

การแปลงโดเมน s-z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการ
ด้วยปาสกาลเมตริกซ์

S-Z DOMAIN WITH FREQUENCY TRANSFORMATION
USING PASCAL MATRIX OPERATION

สงกรานต์ ศรียพงษ์
SONGRAN SRIYAPONG

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2549

ISBN 974-15-2257-5

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการ
ด้วยปาสคาลเมตริกส์

S-Z DOMAIN WITH FREQUENCY TRANSFORMATION
USING PASCAL MATRIX OPERATION



สงกรานต์ ศรียะพงศ์

SONGKRAN SRIYAPONG

อพ.
ค1327
2549

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน.....**63283**
วัน,เดือน,ปี.....**25 ส.ค. 2549**

b. 11634224
i.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม
บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2549

ISBN 974-15-2257-6

COPYRIGHT 2006

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์
นักศึกษา	นายสงกรานต์ ศรีชะพงศ์
รหัสนักศึกษา	47061036
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2549
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.สมยศ จุณณะปิยะ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) โดยการแปลงความถี่ (frequency transformations) เป็นการแปลงวงจรรองสัญญาณอนาล็อกต้นแบบไปเป็นวงจรรองสัญญาณอนาล็อกผ่านความถี่ต่ำผ่านความถี่สูง ผ่านแถบความถี่ กำจัดแถบความถี่และการแปลงโดเมน S-Z เป็นการแปลงความถี่จากอนาล็อกโดเมนไปเป็นดิจิทัลโดเมนด้วยหลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) ซึ่งแต่เดิมการออกแบบวงจรรองสัญญาณดิจิทัลโดยตรงจากหลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มพร้อมการแปลงความถี่ในกรณีลำดับสูงๆ มีการคำนวณที่ยุ่งยากและอาจเกิดความผิดพลาดได้ ดังนั้นหลักการนำเสนอนี้เป็นการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์เหมาะสำหรับการออกแบบวงจรรองสัญญาณดิจิทัลในกรณีลำดับสูงๆ เพราะว่าการคำนวณอยู่ในรูปของเมตริกซ์ทำให้ง่ายต่อการคำนวณและประหยัดเวลาในการออกแบบวงจรรองสัญญาณ

Thesis Title	S-Z Domain with Frequency Transformation Using Pascal Matrix Operation
Student	Mr. Songkran Sriyapong
Student ID.	47061036
Degree	Master of Engineering
Programme	Telecommunications Engineering
Year	2006
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Somyot Junnapiya

ABSTRACT

This thesis presents S-Z Domain with Frequency Transformations Using Pascal Matrix Operation Which of frequency transformations from normalized analog low-pass filter prototype to digital low-pass, high-pass, band-pass and band-stop filter and bilinear transform from analog transfer function on s plane to digital transfer function on z plane will be corresponded with Pascal matrix operation. Before have to problem design digital filter of bilinear transform original in case order high, it is difficulty and error happened. Also this proposed is appropriate method and solve easy for computation because define form the matrix operation and can be building to the program this method on computer personal

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำ และคำปรึกษาจาก รศ.สมยศ จุณณะปิยะ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ และอาจารย์ศรวัฒน์ ชิวปรีชา ข้าพเจ้ารู้สึกทราบบ้างในความอนุเคราะห์จากท่านอาจารย์ทั้งสามท่านและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และผศ.สุรพันธ์ ยิ้มมัน ภาควิชาฟิสิกส์ อุตสาหกรรมและอุปกรณ์การแพทย์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอขอบคุณนางสาวสุรีย์พร คงเมืองและเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ในภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกคนที่ให้คำแนะนำต่างๆ และคอยให้กำลังใจเสมอมาและขอขอบคุณบัณฑิตศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ ที่ให้ความช่วยเหลือในเรื่องต่างๆ

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่ออารี และคุณแม่สุภาภรณ์ ศรียะพงศ์ และครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจและให้การสนับสนุนในทุกเรื่องๆ ทำให้ข้าพเจ้าสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมาจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอบแต่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

สงกรานต์ ศรียะพงศ์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	2
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	2
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐาน.....	4
2.1 บทนำ.....	4
2.2 โครงสร้างของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล.....	5
2.3 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง.....	6
2.4 การออกแบบวงจรรองสัญญาณอนาลอก.....	7
2.4.1 วงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท.....	7
2.4.2 วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ.....	10
2.4.3 วงจรรองสัญญาณแบบอีลิปติก.....	13
2.5 การแปลงแซด (Z Transformation).....	14
2.5.1 นิยามของการแปลงแซด.....	14
2.5.1 คุณสมบัติของการแปลงแซด.....	18
2.6 การแปลงแซดผกผัน (Inversion of Z Transform).....	19
2.6.1 วิธีการหารยาว.....	19
2.6.2 วิธีการแยกเศษส่วนย่อย.....	20
2.6.3 วิธีการ Residue.....	21

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.7 บทสรุป.....	21
บทที่ 3 วงจรกรองสัญญาณดิจิทัล.....	22
3.1 วิธีอิมพัลส์อินเวรีชันซ์	22
3.2 วิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม	26
3.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง	30
3.4 วิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า.....	33
3.5 ประเภทของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล.....	35
3.5.1 วงจรกรองวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด.....	35
3.5.1.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์โดยใช้อนุกรมฟูรีเยอร์...40	
3.5.1.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์ ด้วยฟังก์ชันวิน โคว์... 42	
3.5.2 วงจรกรองวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด.....	45
3.5.2.1 โครงสร้างแบบโดยตรง 1.....	46
3.5.2.2 โครงสร้างแบบโดยตรง 2.....	46
3.5.2.3 โครงสร้างแบบอนุกรม.....	48
3.5.2.4 โครงสร้างแบบต่อขนาน.....	49
3.6 บทสรุป.....	50
บทที่ 4 ทฤษฎีและหลักการออกแบบ.....	51
4.1 ทฤษฎีทวินาม.....	51
4.2 หลักการสร้างปาสดาลเมตริกส์ด้วยวิธีการ ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม.....	53
4.3 การแปลงความถี่.....	55
4.4 หลักการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ.....	56
4.5 ตัวอย่างและผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ.....	66
4.6 บทสรุป.....	101
บทที่ 5 อินเวอร์สปาสดาลเมตริกส์.....	102
5.1 หลักการหาอินเวอร์สปาสดาลเมตริกส์.....	102

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
5.2 การแปลงวงจกรองสัญญาณคิติดอลไปเป็นวงจกรองสัญญาณอนาลอก.....	104
5.2.1 วงจกรองสัญญาณอนาลอกผ่านความถี่ต่ำ 2 ลำดับ.....	104
5.2.2 วงจกรองสัญญาณอนาลอกผ่านความถี่สูง 2 ลำดับ.....	105
5.2.2 วงจกรองสัญญาณอนาลอกผ่านแถบความถี่ 2 ลำดับ.....	106
5.2.3 วงจกรองสัญญาณอนาลอกกำจัดแถบความถี่ 2 ลำดับ.....	107
5.3 บทสรุป.....	108
บทที่ 6 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	109
บรรณานุกรม.....	110
ภาคผนวก.....	111
ภาคผนวก ก. โปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการจำลองการทำงาน.....	112
ภาคผนวก ข. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.....	128
ประวัติผู้เขียน.....	134

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 สัมประสิทธิ์ของวงจกรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ต่ำ.....	9
2.2 Z Transform ของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง.....	22
3.1 คุณสมบัติของการทรานส์ฟอร์มด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์.....	25
3.2 ผลตอบสนองอิมพัลส์.....	42
3.3 พารามิเตอร์ที่สำคัญๆของหน้าต่างแบบต่างๆ.....	43
4.1 การกระจายเลขชี้กำลัง.....	51
4.2 สามเหลี่ยมของปาสคาล.....	52
4.3 สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน.....	66

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 บล็อกไดอะแกรมของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล.....	5
2.2 ตัวดำเนินการที่ใช้ในระบบ DSP	6
2.3 การสุ่มสัญญาณ (Sampling signal).....	6
2.4 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท.....	8
2.5 ตำแหน่งโพลในระนาบเอส (s plane).....	9
2.6 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ.....	12
2.7 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติก.....	14
2.8 พื้นที่ระนาบแซคที่มีการค่าคู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n)$	16
2.9 พื้นที่ระนาบแซคที่มีการค่าคู่เข้าของ $x(n) = -a^n u(-n - 1)$	17
2.10 พื้นที่ระนาบแซคที่มีการค่าคู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n - 1)$	18
3.1 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม.....	29
3.2 ความสัมพันธ์ความถี่ในโดเมนอนาลอกและดิจิทัล.....	30
3.3 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง.....	31
3.4 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง.....	33
3.5 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องไปหน้า.....	33
3.6 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า.....	35
3.7 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ รูปแบบโดยตรง.....	36
3.8 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ แบบอนุกรม.....	36
3.9 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ แบบเฟสเชิงเส้น.....	37
3.10 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบสมมาตร.....	39
3.11 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบปฏิสมมาตร.....	40
3.12 ผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอูคมคิต.....	41
3.13 คุณลักษณะเฉพาะของผลตอบสนองความถี่ของตัวกรองแบบเอฟไออาร์.....	44
3.14 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง I.....	46
3.15 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง II.....	47
3.16 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบอนุกรม.....	49
3.17 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบขนาน.....	50
4.1 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำที่ลำดับต่างๆ.....	97

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.2	ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำที่ลำดับต่างๆ.....97
4.3	ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่สูงที่ลำดับต่างๆ.....98
4.4	ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่สูงที่ลำดับต่างๆ.....98
4.5	ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ.....99
4.6	ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ.....99
4.7	ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ.....100
4.8	ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ.....100

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

หากกล่าวถึงการประมวลผลสัญญาณแล้วนั้นเราสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ก็คือ การประมวลผลสัญญาณอนาลอกและการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลโดยทั่วไปแล้ว การประมวลผลสัญญาณดิจิทัลนั้นมีบทบาทและมีความสำคัญอย่างมากทางด้านต่างๆ เช่น ทางด้านทหาร การแพทย์ และอื่นๆอาจจะเป็นเพราะว่าการประมวลผลทางสัญญาณนั้นมีความแม่นยำ รวดเร็ว และสามารถคำนวณวงจรที่ซับซ้อนได้ดีกว่า

แต่ก่อนที่จะทำการประมวลผลสัญญาณนั้นเราอาจจะต้องนำสัญญาณไปผ่านวงจรกรองสัญญาณที่ได้ออกแบบไว้เพื่อลดสัญญาณรบกวน (Noise) ที่ปนเข้ามากับสัญญาณ โดยในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณนั้นมีความจำเป็นอย่างมากต่อการกำจัดสัญญาณรบกวน ถ้าการออกแบบวงจรกรองสัญญาณนั้นไม่ดีพออาจจะทำให้องค์ประกอบความถี่บางส่วนที่ไม่ต้องการปนเข้ามาและไม่สามารถวิเคราะห์สัญญาณนั้นได้แน่นอนการออกแบบวงจรกรองสัญญาณที่ดีจะต้องมีผลตอบสนองทางขนาดและเฟสที่เข้าใกล้ทางอุดมคติ

แนวทางการวิจัยนี้เริ่มจากการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ (Analog filter prototype) จากนั้นใช้คุณสมบัติหลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear Transformations) ของการแปลง S-Z โดเมนพร้อมการแปลงความถี่ (Frequency Transformations) ทำให้ได้วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่มีคุณสมบัติเหมือนกับวงจรกรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ แต่การออกแบบนั้นมีความยุ่งยากต่อการคำนวณและอาจเกิดความผิดพลาด ทำให้เกิดปัญหาแก่ผู้ออกแบบในกรณีที่ต้องการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลในลำดับที่สูงขึ้นไป ดังนั้นงานวิจัยนี้เหมาะสมในการแก้ปัญหาดังกล่าว ก็คือการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) เพราะว่าการคำนวณอยู่ในรูปของเมตริกซ์ทำให้ง่ายในการคำนวณและประหยัดเวลาต่อการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

ในการดำเนินการค้นคว้าและวิจัยเพื่อให้ได้มาซึ่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความมุ่งหมายและเหมาะสมสำหรับผู้ออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลเพราะว่าการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) มีรูปแบบที่ไม่ยุ่งยาก

ต่อการคำนวณและประหยัดเวลาในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณกรณีสลับที่ลำดับสูงๆขึ้นไปได้ จึงได้กำหนดวัตถุประสงค์ในการจัดทำวิทยานิพนธ์เรียงตามขั้นตอนการดำเนินงานไว้ดังนี้

1. ออกแบบและวิเคราะห์ผลตามหลักการและทฤษฎีต่างๆ
2. จำลองการทำงานโดยใช้โปรแกรม MATLAB
3. สรุป

1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

การดำเนินการวิจัยครั้งนี้ก็จะวิเคราะห์และหาความสัมพันธ์ในการสร้างปาสคาลเมตริกส์ด้วยหลักการ ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มและการแปลงความถี่ ผลที่ได้จากการคำนวณทั้งหมดจะอยู่ในรูปของเมตริกส์เพื่อความสะดวกในการออกแบบสำหรับในกรณีสลับที่ลำดับสูงๆขึ้นไป สำหรับการออกแบบนั้นเราสามารถสร้างเมตริกส์ได้ 2 ประเภทก็คือ ปาสคาลเมตริกส์จะมีผลมาจากการแปลง S-Z โดเมนและเมตริกส์ช่วย (Auxiliary matrix) นั้นมีผลมาจากเกิดการแปลงความถี่ในที่นี้เราจะเขียนโปรแกรมและจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม Matlab

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

การดำเนินการวิจัยเริ่มต้นวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix) โดยการแปลงความถี่ (frequency transformations) เป็นการแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกต้นแบบไปเป็นวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกผ่านความถี่ต่ำ ผ่านความถี่สูง ผ่านแถบความถี่ กำจัดแถบความถี่และการแปลงโดเมน S-Z เป็นการแปลงความถี่จากอนาล็อกโดเมนไปเป็นดิจิตอลโดเมนด้วยหลักการ ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear Transformations) ซึ่งแต่เดิมการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลโดยตรงจากหลักการ ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มและการแปลงความถี่ในกรณีสลับที่ลำดับสูงๆ มีการคำนวณที่ความยุ่งยากและอาจเกิดความผิดพลาดได้ ดังนั้นหลักการนำเสนอนี้เป็นการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์เหมาะสำหรับ การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลในกรณีสลับที่ลำดับสูงๆเพราะว่าการคำนวณอยู่ในรูปของเมตริกส์ทำให้ง่ายในการคำนวณและประหยัดเวลาต่อการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ

1.5 ขอบเขตการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นการวิจัยการการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ดำเนินการวิจัย ณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เริ่มต้นดำเนินงานวิจัยในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 และสิ้นสุดในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 รวมระยะเวลาดำเนินงานวิจัยเป็นเวลา 1 ปี

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

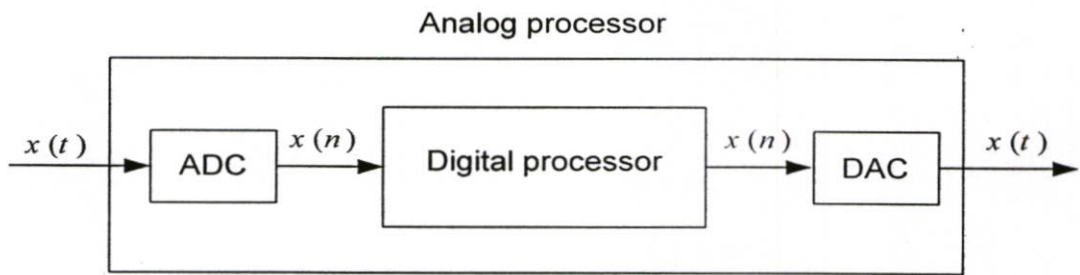
2.1 บทนำ

วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลเป็นกระบวนการที่ไปตัดแปลงสเปกตรัมของสัญญาณให้มีสเปกตรัมเป็นไปตามข้อกำหนดที่ต้องการซึ่งอาจเป็นการเพิ่มค่าหรือลดทอนค่าขนาดของสัญญาณในแถบความถี่ที่ต้องการหรือทำการกำจัดสัญญาณในแถบความถี่ที่ไม่ต้องการออกไป ซึ่งกระบวนการเหล่านี้จุดประสงค์หลักก็เพื่อต้องการลดความผิดเพี้ยนของสัญญาณ หรือ ลดสัญญาณรบกวนที่ปะปนเข้ามาอาจเป็นผลมาจากการส่งสัญญาณไปในสายส่งหรือตัวกลางที่มีคุณภาพไม่ดี อย่างไรก็ตามข้อกำหนดที่จัดได้ว่าเป็นหัวใจของวงจรกรองสัญญาณที่ต้องการให้ความสนใจเป็นอันดับแรกคือคุณสมบัติในทางความถี่ โดยค่าที่ใช้ประกอบด้วยผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude response) และผลตอบสนองทางเฟส (Phase response) แต่ในกระบวนการออกแบบวงจรกรองสัญญาณมักจะพิจารณาผลตอบสนองทางขนาดเป็นเรื่องที่สำคัญ ส่วนผลตอบสนองทางเฟสสามารถนำมาคิดพิจารณาภายหลังได้ กล่าวคือเมื่อได้ออกแบบวงจรกรองสัญญาณที่มีคุณสมบัติตรงตามข้อกำหนดของผลตอบสนองทางขนาดแล้วก็สามารถออกแบบวงจรกรองสัญญาณผ่านทุกแถบความถี่ (all pass filter) เพิ่มเข้ามาเพื่อทำหน้าที่ปรับแก้ผลตอบสนองทางเฟสให้เป็นเชิงเส้น วงจรกรองสัญญาณดิจิทัลได้มีการนำมาประยุกต์ใช้งานกันอย่างกว้างขวางนั้น อาจมาจากข้อได้เปรียบหลายประการดังต่อไปนี้

1. ผลตอบสนองความถี่สามารถออกแบบให้มีความใกล้เคียงกับผลตอบสนองความถี่ที่กำหนดให้หรือผลตอบสนองความถี่ที่ต้องการได้ นอกจากนี้การออกแบบวงจรกรองสัญญาณให้มีผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้นทำได้ง่าย
2. คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลที่ออกแบบและสร้างแล้วจะไม่แปรตามสภาพสิ่งแวดล้อมและอุณหภูมิหรือระยะเวลาการใช้งาน นอกจากนี้ยังสามารถใช้งานในย่านความถี่ต่ำได้เป็นอย่างดี
3. การประยุกต์ใช้งานของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบปรับตัวได้ (Adaptive filter) ทำได้ง่าย
4. ผู้ออกแบบสามารถออกแบบโดยคำนึงความยาวของคำ (Word length) ของเลขฐานสองที่ต้องการใช้และยังสามารถออกแบบให้มีผลตอบสนองความถี่ที่ต้องการได้

5. ในปัจจุบันถ้าพิจารณาในแง่มุมมองของเสถียรภาพของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล ความเชื่อถือ ราคาหรือขนาดของวงจรรองสัญญาณดิจิทัลสิ่งเหล่านี้กำลังได้รับการพัฒนาและปรับปรุงและมีแนวโน้มว่าจะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าของวงจรรองสัญญาณอนาล็อก (Analog filter)

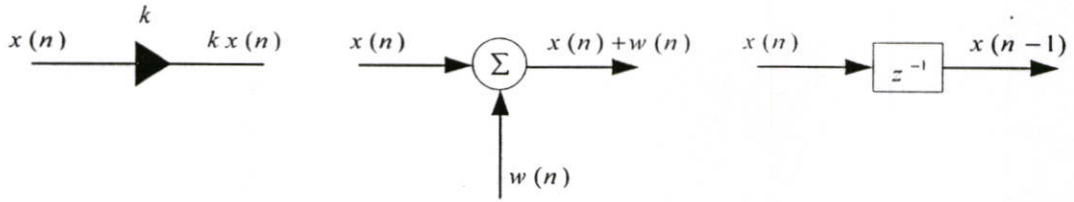
วงจรรองสัญญาณดิจิทัลสามารถเขียนอธิบายในรูปของบล็อกไดอะแกรมได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยทั่วไปแล้วสัญญาณอินพุตจะเป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา (Continuous time signal) หรือสัญญาณอนาล็อก $x(t)$ จะถูกสุ่ม (Sampled) ด้วยช่วงเวลาที่มีความถี่ที่ด้วยวงจรแปลงสัญญาณอนาล็อกให้เป็นสัญญาณดิจิทัล (Analog to digital converter :ADC) เพื่อให้เป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time signal) หรือสัญญาณดิจิทัล $x(n)$ จากนั้นนำสัญญาณที่ได้นี้มาเข้ารหัสให้อยู่ในรูปของเลขฐานสองแล้วนำไปประมวลผลสัญญาณดิจิทัล หลังจากนั้นสัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาจะต้องแปลงกลับให้เป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาด้วยวงจรแปลงสัญญาณดิจิทัลให้เป็นสัญญาณอนาล็อก (Analog to digital converter : DAC) เพื่อนำไปใช้งาน



รูปที่ 2.1 บล็อกไดอะแกรมของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล

2.2 โครงสร้างของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล

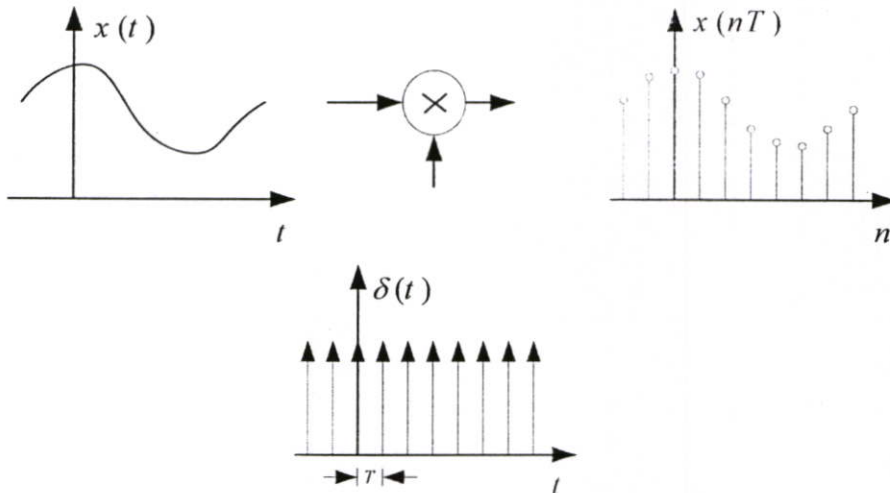
วงจรรองสัญญาณดิจิทัลประกอบด้วยส่วนที่สำคัญ 3 ส่วนคือ การบวก (Adder) การคูณ (Multiplier) การหน่วงเวลา (Unit Delay) ดังแสดงในรูปที่ 2.2 การบวกและการคูณจะใช้แนวความคิดมาจากตัวเลขในหน่วยคอมพิวเตอร์ ส่วนการหน่วงจะทำให้การถึงข้อมูลในอนาคตมีค่าอย่างต่อเนื่อง ซึ่งการหน่วงเวลานั้นจะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ บวก (Positive) และลบ (Negative) โดยการหน่วงแบบบวกนี้เป็นอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่บันทึกความจำของรีจิสเตอร์ (Register) จะเก็บค่าที่ได้ตามระยะเวลาที่กำหนดสำหรับการคำนวณครั้งต่อไป การหน่วงแบบบวกจะแทนค่าด้วย z^{-1} และสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ด้วยการแปลงแซด การหน่วงแบบลบ ใช้แทนค่าต่อไปในระดับสัญญาณแทนค่าด้วย z จะมีชนิดและการทำงานที่เหมาะสม อย่างไรก็ตามการใช้งานก็ไม่สามารถใช้งานได้เสมอไป



รูปที่ 2.2 ตัวดำเนินการที่ใช้ในระบบ DSP

2.3 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง

จากที่ธรรมชาติของสัญญาณต่างๆมักจะเป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา ดังนั้นในการประมวลผลสัญญาณดิจิทัล สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาที่สอดคล้องกันก็คือ การแทนสัญญาณที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆห่างกันที่เวลา T_s คงที่ (คือการสุ่มตัวอย่าง) ถ้าหาก T_s มีค่าที่เหมาะสมแล้วการแทนดังกล่าวก็ยังคงถูกต้องเอาไว้ ดังนั้นผลการสุ่มก็คือการคูณสัญญาณที่ต่อเนื่องด้วยอิมพัลส์ที่เลื่อนไปเรื่อยๆ แต่ครั้งก็ห่างกันเป็นเวลา $T = T_s = 1/f_s$ กระบวนการสุ่มสัญญาณดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 การสุ่มสัญญาณ (Sampling signal)

ค่าความถี่ของการสุ่มสัญญาณ (f_s) ซึ่งไม่ทำให้สัญญาณสูญเสียข้อมูลที่สำคัญไป ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling Theory) ของ แชนนอน (Shannon) กล่าวไว้ว่า “ถ้าหากสัญญาณที่ต่อเนื่อง $x(t)$ ที่มีความถี่ไม่เกิน $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$ ข้อมูลของสัญญาณที่ต่อเนื่องนั้นสามารถอธิบายได้ด้วย $x(nT)$ ก็ต่อเมื่อความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง f_s มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของความถี่ปฏิบัติงาน (f_{\max}) หรือ $f_s \geq 2f_{\max}$ ” โดยทั่วไปเราอาจสุ่มตัวอย่างด้วยความถี่ $f_{s,N} = 2f_{\max}$ พอดี ค่าความถี่นี้มีชื่อเรียกว่าความถี่ในควิสต์ (Nyquist frequency) และคาบเวลา $T_N = 1/(2f_{\max})$ นี้เรียกว่าช่วงเวลาสุ่มตัวอย่างในควิสต์ (Nyquist interval)

2.4 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก

2.4.1 วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth Filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทจะมีคุณสมบัติที่ให้ผลตอบสนองทางขนาดเรียบมากที่สุดในช่วงแถบความถี่ผ่าน ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

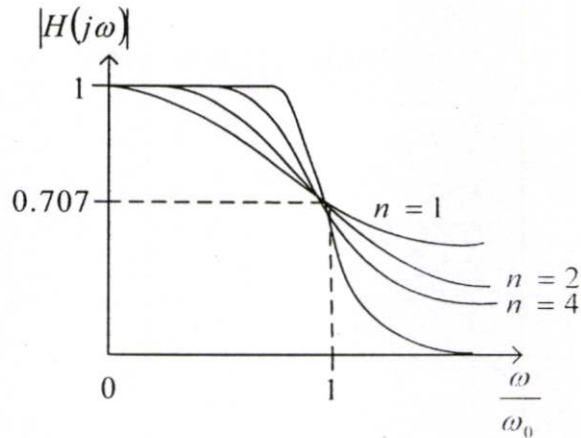
$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \quad (2.1)$$

เมื่อ n คือจำนวนลำดับ (nth order)

ω_0 คือค่าความถี่ตัด (Cutoff frequency)

คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

1. $|H_n(j0)| = 1$ สำหรับทุกค่า n (อัตราขยายแรงดันที่เท่ากับหนึ่ง ที่ $\omega = 0$)
2. $|H_n(j\omega_0)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ สำหรับทุกค่า n (อัตราขยายแรงที่ $\omega = \omega_0$)
3. $|H_n(j\omega_0)|$ หมายความว่าอัตราการลดลงด้วยผลคูณของจำนวน n โพลเมื่อ $\omega > \omega_0$ เช่น $n = 1$ อัตราการลดลงเท่ากับ -20 dB/decade และ $n = 2$ อัตราการลดลงเท่ากับ -40 dB/decade เป็นต้น
4. อนุพันธ์ของ $|H_n(j\omega)|$ เท่ากับศูนย์เมื่อ $\omega = 0$ นั่นคือจะเกิดผลตอบสนองแบบราบเรียบสูงสุดที่ (maximally flat response) ที่ $\omega = 0$
5. กรณีที่ $n > 10$ ผลตอบสนองจะเข้าใกล้ผลตอบสนองทางอุดมคตินั้นก็คือการเปลี่ยนจากแถบความถี่ผ่านไปยังแถบความถี่หยุดเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด



รูปที่ 2.4 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณ แบบบัตเตอร์เวิร์ท

สังเกตได้ว่าในช่วงแถบความถี่ผ่านหรือแถบความถี่หยุดไม่มีการแกว่งตัวขึ้นลงของอัตราขยายแต่อย่างใด (Maximally flat) เนื่องจากผลตอบสนองทางขนาดมีค่าลดลงตลอดตามการเพิ่มของความถี่ จึงจัดได้ว่ามีคุณลักษณะของฟังก์ชันโมโนโทนิค (Monotonic function) และเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

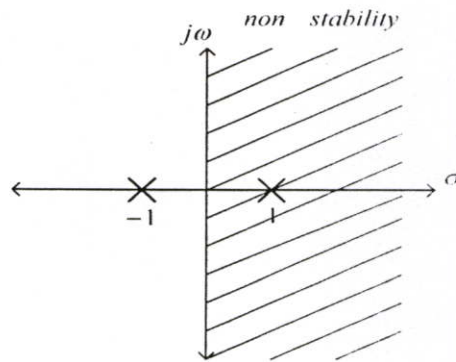
แทน $\omega = s/j$ ลงในผลตอบสนองทางขนาด

$$\begin{aligned}
 |H_n(s)|^2 &= \left| \frac{1}{1 + [(s/j)/\omega_0]^{2n}} \right| = \left| \frac{1}{1 + (-j)^n (s/\omega_0)^{2n}} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{1 + [(-1)^2 (j)^2]^n (s/\omega_0)^{2n}} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{D_n(s)D_n(-s)} \right| \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

$D_n(s)$ คือโพลิโนเมียล (Polynomial) ของโดเมน s ซึ่งมีรากทั้งหมดเป็นจำนวนจริงบวกและลบจะได้ว่า $D_n(s) = D_n(-s)$ และถ้ากำหนดให้ $n = 1$ และ $\omega_0 = 1$ สามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามนี้

$$|H_n(s)|^2 = \left| \frac{1}{1 - s^2} \right| = \left| \frac{1}{D_n(s)D_n(-s)} \right| \tag{2.3}$$

จะได้ $D_n(s)D_n(-s) = 1 - s^2 = (1 + s)(1 - s)$



รูปที่ 2.5 ตำแหน่งโพลในระนาบเอส (s plane)

ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังนี้

$$H_1(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (2.4)$$

จากสมการที่ (2.4) เรียกว่าวงจรกรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ต่ำแบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth Lowpass Filter) ลำดับที่ 2 และ $s + 1$ เรียกว่า (Butterworth polynomial of second order filter) สามารถเขียนรูปทั่วไปของสมการได้ว่า

$$D_n(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 \quad (2.5)$$

ตารางที่ 2.1 สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ต่ำ

n	$D_n(s)$
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + 1.4142s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + 1.4142s + 1)(s^2 + 1.9319)$

และสามารถหาลำดับ n ของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทได้จากสมการที่ (2.6)

$$n = \frac{\log \left[\frac{10^{(\alpha_{\min}/10)} - 1}{10^{(\alpha_{\max}/10)} - 1} \right]}{2 \log \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \quad (2.6)$$

2.4.2 วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ (Chebyshev Filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟชนิดนี้มีคุณสมบัติให้ผลตอบสนองทางขนาดในช่วงแถบความถี่ผ่านเป็นขดคลื่นเท่ากันตลอดและให้ความชันมากที่สุด ณ ความถี่คัทออฟ ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (2.7)$$

เมื่อ ε คือตัวประกอบความพลีว (Ripple factor)

$C_n(\cdot)$ คือพหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งอันดับที่ n (nth order Chebyshev polynomial of the first kind)

คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ

1. $\omega = 0$

$$|C_n(0)| = 0 \quad n \text{ เป็นเลขคี่}$$

$$|C_n(0)| = 1 \quad n \text{ เป็นเลขคู่}$$

$$|H_n(j0)| = 1 \quad n \text{ เป็นเลขคี่}$$

$$|H_n(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad n \text{ เป็นเลขคู่}$$

2. $\omega = 1$

$$|C_n(1)| = 1 \quad \text{ทุกค่า } n$$

$$|H_n(j1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad \text{ทุกค่า } n$$

แทน $\omega = s/j$ ลงในผลตอบสนองทางขนาดจะได้ว่า

$$|H_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(s/j)} \quad (2.8)$$

โดยที่

$$C_n(s/j) = 0 \pm j(1/\varepsilon^2) = \cos(nu_k) \cosh(nv_k) - j \sin(nu_k) \sinh(nv_k) \quad (2.9)$$

และ $\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_{\max}} - 1}$

ถ้ากำหนดให้ $\cos(nu_k) = 0$ จะได้ว่า

$$u_k = \frac{\pi}{2n}(2k-1) \quad \text{เมื่อ } k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.10)$$

ถ้ากำหนดให้ $\sin(nv_k) = \pm 1$ จะได้ว่า

$$\sinh(nv_k) = \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (2.11)$$

$$v_k = \frac{1}{n} \left(\sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \quad (2.12)$$

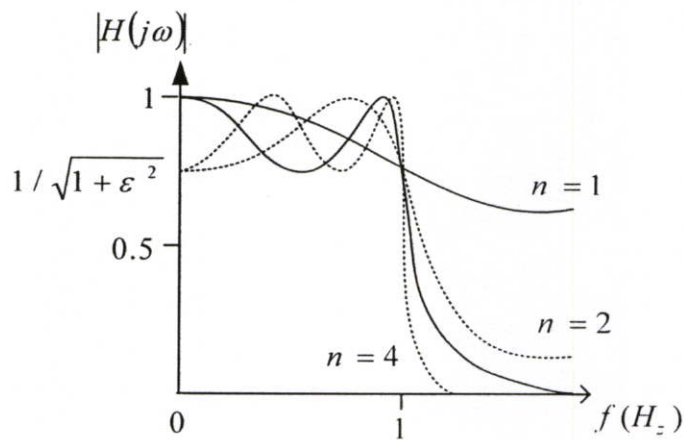
จะได้ว่า

$$s = \sinh(v_k) \sin \left[\frac{\pi}{2n}(2k-1) \right] + j \cosh(v_k) \cos \left[\frac{\pi}{2n}(2k-1) \right] \quad (2.13)$$

และสามารถหาลำดับ n ของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟได้จากสมการที่ (14)

$$n = \frac{\cosh^{-1} \left[\frac{10^{\alpha_{\min}/10} - 1}{10^{\alpha_{\max}/10} - 1} \right]}{\cosh^{-1}(\omega_s)} \quad (2.14)$$

ดังแสดงในรูปที่ 2.6 จะเห็นได้ว่าการเพิ่มลำดับของวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟจะช่วยให้ช่วงแถบเปลี่ยนความถี่ที่มีความชันมากขึ้นซึ่งเป็นแนวโน้มเดียวกันกับกรณีของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท อย่างไรก็ตามที่วงจรรองสัญญาณลำดับเท่าๆกัน พบว่าวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟจะให้ช่วงแถบเปลี่ยนความถี่ที่แคบกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทอย่างชัดเจน เมื่อพิจารณาในช่วงแถบความถี่ผ่านของวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟพบว่ามีความพลัวของอัตราขยายเกิดขึ้น โดยมีการแกว่งตัวขึ้นลงตลอดช่วงสังเกตได้ว่าคุณลักษณะเช่นนี้ไม่เกิดขึ้นกับวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท ทั้งนี้ความสูงต่ำของการแกว่งสามารถควบคุมได้จากตัวแปร ϵ โดยขนาดความกว้างของการแกว่งจะอยู่ในช่วง 1 ถึง $1 / \sqrt{1 + \epsilon^2}$



รูปที่ 2.6 ผลตอบสนองของวงจรรองสัญญาณ แบบเชบีเชฟ

ข้อเปรียบเทียบระหว่างวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทและแบบเชบีเชฟ

1. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟมีช่วงแถบความถี่ผ่าน (Pass band) และช่วงแถบความถี่ไม่ผ่าน (Stop band) ที่ใกล้เคียงกับวงจรรองสัญญาณท่งอุดมคติได้มากกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท
2. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟมีช่วงแถบความถี่เปลี่ยนแปลง (Transition band) น้อยกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท
3. แอมพลิจูด (Amplitude) ของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทที่ $\omega = 0$ จะมีการแกว่งตัวขึ้นลง (Maximally flat) น้อยกว่าวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ
4. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟลำดับที่ 3 จะมีประสิทธิภาพดีเท่ากับวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทลำดับที่ 5
5. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ ที่ลำดับต่ำๆ จะมีความเป็นเชิงเส้น (Linear phase) มากกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

2.4.3 วงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติก (Elliptic Filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติกให้คุณสมบัติรวมระหว่างวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทและแบบเชบีเชฟ กล่าวคือจะให้ผลตอบสนองทางขนาดลักษณะคลื่นเท่ากันทั้งช่วงแถบความถี่ผ่าน (Pass band) และช่วงแถบความถี่ไม่ผ่าน (Stop band) ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$|H_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\omega/\omega_0)} \quad (2.15)$$

เมื่อกำหนดให้

$$R_n(\omega/\omega_0) = \begin{cases} M \prod_{i=1}^{n/2} \frac{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{p_i}^2}{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{s_i}^2} \\ M \omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{p_i}^2}{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{s_i}^2} \end{cases} \quad (2.16)$$

โดยที่ $M = \sqrt{\frac{10^{0.1K_s} - 1}{10^{0.1K_p} - 1}}$

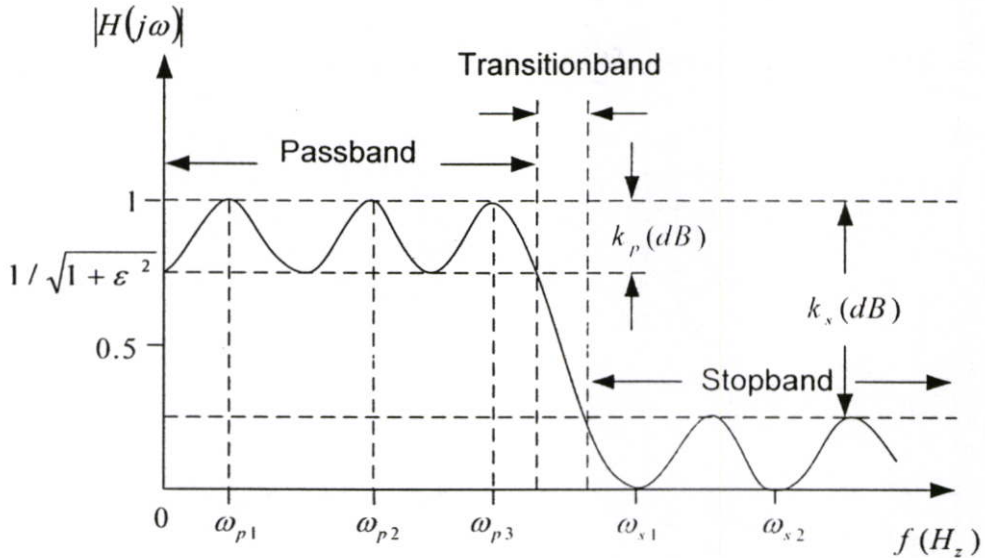
เพื่อความสะดวกในการอธิบายตัวแปรต่างๆที่กล่าวมาข้างต้นในหัวข้อนี้เราจะอาศัยรูปที่ 2.7 จะได้ว่า

ω_{p_i} คือ ความถี่ลูกลคลื่น i ในช่วงแถบความถี่ผ่านที่มีแอมพลิจูดสูงสุด

ω_{s_i} คือ ความถี่ลูกลคลื่น i ในช่วงแถบความถี่ไม่ผ่านที่มีแอมพลิจูดสูงสุด

K_p คือ แอมพลิจูดที่เบี่ยงเบนสูงสุดในช่วงแถบความถี่ผ่านในหน่วย dB

K_s คือ ผลต่างระหว่างแอมพลิจูดสูงสุดในช่วงแถบความถี่ผ่านและแอมพลิจูดสูงสุดในช่วงแถบความถี่ไม่ผ่านในหน่วย dB



รูปที่ 2.7 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณ แบบอีลิปติก

2.5 การแปลงแซด (Z Transformation)

การแปลงแซด (z Transform) เป็นการใช้คณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการวิเคราะห์สัญญาณของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time systems) ซึ่งจะแตกต่างจากการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ใช้สำหรับวิเคราะห์สัญญาณของระบบที่ต่อเนื่องทางเวลา (Continuous time systems) ดังนั้นแนวทางวิเคราะห์ของการแปลงแซด (z Transform) จะใช้โพลและซีโรมาอธิบายในระบบ

2.5.1 นิยามของการแปลงแซด

การแปลงแซด (z Transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time) สามารถนิยามอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ (Power series) ได้ตามสมการที่ (2.17)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.17)$$

เมื่อ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable) $z = re^{i\omega}$

$x(n)$ เป็นลำดับสัญญาณ (Sequence signal)

ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงแซด (z Transform) และการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time fourier transform : DTFT) มีได้ดังนี้

$$x(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r e^{j\omega n} \quad (2.18)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x(n) r^{-n}\} e^{-j\omega n} \quad (2.19)$$

$$= DTFT \{x(n) r^{-n}\} \quad (2.20)$$

ถ้า $r = 1 \rightarrow |z| = 1$ สามารถหาความสัมพันธ์ทั้งสองได้ว่า

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = x(e^{j\omega}) = DTFT \{x(n)\} \quad (2.21)$$

แต่สำหรับการแปลงแซด (z Transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time) ในระบบที่คอซอล (Causal system) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2.22)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.22)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของการแปลงแซดของสัญญาณระหว่าง $x(n)$ และ $X(z)$ โดยใช้สัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$x(z) = Z \{x(n)\} \quad (2.23)$$

นอกจากนี้ยังมีสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงแซดของ $x(n)$ และ $X(z)$ ได้ในรูปแบบดังนี้คือ

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \quad (2.24)$$

ซึ่งบริเวณกลุ่มของ z บนระนาบแซดที่ทำให้ $X(z)$ หาค่าได้เรียกว่าบริเวณที่มีการลู่อเข้า (Region of convergence: ROC) โดยการลู่อเข้าจะขึ้นอยู่กับ $|z|$ แต่ไม่ขึ้นอยู่กับ ω และเมื่อลองพิจารณาการแปลงแซด (z Transform) ของลำดับสัญญาณ $x(n) = a^n u(n)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

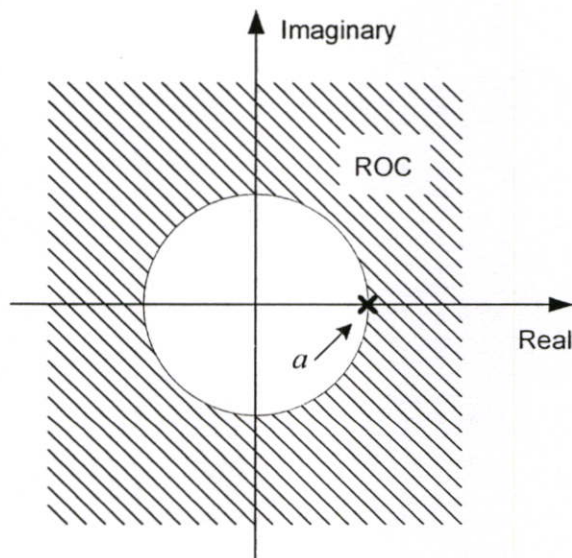
ความสัมพันธ์ที่ได้อยู่ในรูปของอนุกรมเรขาคณิตที่มีคุณสมบัติดังนี้คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{ทั้งนี้ } |x| < 1 \tag{2.26}$$

จากสมการที่ (2.25) จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \tag{2.27}$$

จะเห็นได้ว่าถ้า $|a| > 1$ จะทำให้ ROC จะไม่ซ้อนทับพื้นที่วงกลมระนาบหนึ่งหน่วย (Unit circle) และไม่สามารถหาค่า $X(z)$ ได้



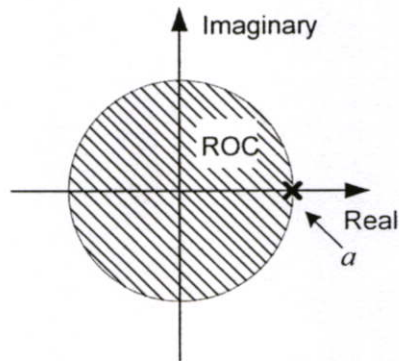
รูปที่ 2.8 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่อื่นของ $x(n) = a^n u(n)$

ถ้ามีลำดับสัญญาณ $x(n) = -a^n u(-n-1)$ สามารถทำการแปลงแซด (z Transform) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} \\
 &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} (a z^{-1})^n \\
 &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

จากสมการที่ (2.28) จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad |z| < |a| \tag{2.29}$$

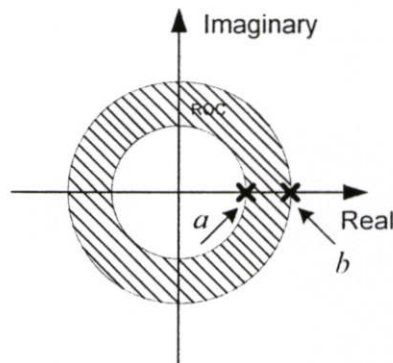


รูปที่ 2.9 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่อื่นของ $x(n) = -a^n u(-n-1)$

สังเกตเห็นได้ว่าทั้งสองกรณี มีค่าการแปลงแซด (z Transform) ที่เหมือนกันแต่จะมีบริเวณที่มีการลู่อื่น ROC ของสัญญาณครอบคลุมพื้นที่ที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงเป็นอย่างยิ่งที่จะระบุ ROC ลงไปเพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในกรณีที่ต้องทำการแปลงแซดผกผัน (Inverse z Transform)

ถ้ามีลำดับสัญญาณ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ สามารถทำการแปลงแซด (z Transform) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{a^n u(n) - b^n u(-n-1)\} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} (b z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} + \frac{1}{1 - b z^{-1}} \quad |a| < |z| < |b| \quad (2.30) \end{aligned}$$



รูปที่ 2.10 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าคู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$

2.5.2 คุณสมบัติของการแปลงแซด (z Transform)

1. คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

$$\begin{aligned} x_1(n) &\leftrightarrow X_1(z) & ROC &= R_1 \\ x_2(n) &\leftrightarrow X_2(z) & ROC &= R_2 \\ ax_1(n) + bx_2(n) &\leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) & ROC &= R_1 \cap R_2 \end{aligned}$$

2. คุณสมบัติการเลื่อนทางเวลา (Time shifting property)

$$\begin{aligned} x(n - n_0) &\leftrightarrow z^{-n_0} X_1(z) & ROC &= R \\ & & & (\text{ยกเว้นที่ } z = 0 \text{ และ } z = \infty) \end{aligned}$$

3. คุณสมบัติการคูณด้วยเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential property)

$$z_0^n x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \text{ROC} = |z| R$$

4. คุณสมบัติการกลับเวลา (Time reversal property)

$$x(-n) \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ROC} = \frac{1}{R}$$

5. คุณสมบัติการคูณประสาน (Convolution property)

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z) \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

6. คุณสมบัติการหาอนุพันธ์ (Differentiation property)

$$n x(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{ROC} = R$$

7. คุณสมบัติเชิงซ้อน (Conjugation property)

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \quad \text{ROC} = R$$

2.6 การแปลงแซดผกผัน (Inversion of Z Transform)

การแปลงแซดผกผันก็คือกระบวนการกลับกันในการแปลงฟังก์ชัน $X(z)$ เพื่อหาลำดับสัญญาณทางเวลา $x(n)$ โดยทั่วไปนิยมทำการแปลงแซดผกผันได้ 3 วิธีด้วยกันก็คือ

2.6.1 วิธีการหารยาว (Direct division method)

วิธีการหารยาวคือการกระจาย $X(z)$ อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ (Infinite power series) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \\
 &= x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots + x(n) z^{-n} \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของ z^{-n} ก็คือลำดับพจน์ที่ n ของลำดับสัญญาณสามารถหาได้จากการหารยาวระหว่าง $B(z)$ และ $A(z)$

2.6.2 วิธีการแยกเศษส่วนย่อย (Partial fraction expansion method)

โดยทั่วไปเราสามารถจัดฟังก์ชัน $X(z)$ ให้อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.32)$$

สามารถจัดรูปสมการที่ (2.32) ใหม่จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_M z^{-1})} \quad (2.33)$$

ในการแยกเศษส่วนย่อยเราจะพิจารณาเฉพาะส่วนของโพลและสามารถทำการแบ่งได้เป็น 2 กรณี

1. กรณีที่ โพล ทุกตัวอยู่ตำแหน่งไม่ซ้ำกันเรียกว่า โพลค่าเดียว (Distinct pole)

$$X(z) = C_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{C_M}{1 - p_M z^{-1}} \quad (2.34)$$

$$X(z) = C_0 + \sum_{k=1}^M \frac{C_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (2.35)$$

2. กรณีที่ โพล อยู่ตำแหน่งซ้ำกันเรียกว่า โพลค่าซ้ำ (Multiple pole)

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{D_i}{(z - p_k)^i} \quad (2.36)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ D_i หาได้จาก

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} [(z-p_k)^m X(z)] \Big|_{z=p_k} \quad (2.37)$$

2.6.3 วิธีการ Residue

การแปลงแซดผกผันด้วยวิธีนี้ค่า $x(n)$ จะถูกแทนด้วยการอินทิเกรตคอนทัวร์ (Contour integral) ดังสมการที่ (2.38)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j_c} \oint_C z^{n-1} X(z) dz \quad (2.38)$$

เมื่อ C คือเส้นทางการอินทิเกรตคอนทัวร์โพลของ $X(z)$ ที่อยู่ในรูปเศษส่วนและโพลีโนเมียล (Rational and polynomials) ค่าตอบจะถูกแทนอยู่ในรูปตัวแปรเชิงซ้อนด้วยทฤษฎีของ Cauchy's residue ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า $x(n)$ ก็คือผลรวมของการทำ Residue เฉพาะโพลในบริเวณ C ของฟังก์ชัน $z^{n-1} X(z)$ เขียนได้ดังสมการที่ (2.39)

$$\text{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_k)^m F(z)] \Big|_{z=p_k} \quad (2.39)$$

เมื่อ $F(z) = z^{n-1} X(z)$

2.7 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้บรรยายเกี่ยวกับความหมายและข้อดีต่างๆของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล โดยมีขั้นตอนการดำเนินการกับสัญญาณในการเปลี่ยนแปลงให้สอดคล้องกับระบบนั้นๆ รวมทั้งเงื่อนไขที่ต้องพิจารณา โดยเฉพาะปัญหาเกี่ยวกับความเสถียรภาพของระบบที่ทำการออกแบบ นอกจากนั้นยังกล่าว ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง การแปลงแซด การแปลงแซดผกผัน เนื้อหาที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นประเด็นสำคัญที่ควรทราบและใช้เป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญในการออกแบบวงจรรองสัญญาณดิจิทัล

ตารางที่ 2.2 Z Transform ของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง

Table SOME COMMON z TRANSFORM PAIRS		
Sequence	Transform	ROC
1. $\delta(n)$	1	All z
2. $u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta(n - m)$	z^m	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ 0 (if $m < 0$)
5. $a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-a^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $(\cos(\omega_0 n) u(n))$	$\frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $(\sin(\omega_0 n) u(n))$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $(r \cos(\omega_0 n) u(n))$	$\frac{1 - r \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $(r \sin(\omega_0 n) u(n))$	$\frac{r \sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r \cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

บทที่ 3

วงจรรองสัญญาณดิจิทัล

วิธีการออกแบบวงจรรองสัญญาณดิจิทัลที่นิยมมากวิธีหนึ่งก็คือ การออกแบบโดยอิงวงจรรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ ซึ่งได้แก่วงจรรองสัญญาณแบบ บัตเตอร์เวิร์ท, เชปีเชฟ, อีลิปติก, และอื่นๆ โดยเราสามารถใช้ฟังก์ชันหรือการเปลี่ยนแปลงอย่างใดอย่างหนึ่งที่สามารถแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอนาลอก (ซึ่งอยู่ใน s โดเมน) มาเป็นระบบดิจิทัล (ซึ่งอยู่ใน z โดเมน) ได้ ซึ่งการแปลงที่มีอยู่หลายแบบ เช่น การแปลงอิมพัลส์ไม่แปรเปลี่ยน (Impulse invariant transformations), การแปลงไบลิเนียร์ (Bilinear transformations), การแปลงผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformations) และการแปลงผลต่างสืบเนื่องไปหน้า (Forward difference transformations) โดยหัวข้อนี้จะกล่าวไว้ทั้งหมด

3.1 วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ (Impulse invariant transformations)

วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ (Impulse invariant transformations) เป็นวิธีหนึ่งที่ยพยายามทำให้ผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล $h(nT)$ มีความใกล้เคียงกับผลตอบสนองอิมพัลส์จากวงจรรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ $h(t)$ ที่ได้ทำการออกแบบไว้ ซึ่งหลักการของวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ นั้นอาศัยหลักการแปลงลาปลาซผกผันจากฟังก์ชันถ่ายโอนอนาลอก $H_a(s)$ เพื่อหาผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ จากนั้นทำการเปลี่ยนฟังก์ชันผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ $h(t)$ ไปเป็นฟังก์ชันผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล $h(nT)$ ด้วยหลักการสุ่มตัวอย่างทางเวลา T สุดท้ายนี้ทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ก็จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดิจิทัล $H(z)$ ของวงจรรองสัญญาณดิจิทัล ดังนั้นเราจะพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามนี้

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{s - a_k} \quad (3.1)$$

ทำการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse laplace transform) จากสมการที่ (3.1) จะได้ว่า

$$h(t) = \sum_{k=1}^N b_k e^{(a_k t)} u(t) \quad (3.2)$$

เมื่อ $u(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วย

จากสมการที่ (3.2) เป็นผลตอบสนองอิมพัลส์อนาลอกและทำการสุ่มตัวอย่างทางเวลาจะได้ว่า

$$h(nT) = h(t)|_{t=nT} \quad (3.3)$$

ในสมการที่ (3.3) เมื่อทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) เพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลได้ดังนี้

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N b_k e^{(nT a_k)} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N b_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{a_k T} z^{-1} \right)^n \\ H(z) &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{b_k}{1 - e^{a_k T} z^{-1}} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสมการที่ (3.1) และ (3.4) จะได้ว่า

$$\frac{b_k}{s - a_k} \Rightarrow \frac{b_k}{1 - e^{a_k T} z^{-1}} \quad \text{ROC} : |z| > e^{a_k T} \quad (3.5)$$

โดยที่ a_k เป็นตำแหน่งโพลของวงจรกรองสัญญาณอนาลอก $s = a_k$ และ $e^{a_k T}$ ก็จะเป็นตำแหน่งโพลของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล $z = e^{a_k T}$ ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ทั้งสองได้ดังนี้

$$z = e^{sT} \quad \text{และ} \quad s = \left(\frac{1}{T} \right) \ln(z) \quad (3.6)$$

จากสมการที่ (3.6) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างระนาบเอสกับระนาบแซดเป็นลักษณะการแมป (Mapping) ที่ไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อกำหนดให้ $s = \sigma + j\omega$ แทนลงไป ในสมการที่ (3.6) จะได้ว่า

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega} \quad (3.7)$$

โดยที่ $\Omega = \omega T = \frac{2\pi f}{f_s}$ เรเดียน/อัตราการสุ่ม

การทรานส์ฟอร์มจากระนาบเอสไปเป็นระนาบแซดและสามารถสรุปได้ดังนี้

1. จุดกำเนิด (Origin) พบว่า $s = 0$ ในระนาบเอสสามารถแมปไปยัง $z = 1$ ของระนาบแซด ซึ่งสอดคล้องได้ว่า $s = 0 \pm j\omega$, และ $z = e^{j\omega T} = e^{j2\pi} = 1$
2. แกน $j\omega$ พบว่า $\sigma = 0$, $z = e^{j\Omega}$ และ $|z| = 1$ โดยที่ ω เพิ่มจาก ω_0 ไปเป็น $\omega_0 + \omega_s$ และความถี่ Ω เพิ่มจาก Ω_0 ไปเป็น $\Omega_0 + 2\pi$ เมื่อ $\omega_s = 2\pi f_s$ สามารถแมปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด
3. ครึ่งระนาบเอสด้านซ้ายพบว่า $\sigma < 0$ จะทำให้ $z = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$ หรือ $|z| = e^{\sigma T} < 1$ ก็คือ ครึ่งระนาบเอสด้านซ้ายถูกแมปไปยังบริเวณภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด
4. ครึ่งระนาบเอสด้านขวาพบว่า $\sigma > 0$ จะทำให้ $|z| = e^{\sigma T} > 1$ ก็คือ ครึ่งระนาบเอสด้านขวาถูกแมปไปยังบริเวณภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด

นอกจากนี้พบว่า การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ไม่เหมาะสมกับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านสูง (High pass filter) และวงจรกรองสัญญาณก้ำจืดแถบความถี่ (Band stop filter) เนื่องจากไม่ว่าคาบการสุ่ม T จะต่ำเพียงใดก็ยังคงเกิดปรากฏการณ์ของ Aliasing ทำให้สเปกตรัมของสัญญาณที่ต้องการผิดเพี้ยนไปและถ้าผลตอบแทนความถี่ยิ่งสูงก็จะยิ่งมีความผิดเพี้ยนไปมาก

ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติของการทรานส์ฟอร์มด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์

$H(s)$	$H(z)$ (โดยที่ $\alpha = e^{a_k T}$)
$\frac{b_k}{(s + a_k)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1} d^{m-1} b_k}{(m-1)! da_k^{m-1} (1 - e^{-a_k T} z^{-1})}$
$\frac{s + a_k}{(s + a_k)^2 + b_k^2}$	$\frac{1 - e^{-a_k T} (\cos b_k T) z^{-1}}{1 - 2e^{-a_k T} (\cos b_k T) z^{-1} + e^{-2a_k T} z^{-2}}$
$\frac{s + a_k}{(s + a_k)^2 + b_k^2}$	$\frac{e^{-a_k T} (\sin b_k T) z^{-1}}{1 - 2e^{-a_k T} (\cos b_k T) z^{-1} + e^{-2a_k T} z^{-2}}$

3.2 วิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations)

วิธีการแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มจากวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลเป็นเทคนิคที่ได้รับความนิยมมากเป็นพิเศษเพราะการแมป (Mapping) จะเป็นลักษณะหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One Mapping) ของความถี่แต่ละจุดบนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอสไปสู่อุณหภูมิแต่ละจุดบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งในระนาบแซด ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีปัญหาเกิดการเหลื่อม (Aliasing) ของสเปกตรัม ดังนั้นเราจะพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกได้ดังนี้

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{b_0}{a_1s + a_0} \quad (3.8)$$

สามารถจัดรูปสมการที่ (3.8) ใหม่จะได้ว่า

$$a_1sY_a(s) + a_0Y_a(s) = b_0X_a(s) \quad (3.9)$$

ทำการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse laplace transform) เพื่อหาความสัมพันธ์ทางเวลาและจัดให้อยู่ในรูปสมการผลต่างสืบเนื่อง

$$a_1y'_a(t) + a_0y_a(t) = b_0x_a(t) \quad (3.10)$$

ทฤษฎีการอินทิเกรตเขียนได้ว่า

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y'_a(t) dt + y_a(t_0) \quad (3.11)$$

จากสมการที่ (3.11) กำหนดให้ $t = nT$ และ $t_0 = (n-1)T$ จะได้ว่า

$$y_a(t) = \int_{(n-1)T}^{nT} y'_a(t) dt + y_a[(n-1)T] \quad (3.12)$$

ทำการประมาณค่าการอินทิเกรตด้วย กฎการอินทิเกรตแบบสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) ได้

$$y_a(nt) = y_a[(n-1)T] + (T/2) \{y'_a(nt) + y'_a[(n-1)T]\} \quad (3.13)$$

จากสมการที่ (3.10) สามารถเขียนได้ว่า

$$y'_a(t) = \frac{-a_0}{a_1} y_a(t) + \frac{b_0}{a_1} x_a(t) \quad (3.14)$$

$$y'_a[(n-1)T] = \frac{-a_0}{a_1} y_a([(n-1)T] + \frac{b_0}{a_1} x_a([(n-1)T]T) \quad (3.15)$$

นำสมการที่ (3.14) และ (3.15) แทนลงในสมการที่ (3.13) จะได้ว่า

$$y_a(nt) = y_a[(n-1)T] + (T/2) \left\{ \frac{-a_0}{a_1} y_a(t) + \frac{b_0}{a_1} x_a(t) \right. \\ \left. \frac{-a_0}{a_1} y_a([(n-1)T]T + \frac{b_0}{a_1} x_a([(n-1)T]T) \right\} \quad (3.16)$$

ทำการแปลงเซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.17) จะได้ว่า

$$Y(z) - Y(z)z^{-1} + \frac{a_0 T}{2a_1} Y(z) + \frac{a_0 T}{2a_1} Y(z)z^{-1} = \frac{b_0 T}{2a_1} X(z) + \frac{b_0 T}{2a_1} X(z)z^{-1} \quad (3.17)$$

จัดรูปสมการที่ (3.17) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{b_0 T}{2a_1} + \frac{b_0 T}{2a_1} z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{a_0 T}{2a_1} + \frac{a_0 T}{2a_1} z^{-1}} \quad (3.18)$$

$$= \frac{b_0}{a_1 \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a_0} \quad (3.19)$$

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.8) และ (3.19) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (3.20)$$

จะได้ว่า

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad \text{และ} \quad z = \frac{2+sT}{2-sT} \quad (3.21)$$

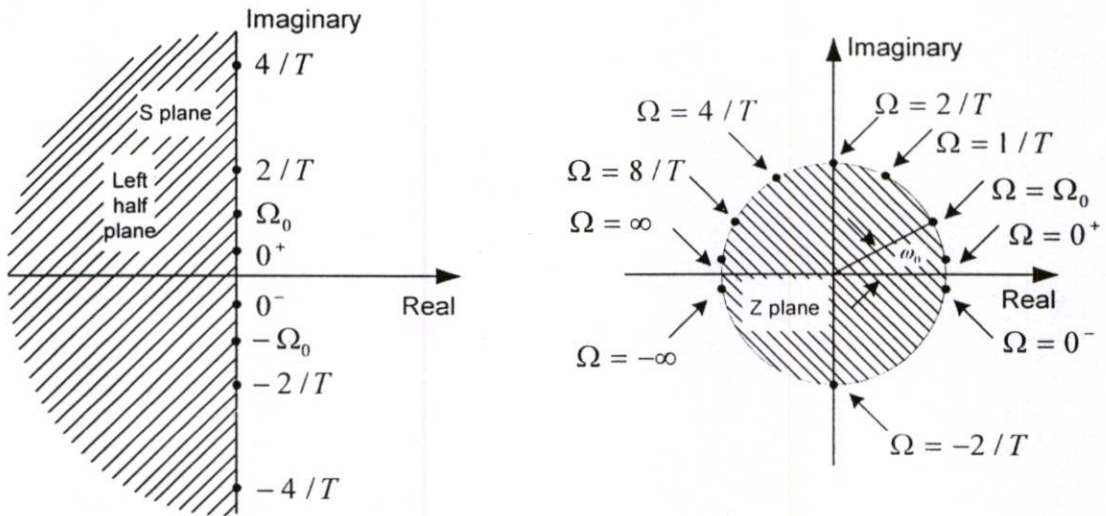
กำหนดให้ $s = \sigma + j\Omega$ แทนลงในสมการที่ (3.21) จะได้ว่า

$$|z| = \frac{\left| 1 + \frac{T}{2}\sigma + j\frac{T}{2}\Omega \right|}{\left| 1 - \frac{T}{2}\sigma - j\frac{T}{2}\Omega \right|}$$

$$|z| = \frac{\left[\left(1 + \frac{T}{2}\sigma \right)^2 + \left(\frac{T}{2}\Omega \right)^2 \right]^{1/2}}{\left[\left(1 - \frac{T}{2}\sigma \right)^2 + \left(\frac{T}{2}\Omega \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.22)$$

จากสมการที่ (3.22) สามารถแยกพิจารณาได้เป็น 3 กรณีคือ

1. กรณี $\sigma > 0$ พบว่า $|z| > 1$ นั่นคือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณครึ่งหนึ่งในระนาบเอสทางด้านขวาถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด
2. กรณี $\sigma < 0$ พบว่า $|z| < 1$ นั่นคือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณครึ่งหนึ่งในระนาบเอสทางด้านซ้ายถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด
3. กรณี $\sigma = 0$ พบว่า $|z| = 1$ คือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณบนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอสถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด



รูปที่ 3.1 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

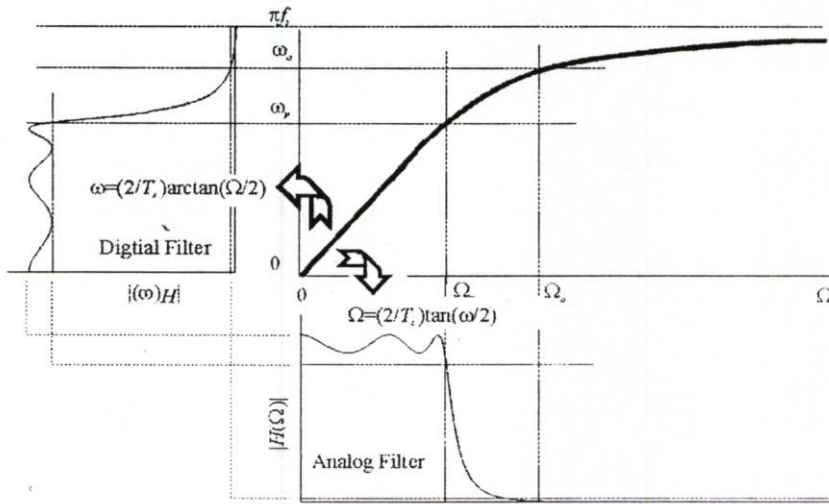
วงจรรองสัญญาณอนาลอกมีความเสถียรภาพนั้นก็ต่อเมื่อตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพนั้น เมื่อทำการแมป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซดก็พบว่าวงจรรองสัญญาณดิจิตอลจะมีความเสถียรภาพด้วยเนื่องจากโพลทุกตัวอยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย อย่างไรก็ตามบริเวณที่สนใจเป็นพิเศษ ก็คือกรณีที่มี $\sigma = 0$ พบว่า $|z| = 1$ จะได้ว่า $s = j \Omega$ และ $z = e^{j\omega T}$ แทนลงในสมการที่ (3.21) จะได้ว่า

$$j \Omega = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{j\omega T}}{1 + e^{j\omega T}} \right)$$

$$= \frac{2}{T} \left(\frac{e^{j\omega T / 2} - e^{-j\omega T / 2}}{e^{j\omega T / 2} + e^{-j\omega T / 2}} \right) \tag{3.23}$$

จะได้ว่า
$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \tag{3.24}$$

จากสมการที่ (3.24) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในโดเมนอนาลอก (Ω) และความถี่ในโดเมนดิจิตอล (ω) โดยมีความสัมพันธ์ในรูปของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าในช่วงความถี่สูงๆความสัมพันธ์ของความถี่ทั้งสองมีกราฟลักษณะไม่เป็นลักษณะเชิงเส้น ซึ่งผลกระทบจากความไม่เป็นเชิงเส้นนี้ก็คือจะทำให้ผลตอบสนองทางขนาดและเฟสในบริเวณความถี่สูงๆเพี้ยนไปปรากฏการณ์ลักษณะนี้เรียกว่า ปรากฏการณ์หัดแคบ (Wrapping Effect)



รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ความถี่ใน โดเมนอนาลอกและดิจิตอล

ดังนั้นในการออกแบบจึงต้องมีการชดเชยผลของปรากฏการณ์หัดแคบนี้ (Prewrapping) ซึ่งสรุปขั้นตอนการออกแบบวงจรสัญญาณดิจิตอลด้วยวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มได้ดังนี้

1. ออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ โดยการหาฟังก์ชันถ่ายโอน $H_a(s)$
2. กำหนดความถี่คัตออฟ (Cutoff frequency) และความถี่สุ่ม (Sampling frequency) ของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล
3. ทำการชดเชยผลของปรากฏการณ์หัดแคบ โดยการหาค่า $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$
4. การสเกลความถี่ (Frequency scaling) ของ $H_a(s)$
5. หาค่า $H(z)$ โดยแทนค่า $s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$

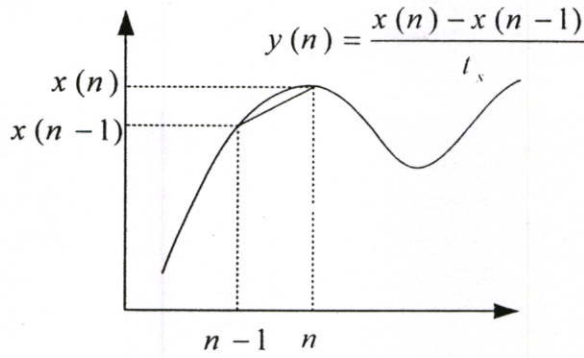
3.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformations)

เราจะทำการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล $H(z)$ โดยมีคุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกตามสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ได้ดังนี้

$$\sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k} \quad (3.25)$$

โดยที่ $x_a(t)$ เป็นสัญญาณเข้าที่ต่อเนื่องทางเวลา

$y_a(t)$ เป็นสัญญาณออกที่ต่อเนื่องทางเวลา



รูปที่ 3.3 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

เมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์ม (Laplace transform) ในสมการที่ (3.25) จะได้ว่า

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k s^k}{\sum_{k=0}^M a_k s^k} \quad (3.26)$$

การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังคือ การหาค่าเฉลี่ยผลต่างของทั้งสองลำดับสัญญาณ ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 3.3 สามารถเขียนเป็นสมการที่ (3.27) ได้ดังนี้

$$\nabla^{(1)}[y(n)] = [y(n) - y(n-1)] / T \quad (3.27)$$

ทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.27) จะได้ว่า

$$Z(\nabla^{(1)}[y(n)]) = Z([y(n) - y(n-1)] / T) = Y(z)(1 - z^{-1}) / T \quad (3.28)$$

ในกรณีที่ การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังมีลำดับสูงๆ สามารถเขียนได้ตามนี้

$$\nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}[y(n)]] \quad (3.29)$$

$$Z(\nabla^{(k)}[y(n)]) = Y(z)[(1 - z^{-1}) / T]^k \quad (3.30)$$

ใช้การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังที่ลำดับสูงๆ ในสมการที่ (3.25) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^M a_k \nabla^{(k)} [y_a(n)] = \sum_{k=0}^N b_k \nabla^{(k)} [x_a(n)] \quad (3.31)$$

เมื่อทำการแปลงเซคทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.31)

$$\sum_{k=0}^M a_k Z(\nabla^{(k)} [y_a(n)]) = \sum_{k=0}^N b_k Z(\nabla^{(k)} [x_a(n)]) \quad (3.32)$$

ใช้สมการที่ (3.30) แทนลงในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1}) / T]^k Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1}) / T]^k X(z) \quad (3.33)$$

จัดรูปสมการที่ (3.33) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1}) / T]^k}{\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1}) / T]^k} \quad (3.34)$$

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.26) และ (3.34) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s \rightarrow (1-z^{-1})/T} \quad (3.35)$$

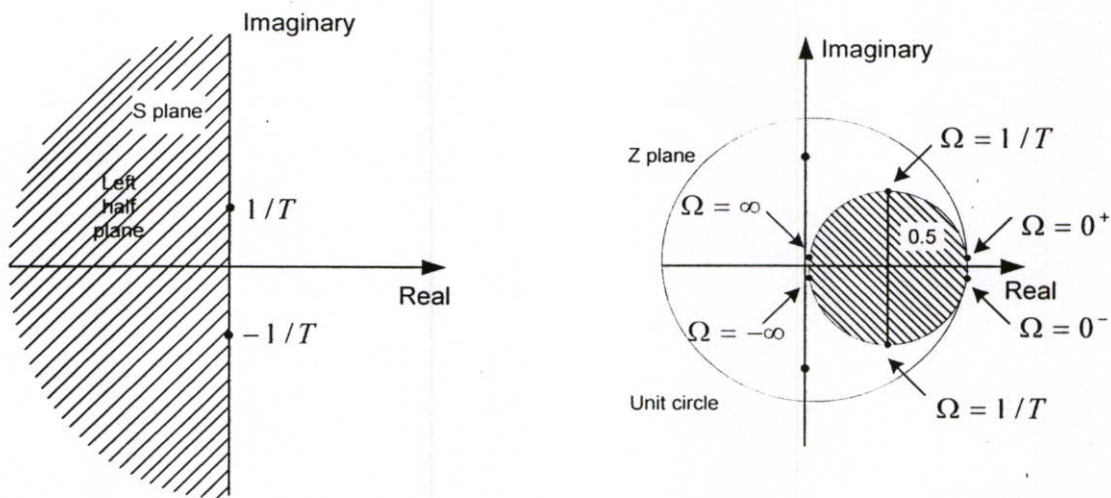
จะได้ว่า

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \text{ และ } z = \frac{1}{1 - sT} \quad (3.36)$$

เมื่อพิจารณาในส่วน $\sigma = 0$ จะได้ว่า $s = j\omega$ แทนลงในสมการที่ (3.36)

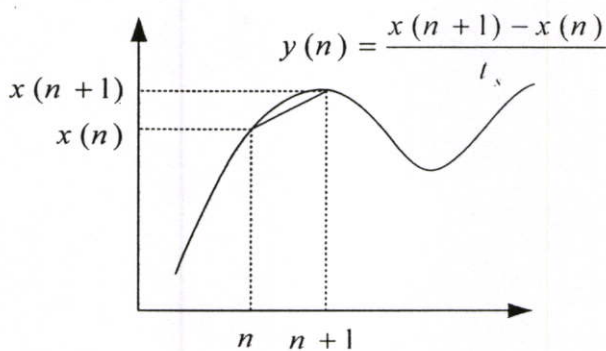
$$z = \frac{1}{1 - j\omega T} \Rightarrow z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right) \Rightarrow \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad (3.37)$$

จากสมการที่ (3.37) จะได้ว่าตำแหน่งของโพลที่อยู่บนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอสถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมี $(1/2)$ หน่วยในระนาบแซดในทำนองเดียวกัน ตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพเมื่อทำการแมป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซดก็พบว่าวงจรรองสัญญาณดิจิทัลจะมีความเสถียรภาพด้วย เนื่องจากโพลทุกตัวอยู่ภายในวงกลมรัศมี $(1/2)$ หน่วย ดังแสดงได้ในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

3.4 วิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า (Forward difference transformations)



รูปที่ 3.5 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องไปหน้า

การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้าคือ การหาค่าเฉลี่ยผลต่างของทั้งสองลำดับสัญญาณ ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 3.5 สามารถเขียนเป็นสมการที่ (3.38) ได้ดังนี้

$$\nabla^{(1)}[y(n)] = [y(n+1) - y(n)] / T \quad (3.38)$$

เมื่อทำการแปลงเซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.38) จะได้ว่า

$$Z(\nabla^{(1)}[y(n)]) = Z([y(n+1) - y(n)] / T) = Y(z)(1 - z^{-1}) / z^{-1}T \quad (3.39)$$

ในกรณีที่ การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้ามีลำดับสูงๆ สามารถเขียนได้ตามนี้

$$\nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}[y(n)]] \quad (3.40)$$

และ

$$Z(\nabla^{(k)}[y(n)]) = Y(z)[(1 - z^{-1}) / z^{-1}T]^k \quad (3.41)$$

ใช้สมการที่ (3.30) แทนลงในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1}) / z^{-1}T]^k Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1}) / z^{-1}T]^k X(z) \quad (3.42)$$

จัดรูปสมการที่ (3.42) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1})z^{-1} / T]^k}{\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1})z^{-1} / T]^k} \quad (3.43)$$

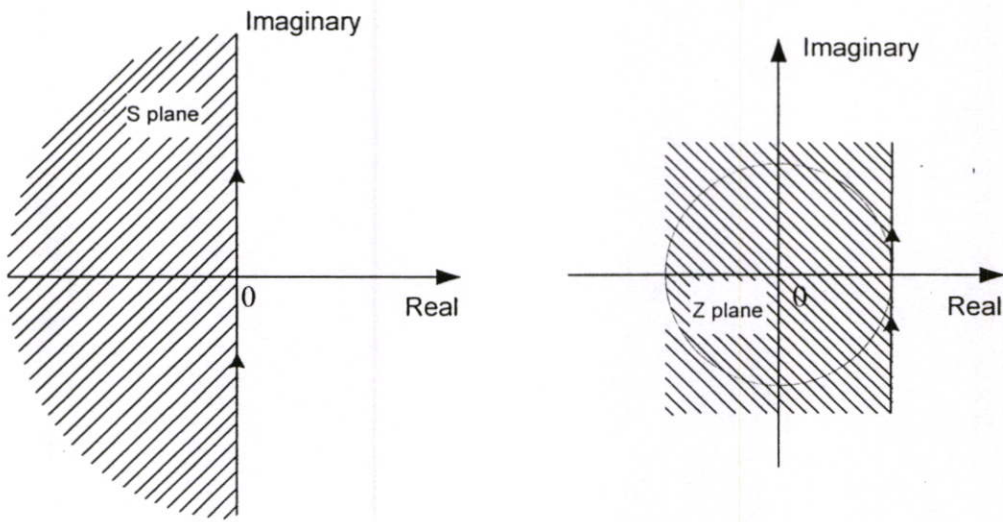
เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.26) และ (3.43) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s \rightarrow (1-z^{-1})/z^{-1}T} \quad (3.44)$$

จะได้ว่า

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}T} \text{ และ } z = 1 + sT \quad (3.45)$$

อย่างไรก็ดีวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้าจะไม่ค่อยนิยมนักในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลเพราะว่า ตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพนั้น โดยทั่วไปเมื่อทำการแมป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซคอาจเกิดปัญหาความไม่เสถียรภาพได้เนื่องจากว่าโพลอาจอยู่ภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ดังแสดงได้ในรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า

3.5 ประเภทของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล

3.5.1 วงจรกรองวงจกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด (FIR Filter)

เมื่ออธิบายถึงวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัดที่มีคุณสมบัติคอซอล (Casual FIR system) สามารถเขียนแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k) = h(n) * x(n) \quad (3.46)$$

โดยที่ $x(n]$ คือ ลำดับสัญญาณเข้าในระบบ

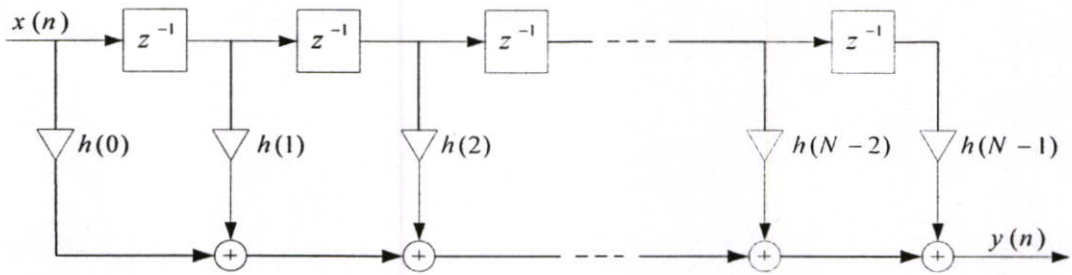
$y(n]$ คือ ลำดับสัญญาณออกจากระบบ

$h(n]$ คือ สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณ

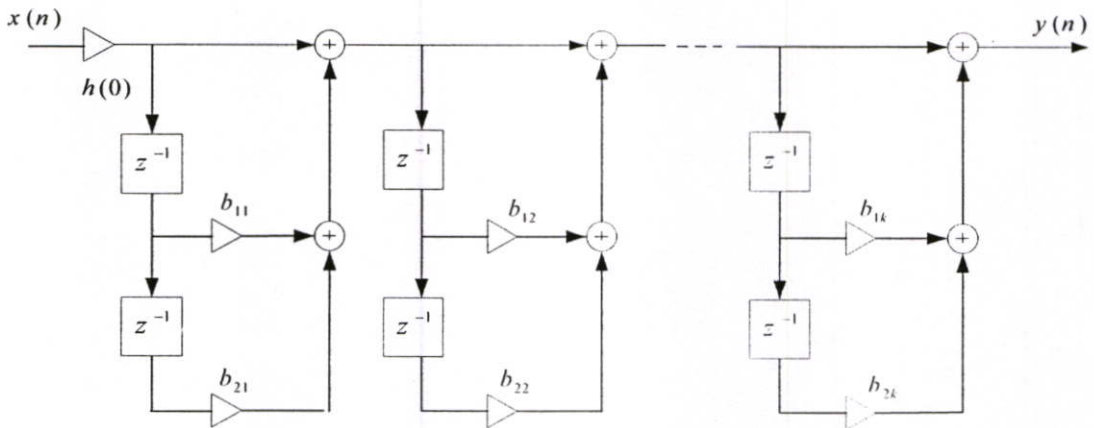
สามารถอธิบายถึงคุณลักษณะของผลตอบสนองอิมพัลส์ (Impulse response) โดยมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} \quad (3.47)$$

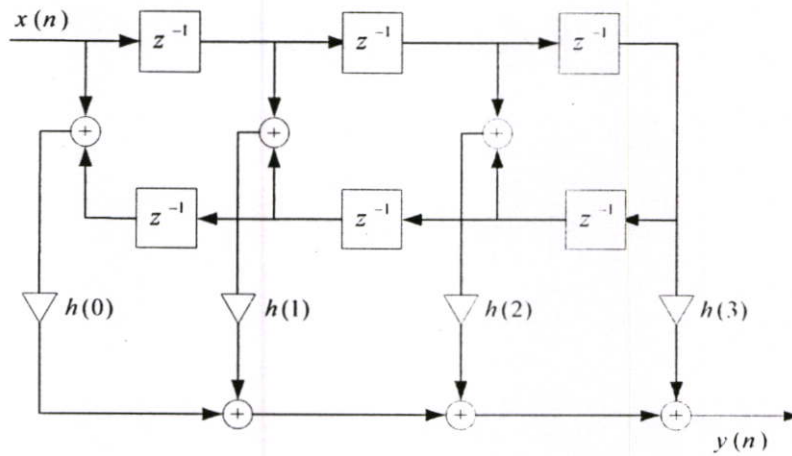
จากสมการที่ (3.46) ก็คือสมการผลต่างสี่บเนื้อง (Difference equation) ของวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัดนั่นเอง ซึ่งรูปแบบของสมการอธิบายความสัมพันธ์ในทางเวลา โดยสัญญาณขาออกจากระบบ $y(n)$ จะขึ้นอยู่กับสัญญาณขาเข้า ณ เวลาปัจจุบันและอดีตเท่านั้น และสามารถนำมาเขียนเป็นโครงสร้างได้หลายลักษณะ



รูปที่ 3.7 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ รูปแบบโดยตรง



รูปที่ 3.8 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ แบบอนุกรม



รูปที่ 3.9 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์ แบบเฟสเชิงเส้น

จากรูปที่ 3.9 จะเห็นได้ว่าวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัดที่มีโครงสร้างแบบเฟสเชิงเส้นซึ่งจะให้ผลตอบสนองเป็นลักษณะเฟสเชิงเส้น (Phase linear) จัดได้ว่าเป็นเรื่องสำคัญสำหรับการประยุกต์ใช้งานกับแอปพลิเคชันบางประเภทเช่น เสียงดนตรี วิดีทัศน์ และการส่งผ่านข้อมูล เป็นต้นและประเด็นที่น่าสนใจในที่นี้ก็คือ โครงสร้างแบบเฟสเชิงเส้นจะช่วยลดหรือประหยัดจำนวนอุปกรณ์การคูณลงได้ประมาณครึ่งหนึ่งที่ใช้สร้างวงจรกรองสัญญาณเมื่อเปรียบเทียบกับโครงสร้างแบบโดยตรง

ข้อได้เปรียบและข้อเสียเปรียบของวงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์เปรียบเทียบกับไอไออาร์

1. วงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์สามารถออกแบบให้ผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้นได้ โดยที่เฟสเชิงเส้นมีความสำคัญต่อการนำไปใช้งาน
 2. วงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์จะมีความเสถียรภาพแน่นอน (Stable) เนื่องจากว่ามีโพลอยู่ที่จุดกำเนิด (Origin) บนระนาบแซด
 3. สัญญาณรบกวนจากการ Quantize สามารถละทิ้งได้สำหรับโครงสร้างแบบไม่ป้อนกลับ
 4. ที่อันดับสูงๆ ต้องการตัวเก็บค่าสัมประสิทธิ์มากกว่าวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์
- เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.47) กำหนดให้ $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-j\omega k} = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (3.48)$$

จะได้ผลตอบสนองทางขนาดและเฟส

$$M(\omega) = |H(e^{j\omega})|$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{-\operatorname{Im} H(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega})} \quad (3.49)$$

พิจารณาค่าหน่วงเฟส (Phase delay) และค่าหน่วงกลุ่ม (Group delay)

$$\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad \text{และ} \quad \tau_g = -\frac{\partial\theta(\omega)}{\partial\omega} \quad (3.50)$$

สำหรับวงจรกรองสัญญาณที่มีค่า τ_p และ τ_g คงที่ นั่นคือเป็นอิสระต่อความถี่เรียกว่า วงจรกรองสัญญาณที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น

$$\theta(\omega) = -\tau\omega \quad -\pi < \omega < \pi \quad (3.51)$$

จากสมการที่ (3.48), (3.49) และ (3.51) ผลตอบสนองทางเฟสสามารถเขียน

$$\theta(\omega) = -\tau\omega = \tan^{-1} \frac{-\sum_{k=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{k=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)} \quad (3.52)$$

จะได้ว่า
$$\sum_{k=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega\tau - \omega n) = 0$$

จะเห็นได้ว่าการที่วงจรกรองสัญญาณเอพ็โฮอาร์จะมีผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้น เนื่องจากผลบวกของฟังก์ชันไซน์มารวมกันเป็นศูนย์ การที่มีคุณสมบัติอย่างนี้ได้ ก็คือผลตอบสนองอิมพัลส์ทั้งสองด้านต้องสมมาตรกันตามสมการที่ (3.52) และ (3.53)

$$\tau = \frac{(N-1)}{2} \quad (3.53)$$

และ $h(n) = h(N-1-n)$ สำหรับ $0 < n < N-1$ (3.54)

ดังนั้นวงจรกรองสัญญาณเอพ็โฮอาร์จะมีค่าหน่วงเฟสและค่าหน่วงกลุ่มคงที่ตามเงื่อนไขของสมการที่ (3.53) และคุณสมบัติความสมมาตรตามสมการที่ (3.54) โดยที่ถ้าหาก N เป็นเลขคี่นั้นแสดงว่า จุดกึ่งกลางของความสมมาตรจะอยู่ที่ผลตอบสนองลำดับ $(N-1)/2$ เช่นตัวอย่าง

สำหรับวงจรกรองสัญญาณเอพ็อดอาร์ที่มีลำดับ $N = 7$ จะพบว่า $h(0) = h(6)$, $h(1) = h(5)$, $h(2) = h(4)$, $h(3)$ แต่ถ้านำค่า N เป็นเลขคู่จุดกึ่งกลางของความสมมาตรจะอยู่ที่ผลตอบสนองลำดับ $(N - 2) / 2$ และ $N / 2$ ดังรูปที่ 3.10 (a) และ (b) เรียกว่า การสมมาตรแบบสมมาตรคู่ (Even symmetry)



(a) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบ สมมาตรคู่



(b) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบ สมมาตรคี่

รูปที่ 3.10 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบสมมาตร

ในบางกรณีกรอกแบบอาจต้องการให้เพียงค่า ความหน่วงกลุ่ม τ_c มีค่าคงตัวเท่านั้น

$$\theta(\omega) = \theta_o - \tau\omega \quad (3.55)$$

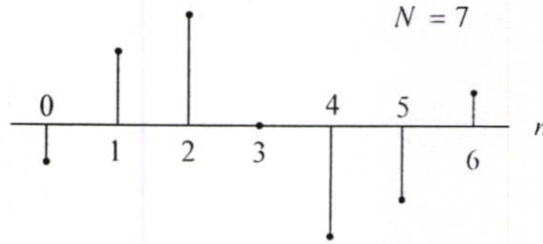
โดยที่ θ_o เป็นค่าเฟสคงตัว วงจรกรองสัญญาณที่มีผลตอบสนองทางเฟสแบบนี้ต้องมีเงื่อนไขคือ

$$\theta_o = \pm\pi / 2$$

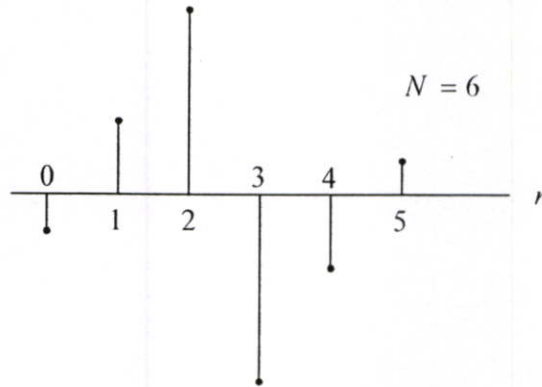
$$\tau = (N - 1) / 2 \quad (3.56)$$

$$\text{และ } h(k) = -h(N - 1 - k) \text{ สำหรับ } 0 < k < N - 1 \quad (3.57)$$

กรณีนี้ผลตอบสนองอิมพัลส์เรียกว่าเป็นแบบปฏิสมมาตร (Anti symmetry) หรือสมมาตรคี่ (Odd symmetry) โดยที่จุดกึ่งกลางความสมมาตรเหมือนกับการสมมาตรแบบสมมาตรคู่ ดังรูปที่ 3.11 (c) และ (d)



(c) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบ ปฏิสมมาตรคู่



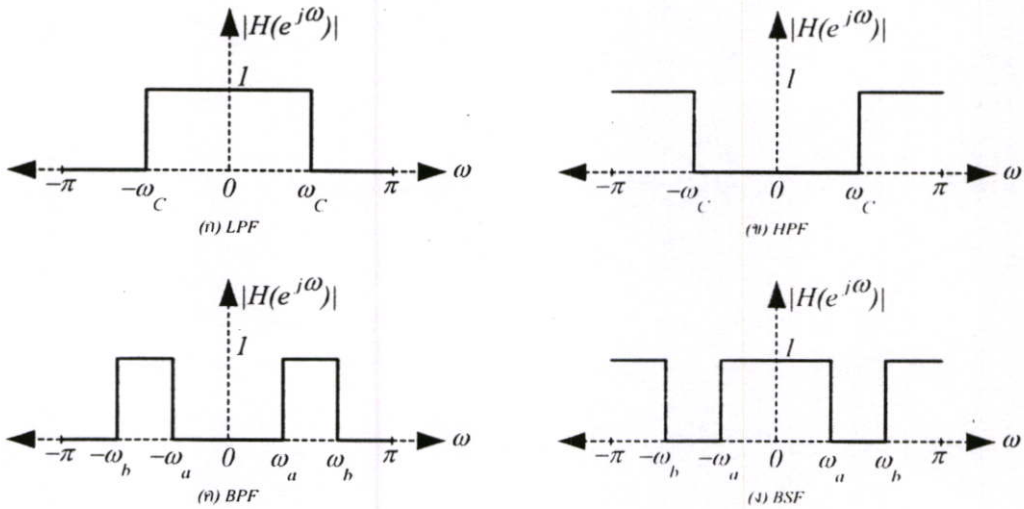
(d) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบ ปฏิสมมาตรคี่

รูปที่ 3.11 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบปฏิสมมาตร

เนื่องจากวงจรกรองสัญญาณ เอฟไออาร์ที่เราพิจารณานั้นให้ผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้น (Linear phase) ดังนั้นการออกแบบจึงกระทำโดยใช้การพิจารณาทางขนาด (Magnitude) มีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอยู่ 2 วิธีที่นิยมคือ

3.5.1.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์โดยใช้อนุกรมฟูรีเยอร์

โดยทั่วไปแล้วการออกแบบวงจรกรองสัญญาณนั้น กระทำโดยการประมาณค่าให้มีผลตอบสนองความถี่ใกล้เคียงกับผลตอบสนองทางอุดมคติดังรูปที่ 3.12 ให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาวงจรกรองผ่านความถี่ต่ำทางอุดมคติ



รูปที่ 3.12 ผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอุดมคติ

ผลตอบสนองทางอุดมคติ $H(e^{j\omega})$ ซึ่งกระจายให้อยู่ในพจน์ทางโดเมนเวลา (Time domain) และสามารถหาค่าผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(n)$ ได้จากความสัมพันธ์ของการแปลงกลับของฟูเรียร์ได้ดังนี้

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad (3.58)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.59)$$

จากรูปที่ 3.12 จะเห็นว่า $H(e^{j\omega}) = 1$ และมีขอบเขตช่วง $-\omega_c$ จนถึง ω_c ดังนั้นค่าของผลตอบสนองอิมพัลส์หาได้จากสมการที่ (3.60)

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \times e^{j\omega n} d\omega \quad (3.60)$$

$$h(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (3.61)$$

ในสมการที่ (3.61) จะพบปัญหาที่ $n = 0$ เพราะผลตอบสนองต่ออิมพัลส์ $h(n)$ มีค่าเป็นเศษศูนย์ส่วนด้วยศูนย์ วิธีแก้ไขปัญหามา เราสามารถหาค่า $h(0)$ ได้โดยใช้ทฤษฎีของโลปีตัล จะได้ว่า

$$h(0) = \frac{\lim_{n \rightarrow 0} \frac{d(\sin(\omega_c n))}{d(n)}}{\lim_{n \rightarrow 0} \frac{d(\pi n)}{d(n)}} = \frac{\omega_c}{\pi} \quad (3.62)$$

สำหรับวงจรกรองความถี่แบบอื่นๆ เราสามารถหาผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_a(k)$ ได้โดยการแปลง IDTFT เพื่อหาผลตอบสนองเชิงความถี่ของวงจรกรองนั้นๆ ได้ดังตารางที่ 3.2 เพื่อใช้ในการออกแบบต่อไป

ตารางที่ 3.2 ผลตอบสนองอิมพัลส์

ชนิดของตัวกรอง	$h(n), -\infty < n < \infty$	$h(n), n = 0$
วงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน	$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$\frac{\omega_c}{\pi}$
วงจรกรองความถี่สูงผ่าน	$\delta(n) - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$1 - \frac{\omega_c}{\pi}$
วงจรกรองแถบความถี่ผ่าน	$\frac{\sin(\omega_b n) - \sin(\omega_a n)}{\pi n}$	$\frac{\omega_b}{\pi} - \frac{\omega_a}{\pi}$
วงจรแถบความถี่หยุดผ่าน	$\delta(n) - \frac{\sin(\omega_b n) - \sin(\omega_a n)}{\pi n}$	$1 - \frac{\omega_b}{\pi} + \frac{\omega_a}{\pi}$

3.5.1.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์ ด้วยฟังก์ชันวินโดว์

ทราบกันดีว่าถ้าต้องการให้วงจรกรองสัญญาณมีผลตอบสนองเหมือนกับผลตอบสนองทางอุดมคติ นั้นจะต้องใช้สัมประสิทธิ์ยาวถึงอนันต์ ซึ่งในการสร้างวงจรกรองสัญญาณจริงนั้นไม่สามารถทำได้ จึงต้องจำกัดช่วงความยาวแต่ส่งผลให้ผลตอบสนองทางขนาดในช่วงแถบความถี่ผ่านเกิดการกระเพื่อม (ripple) จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมสัมประสิทธิ์และปัญหานี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อปรากฏการณ์กิบบ์ (Gibb's phenomenon) ด้วยเหตุนี้ถ้าวงจรกรองสัญญาณมีจำนวนเทอมสัมประสิทธิ์ที่มากพอจะให้คุณสมบัติที่ใกล้เคียงกับทฤษฎีมากขึ้น แต่ในการสร้างวงจรดังกล่าวซึ่ง

ทางปฏิบัติเป็นสิ่งที่ทำได้ยากและไม่เหมาะสม เพราะว่าการคำนวณต้องใช้เวลาและเป็นการสิ้นเปลืองอุปกรณ์อีกด้วย วิธีที่เหมาะสมในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณก็คือจำกัดจำนวนเทอมสัมประสิทธิ์ที่น้อยลง แต่มีการปรับค่า $h(n)$ ที่ได้โดยปรับน้ำหนักใหม่ตามลักษณะการคูณเฉพาะช่วง (Window function) สามารถที่จะลดการกระเพื่อมและปรับปรุงช่วงเปลี่ยนแปลงของผลตอบสนอง (Transition) ได้

$$\hat{h}(n) = h(n) \cdot w(n) \quad (3.63)$$

การคูณจุดต่อจุดในโดเมนเวลาคือการคูณประสาน (Convolution) ในโดเมนความถี่ ดังนั้น

$$\hat{H}(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) * W(e^{j\theta}) \quad (3.64)$$

จากตารางที่ 3.3 ฟังก์ชันหน้าต่างที่นิยมใช้กันมากมีดังนี้ Rectangular, Hanning, Hamming, Blackman อันที่จริงมีมากกว่านี้ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมต่อการใช้งาน

ตารางที่ 3.3 พารามิเตอร์ที่สำคัญๆของหน้าต่างแบบต่างๆ

Window	δ_{pass}	$A_{stop} = 20 \log \delta_{stop}$	Δf	$W(n), n=0, 1, \dots, N-1$
Rectangular	89%	21	$2/N$	1
Hanning	0.63%	44	$4/N$	$0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Hamming	0.22%	53	$4/N$	$0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackman	0.02%	74	$6/N$	$0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$

ซึ่งในที่นี้ทำความเข้าใจเพิ่มเติมเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่สำคัญๆตามลักษณะเฉพาะของวิธีหน้าต่างต่อการออกแบบวงจรกรองความถี่ เช่น ความถี่ตัด, อัตราการลดทอน, ความพิริวหรือริบเปิดของแถบผ่าน และความกว้างของแถบเปลี่ยน โดยพิจารณาตามรูปที่ 3.13 ดังนี้

1. ความถี่ตัด (Cutoff frequency ; f_c) หมายถึงจุดตัดของความถี่ที่ให้สัญญาณผ่านหรือไม่ผ่านไปยังขั้วออกของวงจรกรอง สำหรับวงจรกรองความถี่ของเอฟไออาร์กำหนดค่าความถี่ที่ขนาด

ลดลงประมาณ 0.5 นิยามนี้แตกต่างกับแบบไอโออาร์ที่ใช้นิยามเดียวกันกับวงจรกรองแบบแอนาล็อกคือที่ขนาดลดลงประมาณ 0.707

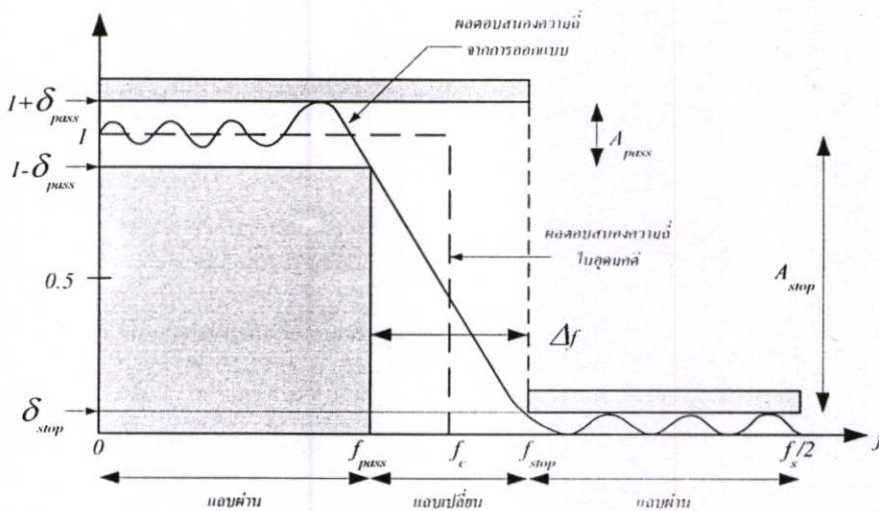
2. การลดทอนของแถบหยุด (Stop band attenuation; A_{stop}) คือ จำนวนเท่าที่แถบหยุดลดทอนลง วัดค่าเป็น dB โดยการลดทอนของแถบหยุดมีความสัมพันธ์กับความพริ้วของแถบหยุดแสดงดังสมการที่ (3.65)

$$A_{stop} = 20 \log \delta_{stop} \quad (3.65)$$

3. ความพริ้วหรือริบเปิดของแถบผ่าน (Pass band ripple; δ_{pass}) หมายถึงค่าสูงสุดที่ขนาดแถบผ่านแกว่งออกห่างจากค่า 1 ตามรูปที่ 3.13 เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$A_{pass} = 20 \log \frac{1 + \delta_{pass}}{1 - \delta_{pass}} \quad (3.66)$$

4. ความกว้างของแถบเปลี่ยน (Transition band width; Δf) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดเทียบกับช่วงความถี่



รูปที่ 3.13 คุณลักษณะเฉพาะของผลตอบสนองความถี่ของตัวกรองแบบเฟอไออาร์

3.5.2 วงจรกรองวงจรวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด (IIR Filter)

วงจรวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์จะความแตกต่างไปจากวงจรวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ ก็คือ มีการรวมเอาผลของสัญญาณขาออกในอดีตมาคำนวณด้วยหรือเรียกได้ว่าเป็นการ Feed Back นั่นเอง ที่สำคัญก็คือการออกแบบวงจรวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์จะใช้จำนวนเทอมสัมประสิทธิ์น้อยกว่า การออกแบบวงจรวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ทำให้ช่วยลดเวลาของการคำนวณลงแต่ข้อเสียมันก็มี เช่นกันก็คือการออกแบบจะต้องใช้ความละเอียดอ่อนเรื่องสัมประสิทธิ์การ FeedBack เป็นอย่างมากเพราะอาจก่อให้เกิดการ Unstable ได้ และการออกแบบวงจรวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์จะเป็นการยากอย่างยิ่งที่จะให้ผลเป็นแบบ Linear phase characteristic ซึ่งสามารถทำได้ง่ายโดยการออกแบบวงจรวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ ดังนั้นวงจรวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์สามารถเขียนอธิบายการทำงานได้ด้วยสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ดังนี้

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (3.67)$$

โดยที่ $x(n)$, $y(n)$ เป็นลำดับสัญญาณเข้าและออกตามลำดับ

a_k , b_k เป็นสัมประสิทธิ์ของลำดับสัญญาณเข้าและออก

ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function) ของวงจรวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}} \quad (3.68)$$

จากสมการการที่ (3.68) สามารถนำมาเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

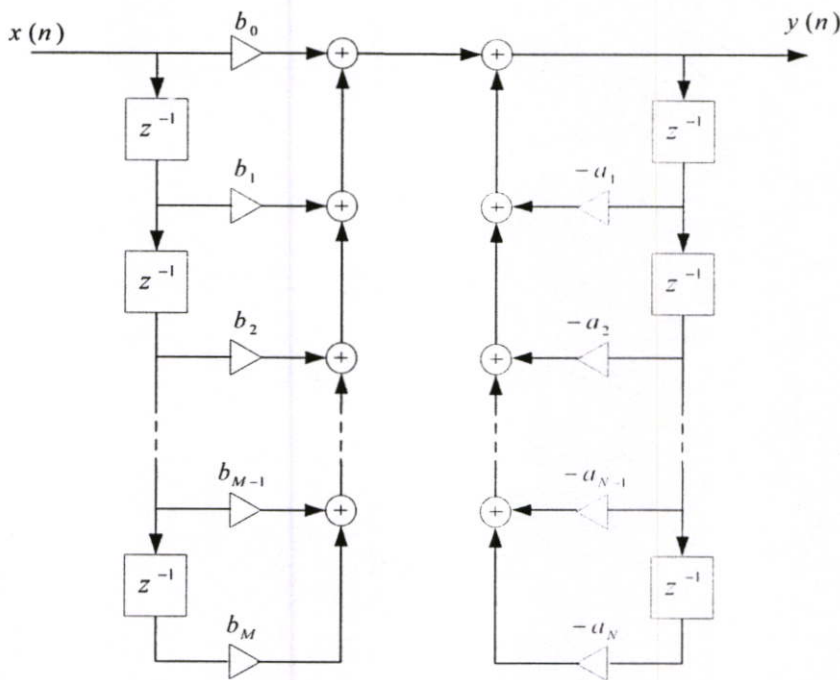
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (3.69)$$

จากสมการที่ (3.69) นำไปจัดเทอมต่างๆใหม่และเขียนอยู่ในรูปสมการผลต่างสืบเนื่องได้

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^M a_k Y(z) z^{-k} \quad (3.70)$$

3.5.2.1 โครงสร้างแบบโดยตรง 1 (Direct form I)

โครงสร้างแบบนี้ใช้อุปกรณ์หน่วงสัญญาณหรือชิฟรืจิสเตอร์ถึงสองชุด ชุดหนึ่งสำหรับบรรจุลำดับสัญญาณเข้า $x(n-k)$ อีกชุดหนึ่งจะไว้ใช้สำหรับบรรจุลำดับสัญญาณออก $y(n-k)$ โดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots, n$ โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณนี้ไม่เหมาะสมสำหรับวงจรกรองสัญญาณที่มีวงโพลอยู่ใกล้เส้นรอบวงกลมรัศมี 1 หน่วย ทั้งนี้เนื่องจากปรากฏการณ์ซึ่งไม่เป็นเชิงเส้นเช่น สัมประสิทธิ์ที่เกิดจากการคูณ (Product quantization noise) และสภาพความไวของสัมประสิทธิ์ (Coefficient sensitivity) สูงนิยมสร้างเฉพาะกับวงจรที่มีอันดับต่ำ เช่น อันดับหนึ่งหรืออันดับสอง



รูปที่ 3.14 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง I

3.5.2.2 โครงสร้างแบบโดยตรง 2 (Direct form II)

โครงสร้างแบบนี้เริ่มต้นด้วยการแยกฟังก์ชันถ่ายโอนหรือ $H(z)$ ออกเป็น 2 วงจรคูณแล้วต่ออนุกรมกันดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left[\frac{1}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}} \right] \left[\sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \right] \quad (3.71)$$

$$= H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (3.72)$$

โดยที่ $H_1(z)$ เป็นวงจรกรองสัญญาณที่มีโพลเพียงอย่างเดียว
 $H_2(z)$ เป็นวงจรกรองสัญญาณที่มีซีโรเพียงอย่างเดียว
กำหนดให้

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}} \quad (3.73)$$

และ

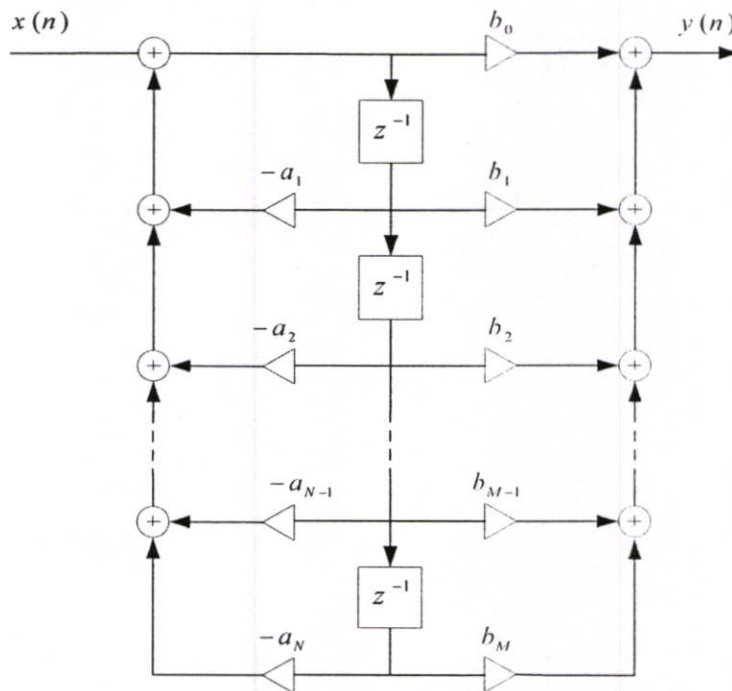
$$H_2(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \quad (3.74)$$

นำสมการที่ (3.73) และสมการที่ (3.74) มาเขียนในรูปสมการผลต่างสืบเนื่องได้ดังนี้

$$w(n) = x(n) - \sum_{k=0}^M a_k w(n-k) \quad (3.75)$$

และ

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k w(n-k) \quad (3.76)$$



รูปที่ 3.15 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง II

จากรูปที่ 3.15 การคำนวณของสัญญาณออก $y(n)$ ในครั้งแรกต้องคำนวณหาลำดับสัญญาณ $w(n)$ ก่อน ซึ่งเป็นสัญญาณกลาง (Intermediate Signal) ตามสมการที่ (3.75) แล้วจึงใช้ผลลัพธ์นี้ไปแทนในสมการที่ (3.76) เพื่อคำนวณหา $y(n)$ ซึ่งเป็นลำดับสัญญาณออกตามต้องการ โครงสร้างแบบโดยตรง 2 มีข้อเสียคือคุณสมบัติความไม่เป็นเชิงเส้นเช่น สิ่งรบกวนจากผลการคูณหรือสภาพความไวของสัมประสิทธิ์เหมือน โครงสร้างแบบโดยตรง 1 และมีโอกาสเกิดการล้น (Over flow) ได้มากกว่าโครงสร้างแบบโดยตรง 1 ส่วนข้อดีโครงสร้างแบบโดยตรง 1 และโครงสร้างแบบโดยตรง 2 นิยมกันไปสร้างเป็นวงจรกรองสัญญาณกันมาก สังเกตจากลำดับสัญญาณเข้าของตัวคูณทุกตัวดังแสดงในรูปที่ 3.14 และรูปที่ 3.15 ลำดับสัญญาณเข้านี้ไม่ได้ขึ้นกับสัญญาณที่เพิ่งคำนวณไปเลยด้วยเหตุผลนี้ทำให้เราสามารถสร้างวงจรที่สามารถทำการคูณพร้อมๆ กันได้เลย อันเป็นผลให้การประมวลผลหรือการคำนวณของวงจรมีความเร็วสูง ทำให้แถบความถี่ปฏิบัติงาน (Bandwidth) ของวงจรสูงขึ้น

3.5.2.3 โครงสร้างแบบอนุกรม (Cascade form)

โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณที่กล่าวมาข้างต้นคือวงจรกรองสัญญาณ โครงสร้างแบบโดยตรง 1 และโครงสร้างแบบโดยตรง 2 นั้นจะมีปัญหาในการควบคุมปรากฏการณ์ความไม่เป็นเชิงเส้นได้ยาก เมื่อค่าของ M และ N มีค่ามากๆ (นั่นก็คืออันดับสูงๆ) ดังนั้นจึงนิยมแบ่งย่อยวงจรกรองสัญญาณออกเป็นช่วงย่อยๆ อันดับต่ำๆมาต่ออนุกรมกัน (Cascade form) หรือต่อขนานวิธีการก็นำฟังก์ชันถ่ายโอนมาเขียนในรูปผลคูณย่อยๆ ดังแสดงในสมการที่ (3.77)

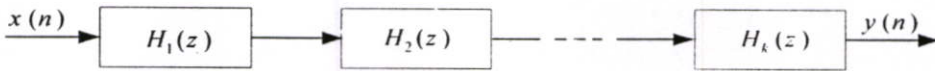
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 \sum_{k=0}^K H_k(z) \quad (3.77)$$

โดยที่ $H_k(z)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอันดับหนึ่งหรืออันดับสองตามลำดับดังนี้

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1}}$$

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \quad (3.78)$$

จากรูปที่ 3.16 $H_k(z)$ อาจจะสามารถสร้างได้โดยใช้โครงสร้างแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 โครงสร้างแบบนี้ทำให้สภาพไวต่อสัมประสิทธิ์ต่ำกว่าแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 มาก สำหรับสิ่งรบกวนนั้นถ้าหากทำสเกล (Scaling) สัมประสิทธิ์แต่ละภาคให้ดีแล้วก็ต้องสามารถกำจัดสิ่งรบกวนออกไปได้



รูปที่ 3.16 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอโถอาร์ แบบอนุกรม

3.5.2.4 โครงสร้างแบบต่อขนาน (Parallel form)

สำหรับโครงสร้างแบบต่อขนาน (Parallel form) หาได้จากกรณำฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z)$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อย ดังแสดงในสมการที่ (3.79)

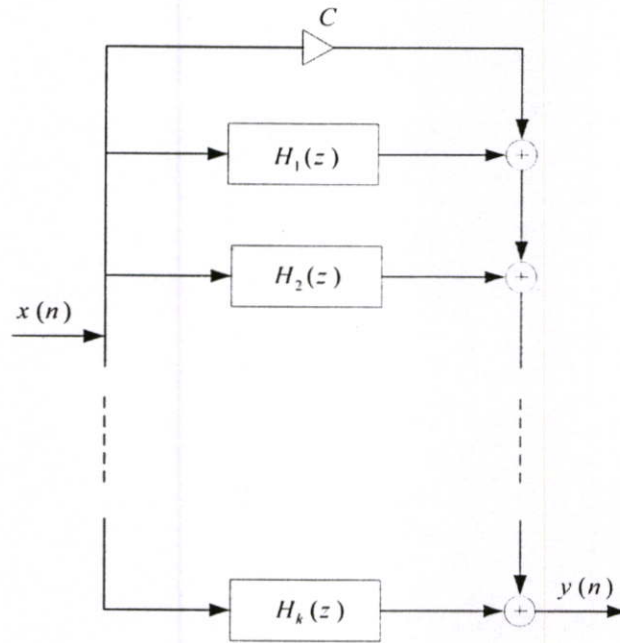
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = C + \sum_{k=0}^K H_k(z) \quad (3.79)$$

โดยที่ $H_k(z)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอันดับหนึ่งหรืออันดับสอง ตามลำดับดังนี้

$$H_k(z) = \frac{b_{0k}}{1 + a_{1k}z^{-1}}$$

$$H_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad (3.80)$$

โครงสร้างต่อแบบขนานโดยทั่วไปแล้วให้ระดับของสิ่งรบกวนน้อยกว่าแบบต่ออนุกรม $H_k(z)$ สามารถนำโครงสร้างแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 มาสร้างแบบขนานได้ ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณ ไอ ไออาร์ แบบขนาน

ในการจัดการ โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบ ไอ ไออาร์ ให้มี โครงสร้างเป็นแบบขนานจะให้ผลดีคือเป็นวิธีที่เหมาะสมที่จะใช้กับระบบประมวลผลสัญญาณดิจิทัลแบบขนานซึ่งจะสามารถทำงานได้เร็ว

3.6 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญเกี่ยวข้องกับหลักการและความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในอนาลอกโดเมน (Analog domain) กับดิจิทัลโดเมน (Digital domain) ด้วยวิธีการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบต่างๆ ดังที่กล่าวมาทั้งหมดเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่จะนำไปประยุกต์เข้ากับการแปลง S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์ นอกจากนั้นยังได้กล่าวถึงเกี่ยวกับ ประเภท โครงสร้างต่างๆ คุณสมบัติของการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลโดยใช้วิธีการต่างๆ เพื่อให้เกิดความรู้เป็นพื้นฐานและแนวทางในการออกแบบต่อไป

บทที่ 4

ทฤษฎีและหลักการออกแบบ

4.1 ทฤษฎีทวินาม (The binomial theorem)

ทวินามหรือไบโนเมียล คือ สมการพีชคณิตที่มีเทอม 2 เทอม เช่น $(A + B)$ ในที่นี้จะกล่าวถึงสมการทั่วไปที่เรียกว่า ทฤษฎีทวินามสำหรับการยกกำลังทวินามเริ่มต้นจากการคูณ หรือ การขยาย $(A + B)^n$ กรณี $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ได้ดังตารางที่ 4.1 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 การกระจายเลขชี้กำลัง

n	$(A + B)^n$	รูปแบบการขยาย
0	$(A + B)^0$	1
1	$(A + B)^1$	$A + B$
2	$(A + B)^2$	$A^2 + 2AB + B^2$
3	$(A + B)^3$	$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
4	$(A + B)^4$	$A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$
5	$(A + B)^5$	$A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$

จะเห็นได้ว่าแถวล่างในตารางเริ่มต้นด้วยเทอม A^5 ซึ่งเราพิจารณาเป็น A^5B^0 เทอมที่ตามหลังมามีเลขชี้กำลังของ A ลดลงเทอมละ 1 และเลขชี้กำลังของ B เพิ่มขึ้นเทอมละ 1 จนมีเลขชี้กำลังเป็น 5 สำหรับในแถวอื่นๆก็มีลักษณะเช่นเดียวกัน ลำดับต่อไปเป็นการพิจารณาสัมประสิทธิ์และการหาค่าสัมประสิทธิ์

$$(A + B)^5 = (A + B)(A + B)(A + B)(A + B)(A + B) \quad (4.1)$$

สังเกตว่า มีทวินาม 5 ตัว และเทอมที่อยู่ในรูปแบบที่ได้รับการขยายเป็นผลลัพธ์ของผลคูณของเทอมในทวินาม เช่นการหา A^3B^2 ในรูปการขยายของ $(A + B)^n$ นั้น เราจะต้องคูณเทอม A จากทวินาม 3 ตัว กับเทอม B อื่นๆ จากทวินาม 2 ตัว กรณีนี้หาแฟกเตอร์ A ได้ $\binom{5}{3}$ วิธี ซึ่งก็คือจำนวนวิธีที่เราเลือกทวินาม 3 ตัวจากทวินาม 5 ตัว ในทำนองเดียวกัน ในการหาแฟกเตอร์ B ทำได้

(5) วิธีซึ่งก็คือ จำนวนวิธีที่เราเลือกทวินาม 2 ตัวจากทวินาม 5 ตัว กรณีเช่นนี้พิสูจน์ได้ว่า

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$$

จาก $(A + B)^n$ ทำให้สรุปได้ว่าสัมประสิทธิ์ของเทอม $A^{n-k} B^k$ คือ $\binom{n}{k}$ หรือ $\binom{n}{n-k}$ จากคำอธิบายเหล่านี้ ทำให้ทราบว่า **ทฤษฎีทวินาม** เป็นทฤษฎีสำหรับการขยาย $(A + B)^n$ ให้อยู่รูปผลบวก อีกนั่นหนึ่งทฤษฎีทวินามคือ

$$(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + \binom{n}{k}A^{n-k}B^k + \dots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + B^n \quad (4.2)$$

นอกจากนี้ ยังเรียก $\binom{n}{k}$ ว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficient) มีอีกวิธีหนึ่งที่ใช้คำนวณสัมประสิทธิ์ทวินามของ $(A + B)^n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ และจัดแถวสามเหลี่ยมในตารางที่ 4.2 ดังนี้

ตารางที่ 4.2 สามเหลี่ยมของปาสคาล

n	สัมประสิทธิ์ทวินาม					
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

ถ้าพิจารณาจากตารางจะเห็นว่าแต่ละแถวเริ่มต้นจะจบด้วย 1 สำหรับสมาชิกตัวอื่นๆในแถวหาค่าได้โดยจำนวน 2 จำนวน

เราเรียกแถวสามเหลี่ยมนี้ว่า สามเหลี่ยมของปาสคาล (Pascal's triangle) เราใช้สามเหลี่ยมของปาสคาลกับสัมประสิทธิ์ทวินามที่มีค่าสูงมากกว่า 6 ได้ โดยเพิ่มแถวในตารางเช่น เพิ่ม $n = 7$

4.2 หลักการสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ด้วยวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

แนวความคิดในการสร้างปาสคาลเมตริกซ์ด้วยวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) ได้มาจากทฤษฎีทวินาม (Binomial theorem) และสามารถเขียนได้ตามสมการที่ (4.3) ดังนี้

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (4.3)$$

เมื่อ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficients)

จากความสัมพันธ์ระหว่างระนาบเอส (s plane) และระนาบแซด (z plane) ด้วยหลักการวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) มีคุณสมบัติตามนี้

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (4.4)$$

เมื่อเราพิจารณาวงจรกรองสัญญาณอนาล็อก (Analog filter) และเราสามารถเขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามสมการที่ (4.5) ดังนี้

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i s^i}{\sum_{i=0}^N B_i s^i} \quad (4.5)$$

โดยที่ A_i และ B_i เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่และ N คือจำนวนลำดับ (Order)

ในส่วนของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล (Digital filter) เราสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามนี้

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}} \quad (4.6)$$

โดยที่ a_i และ b_i เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.4) และ (4.5) จะได้ว่า

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]^i}{\sum_{i=0}^N B_i \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]^i} = \frac{\sum_{i=0}^N A_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i}}{\sum_{i=0}^N B_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i}} \quad (4.7)$$

ในสมการที่ (4.7) โดยเราจะพิจารณาเฉพาะในทอมของตัวเศษ (Numerator)

$$\sum_{i=0}^N A_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i} = \sum_{i=0}^N A_i \left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k z^{-k} \sum_{k=0}^{N-i} \binom{N-i}{k} z^{-k} \right] \quad (4.8)$$

ในส่วนของทอมทวินาม (Binomial) นี้เราสามารถแจกแจงทางคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k z^{-k} \sum_{k=0}^{N-i} \binom{N-i}{k} z^{-k} &= 1 + \left[-\binom{i}{1} + \binom{N-i}{1} \right] z^{-1} \\ &+ \left[\binom{i}{2} - \binom{N-i}{1} \binom{i}{1} + \binom{N-i}{2} \right] z^{-2} \\ &+ \left[-\binom{i}{3} + \binom{N-i}{1} \binom{i}{2} - \binom{N-i}{2} \binom{i}{1} + \binom{N-i}{3} \right] z^{-3} \\ &+ \left[\binom{i}{4} - \binom{N-i}{1} \binom{i}{3} + \binom{N-i}{2} \binom{i}{2} - \binom{N-i}{3} \binom{i}{1} + \binom{N-i}{4} \right] z^{-4} \\ &+ \dots + \left[\binom{i}{k} (-1)^k + \sum_{n=1}^{k-1} \binom{N-i}{n} \binom{i}{k-n} (-1)^{k-n} + \binom{N-i}{k} \right] z^{-k} \end{aligned} \quad (4.9)$$

จัดรูปสมการที่ (4.8) และเปลี่ยนตัวแปรครรรชนีใหม่จะให้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.6) และ (4.7)

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^N A_i [P_{i,j}] z^{-i} \quad (4.10)$$

เมื่อกำหนดให้ $[P_{i,j}]$ เป็นปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix)

$$P_{i,j} = \sum_{n=0}^i \binom{N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{i-n} \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$= \binom{j}{i} (-1)^i + \sum_{n=1}^{i-1} \binom{N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{i-n} + \binom{N-j}{i} \quad (4.11)$$

โดยที่ i, j คือจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์

ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณดิจิทัลคำนวณได้จากผลคูณระหว่างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) กับค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณอนาลอกได้ดังนี้

$$[a_i] = [P_{i,j}] [A_i] \quad (4.12)$$

4.3 การแปลงความถี่ (Frequency transformations)

การแปลงความถี่ (Frequency transformations) ของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำต้นแบบไปเป็นความถี่ของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่สูง, ผ่านแถบความถี่, กำจัดแถบความถี่ในอนาลอกโดเมนโดยมีความสัมพันธ์ของการแปลงความถี่จากสมการที่ (4.13) ถึงสมการที่ (4.16) และในสมการที่ (4.17) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความถี่อนาลอกโดเมนกับความถี่ดิจิทัลโดเมน การแปลงสัญญาณผ่านความถี่ต่ำต้นแบบไปเป็นสัญญาณผ่านความถี่ต่ำในอนาลอกโดเมน

$$s = \frac{s}{\Omega_c} \quad (4.13)$$

การแปลงสัญญาณผ่านความถี่ต่ำต้นแบบไปเป็นสัญญาณผ่านความถี่สูงในอนาลอกโดเมน

$$s = \frac{\Omega_c}{s} \quad (4.14)$$

การแปลงสัญญาณผ่านความถี่ต่ำต้นแบบไปเป็นสัญญาณผ่านแถบความถี่ในอนาลอกโดเมน

$$s = \frac{s^2 + \Omega_{c1}\Omega_{c2}}{s(\Omega_{c2} - \Omega_{c1})} \quad (4.15)$$

การแปลงสัญญาณผ่านความถี่ต่ำดับแบบไปเป็นสัญญาณกำจัดแถบความถี่ในอนาลอกโดเมน

$$s = \frac{s(\Omega_{c2} - \Omega_{c1})}{s^2 + \Omega_{c1}\Omega_{c2}} \quad (4.16)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความถี่อนาลอกโดเมนกับความถี่ดิจิทัลโดเมนด้วยวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) โดยมีความสัมพันธ์ในรูปของฟังก์ชันแทนเจนต์ได้ตามสมการที่ (4.17) ดังนี้

$$\Omega = \tan \frac{\omega T}{2} \quad (4.17)$$

4.4 หลักการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ

เมื่อเราพิจารณาวงจรกรองสัญญาณอนาลอก (Analog filter) และสามารถเขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามสมการที่ (4.18) ดังนี้

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_Ns^N}{B_0 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_Ns^N} \quad (4.18)$$

และฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัล (Digital filter) เราสามารถเขียนสมการได้ว่า

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Nz^{-N}} \quad (4.19)$$

เมื่อนำสมการที่ (4.4) และ (4.17) แทนลงในสมการที่ (4.13) ก็จะเป็นการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงถี่ (Frequency transformations) ของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำดับแบบอนาลอกโดเมนไปเป็นวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำในดิจิทัลโดเมนได้ตามสมการที่ (4.21)

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \bigg/ \tan \frac{\omega_c T}{2} = \cot \left(\frac{\omega_c T}{2} \right) \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (4.20)$$

เมื่อ $T = 1/F_s$ และ $\omega_c = 2\pi f_c$ จะได้

$$s = \cot\left(\frac{\pi f_c}{F_s}\right) \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (4.21)$$

โดยที่ f_c คือความถี่คัตออฟ (Cutoff frequency)

f_s คือความถี่สุ่ม (Sampling frequency)

สมมุติว่ากรณีที่มีลำดับ $N = 2$ จะเห็นได้ว่าเมื่อนำสมการที่ (4.21) แทนลงในสมการที่ (4.18) โดยเราพิจารณาเฉพาะตัวเศษและสามารถเขียนสมการได้ใหม่ว่า

$$A_0 + A_1s + A_2s^2 = A_0 + A_1\left(c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + A_2\left(c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 \quad (4.22)$$

ซึ่งผลจากการคำนวณตามสมการที่ (4.22) สามารถจัดสมการให้อยู่ในรูปของโพลิโนเมียล (Polynomial) ได้ตามสมการที่ (4.23) ดังนี้

$$A_0 + A_1s + A_2s^2 = (A_0 + A_1c + A_2c^2)z^2 + (2A_0 - 2A_2c^2)z + (A_0 - A_1c + A_2c^2) \quad (4.23)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบระหว่างสมการที่ (4.23) และสมการที่ (4.19) ก็จะพบว่า

$$a_0 = A_0 + A_1c + A_2c^2$$

$$a_1 = 2A_0 - 2A_2c^2$$

$$a_2 = A_0 - A_1c + A_2c^2 \quad (4.24)$$

จากสมการที่ (4.24) เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ก็ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

จากสมการที่ (4.12) ที่ผ่านมานั้นเป็นเพียงการแปลงโดเมน S-Z ดังนั้นในสมการที่ (4.25) จึงเป็นการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่และเราสามารถเขียนสมการใหม่จะได้ว่า

$$[a_i] = [P_{i,j}] [\tilde{A}_i] = [P_{i,j}] [Aux_{i,j}] [A_i] \quad (4.26)$$

โดยที่ $[\tilde{A}_i]$ เป็นผลของการคูณระหว่างเมตริกซ์ช่วย (Auxiliary matrix) และค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณอนาล็อกที่อยู่ในรูปเมตริกซ์ $[A_i]$ ซึ่งเมตริกซ์ช่วย (Auxiliary matrix) นั้นมีผลมาจากการแปลงความถี่ (Frequency transformations) นั้นเอง

แต่ในกรณีที่ลำดับสูงขึ้นไปเพื่อความสะดวกในการออกแบบเราจะสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำโดยมีขนาด $(N+1) \times (N+1)$ ได้จากสมการที่ (4.11) แต่สำหรับในกรณีของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่และวงจรรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่สามารถสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ที่มีขนาด $(2N+1) \times (2N+1)$

$$[P_{i,j}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{N}{1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{N}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{N}{N} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{N}{N} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

สำหรับแถวแรกของปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix)

$$P_{0,j} = \sum_{n=0}^0 \binom{N-j}{n} \binom{j}{0-n} (-1)^{0-n} = 1 \quad (4.28)$$

ในส่วนคอลัมน์แรกของปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix)

$$P_{i,0} = \binom{N}{i} \quad (4.29)$$

และองค์ประกอบต่างๆของปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix)

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1} - P_{i-1,i} \quad (4.30)$$

ในส่วนของเมตริกซ์ช่วย (Auxiliary matrix) สำหรับวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำ เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปสมการที่ (4.31) จะได้ว่า

$$Aux_{i,j}^{(LP)} = \begin{cases} c^i & ; i = j \\ 0 & ; \text{others} \end{cases} \quad (4.31)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ตามสมการที่ (4.32) ดังนี้

$$[Aux_{i,j}^{(LP)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^N \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

สำหรับการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่ (Frequency transformations) ของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำต้นแบบอนาลอกโดเมนไปเป็นวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่สูงในดิจิทัลโดเมนโดยนำสมการที่ (4.4) และ (4.17) แทนลงในสมการที่ (4.14) จะได้ว่า

$$s = k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (4.33)$$

เมื่อ $k = \tan \frac{\pi f_c}{F_s}$

สมมติว่ากรณีที่มีลำดับ $N = 2$ จะเห็นได้ว่าเมื่อนำสมการที่ (4.33) แทนลงในสมการที่ (4.18) โดยเราพิจารณาเฉพาะตัวเศษและสามารถเขียนสมการได้ใหม่ว่า

$$A_0 + A_1s + A_2s^2 = A_0 + A_1 \left(k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + A_2 \left(c \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^2 \quad (4.34)$$

ซึ่งผลจากการคำนวณตามสมการที่ (4.34) สามารถจัดสมการให้อยู่ในรูปของโพลิโนเมียล (Polynomial) ได้ตามสมการที่ (4.35) ดังนี้

$$A_0 + A_1s + A_2s^2 = (A_0 + A_1k + A_2k^2)z^2 + (-2A_0 + 2A_2k^2)z + (A_0 - A_1k + A_2k^2) \quad (4.35)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบระหว่างสมการที่ (4.35) และสมการที่ (4.19) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 + A_1 k + A_2 k^2 \\ a_1 &= -2A_0 + 2A_2 k^2 \\ a_2 &= A_0 - A_1 k + A_2 k^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

จากสมการที่ (4.36) เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ก็จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

แต่ในกรณีที่ลำดับสูงขึ้นไปเพื่อความสะดวกในการออกแบบเราสามารถสร้างปาสคาลเมทริกซ์ (Pascal matrix) ของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่สูงได้เหมือนกับวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำจากสมการที่ (4.28) ถึงสมการที่ (4.30)

ในส่วนของเมทริกซ์ช่วย (Auxiliary matrix) สำหรับวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่สูงเราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปสมการที่ (4.38) จะได้ว่า

$$Aux_{i,j}^{(HP)} = \begin{cases} k^{N-i} & ; i = N - j \\ 0 & ; others \end{cases} \quad (4.38)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ตามสมการที่ (4.39) ดังนี้

$$[Aux_{i,j}^{(HP)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k^N \\ 0 & 0 & 0 & k^{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & k^{N-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

สำหรับการแปลงโคเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่ (Frequency transformations) ของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำต้นแบบอนาล็อกโคเมนไปเป็นวงจรกรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ในดิจิทัลโคเมนให้นำสมการที่ (4.4) และ (4.17) แทนลงในสมการที่ (4.15) จะได้ว่า

$$s = \hat{c} \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \hat{k} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right] \quad (4.40)$$

เมื่อ $\hat{k} = k_1 k_2$ และ $\hat{c} = 1/k_2 - k_1$ โดยที่ $k_1 = \tan \frac{\pi f_{c1}}{F_s}$ และ $k_2 = \tan \frac{\pi f_{c2}}{F_s}$

สมมติว่ากรณีที่มีลำดับ $N = 2$ จะเห็นได้ว่าเมื่อนำสมการที่ (4.40) แทนลงในสมการที่ (4.18) โดยเราพิจารณาเฉพาะตัวเศษและสามารถเขียนสมการได้ใหม่ว่า

$$A_0 + A_1 s + A_2 s^2 = A_0 + A_1 \left(\frac{\hat{c}(1 - z^{-1})^2 + \hat{c} \hat{k}(1 + z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})} \right) + A_2 \left(\frac{\hat{c}(1 - z^{-1})^2 + \hat{c} \hat{k}(1 + z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})} \right)^2 \quad (4.41)$$

ซึ่งผลจากการคำนวณตามสมการที่ (4.41) สามารถจัดสมการให้อยู่ในรูปของโพลิโนเมียล (Polynomial) ได้ตามสมการที่ (4.42) ดังนี้

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 s + A_2 s^2 &= (A_0 + A_1(\hat{c} + \hat{c} \hat{k}) + A_2(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2 \hat{k} + \hat{c}^2 \hat{k}^2))z^4 \\ &+ (A_1(-2\hat{c} + 2\hat{c} \hat{k}) + A_2(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2 \hat{k}^2))z^3 \\ &+ (-2A_0 + A_2(6\hat{c}^2 - 4\hat{c}^2 \hat{k} + 6\hat{c}^2 \hat{k}^2))z^2 \\ &+ (A_1(2\hat{c} - 2\hat{c} \hat{k}) + A_2(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2 \hat{k}^2))z \\ &+ (A_0 + A_1(-\hat{c} - \hat{c} \hat{k}) + A_2(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2 \hat{k} + \hat{c}^2 \hat{k}^2)) \end{aligned} \quad (4.42)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบระหว่างสมการที่ (4.42) และสมการที่ (4.19) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}
 a_0 &= A_0 + A_1(\hat{c} + \hat{c} \hat{k}) + A_2(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2 \hat{k} + \hat{c}^2 \hat{k}^2) \\
 a_1 &= A_1(-2\hat{c} + 2\hat{c} \hat{k}) + A_2(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2 \hat{k}^2) \\
 a_2 &= -2A_0 + A_2(6\hat{c}^2 - 4\hat{c}^2 \hat{k} + 6\hat{c}^2 \hat{k}^2) \\
 a_3 &= A_1(2\hat{c} - 2\hat{c} \hat{k}) + A_2(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2 \hat{k}^2) \\
 a_4 &= A_0 + A_1(-\hat{c} - \hat{c} \hat{k}) + A_2(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2 \hat{k} + \hat{c}^2 \hat{k}^2)
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

จากสมการที่ (4.43) เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกส์ก็จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{k}^2 \\ 0 & \hat{k} & 0 \\ 1 & 0 & 2\hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

จากสมการที่ (4.44) ซึ่งจะเห็นได้ว่าเราสามารถแบ่งเมตริกส์ช่วย (Auxiliary matrix) ของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ออกเป็นสองเมตริกส์ย่อยได้ตามนี้

$$[Aux_{i,j}] = [Aux 1_{i,j}] [Aux 2_{i,j}] \tag{4.45}$$

เมื่อ $[Aux 1_{i,j}]$ มีขนาด $(2N + 1) \times (N + 1)$ และ $[Aux 2_{i,j}]$ มีขนาด $(N + 1) \times (N + 1)$

แต่ในกรณีที่กำลังสูงขึ้นไปเพื่อความสะดวกในการออกแบบเราสามารถสร้างปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix) ของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ได้เหมือนกับวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำจากสมการที่ (4.28) ถึงสมการที่ (4.30) แต่มีขนาดเป็น $(2N + 1) \times (2N + 1)$

ในส่วนนี้เป็นเมตริกส์ย่อย $[Aux 1_{i,j}]$, $[Aux 2_{i,j}]$ เราสามารถสร้างเมตริกส์ได้ตามสมการที่ (4.46) และสมการที่ (4.47) ตามลำดับ

$$Aux\ 1_{i,j}^{(BP)} = \frac{j! \hat{k}^{(j+N-i)/2}}{\left(\frac{j+N-i}{2}\right)! \left(\frac{i+j-N}{2}\right)!} \quad (4.46)$$

โดยที่ $i = 0, 1, 2, \dots, 2N$ และ $j = 0, 1, 2, \dots, N$
และ $[Aux\ 2_{i,j}]$ เราสามารถหาได้จาก

$$Aux\ 2_{i,j}^{(BP)} = \begin{cases} \hat{c}^i & ; i = j \\ 0 & ; \text{others} \end{cases} \quad (4.47)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกส์ได้ตามสมการที่ (4.48) ดังนี้

$$[Aux\ 2_{i,j}^{(BP)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{c}^N \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

สำหรับการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่ (Frequency transformations) ของวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำต้นแบบอนาล็อกโดเมนไปเป็นวงจรรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่ในดิจิตอลโดเมนให้นำสมการที่ (4.4) และ (4.17) แทนลงในสมการที่ (4.16) จะได้ว่า

$$s = 1/\hat{c} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \hat{k} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] \quad (4.49)$$

สมมติว่ากรณีที่มีลำดับ $N = 2$ จะเห็นได้ว่าเมื่อนำสมการที่ (4.49) แทนลงในสมการที่ (4.18) โดยเราพิจารณาเฉพาะตัวเศษและสามารถเขียนสมการได้ใหม่ว่า

$$A_0 + A_1 s + A_2 s^2 = A_0 + A_1 \left(\frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{\hat{c}(1-z^{-1})^2 + \hat{c}\hat{k}(1+z^{-1})^2} \right) + A_2 \left(\frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{\hat{c}(1-z^{-1})^2 + \hat{c}\hat{k}(1+z^{-1})^2} \right)^2 \quad (4.50)$$

ซึ่งผลจากการคำนวณตามสมการที่ (4.50) สามารถจัดสมการให้อยู่ในรูปของโพลิโนเมียล (Polynomial) ได้ตามสมการที่ (4.51) ดังนี้

$$\begin{aligned}
 A_0 + A_1 s + A_2 s^2 &= (A_0(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2\hat{k} + \hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(\hat{c} + \hat{c}\hat{k}) + A_2)z^4 \\
 &+ (A_0(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(-2\hat{c} + 2\hat{c}\hat{k}))z^3 \\
 &+ (A_0(6\hat{c}^2 - 4\hat{c}^2\hat{k} + 6\hat{c}^2\hat{k}^2) - 2A_2)z^2 \\
 &+ (A_0(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(2\hat{c} - 2\hat{c}\hat{k}))z \\
 &+ (A_0(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2\hat{k} + \hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(-\hat{c} - \hat{c}\hat{k}) + A_2) \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบระหว่างสมการที่ (4.51) และสมการที่ (4.19) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}
 a_0 &= A_0(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2\hat{k} + \hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(\hat{c} + \hat{c}\hat{k}) + A_2 \\
 a_1 &= A_0(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(-2\hat{c} + 2\hat{c}\hat{k}) \\
 a_2 &= A_0(6\hat{c}^2 - 4\hat{c}^2\hat{k} + 6\hat{c}^2\hat{k}^2) - 2A_2 \\
 a_3 &= A_0(-4\hat{c}^2 + 4\hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(2\hat{c} - 2\hat{c}\hat{k}) \\
 a_4 &= A_0(\hat{c}^2 + 2\hat{c}^2\hat{k} + \hat{c}^2\hat{k}^2) + A_1(-\hat{c} - \hat{c}\hat{k}) + A_2 \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

จากสมการที่ (4.52) เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกส์ก็ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k} & 0 \\ 2\hat{k} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

จากสมการที่ (4.54) ซึ่งจะเห็นได้ว่าเราสามารถแบ่งเมตริกซ์ช่วย (Auxiliary matrix) ของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ออกเป็นสองเมตริกซ์ย่อยได้ตามนี้

$$[Aux_{i,j}] = [Aux 1_{i,j}] [Aux 2_{i,j}] \quad (4.54)$$

เมื่อ $[Aux 1_{i,j}]$ มีขนาด $(2N + 1) \times (N + 1)$ และ $[Aux 2_{i,j}]$ มีขนาด $(N + 1) \times (N + 1)$

แต่ในกรณีที่ลำดับสูงขึ้นไปเพื่อความสะดวกในการออกแบบเราสามารถสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ของวงจรรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่ได้เหมือนกับวงจรรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำจากสมการที่ (4.28) ถึงสมการที่ (4.30) แต่มีขนาดเป็น $(2N + 1) \times (2N + 1)$

ในส่วนนี้เป็นเมตริกซ์ย่อย $[Aux 1_{i,j}]$, $[Aux 2_{i,j}]$ เราสามารถสร้างเมตริกซ์ได้ตามสมการที่ (4.55) และสมการที่ (4.56) ตามลำดับ

$$Aux 1_{i,j}^{(BS)} = \frac{(N-j)! \hat{k}^{N-(i+j)/2}}{N - \left(\frac{i+j}{2}\right)! \left(\frac{i-j}{2}\right)!} \quad (4.55)$$

และ $[Aux 2_{i,j}]$ เราสามารถหาได้จาก

$$Aux 2_{i,j}^{(BS)} = \begin{cases} \hat{c}^{N-i} & ; i = j \\ 0 & ; others \end{cases} \quad (4.56)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ตามสมการที่ (4.57) ดังนี้

$$[Aux 2_{i,j}^{(BS)}] = \begin{bmatrix} \hat{c}^N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c}^{N-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}^{N-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

4.5 ตัวอย่างและผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ

ตัวอย่างการออกแบบเป็นการแปลงวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกต้นแบบไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลตามหลักการ ไปลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) พร้อมการแปลงความถี่ (Frequency Transformations) โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ซึ่งได้ออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่ต่ำ ผ่านความถี่สูง ผ่านแถบความถี่ กำจัดแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆแบบบัตเตอร์เวิร์ทโดยกำหนดให้ช่วงแถบผ่านความถี่ต่ำ 30 Hz ผ่านความถี่สูง 50 Hz ความถี่สุม 250 Hz และสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังนี้

$$H(s) = \frac{1}{s^n + B_{n-1}s^{n-1} + \dots + B_n s^n + 1} \quad (4.58)$$

ตารางที่ 4.3 สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน

n	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
2	1.4142						
4	2.6131	3.4142	2.6131				
6	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637		
8	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1371	5.1258

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่ต่ำ 2 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 1}$$

จะได้ว่า $c = \cot(\pi \times 50) / 250 = 1.3764$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4142 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8409 \\ -1.7889 \\ 0.9479 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_n จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.2066 + 0.4131z^{-1} + 0.2066z^{-2}}{1 - 0.3695z^{-1} + 0.1958z^{-2}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่สูง 2 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 1}$$

จะได้ว่า $k = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1568 \\ 0 & 0.3959 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1568 \\ 0 & 0.3959 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4142 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7167 \\ -1.6865 \\ 0.5968 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.5825z^{-1} - 1.1650z^{-2} + 0.5825z^{-3}}{1 - 0.9824z^{-1} + 0.3476z^{-2}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านแถบความถี่ 4 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 1}$$

จะได้ว่า $k_1 = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$, $k_2 = \tan(\pi \times 50) / 250 = 0.7265$

$$\hat{c} = k_1 k_2 = 0.2876 \quad \text{และ} \quad c = 1 / k_2 - k_1 = 3.0247$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0827 \\ 0 & 0.2877 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5753 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0827 \\ 0 & 0.2877 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5753 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4142 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.6770 \\ -39.6605 \\ 46.9072 \\ -27.4724 \\ 10.6611 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.0461 - 0.0923z^{-2} + 0.0461z^{-4}}{1 - 1.8296z^{-1} + 2.1674z^{-2} - 1.2674z^{-3} + 0.4918z^{-4}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลลำดับความถี่ 4 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.414214s + 1}$$

จะได้ว่า $k_1 = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$, $k_2 = \tan(\pi \times 50) / 250 = 0.7265$

$$\hat{k} = k_1 k_2 = 0.2876 \quad \text{และ} \quad \hat{c} = 1 / k_2 - k_1 = 3.0247$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0827 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2877 & 0 \\ 0.5753 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0827 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2877 & 0 \\ 0.5753 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.414214 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.1690 \\ -33.5664 \\ 48.9072 \\ -33.5664 \\ 15.1690 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.6770 \\ -39.6605 \\ 46.9072 \\ -27.4724 \\ 10.6611 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.6998 - 1.5485z^{-1} + 2.2562z^{-2} - 1.5485z^{-3} + 0.6998z^{-4}}{1 - 1.8296z^{-1} + 2.1674z^{-2} - 1.2674z^{-3} + 0.4918z^{-4}}$$

วงจรถอดสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่ต่ำ 4 ลำดับ
 เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

จะได้ว่า $c = \cot(\pi \times 50) / 250 = 1.3764$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5889 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5889 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.6131 \\ 3.4142 \\ 2.6131 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.4670 \\ -16.7893 \\ 14.5972 \\ -3.9216 \\ 0.6466 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.0466 + 0.1863z^{-1} + 0.2795z^{-2} + 0.1863z^{-3} + 0.0466z^{-4}}{1 - 0.7821z^{-1} + 0.6800z^{-2} - 0.1827z^{-3} + 0.0301z^{-4}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่สูง 4 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

จะได้ว่า $k = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0246 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0621 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0246 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0621 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.6131 \\ 3.4142 \\ 2.6131 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7566 \\ -5.6465 \\ 5.0770 \\ -2.1569 \\ 0.3630 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.3628 - 1.4511z^{-1} + 2.1766z^{-2} - 1.4511z^{-3} + 0.3628z^{-4}}{1 - 2.0484z^{-1} + 1.8418z^{-2} - 0.7824z^{-3} + 0.1317z^{-4}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านแถบความถี่ 8 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

จะได้ว่า $k_1 = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$, $k_2 = \tan(\pi \times 50) / 250 = 0.7265$

$$\hat{k} = k_1 k_2 = 0.2876 \quad \text{และ} \quad \hat{c} = 1 / k_2 - k_1 = 3.0247$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0068 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0238 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0827 & 0 & 0.0952 \\ 0 & 0.2877 & 0 & 0.2482 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5753 & 0 & 0.4965 \\ 0 & 1 & 0 & 0.8630 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.1506 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.6716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 83.6975 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0068 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0238 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0827 & 0 & 0.0952 \\ 0 & 0.2877 & 0 & 0.2482 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5753 & 0 & 0.4965 \\ 0 & 1 & 0 & 0.8630 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.1506 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.6716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 83.6975 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.6131 \\ 3.4142 \\ 2.6131 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = 1.0e + 003 \begin{bmatrix} 0.4474 \\ -1.6566 \\ 3.5252 \\ -4.8748 \\ 4.8811 \\ -3.4993 \\ 1.8145 \\ -0.6093 \\ 0.1183 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{(1.0e - 003)(2.2351 - 8.9405z^{-2} + 13.4108z^{-4} - 8.9405z^{-6} + 2.2351z^{-8})}{1 - 3.7027z^{-1} + 7.8793z^{-2} - 10.8958z^{-3} + 10.9099z^{-4} - 7.2814z^{-5} + 4.0557z^{-6} - 1.3619z^{-7} + 0.2644z^{-8}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลแก้แอมความถี่ 8 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613126s^3 + 3.414214s^2 + 2.613126s + 1}$$

จะได้ว่า $k_1 = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$, $k_2 = \tan(\pi \times 50) / 250 = 0.7265$

$$\hat{k} = k_1 k_2 = 0.2876 \quad \text{และ} \quad \hat{c} = 1 / k_2 - k_1 = 3.0247$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0068 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0238 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0952 & 0 & 0.0827 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2482 & 0 & 0.2877 & 0 \\ 0.4965 & 0 & 0.5753 & 0 & 1 \\ 0 & 0.8630 & 0 & 1 & 0 \\ 1.1506 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83.6975 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27.6716 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0068 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0238 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0952 & 0 & 0.0827 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2482 & 0 & 0.2877 & 0 \\ 0.4965 & 0 & 0.5753 & 0 & 1 \\ 0 & 0.8630 & 0 & 1 & 0 \\ 1.1506 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83.6975 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27.6716 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.613126 \\ 3.414214 \\ 2.613126 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = 1.0e + 003 \begin{bmatrix} 0.2301 \\ -1.0183 \\ 2.6105 \\ -4.3016 \\ 5.1055 \\ -4.3016 \\ 2.6105 \\ -1.0183 \\ 0.2301 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = 1.0e + 003 \begin{bmatrix} 0.4474 \\ -1.6566 \\ 3.5252 \\ -4.8748 \\ 4.8811 \\ -3.4993 \\ 1.8145 \\ -0.6093 \\ 0.1183 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.5143 - 2.2760z^{-1} + 5.8348z^{-2} - 9.1647z^{-3} + 11.4115z^{-4} - 9.1647z^{-5} + 5.8348z^{-6} - 2.2760z^{-7} + 0.5143z^{-8}}{1 - 3.7027z^{-1} + 7.8793z^{-2} - 10.8958z^{-3} + 10.9099z^{-4} - 7.2814z^{-5} + 4.0557z^{-6} - 1.3619z^{-7} + 0.2644z^{-8}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่ต่ำ 6 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1}$$

จะได้ว่า $c = \cot(\pi \times 50) / 250 = 1.3764$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 15 & 5 & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 15 & -5 & -1 & 3 & -1 & -5 & 15 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5889 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.9396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7988 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 15 & 5 & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 15 & -5 & -1 & 3 & -1 & -5 & 15 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5889 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.9396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7988 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3.8637 \\ 7.4641 \\ 9.1416 \\ 7.4641 \\ 3.8637 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 15 \\ 20 \\ 15 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96.9661 \\ -115.1570 \\ 126.5616 \\ -65.3870 \\ 25.5476 \\ -5.0183 \\ 0.4871 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_n จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.0103 + 0.0619z^{-1} + 0.1547z^{-2} + 0.2063z^{-3} + 0.1547z^{-4} + 0.0619z^{-5} + 0.0103z^{-6}}{1 - 1.1876z^{-1} + 1.3052z^{-2} - 0.6743z^{-3} + 0.2635z^{-4} - 0.0518z^{-5} + 0.050z^{-6}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่สูง 6 ลำดับ
 เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1}$$

จะได้ว่า $k = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 15 & 5 & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 15 & -5 & -1 & 3 & -1 & -5 & 15 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0039 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0097 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0246 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0621 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 15 & 5 & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 15 & -5 & -1 & 3 & -1 & -5 & 15 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0039 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0097 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0246 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0621 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3.8637 \\ 7.4641 \\ 9.1416 \\ 7.4641 \\ 3.8637 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \\ -20 \\ 15 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4920 \\ -13.9188 \\ 19.8389 \\ -15.9764 \\ 7.5697 \\ -1.9816 \\ 0.2226 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.2226 - 1.3357z^{-1} + 3.3393z^{-2} - 4.4524z^{-3} + 3.3393z^{-4} - 1.3357z^{-5} + 0.2226z^{-6}}{1 - 3.0986z^{-1} + 4.4165z^{-2} - 3.5566z^{-3} + 1.6852z^{-4} - 0.4411z^{-5} + 0.0496z^{-6}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านแถบความถี่ 12 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1}$$

จะได้ว่า $k_1 = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$, $k_2 = \tan(\pi \times 50) / 250 = 0.7265$

$$\hat{k} = k_1 k_2 = 0.2876 \quad \text{และ} \quad \hat{c} = 1 / k_2 - k_1 = 3.0247$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -10 \\ 66 & 44 & 26 & 12 & 2 & -4 & -6 & -4 & 2 & 12 & 26 & 44 & 66 \\ 220 & 110 & 40 & 2 & -12 & -10 & 0 & 10 & 12 & -2 & -40 & -110 & -220 \\ 495 & 165 & 15 & -27 & -17 & 5 & 15 & 5 & -17 & -27 & 15 & 165 & 495 \\ 792 & 132 & -48 & -36 & 8 & 20 & 0 & -20 & -8 & 36 & 48 & -132 & -792 \\ 924 & 0 & -84 & 0 & 28 & 0 & -20 & 0 & 28 & 0 & -84 & 0 & 924 \\ 792 & -132 & -48 & 36 & 8 & -20 & 0 & 20 & -8 & -36 & 48 & 132 & -792 \\ 495 & -165 & 15 & 27 & -17 & -5 & 15 & -5 & -17 & 27 & 15 & -165 & 495 \\ 220 & -110 & 40 & -2 & -12 & 10 & 0 & -10 & 12 & 2 & -40 & 110 & -220 \\ 66 & -44 & 26 & -12 & 2 & 4 & -6 & 4 & 2 & -12 & 26 & -44 & 66 \\ 12 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 & 10 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0020 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0068 & 0 & 0.0118 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0238 & 0 & 0.0342 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0827 & 0 & 0.0952 & 0 & 0.1027 \\ 0 & 0.2877 & 0 & 0.2482 & 0 & 0.2380 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5753 & 0 & 0.4965 & 0 & 0.4761 \\ 0 & 1 & 0 & 0.8630 & 0 & 0.8275 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.1506 & 0 & 1.2412 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.4383 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.7260 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.6716 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 83.6975 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 253.1573 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 765.7173 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -10 \\ 66 & 44 & 26 & 12 & 2 & -4 & -6 & -4 & 2 & 12 & 26 & 44 & 66 \\ 220 & 110 & 40 & 2 & -12 & -10 & 0 & 10 & 12 & -2 & -40 & -110 & -220 \\ 495 & 165 & 15 & -27 & -17 & 5 & 15 & 5 & -17 & -27 & 15 & 165 & 495 \\ 792 & 132 & -48 & -36 & 8 & 20 & 0 & -20 & -8 & 36 & 48 & -132 & -792 \\ 924 & 0 & -84 & 0 & 28 & 0 & -20 & 0 & 28 & 0 & -84 & 0 & 924 \\ 792 & -132 & -48 & 36 & 8 & -20 & 0 & 20 & -8 & -36 & 48 & 132 & -792 \\ 495 & -165 & 15 & 27 & -17 & -5 & 15 & -5 & -17 & 27 & 15 & -165 & 495 \\ 220 & -110 & 40 & -2 & -12 & 10 & 0 & -10 & 12 & 2 & -40 & 110 & -220 \\ 66 & -44 & 26 & -12 & 2 & 4 & -6 & 4 & 2 & -12 & 26 & -44 & 66 \\ 12 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 & 10 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0020 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0068 & 0 & 0.0118 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0238 & 0 & 0.0342 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0827 & 0 & 0.0952 & 0 & 0.1027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2877 & 0 & 0.2482 & 0 & 0.2380 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5753 & 0 & 0.4965 & 0 & 0.4761 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.8630 & 0 & 0.8275 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.1506 & 0 & 1.2412 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.4383 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.7260 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.6716 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 83.6975 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 253.1573 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 765.7173 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3.8637 \\ 7.4641 \\ 9.1416 \\ 7.4641 \\ 3.8637 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} = 1.0e + 005 \begin{bmatrix} 0.0934 \\ -0.5199 \\ 1.5915 \\ -3.2978 \\ 5.0990 \\ -6.1141 \\ 5.8169 \\ -4.4074 \\ 2.6486 \\ -1.2334 \\ 0.4283 \\ -0.1006 \\ 0.0130 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_n จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{(1.0e - 005)(10.7066 - 64.2398z^{-2} + 160.5996z^{-4} - 214.1328z^{-6} + 160.5996z^{-8} - 64.2398z^{-10} + 10.7066z^{-12})}{1 - 5.5664z^{-1} + 17.0396z^{-2} - 35.3084z^{-3} + 54.5931z^{-4} - 65.4615z^{-5} + 62.2794z^{-6} - 47.1884z^{-7} + 28.3576z^{-8} - 13.2056z^{-9} + 4.5857z^{-10} - 1.0771z^{-11} + 0.1392z^{-12}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลกำลังความถี่ 12 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1}$$

จะได้ว่า $k_1 = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$, $k_2 = \tan(\pi \times 50) / 250 = 0.7265$

$$\hat{k} = k_1 k_2 = 0.2876 \quad \text{และ} \quad \hat{c} = 1 / k_2 - k_1 = 3.0247$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -10 \\ 66 & 44 & 26 & 12 & 2 & -4 & -6 & -4 & 2 & 12 & 26 & 44 & 66 \\ 220 & 110 & 40 & 2 & -12 & -10 & 0 & 10 & 12 & -2 & -40 & -110 & -220 \\ 495 & 165 & 15 & -27 & -17 & 5 & 15 & 5 & -17 & -27 & 15 & 165 & 495 \\ 792 & 132 & -48 & -36 & 8 & 20 & 0 & -20 & -8 & 36 & 48 & -132 & -792 \\ 924 & 0 & -84 & 0 & 28 & 0 & -20 & 0 & 28 & 0 & -84 & 0 & 924 \\ 792 & -132 & -48 & 36 & 8 & -20 & 0 & 20 & -8 & -36 & 48 & 132 & -792 \\ 495 & -165 & 15 & 27 & -17 & -5 & 15 & -5 & -17 & 27 & 15 & -165 & 495 \\ 220 & -110 & 40 & -2 & -12 & 10 & 0 & -10 & 12 & 2 & -40 & 110 & -220 \\ 66 & -44 & 26 & -12 & 2 & 4 & -6 & 4 & 2 & -12 & 26 & -44 & 66 \\ 12 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 & 10 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0118 & 0 & 0.0068 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0342 & 0 & 0.0238 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1027 & 0 & 0.0952 & 0 & 0.0827 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2380 & 0 & 0.2482 & 0 & 0.2877 & 0 \\ 0.4761 & 0 & 0.4965 & 0 & 0.5753 & 0 & 1 \\ 0 & 0.8275 & 0 & 0.8630 & 0 & 1 & 0 \\ 1.2412 & 0 & 1.1506 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4383 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7260 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 765.7173 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 253.1573 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 83.6975 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.6716 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -10 \\ 66 & 44 & 26 & 12 & 2 & -4 & -6 & -4 & 2 & 12 & 26 & 44 & 66 \\ 220 & 110 & 40 & 2 & -12 & -10 & 0 & 10 & 12 & -2 & -40 & -110 & -220 \\ 495 & 165 & 15 & -27 & -17 & 5 & 15 & 5 & -17 & -27 & 15 & 165 & 495 \\ 792 & 132 & -48 & -36 & 8 & 20 & 0 & -20 & -8 & 36 & 48 & -132 & -792 \\ 924 & 0 & -84 & 0 & 28 & 0 & -20 & 0 & 28 & 0 & -84 & 0 & 924 \\ 792 & -132 & -48 & 36 & 8 & -20 & 0 & 20 & -8 & -36 & 48 & 132 & -792 \\ 495 & -165 & 15 & 27 & -17 & -5 & 15 & -5 & -17 & 27 & 15 & -165 & 495 \\ 220 & -110 & 40 & -2 & -12 & 10 & 0 & -10 & 12 & 2 & -40 & 110 & -220 \\ 66 & -44 & 26 & -12 & 2 & 4 & -6 & 4 & 2 & -12 & 26 & -44 & 66 \\ 12 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 & 10 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0118 & 0 & 0.0068 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0342 & 0 & 0.0238 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1027 & 0 & 0.0952 & 0 & 0.0827 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2380 & 0 & 0.2482 & 0 & 0.2877 & 0 & 0 \\ 0.4761 & 0 & 0.4965 & 0 & 0.5753 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8275 & 0 & 0.8630 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.2412 & 0 & 1.1506 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4383 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7260 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 765.7173 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 253.1573 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 83.6975 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.6716 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3.8637 \\ 7.4641 \\ 9.1416 \\ 7.4641 \\ 3.8637 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = 1.0e + 005 \begin{bmatrix} 0.0349 \\ -0.2317 \\ 0.8503 \\ -2.1040 \\ 3.8718 \\ -5.5008 \\ 6.1767 \\ -5.5008 \\ 3.8718 \\ -2.1040 \\ 0.8503 \\ -0.2317 \\ 0.0349 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} = 1.0e + 005 \begin{bmatrix} 0.0934 \\ -0.5199 \\ 1.5915 \\ -3.2978 \\ 5.0990 \\ -6.1141 \\ 5.8169 \\ -4.4074 \\ 2.6486 \\ -1.2334 \\ 0.4283 \\ -0.1006 \\ 0.0130 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.3737 - 2.4807z^{-1} + 9.1039z^{-2} - 22.5268z^{-3} + 41.4540z^{-4} - 58.8951z^{-5} + 66.1317z^{-6} - 58.8951z^{-7} + 41.4540z^{-8} - 22.5268z^{-9} + 9.1039z^{-10} - 2.4807z^{-11} + 0.3737z^{-12}}{1 - 5.5664z^{-1} + 17.0396z^{-2} - 35.3084z^{-3} + 54.5931z^{-4} - 65.4615z^{-5} + 62.2794z^{-6} - 47.1884z^{-7} + 28.3576z^{-8} - 13.2056z^{-9} + 4.5857z^{-10} - 1.0771z^{-11} + 0.1392z^{-12}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่ต่ำ 8 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^8 + 5.1258s^7 + 13.1371s^6 + 21.8462s^5 + 25.6884s^4 + 21.8462s^3 + 13.1371s^2 + 5.1258s + 1}$$

จะได้ว่า $c = \cot(\pi \times 50) / 250 = 1.3764$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6075 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5889 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.9396 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.3578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.8799 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3764 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8944 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6075 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5889 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.9396 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.3578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.8799 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5.1258 \\ 13.1371 \\ 21.8462 \\ 25.6884 \\ 21.8462 \\ 13.1371 \\ 5.1258 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 28 \\ 56 \\ 70 \\ 56 \\ 28 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 440.1723 \\ -700.1219 \\ 917.2309 \\ -674.6139 \\ 382.7019 \\ -140.4958 \\ 36.1395 \\ -5.3925 \\ 0.3795 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.0023 + 0.0182 z^{-1} + 0.0636 z^{-2} + 0.1272 z^{-3} + 0.1590 z^{-4} + 0.1272 z^{-5} + 0.0636 z^{-6} + 0.0182 z^{-7} + 0.0023 z^{-8}}{1 - 1.5906 z^{-1} + 2.0838 z^{-2} - 1.5326 z^{-3} + 0.8694 z^{-4} - 0.3192 z^{-5} + 0.0821 z^{-6} - 0.0123 z^{-7} + 0.0009 z^{-8}}$$

วงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่สูง 8 ลำดับ

เมื่อมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{1}{s^8 + 5.1258s^7 + 13.1371s^6 + 21.8462s^5 + 25.6884s^4 + 21.8462s^3 + 13.1371s^2 + 5.1258s + 1}$$

จะได้ว่า $k = \tan(\pi \times 30) / 250 = 0.3959$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0039 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0097 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0246 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0621 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 28 & 14 & 4 & -2 & -4 & -2 & 4 & 14 & 28 \\ 56 & 14 & -4 & -6 & 0 & 6 & 4 & -14 & -56 \\ 70 & 0 & -10 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 & 70 \\ 56 & -14 & -4 & 6 & 0 & -6 & 4 & 14 & -56 \\ 28 & -14 & 4 & 2 & -4 & 2 & 4 & -14 & 28 \\ 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0039 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0097 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0246 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0621 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5.1258 \\ 13.1371 \\ 21.8462 \\ 25.6884 \\ 21.8462 \\ 13.1371 \\ 5.1258 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 28 \\ -56 \\ 70 \\ -56 \\ 28 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.3475 \\ -30.4466 \\ 59.3166 \\ -69.3739 \\ 52.7301 \\ 26.4884 \\ 8.5469 \\ -1.6137 \\ 0.1361 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(z) = \frac{0.1361 - 1.0888 z^{-1} + 3.8108 z^{-2} - 7.6216 z^{-3} + 9.5271 z^{-4} - 7.6216 z^{-5} + 3.8108 z^{-6} - 1.0888 z^{-7} + 0.1361 z^{-8}}{1 - 4.1438 z^{-1} + 8.0730 z^{-2} - 9.4418 z^{-3} + 7.1766 z^{-4} - 3.6051 z^{-5} + 1.1632 z^{-6} - 0.2196 z^{-7} + 0.0185 z^{-8}}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \\ b_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -12 & -14 & -16 \\ 120 & 90 & 64 & 42 & 24 & 10 & 0 & -6 & -8 & -6 & 0 & 10 & 24 & 42 & 64 & 90 & 120 \\ 560 & 350 & 196 & 90 & 24 & -10 & -20 & -14 & 0 & 14 & 20 & 10 & -24 & -90 & -196 & -350 & -560 \\ 1820 & 910 & 364 & 78 & -36 & -50 & -20 & 14 & 28 & 14 & -20 & -50 & -36 & 78 & 364 & 910 & 1820 \\ 4368 & 1638 & 364 & -78 & -120 & -34 & 36 & 42 & 0 & -42 & -36 & 34 & 120 & 78 & -364 & -1638 & -4368 \\ 8008 & 2002 & 0 & -286 & -88 & 66 & 64 & -14 & -56 & -14 & 64 & 66 & -88 & -286 & 0 & 2002 & 8008 \\ 11440 & 1430 & -572 & -286 & 88 & 110 & -20 & -70 & 0 & 70 & 20 & -110 & -88 & 286 & 572 & -1430 & -11440 \\ 12870 & 0 & -858 & 0 & 198 & 0 & -90 & 0 & 70 & 0 & -90 & 0 & 198 & 0 & -858 & 0 & 12870 \\ 11440 & -1430 & -572 & 286 & 88 & -110 & -20 & 70 & 0 & -70 & 20 & 110 & -88 & -286 & 572 & 1430 & -11440 \\ 8008 & -2002 & 0 & 286 & -88 & -66 & 64 & 16 & -56 & 14 & 64 & -66 & -88 & 286 & 0 & -2002 & 8008 \\ 4368 & -1638 & 364 & 78 & -120 & 34 & 36 & -42 & 0 & 42 & -36 & -34 & 120 & -78 & -364 & 1638 & -4368 \\ 1820 & -910 & 364 & -78 & -36 & 50 & -20 & -14 & 28 & -14 & -20 & 50 & -36 & -78 & 364 & -910 & 1820 \\ 560 & -350 & 196 & -90 & 24 & 10 & -20 & 14 & 0 & -14 & 20 & -10 & -24 & 90 & -196 & 350 & -560 \\ 120 & -90 & 64 & -42 & 24 & -10 & 0 & 6 & -8 & 6 & 0 & -10 & 24 & -42 & 64 & -90 & 120 \\ 16 & -14 & 12 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 & 10 & -12 & 14 & -16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0827 & 0 & 0.0952 & 0 & 0.1027 & 0 & 0.1103 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2877 & 0 & 0.2482 & 0 & 0.2380 & 0 & 0.2396 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5753 & 0 & 0.4965 & 0 & 0.4761 & 0 & 0.4793 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.8630 & 0 & 0.8275 & 0 & 0.8331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.1506 & 0 & 1.2412 & 0 & 1.3330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.4383 & 0 & 1.7377 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.7260 & 0 & 2.3169 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.0136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.3013 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.1486 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.6716 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 83.6975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 253.1573 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 765.7173 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2316.2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7005.3000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5.1258 \\ 13.1371 \\ 21.8462 \\ 25.6884 \\ 21.8462 \\ 13.1371 \\ 5.1258 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 28 \\ 0 \\ -56 \\ 0 \\ 70 \\ 0 \\ -56 \\ 0 \\ 28 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \\ b_{16} \end{bmatrix} = 1.0e+007 \begin{bmatrix} 0.0195 \\ -0.1452 \\ 0.5797 \\ -1.5819 \\ 3.2603 \\ -5.3300 \\ 7.1144 \\ -7.8804 \\ 7.3083 \\ -5.6888 \\ 3.7068 \\ -2.0037 \\ 0.8839 \\ -0.3091 \\ 0.0816 \\ -0.0147 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

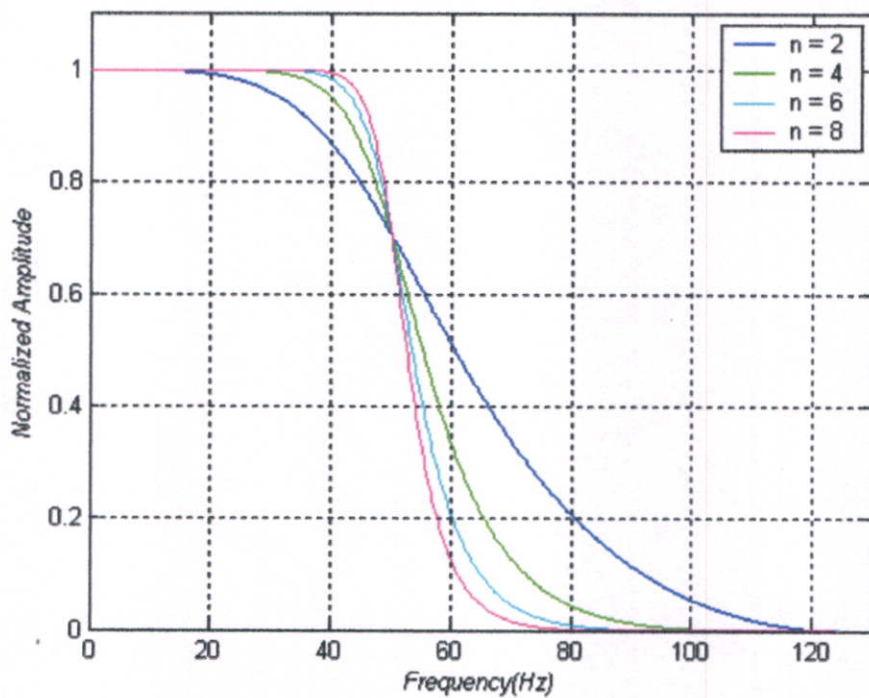
โดยปรกติเทอมของ b_n จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้]

$$H(z) = \frac{(1.0e-004)(0.1 - 0.4z^{-2} + 1.4z^{-4} - 2.9z^{-6} + 3.6z^{-8} - 2.9z^{-10} + 1.4z^{-12} - 0.4z^{-14} + 0.1z^{-16})}{1 - 7.4z^{-2} + 29.7z^{-4} - 81.1z^{-6} + 167.2z^{-8} - 273.3z^{-10} + 364.8z^{-12} - 404.1z^{-14} + 374.8z^{-16} - 291.7z^{-18} + 190.1z^{-20} - 102.6z^{-22} + 45.3z^{-24} - 15.6z^{-26} + 4.2z^{-28} - 0.8z^{-30} + 0.1z^{-32}}$$

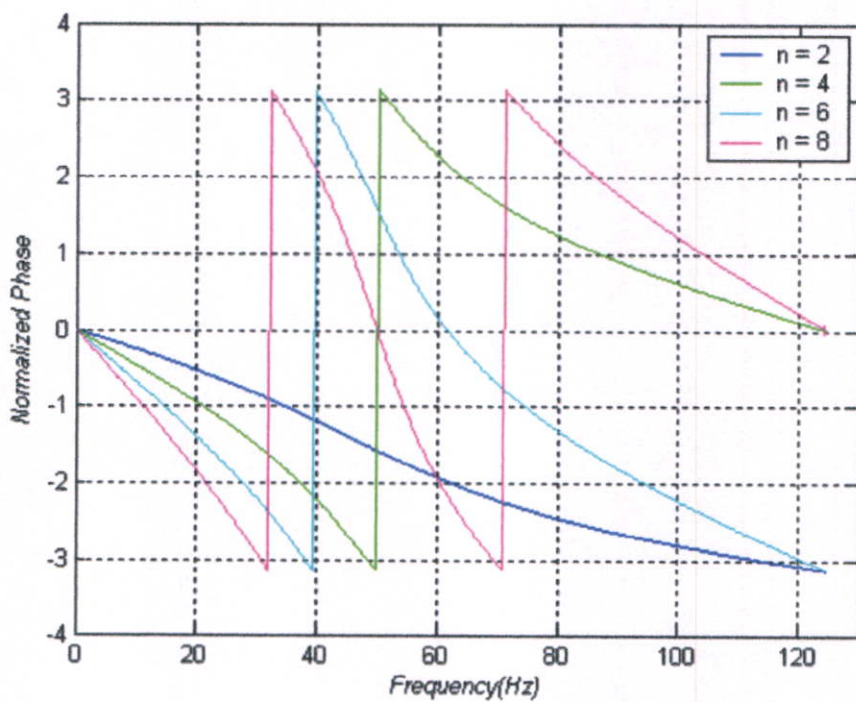
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{bmatrix} = 1.0e + 007 \begin{bmatrix} 0.0053 \\ -0.0469 \\ 0.2238 \\ -0.7296 \\ 1.7925 \\ -3.4836 \\ 5.5122 \\ -7.2168 \\ 7.8883 \\ -7.2168 \\ 5.5122 \\ -3.4836 \\ 1.7925 \\ -0.7296 \\ 0.2238 \\ -0.0469 \\ 0.0053 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \\ b_{16} \end{bmatrix} = 1.0e + 007 \begin{bmatrix} 0.0195 \\ -0.1452 \\ 0.5797 \\ -1.5819 \\ 3.2603 \\ -5.3300 \\ 7.1144 \\ -7.8804 \\ 7.3083 \\ -5.6888 \\ 3.7068 \\ -2.0037 \\ 0.8839 \\ -0.3091 \\ 0.0816 \\ -0.0147 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

โดยปรกติเทอมของ b_n จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

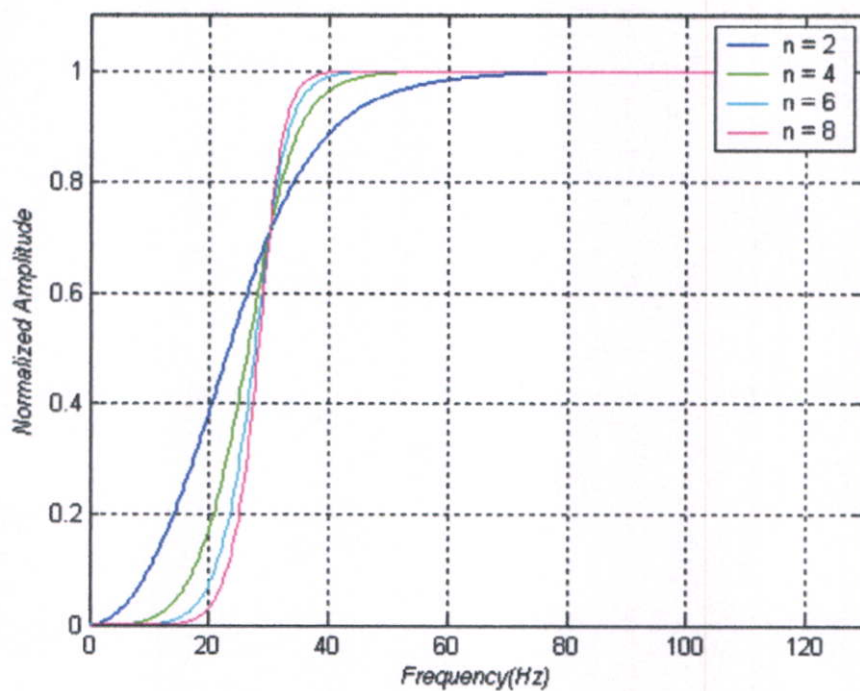
$$H(z) = \frac{0.3 - 2.4z^{-1} + 11.5z^{-2} - 37.4z^{-3} + 91.9z^{-4} - 178.6z^{-5} + 282.7z^{-6} - 370.1z^{-7} + 404.5z^{-8} - 370.1z^{-9} + 282.7z^{-10} - 178.6z^{-11} + 91.9z^{-12} - 37.4z^{-13} + 11.5z^{-14} - 2.4z^{-15} + 0.3z^{-16}}{1 - 7.4z^{-1} + 29.7z^{-2} - 81.1z^{-3} + 167.2z^{-4} - 273.3z^{-5} + 364.8z^{-6} - 404.1z^{-7} + 374.8z^{-8} - 291.7z^{-9} + 190.1z^{-10} - 102.6z^{-11} + 45.3z^{-12} - 15.6z^{-13} + 4.2z^{-14} - 0.8z^{-15} + 0.1z^{-16}}$$



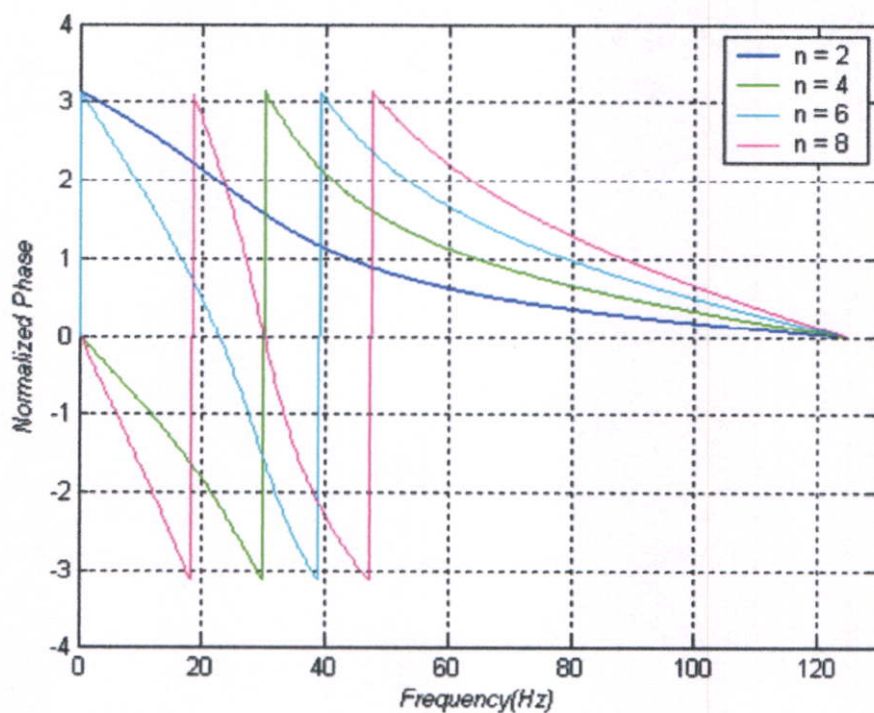
รูปที่ 4.1 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำที่ลำดับต่างๆ



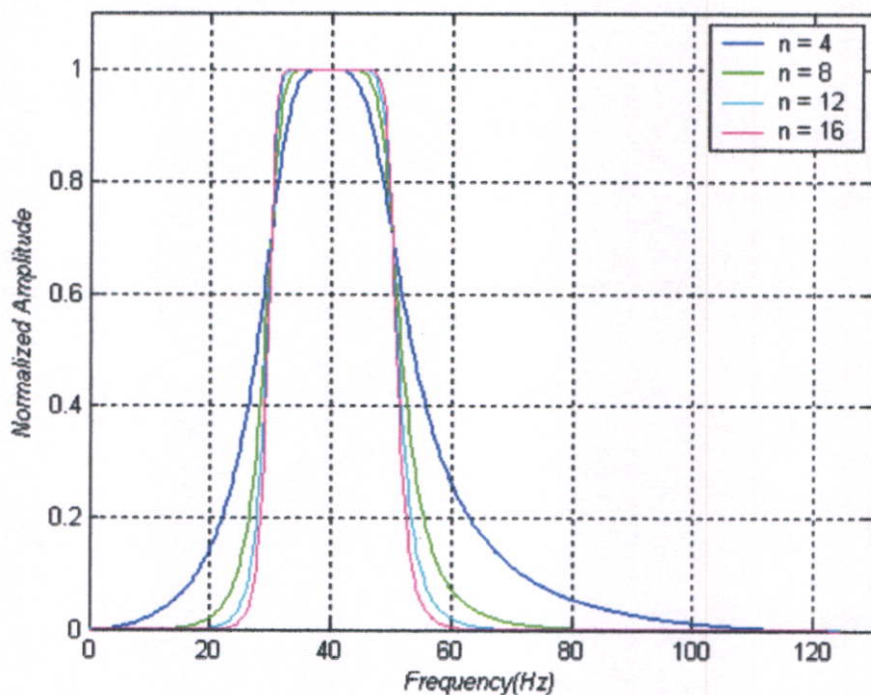
รูปที่ 4.2 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่ต่ำที่ลำดับต่างๆ



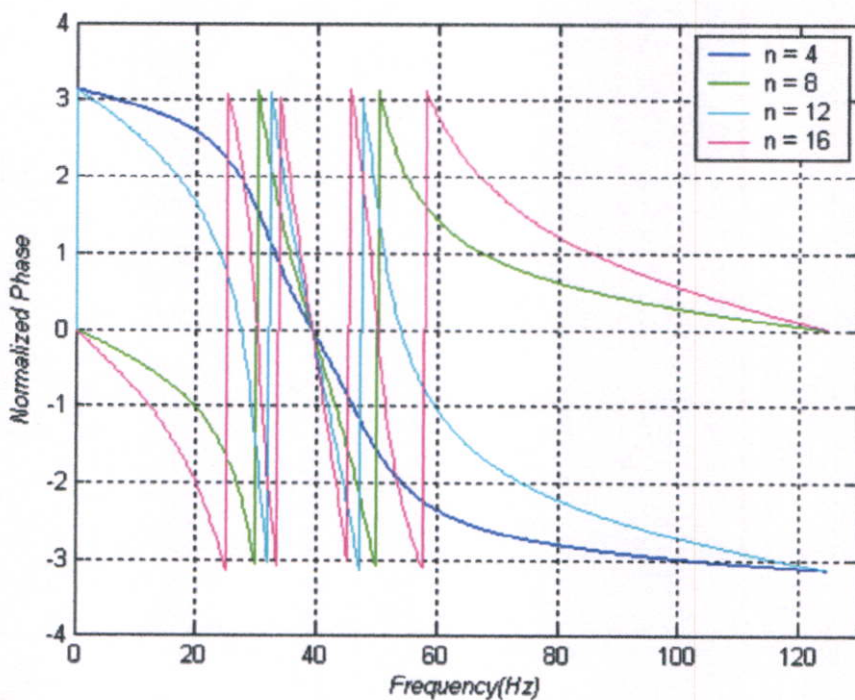
รูปที่ 4.3 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่สูงที่ลำดับต่างๆ



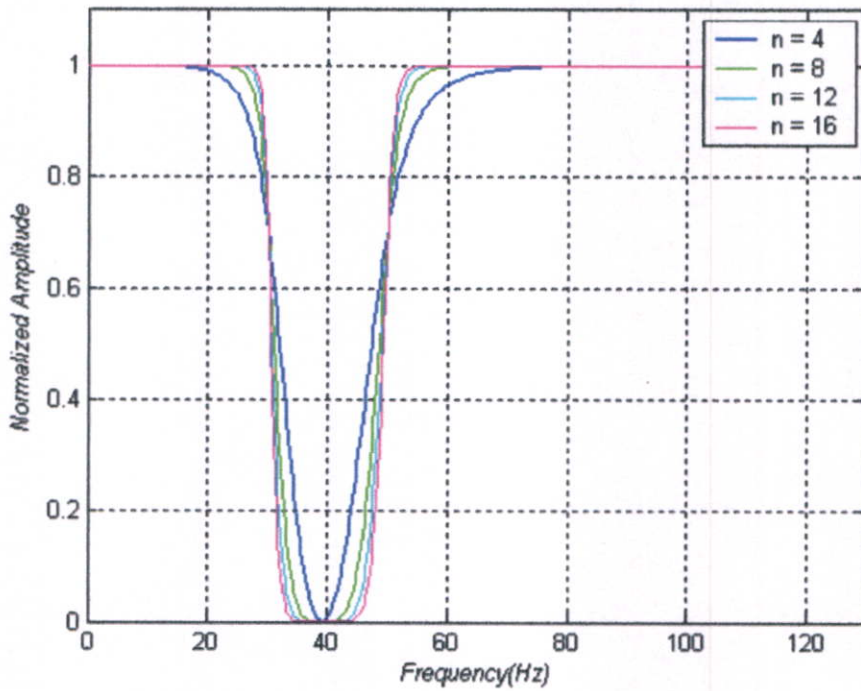
รูปที่ 4.4 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณผ่านความถี่สูงที่ลำดับต่างๆ



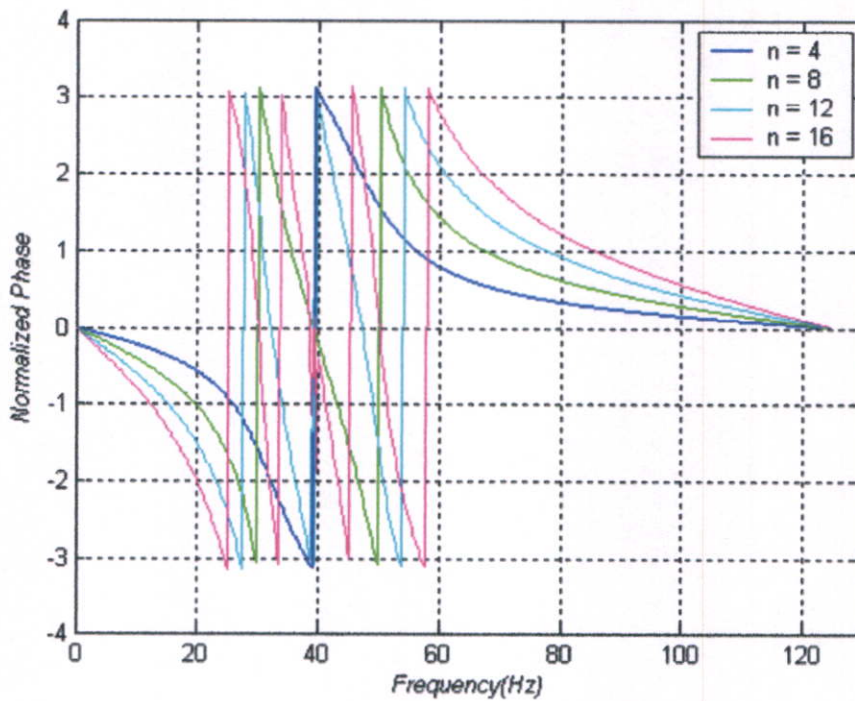
รูปที่ 4.5 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ



รูปที่ 4.6 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ



รูปที่ 4.7 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ



รูปที่ 4.8 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่ที่ลำดับต่างๆ

4.6 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทวินามหรือไบนอมิเยลในการสร้างสามเหลี่ยมปascal เพื่อนำไปสู่หลักการสร้างปascalเมตริกส์ด้วยวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการแปลงความถี่จากอนาลอกโดเมน ไปเป็นดิจิตอลโดเมน ตัวอย่างการออกแบบและผลการออกแบบของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบผ่านความถี่ต่ำ ผ่านความถี่สูง ผ่านแถบความถี่ กำจัดแถบความถี่ ที่ลำดับต่างๆ ทำให้ผู้อ่านเกิดความรู้ความเข้าใจและสามารถที่จะออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบต่างๆ ที่ลำดับสูงๆ ได้อย่างไม่เกิดความยุ่งยากซับซ้อนและเสียเวลาในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลเหมือนแต่ก่อนซึ่งทำได้ยากกว่า

บทที่ 5

อินเวอร์สพาสคาลเมตริกซ์

5.1 หลักการหาอินเวอร์สพาสคาลเมตริกซ์ (Inverse pascal matrix)

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$ แล้ว จะมีจำนวนจริง $k = \frac{1}{a}$ ซึ่งทำให้ $ak = ka = 1$ เราจะเรียก k ว่าเป็น อินเวอร์สการคูณของ a และเขียน k แทนด้วย a^{-1} และเพราะว่า $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ทุกๆค่า a เราเรียก 1 ว่าเป็นเอกลักษณ์การคูณของจำนวนจริง ส่วนในเรื่องของเมตริกซ์ก็เช่นเดียวกัน ถ้า A เป็นเมตริกซ์ $n \times n$ จะพบว่า

$$AI_n = I_n A = A \quad (5.1)$$

เราจึงเรียก I_n ว่าเป็นเอกลักษณ์การคูณของเมตริกซ์และถ้าสามารถหาเมตริกซ์ B ที่ทำให้

$$AB = BA = I_n \quad (5.2)$$

เราจะเรียก B ว่าเป็น อินเวอร์สของเมตริกซ์ A และเขียนแทนด้วย A^{-1} นั่นคือ $B = A^{-1}$ และ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ หรืออีกวิธีหนึ่งที่ได้รับคามนิยมซึ่งในที่นี้เราจะหาอินเวอร์สเมตริกซ์โดยใช้เมตริกซ์ผกผัน

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (5.3)$$

องค์ประกอบของเมตริกซ์ A มีได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\text{adj}(A) = (\text{Cof}(A))^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \quad (5.5)$$

โดยที่ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ และ M_{ij} เป็นไมเนอร์ของ A

สมมติว่าในกรณีที่มีปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix) ลำดับ $N = 2$ จะได้ว่า

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \text{adj}(P) \quad (5.6)$$

โดยที่ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\det(P) = -8$

จากสมการที่ (5.5) เราก็จะพบว่า

$$\text{adj}(P) = -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

สุดท้ายนี้เราสามารถหาอินเวอร์สปาสคาลเมตริกส์ได้ว่า

$$P^{-1} = \frac{1}{2^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

แต่ในกรณีที่มีปาสคาลเมตริกส์ที่ลำดับสูงขึ้นไป เราจะพบได้ว่าการอินเวอร์สปาสคาลเมตริกส์นั้นหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลำดับและปาสคาลเมตริกส์ได้ตามสมการที่ (5.9) ดังนี้

$$P^{-1} = 2^{-n} P \quad (5.9)$$

5.2 การแปลงวงจรรองสัญญาณดิจิทัลไปเป็นวงจรรองสัญญาณอนาลอก

5.2.1 วงจรรองสัญญาณอนาลอกผ่านความถี่ต่ำ 2 ลำดับ

ในหัวข้อดังกล่าวนี้เราจะยกตัวอย่างการแปลงวงจรรองสัญญาณดิจิทัลไปเป็นวงจรรองสัญญาณอนาลอกผ่านความถี่ต่ำ, ผ่านความถี่สูง, ผ่านแถบความถี่, กำจัดแถบความถี่ โดยใช้การดำเนินการด้วยอินเวอร์สพาสคาลเมตริกส์ สมมติว่าเราทราบฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่ต่ำลำดับ 2 และกำหนดให้ช่วงแถบความถี่ผ่าน 50 Hz มีดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{0.2066 + 0.4131z^{-1} + 0.2066z^{-2}}{1 - 0.3695z^{-1} + 0.1958z^{-2}} \quad (5.10)$$

โดยที่ $c = \cot(\pi \times 50 / 250) = 1.3764$ เมื่อทำการแปลงอินเวอร์สพาสคาลเมตริกส์ จากสมการที่ (4.25) เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ 1.3764 A_1 \\ 1.8944 A_2 \end{bmatrix} = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2066 \\ 0.4131 \\ 0.2066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2066 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ 1.3764 B_1 \\ 1.8944 B_2 \end{bmatrix} = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3695 \\ 0.1958 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2066 \\ 0.4021 \\ 0.3913 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

จากสมการที่ (5.12) และ (5.13) เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณอนาลอกผ่านความถี่ต่ำลำดับ 2 ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2066 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2066 \\ 0.2921 \\ 0.2066 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

โดยปรกติเทอมของ B_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4138s + 1} \quad (5.15)$$

5.2.2 วงจรกรองสัญญาณอนาล็อกผ่านความถี่สูง 2 ลำดับ

สมมติว่าเราทราบฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลผ่านความถี่สูงลำดับ 2 และกำหนดให้ช่วงแถบความถี่ผ่าน 30 Hz มีดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{0.5825 - 1.1650z^{-1} + 0.5825z^{-2}}{1 - 0.9824z^{-1} + 0.3476z^{-2}} \quad (5.16)$$

โดยที่ $k = \tan(\pi \times 30 / 250) = 0.3959$ เมื่อทำการแปลงอินเวอร์สฟูราสคาลเมตริกส์ จากสมการที่ (4.37) เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} 0.1568A_2 \\ 0.3959A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5825 \\ -1.1650 \\ 0.5825 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5825 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\begin{bmatrix} 0.1568B_2 \\ 0.3959B_1 \\ B_0 \end{bmatrix} = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.9824 \\ 0.3476 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0913 \\ 0.3262 \\ 0.5825 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

จากสมการที่ (5.18) และ (5.19) เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณอนาล็อกผ่านความถี่สูงลำดับ 2 ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5825 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5825 \\ 0.8239 \\ 0.5823 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

โดยปรกติเทอมของ B_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 0.9997} \quad (5.20)$$

5.2.3 วงจรกรองสัญญาณอนาล็อกผ่านแถบความถี่ 2 ลำดับ

สมมุติว่าเราทราบฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลผ่านแถบความถี่ลำดับ 4 โดยกำหนดให้ช่วงแถบความถี่ผ่านต่ำ 30 Hz และช่วงแถบความถี่ผ่านสูง 50 Hz มีดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{0.0461 - 0.0923z^{-2} + 0.0461z^{-4}}{1 - 1.8296z^{-1} + 2.1639z^{-2} - 1.2674z^{-3} + 0.4918z^{-4}} \quad (5.21)$$

โดยที่ $k_1 = \tan(\pi \times 30 / 250) = 0.3959$

$k_2 = \tan(\pi \times 50 / 250) = 0.7265$

ดังนั้น $\hat{k} = k_1 k_2 = 0.2876$ และ $\hat{c} = 1/k_2 - k_1 = 3.0247$ เมื่อทำการแปลงอินเวอร์สพาสคาลเมตริกส์จากสมการที่ (4.44) เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{k}^2 \\ 0 & \hat{k} & 0 \\ 1 & 0 & 2\hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 2^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} 0.7566 A_2 \\ 0.8702 A_1 \\ A_0 + 5.2632 A_2 \\ 3.0247 A_1 \\ 9.1486 A_2 \end{bmatrix} = 2^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0461 \\ 0 \\ -0.0923 \\ 0 \\ 0.0461 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0461 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\begin{bmatrix} 0.7566 B_2 \\ 0.8702 B_1 \\ B_0 + 5.2632 B_2 \\ 3.0247 B_1 \\ 9.1486 B_2 \end{bmatrix} = 2^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.8296 \\ 2.1639 \\ -1.2674 \\ 0.4918 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0568 \\ 0.2889 \\ 0.1973 \\ 0.4220 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

จากสมการที่ (5.18) และ (5.19) เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณนอกผ่านแถบความถี่ลำดับ 2 ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0461 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0463 \\ 0.0653 \\ 0.0461 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

โดยปรกติเทอมของ B_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(s) = \frac{1.0043}{s^2 + 1.4104s + 1} \quad (5.26)$$

5.2.4 วงจรรองสัญญาณนอกกำจัดแถบความถี่ 2 ลำดับ

สมมุติว่าเราทราบฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณดิจิทัลกำจัดแถบความถี่ลำดับ 4 โดยกำหนดให้ช่วงแถบความถี่ผ่านต่ำ 30 Hz และช่วงแถบความถี่ผ่านสูง 50 Hz มีดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{0.6998 - 1.5485z^{-1} + 2.2562z^{-2} - 1.5485z^{-3} + 0.6998z^{-4}}{1 - 1.8296z^{-1} + 2.1639z^{-2} - 1.2674z^{-3} + 0.4918z^{-4}} \quad (5.27)$$

โดยที่ $k_1 = \tan(\pi \times 30 / 250) = 0.3959$

$k_2 = \tan(\pi \times 50 / 250) = 0.7265$

ดังนั้น $\hat{k} = k_1 k_2 = 0.2876$ และ $\hat{c} = 1 / k_2 - k_1 = 3.0247$ เมื่อทำการแปลงอินเวอร์สพาสคาลเมตริกส์จากสมการที่ (4.53) เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \hat{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k} & 0 \\ 2\hat{k} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 2^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\begin{bmatrix} 0.7566 A_0 \\ 0.8702 A_1 \\ 5.2632 A_0 + A_2 \\ 3.0247 A_1 \\ 9.1486 A_0 \end{bmatrix} = 2^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6998 \\ -1.5485 \\ 2.2562 \\ -1.5485 \\ 0.6998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0 \\ 0.2428 \\ 0 \\ 0.4220 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\begin{bmatrix} 0.7566 B_0 \\ 0.8702 B_1 \\ 5.2632 B_0 + B_2 \\ 3.0247 B_1 \\ 9.1486 B_0 \end{bmatrix} = 2^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.8296 \\ 2.1639 \\ -1.2673 \\ 0.4918 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0568 \\ 0.2889 \\ 0.1973 \\ 0.4220 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

จากสมการที่ (5.29) และ (5.30) เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณอนาลอกกำจัดแถบความถี่ลำดับ 2 ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0461 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0461 \\ 0.0653 \\ 0.0463 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

โดยปรกติเทอมของ B_0 จะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4165s + 1.0043} \quad (5.26)$$

5.3 บทสรุป

จากบทที่แล้วมาได้กล่าวถึงในการออกแบบวงจรรองสัญญาณดิจิทัลแบบต่างๆ ที่ลำดับต่างๆ โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์ แต่เนื้อหาในบทนี้จะเป็นการออกแบบวงจรรองสัญญาณอนาลอกแบบแบบผ่านความถี่ต่ำ ผ่านความถี่สูง ผ่านแถบความถี่ กำจัดแถบความถี่ที่ 2 ลำดับโดยใช้การดำเนินการด้วยอินเวอร์สปาสคาลเมตริกส์ ซึ่งการออกแบบนั้นเราจะเห็นว่าอินเวอร์สปาสคาลเมตริกส์จะมีความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลำดับและปาสคาลเมตริกซ์นั่นเอง ซึ่งจากตัวอย่างดังกล่าวจะเห็นได้ว่าความถูกต้องของตำแหน่งทศนิยมในการค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากคำนวณนั้นขึ้นอยู่กับเลขนัยสำคัญ

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการดำเนินการวิจัย

การดำเนินงานวิจัยเพื่อจัดทำขึ้นเป็นวิทยานิพนธ์ชุดนี้ เป็นการนำเสนอแนวทางการแปลงการแปลงโดเมน S-Z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ ซึ่งมีการจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB โดยเริ่มจากหาแนวทางหลักการสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ด้วยวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม พร้อมการแปลงความถี่ ผลที่ได้จากการคำนวณทั้งหมดจะอยู่ในรูปของเมตริกซ์เพื่อความยุ่งยากซับซ้อนต่อการคำนวณ ประหยัดเวลา และเหมาะสำหรับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลในกรณีที่กำลังศึกษาขึ้นไป

ในการออกแบบเราจะต้องกำหนดลักษณะคุณสมบัติเฉพาะของวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลแบบต่างๆ ที่ลำดับต่างๆ ตามที่ต้องการและจะต้องทราบฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบที่จะมาทำการทรานส์ฟอร์มด้วย ซึ่งในที่นี้รายละเอียดต่างๆ พร้อมแสดงตัวอย่างไว้ในบทที่ 4 แล้ว สำหรับในส่วนการแปลงวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลไปเป็นวงจรกรองสัญญาณอนาลอกนั้นจะมีการคำนวณที่มีลักษณะคล้ายๆ กันก็คือ การคำนวณอยู่ในรูปของเมตริกซ์จะกล่าวได้ว่าอินเวอร์สปาสคาลเมตริกซ์นั้นจะมีความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลำดับและปาสคาลเมตริกซ์ ซึ่งสามารถดูรายละเอียดต่างๆ พร้อมแสดงตัวอย่างไว้แล้วในบทที่ 5

6.2 แนวทางในการพัฒนา

ดังที่กล่าวไปข้างต้นว่าเนื่องจากงานวิจัยนี้ได้ใช้แนวทางหลักการสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ด้วยวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ซึ่งโดยแท้จริงแล้วยังมีหลักการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบต่างๆ อีกเช่น วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ วิธีผลต่างสี่บเนื่องย้อนหลัง วิธีผลต่างสี่บเนื่องไปหน้า แต่สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ก็เพราะว่าเป็นเทคนิคที่ได้รับความนิยมมากเป็นพิเศษเพราะการแมป (Mapping) จะเป็นลักษณะหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One Mapping) ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีปัญหาเกิดการเหลื่อม (Aliasing) ของสเปกตรัม

บรรณานุกรม

- [1] วัดลก สุระกำพลธร. 2533. การประมวลผลสัญญาณเชิงเลข. กรุงเทพฯ:สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [2] ไพรัช รัชชพงษ์. 2535. การประมวลผลสัญญาณดิจิทัล. กรุงเทพฯ:ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ กระทรวงวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม.
- [3] สมศักดิ์ ชุมช่วย. 2545. การประมวลผลสัญญาณเชิงเลขเบื้องต้น. กรุงเทพฯ :ภาควิชาอิเล็กทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [4] ลัญฉกร วุฒิสัทธาภักดิ์. 2547. พื้นฐานกรรมวิธีสัญญาณดิจิทัล. กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [5] ลัญฉกร วุฒิสัทธาภักดิ์. 2547. MATLAB การประยุกต์ใช้งานทางวิศวกรรม. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [6] Ifeachor E. C. and Jervis E. C. 1993. "Digital Signal Processing." **A Practical Approach.** Addison Wesley Publishers Ltd.,
- [7] Biolkova V. and Biolek D. 1999. "Generalized Pascal Matrix of First Order s-z Transforms." **In Proc ICECS.** Pafos. Cyprus.
- [8] Psenicka B. Garcia-Ugalde F. and Herrera-Camacho A. 2002. "The Bilinear Z Transform 5by Pascal Matrix and Its Application in the Design of Digital Filters." **IEEE Signal Processing Letters.** Vol. 9. No. 11. pp. 368-370.
- [9] Psenicka B. and Garcia-Ugald F. 2004. "Z Transform from Lowpass to Bandpass by Pascal Matrix." **IEEE Signal Processing Letters.** Vol. 11. No. 2. pp. 282-284
- [10] Johnny R. Johnson. 1989. **Introduction to digital signal processing.** Englewood Cliff. NJ : Prentice Hall
- [11] Lonnie C. Ludeman. 1987. **Fundamentals of digital signal processing.** New York : John Wiley.
- [12] Ashok Ambardar. 1995. **Analog and digital signal processing.** Boston : PWS.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

โปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการจำลองการทำงาน

```

%*****
                                Low pass filter
%*****

clear all;

clc;

n = input('insert order=');
fh = input('insert fh =');
fs = input('insert fs =');
%***** Find coefficient a *****

for i = 1:1:n+1
    A(i) = input('insert A(i) =');
end

%----- Matrix P -----

for j = 1:1:n+1
    P(1,j)=1;
end

for i = 1:1:n
    j = n+1;
    P(i+1,j)=(-1)^i * ( factorial(n)/ ( factorial(n-i)*factorial(i) ) );
end

for i = 2:1:n+1
    for j = n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);
    end
end

%----- Matrix C -----

c=cot( (pi*fh)/fs );;

i=0;

j=0;

```

```

while j <= n
    j = j+1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        FL(i,j) = c^(i-1);
    end
    i=j;
end
P
FL
A';
a = P*FL*A'

%***** Find coefficient b *****
for i = 1:1:n+1
    B(i) = input('insert B(i) =');
end
%-----Matrix P -----
for j = 1:1:n+1
    P(1,j) = 1;
end

for i = 1:1:n
    j = n+1;
    P(i+1,j) = (-1)^i * ( factorial(n)/ ( factorial(n-i)*factorial(i) ) );
end

for i = 2:1:n+1
    for j = n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);
    end
end
end

```

```

%-----Matrix C -----
c = cot( (pi*fh)/fs );;
i = 0;
j = 0;
while j <= n
    j = j+1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        FL(i,j) = c^(i-1);
    end
    i = j;
end
P
FL
B';
b = P*FL*B'

a = a';
b = b';

[h,q] = freqz(a,b,512,fs);
figure(1);
plot(q,abs(h))
hold on
grid on

figure(2);
plot(q,angle(h));

%***** END *****

```

```

%*****
                                High pass filter
%*****

clear all;
clc;

n = input('number colum*row =');
fL = input('insert fL =');
fs = input('insert fs =');
%***** Find coefficient a *****

for i = 1:1:n+1
    A(i) = input('insert A(i) =');
end

%-----Matrix P -----

for j = 1:1:n+1
    P(1,j) = 1;
end

for i = 1:1:n
    j = n+1;
    P(i+1,j) = (-1)^i * ( factorial(n) / ( factorial(n-i)*factorial(i) ) );
end

for i = 2:1:n+1
    for j = n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);
    end
end

%-----Matrix K -----

k = tan( (pi*fL)/fs );
i = 0;
j = n+2;

```

```

while j > 1
    j = j-1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        FH(i,j) = k^(j-1);
    end
    i = n-j+2;
end
P
FL
A';
a = P*FH*A'

%***** Find coefficient b *****
for i = 1:1:n+1
    B(i) = input('insert B(i) =');
end
%-----Matrix P-----
for j = 1:1:n+1
    P(1,j) = 1;
end

for i = 1:1:n
    j = n+1;
    P(i+1,j) = (-1)^i * ( factorial(n)/ ( factorial(n-i)*factorial(i) ) );
end

for i = 2:1:n+1
    for j = n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);
    end
end
end

```

```

%-----Matrix K -----
k = tan( (pi*fl)/fs );
i = 0;
j = n+2;
while j > 1
    j = j-1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        FH(i,j) = k^(j-1);
    end
    i = n-j+2;
end

P
FL
B';
b = P*FH*B'

a = a';
b = b';

[h,q] = freqz(a,b,512,fs);
figure(1);
plot(q,abs(h))
hold on
grid on

figure(2);
plot(q,angle(h));

%***** END *****

```

```

%*****
                                Band pass filter
%*****

clear all;
clc;

n = input('insert order =');
fh = input('insert fh =');
fL= input('insert fL =');
fs = input('insert fs =');
k2 = tan( (pi*fh)/fs );
k1 = tan( (pi*fL)/fs );

%***** Find coefficient a *****
for i = 1:1:n+1
    A(i) = input('insert A(i) =');
end
%-----Matrix P -----
for j = 1:1:2*n+1
    P(1,j) = 1;
end

for i = 1:1:2*n
    j = 2*n+1;
    P(i+1,j) = (-1)^i * ( factorial(2*n) / ( factorial(2*n-i)*factorial(i) ) );
end

for i = 2:1:2*n+1
    for j = 2*n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);
    end
end
end

```

```

%-----Matrix  $\hat{K}$  -----
k = k2*k1;
i = 0;
j = n+2;
while j > 1
    j = j-1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        for i = i:2:2*n+1
            y = factorial(j-1);
            b = ( (j+n-i)/2 );
            if b >= 0
                b1 = factorial(b);
                c = ( (i+j-n)/2 );
                c1 = factorial(c-1);
                K(i,j) = ( y*(k^b) )/(b1*c1);
            end
        end
    end
    i = n-j+2;
end
%-----Matrix  $\hat{C}$  -----
c = 1/(k2-k1);
i = 0;
j = 0;
while j <= n
    j = j+1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        C(i,j) = c^(i-1);
    end
    i = j;
end

```

```

end
P
K
C
A';
a = P*K*C*A'

%***** Find coefficient b *****
for i = 1:1:n+1
    B(i) = input('insert B(i) =');
end

%-----Matrix P -----
for j = 1:1:2*n+1
    P(1,j) = 1;
end

for i = 1:1:2*n
    j = 2*n+1;
    P(i+1,j) = (-1)^i * ( factorial(2*n) / ( factorial(2*n-i)*factorial(i) ) );
end

for i = 2:1:2*n+1
    for j = 2*n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);
    end
end

%-----Matrix K -----
k = k2*k1;
i = 0;
j = n+2;
while j > 1
    j = j-1;

```

```

    if i <= n+1
        i = i+1;
        for i = i:2:2*n+1
            y = factorial(j-1);
            b = ( (j+n-i)/2 );
                if b >= 0
                    b1 = factorial(b);
                    c = ( (i+j-n)/2 );
                    c1 = factorial(c-1);
                    K(i,j) = ( y*(k^b) )/(b1*c1);
                end
            end
        end
        i = n-j+2;
    end
%-----Matrix  $\hat{C}$  -----
c = 1/(k2-k1);
i = 0;
j = 0;
while j <= n
    j = j+1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        C(i,j) = c^(i-1);
    end
    i = j;
end

P
K
C
B';

```

```

b = P*K*C*B'
a = a';
b = b';
[h,q] = freqz(a,b,512,fs);
figure(1);
plot(q,abs(h))
hold on
grid on

figure(2);
plot(q,angle(h));

%*****
                                Band pass filter
%*****

clear all;
clc;

n = input('insert order=');
fh = input('insert fh =');
fL = input('insert fL =');
fs = input('insert fs =');
k2 = tan( (pi*fh)/fs );
k1 = tan( (pi*fL)/fs );

%***** Find coefficient a *****

for i = 1:1:n+1
    A(i) = input('insert A(i) =');
end

%-----Matrix P -----
for j = 1:1:2*n+1
    P(1,j) = 1;
end

```

```

for i = 1:1:2*n
    j = 2*n+1;
    P(i+1,j) = (-1)^i * ( factorial(2*n) / ( factorial(2*n-i) * factorial(i) ) );

```

```
end
```

```

for i = 2:1:2*n+1
    for j = 2*n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);

```

```
end
```

```
end
```

```
%-----Matrix  $\hat{K}$  -----
```

```
k = k2*k1;
```

```
i = 0;
```

```
j = 0;
```

```
while j <= n
```

```
    j = j+1;
```

```
    if i <= n+1
```

```
        i = i+1;
```

```
        for i = i:2:2*n+1
```

```
            y = factorial(n-j+1);
```

```
            b = n - ((i+j)/2) + 1;
```

```
                if b >= 0
```

```
                    b1 = factorial(b);
```

```
                    c = ((i-j)/2);
```

```
                    c1 = factorial(c);
```

```
                    K(i,j) = ( y*(k^b) ) / (b1*c1);
```

```
                end
```

```
            end
```

```
        end
```

```
        i = j;
```

```
end
```

```

%-----Matrix  $\hat{C}$  -----
c = 1/(k2-k1);
i = 0;
j = 0;
while j <= n
    j = j+1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        C(i,j) = c^(n+1-i);
    end
    i = j;
end

P
K
C
A';
a = P*K*C*A'

%***** Find coefficient b *****
for i = 1:1:n+1
    B(i) = input('insert B(i) =');
end

%-----Matrix P -----
for j = 1:1:2*n+1
    P(1,j) = 1;
end

for i = 1:1:2*n
    j = 2*n+1;
    P(i+1,j) = (-1)^i * ( factorial(2*n) / ( factorial(2*n-i) * factorial(i) ) );
end

```

```

for i = 2:1:2*n+1
    for j = 2*n:-1:1
        P(i,j) = P(i,j+1)+P(i-1,j+1)+P(i-1,j);
    end
end
end
%-----Matrix  $\hat{K}$  -----
k = k2*k1;
i = 0;
j = 0;
while j <= n
    j = j+1;
    if i <= n+1
        i = i+1;
        for i = i:2:2*n+1
            y = factorial(n-j+1);
            b = n-((i+j)/2)+1;
            if b >= 0
                b1 = factorial(b);
                c = ((i-j)/2);
                c1 = factorial(c);
                K(i,j) = (y*(k^b))/(b1*c1);
            end
        end
    end
    i=j;
end
%-----Matrix  $\hat{C}$  -----
c = 1/(k2-k1);
i = 0;
j = 0;
while j <= n
    j = j+1;

```

```
        if i <= n+1
            i = i+1;
            C(i,j) = c^(n+1-i);
        end
        i = j;
    end
    P
    K
    C
    B';
    b = P*K*C*B'

    a=a';
    b=b';

    [h,q]=freqz(a,b,512,fs);
    figure(1);
    plot(q,abs(h))
    hold on
    grid on

    figure(2);
    plot(q,angle(h));

    %***** END *****
```

ภาคผนวก ข.

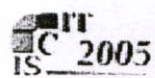
ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

1. Sorawat Chivapreecha, Songkran Sriyapong, Somyot Junnapiya and Kobchai Dejhan, “**Bilinear s-z with Frequency Transformation Using Pascal Matrix Operation**” International Symposium on Communications and Information Technologies October 12-14, 2005, Beijing, china

ISCIT2005

**International Symposium on Communications and
Information Technologies 2005
PROCEEDINGS**

October 12-14, 2005, Beijing, CHINA



K.C.Wong Education Found, Hong Kong



Bilinear s-z with Frequency Transformation Using Pascal Matrix Operation

Sorawat Chivapreecha, Songkran Sriyapong, Somyot Jumapiya and Kobchai Dejhan
 Faculty of Engineering and Research Center for Communication and Information Technology
 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand
 Tel: +66-2326-4238, +66-2326-4242, Fax: +66-2326-4554
 E-mail: {sorawat, kobchai}@telecom.kmitl.ac.th

Abstract— This paper presents an alternative method used for analog domain to digital domain transformation based on bilinear transform. The Pascal matrix is used to transform analog transfer function on s plane to digital transfer function on z plane. Moreover, the frequency transformation from normalized analog low-pass filter prototype to digital low-pass, high-pass, band-pass and band-stop filter will be considered incorporate to Pascal matrix operation. This method can be cleared the computation complexity of original bilinear transform, especially to solve the difficulty in case of higher order of digital filter because all of computation use matrix operation. Therefore, it is easy and appropriate to program this method on personal computer or scientific calculator.

I. INTRODUCTION

The most successful approach of obtaining the coefficients of IIR filters is converting from analog filters that there already exists a wealth of information in the literature which can be utilized. The important method used to convert analog filters into equivalent digital filters is the bilinear transform [1].

In reference [2] proposed using generalized Pascal matrix for various s-z transforms. This proposed method can be obtained digital transfer function coefficients by easy matrix operations. In order to substitute the relationship between s-z into the transfer function directly, it is difficult to rearrange the transfer function to obtain coefficients when high orders and this only suitable for work out on papers, not suitable for computer programming. Also, this paper proposes using Pascal matrix based on bilinear transform for s-z transformation. Moreover, it can be transformed the frequency from normalized analog filter prototype to others which is not appear in [2] and covers more than in [3-4].

II. PASCAL MATRIX FOR BILINEAR TRANSFORMATION

The concept of Pascal matrix operations used for bilinear transformation came from the binomial theorem as follows,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1)$$

where $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ that called binomial coefficients and

each n has binomial coefficients in the form of Pascal triangle. The important relationship between s-z of bilinear transform as

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (2)$$

Consider the N^{th} order analog and digital transfer function as follows,

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i s^i}{\sum_{i=0}^N B_i s^i} \quad (3)$$

and

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}} \quad (4)$$

Using eq. (3) and the relationship in eq. (2) has

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]^i}{\sum_{i=0}^N B_i \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]^i} = \frac{\sum_{i=0}^N A_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i}}{\sum_{i=0}^N B_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i}} \quad (5)$$

From eq. (5) can use the binomial theorem to distribute and consider only numerator part, also

$$\sum_{i=0}^N A_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i} = \sum_{i=0}^N A_i \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k z^{-k} \sum_{l=0}^{N-i} \binom{N-i}{l} z^{-l} \quad (6)$$

As shown in [2], the terms in bracket will be formed as the matrix size $(N+1) \times (N+1)$ that called Pascal matrix. With rearrange and change some new index can be got the relationship between eq. (5) and eq. (4) as

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^N A_i [P_{i,j}] z^{-i} \quad (7)$$

where the Pascal matrix $[P_{i,j}]$ can be defined as

$$P_{i,j} = \sum_{n=0}^i \binom{N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{n+i} \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N \quad (8)$$

i and j mean row and column index, respectively.

Also, the column vector of digital filter coefficients can be computed by vector product of Pascal matrix with column vector of analog filter coefficients as follows.

$$[a_i] = [P_{i,j}][A_i] \quad (9)$$

For denominator can be computed in the same manner as in eq. (9), only change $[a_i]$ and $[A_i]$ to $[b_i]$ and $[B_i]$, respectively.

III. THE FREQUENCY TRANSFORMATION

The operations in eq. (9) is only bilinear transformation from analog to digital domain, but in practical often use the normalized analog filter prototype at the start of design. Also, the frequency scaling must be used incorporate to Pascal matrix and this result in proposed bilinear transform involves with two separate transformations, as normal bilinear transform as shown in eq. (9) and the frequency transformation.

At first, the normalized analog transfer function is frequency scaled by replacing as follows.

$$s = \frac{s}{\Omega_c} \quad \text{for low-pass to low-pass} \quad (10)$$

$$s = \frac{\Omega_c}{s} \quad \text{for low-pass to high-pass} \quad (11)$$

$$s = \frac{s^2 + \Omega_{c1}\Omega_{c2}}{s(\Omega_{c2} - \Omega_{c1})} \quad \text{for low-pass to band-pass} \quad (12)$$

$$s = \frac{s(\Omega_{c2} - \Omega_{c1})}{s^2 + \Omega_{c1}\Omega_{c2}} \quad \text{for low-pass to band-stop} \quad (13)$$

Hence, apply bilinear transform by replacing s follow by eq. (2) in the new transfer function and using the relationship between analog frequency and digital frequency is

$$\Omega = \tan \frac{\omega T}{2} \quad (14)$$

For computational efficiency, the two transformations can be combined into one as follows.

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \left/ \tan \frac{\omega_c T}{2} \right. = \cot \left\{ \frac{\omega_c T}{2} \right\} \left\{ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right\}$$

give $T = 1/F_s$ and $\omega_c = 2\pi f_c$, it can be got

$$s = \cot \left\{ \frac{\pi f_c}{F_s} \right\} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (15)$$

Eq. (15) is an example for analog low-pass to digital low-pass transformation where constant c is value of $\cot(\pi f_c / F_s)$. For the others can be proved in the same manner that summarized as follows.

For analog low-pass to digital high-pass transformation:

$$s = k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \text{where } k = \tan(\pi f_c / F_s) \quad (16)$$

For analog low-pass to digital band-pass transformation:

$$s = c \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] \quad (17)$$

For analog low-pass to digital band-stop transformation:

$$s = \sqrt{c} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] \quad (18)$$

where $k = k_1 k_2$ and $c = 1/k_2 - k_1$ by $k_1 = \tan \pi f_{c1} / F_s$ and $k_2 = \tan(\pi f_{c2} / F_s)$, respectively.

In order to transform from analog to digital filter by eqs. (15)-(18). The Pascal matrix stills same as in eq. (8), except for band-pass and band-stop transformation which size of matrix will be double. From some property of Pascal matrix, it can be simplified in order to create the Pascal matrix from the first row and the first column of matrix.

$$\text{For the first row: } P_{0,j} = 1 \text{ for all } j \quad (19)$$

$$\text{For the first column: } P_{i,0} = \binom{N}{i} \text{ for all } i \quad (20)$$

Each element in Pascal matrix can be obtained by

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1} - P_{i-1,j} \quad (21)$$

Except for high-pass transformation, eq. (20) and (21) will change to

$$\text{For the first column: } P_{i,0} = \binom{N}{i} (-1)^i \quad (22)$$

Each element in Pascal matrix can be obtained by

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} + P_{i-1,j-1} - P_{i-1,j} \quad (23)$$

Moreover, each of constants that happened from the frequency transformation will result in matrix operations, when compared with eq. (9), it can be rewritten as follows.

$$[a_i] = [P_{i,j}][\tilde{A}_i] = [P_{i,j}][Aux_{i,j}][A_i] \quad (24)$$

The matrix $[\tilde{A}_i]$ is the product between auxiliary matrix with original vector $[A_i]$. The auxiliary matrix occurs from the effect of frequency transformation which can be defined as follows.

For low-pass transformation:

$$Aux_{i,j}^{(LP)} = \begin{cases} c^i & : i = j \\ 0 & : \text{others} \end{cases} \quad (25)$$

For high-pass transformation:

$$Aux_{i,j}^{(HP)} = \begin{cases} k^i & : i = j \\ 0 & : \text{others} \end{cases} \quad (26)$$

From eqs. (25) and (26), notice that these auxiliary matrix are diagonal matrix as shown in eqs. (27) and (28), respectively.

$$[Aux_{i,j}^{(LP)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^N \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[Aux_{i,j}^{(BP)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^N \end{bmatrix} \quad (28)$$

In case of band-pass and band-stop transformation the auxiliary matrix will be divided into 2 matrix as follows.

$$[Aux_{i,j}] = [Aux_{i,j}^{(BP)}][Aux_{i,j}^{(BS)}] \quad (29)$$

The matrix $[Aux_{i,j}^{(BP)}]$ have size $(2N-1) \times (N-1)$, since the order of band-pass and band-stop transformation will be double. The matrix $[Aux_{i,j}^{(BS)}]$ still has the size $(N-1) \times (N-1)$.

For band-pass transformation:

The non-zero elements in matrix $[Aux_{i,j}^{(BP)}]$ can be obtained by

$$Aux_{i,j}^{(BP)} = \frac{j \cdot k^{j-N+1}}{\binom{j+N-1}{2} \binom{i+j-N}{2}} \quad (30)$$

where $i = 0, 1, 2, \dots, N$ and $j = 0, 1, 2, \dots, 2N$

Example in case $N=2$

$$[Aux_{i,j}^{(BP)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The matrix $[Aux_{i,j}^{(BS)}]$ can be obtained by

$$Aux_{i,j}^{(BS)} = \begin{cases} c^i & : i = j \\ 0 & : \text{others} \end{cases} \quad (31)$$

For band-stop transformation:

The non-zero elements in matrix $[Aux_{i,j}^{(BS)}]$ can be obtained by

$$Aux_{i,j}^{(BS)} = \frac{(N-j)! k^{N-(i+j)}}{N! \binom{i+j}{2} \binom{i-j}{2}} \quad (32)$$

where $i = 0, 1, 2, \dots, N$ and $j = 0, 1, 2, \dots, 2N$

Example in case $N=2$

$$[Aux_{i,j}^{(BS)}] = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 2k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The matrix $[Aux_{i,j}^{(BS)}]$ can be found by

$$Aux_{i,j}^{(BS)} = \begin{cases} c^{N-i} & : i = j \\ 0 & : \text{others} \end{cases} \quad (33)$$

From eqs. (31) and (33), notice that these auxiliary matrix are diagonal matrix as shown in eqs. (34) and (35), respectively.

$$[Aux_{i,j}^{(BP)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^N \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$[Aux_{i,j}^{(BS)}] = \begin{bmatrix} c^N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^{N-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{N-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Notice that, the Pascal matrix is used for band-pass and band-stop transformation still generated from eq. (8) but changed upper limit from N to $2N$.

IV. DESIGN EXAMPLES

In the design examples shows using of the bilinear s - z with frequency transformation by Pascal matrix operation to transform from the normalized analog filter transfer function prototype to digital high-pass filter and band-stop filter.

Let the normalized 2nd order Butterworth transfer function in s domain as follows.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - \sqrt{2}s + 1}$$

For transformation to high-pass digital filter by giving filter specifications as cut-off frequency 30 Hz and sampling frequency 250 Hz. Eq. (16) can be found the value of k as follows.

$$k = \tan(\pi \times 30 / 250) = 0.39593$$

and use eqs. (19), (22), (23), (24) and (26) to compute the filter coefficients in z domain as follows.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3959 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1568 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7166 \\ -1.6865 \\ 0.5968 \end{bmatrix}$$

Normally, the term b_0 must be equal to be 1. Also, all coefficients must be scaled by $b_0=1.7166$. Therefore, the transfer function of high-pass digital filter can be shown as

$$H(z) = \frac{0.5825 - 1.1651z^{-1} - 0.5825z^{-2}}{1 - 0.9825z^{-1} - 0.3477z^{-2}}$$

The amplitude response corresponds with this transfer function can be shown in Fig. 1.

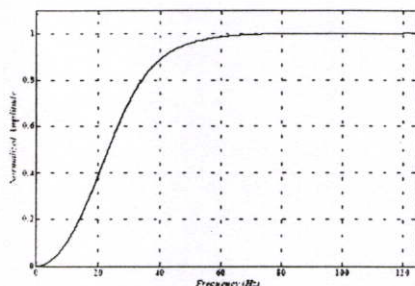


Fig. 1. Amplitude response of desired high-pass digital filter

For transformation to band-stop digital filter by giving filter specifications as lower cut-off frequency 30 Hz, upper cut-off frequency 50 Hz and sampling frequency 250 Hz. Eq. (16) can be found the value of k_1 and k_2 as follows.

$$k_1 = \tan(\pi \cdot 30 / 250) = 0.39593$$

$$\text{and } k_2 = \tan(\pi \cdot 50 / 250) = 0.72652$$

Also, $\hat{k} = k_1 k_2 = 0.28766$ and $\hat{c} = 1/k_2 - k_1 = 3.0247$

and use eqs. (19), (20), (21), (24), (29), (32) and (33) to compute the filter coefficients in z domain as follows.

$$\begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.0827 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0.2877 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 & 0.5753 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9.1486 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3.0247 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_5 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.1690 \\ -33.5664 \\ 48.9072 \\ -33.5664 \\ 15.1690 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_5 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.0827 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0.2877 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 & 0.5753 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9.1486 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3.0247 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_5 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.6762 \\ -39.6596 \\ 46.9072 \\ -27.4732 \\ 10.6619 \end{bmatrix}$$

Normally, the term b_0 must be equal to 1. Also, all coefficients must be scaled by $b_0=21.6762$. Therefore, the transfer function of band-stop digital filter can be shown as

$$H(z) = \frac{0.6998 - 1.5485z^{-1} + 2.2563z^{-2} - 1.5485z^{-3} + 0.6998z^{-4}}{1 - 1.8296z^{-1} + 2.1640z^{-2} - 1.2674z^{-3} + 0.4919z^{-4}}$$

The amplitude response corresponds with this transfer function can be shown in Fig. 2.

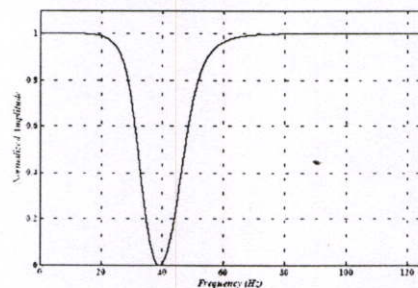


Fig. 2. Amplitude response of desired band-stop digital filter

V. CONCLUSIONS

This paper proposes an alternative method used for bilinear s-z transformation by using Pascal matrix operations cooperating with the frequency transformation.

This method has very efficiency in the case of high order filter design and more simpler than the substitution directly the relationship between s-z into the transfer function. The formula is used to generate each matrix has already been showed. The design examples can be shown the computational steps and the obtained the transformation results.

REFERENCES

- [1] E. C. Ifeachor and B. W. Jervis, *Digital Signal Processing: A Practical Approach*, Addison-Wesley Publishers Ltd., 1993.
- [2] V. Biolkova and D. Bielek, "Generalized Pascal Matrix of First Order s-z Transforms," in *Proc. ICECS*, Pafos, Cyprus, 1999.
- [3] B. Psenicka, F. Garcia-Ugalde and A. Herrera-Camacho, "The Bilinear Z Transform by Pascal Matrix and Its Application in the Design of Digital Filters," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 9, No. 11, pp. 368-370, November 2002.
- [4] B. Psenicka and F. Garcia-Ugalde, "Z Transform From Lowpass to Bandpass by Pascal Matrix," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 2, pp. 282-284, February 2004.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายสงกรานต์ ศรียะพงศ์
วัน เดือน ปีเกิด ที่อยู่	13 เมษายน 2522 ที่จังหวัดนครศรีธรรมราช 390/19 ถ.วารีสวัสดิ์ ต.ปากพ่อง อ.ปากพ่อง จังหวัดนครศรีธรรมราช 80141
ประวัติการศึกษา	2545 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรม และอุปกรณ์การแพทย์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 2548 วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ความชำนาญเฉพาะทาง	Digital signal processing
ประสบการณ์การทำงานและผลงานวิจัย	
2548-2548	ตำแหน่ง Application engineering บริษัท Active media innovation - Programming presentation and Technical support of program matlab