีออกนอกประเทศโดยทางเรือ และได้มาขึ้นฝั่ง ทางด้านทะเลของแอฟริกาเหนือ หลังจากขึ้นฝั่งแล้วเจ้าหญิง Dido ต้องการจะสร้างอาณาจักรเป็นของตนเอง จึงขอซื้อที่ดินจำนวนมากจากผู้นำท้องถิ่นชื่อ นาย King Jambas โดยเขาได้เสนอขายที่ดินให้เจ้าหญิง Dido โดยให้ที่ดินขนาดหนึ่งหัว 1 ตัว แต่ด้วยความฉลาดของเจ้าหญิง Dido เธอจึงสั่งผู้ติดตามให้ลอกหนังวัวออกเป็นแผ่นบางๆ แล้วตัดเป็นเส้นยาวๆ เล็กๆ และผูกเส้นต่อกันแล้ววางตามพื้นดินเพื่อให้ครอบคลุมพื้นที่ให้มากที่สุด ซึ่งเจ้าหญิง Dido ได้ลองอยู่หลายวิธีทั้งการวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมผืนผ้าจนในที่สุดก็พบว่าต้องวางเป็นรูปครึ่งวงกลมจึงจะมีพื้นที่ที่ใหญ่ที่สุด โดยให้ชายฝั่งทะเลเมดิเตอร์เรเนียนเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ซึ่งเป็นผลให้พื้นที่ที่ภายในบริเวณที่ล้อมรอบด้วยหนังวัวมีเนื้อที่มากกว่าแอฟริกา ด้วยเหตุนี้จึงทำให้เกิดเมือง Carthage (เป็นประเทศในแอฟริกาเหนือ สมัยโบราณ ถูกทำลายโดยทหารโรมัน โดยปัจจุบันนี้รู้จักกันในชื่อ Tunisia)

เจ้าหญิง Dido นับว่าเป็นเจ้าของบทเรียนทางคณิตศาสตร์ ที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิต (Geometric) เธอเป็นผู้ค้นพบปัญหาไอโซเพริเมตริก จากการใช้คณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้กับชีวิตจริง โดยเริ่มจากความคิดที่ว่า จะทำอย่างไรจึงจะได้ประโยชน์สูงสุดจากการกระทำของเธอ ซึ่งเธอได้กำหนดปัญหาขึ้นดังนี้ “ ถ้าใช้เชือกโค้งเป็นวงโดยกำหนดความยาวของเส้นเชือก แล้วพื้นที่ที่ถูกล้อมโดยเส้นเชือกที่กำหนดนั้นมีพื้นที่ที่ใหญ่ที่สุดเป็นเท่าใด และจะมีรูปร่างลักษณะอย่างไร ”

ชาวกรีกรู้ว่า วงกลมเป็นคำตอบของปัญหาไอโซเพริเมตริก ในความจริงบ่อยครั้งที่อ้างอิงตามสมบัติ ไอโซเพริเมตริกของวงกลม แต่อย่างไรก็ตาม ชาวกรีกในสมัยนั้น ยังไม่สามารถพิสูจน์ปัญหาไอโซเพริเมตริกของวงกลมที่สมบูรณ์และถูกต้องได้

1.1.2 วิวัฒนาการในการพัฒนาการพิสูจน์เกี่ยวกับปัญหาไอโซเพริเมตริก

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ สาขาเรขาคณิต (Geometric) นั้นจะศึกษาในทุกระดับชั้น นับตั้งแต่ระดับประถมศึกษาจนกระทั่งระดับปริญญาเอก (เฉพาะ ทาง)ซึ่งในแต่ละชั้นก็จะศึกษาในรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป โดยในระดับชั้นต้นๆ นั้นจะเน้นการนำเสนอตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจน พบเห็นในชีวิตประจำวัน แต่ในระดับที่สูงขึ้นนั้นมีความจำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงการพิสูจน์ที่หลากหลายและที่มาของปัญหา เพื่อให้เข้าใจในวิวัฒนาการทางด้านแนวคิดหรือแนวทางต่างๆ ที่ได้มาซึ่งการพิสูจน์ของปัญหา

ปัญหาไอโซเพริเมตริก เป็นกลุ่มของปัญหาสำหรับวิชา แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of variation) ซึ่งสร้างสรรค์โดยให้หาพื้นที่ที่ใหญ่ที่สุด เมื่อกำหนดฟังก์ชันความยาวของเส้นโค้งบนปริภูมิใดๆ

เนื่องจากในปัจจุบันนี้การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกได้ถูกค้นพบหลายแบบโดยแต่ละแบบก็ใช้วิธีในการพิสูจน์ที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งส่วนมากจะนิยมการพิสูจน์โดยใช้หลักวิชาแคลคูลัสเพราะค่อนข้างสั้นและง่ายต่อการพิสูจน์ โดยการพิสูจน์แบบแรกที่มีความถูกต้องและความสมบูรณ์นั้น ได้พิสูจน์ไว้โดย Weierstrass และ F.Edler [2] ซึ่งได้พิสูจน์โดยใช้หลักวิชาการวิเคราะห์ (analysis) และแคลคูลัส (calculus)

ประวัติของการพิสูจน์เรขาคณิตบริสุทธิ์ จากที่เราทราบกันแล้วว่าปัญหาไอโซเพอริเมตริกเกิดมาจาก ชาว กรีกสมัยโบราณ ซึ่งในการพิสูจน์ปัญหาในยุคแรกๆ นั้น Pappus ได้บันทึกไว้ในศตวรรษที่ 4 ปีกristศักราช เขาใช้ความเชื่อเฉพาะบุคคล ซึ่งเป็นเหตุเป็นผลแสดงการหาคำตอบของปัญหาไอโซเพอริเมตริก จนมาถึงสมัยของ Zenodorus ซึ่งเขาอยู่ระหว่างศตวรรษที่ 2 ก่อนคริสตศักราช โดยมาตรฐานสมัยใหม่ การพิสูจน์ของพวกเขาเหล่านั้นเป็นการพิสูจน์ที่ยังไม่สมบูรณ์ Pappus และบุคคลร่วมสมัยเดียวกันพยายามสร้างรูปที่สอดคล้องกับปัญหาโดยวาดส่วนประกอบที่มีความสำคัญต่อการพิสูจน์ แต่การพิสูจน์ของพวกเขาไม่มีการบันทึกไว้ในประวัติศาสตร์เพราะเป็นกรณีที่ยังไม่สมบูรณ์ ซึ่งจากการพิสูจน์โดยใช้การวาดรูปนั้นปรากฏว่ามีพื้นที่ ที่น้อยกว่ารูปตามความเป็นจริงที่เขาพิจารณา ถึงแม้การพิสูจน์ของพวกเขาเหล่านั้นจะไม่สำเร็จแต่นั้นก็เป็นจุดเริ่มต้นของการพิสูจน์ที่ถูกต้อง

ในขณะเดียวกัน Archimedes ก็ได้ศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริก ซึ่งพิสูจน์โดยใช้การพิจารณาแยกเป็นกรณีๆ ไป ซึ่งค่อนข้างมีความคล้ายกับการพิสูจน์ในสมัย Zenodorus ดังนั้นจึงทำให้การพิสูจน์ของ Archimedes สูญหายไป

ต่อมา Steiner ก็ได้ค้นพบความจริงว่า การอ้างเหตุผลของ ชาวกรีกสมัยโบราณยังไม่เพียงพอ เขาใช้เหตุผลที่ดีกว่าในการกำหนดรูปแบบของความไม่เท่ากันโดยแสดงว่ารูปร่างอย่างไรที่ไม่มีขอบเขตเส้นโค้งที่สามารถเปลี่ยนรูปเป็นขอบเขตใหม่ซึ่งมีเส้นรอบรูปเท่ากันและพื้นที่ใหญ่กว่า ในปี 1841 Steiner ได้ตีพิมพ์เป็นหนึ่งในห้าของวิธีการปรับปรุงแก้ไขที่ดิลีซ ซึ่งอยู่ในเรขาคณิตบริสุทธิ์ตามแบบยูคลิด (pure Euclidean geometry) และเขาตรวจสอบตามความถูกต้อง อย่างไรก็ตาม Weierstrass เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงในยุคนั้น มีความคิดที่แตกต่างและพัฒนาคณิตศาสตร์โดยสามารถลดระดับความผิดพลาดวิธีของ Steiner โดยใช้แคลคูลัสขั้นสูง และสาขาอื่นของวิชาคณิตศาสตร์ โดยที่แสดงตามจุดประสงค์ของปัญหาได้อย่างถูกต้อง ซึ่งจริงๆ แล้วการพิสูจน์โดยความเข้าใจคณิตศาสตร์สมัยใหม่ เป็นแนวคิดของ Steiner ที่มีความสำคัญและสนับสนุนความเข้าใจเรขาคณิตแบบยูคลิด แต่การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกแบบเดิมยังไม่สมบูรณ์

กลางปี 1960 ปัญหาของการพิสูจน์ของเรขาคณิตพื้นฐานนั้นมีความสอดคล้องกับงานวิจัยที่มีอยู่แพร่หลาย ซึ่งเราเชื่อกันว่าเป็นปัญหาปลายเปิด Kazarinoff ได้สร้างปัญหาจากประสบการณ์ที่สำคัญที่สุดของเขา คือ “ยังไม่มีใครพบการพิสูจน์เรขาคณิตอย่างง่ายที่จะแสดงว่าวงกลมมีพื้นที่ใหญ่กว่ารูปอื่นเมื่อมีเส้นรอบรูปเท่ากัน”

จากอดีตได้พบการพิสูจน์ที่หลากหลายซึ่งเกี่ยวกับพื้นฐานเรขาคณิต สำหรับตัวอย่าง Yaglom แสดงตัวอย่างโดยการวาดภาพโดยประมาณ แต่ไม่แน่นอนและเข้าใจยาก Benson นำเสนอเหตุผลที่มีความสละสลวย สามารถเข้าใจโดยใช้สัญชาตญาณ จากการปริพันธ์เรขาคณิต(integral geometry) การจัดการเกี่ยวกับพีชคณิตที่จะสร้างทฤษฎีพื้นฐานแต่ต้องมีเหตุผลที่ละเอียด และปัจจุบันนี้การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกมีมากมายหลายแบบที่แตกต่างกัน โดยศึกษาในมิติที่สูงๆ และพื้นผิวที่หลากหลายซึ่งใช้สาขาต่างๆ ของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นประโยชน์ในการใช้งานตามความต้องการของสาขาวิชานั้นๆ

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

สำหรับงานวิจัยนี้ ศึกษาการพิสูจน์ปัญหาความไม่เท่ากันของเส้นรอบวง (Isoperimetric inequality problem) บนระนาบในรูปแบบที่แตกต่างกัน พร้อมทั้งพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกที่กำหนดเงื่อนไข (กำหนดความยาวของเส้นรอบรูปและจุดที่เส้นรอบรูปผ่าน) รวมถึงสร้างโปรแกรมในการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าหาพื้นที่และแสดงรูปที่สอดคล้องกับการพิสูจน์ และยกตัวอย่างการประยุกต์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกใช้ในชีวิตประจำวัน และเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงสามมิติ ในสองระนาบที่กำหนด เมื่อกำหนดไอโซเพอริเมตริกโดเมนและปริมาตรเต็มของแต่ละรูปเท่ากัน

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ และพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกที่กำหนดเงื่อนไข (กำหนดความยาวของเส้นรอบรูปและจุดที่เส้นรอบรูปผ่าน) และสร้างโปรแกรมในการหาการคำนวณหาพื้นที่เมื่อกำหนดเส้นรอบรูปและจุดพิกัดที่เส้นรอบรูปผ่าน โดยศึกษาเฉพาะกรณีที่เป็นวงกลม และศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกในสองระนาบบน \mathbb{R}^3

1.4 ขั้นตอนของการวิจัย

- ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับเรขาคณิตเบื้องต้นและปัญหาไอโซเพอริเมตริก เพื่อเป็นแนวทางในการทำวิจัย
- ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาเอกสาร ทฤษฎีบท และข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการทำวิจัย
- ขั้นตอนที่ 3 รวบรวมการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ

- ขั้นตอนที่ 4 พิสูจน์ปัญหาที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกโดยกำหนดเงื่อนไข
- ขั้นตอนที่ 5 กำหนดเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าผลเฉลยโดยการเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์
- ขั้นตอนที่ 6 เขียนโปรแกรมเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงสามมิติ ในสองระนาบที่กำหนด
- ขั้นตอนที่ 7 ตัวอย่างของปัญหาไอโซเพอริเมตริกที่สอดคล้องกับปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน
- ขั้นตอนที่ 8 สรุปผลการวิจัย
- ขั้นตอนที่ 9 เขียนวิทยานิพนธ์

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ที่ใช้ในการศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริก ซึ่งมีความสำคัญมากในการทำงานวิจัยนี้ โดยในส่วนของความรู้พื้นฐานจะกล่าวถึง บทนิยาม บทตั้ง และ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง ที่ใช้ในการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริก

ในส่วนของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องนั้นจะกล่าวถึงงานวิจัยซึ่งเกี่ยวกับการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกในรูปแบบต่างๆ ที่มีความแตกต่างกัน ซึ่งการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องนั้นเพื่อเป็นแนวทางในการทำงานวิจัย

2.1 ความรู้พื้นฐาน

ความรู้พื้นฐานประกอบด้วย บทนิยาม บทตั้ง ข้อสังเกต และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก ดังนี้

นิยาม 2.1(periodic function) ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า ฟังก์ชันคาบ T ถ้าสำหรับทุก x ซึ่ง $f(x+T) = f(x)$ โดยที่ T เป็นจำนวนบวกที่น้อยที่สุด

นิยาม 2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันขอบค่าจริงบนขอบเขตและช่วงปิด $[a, b]$ ฟังก์ชัน f เรียกว่า ปริพันธ์รีมันด์ (Riemann integrable function) บน $[a, b]$ ถ้า

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

ปริพันธ์รีมันด์ของ f บน $[a, b]$ เป็นค่าสามัญ(common value) และแทนด้วย

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

นิยาม 2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ เรียกว่า การลู่เข้าเอกกรุป (converge uniformly) เข้าสู่ $f(x)$ บน $[a, b]$ ถ้าลำดับของผลบวกย่อย (partial sums) $\{S_n\}$ ลู่เข้าเอกกรุปเข้าสู่ $f(x)$ บน $[a, b]$

นิยาม 2.4 (การลู่ออก) ให้ $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ เป็นสนามเวกเตอร์บน \mathbb{R}^n และมี $\frac{\partial z_i}{\partial x_i}$ สำหรับทุก

$i = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้น การลู่ออกของ z กำหนดเป็นฟังก์ชันค่าคงที่

$$\operatorname{div} z = \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial x_i}$$

การลู่ออกของ z สามารถเขียนสัญลักษณ์เป็นผลคูณจุด (dot product) ของ ∇ และ z :

$$\operatorname{div} z = \nabla \cdot z$$

นิยาม 2.5 (L^p - นอร์ม) ให้ (X, β, μ) เป็นปริภูมิเมเชอร์ L^p - นอร์ม ของฟังก์ชัน $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนด

$$\text{โดย } \|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

ทฤษฎี 2.6 ให้ f แทนฟังก์ชันซึ่ง

(i) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$

(ii) $f(-\pi) = f(\pi)$

(iii) ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้คือ f' ต่อเนื่องเป็นช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

สำหรับ f , ซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นดังนี้

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{และ } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ลู่ออกสัมบูรณ์และลู่ออกอย่างสม่ำเสมอ (converges absolutely and uniformly) สู่ $f(x)$ บนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$

นิยาม 2.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันขอบค่าจริง (a bounded real-valued function) บนช่วงปิดและขอบเขตช่วง

$[a, b]$ ปริพันธ์บนและล่าง ของ f แทนด้วย $\overline{\int_a^b f}$ และ $\underline{\int_a^b f}$ ตามลำดับ กำหนดโดย

$$\overline{\int_a^b f} = \inf \{ U(P, f) : P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a, b] \}$$

$$\int_a^b f = \sup \{ L(P, f) : P \text{ เป็นผลแบ่งกันของ } [a, b] \}$$

บทตั้ง 2.8 สมมติ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ไล่เข้าเอกรูปสู่ฟังก์ชัน $f(x)$ บน $[a, b]$ สมมติ แต่ละ $f_n(x)$ เป็นขอบเขต และปริพันธ์รีมันด์ บน $[a, b]$ ดังนั้น $f(x)$ เป็นขอบเขตและปริพันธ์รีมันด์ บน $[a, b]$ ด้วย และ

$$\int_a^b f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \quad \text{นั่นคือ} \quad \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

ทฤษฎี 2.9 (Cauchy Integral Formula) ให้ Ω เป็นโดเมนกระชับใดๆ ซึ่ง $\partial\Omega$ เป็นการกำหนด ตำแหน่งของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว และให้ f ฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกที่ ทั้งภายในและบน $\partial\Omega$ ดังนั้นสำหรับ จุดใดๆ z_0 ภายใน Ω

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

ทฤษฎี 2.10 (Green's Theorem) ให้ Ω เป็นโดเมนกระชับใดๆ ซึ่ง $\partial\Omega$ เป็นการกำหนดตำแหน่งค่า บวกราบเรียบเป็นช่วง(piecewise smooth), เส้นโค้งปิดเชิงเดียวในระนาบ และให้ Ω มีขอบเขตโดย $\partial\Omega$ ถ้า P และ Q มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบนขอบเขตเปิดที่บรรจุใน Ω ดังนั้น

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

ทฤษฎี 2.11 (Cauchy-Schwarz Inequality) ให้ $x, y \in \mathbb{R}^n$ ดังนั้น Cauchy-Schwarz Inequality คือ

$$|x^T \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

บทตั้ง 2.12 (Young Inequality) ให้ $a, b > 0$ และ $p, q \in (0, \infty)$ ซึ่ง $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ดังนั้น

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

ทฤษฎี 2.13 (Holder Inequality in L^p -Spaces) ถ้าฟังก์ชัน f อยู่ใน $L^p(X)$ ดังนั้น L^p -นอร์ม ของฟังก์ชัน f แทนด้วย $\|f\|_p$ ให้ (X, β, μ) เป็นปริภูมิเมเชอร์ ถ้าฟังก์ชัน f อยู่ใน $L^p(X)$ และ g อยู่ใน $L^q(X)$ ซึ่ง $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ โดยที่ $p, q \geq 1$ ดังนั้น **Holder Inequality** คือ

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

บทตั้ง 2.14 (Wirtinger) ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของระยะคาบ 2π , มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง $f'(t)$

$$\text{ถ้า } \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 \text{ แล้ว } \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt \geq \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$$

โดยเปลี่ยนอสมการเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $f(t) = a \cos t + b \sin t$

ข้อสังเกต 2.15 (Cauchy-Schwarz Integral Inequality)

กรณีพิเศษของ Holder Inequality ใน ปริภูมิ L^p เมื่อ $p=2, q=2$ เป็น Cauchy-Schwarz Integral Inequality ซึ่งเป็น

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

โดยที่ $f(x), g(x) \in L^2$ เป็นสองฟังก์ชันค่าจริงใดๆที่หาปริพันธ์ได้ของช่วง $[a, b]$

สมบัติที่ 2.16 (compact domain) สมมติว่า Ω เป็นโดเมนกระชับใดๆ (compact domain) ดังนั้นพื้นที่ของ Ω เป็น

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 dA$$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก โดยได้รวบรวมการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกไว้จำนวน 7 วิธีที่แตกต่างกัน ดังจะนำเสนอรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีที่ 2.15 (Isoperimetric inequality problem)[1] ถ้า L เป็นความยาวของเส้นโค้งปิด C บนระนาบ และ A เป็นพื้นที่ภายในเส้นโค้งปิด แล้ว

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \quad (2.1)$$

ถ้าเปลี่ยนสมการนี้ให้เป็นสมการจะทำให้ได้ว่าเส้นโค้งปิด C นั้นคือ รูปวงกลม.

การพิสูจน์แบบที่ 1 โดยวิธีของ Jacob Steiner [3]

พิสูจน์ พิจารณา 2 ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $f_j(x), j=1,2$ นิยามบนช่วง $[a, b]$ ใน \mathbb{R} โดยที่ $f_1(x) \leq f_2(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ พิจารณาโดเมน

$$\Omega = \{(x, y) : f_1(x) \leq y \leq f_2(x), a \leq x \leq b\}$$

สมมติ Ω เป็นคอนเวกซ์ ให้โดเมน Ω มีความสัมพันธ์กับ Ω^* เป็นความสัมพันธ์สมมาตรโดยพิจารณาฟังก์ชัน

$$f^*(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \quad (2.2)$$

และให้

$$\Omega^* = \{(x, y) : -f^*(x) \leq y \leq f^*(x), a \leq x \leq b\}$$

แกน x เป็นเส้นสมมาตร และเส้นนี้ผ่านศูนย์กลางของ Ω^*

พื้นที่ $A(\Omega)$ ของโดเมน Ω เป็น

$$A(\Omega) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (2.3)$$

พื้นที่ $A(\Omega^*)$ ของโดเมนสมมาตร Ω เป็น

$$\begin{aligned} A(\Omega^*) &= \int_a^b [f^*(x) - (-f^*(x))] dx \\ &= \int_a^b 2f^*(x) dx \\ &= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

ดังนั้น จากสมการที่ (2.3) และสมการที่ (2.4) จะได้

$$A(\Omega) = A(\Omega^*) \quad (2.5)$$

ความยาว $L(\partial\Omega)$ ขอบของโดเมน Ω เป็น

$$\begin{aligned}
 L(\partial\Omega) &= \int_a^b \sqrt{1+[f_1'(x)]^2} dx + \int_a^b \sqrt{1+[f_2'(x)]^2} dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a) \\
 &= \int_a^b \left(\sqrt{1+[f_1'(x)]^2} + \sqrt{1+[f_2'(x)]^2} \right) dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

ความยาว $L(\partial\Omega^*)$ ขอบของโดเมน Ω^* เป็น

$$\begin{aligned}
 L(\partial\Omega^*) &= \int_a^b \sqrt{1+[-f^*(x)]'}^2 dx + \int_a^b \sqrt{1+[f^*(x)]'}^2 dx + f^*(b) - (-f^*(b)) + f^*(a) - (-f^*(a)) \\
 &= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{-f_2(x)+f_1(x)}{2}\right)'}^2 dx + \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{f_2(x)-f_1(x)}{2}\right)'}^2 dx + 2f^*(b) + 2f^*(a) \\
 &\quad \text{(โดยสมการที่ (2.2))}
 \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{4+[f_2'(x)-f_1'(x)]^2}{4}} dx + \int_a^b \sqrt{\frac{4+[f_2'(x)+f_1'(x)]^2}{4}} dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a)$$

(โดย สมการที่ (2.2))

$$= \int_a^b \sqrt{4+[f_2'(x)-f_1'(x)]^2} dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a) \quad (2.7)$$

ให้ $g(x) = \sqrt{4+[f_2'(x)-f_1'(x)]^2}$
 $h(x) = \sqrt{1+[f_1'(x)]^2} + \sqrt{1+[f_2'(x)]^2}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 [g(x)]^2 &= 4+[f_2'(x)-f_1'(x)]^2 = 4+[f_1'(x)]^2 + [f_2'(x)]^2 - 2f_1'(x)f_2'(x) \\
 [h(x)]^2 &= \left[\sqrt{1+[f_1'(x)]^2} + \sqrt{1+[f_2'(x)]^2} \right]^2 \\
 &= 1+[f_1'(x)]^2 + 1+[f_2'(x)]^2 + 2\sqrt{1+[f_1'(x)]^2}\sqrt{1+[f_2'(x)]^2}
 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = 2 - 2f_1'(x)f_2'(x) - 2\sqrt{1+[f_1'(x)]^2}\sqrt{1+[f_2'(x)]^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[1 - f_1'(x) f_2'(x) - \sqrt{1 + [f_1'(x)]^2} \sqrt{1 + [f_2'(x)]^2} \right] \\
&= 2 \left[(1, -f_1'(x)) \cdot (1, f_2'(x)) - \left| (1, -f_1'(x)) \right| \cdot \left| (1, f_2'(x)) \right| \right] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

โดย ทฤษฎี 2.10 Cauchy- Schwarz Inequality

นั่นคือ $[g(x)]^2 \leq [h(x)]^2$

เนื่องจาก $g(x)$ และ $h(x)$ ไม่เป็นลบ ดังนั้น

$$g(x) \leq h(x)$$

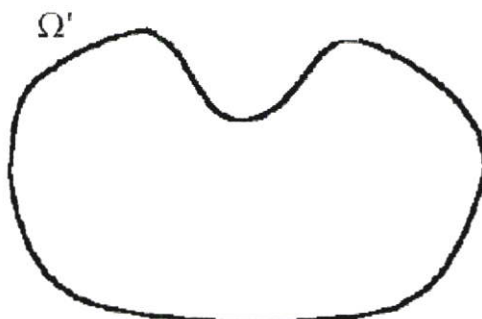
จะได้
$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$$

ความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.6) และ สมการที่ (2.7) จะได้

$$\begin{aligned}
L(\partial\Omega') &= \int_a^b \sqrt{4 + [f_2'(x) - f_1'(x)]^2} dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a) \\
&= \int_a^b g(x) dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a) \\
&\leq \int_a^b h(x) dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a) \\
&= \int_a^b \left(\sqrt{1 + [f_1'(x)]^2} + \sqrt{1 + [f_2'(x)]^2} \right) dx + f_2(b) - f_1(b) + f_2(a) - f_1(a) \\
&= L(\partial\Omega)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

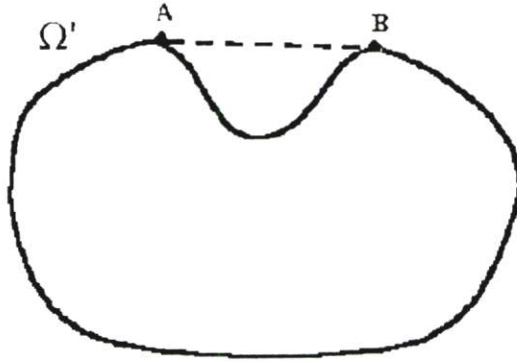
จากสมการที่ (2.5) และสมการที่ (2.8) จะเป็นกรณีของโดเมนไม่คอนเวกซ์ ซึ่งจะมีตัวอย่างดังนี้

ให้พิจารณาโดเมน Ω' ซึ่งไม่เป็นคอนเวกซ์



รูปที่ 2.1 แสดงโดเมน Ω' ซึ่งไม่เป็นคอนเวกซ์

เราสามารถเปลี่ยน Ω' ให้เป็นคอนเวกซ์โดเมน Ω โดยลากเส้นตรงระหว่างจุด A และจุด B ดังแสดง
ในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.2 แสดงการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด A และจุด B ซึ่งทำให้ Ω' เปลี่ยนเป็น
คอนเวกซ์โดเมน Ω

พื้นที่ $A(\Omega')$ ของโดเมน Ω' จะน้อยกว่าพื้นที่ $A(\Omega)$ ของโดเมน Ω ซึ่งจะได้

$$A(\Omega') \leq A(\Omega) = A(\Omega') \quad (2.9)$$

ส่วนความยาว $L(\partial\Omega')$ ขอบของโดเมน Ω' จะยาวกว่าความยาว $L(\partial\Omega)$ ขอบของโดเมน Ω ซึ่งจะได้

$$L(\Omega') \geq L(\partial\Omega) \geq L(\partial\Omega') \quad (2.10)$$

จากสมการที่ (2.5) , (2.8) , (2.9) , (2.10) จะสังเกตเห็นว่าพื้นที่ของโดเมนเพิ่มขึ้นภายใต้
ความสมมาตร และความยาวเส้นโค้งซึ่งเป็นขอบเขตของโดเมนที่สมมาตรจะลดลง หรือจะได้ว่า
ถ้ากำหนดความยาวของเส้นโค้งปิดซึ่งเป็นขอบเขตของโดเมน ความสมมาตรจะเพิ่มพื้นที่ของโดเมนขึ้น

□

การพิสูจน์แบบที่ 2 โดย Hurwitz's [4]

พิสูจน์ ในการพิสูจน์วิธีนี้จะใช้ทฤษฎีของอนุกรมฟูเรียร์ โดยใช้ บทตั้ง 2.14 เข้าช่วยในการพิสูจน์
สมมติ $L = 2\pi$ และ ให้ $(x_1(s), x_2(s))$ เป็นตำแหน่งของเวกเตอร์ของ C และ s เป็นความ
ยาวโค้ง ซึ่ง $\int_0^{2\pi} x_1(s) ds = 0$ โดยความยาวและพื้นที่ ปริพันธ์ได้ดังนี้

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (x_1'^2 + x_2'^2) ds \quad \text{และ} \quad A = \int_0^{2\pi} x_1 x_2' ds$$

จาก 2 สมการนี้จะได้

$$2(\pi - A) = \int_0^{2\pi} (x_1'^2 - x_1^2) ds + \int_0^{2\pi} (x_1 - x_2')^2 ds$$

ปริพันธ์แรกจะมากกว่า หรือเท่ากับ 0 เนื่องจากบทตั้ง 2.14 โดย $f(t) = x_1(s)$ ส่วนปริพันธ์ที่ 2 มากกว่าหรือเท่ากับ 0 นั่นคือ $A \leq \pi$ ซึ่งเป็น isoperimetric inequality

ถ้าเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายเท่ากับเมื่อ

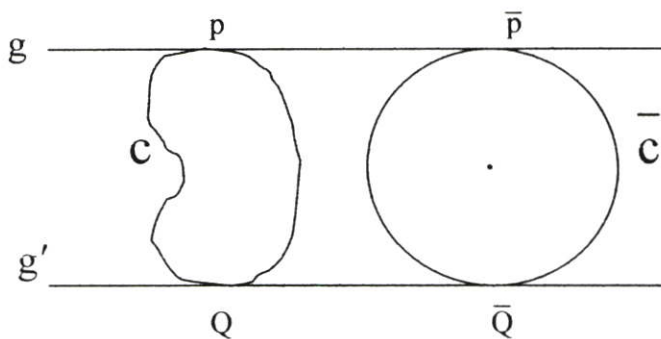
$$x_1 = a \cos s + b \sin s, \quad x_2' = x_1$$

โดยให้ $x_1 = a \cos s + b \sin s, \quad x_2 = a \sin s - b \cos s + c.$

ดังนั้น $x_1^2 + (x_2 - c)^2 = a^2 + b^2$ เส้นโค้ง C เป็นวงกลม

□

การพิสูจน์แบบที่ 3 โดย Schmidt's [5]



รูปที่ 2.3 แสดงเส้นโค้งปิดและวงกลมที่อยู่ระหว่างเส้นขนาน

ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดล้อมบริเวณระหว่างเส้นขนาน g และ g' โดยเส้นโค้ง C สัมผัสเส้นขนาน g และ g' ที่จุด P และ Q ตามลำดับ

ให้ $s = 0$ และ s_0 เป็น พารามิเตอร์(parameters) ของ P และ Q โครงสร้างวงกลม \bar{C} สัมผัส g และ g' ที่ \bar{P} และ \bar{Q} ตามลำดับ แทนรัศมีโดย r และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัด

ให้ $X(s) = (x_1(s), x_2(s))$ เป็นตำแหน่งเวกเตอร์ของ C ดังนั้น $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1(L), x_2(L))$

ตามตำแหน่งเวกเตอร์ของ \bar{C} เรานำเอา $(\bar{x}_1(s), x_2(s))$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(s) &= x_1(s) \\ \bar{x}_2(s) &= -\sqrt{r^2 - x_1^2(s)}, 0 \leq s \leq s_0 \\ &= +\sqrt{r^2 - x_1^2(s)}, s_0 \leq s \leq L \end{aligned}$$

ให้ \bar{A} เป็นพื้นที่ของขอบเขต \bar{C} พื้นที่ที่มีขอบเขตโดยเส้นโค้งปิด สามารถกระจายอินทิกรัล ดังนี้

$$A = \int_0^L x_1 x_2' ds = - \int_0^L x_2 x_1' ds = \frac{1}{2} \int_0^L (x_1 x_2' - x_2 x_1') ds$$

โดยพื้นที่ของ 2 โค้ง C และ \bar{C} เป็น

$$A = \int_0^L x_1 x_2' ds \quad (*)$$

$$\bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^L \bar{x}_2 \bar{x}_1' ds = - \int_0^L \bar{x}_2 x_1' ds \quad (**)$$

ดังนั้น $(*) + (**)$ จะได้

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L (x_1 x_2' - \bar{x}_2 x_1') ds \leq \int_0^L \sqrt{(x_1 x_2' - \bar{x}_2 x_1')^2} ds \\ &\leq \int_0^L \sqrt{(x_1^2 + \bar{x}_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)} ds \\ &= \int_0^L \sqrt{x_1^2 + \bar{x}_2^2} ds \\ &= Lr \end{aligned} \quad (2.11)$$

เนื่องจาก มัชฌิมเรขาคณิต (geometric mean) ของ 2 จำนวนบวกกันน้อยกว่า มัชฌิมเลขคณิต (arithmetic mean)

$$\sqrt{A} \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2} (A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2} Lr$$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้างและหารด้วย r^2 ทั้งสองข้าง จะได้

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \quad (2.12)$$

สมมติว่าสมการที่ (2.12) เป็นเครื่องหมายเท่ากับ ดังนั้น A และ πr^2 มี มัชฌิมเรขาคณิต และ มัชฌิมเลขคณิต ที่เหมือนกัน นั่นคือ $A = \pi r^2$ และ $L = 2\pi r$ ให้ C มีความกว้างที่เท่ากันในทุกทิศทาง ดังนั้นจะได้สมการที่ (2.11)

$$(x_1 x_2' - \bar{x}_2 x_1')^2 = (x_1^2 + \bar{x}_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)$$

ซึ่งให้
$$\frac{x_1}{x_2'} = \frac{-\bar{x}_2}{x_1'} = \frac{\sqrt{x_1^2 + \bar{x}_2^2}}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}} = \pm r$$

ดังนั้นจะได้
$$x_1 = r x_2', \quad \bar{x}_2 = -r x_1'$$

ซึ่งยังคงเป็นจริงเมื่อเปลี่ยน x_1 และ x_2 เป็น $x_2 = r x_1'$ ดังนั้นจะได้ $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ ซึ่ง C คือ วงกลม \square

การพิสูจน์แบบที่ 4 โดยใช้การวิเคราะห์ฟูรีเยร์ (Fourier Analysis) [3]

พิสูจน์ ให้พิจารณา โดเมนเชื่อมต่อโยงเชิงเดียว (a simply-connected domain) Ω ขอบเขตโดยโค้งปิด $\partial\Omega$

กำหนดโดยสมการ $x = x(s), \quad y = y(s)$ ซึ่ง $(0 \leq s \leq L)$

โดยที่ L เป็นความยาวเส้นโค้ง $\partial\Omega$ และ s เป็นพารามิเตอร์ของความยาวส่วนโค้งสำหรับเส้นโค้ง

$\partial\Omega$ เมื่อ $t = \frac{2\pi s}{L}$, จะได้สมการ $x = x(s) = f(t), \quad y = y(s) = g(t)$ ซึ่ง $(0 \leq t \leq 2\pi)$

เมื่อ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ (periodic function, นิยาม 2.1) ของรอบ 2π นั่นคือ $f(0) = f(2\pi)$ และ $g(0) = g(2\pi)$

สมมติฟังก์ชัน $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นช่วงปรับเรียบ (piecewise smooth) บนช่วง $0 \leq x \leq 2\pi$ เราสามารถเขียนสูตรที่พจน์สอดคล้องกับอนุกรม Fourier บนช่วง $0 \leq x \leq 2\pi$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (2.13)$$

$$g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \quad (2.14)$$

ดังนั้น
$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nt + nb_n \cos nt) \quad (2.15)$$

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-nc_n \sin nt + nd_n \cos nt) \quad (2.16)$$

หมายเหตุ $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

โดยที่ s เป็นฟังก์ชัน ความยาวโค้ง ดังนั้น

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (2.17)$$

หมายเหตุ $t = \frac{2\pi s}{L}$ แล้ว $s = \frac{Lt}{2\pi}$

ดังนั้น
$$\frac{ds}{dt} = \frac{L}{2\pi} \quad (2.18)$$

จะได้
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 + (g'(t))^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nt + nb_n \cos nt) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-nc_n \sin nt + nd_n \cos nt) \right]^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[(a_n^2 + c_n^2) \sin^2 nt + (b_n^2 + d_n^2) \cos^2 nt - 2 \sin nt \cos nt (a_n b_n + c_n d_n) \right] dt$$

ปริพันธ์ เป็น uniformly convergent (นิยาม 2.3) บน $[0, 2\pi]$ และแต่ละพจน์ภายในปริพันธ์ เป็นฟังก์ชันปริพันธ์รีมันด์ (นิยาม 2.2) โดยสามารถจัดพจน์ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^{2\pi} \left[(a_n^2 + c_n^2) \left(\frac{1 - \cos 2nt}{2} \right) + (b_n^2 + d_n^2) \left(\frac{1 + \cos 2nt}{2} \right) - \sin 2nt (a_n b_n + c_n d_n) \right] dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[\frac{(a_n^2 + c_n^2)(t - \sin 2nt)}{2 \cdot 2n} + \frac{(b_n^2 + d_n^2)(t + \sin 2nt)}{2 \cdot 2n} + \frac{\cos 2nt}{2n} (a_n b_n + c_n d_n) \right]_0^{2\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) \end{aligned} \tag{2.19}$$

ปริพันธ์ ทั้ง 2 ข้าง ของสมการที่ 2.17 จาก 0 ถึง 2π ได้

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt \tag{2.20}$$

แทนสมการที่ (2.18) และ สมการที่ (2.19) ในสมการที่ (2.20) เป็น

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 dt \\ &= \frac{L^2}{4\pi^2} [t]_0^{2\pi} = \frac{L^2}{2\pi} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้
$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) \tag{2.21}$$

พื้นที่ $A(\Omega)$ ของโดเมน Ω ขอบเขตโค้ง $\partial\Omega$ เป็น

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \int_{\partial\Omega} x dy = \int_0^{2\pi} f(t) g'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-nc_n \sin nt + nd_n \cos nt) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0}{2} (-nc_n \sin nt + nd_n \cos nt) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m,k=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt) (-kc_k \sin kt + kd_k \cos kt) \right] dt \end{aligned}$$

สามารถจัดพจน์ใหม่ดังนี้

$$A(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} (-nc_n \sin nt + nd_n \cos nt) dt$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [(a_m \cos mt)(-kc_k \sin kt) + (b_m \sin mt)(-kc_k \sin kt) \\ + (a_m \cos mt)(kd_k \cos kt) + (b_m \sin mt)(kd_k \cos kt)] dt$$

เนื่องจาก $\{\sin nt, \cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นเซตตั้งฉาก (orthogonal set) บนช่วง $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \cos k_1 t \sin k_2 t dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k_1 t \cos k_2 t dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k_1 t \sin k_2 t dt = 0 \quad \text{สำหรับ } k_1 \neq k_2$$

นั่นคือ $A(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} (-nc_n \sin nt + nd_n \cos nt) dt$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [(a_n \cos nt)(-nc_n \sin nt) + (b_n \sin nt)(-nc_n \sin nt) \\ + (a_n \cos nt)(nd_n \cos nt) + (b_n \sin nt)(nd_n \cos nt)] dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} (-c_n \sin nt + d_n \cos nt) - b_n c_n \frac{(1 - \cos 2nt)}{2} \right. \\ \left. + a_n d_n \frac{(1 + \cos 2nt)}{2} + (-a_n c_n + b_n d_n) \frac{\sin 2nt}{2} \right] dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\frac{a_0}{2} \frac{(c_n \cos nt + d_n \sin nt)}{n} - \frac{b_n c_n}{2} \left(\frac{t - \sin 2nt}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{a_n d_n}{2} \left(t + \frac{\sin 2nt}{2n} \right) + \left(\frac{-a_n c_n + b_n d_n}{2} \right) \frac{(-\cos 2nt)}{2n} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (a_n d_n - b_n c_n) \tag{2.22}$$

โดย สมการที่(2.21) - 4π คูณสมการที่(2.22) จะได้

$$L^2(\partial\Omega) - 4\pi A(\Omega)$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (a_n d_n - b_n c_n)$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2 - 2na_n d_n + 2nb_n c_n)$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 - 2na_n d_n + d_n^2 + n^2 b_n^2 + 2nb_n c_n + c_n^2 + n^2 c_n^2 - c_n^2 + n^2 d_n^2 - d_n^2)$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)c_n^2 + (n^2 - 1)d_n^2]$$

$$L^2(\partial\Omega) - 4\pi A(\Omega) = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2) \right] \quad (2.23)$$

เนื่องจากทั้งสามพจน์ข้างในเครื่องหมาย \sum ของสมการที่ (2.23) ไม่เป็นลบ ดังนั้น

$$L^2(\partial\Omega) - 4\pi A(\Omega) \geq 0,$$

หรือ
$$L^2(\partial\Omega) \geq 4\pi A(\Omega)$$

นั่นคือ
$$A(\Omega) \leq \frac{L^2(\partial\Omega)}{4\pi} \quad (2.24)$$

จากสมการที่ (2.24) ถ้าเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายเท่ากับ ก็ต่อเมื่อ

$$na_n = d_n, c_n = -nb_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.25)$$

และ
$$c_n = d_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.26)$$

จากสมการที่ (2.25) และ สมการที่ (2.26) จะได้ว่า

$$a_1 = d_1, c_1 = -b_1, a_n = b_n = c_n = d_n = 0 \quad \text{เมื่อ } n \geq 2$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.13) และ สมการที่ (2.14) จะได้ว่า

$$x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

และ
$$y = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t$$

นั่นคือ
$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = (a_1 \cos t + b_1 \sin t)^2 + (-b_1 \cos t + a_1 \sin t)^2$$

ดังนั้น
$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

ซึ่งเป็นสมการวงกลมที่จุดศูนย์กลางที่ $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right)$ และรัศมี $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ นี่เป็นการแสดงว่า วงกลมให้

พื้นที่ใหญ่ที่สุดของโดเมน Ω ขอบเขตโค้ง $\partial\Omega$ □

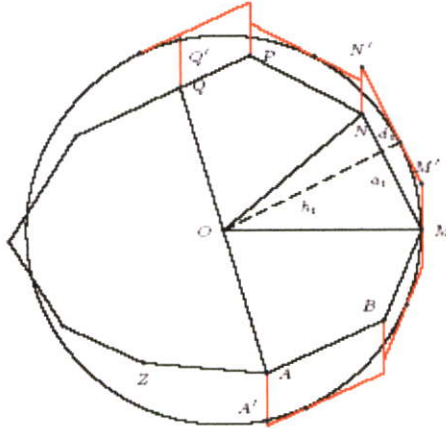
การพิสูจน์แบบที่ 5 โดย Nikolaos Dergiades [6]

สำหรับรูปหลายเหลี่ยมทุกรูปที่มีเส้นรอบรูปยาว L หน่วยและพื้นที่ A ตารางหน่วย แล้ว

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

พิสูจน์ เป็นการพิสูจน์ ความไม่เท่ากัน สำหรับรูปคอนเวกซ์หลายเหลี่ยม $ABM\dots Z$ จากจุด A ของหลายเหลี่ยมเราสามารถวาดเส้น AQ แบ่งรูปหลายเหลี่ยม ออกเป็น 2 ส่วน ซึ่ง

1. $AB+BM+\dots+PQ=\frac{L}{2}$ และ
2. พื้นที่ A_1 ของหลายเหลี่ยม $ABM\dots PQA$ สอดคล้อง $A_1 \geq \frac{A}{2}$ ดังรูป



รูปที่ 2.4 แสดงรูปหลายเหลี่ยมบนระนาบ

ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AQ และให้ M เป็นจุดของ $ABM\dots PQA$ โดยจุด M อยู่ไกลที่สุดจากจุด O (ดังรูป) ให้ $OM = R$ โดยวาดวงกลม (O, R) และจากจุด A และ Q ทลากเส้นตั้งฉากกับเส้น OM โดยแต่ละเส้นที่ตัดกับวงกลมให้เป็นจุด A', Q' ตามลำดับเพราะว่าความสมมาตรของวงกลม

ดังนั้น $AA'MQ'QA$ มีพื้นที่ S เท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่วงกลม นั่นคือ $S = \frac{1}{2} \pi R^2$

ส่วนด้านนอกของหลายเหลี่ยม $ABM\dots PQ$ ให้สร้างสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยด้านที่สร้างให้ขนานนั้นให้สัมผัสกับวงกลม และอีกข้างขนานกับ AA' โดยให้ $MN = a_i$ (ดังรูป) ถ้าให้ h_i เป็นความสูงของสามเหลี่ยม OMN และ d_i เป็นความสูงของสี่เหลี่ยมด้านขนาน $MM'N'N$, ดังนั้น $h_i + d_i = R$, ให้ A_1 เป็นผลรวมของพื้นที่ของสามเหลี่ยม $OAB, \dots, OMN, \dots, OPQ$, นั่นคือ

$$A_1 = \frac{1}{2} \sum_i a_i h_i \quad (2.27)$$

ถ้าเราแทน A_2 ด้วยผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานจะได้

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_i a_i d_i = \sum_i a_i (R - h_i) \\ &= \sum_i a_i R - \sum_i a_i h_i \\ &= R \frac{L}{2} - 2A_1 \end{aligned} \quad (\text{จากข้อ 1 และ สมการที่ (2.27) ตามลำดับ})$$

เนื่องจาก $A_1 + A_2 \geq S$ มี $R \frac{L}{2} - A_1 \geq \frac{1}{2} \pi R^2$

และดังนั้น $\pi R^2 - LR + 2A_1 \leq 0$ ซึ่งสามารถจัดรูปได้ใหม่ดังนี้

$$\pi \left(R - \frac{L}{2\pi} \right)^2 - \left(\frac{L^2}{4\pi} - 2A_1 \right) \leq 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{L^2}{4\pi} - 2A_1 \geq 0$$

สรุปได้ว่า $L^2 \geq 4\pi \cdot 2A_1 \geq 4\pi A$ □

การพิสูจน์แบบที่ 6 โดยใช้ Holder Inequality [3]

พิจารณาโดเมน Ω

$$\int_{\partial\Omega} x \, ds = 0 \quad , \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

โดยที่ S แทนตัวแปรเสริมของส่วนโค้งวงกลม (parameter of arc length), $\partial\Omega$ แทนขอบของโดเมน Ω , และ e_1 ตั้งฉากกับ e_2 โดย $\partial\Omega$ สัมพันธ์กับความยาวโค้ง s ซึ่งแสดงการคำนวณอย่างง่ายได้ดังนี้

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx_1}{ds} e_1 + \frac{dx_2}{ds} e_2 \quad (2.28)$$

และ

$$\left| \frac{dx}{ds} \right|^2 = \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 = 1 \quad (2.29)$$

ใช้ทฤษฎีการลู่ออก 2 มิติ (Using the 2-dimensional divergence theorem) นั่นคือ สำหรับสนามเวกเตอร์ (vector field) ใดๆ $x \mapsto \xi(x) \in \mathbb{R}^2$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \xi \, dA = \int_{\partial\Omega} \xi \cdot \nu \, ds \quad (2.30)$$

โดยที่ ν แทน สนามข้างนอกเวกเตอร์หนึ่งหน่วยร่วมกับ $\partial\Omega$

เราจะได้สมการที่ (2.30) โดยใช้ Green's Theorem (ทฤษฎี 2.9)

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy \quad (2.31)$$

เลือก

$$P = -\xi_2, \quad Q = \xi_1, \quad \xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

สำหรับข้างซ้ายของสมการที่ (2.31) เรามี

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) dA$$

$$= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \xi \, dA \quad (\text{โดยนิยามของการลู่ออก}) \quad (2.32)$$

สำหรับด้านขวาของสมการที่ (2.31) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy &= \int_{\partial\Omega} -\xi_2 \, dx_1 + \xi_1 \, dx_2 \\ &= \int_{\partial\Omega} -\xi_1 \mathbf{e}_1 \cdot dx_1 \mathbf{e}_2 + \xi_1 \mathbf{e}_1 \cdot dx_2 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 \cdot (-dx_1 \mathbf{e}_1) + \xi_2 \mathbf{e}_2 \cdot dx_2 \mathbf{e}_1 \\ &= \int_{\partial\Omega} (\xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2) \cdot (-dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_1) \\ &= \int_{\partial\Omega} \xi \cdot (-dx_1 \mathbf{e}_2 + dx_2 \mathbf{e}_1) \\ &= \int_{\partial\Omega} \xi \cdot \left(\frac{dx_2}{ds} \mathbf{e}_1 - \frac{dx_1}{ds} \mathbf{e}_2 \right) ds \end{aligned} \quad (2.33)$$

เนื่องจาก

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 \quad , \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{dx_1}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{ds} \mathbf{e}_2$$

ข้อสังเกต

$$\left(\frac{-dx_2}{ds}, \frac{dx_1}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right) = - \left(\frac{dx_1}{ds} \right) \left(\frac{dx_2}{ds} \right) + \left(\frac{dx_1}{ds} \right) \left(\frac{dx_2}{ds} \right) = 0$$

และ

$$\left(\frac{dx_2}{ds}, -\frac{dx_1}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right) = \left(\frac{dx_1}{ds} \right) \left(\frac{dx_2}{ds} \right) - \left(\frac{dx_1}{ds} \right) \left(\frac{dx_2}{ds} \right) = 0$$

เพราะฉะนั้น นั่นคือ 2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติที่เป็นไปได้

พิจารณา

$$\left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right),$$

นั่นคือ

$$\left(-\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_1}{ds} \right) \quad \text{และ} \quad \left(\frac{dx_2}{ds}, -\frac{dx_1}{ds} \right)$$

แม้ว่า $\partial\Omega$ เป็นระยะทางทวนเข็มนาฬิกา, เราต้องการหาเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติ $\partial\Omega$ จะต้องเท่ากับ -1 โดยสมการที่ 2.29

$$\det \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} \\ -\frac{dx_2}{ds} & \frac{dx_1}{ds} \end{pmatrix} = \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 = 1$$

$$\text{และ } \det \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} \\ \frac{dx_2}{ds} & -\frac{dx_1}{ds} \end{pmatrix} = -\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = -\left[\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2\right] = -1$$

$$\text{นั่นคือ } \mathbf{v} = \frac{dx_2}{ds} \mathbf{e}_1 - \frac{dx_1}{ds} \mathbf{e}_2 \quad (2.34)$$

นั่นคือ สมการที่(2.33) กลายเป็น

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\partial\Omega} \xi \cdot \left(\frac{dx_2}{ds} \mathbf{e}_1 - \frac{dx_1}{ds} \mathbf{e}_2 \right) ds = \int_{\partial\Omega} \xi \cdot \mathbf{v} ds \quad (2.35)$$

ดังนั้น โดยสมการที่ (2.32) และ (2.35) จะได้ สมการที่ (2.30)

สำหรับสนามเวกเตอร์ \mathbf{x} โดยนิยามของการลู่ออก (Divergence) เรามี $\operatorname{div} \mathbf{x} = 1+1 = 2$ บนทุก

Ω ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2A(\Omega) &= 2 \iint_{\Omega} 1 dA \\ &= \iint_{\Omega} 2 dA \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{x} dA \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} ds \quad (\text{โดยสมการที่ (2.30)}) \\ &= \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} ds \right| \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}| ds \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{v}\| ds \quad (\text{โดยทฤษฎี 2.11 Cauchy-Schwarz inequality}) \\ &= \int_{\partial\Omega} \|\mathbf{x}\| ds \quad (\text{เพราะว่า } \mathbf{v} \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย, เพราะฉะนั้น } \|\mathbf{v}\| = 1) \\ &\leq \left(\int_{\partial\Omega} \|\mathbf{x}\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\partial\Omega} 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{โดยข้อสังเกต 2.15 Cauchy-Schwarz inequality}) \\ &= L^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \left(\int_{\partial\Omega} \|\mathbf{x}\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq L^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \left(\frac{L^2(\partial\Omega)}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \|\mathbf{x}'\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{โดยบทตั้ง 2.14 Wirtinger's Inequality}) \\ &= L^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \left(\frac{L^2(\partial\Omega)}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{โดยสมการที่ (2.29)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= L^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \left(\frac{L^2(\partial\Omega)}{4\pi^2} L(\partial\Omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{L^2(\partial\Omega)}{2\pi}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 4\pi A(\Omega) \leq L^2(\partial\Omega) \quad (2.36)$$

ซึ่งคือ ความไม่เท่ากันของไอโซเพอริเมตริก (isoperimetric inequality)

นอกจากนั้น สำหรับสมการที่ (2.36) ก็ต่อเมื่อ

$$\|x \cdot v\| = \|x\| \cdot \|v\| \quad (2.37)$$

โดยพิสูจน์ของ Cauchy-Schwarz inequality ซึ่งสมมูลกับ x และ v ไม่อิสระเชิงเส้น นั่นคือ

$$x(s) = \lambda(s) v(s) \quad (2.38)$$

โดยอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง ของสมการที่ (2.38) สัมพันธ์กับ s

$$\dot{x}(s) = \lambda(s) \dot{v}(s) + \dot{\lambda}(s) v(s) \quad (2.39)$$

โดยคูณทั้งสองข้างของสมการที่ (2.39) ด้วย $v(s)$ จะได้

$$\dot{x}(s) \cdot v(s) = \lambda(s) \dot{v}(s) \cdot v(s) + \dot{\lambda}(s) v(s) \cdot v(s) \quad (2.40)$$

เนื่องจาก $v(s)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดย

$$\|v(s)\|^2 = 1$$

ถ้า $2\|v(s) \cdot \dot{v}(s)\| = 0$ แล้ว $v(s) \cdot \dot{v}(s) = 0$

จากสมการที่ (2.34)

$$\begin{aligned}
 v(s) \cdot v(s) &= \left(\frac{dx_2}{ds}, \frac{-dx_1}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dx_2}{ds}, \frac{-dx_1}{ds} \right) \\
 &= \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 + \left(\frac{-dx_1}{ds} \right)^2 \\
 &= 1 \quad (\text{โดยสมการที่ (2.29)})
 \end{aligned} \quad (2.41)$$

โดยสมการที่ (2.28) และ (2.34) จะได้

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(s) \cdot v(s) &= \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dx_2}{ds}, \frac{-dx_1}{ds} \right) \\
 &= \left(\frac{dx_1}{ds} \right) \left(\frac{dx_2}{ds} \right) + \left(\frac{dx_2}{ds} \right) \left(\frac{-dx_1}{ds} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \quad (2.42)$$

นั่นคือสมการที่ (2.40), (2.41) และ (2.42) ดังนั้น สมการที่ (2.39) กลายเป็น

$$\dot{\lambda}(s) = 0 \quad \text{แล้ว} \quad \lambda(s) = c$$

เนื่องจาก v เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังนั้นสมการที่ (2.38) กลายเป็น

$$\|x\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda| \quad (2.43)$$

สมการที่ (2.43) แทนสมการของวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดรัศมี $|\lambda|$ ซึ่งเป็นการแสดงสมการที่ (2.36) บรรลุผลก็ต่อเมื่อ โดเมนในสมการเป็นแผ่นกลม \square

การพิสูจน์แบบที่ 7 โดยใช้วิธี Topping's [3]

พิสูจน์ แทนจุดใดๆ ของระนาบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex number)

$$z = x + iy$$

และพื้นที่ที่มีขนาด

$$dA = dx \times dy \quad (2.44)$$

หมายเหตุ

$$\bar{z} = x - iy, \quad dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} dz \times d\bar{z} &= \frac{i}{2} (dx + idy) \times (dx - idy) \\ &= \frac{i}{2} (dx \times dx) - \frac{1}{2} (dy \times dx) + \frac{1}{2} (dx \times dy) + \frac{i}{2} (dy \times dy) \\ &= -\frac{1}{2} (dy \times dx) + \frac{1}{2} (dx \times dy) \\ &= \frac{1}{2} (dx \times dy) + \frac{1}{2} (dx \times dy) \\ &= dx \times dy \end{aligned} \quad (2.45)$$

โดยสมการที่ (2.45) และ (2.44) กลายเป็น

$$dA = dx \times dy = \frac{i}{2} dz \times d\bar{z} \quad (2.46)$$

ดังนั้น โดยสมบัติโดเมนกระชับ (สมบัติที่ 2.15)

$$\begin{aligned} 4\pi A(\Omega) &= 4\pi \iint_{\Omega} dA \\ &= 4\pi \iint_{\Omega} \frac{i}{2} dz \times d\bar{z} \quad (\text{โดยสมการที่ (2.46)}) \\ &= \iint_{\Omega} 2\pi i dz \times d\bar{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega} dz \times d\bar{z} \, 2\pi i \\
&= \iint_{\Omega} dz \times d\bar{z} \int_{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta - z} && \text{(โดยทฤษฎี 2.8)} \\
&= \iint_{\Omega} \int_{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta - z} dz \times d\bar{z} \\
&= \int_{\infty} d\zeta \iint_{\Omega} \frac{dz \times d\bar{z}}{\zeta - z} \\
&= \int_{\infty} d\zeta \iint_{\Omega} \frac{-2}{2} (i)^2 \frac{dz \times d\bar{z}}{\zeta - z} \\
&= \int_{\infty} d\zeta \iint_{\Omega} \frac{-2i}{\zeta - z} \frac{i}{2} dz \times d\bar{z} \\
&= \int_{\infty} d\zeta \iint_{\Omega} \frac{-2i}{\zeta - z} dA && \text{(โดยสมการที่ 2.46)} \quad (2.47)
\end{aligned}$$

ให้ $z = x + iy$ $\zeta = x_0 + iy_0$
 นั่นคือ $\bar{z} = x - iy$ $\bar{\zeta} = x_0 - iy_0$
 ดังนั้น

$$\zeta - z = (x_0 - x) + i(y_0 - y)$$

โดยสมการที่ (2.44)

$$\iint_{\Omega} \frac{-2i}{\zeta - z} dA = \iint_{\Omega} \frac{-2i}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} dx \times dy \quad (2.48)$$

ข้อสังเกต

$$\bar{\zeta} - \bar{z} = (x_0 - x) - i(y_0 - y)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} &= \frac{(x_0 - x) - i(y_0 - y)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} \\
\int_{\infty} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} dz &= \int_{\infty} \frac{(x_0 - x) - i(y_0 - y)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} (dx + idy) \\
&= \int_{\infty} \frac{(x_0 - x) - i(y_0 - y)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} dx + i \frac{(x_0 - x) - i(y_0 - y)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} dy \quad (2.49)
\end{aligned}$$

ให้

$$P = \frac{(x_0 - x) - i(y_0 - y)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]i - [(x_0 - x) - i(y_0 - y)](-i)}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} \\
&= \frac{i(x_0 - x) - (y_0 - y) + i(x_0 - x) + (y_0 - y)}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} \\
&= \frac{2i(x_0 - x)}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} \tag{2.50}
\end{aligned}$$

ให้

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{i[(x_0 - x) - i(y_0 - y)]}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} = \frac{(y_0 - y) + i(x_0 - x)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} \\
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)](-i) - [(y_0 - y) - i(x_0 - x)](-1)}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} \\
&= \frac{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)](-i) - [(y_0 - y) - i(x_0 - x)]}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} \\
&= \frac{2(y_0 - y)}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} \tag{2.51}
\end{aligned}$$

โดยสมการที่ (2.50) และ (2.51)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{2(y_0 - y) - 2i(x_0 - x)}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} = \frac{-2i[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]}{[(x_0 - x) + i(y_0 - y)]^2} \\
&= \frac{-2i}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} \tag{2.52}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นใช้ทฤษฎี 2.9 และโดยสมการที่ (2.49) กลายเป็น

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} dz &= \int_{\Omega} \frac{(x_0 - x) - i(y_0 - y)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} dx + i \frac{(x_0 - x) - i(y_0 - y)}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} dy \\
&= \iint_{\Omega} \frac{-2i}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} dA \\
&= \iint_{\Omega} \frac{-2i}{(x_0 - x) + i(y_0 - y)} dx \times dy \tag{2.53}
\end{aligned}$$

เนื่องจากด้านขวาของสมการที่ (2.48) และ(2.53) เหมือนกัน ดังนั้น (2.47) กลายเป็น

$$\begin{aligned}
4\pi A(\Omega) &= \int_{\Omega} d\zeta \iint_{\Omega} \frac{-2i}{\zeta - z} dA \\
&= \int_{\Omega} d\zeta \iint_{\Omega} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} dz \\
&= \left| \int_{\Omega} d\zeta \iint_{\Omega} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} dz \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\partial\Omega} |d\zeta| \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} \right| |dz| \\
&= \int_{\partial\Omega} |d\zeta| \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\zeta - z}{\zeta - z} \right| |dz| \\
&= \int_{\partial\Omega} |d\zeta| \int_{\partial\Omega} 1 |dz| \\
&= L^2(\partial\Omega)
\end{aligned}$$

หมายเหตุ ในการพิสูจน์จะละเว้นการตรวจสอบของกรณีเท่ากับของไอโซเพอริเมตริก

□

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1 วิธีการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการวิจัยเอกสาร ซึ่งรวบรวมการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริก บนระนาบที่แตกต่างกัน เพื่อเปรียบเทียบแนวคิดในการพิสูจน์ พร้อมทั้งคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ เพื่อประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก เมื่อกำหนดเงื่อนไข และศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกบน \mathbb{R}^3 ในสองระนาบที่กำหนด

3.2 ขั้นตอนของการวิจัย

ผู้วิจัยได้สรุปขั้นตอนในการทำวิทยานิพนธ์ได้ 9 ขั้นตอนดังนี้

3.2.1 ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากผู้วิจัยมีความสนใจในการทำวิจัยด้านเรขาคณิต ดังนั้นจึงค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตเบื้องต้น โดยมุ่งเน้นการค้นคว้าเอกสารต่าง ๆ ที่มีความสัมพันธ์และสอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก เพื่อเป็นข้อมูลและแนวทางในการทำวิจัย โดยค้นคว้าจากวารสาร หนังสือ และบทความในห้องสมุด อีกทั้งการสืบค้นข้อมูลทางอินเทอร์เน็ตเพื่อให้ได้ข้อมูลที่ครอบคลุมและหลากหลายในการทำวิจัย

3.2.2 ศึกษาเอกสาร ทฤษฎีบท งานวิจัยต่าง ๆ และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

โดยเริ่มศึกษาตั้งแต่ประวัติ ที่มา และความหมายของปัญหาไอโซเพอริเมตริก พร้อมทั้งศึกษาความสัมพันธ์ของเรขาคณิตเบื้องต้น ที่มีความสอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกจากบทความที่อ้างถึงในเอกสารอ้างอิง เพื่อเป็นข้อมูลในการทำวิจัย ซึ่งในการศึกษานั้นผู้วิจัยได้ศึกษาด้วยตัวเองและได้รับคำแนะนำจากอาจารย์ผู้ควบคุมการทำวิทยานิพนธ์เพื่อกำหนดปัญหาและชี้แนะแนวทางในการทำวิจัยต่อไป

3.2.3 รวบรวมการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ

การศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริก จะต้องศึกษาการพิสูจน์เพื่อให้ทราบถึงที่มา และข้อเท็จจริงของปัญหา โดยการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบนั้น มีผู้สนใจพิสูจน์ไว้หลายแบบ ซึ่งแต่ละแบบก็จะนำคณิตศาสตร์ที่หลากหลายสาขามาประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์

การที่พิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกหลายแบบนั้นก็เพื่อให้ผู้ที่มีความสนใจสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่เกิดขึ้นได้อย่างหลากหลาย ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้รวบรวมการพิสูจน์วิธีต่างๆ ที่มีแนวคิดแตกต่างกัน 7 วิธี ดังนี้

3.2.3.1 การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกโดย **Jacob Steiner** พิสูจน์ไว้ในปีค.ศ.1838 [3] ซึ่งเขาเป็นบุคคลแรกที่ค้นพบการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกที่ค่อนข้างมีความสมบูรณ์ โดยใช้เรขาคณิตในการพิสูจน์ ซึ่งในปัจจุบันเรียกว่า “ความสมมาตรของ Steiner” เขาได้แสดงให้เห็นว่าถ้ามีคำตอบของปัญหาไอโซเพอริเมตริก ดังนั้นคำตอบนั้นคือ วงกลม

3.2.3.2 การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกโดย **A. Hurwitz's** ซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในปีค.ศ. 1902 [4] โดยนำทฤษฎีของอนุกรมฟูเรียร์และบทตั้งของ Wirtinger ใช้ในการพิสูจน์

3.2.3.3 การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกโดย **E. Schmidt's** ซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในปีค.ศ. 1939 [5] การพิสูจน์แบบนี้เป็นการเปรียบเทียบเส้นโค้งที่เป็นวงกลมและเส้นโค้งปิด ที่อยู่ระหว่างเส้นขนาน และใช้สมบัติของค่ามัธยฐานเรขาคณิตและค่ามัธยฐานเลขคณิตช่วยในการพิสูจน์

3.2.3.4 การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกโดยใช้การวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier Analysis) [3] วิธีการพิสูจน์แบบนี้จะพิจารณาฟังก์ชัน $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ (periodic function) ของรอบ 2π นั่นคือ $f(0) = f(2\pi)$ และ $g(0) = g(2\pi)$ เราสามารถเขียนสูตรที่สอดคล้องกับอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) ได้ดังนี้

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

$$\text{โดยพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปิด } \Omega; A(\Omega) = \int_0^{2\pi} f(t)g'(t) dt$$

และความยาวโค้ง $L^2 = 2\pi^2 \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 + (g'(t))^2 dt$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการไอโซเพริเมตริก

3.2.3.5 การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพริเมตริกโดย **Nikolaos DeGrades** ได้พิสูจน์ไว้ในปี ค.ศ.2002 [6] โดยการพิสูจน์แบบนี้จะใช้การยกตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมที่เป็นคอนเวกซ์ในการพิสูจน์และใช้เรขาคณิตเปรียบเทียบระหว่างรูปหลายเหลี่ยมกับวงกลม

3.2.3.6 การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพริเมตริกโดย **Holder Inequality** [3] แนวคิดหลักในการพิสูจน์แบบนี้ คือใช้ Cauchy – Schwarz integral inequality ในการพิสูจน์

3.2.3.7 การพิสูจน์ปัญหาไอโซเพริเมตริกโดย **P.Topping** [3] ซึ่งใช้ตัวแปรเชิงซ้อน (complex variables) ในการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพริเมตริกบนระนาบ

3.2.4 พิสูจน์ปัญหาที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพริเมตริกโดยกำหนดเงื่อนไข

จากการศึกษาการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพริเมตริก ดังนั้นผู้วิจัยจึงเกิดแนวคิดในการศึกษาปัญหาที่สอดคล้อง โดยจากปัญหาไอโซเพริเมตริกที่กล่าวว่า “วงกลมเป็นเส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อกำหนดเส้นรอบรูป” ในการทำวิจัยนี้ได้กำหนดเงื่อนไขเพิ่มขึ้นคือ การกำหนดจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง ซึ่งผู้วิจัยได้พิสูจน์ปัญหาดังกล่าว ซึ่งจะกล่าวต่อไปในบทที่ 4

3.2.5 คำนวณเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าผลเฉลยโดยการเขียนโปรแกรมทาง คอมพิวเตอร์

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้เขียน โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับปัญหา ไอโซเพริเมตริก โดยผู้วิจัยเขียนโปรแกรมเพื่อแสดงพื้นที่ รัศมี จุดศูนย์กลาง ของวงกลม โดยเงื่อนไขในการประมาณค่าของผลเฉลยนั้นคือ การกำหนดเส้นรอบวงและจุดที่เส้นรอบวงผ่าน

3.2.6 เขียนโปรแกรมเพื่อเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิว

เมื่อได้ศึกษาปัญหาไอโซเพริเมตริกบนระนาบในข้างต้นแล้ว ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิว (Isovolume) ของรูปทรงสามมิติที่มีไอโซเพริเมตริกโคเมนเท่ากันทุกรูป (ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้พิจารณารูปทรงสามมิติจำนวน 5 รูปทรง อันได้แก่ รูปทรงกลม รูปทรงกระบอก รูปกรวย รูปพาราโบลอยด์ รูปไฮเพอร์โบลอยด์) อีกทั้งได้กำหนดปริมาตรของแต่ละรูปทรงเท่ากันในตอนแรกและตัดด้วยความสูงเท่ากัน แล้วพิจารณา Isovolume ของแต่ละ

รูปทรงว่ารูปทรงใดมีค่ามากที่สุด (ปัญหาในลักษณะนี้ เรียกว่า Isoperimetric problem in slab) โดยนำเสนอข้อมูลในรูปของกราฟ

3.2.7 ยกตัวอย่างของปัญหาไอโซเพอริเมตริกที่สอดคล้องกับปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน

นำเสนอตัวอย่างที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ และปัญหาไอโซเพอริเมตริกบน \mathbb{R}^3 ในสองระนาบที่กำหนด

3.2.8 สรุปผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้สรุปผลที่ได้จากการศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกทั้งการพิสูจน์ จำนวนเชิงตัวเลข เพื่อประมาณค่าผลเฉลยโดยการเขียนโปรแกรมทาง คอมพิวเตอร์ เมื่อกำหนดเงื่อนไข และตัวอย่างการ นำปัญหาไอโซเพอริเมตริกไปประยุกต์ใช้กับชีวิตประจำวัน และเขียนโปรแกรมในการเปรียบเทียบ อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิว(Isovolume) ที่มากที่สุด ของรูปทรงสามมิติจำนวน 5 รูป เมื่อ กำหนดไอโซเพอริเมตริก โดเมนและปริมาตรเท่ากันในตอนแรก และพิจารณาเมื่อตัดความสูงของแต่ละ รูปด้วยความสูงเท่ากัน

ในส่วนของสรุปนี้ยังนำเสนอการแนะแนวทางในการทำการศึกษและทำวิจัยเกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกเพื่อพัฒนาองค์ความรู้ที่หลากหลาย และสามารถนำไปประยุกต์กับงานต่างๆอีกต่อไป

3.2.9 เขียนวิทยานิพนธ์

ผู้วิจัยใช้โปรแกรมไมโครซอฟต์เวิร์ด (Microsoft Word) ในการเขียนวิทยานิพนธ์ โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประกอบด้วย 5 บท ดังนี้ บทที่ 1 บทนำ ซึ่งนำเสนอประวัติและที่มาของปัญหาไอโซเพอริเมตริก รวมทั้งวัตถุประสงค์ของงานวิจัย ขอบเขตการวิจัย ลำดับขั้นตอนในการศึกษา และ กำจำกัดความที่ใช้ในการศึกษา ในส่วนของ บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ได้กล่าวถึงนิยาม และทฤษฎีพื้นฐาน อีกทั้งงานวิจัยซึ่งสัมพันธ์กับการพิสูจน์ของปัญหาไอโซเพอริเมตริก และการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าผลเฉลย บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย ซึ่งในบทนี้ได้เสนอวิธีการวิจัยและสรุปกระบวนการในการศึกษาในแต่ละขั้นตอนของการทำวิจัย เนื้อหาในบทที่ 4 ผลของงานวิจัย นั้น เป็นการรวบรวมการพิสูจน์ของปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบและบนทรงกลม ซึ่งในการพิสูจน์แต่ละวิธีนั้นแตกต่างกัน และนำเสนอการใช้โปรแกรมในการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าผลเฉลยของคำตอบเมื่อกำหนดเงื่อนไขที่สัมพันธ์กับปัญหาไอโซเพอริเมตริก และโปรแกรมการเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงสามมิติ ส่วนในบทที่ 5 สรุปผลงานวิจัย

และข้อเสนอแนะ จะกล่าวถึงผลสรุปของการทำวิจัยที่ได้ทำมาทั้งหมด อีกทั้งแนะแนวทางในการศึกษา และการทำวิจัยต่อไป

3.3 ตารางและแผนการดำเนินงานวิจัย

แผนการดำเนินงาน	เดือน												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
ขั้นตอนที่ 1	←→												
ขั้นตอนที่ 2		←→											
ขั้นตอนที่ 3			←→										
ขั้นตอนที่ 4				←→									
ขั้นตอนที่ 5					←→								
ขั้นตอนที่ 6							←→						
ขั้นตอนที่ 7									←→				
ขั้นตอนที่ 8										←→			
ขั้นตอนที่ 9											←→		

บทที่ 4

ผลของงานวิจัย

ในบทนี้นำเสนอการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริก โดยเพิ่มเงื่อนไขของปัญหา อีกทั้งแสดงโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่ช่วยในการคำนวณเพื่อประมาณค่า พื้นที่ รัศมี จุดศูนย์กลางของวงกลม และแสดงภาพที่สอดคล้องกับการพิสูจน์ดังกล่าวข้างต้น และโปรแกรมการหาอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงสามมิติ ในสองระนาบที่กำหนด เมื่อให้ไอโซเพอริเมตริกโดเมน และ ปริมาตร เท่ากันทุกรูป รวมไปถึงตัวอย่างในชีวิตประจำวันที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก

4.1 พิสูจน์ปัญหาที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกโดยกำหนดเงื่อนไข

จากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริก(ทฤษฎี 2.15) ที่กล่าวไว้ว่า “ ถ้า L เป็นความยาวของเส้นโค้งปิด C บนระนาบ และ A เป็นพื้นที่ภายในเส้นโค้งปิด แล้ว

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

ซึ่ง ถ้าบนระนาบที่มีเส้นรอบรูปเท่ากัน รูปวงกลม จะเป็นรูปที่มีพื้นที่มากที่สุด ” หรืออาจกล่าวได้ว่า “ บนระนาบ เมื่อกำหนดพื้นที่ขนาดเท่ากัน แล้วรูปวงกลมจะมีเส้นรอบรูปที่สั้นที่สุด ” ซึ่งจะเห็นว่าปัญหาทั้งสองนี้เป็นปัญหาเดียวกัน โดยจะพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ให้ L_1, A_1 เป็นเส้นรอบรูป และ พื้นที่ของรูปวงกลม ตามลำดับ , ให้ L_2, A_2 เป็นเส้นรอบรูป และ พื้นที่ของรูปใด ๆ ตามลำดับ

ปัญหาที่ 1 ถ้า $L_1 = L_2$ แล้ว $A_1 \geq A_2$

ปัญหาที่ 2 ถ้า $A_1 = A_2$ แล้ว $L_1 \leq L_2$

พิสูจน์ว่า ปัญหาที่ 1 และปัญหาที่ 2 เป็นปัญหาเดียวกัน (นั่นคือ ปัญหาที่ 1 \iff ปัญหาที่ 2)

พิสูจน์ (ปัญหาที่ 1 \implies ปัญหาที่ 2)

ให้ $L_1 = L_2$ แล้ว $A_1 \geq A_2$ และให้ $A_1 = A_2$ จะแสดงว่า $L_1 \leq L_2$

จากที่ L_1, A_1 เป็นเส้นรอบรูป และ พื้นที่ของรูปวงกลม

นั่นคือ $L_1 = 2\pi r_1$, $A_1 = \pi r_1^2$ (โดย r_1 คือ รัศมีของวงกลม)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad L_1^2 &= (2\pi r_1)^2 \\ &= 4\pi(\pi r_1^2) \\ &= 4\pi A_1 \end{aligned}$$

$$\text{จาก ท.บ. 2.15} \quad L_2^2 \geq 4\pi A_2 \quad (*)$$

$$\text{และ จากที่กำหนดให้} \quad L_1 = L_2 \quad \text{แล้ว} \quad A_1 \geq A_2 \quad (**)$$

จาก (*) และ (**) จะได้ว่า

$$A_1 = \frac{L_1^2}{4\pi} = \frac{L_2^2}{4\pi} \geq A_2$$

ถ้าให้ $A_1 = A_2$ ดังนั้น

$$\frac{L_1^2}{4\pi} = A_1 = A_2 \leq \frac{L_2^2}{4\pi}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$L_1 \leq L_2$$

พิสูจน์ (ปัญหาที่ 2 \longrightarrow ปัญหาที่ 1)

ให้ $A_1 = A_2$ แล้ว $L_1 \leq L_2$ และให้ $L_1 = L_2$ จะแสดงว่า $A_1 \geq A_2$

$$\text{จาก } A_1 = A_2 \quad \text{แล้ว} \quad L_1 = 2\sqrt{\pi A_1} = 2\sqrt{\pi A_2} \leq L_2$$

ถ้าให้ $L_1 = L_2$ ดังนั้น

$$2\sqrt{\pi A_1} = L_1 = L_2 \geq 2\sqrt{\pi A_2}$$

จะได้

$$A_1 \geq A_2$$

เพราะฉะนั้น ปัญหาที่ 1 และปัญหาที่ 2 เป็นปัญหาเดียวกัน □

จากปัญหาข้างต้น ถ้ากำหนดเงื่อนไขเพิ่ม โดยการกำหนดความยาวเส้น โค้งปิดและกำหนดจุดที่เส้นรอบรูปผ่านจำนวน 1 จุด, 2 จุด, 3 จุด ตามลำดับนั้นเส้นโค้งปิดดังกล่าวยังจะเป็นรูปวงกลมหรือไม่

4.1.1 พิจารณาทฤษฎีไอโซเพอริเมตริกโดยเพิ่มเงื่อนไขคือ กำหนดจุดที่เส้นรอบรูป 1 จุด

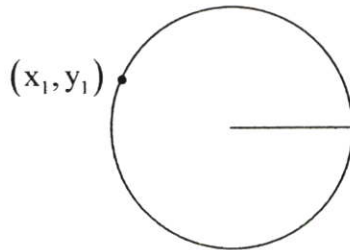
ให้จุด P เป็นจุดที่อยู่บนเส้นรอบรูปโดยมีพิกัดเป็น (x_1, y_1) , L คือความยาวของเส้นรอบรูป (เส้นโค้งปิด) และ A คือพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปิด ดังนั้นเส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม เมื่อกำหนดความยาวของเส้นโค้งปิดและจุด P

พิสูจน์ เส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม เมื่อกำหนดความยาว L ของเส้นโค้งปิดและจุด P เป็นผลเนื่องมาจากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริก(ทฤษฎี 2.15) ดังนั้น

$$A = \pi r^2 \quad \text{เมื่อ } r \text{ คือ รัศมีของวงกลม}$$

และ
$$r = \frac{L}{2\pi} \quad \text{(จากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริก)}$$

โดยแสดงรูปได้ดังนี้



รูปที่ 4.1 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 1 จุด □

4.1.2 พิจารณาทฤษฎีไอโซเพอริเมตริกโดยเพิ่มเงื่อนไขคือ กำหนดจุดที่เส้นรอบรูป 2 จุด กำหนดให้จุด P และจุด Q เป็น 2 จุดที่อยู่บนเส้นรอบรูป มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ตามลำดับ ให้ x เป็นความยาวของส่วนของเส้น PQ โดยกำหนดให้ $k = x\pi$, และกำหนดความยาวของเส้นรอบรูป (เส้นโค้งปิด) เท่ากับ L ดังนั้นสามารถพิจารณารูปร่างของเส้นโค้งปิดและพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปิด A ได้ 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $L = k$ เส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม, $A = \frac{L^2}{4\pi}$

กรณีที่ 2 $L > k$ เส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม โดยเกิดวงกลมขึ้น

2 วง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข, $A = \frac{L^2}{4\pi}$

กรณีที่ 3 $2x < L < k$ เส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปอื่นที่ไม่ใช่วงกลม

กรณีที่ 4 $L < 2x$ ไม่เกิดเส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุด นั่นคือ ไม่เกิดรูปใดๆ

พิสูจน์ กรณีที่ 1 $L = k$

จากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริกจะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดเส้นโค้งปิดความยาว L นั้นพื้นที่ที่มากที่สุดภายใต้เส้นโค้งปิดคือ รูปวงกลม ดังนั้น $L = 2\pi r$ เป็นผลให้ $r = \frac{L}{2\pi}$

ฉะนั้นพื้นที่ของวงกลมคือ
$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

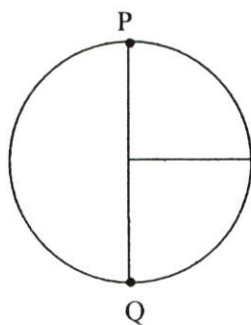
เนื่องจาก $L = 2\pi r$, $L = k$ และ $k = x\pi$

ดังนั้น $x\pi = 2\pi r$

เพราะฉะนั้น $x = 2r$

ซึ่งหมายความว่า ระยะห่างระหว่างจุด P และจุด Q เป็นสองเท่าของรัศมีหรือความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังนั้นพิกัดของจุดศูนย์กลางคือ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

โดยแสดงรูปได้ดังนี้



รูปที่ 4.2 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 2 จุด

กรณีที่ 2 $L > k$

จากทฤษฎีไอโซเพริเมตริกจะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดเส้นโค้งปิดความยาว L นั้นพื้นที่ที่มากที่สุดภายใต้เส้นโค้งปิดคือ รูปวงกลม $L = 2\pi r$ เป็นผลให้ $r = \frac{L}{2\pi}$

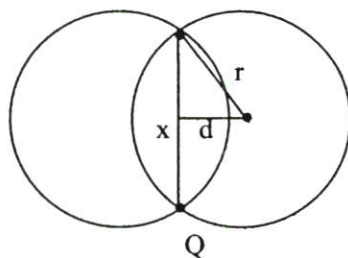
ฉะนั้นพื้นที่ของวงกลมคือ

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

เนื่องจาก $L > k$ ดังนั้น $2\pi r > \pi x$ จะได้ $2r > x$

ซึ่งหมายความว่า ระยะห่างระหว่างจุด P และจุด Q จะน้อยกว่าสองเท่าของรัศมีหรือ \overline{PQ} คือ คอร์ดของวงกลม

แสดงรูปได้ดังนี้



รูปที่ 4.3 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 2 จุด

โดยให้ d เป็นระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด

$$d^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \text{จากพีทาโกธัส}$$

ดังนั้น

$$d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

กรณีที่ 3 $2x < L < k$

จากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริกจะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดเส้นโค้งปิดความยาว L นั้นพื้นที่ที่มากที่สุดภายใต้เส้นโค้งปิดคือ รูปวงกลม ดังนั้น $L = 2\pi r$ เป็นผลให้ $r = \frac{L}{2\pi}$

เนื่องจาก $2x < L < k$ ดังนั้นจะได้ $2x < L$ และ $L < k$

พิจารณา $L < k$ จะได้ $2\pi r < x\pi$ นั่นคือ $2r < x$ ซึ่งหมายความว่า ระยะห่างระหว่างจุด P และจุด Q มากกว่าเส้นผ่านศูนย์กลาง ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นจริง นั่นแสดงว่ารูปดังกล่าวไม่เป็นรูปวงกลม เพราะเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นเส้นที่ยาวที่สุดระหว่าง 2 จุดที่อยู่บนเส้นรอบวง

ดังนั้นในกรณีนี้จะทำให้เกิดรูปอื่นที่ไม่ใช่วงกลม

กรณีที่ 4 $L < 2x$

สำหรับกรณีนี้จะเห็นได้ว่าเส้นโค้งที่กำหนดให้มีความยาวน้อยกว่าระยะทางระหว่างจุด P และ จุด Q ดังนั้นจึงทำให้ไม่เกิดเส้นโค้งปิด จึงไม่เกิดรูปใดๆขึ้น \square

4.1.3 พิจารณาทฤษฎีไอโซเพอริเมตริกโดยเพิ่มเงื่อนไขคือ กำหนดจุดที่เส้นรอบรูป 3 จุด

กำหนดให้จุด P จุด Q และจุด R เป็น 3 จุดที่อยู่บนเส้นรอบรูป มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) , (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) ตามลำดับ ให้ x เป็นความยาวของส่วนของเส้น PQ , y เป็นความยาวของส่วนของเส้น QR , z เป็นความยาวของส่วนของเส้น PR และกำหนดความยาวของเส้นรอบรูป (เส้นโค้งปิด) เท่ากับ L ดังนั้นสามารถพิจารณารูปร่างของเส้นโค้งปิดและพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปิด A ได้ 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 รูปวงกลม มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อ $x = y = z$ (รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า) และ

$$L = \frac{x\pi\sqrt{3}}{2}$$

กรณีที่ 2 รูปวงกลม มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อ $x = y \neq z$, $x \neq y = z$, $x \neq z = y$ (รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว) หรือ $x \neq y \neq z$ (รูปสามเหลี่ยมใดๆ) และกำหนดให้ $L = 2\pi r$ โดยที่

$$r = \sqrt{(h-x_1)^2 + (k-y_1)^2} \quad \text{หรือ} \quad r = \sqrt{(h-x_2)^2 + (k-y_2)^2} \quad \text{หรือ}$$

$$r = \sqrt{(h-x_3)^2 + (k-y_3)^2},$$

$$h = \frac{(x_1^2 + y_1^2)y_2 + (x_3^2 + y_3^2)y_1 + (x_2^2 + y_2^2)y_3 - (x_3^2 + y_3^2)y_2 - (x_1^2 + y_1^2)y_3 - (x_2^2 + y_2^2)y_1}{2(x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1)}$$

$$k = \frac{(x_2^2 + y_2^2)x_1 + (x_1^2 + y_1^2)x_3 + (x_3^2 + y_3^2)x_2 - (x_2^2 + y_2^2)x_3 - (x_3^2 + y_3^2)x_1 - (x_1^2 + y_1^2)x_2}{2(x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1)}$$

กรณีที่ 3 เมื่อ $x + y + z \leq L < 2\pi r$ (โดยที่ r มีค่าเท่ากับกรณีที่ 2) เกิดรูปอื่นที่ไม่ใช่

วงกลม

กรณีที่ 4 เมื่อ $L < x + y + z$ ไม่เกิดรูปใดเลย

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ให้ $x = y = z$ และ $L = \frac{x\pi\sqrt{3}}{2}$

จากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริก จะได้ว่า $L^2 - 4\pi A \geq 0$ หรือ $L^2 \geq 4\pi A$ ดังนั้น

$$\left(\frac{x\pi\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq 4\pi A$$

$$\frac{3x^2\pi}{16} \geq A$$

ดังนั้นพื้นที่ที่มากที่สุดคือ

$$A = \frac{3x^2\pi}{16}$$

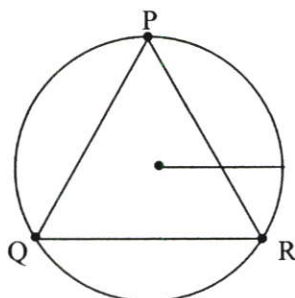
ถ้าให้ L เป็นเส้นรอบรูปของวงกลมจะได้ $L = \frac{x\pi\sqrt{3}}{2} = 2\pi r$ ดังนั้น $r = \frac{x\sqrt{3}}{4}$ และพื้นที่ของรูป

วงกลมนี้คือ $A_1 = \pi r^2 = \frac{3x^2\pi}{16}$ ดังนั้น $A_1 = A$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ที่มากที่สุดเมื่อกำหนด $x = y = z$ และ $L = \frac{x\pi\sqrt{3}}{2}$ คือ วงกลม โดยมี

พื้นที่ $A = \frac{3x^2\pi}{16}$ รัศมี $r = \frac{x\sqrt{3}}{4}$

แสดงรูปได้ดังนี้



รูปที่ 4.4 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 3 จุด

กรณีที่ 2 ให้ $x = y \neq z, x \neq y = z, x \neq z = y$ หรือ $x \neq y \neq z$ และ $L = 2\pi r$

โดยที่ $r = \sqrt{(h-x_1)^2 + (k-y_1)^2}$ หรือ $r = \sqrt{(h-x_2)^2 + (k-y_2)^2}$ หรือ $r = \sqrt{(h-x_3)^2 + (k-y_3)^2}$

$$h = \frac{(x_1^2 + y_1^2)y_2 + (x_3^2 + y_3^2)y_1 + (x_2^2 + y_2^2)y_3 - (x_3^2 + y_3^2)y_2 - (x_1^2 + y_1^2)y_3 - (x_2^2 + y_2^2)y_1}{2(x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1)}$$

$$k = \frac{(x_2^2 + y_2^2)x_1 + (x_1^2 + y_1^2)x_3 + (x_3^2 + y_3^2)x_2 - (x_2^2 + y_2^2)x_3 - (x_3^2 + y_3^2)x_1 - (x_1^2 + y_1^2)x_2}{2(x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1)}$$

จากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริก จะได้ว่า $L^2 \geq 4\pi A$

$$\text{ดังนั้น} \quad (2\pi r)^2 \geq 4\pi A$$

$$\pi r^2 \geq A$$

ดังนั้นพื้นที่ที่มากที่สุดคือ $\pi r^2 = A$

เนื่องจาก $r = \sqrt{(h-x_1)^2 + (k-y_1)^2}$ ดังนั้น $r^2 = (h-x_1)^2 + (k-y_1)^2$

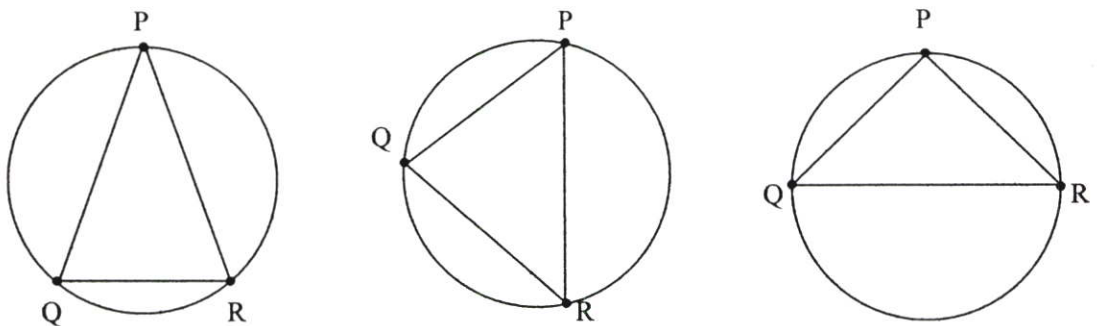
$r = \sqrt{(h-x_2)^2 + (k-y_2)^2}$ ดังนั้น $r^2 = (h-x_2)^2 + (k-y_2)^2$

$r = \sqrt{(h-x_3)^2 + (k-y_3)^2}$ ดังนั้น $r^2 = (h-x_3)^2 + (k-y_3)^2$

จากสามสมการข้างต้นจะเห็นว่าเป็นสมการวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมี r

เนื่องจาก พื้นที่ที่มากที่สุดคือ $\pi r^2 = A$ ดังนั้นพื้นที่ที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม

แสดงรูปได้ดังนี้



รูปที่ 4.5 แสดงจุดที่อยู่บนเส้นรอบวง 3 จุด

กรณีที่ 3 $x + y + z \leq L < 2\pi r$ (โดยที่ r มีค่าเท่ากับกรณีที่ 2)

ถ้า $x + y + z = L$ จะเห็นได้ว่ารูปที่จุดทั้งสามอยู่บนเส้นรอบรูปและ L เป็นเส้นโค้งปิดจะเห็นได้ว่ารูปที่เกิดขึ้นนั้นเป็นได้เพียงรูปเดียวเท่านั้นคือ รูปสามเหลี่ยม

ถ้า $x + y + z < L < 2\pi r$ จากกรณีที่ 2 จะเห็นได้ว่า r คือรัศมีของวงกลมดังนั้น ถ้า L น้อยกว่าเส้นรอบวงของวงกลมดังนั้นเส้นโค้งปิดจึงเป็นรูปอื่นที่ไม่ใช่รูปวงกลม

กรณีที่ 4 $L < x + y + z$

เนื่องจากความยาวของเส้นรอบรูปน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดทั้งสามดังนั้น จุดทั้งสามจึงไม่อยู่บนเส้นรอบรูปซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้จึงทำให้กรณีนี้ไม่เกิดรูปใดเลย

4.2 กำหนดเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าผลเฉลยโดยการเขียนโปรแกรมทาง คอมพิวเตอร์

จากปัญหาที่ได้พิสูจน์ในหัวข้อ 4.1 นั้นสามารถเขียน โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์เพื่อประมาณค่าพื้นที่ ที่มากที่สุด(เฉพาะกรณีที่เป็นรูปวงกลม) รัศมี จุดศูนย์กลางของวงกลม และแสดงรูปที่เกิดขึ้น เมื่อกำหนดความยาวเส้นรอบรูป และจุดที่อยู่บนเส้นรอบรูป จำนวน 1,2,3 จุด ตามลำดับ โดยใช้โปรแกรมภาษา C++ ซึ่งแสดงขั้นตอนการทำงานดังนี้

ขั้นที่ 1 เมื่อเปิด โปรแกรม หน้าแรกโปรแกรมจะให้เลือกจำนวนจุดที่กำหนดที่จะให้อยู่บนเส้นรอบรูป 1,2,3 จุด ตามลำดับ ตามที่แสดงในรูป



รูปที่ 4.6 แสดงหน้าแรกของโปรแกรม

ขั้นที่ 2 เมื่อเลือกจำนวนจุดในขั้นตอนที่ 1 แล้ว หน้าจอจะไปตามจุดที่เลือกไว้ และรอรับค่าจุดพิกัดที่กำหนดตามจำนวนจุดที่เลือกไว้ และความยาวของเส้นรอบรูปที่กำหนดให้ โดยแสดงรูปได้ดังนี้

Preview		Input		
		เส้นรอบวง	<input type="text"/>	
		จุด X	จุด Y	
		จุด P	<input type="text"/>	<input type="text"/>
		จุด X	จุด Y	
		จุด Q	<input type="text"/>	<input type="text"/>
		จุด X	จุด Y	
จุด R	<input type="text"/>	<input type="text"/>		
		Preview	Clear	
Output		Close		
จุดศูนย์กลาง X1				
จุดศูนย์กลาง Y1				
รัศมี	พื้นที่			

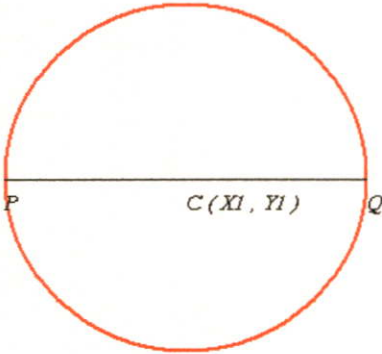
รูปที่ 4.9 แสดงหน้าจอเมื่อเลือก 3 จุด

ขั้นที่ 3 เมื่อรับค่าที่กำหนดให้แล้ว โปรแกรมจะคำนวณหาพิกัดจุดศูนย์กลาง รัศมี พื้นที่ และแสดงลักษณะรูปวงกลมที่เกิดขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Preview		Input	
		เส้นรอบวง	<input type="text" value="500"/>
		จุด X	<input type="text" value="2"/>
		จุด Y	<input type="text" value="9"/>
		Preview	Clear
Output		Close	
จุดศูนย์กลาง 1	(-77.54545 , 9.00000)		
จุดศูนย์กลาง 2	(81.54545 , 9.00000)		
จุดศูนย์กลาง 3	(2.00000 , 88.54545)		
จุดศูนย์กลาง 4	(2.00000 , -70.54545)		
รัศมี	79.54545	พื้นที่	19886.36364

รูปที่ 4.10 แสดงตัวอย่างหน้าจอแสดงผลเมื่อกำหนดจุด 1 จุด และเส้นรอบรูป

Preview



Input

เส้นรอบวง

จุด P จุด X จุด Y

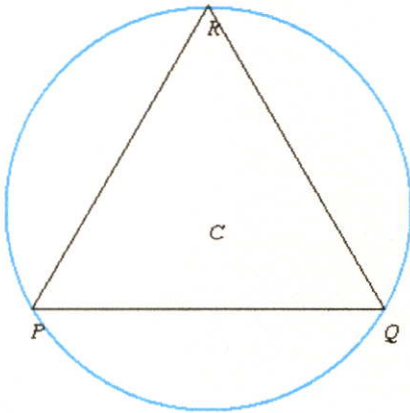
จุด Q จุด X จุด Y

Output

จุดศูนย์กลาง X1	119.31818	จุดศูนย์กลาง X2	
จุดศูนย์กลาง Y1	0.00000	จุดศูนย์กลาง Y2	
รัศมี	119.31818	พื้นที่	44744.31818

รูปที่ 4.11 แสดงตัวอย่างหน้าจอแสดงผลเมื่อกำหนดจุด 2 จุด และเส้นรอบรูป

Preview



Input

เส้นรอบวง

จุด P จุด X จุด Y

จุด Q จุด X จุด Y

จุด R จุด X จุด Y

Output

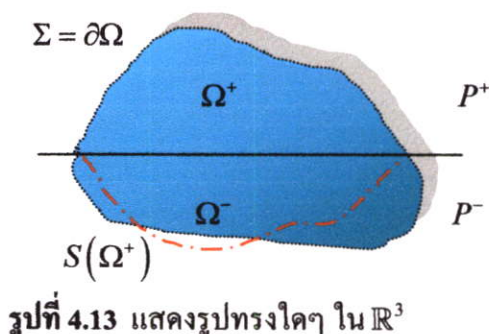
จุดศูนย์กลาง X1	121.24356	จุดศูนย์กลาง X2	
จุดศูนย์กลาง Y1	70.00000	จุดศูนย์กลาง Y2	
รัศมี	140.00000	พื้นที่	61600.00000

รูปที่ 4.12 แสดงตัวอย่างหน้าจอแสดงผลเมื่อกำหนดจุด 3 จุด และเส้นรอบรูป

4.3 การเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวในสองระนาบ ของรูปทรงต่างๆเมื่อกำหนดค่าไอโซเพอริเมตริกโดเมน และปริมาตรเต็ม

ปัญหาไอโซเพอริเมตริกใน \mathbb{R}^3 คือ การหาพื้นที่ผิวที่น้อยที่สุดของรูปสามมิติ เมื่อกำหนดปริมาตรของแต่ละรูปทรงให้เท่ากันทุกรูป หรืออีกนัยหนึ่งคือ เมื่อกำหนดพื้นที่ผิวของรูปทรงสามมิติแล้วรูปทรงใดมีปริมาตรมากที่สุด ซึ่งคำตอบของปัญหานี้คือ รูปทรงกลม โดยการพิสูจน์ปัญหานี้ มีผู้ศึกษาแต่ยังไม่มีความสมบูรณ์ ซึ่ง Steiner, Schwarz และ Hsiang ก็เป็นกลุ่มบุคคลหนึ่งซึ่งศึกษาปัญหานี้โดยใช้วิธีสมมาตร โดยพิจารณารูปร่างไอโซเพอริเมตริก Ω ซึ่ง Steiner และ Hsiang จะมีแนวคิดที่ค่อนข้างคล้ายกันคือ พิจารณา Ω ให้เป็นสมมาตรโดยการแบ่งของระนาบ แต่สำหรับแนวคิดของ Schwarz จะพิจารณาระหว่างระนาบที่ขนานกัน โดยพิจารณาจากสมบัติของทรงกลม ซึ่ง ณ. ที่นี้แนะนำวิธีการพิสูจน์วิธีของ Hsiang

ทฤษฎี ไอโซเพอริเมตริกของพื้นผิวเกิน(Hypersurfaces) ใน \mathbb{R}^3 คือ ทรงกลม



พิสูจน์ ให้ Ω เป็นขอบเขตใน \mathbb{R}^3 ซึ่ง $\Sigma = \partial\Omega$ และให้ $R(\Sigma)$ เป็นเซตของจุดที่ระยะเท่ากันของ Σ ที่ต่อเนื่อง

พิจารณาพื้นผิวเกิน (Hypersurfaces) $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ดังนั้นให้ขอบเขต $\Omega^+ = \Omega \cap P^+$

และ $\Omega^- = \Omega \cap P^-$ มีปริมาตรเท่ากัน, P^\pm เป็นกึ่งปริภูมิ (halfspace) กำหนดโดย P ตามในรูปที่ 17 สมมติ $A(\Sigma \cap P^+) \leq A(\Sigma \cap P^-)$ จะเห็นว่าขอบเขตที่สมมาตร $\Omega^- = \Omega^+ \cup S(\Omega^+)$

โดยที่ S แทนส่วนสะท้อนใน P เป็นขอบเขตของไอโซเพอริเมตริก

ในส่วน $A(\Sigma \cap P^+) = A(\Sigma \cap P^-)$ และ $\Sigma' = \partial\Omega'$ ได้จากสมบัติ regularity

ถ้า $R(\Sigma) \cap P = \emptyset$ ดังนั้น regular set ของ Σ' จะต้องเป็นทั้งเซตว่างและไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นสรุปว่า P เป็น regular set และตามสมบัติของ ความต่อเนื่อง $R(\Sigma) = R(\Sigma')$ ดังนั้น $\Sigma = \Sigma'$ ซึ่งจะได้ Ω สมมาตรใน P

จากพื้นผิวเกิน สามารถแบ่งปริมาตรออกเป็นสองส่วน ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า Ω คือทรงกลม □

จากการศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ และปัญหาไอโซเพอริเมตริกใน \mathbb{R}^3 ข้างต้นนั้น งานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอแนวความคิดว่า ถ้ากำหนดไอโซเพอริเมตริกโดเมน (คือ ไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ) และกำหนดปริมาตรของรูปทรงสามมิติ ให้เท่ากัน แล้วอัตราส่วนของปริมาตรกับพื้นที่ผิว (Isovolume) ที่อยู่ในสองระนาบที่กำหนด ของแต่ละรูปทรงนั้น รูปทรงใดจะมีค่ามากที่สุด โดยใช้โปรแกรม Maple ในการคำนวณหาค่าปริมาตรและพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ

ในการศึกษานี้ได้ทำการศึกษารูปทรงสามมิติที่แตกต่างกัน จำนวน 5 รูปทรง อันได้แก่ ทรงกลม ทรงกระบอก กรวย พาราโบลอยด์ และ ไฮเพอร์โบลอยด์ โดยให้จุดศูนย์กลางของทุกรูปทรงอยู่ที่ระนาบ $z = 0$ และกำหนดระนาบที่ขนานกันเป็น $z_1 \geq 0$ และ $z_2 \leq 0$

หมายเหตุ ในการศึกษาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ศึกษาอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิว โดยไม่ได้คำนึงถึงหน่วย

ตัวอย่างที่ 1

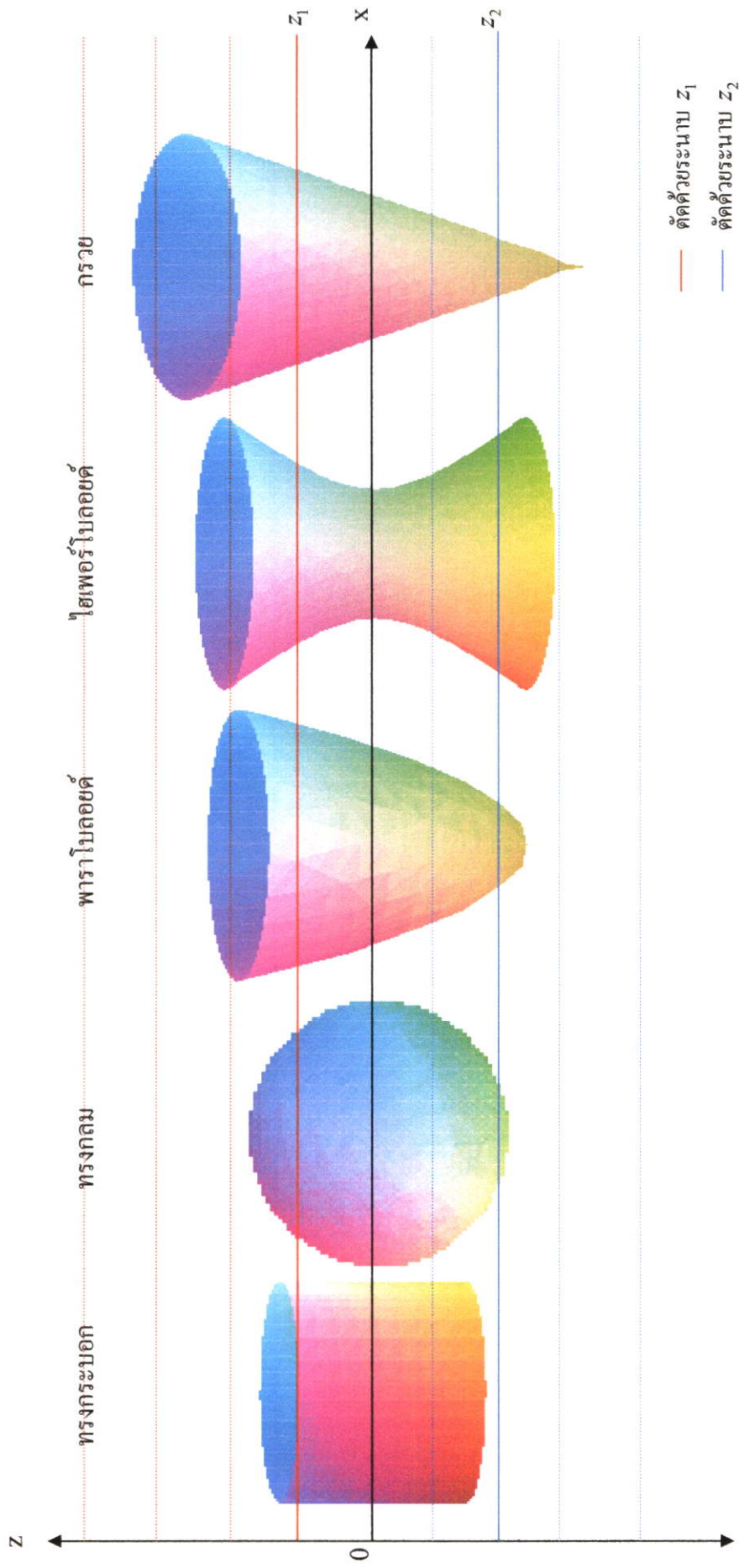
กำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูปทรงเป็น 10 หน่วย และไอโซเพอริเมตริกโดเมน

(Isoperimetric domain) เป็นรูปวงกลมมีรัศมี เท่ากับ $\left(\frac{3 * v}{4 * \pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.3363$ หน่วย ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อ

กำหนดปริมาตรเต็มและไอโซเพอริเมตริกโดเมนแล้วจะมีความสูงและสมการที่แตกต่างกันดังนี้

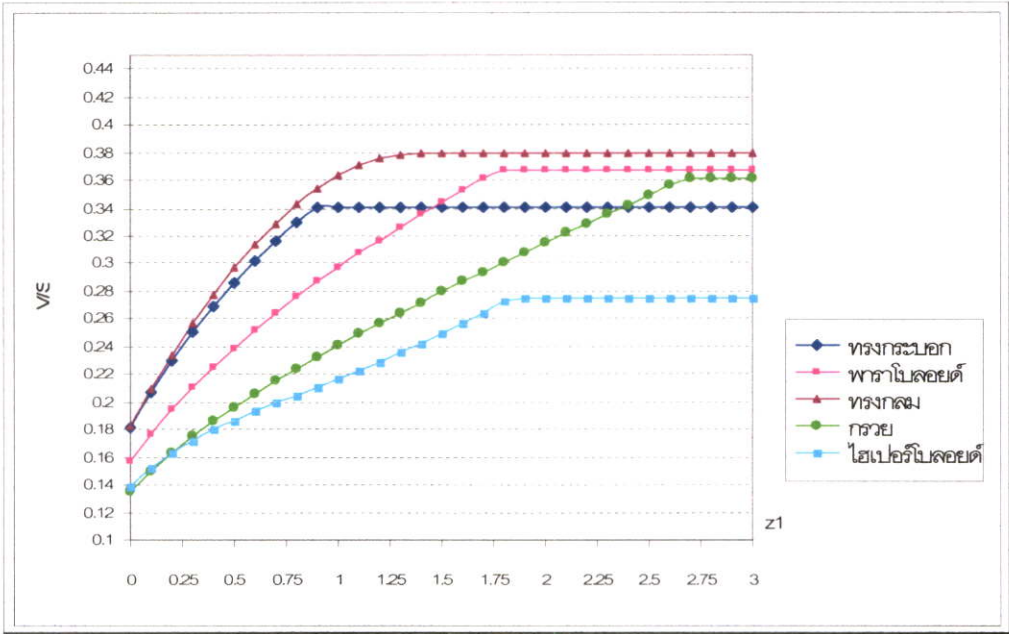
ตารางที่ 4.1 แสดงความสูงและสมการของรูปทรงต่างๆที่ปริมาตรเต็ม 10 หน่วย

รูป	ความสูง(หน่วย)	สมการ
1. ทรงกลม	2.6726	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
2. ทรงกระบอก	1.7817	$x^2 + y^2 = r^2$
3. กรวย	5.3453	$x^2 + y^2 = z^2$
4. พาราโบลอยด์	3.5635	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = z$
5. ไฮเพอร์โบลอยด์	3.6628	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = (1 + z^2)$

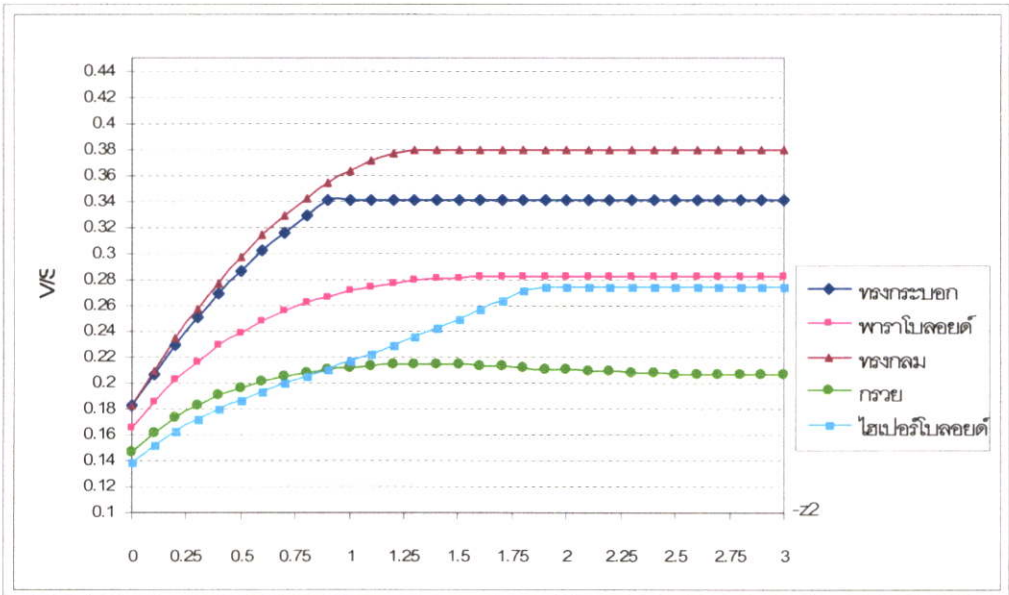


รูปที่ 4.14 ลักษณะการตัดรูปทรงต่างๆ ด้วยระนาบ z_1 และ z_2 โดยที่จุดศูนย์กลางแต่ละรูปทรงอยู่ที่ $z = 0$

ถ้ารูปทั้ง 5 รูปทรงดังกล่าวถูกตัดด้วยระนาบ $z_1 \geq 0$ และ $z_2 \leq 0$ ที่กำหนดให้มีค่าแตกต่างกัน แล้วอัตราส่วน Isovolume ของรูปทรงใดมากที่สุด ซึ่งได้แยกพิจารณาเป็นกรณี และแสดงผลโดยการเขียนกราฟเพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา ดังนี้

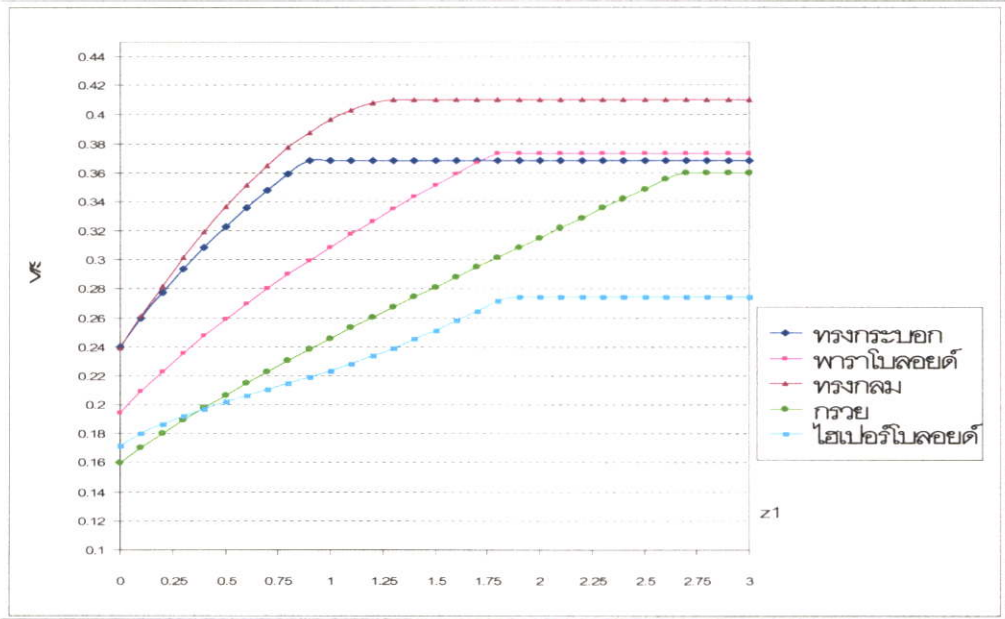


รูปที่ 4.15 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -0.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

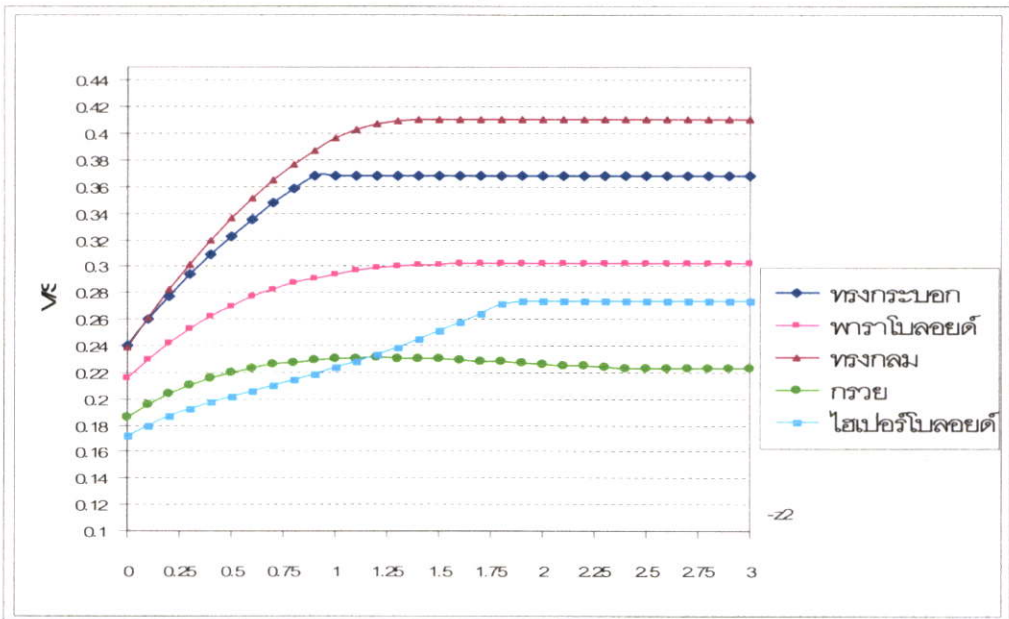


รูปที่ 4.16 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 0.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.15 จะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -0.5$ จะตัดส่วนล่างของ
 ทุกรูป และ ถ้า $|z_2| \leq \frac{r}{2}$ แล้วรูปทรงที่มีค่า อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ
 ทรงกลม ในทำนองเดียวกัน รูปที่ 4.16 กำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 0.5$ จะตัดส่วนบนของทุกรูป
 และ ถ้า $z_1 \leq \frac{r}{2}$ แล้วรูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม
 เช่นกัน

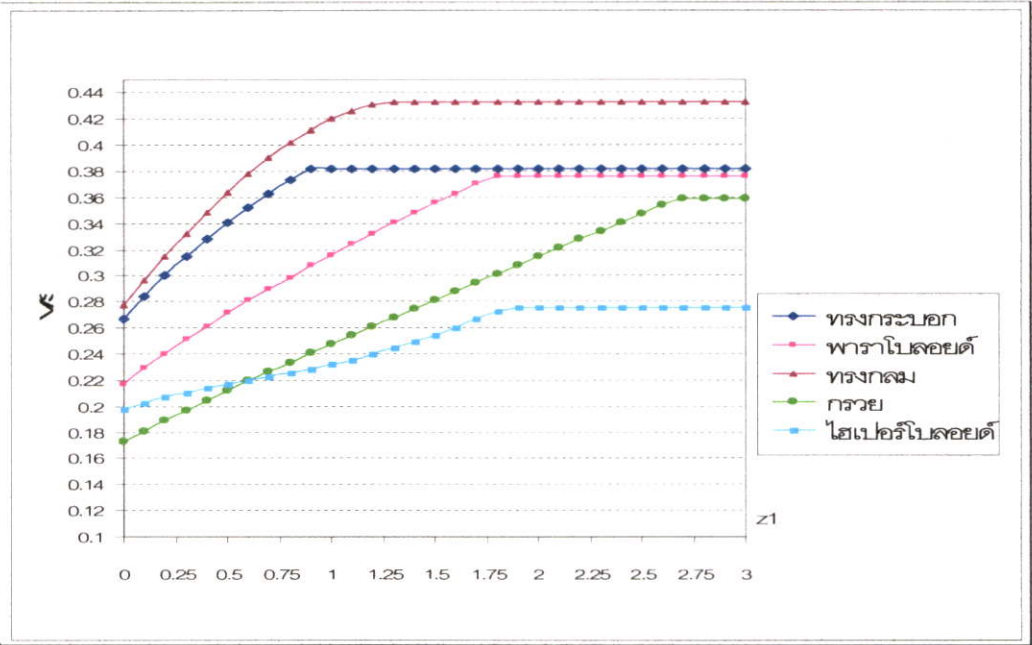


รูปที่ 4.17 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็ม
 ของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -0.75$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

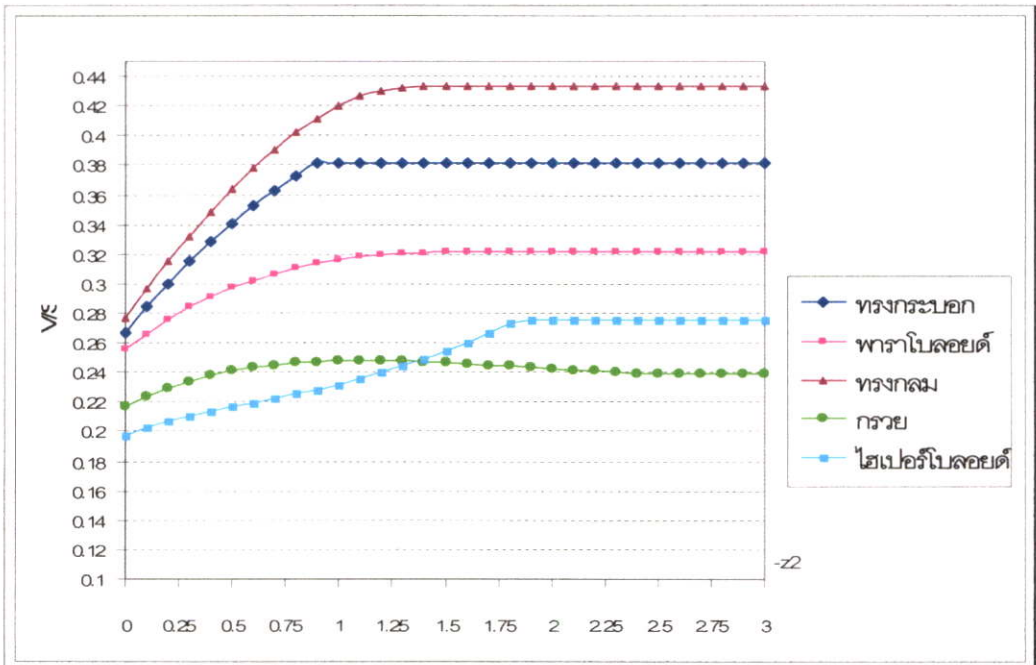


รูปที่ 4.18 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็ม
 ของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 0.75$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.17 จะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -0.75$ ซึ่งตัดส่วนล่างของทุกรูปและรูปที่ 4.18 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 0.75$ ซึ่งตัดส่วนบนของทุกรูป โดยมี $|z_2| > \frac{r}{2}$, $z_1 > \frac{r}{2}$ ตามลำดับ รูปทรงที่มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือทรงกระบอก ในช่วงแรกและต่อมาจะเปลี่ยนเป็น ทรงกลม

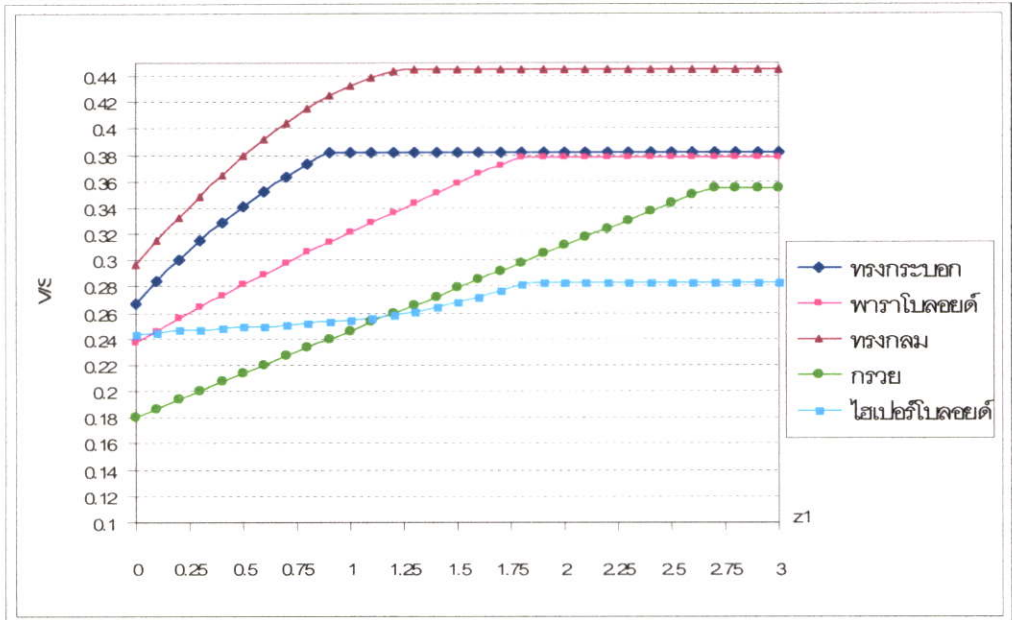


รูปที่ 4.19 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -1$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

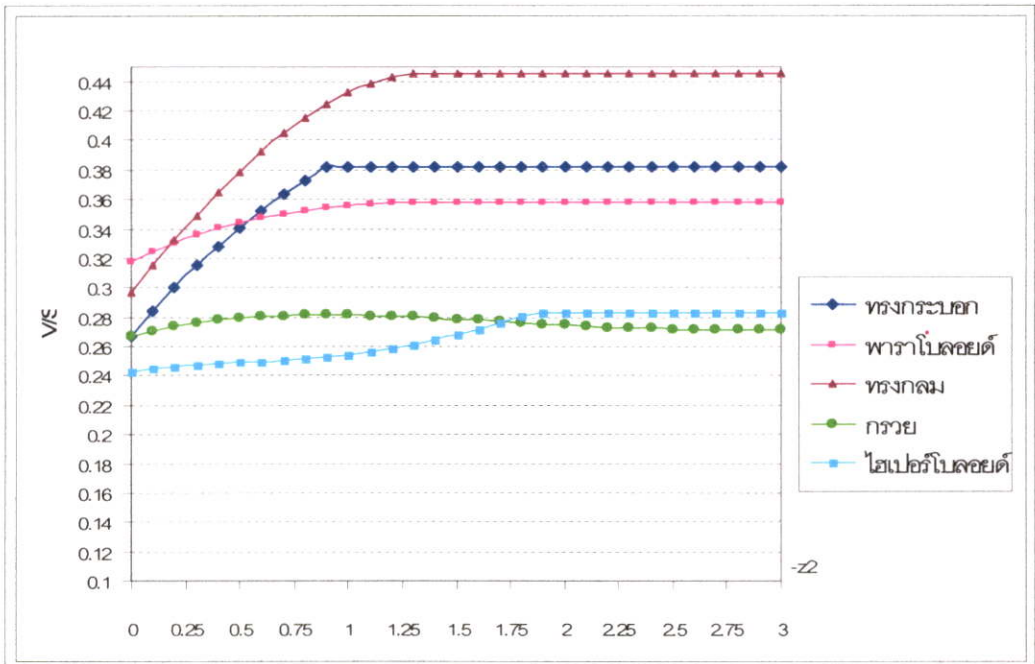


รูปที่ 4.20 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 1$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.19 และรูปที่ 4.20 จะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดคพิกัดความสูงที่ $z_2 = -1$, $z_1 = 1$ จะตัดส่วนล่างและบนของทุกรูป ยกเว้นรูปทรงกระบอก รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม

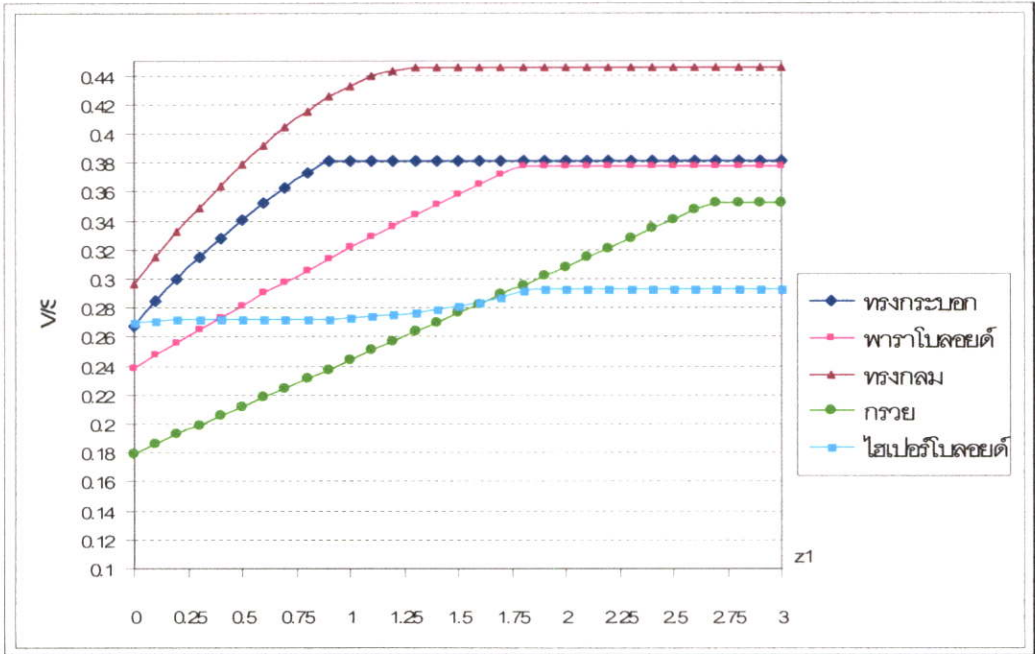


รูปที่ 4.21 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -1.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

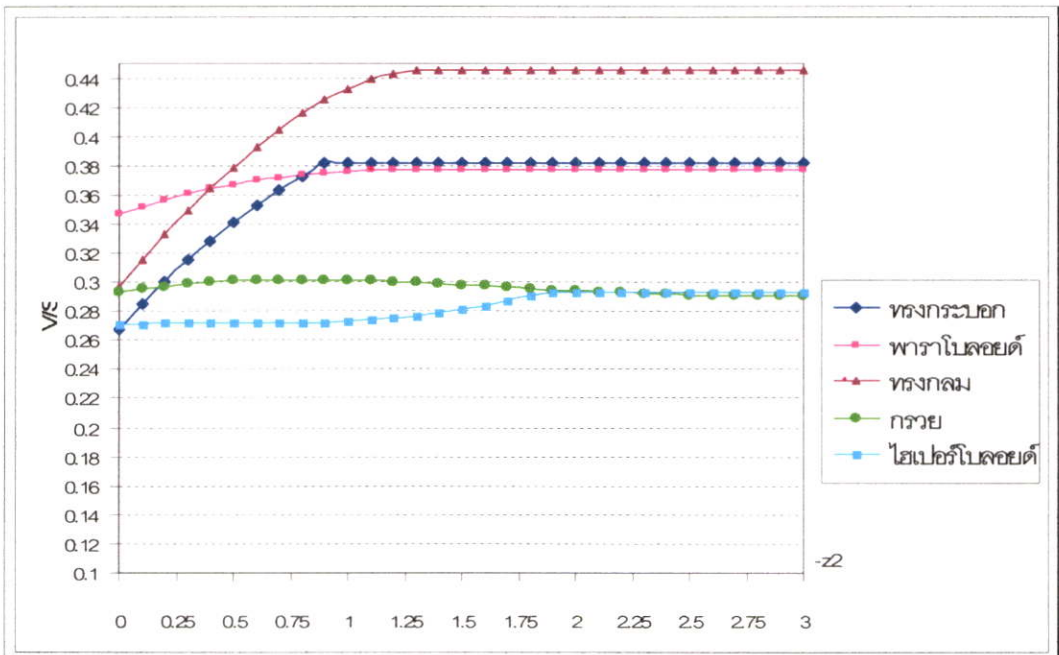


รูปที่ 4.22 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 1.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -1.5$, $z_1 = 1.5$ จะตัดส่วนล่างและบนของทุกรูปยกเว้น ทรงกระบอกและทรงกลม ซึ่งในรูปที่ 4.21 รูปทรงที่มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม ส่วนในรูปที่ 4.22 จะเห็นได้ว่าถ้า $z_1 \geq r$ จะทำให้พาราโบลอยด์มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก และเปลี่ยนเป็น ทรงกลม ในช่วงหลัง

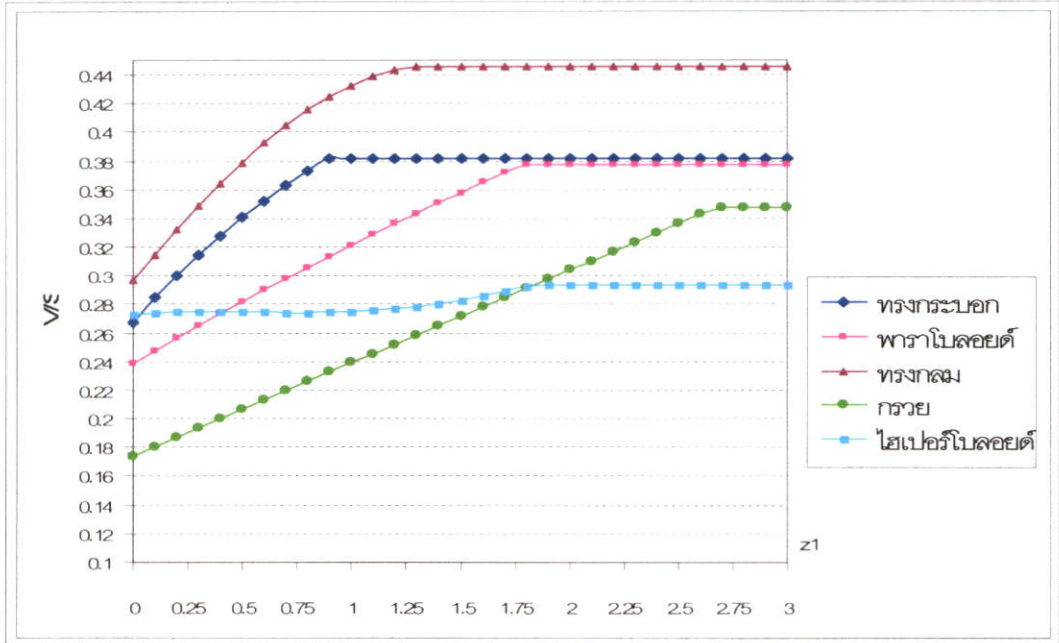


รูปที่ 4.23 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -1.8$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

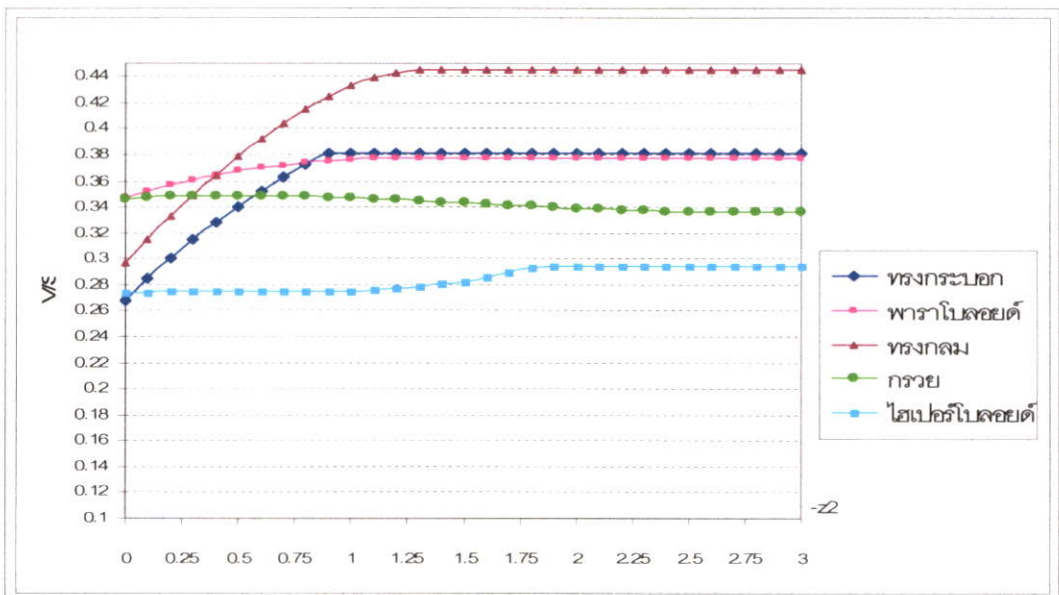


รูปที่ 4.24 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 1.8$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

ในรูปที่ 4.23 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -1.8$ ซึ่งตัดส่วนล่างของทุกรูปยกเว้น ทรงกระบอก, ทรงกลมและพาราโบลอยด์ รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม แต่ในรูปที่ 4.24 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 1.8$ ซึ่งตัดส่วนบนของทุกรูปยกเว้น ทรงกระบอก, ทรงกลมและพาราโบลอยด์ นั้นจะเห็นได้ว่าถ้า $z_1 \geq r$ จะทำให้ พาราโบลอยด์ มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก และช่วงหลังจะเปลี่ยนเป็นทรงกลม

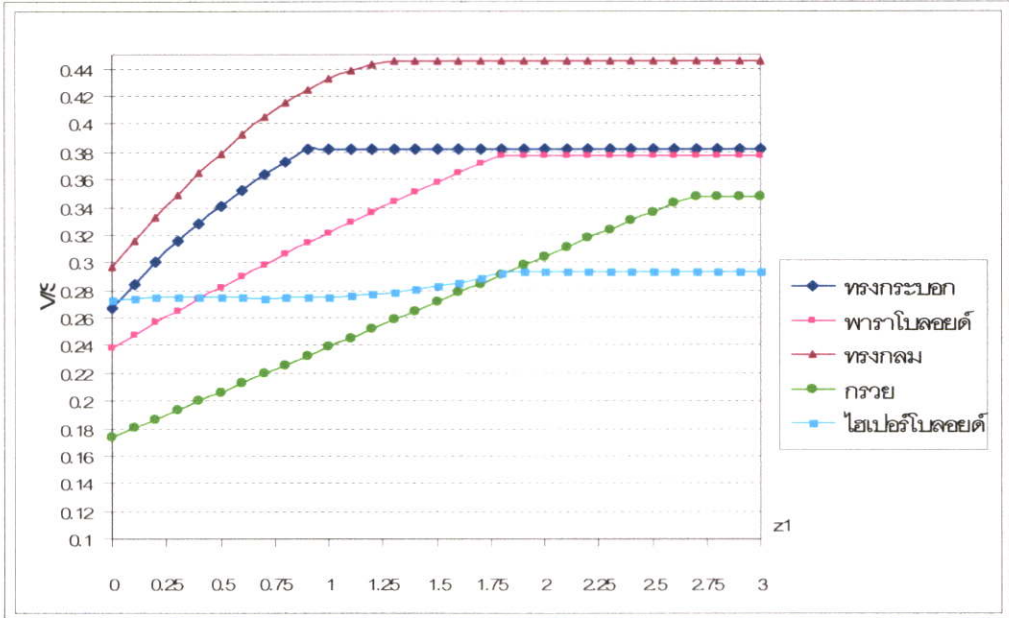


รูปที่ 4.25 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -2.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

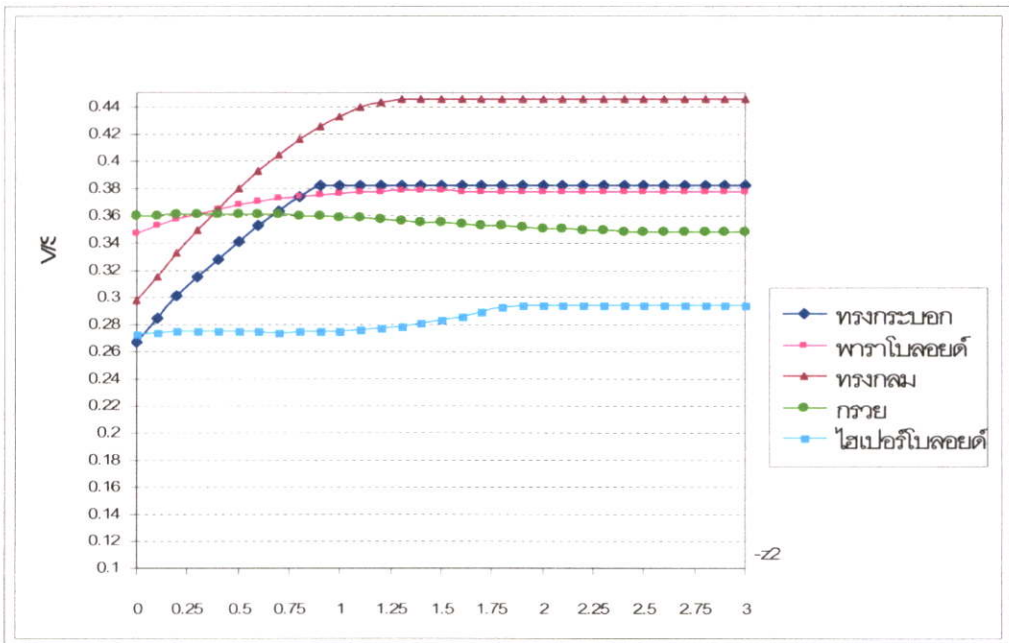


รูปที่ 4.26 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 2.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.25 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -2.5$ ซึ่งตัดส่วนล่างของกรวย จะเห็นได้ว่ารูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม และ รูปที่ 4.26 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 2.5$ ซึ่งตัดส่วนบนของกรวยนั้น รูปพาราโบลอยด์ เป็นรูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก และเปลี่ยนเป็น ทรงกลม ในช่วงหลัง



รูปที่ 4.27 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -3$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน



รูปที่ 4.28 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 10 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 3$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.27 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -3$ จะเห็นได้ว่า รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุด คือ ทรงกลม , แต่ที่พิกัดความสูงที่ $z_1 = 3$ ในรูปที่ 4.28 นั้น อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุด ในช่วงแรกคือ กรวย และต่อมาจะเปลี่ยนเป็น พาราโบลอยด์ และ เป็นทรงกลม ในช่วงหลัง

สรุปผลการวิจัย (ตัวอย่างที่ 1) การเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวในสองระนาบ ของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดค่าไอโซเพอริเมตริกโคเมนและปริมาตรได้ดังนี้

1. กรณีที่ $|z_1|, |z_2|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของความสูงของทรงกระบอก (เนื่องจากทรงกระบอกมีความสูงน้อยที่สุด หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าระนาบตัดทุกรูปทรง) ให้พิจารณาที่ $|z_1|$ และ $|z_2|$ ถ้า $|z_1|$ หรือ $|z_2|$ มากกว่าครึ่งหนึ่งของรัศมีนั้น (ซึ่งได้ข้อสังเกตจากตารางที่ ข.15 โดยแสดงในภาคผนวก ข) ผลที่ได้ตามมาก็คือ ในช่วงแรกๆทรงกระบอกจะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุด และต่อมาจะเปลี่ยนเป็นทรงกลมในช่วงหลังๆ ในทำนองเดียวกัน ถ้าหาก $|z_1|$ หรือ $|z_2|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของรัศมี ดังนั้นอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของทรงกลมจะมีค่ามากที่สุด ดังที่จะเห็นผลที่แสดงในรูปที่ 4.15, 4.16, 4.17 และ 4.18

2. กรณีที่ ระนาบใดระนาบหนึ่งตัดทุกรูปทรงยกเว้นทรงกระบอก จะเห็นได้ว่าทรงกลม มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิว มากที่สุด ดังได้แสดงให้เห็นในรูปที่ 4.19 , 4.20

3. กรณีที่ $|z_1|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งของความสูงพาราโบลอยด์หรือไฮเพอร์โบลอยด์ แต่ไม่ต่ำกว่าครึ่งความสูงของทรงกลมนั้น พบว่าถ้า $z_1 \geq r$ โบลอยด์จะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก และเปลี่ยนเป็น ทรงกลม ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4.22 , 4.24 (หรือบางครั้งจะพบว่า กรวย มีอัตราส่วนที่สูงที่สุด แล้วจะตามมาด้วยพาราโบลอยด์ และทรงกลมตามลำดับ และอีกนัยหนึ่งคือ ถ้า $z_1 < r$ อัตราส่วนที่มากที่สุดคือ ทรงกลม ซึ่งนำเสนอค่าตัวเลขไว้ในภาคผนวก ข)

ส่วนในกรณีที่ $|z_2|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งของความสูงพาราโบลอยด์หรือไฮเพอร์โบลอยด์ แต่ไม่ต่ำกว่าครึ่งความสูงของทรงกลมนั้น อัตราส่วนของปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4.21 , 4.23

4. กรณีที่ระนาบที่กำหนด ตัดความสูงของกรวย ซึ่งผลที่ได้คือ ถ้า $|z_2|$ น้อยกว่าครึ่งของความสูงของกรวย พบว่า ทรงกลมจะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุด ดังแสดงให้เห็นในรูปที่ 4.25 และถ้า $|z_1|$ น้อยกว่าครึ่งของความสูงกรวย อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิว

ที่มากที่สุดคือ กรวย ในระยะแรก และต่อมาจะเปลี่ยนเป็นพาราโบลอยด์และทรงกลม ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.26

5. กรณีที่กำหนดความสูงของระนาบใดระนาบหนึ่งสูงกว่าทุกรูป จะพบว่า ถ้า $|z_2|$ มากกว่าครึ่งของความสูงของทุกรูป นั้น อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของ ทรงกลมจะมีค่ามากที่สุด ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4.27 และถ้า $|z_1|$ มากกว่าครึ่งของความสูงของทุกรูปจะพบว่า กรวยจะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุดในระยะแรก และจะเปลี่ยนเป็น พาราโบลอยด์ และทรงกลม ในระยะต่อมา ดังรูปที่ 4.28

ข้อสังเกต ถ้าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุด ในตอนแรกเป็นพาราโบลอยด์ ช่วงหลังจะเปลี่ยนเป็นทรงกลม แต่ถ้า กรวยมากที่สุดในช่วงแรกนั้น ช่วงหลังจะเปลี่ยนเป็นพาราโบลอยด์ และ ทรงกลม ตามมา

ตัวอย่างที่ 2

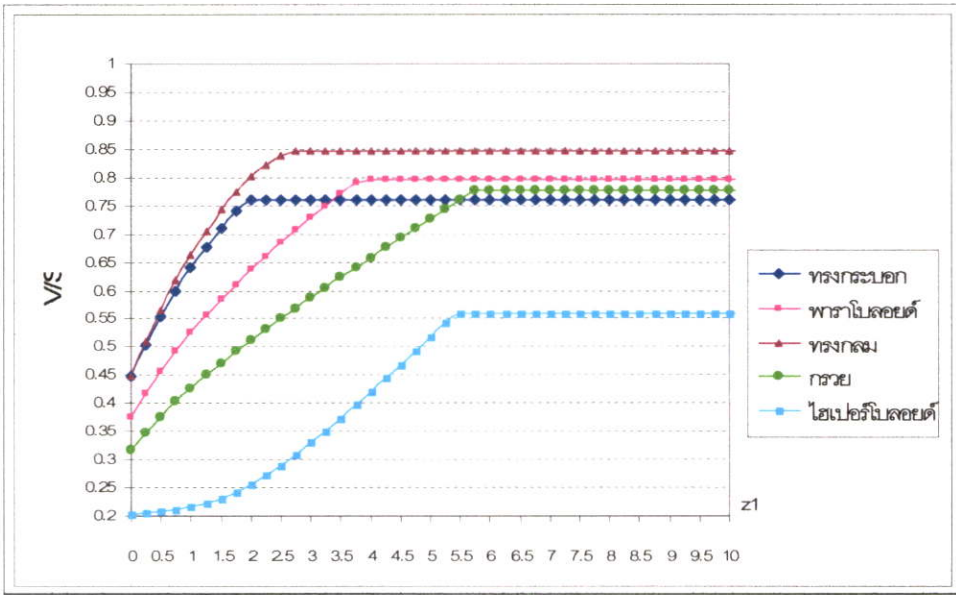
กำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูปทรงเป็น 100 หน่วย และ ไอโซเพอริเมตริกโดเมน

(Isoperimetric domain) เป็นรูปวงกลมมีรัศมี เท่ากับ $\left(\frac{3 \cdot v}{4 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2.879$ หน่วย ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดปริมาตรเต็มและไอโซเพอริเมตริกโดเมนแล้วจะมีความสูงและสมการที่แตกต่างกันดังนี้

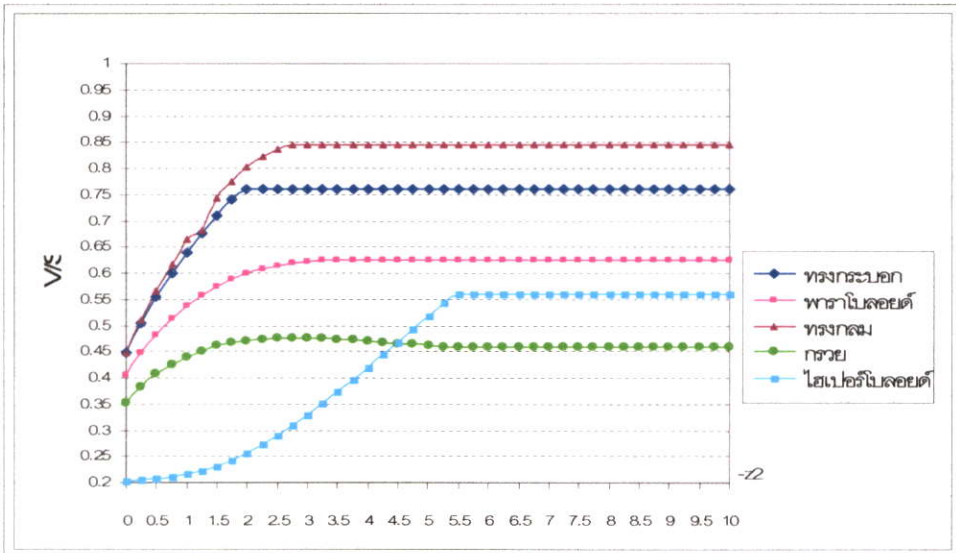
ตารางที่ 4.2 แสดงความสูงและสมการของรูปทรงต่างๆที่ปริมาตรเต็มเป็น 100 หน่วย

รูป	ความสูง(หน่วย)	สมการ
1. ทรงกลม	5.758	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
2. ทรงกระบอก	3.8387	$x^2 + y^2 = r^2$
3. กรวย	11.5161	$x^2 + y^2 = z^2$
4. พาราโบลอยด์	7.6774	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = z$
5. ไฮเพอร์โบลอยด์	10.7999	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = (1 + z^2)$

ถ้ารูปทั้ง 5 รูปทรงดังกล่าวถูกตัดด้วยระนาบ $z_1 \geq 0$ และ $z_2 \leq 0$ ที่กำหนดให้มีค่าแตกต่างกัน แล้วอัตราส่วน Isovolume ของรูปทรงใดมากที่สุด ซึ่งได้แยกพิจารณาเป็นกรณี และแสดงผลโดยการเขียนกราฟเพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา ดังนี้

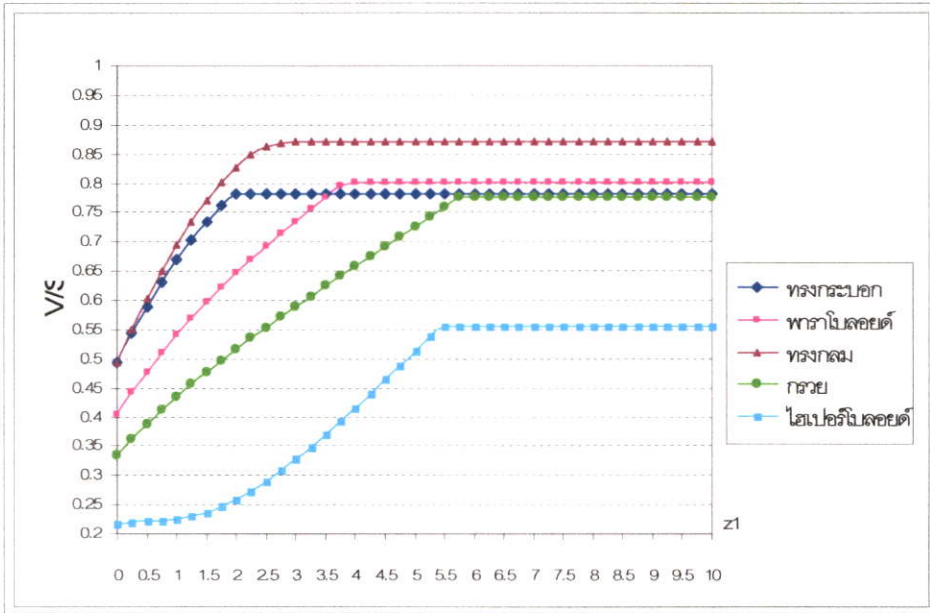


รูปที่ 4.29 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -1.3$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

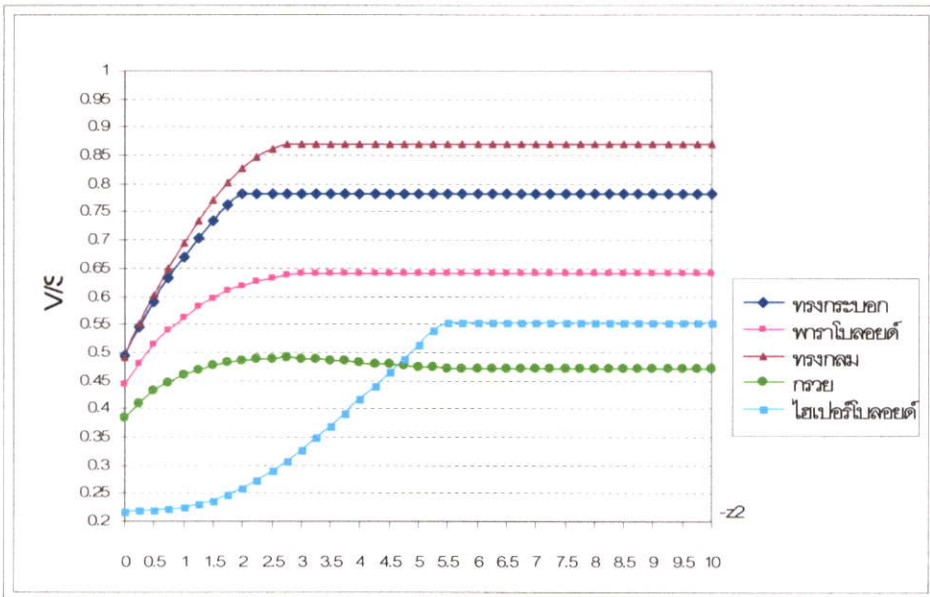


รูปที่ 4.30 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 1.3$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.29 จะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -1.3$ จะตัดส่วนล่างของทุกรูป และ ถ้า $|z_2| \leq \frac{r}{2}$ แล้วรูปทรงที่มีค่า อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม ในทำนองเดียวกัน รูปที่ 4.30 กำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 1.3$ จะตัดส่วนบนของทุกรูป และ ถ้า $z_1 \leq \frac{r}{2}$ แล้วรูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม เช่นกัน



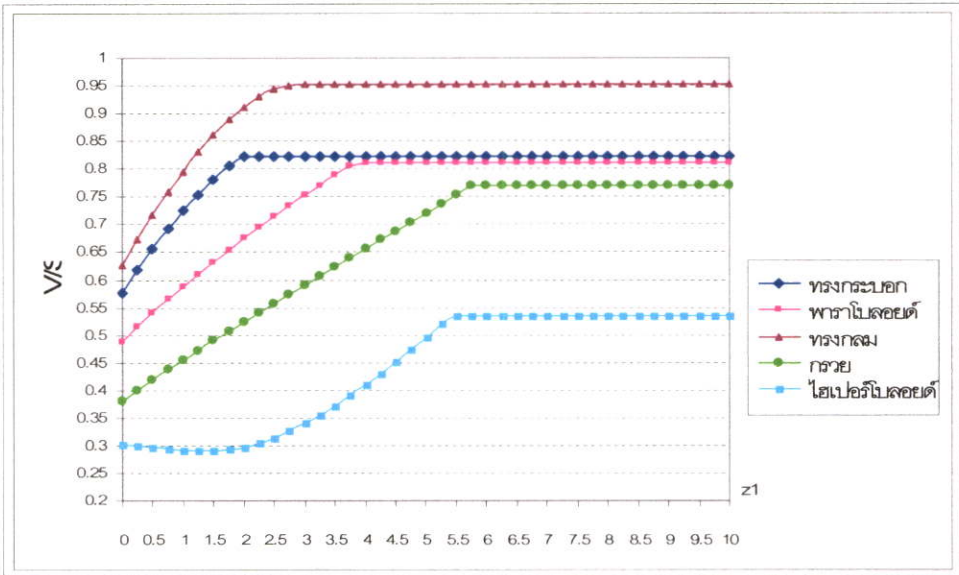
รูปที่ 4.31 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -1.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน



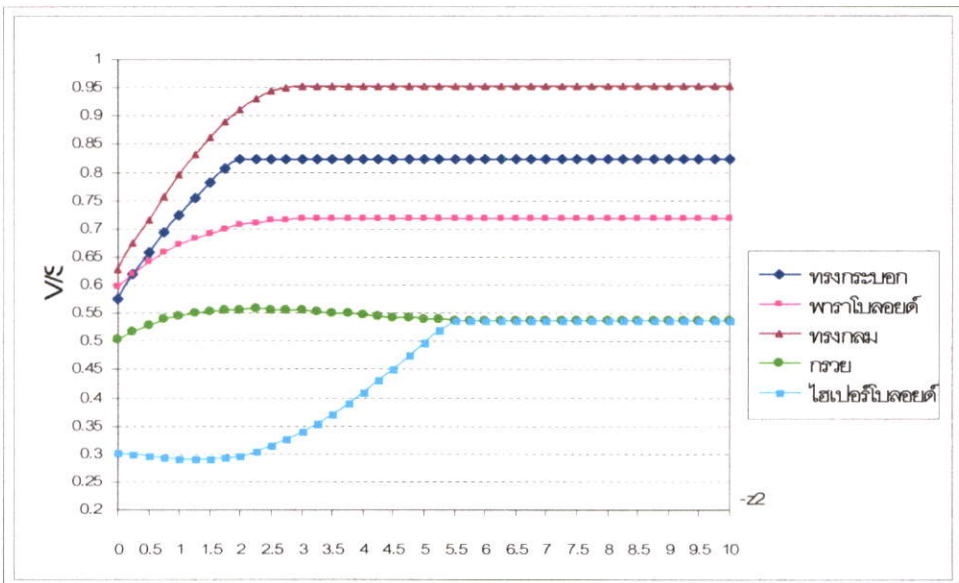
รูปที่ 4.32 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 1.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.31 จะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -1.5$ ซึ่งตัดส่วนล่างของทุกรูปและรูปที่ 4.32 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 1.5$ ซึ่งตัดส่วนบนของทุกรูป โดยมี $|z_2| > \frac{r}{2}$,

$z_1 > \frac{r}{2}$ ตามลำดับ รูปทรงที่มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกระบอก ในช่วงแรกและต่อมาจะเปลี่ยนเป็น ทรงกลม

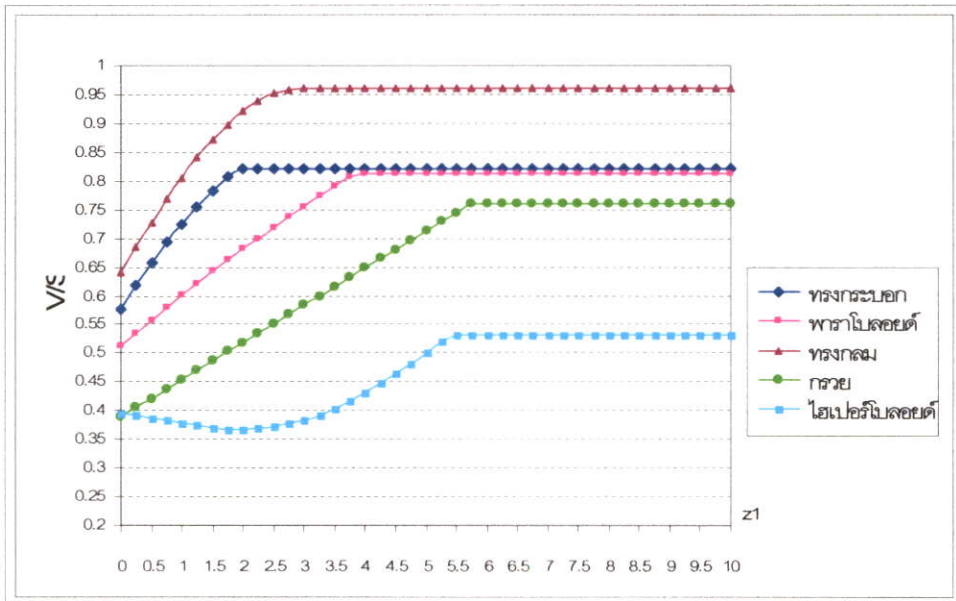


รูปที่ 4.33 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -2.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

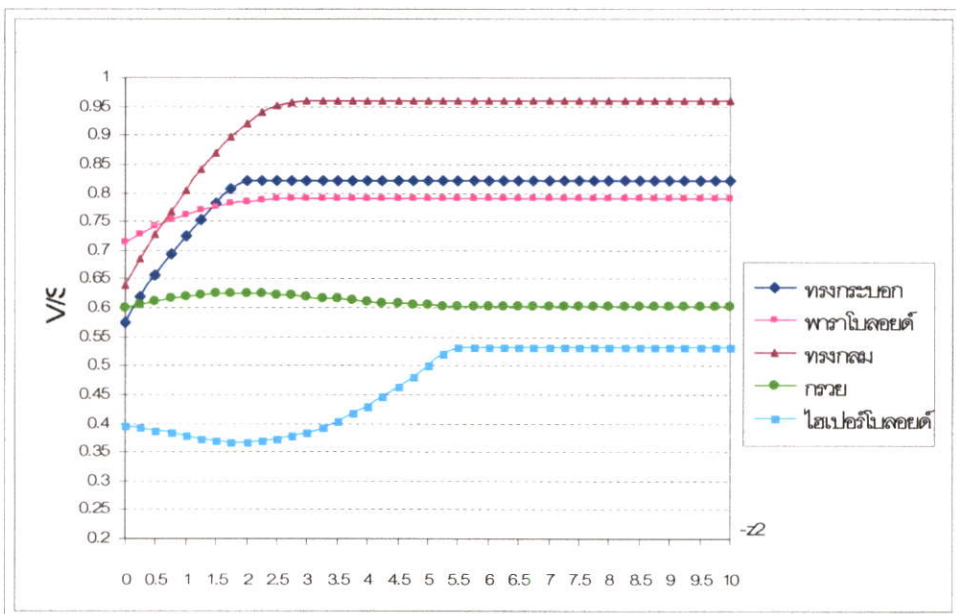


รูปที่ 4.34 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 2.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.33 และรูปที่ 4.34 จะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดพิสัยความสูงที่ $z_2 = -2.5$, $z_1 = 2.5$ จะตัดส่วนล่างและบนของทุกรูป ยกเว้นรูปทรงกระบอก รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม

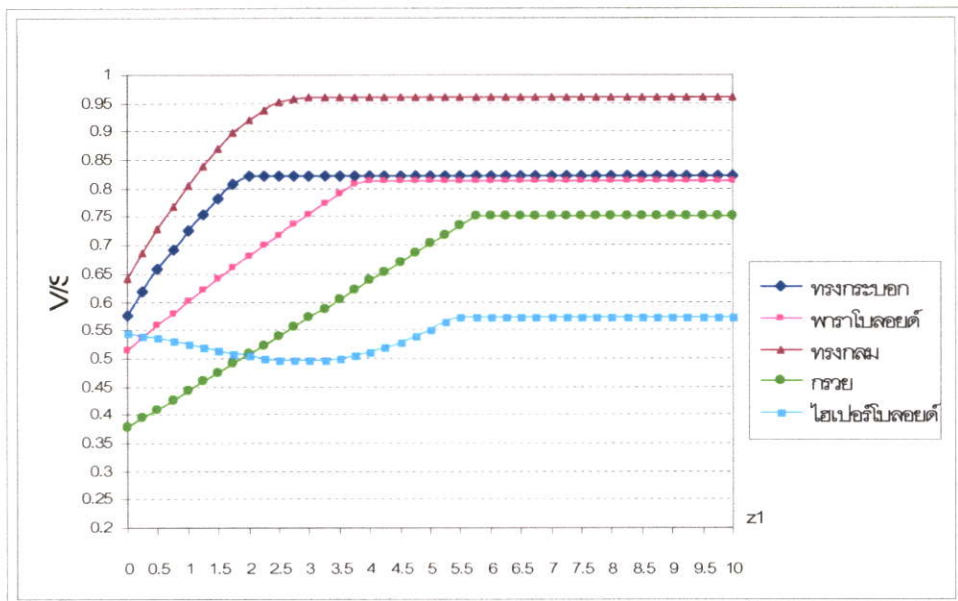


รูปที่ 4.35 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -3.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

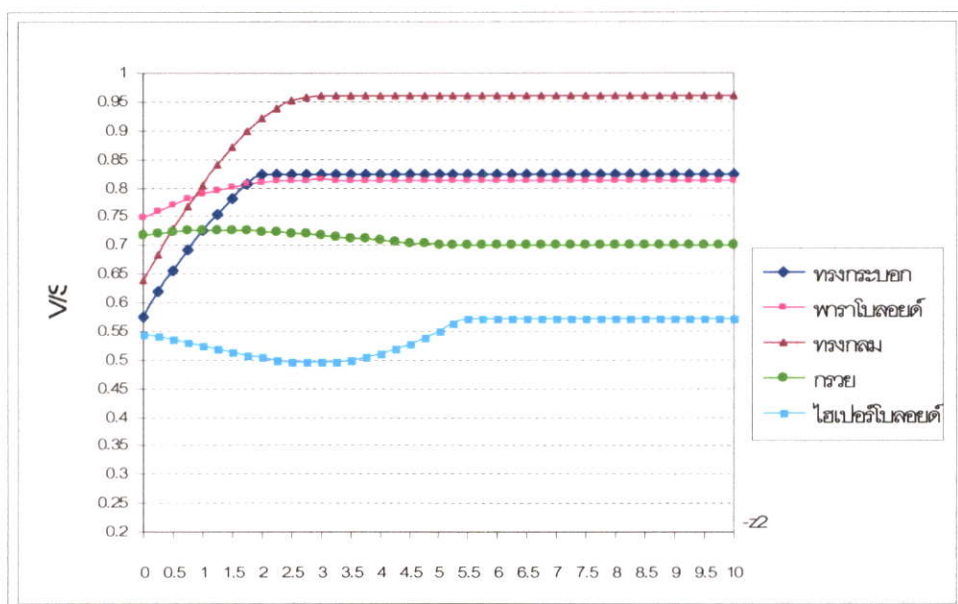


รูปที่ 4.36 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 3.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -3.5$, $z_1 = 3.5$ จะตัดส่วนล่างและบนของทุกรูปยกเว้น ทรงกระบอกและทรงกลม ซึ่งในรูปที่ 4.35 รูปทรงที่มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม ส่วนในรูปที่ 4.36 จะเห็นได้ว่าถ้า $z_1 \geq r$ จะทำให้พาราโบลอยด์มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก และเปลี่ยนเป็น ทรงกลม ในช่วงหลัง

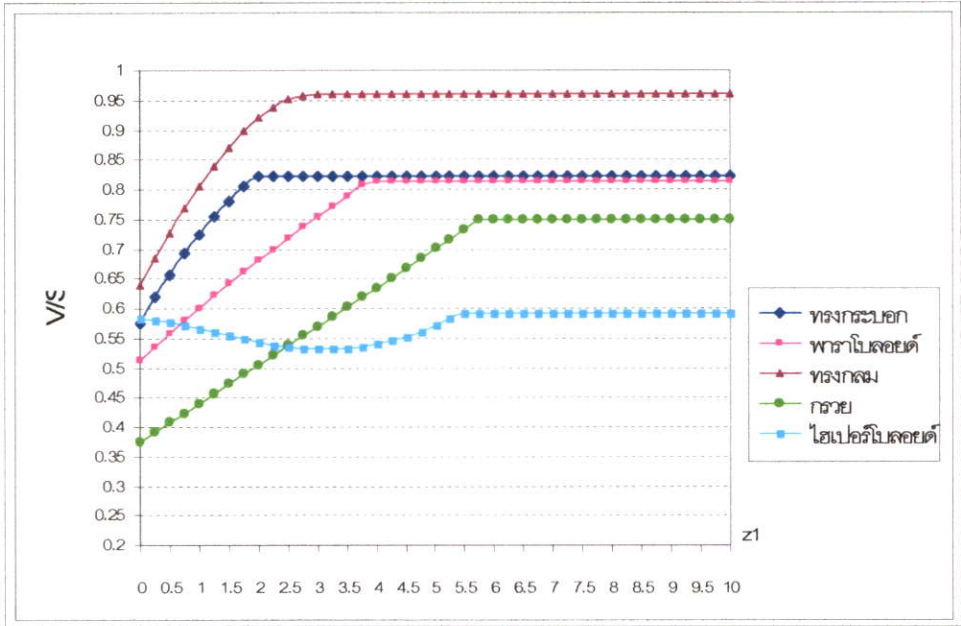


รูปที่ 4.37 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

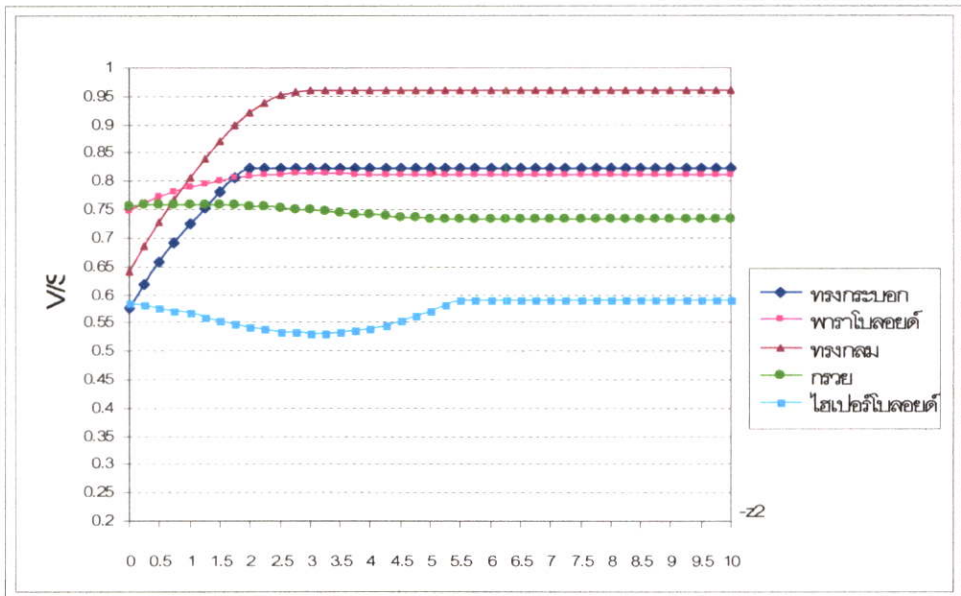


รูปที่ 4.38 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

ในรูปที่ 4.37 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -5$ ซึ่งตัดส่วนล่างของทุกรูปยกเว้นทรงกระบอก, ทรงกลม และพาราโบลอยด์ รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม แต่ในรูปที่ 4.38 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 5$ ซึ่งตัดส่วนบนของทุกรูปยกเว้นทรงกระบอก, ทรงกลม และพาราโบลอยด์ นั้นจะเห็นได้ว่าถ้า $z_1 \geq r$ จะทำให้ พาราโบลอยด์ มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก และช่วงหลังจะเปลี่ยนเป็นทรงกลม

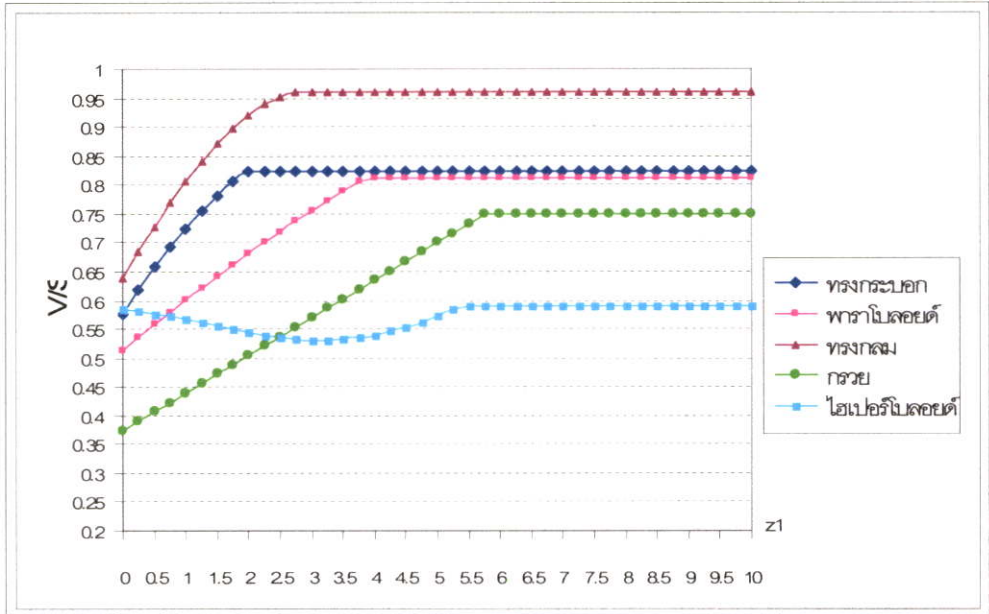


รูปที่ 4.39 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -5.5$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน

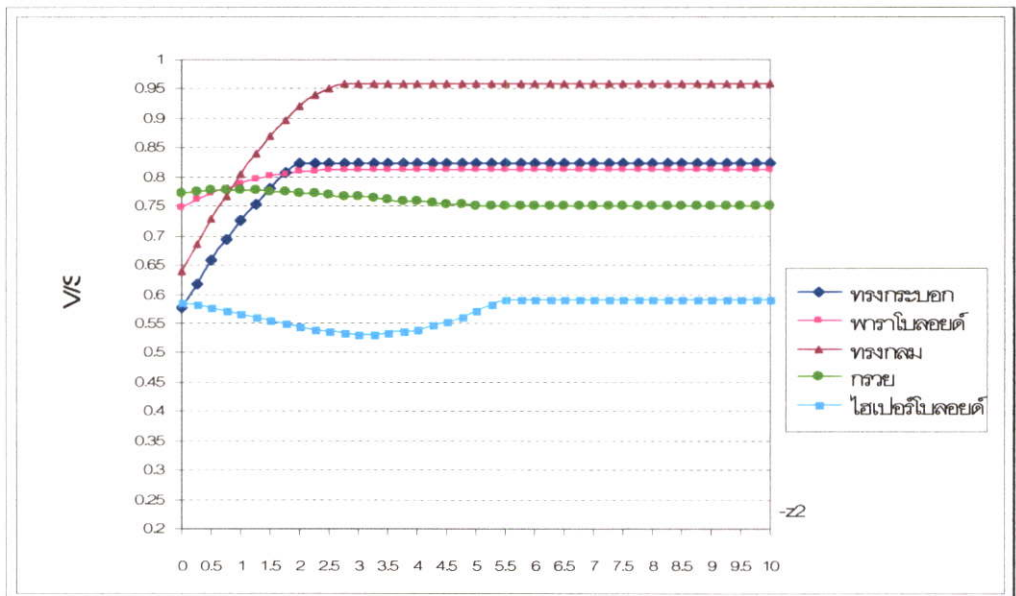


รูปที่ 4.40 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 5.5$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.39 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -5.5$ ซึ่งตัดส่วนล่างของกรวย จะเห็นได้ว่ารูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม และ รูปที่ 4.40 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_1 = 5.5$ ซึ่งตัดส่วนบนของกรวยนั้น รูปกรวย เป็นรูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก แล้วเปลี่ยนเป็นพาราโบลอยด์ ในช่วงต่อมา และ ทรงกลม ในช่วงหลัง



รูปที่ 4.41 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_2 = -15$ และ z_1 ที่มีค่าแตกต่างกัน



รูปที่ 4.42 แสดงอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดปริมาตรเต็มของแต่ละรูป 100 หน่วย ตัดที่ความสูงเดียวกันที่ $z_1 = 15$ และ z_2 ที่มีค่าแตกต่างกัน

จากรูปที่ 4.41 เมื่อกำหนดพิกัดความสูงที่ $z_2 = -15$ จะเห็นได้ว่า รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุด คือ ทรงกลม , แต่ที่พิกัดความสูงที่ $z_1 = 15$ ในรูปที่ 4.42 นั้น อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรกคือ กววย และต่อมาจะเปลี่ยนเป็น พาราโบลอยด์ และ เป็นทรงกลม ในช่วงหลัง

สรุปผลการวิจัย (ตัวอย่างที่ 2) การเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวในสองระนาบ ของรูปทรงต่างๆ เมื่อกำหนดค่าไอโซเพอริเมตริกโคเมนและปริมาตร ได้ดังนี้

1. กรณีที่ $|z_1|, |z_2|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของความสูงของทรงกระบอก (เนื่องจากทรงกระบอกมีความสูงน้อยที่สุด หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าระนาบตัดทุกรูปทรง) ให้พิจารณาที่ $|z_1|$ และ $|z_2|$ ถ้า $|z_1|$ หรือ $|z_2|$ มากกว่าครึ่งหนึ่งของรัศมีนั้น (ซึ่งได้ข้อสังเกตจากตารางที่ ข.31 โดยแสดงในภาคผนวก ข) ผลที่ได้ตามมาก็คือ ในช่วงแรกๆทรงกระบอกจะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุด และต่อมาจะเปลี่ยนเป็นทรงกลมในช่วงหลังๆ ในทำนองเดียวกัน ถ้าหาก $|z_1|$ หรือ $|z_2|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของรัศมี ดังนั้นอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของทรงกลมจะมีค่ามากที่สุด ดังที่จะเห็นผลที่แสดงในรูปที่ 4.29,4.30,4.31 และ 4.32

2. กรณีที่ ระนาบใดระนาบหนึ่งตัดทุกรูปทรงยกเว้นทรงกระบอก จะเห็นได้ว่าทรงกลม มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิว มากที่สุด ดังได้แสดงให้เห็นในรูปที่ 4.33,4.34

3. กรณีที่ $|z_1|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งของความสูงพาราโบลอยด์หรือไฮเพอร์โบลอยด์ แต่ไม่ต่ำกว่าครึ่งความสูงของทรงกลมนั้น พบว่าถ้า $z_1 \geq r$ โบลอยด์จะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดในช่วงแรก และเปลี่ยนเป็น ทรงกลม ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4.36 , 4.38 (หรือบางครั้งจะพบว่า กรวย มีอัตราส่วนที่สูงที่สุด แล้วจะตามมาด้วยพาราโบลอยด์ และทรงกลม ตามลำดับ และอีกนัยหนึ่งคือ ถ้า $z_1 < r$ อัตราส่วนที่มากที่สุดคือ ทรงกลม ซึ่งนำเสนอค่าตัวเลขไว้ในภาคผนวก ข)

ส่วนในกรณีที่ $|z_2|$ น้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งของความสูงพาราโบลอยด์หรือไฮเพอร์โบลอยด์ แต่ไม่ต่ำกว่าครึ่งความสูงของทรงกลมนั้น อัตราส่วนของปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ ทรงกลม ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4.35, 4.37

4. กรณีที่ระนาบที่กำหนด ตัดความสูงของกรวย ซึ่งผลที่ได้คือ ถ้า $|z_2|$ น้อยกว่าครึ่งของความสูงของกรวย พบว่า ทรงกลมจะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุด ดังแสดงให้เห็นในรูปที่ 4.39 และถ้า $|z_1|$ น้อยกว่าครึ่งของความสูงกรวย อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดคือ กรวย ในระยะแรก และต่อมาจะเปลี่ยนเป็นพาราโบลอยด์และทรงกลม ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.40

5. กรณีที่กำหนดความสูงของระนาบใดระนาบหนึ่งสูงกว่าทุกรูป จะพบว่า ถ้า $|z_2|$ มากกว่าครึ่งของความสูงของทุกรูป นั้น อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของ ทรงกลมจะมีค่ามากที่สุด ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 4.41 และถ้า $|z_1|$ มากกว่าครึ่งของความสูงของทุกรูปจะพบว่า กรวยจะมี

อัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุดในระยะแรก และจะเปลี่ยนเป็น พาราโบลอยด์ และ ทรงกลม ในระยะต่อมา ดังในรูปที่ 442

ข้อสังเกต ถ้าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุด ในตอนแรกเป็นพาราโบลอยด์ ช่วงหลังจะเปลี่ยนเป็นทรงกลม แต่ถ้า กรวยมากที่สุดในช่วงแรกนั้น ช่วงหลังจะเปลี่ยนเป็น พาราโบลอยด์ และ ทรงกลม ตามมา

สรุป

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นได้ว่าเมื่อเปรียบเทียบค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของรูปทรงต่างๆ ทั้ง 5 รูป ในสองระนาบที่กำหนด รูปทรงที่มีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุดนั้นมีหลากหลายรูปทรง โดยแยกได้หลายกรณี (ดังตัวอย่างที่ 1 และ 2) ซึ่งจะพบว่า สาเหตุสำคัญที่มีผลกับอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวคือ ความสูง กล่าวคือ เมื่อจุดศูนย์กลางของทุกรูปทรงอยู่ในระดับเดียวกัน ที่ระดับความสูงที่แตกต่างกัน รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุด ก็จะแตกต่างกันด้วย ดังตัวอย่าง

และสาเหตุอีกประการหนึ่งที่มีผลกับค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวคือ เมื่อสองระนาบตัดรูปทรงต่างๆ แต่ละรูปทรง ทำให้ค่าไอโซเพอริเมตริกโดเมนเปลี่ยนไป ซึ่งจะมีผลต่ออัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของแต่ละรูปทรงอีกด้วย

4.4 ตัวอย่างปัญหาในชีวิตประจำวันที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก

ปัญหาที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบนั้น สามารถพบเห็นในชีวิตประจำวันได้มากมายยกตัวอย่างเช่น การก่อสร้างที่ต้องการมีพื้นที่ที่ฐานมากที่สุดควรจะเป็นรูปใด เมื่อมีวัสดุในการก่อสร้างจำกัด และจะต้องผ่านจุดที่กำหนด เป็นต้น

ส่วนปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกบน \mathbb{R}^3 ในสองระนาบที่กำหนดนั้น ยกตัวอย่างเช่น ท่อที่มีความกว้างของท่อเท่ากัน(เป็นรูปวงกลมหรือไอโซเพอริเมตริกโดเมน) โดยลักษณะท่อมีลักษณะที่แตกต่างกัน (ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาไว้ 5 รูปทรง ได้แก่ ทรงกลม ทรงกระบอก กรวย พาราโบลอยด์ และไฮเพอร์โบลอยด์) เมื่อกำหนดท่อแต่ละแบบให้มีปริมาตรเท่ากันในชั้นดิน จะทำให้ท่อแต่ละแบบมีความสูงไม่เท่ากัน แต่ถ้าตัดด้วยความสูงเท่ากันโดยจุดกึ่งกลางของท่อแต่ละแบบอยู่ ณ.จุดเดียวกันแล้วรูปทรงใดจะมีอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวมากที่สุด ซึ่งจะมีผลต่อการขนส่งปริมาตรในท่อและต้นทุนในการประดิษฐ์ท่อ อีกตัวอย่างหนึ่งที่สามารถพบเห็นได้คือ การประดิษฐ์กล่องบรรจุสินค้าที่ต้องคำนึงถึงปริมาตรมากที่สุดในการบรรจุสินค้า แต่จะต้องมีพื้นที่ผิวของกล่องน้อยที่สุดเพื่อที่จะลดต้นทุนในการผลิตกล่องหรือการออกแบบอาคารเป็นรูปทรงต่าง ที่เหมาะสมกับสภาพแวดล้อมและการใช้งาน เช่น เมืองที่มีอากาศหนาวควรสร้างอาคารที่มีให้มีลักษณะพื้นที่ผิวของตัวอาคารน้อยและเก็บปริมาตรได้มาก เพื่อที่จะทำให้ตัวอาคารมีความอบอุ่น เป็นต้น

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้นำเสนอการสรุปผลการวิจัย ที่ได้จากการศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริก พร้อมทั้งข้อเสนอแนะต่างๆเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษา การพัฒนา และการทำวิจัยเกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกสำหรับผู้ที่มีความสนใจที่จะศึกษาต่อไป

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ โดยมีทฤษฎีหลักที่ใช้ในการศึกษา คือ “ถ้า L เป็นความยาวของเส้นโค้งปิด C บนระนาบ และ A เป็นพื้นที่ภายในเส้นโค้งปิดแล้ว

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \tag{5.1}$$

ถ้าเปลี่ยนสมการนี้ให้เป็นสมการจะทำให้ได้ว่าเส้นโค้งปิด C นั้นคือ รูปวงกลม”

ผู้วิจัยได้รวบรวมบทพิสูจน์ของทฤษฎีไอโซเพอริเมตริก (บทที่ 2) ไว้หลากหลายวิธี เพื่อให้ผู้ที่มีความสนใจต่อการศึกษาค้นคว้าและเพื่อแสดงให้เห็นถึงแนวคิดในการพิสูจน์ทฤษฎีข้างต้นซึ่งมีความแตกต่างกัน

จากทฤษฎีดังกล่าวผู้วิจัยได้มีแนวคิดในการศึกษาเพิ่มเติมคือ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเพิ่มจากทฤษฎีไอโซเพอริเมตริก โดยถ้ากำหนดความยาวของเส้นโค้งปิดและกำหนดจุดที่เส้นรอบรูปผ่านจำนวน 1 จุด, 2 จุด, 3 จุด ตามลำดับ นั้นเส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดจะเป็นรูปวงกลมหรือไม่ ซึ่งได้พิสูจน์โดยแยกเป็นกรณีต่างๆ ได้ดังนี้

5.1.1 กำหนดความยาวเส้นรอบรูป และจุดที่เส้นรอบรูปจำนวน 1 จุด

ให้จุด P เป็นจุดที่อยู่บนเส้นรอบรูปโดยมีพิกัดเป็น (x_1, y_1) , L คือความยาวของเส้นรอบรูป (เส้นโค้งปิด) และ A คือพื้นที่ภายในเส้นโค้งปิด ดังนั้นเส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม เมื่อกำหนดความยาวของเส้นโค้งปิดและจุด P

5.1.2 กำหนดความยาวเส้นรอบรูป และจุดที่เส้นรอบรูปจำนวน 2 จุด

กำหนดให้จุด P และจุด Q เป็น 2 จุดที่อยู่บนเส้นรอบรูป มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ตามลำดับ ให้ x เป็นความยาวของส่วนของเส้น PQ โดยกำหนดให้ $k = x\pi$, และกำหนดความยาวของเส้นรอบรูป (เส้นโค้งปิด) เท่ากับ L ดังนั้นสามารถพิจารณารูปร่างของเส้นโค้งปิดและพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปิด A ได้ 4 กรณี ดังนี้

- กรณีที่ 1 $L = k$ เส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม, $A = \frac{L^2}{4\pi}$
- กรณีที่ 2 $L > k$ เส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปวงกลม โดยเกิดวงกลมขึ้น 2 วง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข, $A = \frac{L^2}{4\pi}$
- กรณีที่ 3 $2x < L < k$ เส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุดคือ รูปอื่นที่ไม่ใช่วงกลม
- กรณีที่ 4 $L < 2x$ ไม่เกิดเส้นโค้งปิดที่มีพื้นที่มากที่สุด นั่นคือ ไม่เกิดรูปใดๆ

5.1.3 กำหนดความยาวเส้นรอบรูป และจุดที่เส้นรอบรูปจำนวน 3 จุด

กำหนดให้จุด P จุด Q และจุด R เป็น 3 จุดที่อยู่บนเส้นรอบรูป มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) , (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) ตามลำดับ ให้ x เป็นความยาวของส่วนของเส้น PQ, y เป็นความยาวของส่วนของเส้น QR, z เป็นความยาวของส่วนของเส้น PR และกำหนดความยาวของเส้นรอบรูป (เส้นโค้งปิด) เท่ากับ L ดังนั้นสามารถพิจารณารูปร่างของเส้นโค้งปิดและพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปิด A ได้ 4 กรณี ดังนี้

- กรณีที่ 1 รูปวงกลม มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อ $x = y = z$ (รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า) และ $L = \frac{x\pi\sqrt{3}}{2}$
- กรณีที่ 2 รูปวงกลม มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อ $x = y \neq z, x \neq y = z, x \neq z = y$ (รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว) หรือ $x \neq y \neq z$ (รูปสามเหลี่ยมใดๆ) และกำหนดให้ $L = 2\pi r$ โดยที่
- $$r = \sqrt{(h-x_1)^2 + (k-y_1)^2} \text{ หรือ } r = \sqrt{(h-x_2)^2 + (k-y_2)^2} \text{ หรือ } r = \sqrt{(h-x_3)^2 + (k-y_3)^2}$$
- $$h = \frac{(x_1^2 + y_1^2)y_2 + (x_3^2 + y_3^2)y_1 + (x_2^2 + y_2^2)y_3 - (x_3^2 + y_3^2)y_2 - (x_1^2 + y_1^2)y_3 - (x_2^2 + y_2^2)y_1}{2(x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1)}$$
- $$k = \frac{(x_2^2 + y_2^2)x_1 + (x_1^2 + y_1^2)x_3 + (x_3^2 + y_3^2)x_2 - (x_2^2 + y_2^2)x_3 - (x_3^2 + y_3^2)x_1 - (x_1^2 + y_1^2)x_2}{2(x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1)}$$
- กรณีที่ 3 เมื่อ $x + y + z \leq L < 2\pi r$ (โดยที่ r มีค่าเท่ากับกรณีที่ 2) เกิดรูปอื่นที่ไม่ใช่วงกลม
- กรณีที่ 4 เมื่อ $L < x + y + z$ ไม่เกิดรูปใดเลย

เมื่อได้พิสูจน์ทฤษฎีไอโซเพอริเมตริกที่กำหนดเงื่อนไขแล้ว จึงทำการเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ด้วยโปรแกรมภาษา C++ เพื่อแสดงการประมาณค่า พื้นที่ ที่มากที่สุด (เฉพาะกรณีที่เป็นรูปวงกลม) รัศมี จุดศูนย์กลางของวงกลม และแสดงลักษณะของจุดที่กำหนดบนรูปวงกลมที่เกิดขึ้น

จากการศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบข้างต้นแล้ว ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ยังได้ศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกบน \mathbb{R}^3 โดยการเปรียบเทียบค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุด ในสองระนาบที่กำหนด ของรูปทรงต่างๆ 5 รูป อันได้แก่ รูปทรงกลม ทรงกระบอก กรวย พาราโบลอยด์ และไฮเพอร์โบลอยด์ โดยมีเงื่อนไขในการศึกษาคือ

1. ทั้ง 5 รูปทรงจะต้องมีปริมาตรเต็ม (ปริมาตรที่ไม่ถูกตัดด้วยระนาบใดเลย) เท่ากัน
2. รูปทรงที่กำหนด ต้องมีไอโซเพอริเมตริกโคเมนที่เท่ากัน เมื่อแต่ละรูปมีปริมาตรเต็ม
3. กำหนดให้จุดศูนย์กลางของทุกรูปอยู่ที่ $z = 0$ และสองระนาบที่กำหนดนั้นจะต้องมี $z_1 \geq 0$

และ $z_2 \leq 0$

โดยผลที่ได้จากการศึกษาเป็นดังนี้

ตารางที่ 5.1 สรุปผล รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรและพื้นที่ผิวที่มากที่สุด

กรณี	รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรและพื้นที่ผิวมากที่สุด
1. $ z_1 \leq \frac{h_{cylinder}}{2}$ และ $ z_1 \leq \frac{r}{2}$	ทรงกลม
2. $ z_2 \leq \frac{h_{cylinder}}{2}$ และ $ z_2 \leq \frac{r}{2}$	ทรงกลม
3. $ z_1 \leq \frac{h_{cylinder}}{2}$ และ $ z_1 > \frac{r}{2}$	ทรงกระบอกในช่วงแรก แล้วต่อมาเปลี่ยนเป็นทรงกลม
4. $ z_2 \leq \frac{h_{cylinder}}{2}$ และ $ z_2 > \frac{r}{2}$	ทรงกระบอกในช่วงแรก แล้วต่อมาเปลี่ยนเป็นทรงกลม
5. $\frac{h_{cylinder}}{2} < z_1 \leq \frac{h_{sphere}}{2}$	ทรงกลม
6. $\frac{h_{cylinder}}{2} < z_2 \leq \frac{h_{sphere}}{2}$	ทรงกลม
7. $\frac{h_{sphere}}{2} < z_1 \leq \frac{h_{paraboloid}}{2}$ และ $ z_1 < r$	ทรงกลม
8. $\frac{h_{sphere}}{2} < z_2 \leq \frac{h_{paraboloid}}{2}$	ทรงกลม

กรณี	รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรและพื้นที่ผิวมากที่สุด
9. $\frac{h_{paraboloid}}{2} < z_1 \leq \frac{h_{hyperboloid}}{2}$ และ $ z_1 \geq r$	พาราโบลอยด์ในช่วงแรก แล้วต่อมาเปลี่ยนเป็นทรงกลม หรือ(ในบางกรณี) กรวยในช่วงแรก ต่อมาเปลี่ยนเป็นพาราโบลอยด์ และในช่วงหลังเป็นทรงกลม
10. $\frac{h_{paraboloid}}{2} < z_2 \leq \frac{h_{hyperboloid}}{2}$	ทรงกลม
11. $\frac{h_{hyperboloid}}{2} < z_1 \leq \frac{h_{cone}}{2}$	กรวยในช่วงแรก ต่อมาเปลี่ยนเป็นพาราโบลอยด์ และในช่วง หลังเป็นทรงกลม
12. $\frac{h_{hyperboloid}}{2} < z_2 \leq \frac{h_{cone}}{2}$	ทรงกลม
13. $ z_1 > \frac{h_{cone}}{2}$	กรวยในช่วงแรก ต่อมาเปลี่ยนเป็นพาราโบลอยด์ และในช่วง หลังเป็นทรงกลม
14. $ z_2 > \frac{h_{cone}}{2}$	ทรงกลม

จากการศึกษาพบว่า ในระดับความสูงที่แตกต่างกัน รูปทรงที่มีค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวที่มากที่สุดก็จะแตกต่างกันตามระดับความสูงที่กำหนดด้วย

เมื่อได้ศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกทั้งบนระนาบและปัญหาไอโซเพอริเมตริกในสองระนาบบน \mathbb{R}^3 แล้วนั้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็ได้นำเสนอตัวอย่างที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันซึ่งสอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบเช่น เมื่อมีวัสดุในการก่อสร้างขอบเขตที่จำกัด ดังนั้นควรที่จะกำหนดขอบเขตเป็นรูปใดจึงจะมีพื้นที่มากที่สุด เป็นต้น ส่วนปัญหาในชีวิตประจำวันที่สอดคล้องกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกในสองระนาบบน \mathbb{R}^3 นั้น ยกตัวอย่างเช่น ท่อที่มีรูปทรงที่แตกต่างกัน (ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอไว้ 5 รูปทรง) เมื่อกำหนดความกว้างของท่อแต่ละแบบเท่ากัน และปริมาตรเท่ากันในขั้นแรก และถ้าถูกตัดด้วยระนาบความสูงที่เท่ากัน แล้วอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวของท่อรูปใดจะมีค่ามากที่สุด ซึ่งสามารถนำข้อมูล ไปสร้างท่อที่มีเหมาะสมกับการใช้งานได้ หรือการออกแบบอาคารที่อยู่อาศัยให้เหมาะสมกับสภาพแวดล้อม เป็นต้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากที่ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบนั้น ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะซึ่งเป็นแนวทางในการศึกษาค้นคว้าและการทำวิจัย เพื่อพัฒนาองค์ความรู้ ที่เป็นประโยชน์ต่อผู้ที่มีความสนใจดังต่อไปนี้

5.2.1 เนื่องจากงานวิจัยนี้ได้ศึกษาปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบดังนั้นผู้ที่มีความสนใจสามารถเปลี่ยนพื้นผิวในการศึกษาได้ เช่น บนรูปทรงท่วงยาง (Torus) , รูปทรงกระบอก , รูปทรงกรวย เป็นต้น

5.2.2 ในการกำหนดเงื่อนไข (กำหนดจุดบนเส้นรอบรูป และความยาวของเส้นโค้งปิด) ที่สอดคล้องกับทฤษฎีไอโซเพอริเมตริกนั้นสามารถนำไปใช้กับพื้นผิวอื่นได้หรือไม่

5.2.3 ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาเพียงว่า รูปที่ได้เมื่อกำหนดจุดและเส้นรอบรูปขึ้นมาแล้วนั้นพื้นที่ที่มากที่สุดจะเป็นรูปวงกลมหรือไม่ ผู้ที่มีความสนใจสามารถศึกษาต่อไปได้ว่าถ้าไม่เป็นรูปวงกลมแล้วสามารถเป็นรูปใดได้บ้าง และมีพื้นที่ที่เป็นไปได้มากที่สุดเป็นเท่าใด

5.2.4 เปลี่ยนเงื่อนไขในการศึกษาเช่น กำหนดพื้นที่และจุด แล้วหาเส้นรอบรูปที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ หรือเพิ่มจุดในการศึกษา เป็นต้น

5.2.5 ศึกษาแนวทางในการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกบน \mathbb{R}^3

5.2.6 พิจารณาค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรกับพื้นที่ผิวในสองระนาบที่กำหนด ของรูปทรงอื่นๆ ที่นอกเหนือจากทั้งห้ารูปทรงที่ได้ศึกษาแล้ว

เอกสารอ้างอิง

- [1] Jan Bogaert.2003 “ Isoperimetric Geometry ” Available :<http://pumas.jpl.nasa.gov>
- [2] Alan Siegel. “ A Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D,and its place in Elementary Plane Geometry ” Available : www.cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf
- [3] Chia Peishan, Kelly.2004/2005.“Isoperimetric Inequality”.The degree of Bachelor of Science with Honours in Applied Mathematics.
- [4] Joel spruck.2001. “Hurwitz’s proof of the isoperimetric inequality” Available : <http://www.math.jhu.edu>.
- [5] S.S.Chern. Curves and surfaces in Euclidean space. In S.S. Chern,editor,studies in Global Geometry and Analysis, pages16-56 math assoc.amer.1967
- [6] Nikolaos dergiades.2002. “An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality”. Forum Geometricorum.2002(2) : 129-130
- [7] H.wu. “The Isoperimetric inequality ” : The Algebraic viewpoint.1999.April.
- [8] “Planimeters and Isoperimetric Inequalities” Available :<http://persweb.wabash.edu>
- [9] Antonic Ros.“ The Isoperimetric problem” Available:[http :http://www.ugr.es/~aros/isoper.pdf](http://www.ugr.es/~aros/isoper.pdf)
- [10] Manuel Ritore and Antonic Ros. “Recent Advances In Isoperimetric problems” Available:[http:http://www.ugr.es/~surfaces/int.pdf](http://www.ugr.es/~surfaces/int.pdf)
- [11] David Yang.2004. Pointed Isoperimetric Inequalities. Available: [www.cee.org/rsi/docs /2004Papers/yang-david-mit-oral.pdf](http://www.cee.org/rsi/docs/2004Papers/yang-david-mit-oral.pdf)

ภาคผนวก ก.

พิสูจน์ทฤษฎีต่างๆ ที่ใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ปัญหาไอโซเพอริเมตริกบนระนาบ

ทฤษฎี 2.11 (Cauchy-Schwarz Inequality) ให้ $x, y \in \mathbb{R}^n$ ดังนั้น Cauchy-Schwarz Inequality คือ

$$|x^T \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า x และ y ไม่อิสระเชิงเส้น ดังนั้นสามารถเขียน $y = \lambda x$

$$\begin{aligned}(x^T \cdot y)^2 &= (x^T \cdot \lambda x)^2 \\ &= \lambda^2 (x^T \cdot x)^2 \\ &= \lambda^2 \|x\|^4 \\ &= \|x\|^2 \cdot \lambda^2 \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 \cdot \|\lambda x\|^2 \\ &= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|x^T \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$$

กรณีที่ 2 ถ้า x และ y อิสระเชิงเส้น ดังนั้นฟังก์ชันกำลังสอง คือ

$$\|ax + y\|^2 = a^2 \|x\|^2 + 2a(x^T \cdot y) + \|y\|^2$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าบวกสำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$ ดังนั้นไม่มีสองจำนวนจริง 0 ที่แตกต่างกัน ซึ่งหมายถึง

$$[2(x^T \cdot y)]^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

$$4(x^T \cdot y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

$$(x^T \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$|x^T \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

นั่นคือ โดยกรณีที่ 1 และ 2 จะได้ $|x^T \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

□

ทฤษฎี 2.13 (Holder Inequality in L^p -Spaces) ถ้าฟังก์ชัน f อยู่ใน $L^p(X)$ ดังนั้น L^p -นอร์ม ของ ฟังก์ชัน f แทนด้วย $\|f\|_p$ ให้ (X, β, μ) เป็นปริภูมิเมเชอร์ ถ้าฟังก์ชัน f อยู่ใน $L^p(X)$ และ g อยู่ใน $L^q(X)$ ซึ่ง $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ โดยที่ $p, q \geq 1$ ดังนั้น **Holder Inequality** คือ

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

พิสูจน์ ให้ (X, μ) เป็นปริภูมิเมเชอร์ และให้ $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$ โดยที่ $p, q \in [1, +\infty)$ และ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ โดยนิยามของ L^p -นอร์ม

$$\begin{aligned} \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} &= \int_X \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu \\ &= \int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} d\mu \\ &\leq \frac{1}{p} \int_X \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^q d\mu \quad (\text{โดย Young Inequality}) \\ &= \frac{1}{p} \frac{\int_X |f|^p d\mu}{(\|f\|_p)^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_X |g|^q d\mu}{(\|g\|_q)^q} \\ &= \frac{1}{p} \frac{(\|f\|_p)^p}{(\|f\|_p)^p} + \frac{1}{q} \frac{(\|g\|_q)^q}{(\|g\|_q)^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

โดยนิยามของ L^p -นอร์ม ดังนั้น

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

บทตั้ง 2.14 (Wirtinger) ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของระยะคาบ 2π , มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง $f'(t)$ ถ้า

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 \text{ แล้ว } \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt \geq \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$$

โดยเปลี่ยนอสมการเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $f(t) = a \cos t + b \sin t$

พิสูจน์ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(t)$ เป็น

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

เนื่องจาก $f'(t)$ ต่อเนื่อง ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์สามารถหาอนุพันธ์แต่ละพจน์ได้

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

เนื่องจาก $\int_0^{2\pi} f(t) dt = \pi a_0$ และให้ $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ แล้ว $a_0 = 0$ โดย สูตรของ Parseval โดย

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \pi$$

$$\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \pi$$

นั่นคือ $\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt - \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \pi$

ซึ่งมากกว่า 0 จะเท่ากับ 0 ก็ต่อเมื่อ $a_n = b_n = 0$ สำหรับทุก $n > 1$ นั่นคือ

$$f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

□

ภาคผนวก ข

ข้อมูลอ้างอิงประกอบตัวอย่างที่ 1 ในหัวข้อที่ 4.3

ตารางที่ ข.1 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.14 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
กู่อันดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-0.5)	0.182748	0.181929	0.13477	0.156936	0.138928
(0.1,-0.5)	0.209447	0.20704	0.149598	0.176554	0.152064
(0.2,-0.5)	0.234009	0.229685	0.162824	0.194236	0.162899
(0.3,-0.5)	0.256617	0.25021	0.174835	0.210366	0.172018
(0.4,-0.5)	0.277387	0.268899	0.185905	0.225229	0.17988
(0.5,-0.5)	0.296375	0.285989	0.196234	0.239042	0.186853
(0.6,-0.5)	0.313597	0.301675	0.20597	0.251974	0.193232
(0.7,-0.5)	0.32903	0.316125	0.215224	0.264157	0.199251
(0.8,-0.5)	0.34262	0.329478	0.224084	0.275696	0.205097
(0.9,-0.5)	0.354281	0.340765	0.232617	0.286677	0.210912
(1,-0.5)	0.363896	0.340765	0.240877	0.29717	0.216803
(1.1,-0.5)	0.371317	0.340765	0.248907	0.307232	0.222849
(1.2,-0.5)	0.376361	0.340765	0.256741	0.316912	0.229104
(1.3,-0.5)	0.378805	0.340765	0.264409	0.326249	0.235602
(1.4,-0.5)	0.378999	0.340765	0.271933	0.335279	0.242364
(1.5,-0.5)	0.378999	0.340765	0.279334	0.344031	0.2494
(1.6,-0.5)	0.378999	0.340765	0.286627	0.35253	0.25671
(1.7,-0.5)	0.378999	0.340765	0.293827	0.360798	0.26429
(1.8,-0.5)	0.378999	0.340765	0.300945	0.367401	0.272131
(1.9,-0.5)	0.378999	0.340765	0.307992	0.367401	0.274645
(2,-0.5)	0.378999	0.340765	0.314975	0.367401	0.274645
(2.1,-0.5)	0.378999	0.340765	0.321903	0.367401	0.274645
(2.2,-0.5)	0.378999	0.340765	0.328781	0.367401	0.274645
(2.3,-0.5)	0.378999	0.340765	0.335615	0.367401	0.274645
(2.4,-0.5)	0.378999	0.340765	0.34241	0.367401	0.274645
(2.5,-0.5)	0.378999	0.340765	0.34917	0.367401	0.274645
(2.6,-0.5)	0.378999	0.340765	0.355899	0.367401	0.274645
(2.7,-0.5)	0.378999	0.340765	0.36077	0.367401	0.274645
(2.8,-0.5)	0.378999	0.340765	0.36077	0.367401	0.274645

ตารางที่ ข.2แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.15 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

คู่อันดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0.5,0)	0.182748	0.181929	0.146325	0.165532	0.138928
(0.5,-0.1)	0.209447	0.20704	0.160832	0.185152	0.152064
(0.5,-0.2)	0.234009	0.229685	0.172627	0.20193	0.162899
(0.5,-0.3)	0.256617	0.25021	0.182213	0.216288	0.172018
(0.5,-0.4)	0.277387	0.268899	0.189979	0.228566	0.17988
(0.5,-0.5)	0.296375	0.285989	0.196234	0.239042	0.186853
(0.5,-0.6)	0.313597	0.301675	0.201227	0.247947	0.193232
(0.5,-0.7)	0.32903	0.316125	0.205158	0.255471	0.199251
(0.5,-0.8)	0.34262	0.329478	0.208196	0.261775	0.205097
(0.5,-0.9)	0.354281	0.340765	0.210477	0.266999	0.210912
(0.5,-1)	0.363896	0.340765	0.21212	0.271259	0.216803
(0.5,-1.1)	0.371317	0.340765	0.213224	0.274661	0.222849
(0.5,-1.2)	0.376361	0.340765	0.213874	0.277297	0.229104
(0.5,-1.3)	0.378805	0.340765	0.214146	0.279253	0.235602
(0.5,-1.4)	0.378999	0.340765	0.214105	0.28061	0.242364
(0.5,-1.5)	0.378999	0.340765	0.213811	0.281452	0.2494
(0.5,-1.6)	0.378999	0.340765	0.213314	0.281871	0.25671
(0.5,-1.7)	0.378999	0.340765	0.212664	0.281985	0.26429
(0.5,-1.8)	0.378999	0.340765	0.211905	0.281976	0.272131
(0.5,-1.9)	0.378999	0.340765	0.211078	0.281976	0.274645
(0.5,-2)	0.378999	0.340765	0.210221	0.281976	0.274645
(0.5,-2.1)	0.378999	0.340765	0.209372	0.281976	0.274645
(0.5,-2.2)	0.378999	0.340765	0.208567	0.281976	0.274645
(0.5,-2.3)	0.378999	0.340765	0.207841	0.281976	0.274645
(0.5,-2.4)	0.378999	0.340765	0.20723	0.281976	0.274645
(0.5,-2.5)	0.378999	0.340765	0.206768	0.281976	0.274645
(0.5,-2.6)	0.378999	0.340765	0.206491	0.281976	0.274645
(0.5,-2.7)	0.378999	0.340765	0.206428	0.281976	0.274645
(0.5,-2.8)	0.378999	0.340765	0.206428	0.281976	0.274645
(0.5,-2.9)	0.378999	0.340765	0.206428	0.281976	0.274645
(0.5,-3)	0.378999	0.340765	0.206428	0.281976	0.274645

ตารางที่ ข.3 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.16 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-0.75)	0.23909336	0.2401936	0.1594644	0.1943172	0.17176454
(0.1,-0.75)	0.26124051	0.2597684	0.1701151	0.2089919	0.17990674
(0.2,-0.75)	0.28198469	0.2776309	0.1800339	0.2226144	0.18670991
(0.3,-0.75)	0.30136839	0.2939963	0.1893779	0.2353638	0.19251011
(0.4,-0.75)	0.31940002	0.3090453	0.1982638	0.2473783	0.19758916
(0.5,-0.75)	0.33606024	0.3229305	0.2067796	0.2587662	0.20218564
(0.6,-0.75)	0.35130573	0.335782	0.214993	0.269614	0.20650108
(0.7,-0.75)	0.36507114	0.347711	0.222957	0.2799913	0.21070336
(0.8,-0.75)	0.37726978	0.3588134	0.2307132	0.2899552	0.21492927
(0.9,-0.75)	0.38779316	0.3682567	0.2382952	0.2995529	0.21928693
(1,-0.75)	0.39650971	0.3682567	0.24573	0.3088238	0.22385861
(1.1,-0.75)	0.40326251	0.3682567	0.2530397	0.3178012	0.22870398
(1.2,-0.75)	0.40786611	0.3682567	0.2602423	0.3265131	0.23386354
(1.3,-0.75)	0.41010227	0.3682567	0.2673531	0.3349838	0.23936198
(1.4,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.2743844	0.3432342	0.24521138
(1.5,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.2813469	0.3512823	0.25141408
(1.6,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.2882496	0.3591441	0.25796512
(1.7,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.2950999	0.3668332	0.26485425
(1.8,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3019045	0.3730009	0.27206763
(1.9,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3086687	0.3730009	0.27439762
(2,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3153975	0.3730009	0.27439762
(2.1,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.322095	0.3730009	0.27439762
(2.2,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3287647	0.3730009	0.27439762
(2.3,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3354099	0.3730009	0.27439762
(2.4,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3420331	0.3730009	0.27439762
(2.5,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.348637	0.3730009	0.27439762
(2.6,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3552235	0.3730009	0.27439762
(2.7,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3599988	0.3730009	0.27439762
(2.8,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3599988	0.3730009	0.27439762
(2.9,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3599988	0.3730009	0.27439762
(3,-0.75)	0.41027967	0.3682567	0.3599988	0.3730009	0.27439762

ตารางที่ ข.4 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.17 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0.75,0)	0.239093	0.240194	0.18568	0.215364	0.171765
(0.75,-0.1)	0.261241	0.259768	0.195433	0.229705	0.179907
(0.75,-0.2)	0.281985	0.277631	0.203461	0.242111	0.18671
(0.75,-0.3)	0.301368	0.293996	0.210039	0.252831	0.19251
(0.75,-0.4)	0.3194	0.309045	0.21539	0.26207	0.197589
(0.75,-0.5)	0.33606	0.322931	0.219699	0.270001	0.202186
(0.75,-0.6)	0.351306	0.335782	0.223119	0.276772	0.206501
(0.75,-0.7)	0.365071	0.347711	0.225779	0.282508	0.210703
(0.75,-0.8)	0.37727	0.358813	0.227789	0.287317	0.214929
(0.75,-0.9)	0.387793	0.368257	0.229242	0.291295	0.219287
(0.75,-1)	0.39651	0.368257	0.23022	0.294526	0.223859
(0.75,-1.1)	0.403263	0.368257	0.230795	0.297085	0.228704
(0.75,-1.2)	0.407866	0.368257	0.231028	0.299042	0.233864
(0.75,-1.3)	0.410102	0.368257	0.230976	0.300463	0.239362
(0.75,-1.4)	0.41028	0.368257	0.230689	0.301415	0.245211
(0.75,-1.5)	0.41028	0.368257	0.230211	0.301966	0.251414
(0.75,-1.6)	0.41028	0.368257	0.229585	0.302197	0.257965
(0.75,-1.7)	0.41028	0.368257	0.228849	0.302214	0.264854
(0.75,-1.8)	0.41028	0.368257	0.22804	0.302183	0.272068
(0.75,-1.9)	0.41028	0.368257	0.22719	0.302183	0.274398
(0.75,-2)	0.41028	0.368257	0.226332	0.302183	0.274398
(0.75,-2.1)	0.41028	0.368257	0.225499	0.302183	0.274398
(0.75,-2.2)	0.41028	0.368257	0.22472	0.302183	0.274398
(0.75,-2.3)	0.41028	0.368257	0.224025	0.302183	0.274398
(0.75,-2.4)	0.41028	0.368257	0.223446	0.302183	0.274398
(0.75,-2.5)	0.41028	0.368257	0.223011	0.302183	0.274398
(0.75,-2.6)	0.41028	0.368257	0.222753	0.302183	0.274398
(0.75,-2.7)	0.41028	0.368257	0.222694	0.302183	0.274398
(0.75,-2.8)	0.41028	0.368257	0.222694	0.302183	0.274398
(0.75,-2.9)	0.41028	0.368257	0.222694	0.302183	0.274398
(0.75,-3)	0.41028	0.368257	0.222694	0.302183	0.274398

ตารางที่ ข.5 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.18 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่อันดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-1)	0.276961	0.267265	0.172443	0.217368	0.197545
(0.1,-1)	0.296408	0.284492	0.180937	0.229184	0.202709
(0.2,-1)	0.314865	0.300299	0.189092	0.240405	0.20701
(0.3,-1)	0.332298	0.314855	0.196976	0.251115	0.210668
(0.4,-1)	0.348663	0.328303	0.204639	0.261382	0.213875
(0.5,-1)	0.363896	0.340765	0.21212	0.271259	0.216803
(0.6,-1)	0.377925	0.352345	0.219451	0.280793	0.219606
(0.7,-1)	0.39066	0.363134	0.226658	0.290018	0.222415
(0.8,-1)	0.401996	0.37321	0.233759	0.298967	0.225344
(0.9,-1)	0.411813	0.381807	0.240771	0.307666	0.228483
(1,-1)	0.41997	0.381807	0.247708	0.316137	0.231904
(1.1,-1)	0.426307	0.381807	0.25458	0.3244	0.235661
(1.2,-1)	0.430637	0.381807	0.261397	0.33247	0.239791
(1.3,-1)	0.432744	0.381807	0.268167	0.340363	0.244317
(1.4,-1)	0.432911	0.381807	0.274895	0.348091	0.24925
(1.5,-1)	0.432911	0.381807	0.281588	0.355666	0.254592
(1.6,-1)	0.432911	0.381807	0.28825	0.363098	0.260337
(1.7,-1)	0.432911	0.381807	0.294885	0.370395	0.266473
(1.8,-1)	0.432911	0.381807	0.301496	0.376267	0.272987
(1.9,-1)	0.432911	0.381807	0.308086	0.376267	0.275108
(2,-1)	0.432911	0.381807	0.314659	0.376267	0.275108
(2.1,-1)	0.432911	0.381807	0.321215	0.376267	0.275108
(2.2,-1)	0.432911	0.381807	0.327758	0.376267	0.275108
(2.3,-1)	0.432911	0.381807	0.334288	0.376267	0.275108
(2.4,-1)	0.432911	0.381807	0.340807	0.376267	0.275108
(2.5,-1)	0.432911	0.381807	0.347316	0.376267	0.275108
(2.6,-1)	0.432911	0.381807	0.353817	0.376267	0.275108
(2.7,-1)	0.432911	0.381807	0.358536	0.376267	0.275108
(2.8,-1)	0.432911	0.381807	0.358536	0.376267	0.275108
(2.9,-1)	0.432911	0.381807	0.358536	0.376267	0.275108
(3,-1)	0.432911	0.381807	0.358536	0.376267	0.275108

ตารางที่ ข.6 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.19 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

คู่อันดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(1,0)	0.276961	0.267265	0.216889	0.255263	0.197545
(1,-0.1)	0.296408	0.284492	0.223756	0.266151	0.202709
(1,-0.2)	0.314865	0.300299	0.229433	0.275639	0.20701
(1,-0.3)	0.332298	0.314855	0.234088	0.283885	0.210668
(1,-0.4)	0.348663	0.328303	0.237863	0.291024	0.213875
(1,-0.5)	0.363896	0.340765	0.240877	0.29717	0.216803
(1,-0.6)	0.377925	0.352345	0.243235	0.302425	0.219606
(1,-0.7)	0.39066	0.363134	0.245024	0.306875	0.222415
(1,-0.8)	0.401996	0.37321	0.246322	0.3106	0.225344
(1,-0.9)	0.411813	0.381807	0.247197	0.313666	0.228483
(1,-1)	0.41997	0.381807	0.247708	0.316137	0.231904
(1,-1.1)	0.426307	0.381807	0.247909	0.318072	0.235661
(1,-1.2)	0.430637	0.381807	0.247847	0.319523	0.239791
(1,-1.3)	0.432744	0.381807	0.247566	0.320546	0.244317
(1,-1.4)	0.432911	0.381807	0.247105	0.321194	0.24925
(1,-1.5)	0.432911	0.381807	0.246501	0.321528	0.254592
(1,-1.6)	0.432911	0.381807	0.245788	0.321619	0.260337
(1,-1.7)	0.432911	0.381807	0.244997	0.321565	0.266473
(1,-1.8)	0.432911	0.381807	0.244158	0.321518	0.272987
(1,-1.9)	0.432911	0.381807	0.243299	0.321518	0.275108
(1,-2)	0.432911	0.381807	0.24245	0.321518	0.275108
(1,-2.1)	0.432911	0.381807	0.241635	0.321518	0.275108
(1,-2.2)	0.432911	0.381807	0.240883	0.321518	0.275108
(1,-2.3)	0.432911	0.381807	0.240218	0.321518	0.275108
(1,-2.4)	0.432911	0.381807	0.239667	0.321518	0.275108
(1,-2.5)	0.432911	0.381807	0.239257	0.321518	0.275108
(1,-2.6)	0.432911	0.381807	0.239015	0.321518	0.275108
(1,-2.7)	0.432911	0.381807	0.23896	0.321518	0.275108
(1,-2.8)	0.432911	0.381807	0.23896	0.321518	0.275108
(1,-2.9)	0.432911	0.381807	0.23896	0.321518	0.275108
(1,-3)	0.432911	0.381807	0.23896	0.321518	0.275108

ตารางที่ ข.7 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.20 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่อันดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-1.5)	0.296961	0.267265	0.180375	0.236835	0.243095
(0.1,-1.5)	0.315101	0.284492	0.187163	0.246208	0.245056
(0.2,-1.5)	0.332442	0.300299	0.19389	0.255338	0.246556
(0.3,-1.5)	0.348922	0.314855	0.200568	0.264244	0.247708
(0.4,-1.5)	0.364467	0.328303	0.207206	0.272944	0.248621
(0.5,-1.5)	0.378999	0.340765	0.213811	0.281452	0.2494
(0.6,-1.5)	0.392427	0.352345	0.220388	0.289781	0.250147
(0.7,-1.5)	0.404653	0.363134	0.226942	0.297944	0.250957
(0.8,-1.5)	0.415563	0.37321	0.233477	0.30595	0.251919
(0.9,-1.5)	0.42503	0.381807	0.239996	0.313809	0.253108
(1,-1.5)	0.432911	0.381807	0.246501	0.321528	0.254592
(1.1,-1.5)	0.439042	0.381807	0.252996	0.329116	0.256424
(1.2,-1.5)	0.443236	0.381807	0.259481	0.336579	0.258645
(1.3,-1.5)	0.445279	0.381807	0.265958	0.343923	0.261287
(1.4,-1.5)	0.445442	0.381807	0.272429	0.351155	0.26437
(1.5,-1.5)	0.445442	0.381807	0.278894	0.358279	0.267905
(1.6,-1.5)	0.445442	0.381807	0.285355	0.365301	0.271894
(1.7,-1.5)	0.445442	0.381807	0.291812	0.372224	0.276335
(1.8,-1.5)	0.445442	0.381807	0.298266	0.377814	0.281218
(1.9,-1.5)	0.445442	0.381807	0.304717	0.377814	0.282841
(2,-1.5)	0.445442	0.381807	0.311166	0.377814	0.282841
(2.1,-1.5)	0.445442	0.381807	0.317614	0.377814	0.282841
(2.2,-1.5)	0.445442	0.381807	0.32406	0.377814	0.282841
(2.3,-1.5)	0.445442	0.381807	0.330506	0.377814	0.282841
(2.4,-1.5)	0.445442	0.381807	0.33695	0.377814	0.282841
(2.5,-1.5)	0.445442	0.381807	0.343394	0.377814	0.282841
(2.6,-1.5)	0.445442	0.381807	0.349838	0.377814	0.282841
(2.7,-1.5)	0.445442	0.381807	0.35452	0.377814	0.282841
(2.8,-1.5)	0.445442	0.381807	0.35452	0.377814	0.282841
(2.9,-1.5)	0.445442	0.381807	0.35452	0.377814	0.282841
(3,-1.5)	0.445442	0.381807	0.35452	0.377814	0.282841

ตารางที่ ข.8 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.21 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่อันดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(1.5,0)	0.296961	0.267265	0.266902	0.317843	0.243095
(1.5,-0.1)	0.315101	0.284492	0.27056	0.324594	0.245056
(1.5,-0.2)	0.332442	0.300299	0.273558	0.330517	0.246556
(1.5,-0.3)	0.348922	0.314855	0.275974	0.335687	0.247708
(1.5,-0.4)	0.364467	0.328303	0.277879	0.340172	0.248621
(1.5,-0.5)	0.378999	0.340765	0.279334	0.344031	0.2494
(1.5,-0.6)	0.392427	0.352345	0.280393	0.347318	0.250147
(1.5,-0.7)	0.404653	0.363134	0.281106	0.350082	0.250957
(1.5,-0.8)	0.415563	0.37321	0.281517	0.352368	0.251919
(1.5,-0.9)	0.42503	0.381807	0.281666	0.354216	0.253108
(1.5,-1)	0.432911	0.381807	0.281588	0.355666	0.254592
(1.5,-1.1)	0.439042	0.381807	0.281318	0.356755	0.256424
(1.5,-1.2)	0.443236	0.381807	0.280886	0.357521	0.258645
(1.5,-1.3)	0.445279	0.381807	0.28032	0.358001	0.261287
(1.5,-1.4)	0.445442	0.381807	0.279648	0.358238	0.26437
(1.5,-1.5)	0.445442	0.381807	0.278894	0.358279	0.267905
(1.5,-1.6)	0.445442	0.381807	0.278083	0.358184	0.271894
(1.5,-1.7)	0.445442	0.381807	0.277237	0.358035	0.276335
(1.5,-1.8)	0.445442	0.381807	0.276378	0.357968	0.281218
(1.5,-1.9)	0.445442	0.381807	0.275528	0.357968	0.282841
(1.5,-2)	0.445442	0.381807	0.274707	0.357968	0.282841
(1.5,-2.1)	0.445442	0.381807	0.273936	0.357968	0.282841
(1.5,-2.2)	0.445442	0.381807	0.273235	0.357968	0.282841
(1.5,-2.3)	0.445442	0.381807	0.272624	0.357968	0.282841
(1.5,-2.4)	0.445442	0.381807	0.272125	0.357968	0.282841
(1.5,-2.5)	0.445442	0.381807	0.271757	0.357968	0.282841
(1.5,-2.6)	0.445442	0.381807	0.271541	0.357968	0.282841
(1.5,-2.7)	0.445442	0.381807	0.271492	0.357968	0.282841
(1.5,-2.8)	0.445442	0.381807	0.271492	0.357968	0.282841
(1.5,-2.9)	0.445442	0.381807	0.271492	0.357968	0.282841
(1.5,-3)	0.445442	0.381807	0.271492	0.357968	0.282841

ตารางที่ ข.9 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.22 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่อันดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-1.8)	0.296961	0.267265	0.179508	0.238392	0.270331
(0.1,-1.8)	0.315101	0.284492	0.18601	0.247495	0.271249
(0.2,-1.8)	0.332442	0.300299	0.192498	0.256392	0.271807
(0.3,-1.8)	0.348922	0.314855	0.198975	0.265096	0.272086
(0.4,-1.8)	0.364467	0.328303	0.205443	0.273621	0.272167
(0.5,-1.8)	0.378999	0.340765	0.211905	0.281976	0.272131
(0.6,-1.8)	0.392427	0.352345	0.218362	0.290171	0.272061
(0.7,-1.8)	0.404653	0.363134	0.224814	0.298215	0.272037
(0.8,-1.8)	0.415563	0.37321	0.231264	0.306116	0.272138
(0.9,-1.8)	0.42503	0.381807	0.237712	0.313881	0.272433
(1,-1.8)	0.432911	0.381807	0.244158	0.321518	0.272987
(1.1,-1.8)	0.439042	0.381807	0.250602	0.329031	0.273853
(1.2,-1.8)	0.443236	0.381807	0.257046	0.336428	0.275078
(1.3,-1.8)	0.445279	0.381807	0.26349	0.343714	0.276698
(1.4,-1.8)	0.445442	0.381807	0.269934	0.350892	0.278738
(1.5,-1.8)	0.445442	0.381807	0.276378	0.357968	0.281218
(1.6,-1.8)	0.445442	0.381807	0.282822	0.364947	0.284148
(1.7,-1.8)	0.445442	0.381807	0.289267	0.371831	0.287532
(1.8,-1.8)	0.445442	0.381807	0.295713	0.377393	0.291369
(1.9,-1.8)	0.445442	0.381807	0.302159	0.377393	0.292667
(2,-1.8)	0.445442	0.381807	0.308606	0.377393	0.292667
(2.1,-1.8)	0.445442	0.381807	0.315054	0.377393	0.292667
(2.2,-1.8)	0.445442	0.381807	0.321503	0.377393	0.292667
(2.3,-1.8)	0.445442	0.381807	0.327952	0.377393	0.292667
(2.4,-1.8)	0.445442	0.381807	0.334403	0.377393	0.292667
(2.5,-1.8)	0.445442	0.381807	0.340855	0.377393	0.292667
(2.6,-1.8)	0.445442	0.381807	0.347308	0.377393	0.292667
(2.7,-1.8)	0.445442	0.381807	0.351996	0.377393	0.292667
(2.8,-1.8)	0.445442	0.381807	0.351996	0.377393	0.292667
(2.9,-1.8)	0.445442	0.381807	0.351996	0.377393	0.292667
(3,-1.8)	0.445442	0.381807	0.351996	0.377393	0.292667

ตารางที่ ข.10 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.23 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

คู่อันดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(1.8,0)	0.296961	0.267265	0.292613	0.346852	0.270331
(1.8,-0.1)	0.315101	0.284492	0.295162	0.352155	0.271249
(1.8,-0.2)	0.332442	0.300299	0.297217	0.35681	0.271807
(1.8,-0.3)	0.348922	0.314855	0.298834	0.360871	0.272086
(1.8,-0.4)	0.364467	0.328303	0.300062	0.364387	0.272167
(1.8,-0.5)	0.378999	0.340765	0.300945	0.367401	0.272131
(1.8,-0.6)	0.392427	0.352345	0.301525	0.369954	0.272061
(1.8,-0.7)	0.404653	0.363134	0.301838	0.372084	0.272037
(1.8,-0.8)	0.415563	0.37321	0.301917	0.373824	0.272138
(1.8,-0.9)	0.42503	0.381807	0.301794	0.375208	0.272433
(1.8,-1)	0.432911	0.381807	0.301496	0.376267	0.272987
(1.8,-1.1)	0.439042	0.381807	0.301051	0.377031	0.273853
(1.8,-1.2)	0.443236	0.381807	0.300482	0.377533	0.275078
(1.8,-1.3)	0.445279	0.381807	0.299814	0.377805	0.276698
(1.8,-1.4)	0.445442	0.381807	0.299068	0.377885	0.278738
(1.8,-1.5)	0.445442	0.381807	0.298266	0.377814	0.281218
(1.8,-1.6)	0.445442	0.381807	0.297426	0.377649	0.284148
(1.8,-1.7)	0.445442	0.381807	0.296569	0.377467	0.287532
(1.8,-1.8)	0.445442	0.381807	0.295713	0.377393	0.291369
(1.8,-1.9)	0.445442	0.381807	0.294876	0.377393	0.292667
(1.8,-2)	0.445442	0.381807	0.294077	0.377393	0.292667
(1.8,-2.1)	0.445442	0.381807	0.293332	0.377393	0.292667
(1.8,-2.2)	0.445442	0.381807	0.292661	0.377393	0.292667
(1.8,-2.3)	0.445442	0.381807	0.292079	0.377393	0.292667
(1.8,-2.4)	0.445442	0.381807	0.291606	0.377393	0.292667
(1.8,-2.5)	0.445442	0.381807	0.29126	0.377393	0.292667
(1.8,-2.6)	0.445442	0.381807	0.291057	0.377393	0.292667
(1.8,-2.7)	0.445442	0.381807	0.291012	0.377393	0.292667
(1.8,-2.8)	0.445442	0.381807	0.291012	0.377393	0.292667
(1.8,-2.9)	0.445442	0.381807	0.291012	0.377393	0.292667
(1.8,-3)	0.445442	0.381807	0.291012	0.377393	0.292667

ตารางที่ ข.11 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.24 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่อันดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-2.5)	0.296961	0.267265	0.174292	0.238392	0.273226
(0.1,-2.5)	0.315101	0.284492	0.180785	0.247495	0.274058
(0.2,-2.5)	0.332442	0.300299	0.18728	0.256392	0.274538
(0.3,-2.5)	0.348922	0.314855	0.193775	0.265096	0.274743
(0.4,-2.5)	0.364467	0.328303	0.200271	0.273621	0.274752
(0.5,-2.5)	0.378999	0.340765	0.206768	0.281976	0.274645
(0.6,-2.5)	0.392427	0.352345	0.213265	0.290171	0.274504
(0.7,-2.5)	0.404653	0.363134	0.219762	0.298215	0.274406
(0.8,-2.5)	0.415563	0.37321	0.22626	0.306116	0.274428
(0.9,-2.5)	0.42503	0.381807	0.232759	0.313881	0.274641
(1,-2.5)	0.432911	0.381807	0.239257	0.321518	0.275108
(1.1,-2.5)	0.439042	0.381807	0.245757	0.329031	0.275882
(1.2,-2.5)	0.443236	0.381807	0.252256	0.336428	0.277011
(1.3,-2.5)	0.445279	0.381807	0.258756	0.343714	0.27853
(1.4,-2.5)	0.445442	0.381807	0.265256	0.350892	0.280467
(1.5,-2.5)	0.445442	0.381807	0.271757	0.357968	0.282841
(1.6,-2.5)	0.445442	0.381807	0.278257	0.364947	0.285663
(1.7,-2.5)	0.445442	0.381807	0.284758	0.371831	0.288939
(1.8,-2.5)	0.445442	0.381807	0.29126	0.377393	0.292667
(1.9,-2.5)	0.445442	0.381807	0.297761	0.377393	0.29393
(2,-2.5)	0.445442	0.381807	0.304263	0.377393	0.29393
(2.1,-2.5)	0.445442	0.381807	0.310764	0.377393	0.29393
(2.2,-2.5)	0.445442	0.381807	0.317266	0.377393	0.29393
(2.3,-2.5)	0.445442	0.381807	0.323768	0.377393	0.29393
(2.4,-2.5)	0.445442	0.381807	0.330271	0.377393	0.29393
(2.5,-2.5)	0.445442	0.381807	0.336773	0.377393	0.29393
(2.6,-2.5)	0.445442	0.381807	0.343276	0.377393	0.29393
(2.7,-2.5)	0.445442	0.381807	0.348	0.377393	0.29393
(2.8,-2.5)	0.445442	0.381807	0.348	0.377393	0.29393
(2.9,-2.5)	0.445442	0.381807	0.348	0.377393	0.29393
(3,-2.5)	0.445442	0.381807	0.348	0.377393	0.29393

ตารางที่ ข.12 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.25 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่อันดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(2.5,0)	0.296961	0.267265	0.346529	0.346852	0.273226
(2.5,-0.1)	0.315101	0.284492	0.347562	0.352155	0.274058
(2.5,-0.2)	0.332442	0.300299	0.348315	0.35681	0.274538
(2.5,-0.3)	0.348922	0.314855	0.348816	0.360871	0.274743
(2.5,-0.4)	0.364467	0.328303	0.349093	0.364387	0.274752
(2.5,-0.5)	0.378999	0.340765	0.34917	0.367401	0.274645
(2.5,-0.6)	0.392427	0.352345	0.349071	0.369954	0.274504
(2.5,-0.7)	0.404653	0.363134	0.348816	0.372084	0.274406
(2.5,-0.8)	0.415563	0.37321	0.348426	0.373824	0.274428
(2.5,-0.9)	0.42503	0.381807	0.347921	0.375208	0.274641
(2.5,-1)	0.432911	0.381807	0.347316	0.376267	0.275108
(2.5,-1.1)	0.439042	0.381807	0.346631	0.377031	0.275882
(2.5,-1.2)	0.443236	0.381807	0.345881	0.377533	0.277011
(2.5,-1.3)	0.445279	0.381807	0.345082	0.377805	0.27853
(2.5,-1.4)	0.445442	0.381807	0.344248	0.377885	0.280467
(2.5,-1.5)	0.445442	0.381807	0.343394	0.377814	0.282841
(2.5,-1.6)	0.445442	0.381807	0.342535	0.377649	0.285663
(2.5,-1.7)	0.445442	0.381807	0.341684	0.377467	0.288939
(2.5,-1.8)	0.445442	0.381807	0.340855	0.377393	0.292667
(2.5,-1.9)	0.445442	0.381807	0.340061	0.377393	0.29393
(2.5,-2)	0.445442	0.381807	0.339315	0.377393	0.29393
(2.5,-2.1)	0.445442	0.381807	0.33863	0.377393	0.29393
(2.5,-2.2)	0.445442	0.381807	0.338021	0.377393	0.29393
(2.5,-2.3)	0.445442	0.381807	0.337499	0.377393	0.29393
(2.5,-2.4)	0.445442	0.381807	0.337079	0.377393	0.29393
(2.5,-2.5)	0.445442	0.381807	0.336773	0.377393	0.29393
(2.5,-2.6)	0.445442	0.381807	0.336597	0.377393	0.29393
(2.5,-2.7)	0.445442	0.381807	0.336557	0.377393	0.29393
(2.5,-2.8)	0.445442	0.381807	0.336557	0.377393	0.29393
(2.5,-2.9)	0.445442	0.381807	0.336557	0.377393	0.29393
(2.5,-3)	0.445442	0.381807	0.336557	0.377393	0.29393

ตารางที่ ข.13 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.26 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่ลำดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-3)	0.296961	0.267265	0.173895	0.238392	0.273226
(0.1,-3)	0.315101	0.284492	0.180402	0.247495	0.274058
(0.2,-3)	0.332442	0.300299	0.186908	0.256392	0.274538
(0.3,-3)	0.348922	0.314855	0.193415	0.265096	0.274743
(0.4,-3)	0.364467	0.328303	0.199921	0.273621	0.274752
(0.5,-3)	0.378999	0.340765	0.206428	0.281976	0.274645
(0.6,-3)	0.392427	0.352345	0.212934	0.290171	0.274504
(0.7,-3)	0.404653	0.363134	0.219441	0.298215	0.274406
(0.8,-3)	0.415563	0.37321	0.225947	0.306116	0.274428
(0.9,-3)	0.42503	0.381807	0.232453	0.313881	0.274641
(1,-3)	0.432911	0.381807	0.23896	0.321518	0.275108
(1.1,-3)	0.439042	0.381807	0.245466	0.329031	0.275882
(1.2,-3)	0.443236	0.381807	0.251973	0.336428	0.277011
(1.3,-3)	0.445279	0.381807	0.258479	0.343714	0.27853
(1.4,-3)	0.445442	0.381807	0.264986	0.350892	0.280467
(1.5,-3)	0.445442	0.381807	0.271492	0.357968	0.282841
(1.6,-3)	0.445442	0.381807	0.277999	0.364947	0.285663
(1.7,-3)	0.445442	0.381807	0.284505	0.371831	0.288939
(1.8,-3)	0.445442	0.381807	0.291012	0.377393	0.292667
(1.9,-3)	0.445442	0.381807	0.297518	0.377393	0.29393
(2,-3)	0.445442	0.381807	0.304025	0.377393	0.29393
(2.1,-3)	0.445442	0.381807	0.310531	0.377393	0.29393
(2.2,-3)	0.445442	0.381807	0.317038	0.377393	0.29393
(2.3,-3)	0.445442	0.381807	0.323544	0.377393	0.29393
(2.4,-3)	0.445442	0.381807	0.33005	0.377393	0.29393
(2.5,-3)	0.445442	0.381807	0.336557	0.377393	0.29393
(2.6,-3)	0.445442	0.381807	0.343063	0.377393	0.29393
(2.7,-3)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393
(2.8,-3)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393
(2.9,-3)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393
(3,-3)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393

ตารางที่ ข.14 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.27 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 10 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(3,0)	0.296961	0.267265	0.359035	0.346852	0.273226
(3,-0.1)	0.315101	0.284492	0.359828	0.352155	0.274058
(3,-0.2)	0.332442	0.300299	0.360374	0.35681	0.274538
(3,-0.3)	0.348922	0.314855	0.360698	0.360871	0.274743
(3,-0.4)	0.364467	0.328303	0.360822	0.364387	0.274752
(3,-0.5)	0.378999	0.340765	0.36077	0.367401	0.274645
(3,-0.6)	0.392427	0.352345	0.360562	0.369954	0.274504
(3,-0.7)	0.404653	0.363134	0.360217	0.372084	0.274406
(3,-0.8)	0.415563	0.37321	0.359753	0.373824	0.274428
(3,-0.9)	0.42503	0.381807	0.359187	0.375208	0.274641
(3,-1)	0.432911	0.381807	0.358536	0.376267	0.275108
(3,-1.1)	0.439042	0.381807	0.357814	0.377031	0.275882
(3,-1.2)	0.443236	0.381807	0.357038	0.377533	0.277011
(3,-1.3)	0.445279	0.381807	0.356221	0.377805	0.27853
(3,-1.4)	0.445442	0.381807	0.355377	0.377885	0.280467
(3,-1.5)	0.445442	0.381807	0.35452	0.377814	0.282841
(3,-1.6)	0.445442	0.381807	0.353662	0.377649	0.285663
(3,-1.7)	0.445442	0.381807	0.352817	0.377467	0.288939
(3,-1.8)	0.445442	0.381807	0.351996	0.377393	0.292667
(3,-1.9)	0.445442	0.381807	0.351214	0.377393	0.29393
(3,-2)	0.445442	0.381807	0.350481	0.377393	0.29393
(3,-2.1)	0.445442	0.381807	0.34981	0.377393	0.29393
(3,-2.2)	0.445442	0.381807	0.349214	0.377393	0.29393
(3,-2.3)	0.445442	0.381807	0.348706	0.377393	0.29393
(3,-2.4)	0.445442	0.381807	0.348297	0.377393	0.29393
(3,-2.5)	0.445442	0.381807	0.348	0.377393	0.29393
(3,-2.6)	0.445442	0.381807	0.347829	0.377393	0.29393
(3,-2.7)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393
(3,-2.8)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393
(3,-2.9)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393
(3,-3)	0.445442	0.381807	0.34779	0.377393	0.29393

ตารางที่ ข.15 แสดงความสูงที่อัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิวที่มากที่สุดเปลี่ยนจาก ทรงกระบอกเป็นทรงกลม เมื่อปริมาตรเต็มเป็น 10 หน่วย และ รัศมี 1.336325352 หน่วย

คู่ลำดับ	ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s ทรงกลม	ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s ทรงกระบอก
(0.,-0.8)	3.9535436	15.93319028	0.248132579	4.489924551	17.94461886	0.250210082
(0.,-0.7)	3.56935065	15.56464292	0.229324288	3.928683981	17.10464292	0.229685238
(0.,-0.6)	3.1411577	15.13323841	0.207566789	3.367443414	16.26466698	0.207040416
(0.,-0.5)	2.67525046	14.63897676	0.18274846	2.806202844	15.42469105	0.181929274
(0.,-0.4)	2.17791466	14.08185797	0.15466103	2.244962275	14.58471511	0.153925686
(0.,-0.3)	1.65543599	13.46188204	0.122972107	1.683721706	13.74473918	0.122499357
(0.,-0.2)	1.11410019	12.77904895	0.087181776	1.122481138	12.90476324	0.086981924
(0.,-0.1)	0.56019295	12.03335873	0.046553333	0.561240569	12.06478731	0.046518895

ตารางที่ ข.16 แสดงความสูงที่อัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิวที่มากที่สุด เปลี่ยนจาก ทรงกลม

พาราโบลอยด์ และกรวย ตามลำดับ เมื่อปริมาตรเต็มเป็น 10 หน่วย และ รัศมี 1.336325352 หน่วย

คู่ลำดับ	ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s ทรงกลม	ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s พารา	ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s กรวย
(0.7,0)	3.5694	15.56464	0.22932429	2.350206	11.389614	0.206346411	1.261872	7.064677	0.178617089
(0.8,0)	3.9535	15.93319	0.24813258	2.748948	12.272413	0.223994085	1.4919953	7.753536	0.192427732
(0.9,0)	4.2875	16.23888	0.26402379	3.163439	13.168735	0.240223479	1.7357612	8.462522	0.205111586
(1.0,0)	4.5648	16.48171	0.27696068	3.59368	14.078337	0.255263121	1.9935626	9.191634	0.216888812
(1.1,0)	4.7793	16.66169	0.28684158	4.039671	15.000989	0.269293628	2.2657922	9.940873	0.227926886
(1.2,0)	4.9246	16.77881	0.29350124	4.501411	15.936472	0.282459684	2.5528429	10.71024	0.238355385
(1.3,0)	4.9945	16.83307	0.29670811	4.978901	16.884578	0.294878592	2.8551076	11.49973	0.248276062
(1.4,0)	5	16.83722	0.29696119	5.47214	17.845108	0.306646493	3.1729792	12.30935	0.257769881
(1.5,0)	5	16.83722	0.29696119	5.981129	18.817873	0.317842968	3.5068504	13.13909	0.266902023
(1.6,0)	5	16.83722	0.29696119	6.505867	19.802692	0.328534472	3.8571143	13.98896	0.275725511
(1.7,0)	5	16.83722	0.29696119	7.046355	20.799391	0.338776966	4.2241635	14.85896	0.284283893
(1.8,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	4.608391	15.74909	0.292613235
(1.9,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	5.0101896	16.65934	0.300743645
(2.0,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	5.4299522	17.58971	0.308700431
(2.1,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	5.8680717	18.54022	0.316505008
(2.2,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	6.3249408	19.51085	0.324175606
(2.3,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	6.8009525	20.5016	0.331727824
(2.4,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	7.2964996	21.51249	0.339175083
(2.5,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	7.811975	22.5435	0.346528983
(2.6,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	8.3477716	23.59463	0.353799594
(2.7,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	8.75	24.37091	0.359034556
(2.8,0)	5	16.83722	0.29696119	7.5	21.623077	0.346851653	8.75	24.37091	0.359034556

ข้อมูลอ้างอิงประกอบตัวอย่างที่ 2 ในหัวข้อที่ 4.3

ตารางที่ ข.17 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.29 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-1.3)	0.4488925	0.44779976	0.3163887	0.3760236	0.201573582
(0.25,-1.3)	0.5098969	0.503777821	0.3480186	0.4188007	0.205878714
(0.5,-1.3)	0.5657859	0.553774075	0.376434	0.4573736	0.208643917
(0.75,-1.3)	0.6169011	0.598698712	0.4024622	0.4926229	0.211527184
(1,-1.3)	0.6633918	0.639286179	0.4266752	0.5251894	0.215779524
(1.25,-1.3)	0.7052614	0.676135639	0.4494806	0.555551	0.222189159
(1.5,-1.3)	0.7423917	0.709740753	0.4711764	0.5840721	0.231109011
(1.75,-1.3)	0.7745571	0.740511918	0.4919846	0.6110354	0.242565342
(2,-1.3)	0.8014281	0.759923008	0.5120744	0.6366641	0.256384677
(2.25,-1.3)	0.8225686	0.759923008	0.5315764	0.6611372	0.272297333
(2.5,-1.3)	0.8374266	0.759923008	0.5505928	0.6845998	0.290006202
(2.75,-1.3)	0.8453194	0.759923008	0.5692049	0.707171	0.309225695
(3,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.5874776	0.7289498	0.32970013
(3.25,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.6054639	0.7500192	0.35120982
(3.5,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.6232067	0.7704492	0.373570616
(3.75,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.6407417	0.7902999	0.396630431
(4,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.6580982	0.7972136	0.42026473
(4.25,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.675301	0.7972136	0.444371992
(4.5,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.6923707	0.7972136	0.468869596
(4.75,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.7093248	0.7972136	0.493690289
(5,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.7261783	0.7972136	0.518779248
(5.25,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.7429438	0.7972136	0.544091678
(5.5,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.7596322	0.7972136	0.559366624
(5.75,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.776253	0.7972136	0.559366624
(6,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.7767872	0.7972136	0.559366624
(6.25,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.7767872	0.7972136	0.559366624
(6.5,-1.3)	0.8464002	0.759923008	0.7767872	0.7972136	0.559366624

ตารางที่ ข.18 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.30 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(1.3,0)	0.448892514	0.44779976	0.353178237	0.404340836	0.201573582
(1.3,-0.25)	0.50989692	0.503777821	0.383262896	0.446685227	0.205878714
(1.3,-0.5)	0.565785948	0.553774075	0.407091742	0.482223569	0.208643917
(1.3,-0.75)	0.616901054	0.598698712	0.425891089	0.512029267	0.211527184
(1.3,-1)	0.663391846	0.639286179	0.440605117	0.536956835	0.215779524
(1.3,-1.25)	0.680698283	0.676135639	0.451974062	0.557695812	0.222189159
(1.3,-1.5)	0.7423917	0.709740753	0.460587928	0.574809921	0.231109011
(1.3,-1.75)	0.774557128	0.740511918	0.46692422	0.588766173	0.242565342
(1.3,-2)	0.801428129	0.759923008	0.471375012	0.599957115	0.256384677
(1.3,-2.25)	0.822568577	0.759923008	0.474266725	0.608718466	0.272297333
(1.3,-2.5)	0.837426644	0.759923008	0.475874831	0.615343941	0.290006202
(1.3,-2.75)	0.845319399	0.759923008	0.476434957	0.620098927	0.309225695
(1.3,-3)	0.846400235	0.759923008	0.476151407	0.623235125	0.32970013
(1.3,-3.25)	0.846400235	0.759923008	0.475203801	0.625009821	0.35120982
(1.3,-3.5)	0.846400235	0.759923008	0.473752328	0.625718468	0.373570616
(1.3,-3.75)	0.846400235	0.759923008	0.471941967	0.625768448	0.396630431
(1.3,-4.25)	0.846400235	0.759923008	0.46776864	0.625749342	0.444371992
(1.3,-4.5)	0.846400235	0.759923008	0.465647997	0.625749342	0.468869596
(1.3,-4.75)	0.846400235	0.759923008	0.463657727	0.625749342	0.493690289
(1.3,-5)	0.846400235	0.759923008	0.461909215	0.625749342	0.518779248
(1.3,-5.25)	0.846400235	0.759923008	0.460513315	0.625749342	0.544091678
(1.3,-5.5)	0.846400235	0.759923008	0.459582062	0.625749342	0.559366624
(1.3,-5.75)	0.846400235	0.759923008	0.459230363	0.625749342	0.559366624
(1.3,-6)	0.846400235	0.759923008	0.45923	0.625749342	0.559366624
(1.3,-6.25)	0.846400235	0.759923008	0.45923	0.625749342	0.559366624

ตารางที่ ข.19 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.31 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่อันดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-1.5)	0.492416865	0.493093538	0.33472876	0.404364703	0.217485566
(0.25,-1.5)	0.549476413	0.544206848	0.362862347	0.442913436	0.219887741
(0.5,-1.5)	0.602137356	0.590082093	0.388584231	0.478098301	0.221070561
(0.75,-1.5)	0.650587535	0.631485217	0.412489928	0.510585453	0.222426477
(1,-1.5)	0.694868631	0.669039771	0.434998993	0.540866815	0.225095383
(1.25,-1.5)	0.734906793	0.703258529	0.456415024	0.569314122	0.229862093
(1.5,-1.5)	0.770529207	0.734567047	0.47696273	0.596213963	0.237132373
(1.75,-1.5)	0.80147137	0.763321446	0.496811695	0.621791212	0.246998469
(2,-1.5)	0.827377549	0.781502851	0.516092066	0.646225086	0.259341019
(2.25,-1.5)	0.847795646	0.781502851	0.534905203	0.669660415	0.273923958
(2.5,-1.5)	0.8621668	0.781502851	0.553331077	0.692215714	0.290464402
(2.75,-1.5)	0.869809474	0.781502851	0.571433513	0.71398906	0.308676507
(3,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.589263971	0.735062458	0.328295179
(3.25,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.606864331	0.755505115	0.349086458
(3.5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.624268958	0.775375939	0.370850044
(3.75,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.641506264	0.79472547	0.393417683
(4,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.658599903	0.801473887	0.416649696
(4.25,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.675569688	0.801473887	0.44043093
(4.5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.692432315	0.801473887	0.464666811
(4.75,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.709201925	0.801473887	0.489279778
(5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.725890551	0.801473887	0.514206221
(5.25,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.742508486	0.801473887	0.539393912
(5.5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.759064564	0.801473887	0.554609516
(5.75,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.775566399	0.801473887	0.554609516
(6,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.776097026	0.801473887	0.554609516
(6.25,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.776097026	0.801473887	0.554609516
(6.5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.776097026	0.801473887	0.554609516

ตารางที่ ข.20 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.32 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(1.5,0)	0.492416865	0.493093538	0.383644433	0.443062169	0.217485566
(1.5,-0.25)	0.549476413	0.544206848	0.40967904	0.480836984	0.219887741
(1.5,-0.5)	0.602137356	0.590082093	0.430393594	0.512686627	0.221070561
(1.5,-0.75)	0.650587535	0.631485217	0.446778268	0.539497232	0.222426477
(1.5,-1)	0.694868631	0.669039771	0.459609042	0.561983283	0.225095383
(1.5,-1.25)	0.734906793	0.703258529	0.469503971	0.580728129	0.229862093
(1.5,-1.5)	0.770529207	0.734567047	0.47696273	0.596213963	0.237132373
(1.5,-1.75)	0.80147137	0.763321446	0.482394983	0.608844519	0.246998469
(1.5,-2)	0.827377549	0.781502851	0.48614111	0.618962772	0.259341019
(1.5,-2.25)	0.847795645	0.781502851	0.488487609	0.62686528	0.273923958
(1.5,-2.5)	0.862166801	0.781502851	0.489678721	0.632814586	0.290464402
(1.5,-2.75)	0.869809474	0.781502851	0.489925339	0.637051072	0.308676507
(1.5,-3)	0.870856805	0.781502851	0.489411926	0.639806158	0.328295179
(1.5,-3.25)	0.870856805	0.781502851	0.488301983	0.641320329	0.349086458
(1.5,-3.5)	0.870856805	0.781502851	0.486742418	0.641874371	0.370850044
(1.5,-3.75)	0.870856805	0.781502851	0.4848671	0.641860945	0.393417683
(1.5,-4)	0.870856805	0.781502851	0.4827998	0.641837766	0.416649696
(1.5,-4.25)	0.870856805	0.781502851	0.48065667	0.641837766	0.44043093
(1.5,-4.5)	0.870856805	0.781502851	0.478548379	0.641837766	0.464666811
(1.5,-4.75)	0.870856805	0.781502851	0.476581991	0.641837766	0.489279778
(1.5,-5)	0.870856805	0.781502851	0.474862673	0.641837766	0.514206221
(1.5,-5.25)	0.870856805	0.781502851	0.473495281	0.641837766	0.539393912
(1.5,-5.5)	0.870856805	0.781502851	0.472585888	0.641837766	0.554609516
(1.5,-5.75)	0.870856805	0.781502851	0.472243294	0.641837766	0.554609516
(1.5,-6)	0.870856805	0.781502851	0.47224294	0.641837766	0.554609516
(1.5,-6.25)	0.870856805	0.781502851	0.47224294	0.641837766	0.554609516
(1.5,-6.5)	0.870856805	0.781502851	0.47224294	0.641837766	0.554609516

ตารางที่ ข.21 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.33 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-2.5)	0.627505695	0.575805139	0.381171522	0.488580243	0.302223016
(0.25,-2.5)	0.673594524	0.6185767	0.400342693	0.515160556	0.300123439
(0.5,-2.5)	0.7171892	0.657311971	0.418943937	0.54053267	0.297191099
(0.75,-2.5)	0.758095408	0.692556557	0.437096964	0.564863937	0.29406728
(1,-2.5)	0.796081799	0.724761965	0.454893201	0.588286812	0.29147092
(1.25,-2.5)	0.830877336	0.754305055	0.472402441	0.610907959	0.2900862
(1.5,-2.5)	0.862166801	0.781502851	0.489678721	0.632814586	0.290464402
(1.75,-2.5)	0.889584478	0.806623964	0.506764403	0.654078974	0.292977994
(2,-2.5)	0.912705868	0.82257877	0.52369306	0.67476175	0.297820929
(2.25,-2.5)	0.931037065	0.82257877	0.540491564	0.694914328	0.305036509
(2.5,-2.5)	0.944001278	0.82257877	0.557181616	0.714580736	0.314555907
(2.75,-2.5)	0.95092171	0.82257877	0.573780876	0.733799008	0.326236244
(3,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.590303821	0.752602267	0.339892583
(3.25,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.606762396	0.771019571	0.355322054
(3.5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.623166514	0.789076577	0.372320496
(3.75,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.639524448	0.806796081	0.390692977
(4,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.655843134	0.813005819	0.410259712
(4.25,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.672128415	0.813005819	0.4308588
(4.5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.688385233	0.813005819	0.452346881
(4.75,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.704617785	0.813005819	0.47459852
(5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.720829642	0.813005819	0.497504901
(5.25,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.737023862	0.813005819	0.520972189
(5.5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.753203063	0.813005819	0.535283806
(5.75,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.769369494	0.813005819	0.535283806
(6,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.769889953	0.813005819	0.535283806
(6.25,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.769889953	0.813005819	0.535283806
(6.5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.769889953	0.813005819	0.535283806

ตารางที่ ข.22 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.34 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(2.5,0)	0.627505695	0.575805139	0.504765253	0.59751288	0.302223016
(2.5,-0.25)	0.673594524	0.6185767	0.51848777	0.620418151	0.300123439
(2.5,-0.5)	0.7171892	0.657311971	0.529464747	0.640001788	0.297191099
(2.5,-0.75)	0.758095408	0.692556557	0.538114353	0.656660662	0.29406728
(2.5,-1)	0.796081798	0.724761965	0.544785912	0.670730826	0.29147092
(2.5,-1.25)	0.830877335	0.754305055	0.549774323	0.682499679	0.2900862
(2.5,-1.5)	0.8621668	0.781502851	0.553331077	0.692215714	0.290464402
(2.5,-1.75)	0.889584478	0.806623964	0.555672792	0.700096527	0.292977994
(2.5,-2)	0.912705868	0.82257877	0.556987887	0.706335694	0.297820929
(2.5,-2.25)	0.931037065	0.82257877	0.557441878	0.711109017	0.305036509
(2.5,-2.5)	0.944001278	0.82257877	0.557181616	0.714580736	0.314555907
(2.5,-2.75)	0.95092171	0.82257877	0.556338722	0.7169105	0.326236244
(2.5,-3)	0.95187236	0.82257877	0.555032398	0.718262482	0.339892583
(2.5,-3.25)	0.95187236	0.82257877	0.553371762	0.718819519	0.355322054
(2.5,-3.5)	0.95187236	0.82257877	0.551457807	0.71880958	0.372320496
(2.5,-3.75)	0.95187236	0.82257877	0.549385064	0.718568552	0.390692977
(2.5,-4)	0.95187236	0.82257877	0.547243047	0.71853113	0.410259712
(2.5,-4.25)	0.95187236	0.82257877	0.545117512	0.71853113	0.4308588
(2.5,-4.5)	0.95187236	0.82257877	0.543091597	0.71853113	0.452346881
(2.5,-4.75)	0.95187236	0.82257877	0.54124685	0.71853113	0.47459852
(2.5,-5)	0.95187236	0.82257877	0.539664195	0.71853113	0.497504901
(2.5,-5.25)	0.95187236	0.82257877	0.538424859	0.71853113	0.520972189
(2.5,-5.5)	0.95187236	0.82257877	0.537611267	0.71853113	0.535283806
(2.5,-5.75)	0.95187236	0.82257877	0.537307951	0.71853113	0.535283806
(2.5,-6)	0.95187236	0.82257877	0.53730764	0.71853113	0.535283806
(2.5,-6.25)	0.95187236	0.82257877	0.53730764	0.71853113	0.535283806
(2.5,-6.5)	0.95187236	0.82257877	0.53730764	0.71853113	0.535283806

ตารางที่ ข.23 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.35 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-3.5)	0.639783487	0.575805139	0.388470771	0.512841167	0.39551159
(0.25,-3.5)	0.684975793	0.6185767	0.40503686	0.535749366	0.392215035
(0.5,-3.5)	0.727824441	0.657311971	0.421504003	0.55803627	0.388102327
(0.75,-3.5)	0.768106569	0.692556557	0.437893473	0.579751608	0.383462861
(1,-3.5)	0.805570132	0.724761965	0.454221656	0.600938579	0.378718092
(1.25,-3.5)	0.839928964	0.754305055	0.470501302	0.621635032	0.374354674
(1.5,-3.5)	0.870856805	0.781502851	0.486742418	0.641874371	0.370850044
(1.75,-3.5)	0.89798002	0.806623964	0.50295292	0.661686279	0.368619267
(2,-3.5)	0.920868683	0.82257877	0.519139115	0.681097283	0.367986616
(2.25,-3.5)	0.939025549	0.82257877	0.535306054	0.700131211	0.369176941
(2.5,-3.5)	0.95187236	0.82257877	0.551457807	0.71880958	0.372320496
(2.75,-3.5)	0.958732622	0.82257877	0.567597668	0.737151893	0.377465601
(3,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.583728313	0.755175905	0.384594746
(3.25,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.599851922	0.772897836	0.39364113
(3.5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.615970277	0.790332553	0.404503774
(3.75,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.632084837	0.807493728	0.417060307
(4,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.648196801	0.81351924	0.431177135
(4.25,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.66430715	0.81351924	0.446717111
(4.5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.680416691	0.81351924	0.463545027
(4.75,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.696526086	0.81351924	0.481531317
(5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.712635876	0.81351924	0.500554368
(5.25,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.728746506	0.81351924	0.520501787
(5.5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.744858336	0.81351924	0.532867376
(5.75,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.760971659	0.81351924	0.532867376
(6,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.761490625	0.81351924	0.532867376
(6.25,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.761490625	0.81351924	0.532867376
(6.5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.761490625	0.81351924	0.532867376

ตารางที่ ข.24 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.36 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(3.5,0)	0.639783487	0.575805139	0.598610049	0.713310195	0.39551159
(3.5,-0.25)	0.684975793	0.6185767	0.60635942	0.728299615	0.392215035
(3.5,-0.5)	0.727824441	0.657311971	0.612450185	0.741170827	0.388102327
(3.5,-0.75)	0.768106569	0.692556557	0.617104666	0.752137259	0.383462861
(3.5,-1)	0.805570132	0.724761965	0.620516234	0.761386037	0.378718092
(3.5,-1.25)	0.839928964	0.754305055	0.622854407	0.769082816	0.374354674
(3.5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.624268958	0.775375939	0.370850044
(3.5,-1.75)	0.89798002	0.806623964	0.624893254	0.780400135	0.368619267
(3.5,-2)	0.920868683	0.82257877	0.624846995	0.784280024	0.367986616
(3.5,-2.25)	0.939025549	0.82257877	0.624238484	0.787133666	0.369176941
(3.5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.623166514	0.789076577	0.372320496
(3.5,-2.75)	0.958732622	0.82257877	0.621721971	0.790226784	0.377465601
(3.5,-3)	0.959675232	0.82257877	0.619989184	0.79071214	0.384594746
(3.5,-3.25)	0.959675232	0.82257877	0.618047096	0.790682386	0.39364113
(3.5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.615970277	0.790332553	0.404503774
(3.5,-3.75)	0.959675232	0.82257877	0.613829819	0.789959244	0.417060307
(3.5,-4)	0.959675232	0.82257877	0.611694133	0.789914038	0.431177135
(3.5,-4.25)	0.959675232	0.82257877	0.609629668	0.789914038	0.446717111
(3.5,-4.5)	0.959675232	0.82257877	0.607701576	0.789914038	0.463545027
(3.5,-4.75)	0.959675232	0.82257877	0.605974338	0.789914038	0.481531317
(3.5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.604512346	0.789914038	0.500554368
(3.5,-5.25)	0.959675232	0.82257877	0.60338049	0.789914038	0.520501787
(3.5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.602644719	0.789914038	0.532867376
(3.5,-5.75)	0.959675232	0.82257877	0.602372618	0.789914038	0.532867376
(3.5,-6)	0.959675232	0.82257877	0.602372341	0.789914038	0.532867376
(3.5,-6.25)	0.959675232	0.82257877	0.602372341	0.789914038	0.532867376
(3.5,-6.5)	0.959675232	0.82257877	0.602372341	0.789914038	0.532867376

ตารางที่ ข.25 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.37 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-5)	0.639783487	0.575805139	0.377782588	0.513599687	0.543964209
(0.25,-5)	0.684975793	0.6185767	0.393950054	0.536314324	0.540457966
(0.5,-5)	0.727824441	0.657311971	0.410123015	0.558438856	0.53618764
(0.75,-5)	0.768106569	0.692556557	0.426301101	0.580017006	0.53121221
(1,-5)	0.805570132	0.724761965	0.442483957	0.60108734	0.525708634
(1.25,-5)	0.839928964	0.754305055	0.458671251	0.621684081	0.519938761
(1.5,-5)	0.870856805	0.781502851	0.474862673	0.641837766	0.514206221
(1.75,-5)	0.89798002	0.806623964	0.491057934	0.661575786	0.508821361
(2,-5)	0.920868683	0.82257877	0.507256769	0.680922812	0.504076845
(2.25,-5)	0.939025549	0.82257877	0.523458931	0.699901168	0.50023215
(2.5,-5)	0.95187236	0.82257877	0.539664195	0.71853113	0.497504901
(2.75,-5)	0.958732622	0.82257877	0.555872353	0.736831179	0.496067311
(3,-5)	0.959675232	0.82257877	0.572083213	0.754818215	0.49604636
(3.25,-5)	0.959675232	0.82257877	0.588296598	0.772507746	0.497526561
(3.5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.604512346	0.789914038	0.500554368
(3.75,-5)	0.959675232	0.82257877	0.620730308	0.80705025	0.505143471
(4,-5)	0.959675232	0.82257877	0.636950346	0.813067654	0.511280391
(4.25,-5)	0.959675232	0.82257877	0.653172333	0.813067654	0.518929946
(4.5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.669396151	0.813067654	0.528040331
(4.75,-5)	0.959675232	0.82257877	0.685621692	0.813067654	0.538547618
(5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.701848855	0.813067654	0.550379641
(5.25,-5)	0.959675232	0.82257877	0.718077547	0.813067654	0.563459217
(5.5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.734307681	0.813067654	0.571870339
(5.75,-5)	0.959675232	0.82257877	0.750539179	0.813067654	0.571870339
(6,-5)	0.959675232	0.82257877	0.751061945	0.813067654	0.571870339
(6.25,-5)	0.959675232	0.82257877	0.751061945	0.813067654	0.571870339
(6.5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.751061945	0.813067654	0.571870339

ตารางที่ ข.26 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.38เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(5,0)	0.639783487	0.575805139	0.718040057	0.747269234	0.543964209
(5,-0.25)	0.684975793	0.6185767	0.721287946	0.760394811	0.540457966
(5,-0.5)	0.727824441	0.657311971	0.72362227	0.771665112	0.53618764
(5,-0.75)	0.768106569	0.692556557	0.725153837	0.781258358	0.53121221
(5,-1)	0.805570132	0.724761965	0.725982888	0.789332373	0.525708634
(5,-1.25)	0.839928964	0.754305055	0.726200631	0.796028305	0.519938761
(5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.725890551	0.801473887	0.514206221
(5,-1.75)	0.89798002	0.806623964	0.725129524	0.805786443	0.508821361
(5,-2)	0.920868683	0.82257877	0.723988776	0.809075804	0.504076845
(5,-2.25)	0.939025549	0.82257877	0.722534712	0.811447393	0.50023215
(5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.720829642	0.813005819	0.497504901
(5,-2.75)	0.958732622	0.82257877	0.718932417	0.813859552	0.496067311
(5,-3)	0.959675232	0.82257877	0.716898994	0.814127837	0.49604636
(5,-3.25)	0.959675232	0.82257877	0.714782936	0.813952244	0.497526561
(5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.712635876	0.81351924	0.500554368
(5,-3.75)	0.959675232	0.82257877	0.710507925	0.813114598	0.505143471
(5,-4)	0.959675232	0.82257877	0.708448059	0.813067654	0.511280391
(5,-4.25)	0.959675232	0.82257877	0.70650448	0.813067654	0.518929946
(5,-4.5)	0.959675232	0.82257877	0.70472495	0.813067654	0.52804033
(5,-4.75)	0.959675232	0.82257877	0.703157123	0.813067654	0.538547618
(5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.701848855	0.813067654	0.550379641
(5,-5.25)	0.959675232	0.82257877	0.700848521	0.813067654	0.563459217
(5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.700205328	0.813067654	0.571870339
(5,-5.75)	0.959675232	0.82257877	0.69996963	0.813067654	0.571870339
(5,-6)	0.959675232	0.82257877	0.699969631	0.813067654	0.571870339
(5,-6.25)	0.959675232	0.82257877	0.699969391	0.813067654	0.571870339
(5,-6.5)	0.959675232	0.82257877	0.699969391	0.813067654	0.571870339

ตารางที่ ข.27 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.39 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-5.5)	0.639783487	0.575805139	0.375071396	0.513599687	0.584495143
(0.25,-5.5)	0.684975793	0.6185767	0.39132117	0.536314324	0.581036377
(0.5,-5.5)	0.727824441	0.657311971	0.407572157	0.558438856	0.576833512
(0.75,-5.5)	0.768106569	0.692556557	0.423824226	0.580017006	0.571913463
(1,-5.5)	0.805570132	0.724761965	0.440077267	0.60108734	0.566414529
(1.25,-5.5)	0.839928964	0.754305055	0.456331182	0.621684081	0.560557877
(1.5,-5.5)	0.870856805	0.781502851	0.472585888	0.641837766	0.554609516
(1.75,-5.5)	0.89798002	0.806623964	0.488841311	0.661575786	0.548849105
(2,-5.5)	0.920868683	0.82257877	0.505097385	0.680922812	0.543547877
(2.25,-5.5)	0.939025549	0.82257877	0.521354054	0.699901168	0.538954032
(2.5,-5.5)	0.95187236	0.82257877	0.537611267	0.71853113	0.535283806
(2.75,-5.5)	0.958732622	0.82257877	0.553868978	0.736831179	0.532716811
(3,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.570127147	0.754818215	0.531394586
(3.25,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.586385738	0.772507746	0.531421514
(3.5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.602644719	0.789914038	0.532867376
(3.75,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.61890406	0.80705025	0.535770939
(4,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.635163734	0.813067654	0.540144123
(4.25,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.65142372	0.813067654	0.545976325
(4.5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.667683993	0.813067654	0.553238675
(4.75,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.683944536	0.813067654	0.56188799
(5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.700205328	0.813067654	0.571870339
(5.25,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.716466356	0.813067654	0.583124155
(5.5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.732727603	0.813067654	0.590457117
(5.75,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.748989057	0.813067654	0.590457117
(6,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.749512769	0.813067654	0.590457117
(6.25,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.749512769	0.813067654	0.590457117
(6.5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.749512769	0.813067654	0.590457117

ตารางที่ ข.28 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.40 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(5.5,0)	0.639783487	0.575805139	0.754877349	0.747269234	0.584495143
(5.5,-0.25)	0.684975793	0.6185767	0.757210659	0.760394811	0.581036377
(5.5,-0.5)	0.727824441	0.657311971	0.758774776	0.771665112	0.576833512
(5.5,-0.75)	0.768106569	0.692556557	0.759661607	0.781258358	0.571913463
(5.5,-1)	0.805570132	0.724761965	0.759955103	0.789332373	0.566414529
(5.5,-1.25)	0.839928964	0.754305055	0.759732358	0.796028305	0.560557877
(5.5,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.759064564	0.801473887	0.554609516
(5.5,-1.75)	0.89798002	0.806623964	0.758017822	0.805786443	0.548849105
(5.5,-2)	0.920868683	0.82257877	0.756653867	0.809075804	0.543547877
(5.5,-2.25)	0.939025549	0.82257877	0.755030683	0.811447393	0.538954032
(5.5,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.753203063	0.813005819	0.535283806
(5.5,-2.75)	0.958732622	0.82257877	0.751223093	0.813859552	0.532716811
(5.5,-3)	0.959675232	0.82257877	0.749140597	0.814127837	0.531394586
(5.5,-3.25)	0.959675232	0.82257877	0.747003528	0.813952244	0.531421514
(5.5,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.744858336	0.81351924	0.532867376
(5.5,-3.75)	0.959675232	0.82257877	0.742750295	0.813114598	0.535770939
(5.5,-4)	0.959675232	0.82257877	0.74072382	0.813067654	0.540144123
(5.5,-4.25)	0.959675232	0.82257877	0.738822754	0.813067654	0.545976325
(5.5,-4.5)	0.959675232	0.82257877	0.737090649	0.813067654	0.553238675
(5.5,-4.75)	0.959675232	0.82257877	0.735571034	0.813067654	0.56188799
(5.5,-5)	0.959675232	0.82257877	0.734307681	0.813067654	0.571870339
(5.5,-5.25)	0.959675232	0.82257877	0.733344861	0.813067654	0.583124155
(5.5,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.732727603	0.813067654	0.590457117
(5.5,-5.75)	0.959675232	0.82257877	0.732501971	0.813067654	0.590457117
(5.5,-6)	0.959675232	0.82257877	0.732501742	0.813067654	0.590457117
(5.5,-6.25)	0.959675232	0.82257877	0.732501742	0.813067654	0.590457117
(5.5,-6.5)	0.959675232	0.82257877	0.732501742	0.813067654	0.590457117

ตารางที่ ข.29 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.41 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

คู่ลำดับ	v/s ทรงกลม	v/s ทรงกระบอก	v/s กรวย	v/s พาราโบลอยด์	v/s ไฮเพอร์โบลอยด์
(0,-15)	0.639783	0.575805	0.374646	0.5136	0.584495
(0.25,-15)	0.684976	0.618577	0.390912	0.536314	0.581036
(0.5,-15)	0.727824	0.657312	0.407178	0.558439	0.576834
(0.75,-15)	0.768107	0.692557	0.423444	0.580017	0.571913
(1,-15)	0.80557	0.724762	0.439711	0.601087	0.566415
(1.25,-15)	0.839929	0.754305	0.455977	0.621684	0.560558
(1.5,-15)	0.870857	0.781503	0.472243	0.641838	0.55461
(1.75,-15)	0.89798	0.806624	0.488509	0.661576	0.548849
(2,-15)	0.920869	0.822579	0.504775	0.680923	0.543548
(2.25,-15)	0.939026	0.822579	0.521041	0.699901	0.538954
(2.5,-15)	0.951872	0.822579	0.537308	0.718531	0.535284
(2.75,-15)	0.958733	0.822579	0.553574	0.736831	0.532717
(3,-15)	0.959675	0.822579	0.56984	0.754818	0.531395
(3.25,-15)	0.959675	0.822579	0.586106	0.772508	0.531422
(3.5,-15)	0.959675	0.822579	0.602372	0.789914	0.532867
(3.75,-15)	0.959675	0.822579	0.618639	0.80705	0.535771
(4,-15)	0.959675	0.822579	0.634905	0.813068	0.540144
(4.25,-15)	0.959675	0.822579	0.651171	0.813068	0.545976
(4.5,-15)	0.959675	0.822579	0.667437	0.813068	0.553239
(4.75,-15)	0.959675	0.822579	0.683703	0.813068	0.561888
(5,-15)	0.959675	0.822579	0.699969	0.813068	0.57187
(5.25,-15)	0.959675	0.822579	0.716236	0.813068	0.583124
(5.5,-15)	0.959675	0.822579	0.732502	0.813068	0.590457
(5.75,-15)	0.959675	0.822579	0.748768	0.813068	0.590457
(6,-15)	0.959675	0.822579	0.749292	0.813068	0.590457
(6.25,-15)	0.959675	0.822579	0.749292	0.813068	0.590457
(6.5,-15)	0.959675	0.822579	0.749292	0.813068	0.590457

ตารางที่ ข.30 แสดงค่าอัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิว ประกอบรูปที่ 4.42 เมื่อปริมาตรเต็ม เป็น 100 หน่วย

	v/s	v/s	v/s	v/s	v/s
คู่ลำดับ	ทรงกลม	ทรงกระบอก	กรวย	พาราโบลอยด์	ไฮเพอร์โบลอยด์
(15,0)	0.639783487	0.575805139	0.773516503	0.747269234	0.584495143
(15,-0.25)	0.684975793	0.6185767	0.77544924	0.760394811	0.581036377
(15,-0.5)	0.727824441	0.657311971	0.776675455	0.771665112	0.576833512
(15,-0.75)	0.768106569	0.692556557	0.777279165	0.781258358	0.571913463
(15,-1)	0.805570132	0.724761965	0.777337459	0.789332373	0.566414529
(15,-1.25)	0.839928964	0.754305055	0.776921438	0.796028305	0.560557877
(15,-1.5)	0.870856805	0.781502851	0.776097026	0.801473887	0.554609516
(15,-1.75)	0.89798002	0.806623964	0.774925674	0.805786443	0.548849105
(15,-2)	0.920868683	0.82257877	0.773464986	0.809075804	0.543547877
(15,-2.25)	0.939025549	0.82257877	0.771769255	0.811447393	0.538954032
(15,-2.5)	0.95187236	0.82257877	0.769889953	0.813005819	0.535283806
(15,-2.75)	0.958732622	0.82257877	0.767876157	0.813859552	0.532716811
(15,-3)	0.959675232	0.82257877	0.765774942	0.814127837	0.531394586
(15,-3.25)	0.959675232	0.82257877	0.763631734	0.813952244	0.531421514
(15,-3.5)	0.959675232	0.82257877	0.761490625	0.81351924	0.532867376
(15,-3.75)	0.959675232	0.82257877	0.759394684	0.813114598	0.535770939
(15,-4)	0.959675232	0.82257877	0.757386231	0.813067654	0.540144123
(15,-4.25)	0.959675232	0.82257877	0.755507099	0.813067654	0.545976325
(15,-4.5)	0.959675232	0.82257877	0.753798888	0.813067654	0.553238675
(15,-4.75)	0.959675232	0.82257877	0.752303215	0.813067654	0.56188799
(15,-5)	0.959675232	0.82257877	0.751061945	0.813067654	0.571870339
(15,-5.25)	0.959675232	0.82257877	0.750117435	0.813067654	0.583124155
(15,-5.5)	0.959675232	0.82257877	0.749512769	0.813067654	0.590457117
(15,-5.75)	0.959675232	0.82257877	0.749292002	0.813067654	0.590457117
(15,-6)	0.959675232	0.82257877	0.749291778	0.813067654	0.590457117
(15,-6.25)	0.959675232	0.82257877	0.749291778	0.813067654	0.590457117
(15,-6.5)	0.959675232	0.82257877	0.749291778	0.813067654	0.590457117

ตารางที่ ข.31 แสดงความสูงที่อัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิวที่มากที่สุดเปลี่ยนจาก ทรงกระบอกเป็นทรงกลม เมื่อปริมาตรเดิมเป็น 100 หน่วย และ รัศมี 2.879025694 หน่วย

คู่ลำดับ	ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s		พื้นที่ผิว	ทรงกระบอก
			ทรงกลม	ปริมาตร		
(0.,-1.9)	42.3102921	75.13903735	0.563093348	49.49591114	86.48475168	0.572307952
(0.,-1.8)	40.7811489	74.49222125	0.547455133	46.89086317	84.67507838	0.553774075
(0.,-1.7)	39.1388628	73.78254795	0.530462337	44.28581523	82.86540509	0.534430685
(0.,-1.6)	37.3897196	73.01001751	0.512117664	41.68076729	81.05573179	0.514223564
(0.,-1.5)	35.540005	72.17462993	0.492416865	39.07571932	79.2460585	0.493093538
(0.,-1.4)	33.5960047	71.27638521	0.471348323	36.47067138	77.43638521	0.470975902
(0.,-1.3)	31.5640043	70.31528335	0.448892514	33.86562341	75.62671191	0.44779976
(0.,-1.2)	29.4502897	69.29132434	0.425021314	31.26057546	73.81703862	0.42348726
(0.,-1.1)	27.2611465	68.20450819	0.399697135	28.6555275	72.00736532	0.397952728
(0.,-1.0)	25.0028605	67.05483489	0.372871852	26.05047955	70.19769203	0.371101653
(0.,-0.9)	22.6817173	65.84230446	0.344485471	23.44543159	68.38801874	0.342829519
(0.,-0.8)	20.3040027	64.56691688	0.314464491	20.84038364	66.57834545	0.31302045
(0.,-0.7)	17.8760023	63.22867216	0.282719875	18.23533568	64.76867215	0.281545616
(0.,-0.6)	15.404002	61.82757029	0.249144547	15.63028773	62.95899886	0.248261377
(0.,-0.5)	12.8942874	60.36361128	0.213610271	13.02523978	61.14932557	0.213007088
(0.,-0.4)	10.3531442	58.83679513	0.175963768	10.42019182	59.33965228	0.175602509
(0.,-0.3)	7.78685812	57.24712184	0.136021827	7.815143864	57.52997898	0.13584472
(0.,-0.2)	5.20171492	55.5945914	0.093565125	5.210095908	55.72030569	0.093504439
(0.,-0.1)	2.6040003	53.87920382	0.048330341	2.605047955	53.91063239	0.048321599

ตารางที่ ข.32 แสดงความสูงที่อัตราส่วนระหว่างปริมาตรต่อพื้นที่ผิวที่มากที่สุด เปลี่ยนจาก ทรงกลม พาราโบลอยด์ และกรวย ตามลำดับ เมื่อปริมาตรเต็มเป็น 100 หน่วย และ รัศมี 2.879025694 หน่วย

คู่ลำดับ	ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s		v/s		ปริมาตร	พื้นที่ผิว	v/s	
			ทรงกลม	ปริมาตร	พารา	กรวย				
(2.6,0)	49.318	77.90675	0.63304263	45.33443	74.268528	0.610412368	25.729491	49.95922	0.515009846	
(2.7,0)	49.716	78.05071	0.63697062	47.53613	76.305775	0.622969011	27.118165	51.65147	0.525022177	
(2.8,0)	49.944	78.13181	0.63922759	49.77177	78.355538	0.635204242	28.540068	53.36384	0.534820376	
(2.9,0)	50	78.15144	0.63978349	52.04134	80.417725	0.647137658	29.995592	55.09634	0.5444208	
(3,0)	50	78.15144	0.63978349	54.34484	82.492247	0.658787212	31.485129	56.84896	0.553838245	
(3.6,0)	50	78.15144	0.63978349	68.87839	95.193673	0.723560629	41.158642	67.78737	0.607172761	
(3.7,0)	50	78.15144	0.63978349	71.41941	97.352202	0.733618873	42.897276	69.68088	0.615624806	
(3.8,0)	50	78.15144	0.63978349	73.99436	99.522418	0.743494426	44.673067	71.59451	0.623973326	
(3.9,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	46.486406	73.52828	0.63222489	
(4.0,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	48.337689	75.48217	0.640385553	
(4.1,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	50.227306	77.45618	0.648460906	
(4.2,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	52.155652	79.45032	0.656456115	
(4.3,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	54.123118	81.46459	0.664375963	
(4.4,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	56.130098	83.49899	0.67222488	
(4.5,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	58.176985	85.55351	0.680006979	
(4.6,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	60.264171	87.62816	0.687726082	
(4.7,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	62.39205	89.72294	0.695385743	
(4.8,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	64.561014	91.83784	0.70298927	
(4.9,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	66.771456	93.97286	0.710539749	
(5.0,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	69.023768	96.12802	0.718040057	
(5.1,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	71.318345	98.3033	0.725492887	
(5.2,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	73.655578	100.4987	0.73290075	
(5.3,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	76.035861	102.7142	0.740266002	
(5.4,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	78.459586	104.9499	0.747590846	
(5.5,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	80.927146	107.2057	0.754877349	
(5.6,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	83.438935	109.4816	0.762127451	
(5.7,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	85.995344	111.7776	0.769342973	
(5.8,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	87.5	113.1198	0.773516503	
(5.9,0)	50	78.15144	0.63978349	75	100.36543	0.747269234	87.5	113.1198	0.773516503	

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นางสาวหทัยกาญจน์ แสนพาน
วัน เดือน ปีเกิด	16 สิงหาคม 2523 ที่จังหวัดมหาสารคาม
ที่อยู่	130/9 ถ.ถีนานนท์ ต.ท่าขอนยาง อ.กันทรวิชัย จ.มหาสารคาม 44150 โทร 043-749046
ประวัติการศึกษา	2545 ศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาการมัธยมศึกษา วิชาเอกการสอนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์(คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยขอนแก่น