

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรีย  
ชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร

MATHEMATICAL MODEL OF *Plasmodium Vivax* MALARIA  
EPIDEMIC WITH THE COMMUTING OF POPULATION

เชาวนิตี เทียมแพ

CHOAWANITI TEAMPAE

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์  
คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2557

KMITL-2014-SC-M-001-016

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรีย  
ชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร  
MATHEMATICAL MODEL OF *Plasmodium Vivax* MALARIA  
EPIDEMIC WITH THE COMMUTING OF POPULATION

เชาวนิตี เทียมแพ

CHOAWANITI TEAMPAE

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2557

KMITL-2014-SC-M-001-016

**MATHEMATICAL MODEL OF *Plasmodium Vivax* MALARIA  
EPIDEMIC WITH THE COMMUTING OF POPULATION**

**CHOAWANITI TEAMPAE**

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATIC  
FACULTY OF SCIENCE**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**2014**

**KMITL-2014-SC-M-001-016**

**COPYRIGHT 2014**

**FACULTY OF SCIENCE**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

คณะวิทยาศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมลาเรียชนิดเชื้อ  
พลาสมาเดียมไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร  
Mathematical Model of *Plasmodium vivax* Malaria Epidemic  
with the Commuting of Population

นักศึกษา

นายเชาวนิตี เทียมแพ

รหัสประจำตัว

53650708

ปริญญา

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา

คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

รศ.ดร.พันธินี พงศ์สัมพันธ์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ใจปอง	เกษมสุวรรณ	
ดร.สิริพร	แสนนำ วินเทอร์	
ผศ.ดร.สุขุมาล	สาริกะวณิช	
รศ.ดร.พันธินี	พงศ์สัมพันธ์	

KING MONKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ 6 พฤษภาคม พ.ศ. 2557 เวลา 09.00-12.00 น.

สถานที่สอบ ณ ห้อง 207 ชั้น 2 อาคารจุฬารามวลัยลักษณ์ 1

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร.ดุขณี ธนะบริพัฒน์)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ 16 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 57

หัวข้อวิทยานิพนธ์	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรีย ชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร
นักศึกษา	นายเชาวนิตี เทียมแพ
รหัสนักศึกษา	53650708
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.พนธนี พงศ์สัมพันธ์

### บทคัดย่อ

ในปัจจุบันนี้ วิทยาการทางการแพทย์ก้าวหน้าขึ้น ทำให้มีการค้นพบว่าไข้มาลาเรียเกิดจากเชื้อปรสิตสกุล พลาสโมเดียม 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม ไวแวกซ์ โอวัลต์ และมาลารีอี โดยฟัลซิพารัม และมาลารีอี ทำลายเซลล์เม็ดเลือดแดงทุกระยะ แต่ไวแวกซ์และโอวัลต์นั้นจะฆ่าเฉพาะเซลล์เม็ดเลือดแดงที่ยังเจริญเติบโตไม่สมบูรณ์เท่านั้น คนไข้โรคมาลาเรียในประเทศไทยเกิดจากเชื้อพลาสโมเดียมฟัลซิพารัมและพลาสโมเดียมไวแวกซ์ โรคนี้พบได้บ่อยในทวีปแอฟริกา อเมริกาใต้ และเอเชีย พบได้ทั้งประเทศในเขตร้อนและกึ่งเขตร้อน ส่วนในประเทศไทยสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า ตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่น ชายแดนไทย-พม่าและชายแดนไทย-กัมพูชา คนไข้โรคมาลาเรียส่วนใหญ่พบใน จังหวัดตาก กาญจนบุรี ตราด ราชบุรีและแม่ฮ่องสอน ไม่พบมาลาเรียในเขตเมือง ยุ้งก้นปล่องเป็นพาหะหลักในการนำเชื้อโรคมาลาเรีย งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคมาลาเรีย ชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ เมื่อมีการเคลื่อนที่ของประชากร โดยทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของประชากรมนุษย์และยุง จากนั้นประยุกต์วิธีการของแบบจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน มาวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบพร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลแต่ละจุดและแสดงแนวทางลดการระบาดของโรคมาลาเรีย

คำสำคัญ : โรคมาลาเรีย พลาสโมเดียมไวแวกซ์ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ยุ้งก้นปล่อง  
แบบจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน

<b>Thesis Title</b>	<b>MATHEMATICAL MODEL OF <i>Plasmodium Vivax</i> MALARIA EPIDEMIC WITH THE COMMUTING OF POPULATION</b>
<b>Student</b>	Choawaniti Teampae
<b>Student ID</b>	53650708
<b>Degree</b>	Master of Science
<b>Program</b>	Applied Mathematics
<b>Year</b>	2014
<b>Thesis Advisor</b>	Assoc. Prof. Dr. Puntani Pongsumpun

### ABSTRACT

Nowaday, the medical evolution has developed. It was discovered that Malaria is caused by parasites of the genus Plasmodium. There are 4 types; *Plasmodium falciparum*, *Plasmodium vivax*, *Plasmodium ovale* and *Plasmodium malariae*. *Plasmodium falciparum* and *Plasmodium malariae* destroy red blood cells at all stages but *Plasmodium vivax* and *Plasmodium ovale* destroy only red blood cells which their growths are not completed. Most Malaria cases in Thailand are due to *Plasmodium falciparum* and *Plasmodium vivax*. This disease is usually found in Africa, South America and Asia. It is usually found in tropical and sub-tropical countries. In Thailand, Malaria is found in the forest area. It is found along the border of neighbor countries, i.e. the border of Thai-Burma and Thai-Combodia. Most Malaria patients are found in Tak, Kanchanaburi, Trad, Ratchaburi and Mae Hong Son. Malaria is not found in urban areas. Anopheles is the epidemic vector of Malaria. In this research, the transmission of Plasmodium vivax malaria will be studied with the commuting of population. The mathematical model of human and vector populations are formulated. After that, the application of standard dynamical modeling method is used for analyzing the behaviors of solutions. The stability conditions of parameters for each equilibrium state are shown and the way for controlling the Malaria is given.

Keywords : Malaria, Plasmodium vivax, Mathematical model, Anopheles, Standard dynamical

Modeling

## กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ในหัวข้อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรค มาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากรสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีนั้น ผู้จัดทำขอขอบพระคุณ รศ.ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ท่านเป็นผู้ที่คอยชี้แนะ ให้ความรู้ตั้งแต่ขั้นพื้นฐาน แนวคิด ตลอดจนให้คำแนะนำ และเป็นທີ່ปรึกษาในการแก้ไขปัญหาอุปสรรคในการดำเนินการวิจัยต่างๆ

ขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบ อาจารย์บัณฑิตประจำ และผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก อันประกอบด้วย ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ ดร.สิริพร แสนนำ วินเทอร์ และผศ.ดร.สุขุมล สาริกะวณิช ตามลำดับ ผู้พิจารณาหัวข้อและสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งให้ความกรุณาให้คำชี้แนะต่างๆ จนวิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาททั้งทางด้านวิชาความรู้ ตลอดจนคุณธรรม จริยธรรมที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์นี้สัมฤทธิ์ผลเป็นที่เรียบร้อย

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คุณชุตติกาญจน์ ต้นยะสิทธิ์ ที่คอยช่วยเหลือ ส่งเสริม และอำนวยความสะดวกในด้านเอกสารต่างๆ

ขอขอบพระคุณนางสาว วรรณิศา มุมทอง นางสาวสิริพัชร แสงสว่าง นายคณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย นายวงศ์วิศรุต เชื้องสตุง นายศราวุธ สุวรรณอรรถ นายนิติภูมิ อัสวธิติสกุล และนายกรวัฒน์ อินจินดา ที่คอยช่วยเหลือในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ รวมถึงคอยให้กำลังใจเสมอมา จนกระทั่งสำเร็จลุล่วงทุกประการ

นายเชาวนิตี เทียมแพ

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	VI
สารบัญตาราง	XVI
<b>บทที่ 1 บทนำ</b>	<b>1</b>
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา	2
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	2
1.4 ขั้นตอนของการวิจัย	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
<b>บทที่ 2 นิยาม ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</b>	<b>5</b>
2.1 ค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvalue and Eigenvector)	5
2.2 พหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial)	5
2.3 จาคอบีเยนเมทริกซ์ (Jacobian matrix)	5
2.4 จุดสมดุล (Equilibrium point)	6
2.5 การหาผลเฉลยจุดสมดุลของระบบ	8
2.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	10
2.7 รouth-herwitz (Routh-Hurwitz criteria)	14
2.8 ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (Basic Reproductive Number)	15
2.9 โรคมลาเรีย	16
2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	27
<b>บทที่ 3 วิธีดำเนินงานวิจัย</b>	<b>28</b>
3.1 วิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ	28
3.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมลาเรียตาม ชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์	35

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
<b>บทที่ 4 ผลการวิจัย</b>	41
4.1 กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดคงที่	41
4.2 กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดไม่คงที่	105
<b>บทที่ 5 สรุปผลการดำเนินงาน อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ</b>	187
5.1 กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดคงที่	187
5.2 กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดไม่คงที่	188
5.3 ข้อเสนอแนะ	189
<b>เอกสารอ้างอิง</b>	191
<b>ภาคผนวก</b>	193
ผลงานทางวิชาการ	194
<b>ประวัติผู้วิจัย</b>	224

## สารบัญรูป

รูปที่	หน้า	
2.1	การแพร่เชื้อจากผู้ป่วยรายแรกทำให้มีการติดเชื้อเพิ่มขึ้น	16
2.2	Ronald Ross นักจุลชีววิทยาชาวอังกฤษ	17
2.3	การระบาดของโรคมาลาเรีย ในปี 2554	18
2.4	ลักษณะการเกาะของยุงก้นปล่องขณะดูดกินเลือด	18
2.5	วงจรชีวิตของเชื้อมาลาเรีย	22
2.6	เม็ดเลือดแดงที่ถูกเชื้อมาลาเรียทำลาย	23
2.7	แสดงผู้ป่วยไทยและผู้ติดเชื้อมาลาเรียชนิด <i>P.falciparum</i> และ <i>P.vivax</i> ปีงบประมาณ พ.ศ. 2508-2554	25
2.8	แสดงผู้เสียชีวิตด้วยโรคมาลาเรีย ปีงบประมาณ พ.ศ. 2508-2554	26
2.9	แสดงสิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยโรคมาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย ปีงบประมาณ พ.ศ. 2554	26
3.1	แสดงสิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยโรคมาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย ปีงบประมาณ พ.ศ.2554	29
3.2	แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียชาวไทยและชาวต่างชาติ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2544-2554	30
3.3	แสดงผู้ป่วยรายเดือน (ผู้ป่วยไทย) ปีงบประมาณ พ.ศ. 2545-2554	30
3.4	แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียแยกตามอาชีพ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554	31
3.5	แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียแยกตามภาค ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554	32
3.6	แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียจำแนกตามกลุ่มอายุ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554	33
3.7	แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียแยกตามเพศ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554	33
3.8	แสดงการอพยพเข้า – ออก ของประชากรไทย ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554	34
3.9	แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรมนุษย์	37
3.10	แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของยุง	37
4.1	กราฟแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง ซึ่งสอดคล้องกับ เงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria	75
4.2	กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา	80
4.3	กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา	80
4.4	กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา	81
4.5	กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา	81



## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.21 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 15.5153$ และ $N_v = 300$	92
4.22 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7112$ และ $N_v = 1,000$	93
4.23 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 15.5153$ และ $N_v = 300$	93
4.24 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7112$ และ $N_v = 1,000$	94
4.25 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 15.5153$ และ $N_v = 300$	94
4.26 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.0362897973$ , $I_h(0) = 0.0006395983$ , $D_h(0) = 0.0014141936$ , $I_v(0) = 0.0076167201$ , $R_0 = 51.7112$	96
4.27 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.000001$ , $I_h(0) = 0.000001$ , $D_h(0) = 0.000001$ , $I_v(0) = 0.000001$ , $R_0 = 51.7112$	97
4.28 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.0362897973$ , $I_h(0) = 0.0006395983$ , $D_h(0) = 0.0014141936$ , $I_v(0) = 0.0076167201$ , $R_0 = 51.7112$	97
4.29 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.000001$ , $I_h(0) = 0.000001$ , $D_h(0) = 0.000001$ , $I_v(0) = 0.000001$ , $R_0 = 51.7112$	98
4.30 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.0362897973$ , $I_h(0) = 0.0006395983$ , $D_h(0) = 0.0014141936$ , $I_v(0) = 0.0076167201$ , $R_0 = 51.7112$	98
4.31 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.000001$ , $I_h(0) = 0.000001$ , $D_h(0) = 0.000001$ , $I_v(0) = 0.000001$ , $R_0 = 51.7112$	99

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.32 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.0362897973$ , $I_h(0) = 0.0006395983$ , $D_h(0) = 0.0014141936$ , $I_v(0) = 0.0076167201$ , $R_0 = 51.7112$	99
4.33 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $S_h(0) = 0.000001$ , $I_h(0) = 0.000001$ , $D_h(0) = 0.000001$ , $I_v(0) = 0.000001$ , $R_0 = 51.7112$	100
4.34 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและ สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	101
4.35 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของสัดส่วนประชากรที่เสี่ยง ต่อการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	102
4.36 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนประชากรที่มี เชื้อฝังตัวอยู่ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	102
4.37 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนประชากรที่ฟื้น จากการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	103
4.38 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	103
4.39 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและ สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	104
4.40 กราฟแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาคเรื่อริง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria	144
4.41 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา	148
4.42 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา	149
4.43 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา	149



## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.57 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ), จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) และจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )	157
4.58 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา	158
4.59 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา	158
4.60 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา	159
4.61 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อเทียบกับเวลา	159
4.62 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา	160
4.63 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา	160
4.64 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ )	161
4.65 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )	161
4.66 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )	162
4.67 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )	162
4.68 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )	163
4.69 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )	163
4.70 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) กับจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ )	164
4.71 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) และจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )	164

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.72 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) และจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )	165
4.73 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ), จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) และจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )	165
4.74 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ), จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) และจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )	166
4.75 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7918$ และ $L = 7,000$	169
4.76 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 2.22231$ และ $L = 300$	169
4.77 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7918$ และ $L = 7,000$	170
4.78 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 2.22231$ และ $L = 300$	170
4.79 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7918$ และ $L = 7,000$	171
4.80 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 2.22231$ และ $L = 300$	171
4.81 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7918$ และ $L = 7,000$	172
4.82 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 2.22231$ และ $L = 300$	172
4.83 กราฟแสดงจำนวนผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7918$ และ $L = 7,000$	173





สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.84 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 2.22231$ และ $L = 300$	173
4.85 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 51.7918$ และ $L = 7,000$	174
4.86 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 2.22231$ และ $L = 300$	174
4.87 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83,$ $\bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 3.10$	176
4.88 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10,$ $\bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$	176
4.89 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83,$ $\bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 3.10$	177
4.90 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10,$ $\bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$	177
4.91 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83,$ $\bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 3.10$	178
4.92 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10,$ $\bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$	178
4.93 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83, \bar{R}_h(0) = 1,384.75,$ $\bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 3.10$	179

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.94 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10,$ $\bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$	179
4.95 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83,$ $\bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 3.10$	180
4.96 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10,$ $\bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$	180
4.97 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83,$ $\bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 3.10$	181
4.98 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10,$ $\bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$	181
4.99 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจำนวนประชากรที่เสี่ยง ต่อการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	183
4.100 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนประชากรที่ติดเชื้อ และสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	183
4.101 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	184
4.102 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนประชากรที่ฟื้น จากการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ $\longrightarrow$ แทนความเสถียรภาพ และ $\dashrightarrow$ แทนความไม่เสถียรภาพ	184

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.103 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  แทนความเสถียรภาพ และ  แทนความไม่เสถียรภาพ	185
4.104 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนยุงที่ติดเชื้อและ สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  แทนความเสถียรภาพ และ  แทนความไม่เสถียรภาพ	185

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า	
3.1	สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองสำหรับมนุษย์และยุง	35
4.1	ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะไร้โรค โดยประชากรทั้งหมดคงที่	76
4.2	ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะระบาดเรื้อรังโดยประชากรทั้งหมดคงที่	78
4.3	แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่ของผลเฉลยเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานและจำนวนยุงทั้งหมดแตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดคงที่	95
4.4	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดคงที่	100
4.5	ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะไร้โรค โดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่	145
4.6	ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะระบาดเรื้อรังโดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่	147
4.7	แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่ของผลเฉลยเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานและจำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้นแตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่	175
4.8	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่	182

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

โรคมาลาเรียเป็นปัญหาสาธารณสุขที่สำคัญในประเทศไทย เนื่องจากโรคมาลาเรียพบในประเทศเขตร้อน องค์การอนามัยโรคประมาณกันว่าในแต่ละปีจะมีผู้ป่วยเป็นมาลาเรียถึงปีละ 300-400 ล้านคนทั่วโลกและมีคนเสียชีวิตปีละประมาณ 1 ล้านคน โดยส่วนใหญ่เกิดในทวีปแอฟริกา ส่วนในประเทศไทยเองสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า โดยเฉพาะตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่น ชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา โดยจังหวัดที่มีการรายงานพบผู้ป่วยมาลาเรียเป็นจำนวนมากคือ จังหวัดตาก กาญจนบุรี ตราด ราชบุรี และแม่ฮ่องสอน เป็นต้น โดยจะพบในเขตพื้นที่ที่เป็นป่าเขาเท่านั้น ไม่พบมาลาเรียในเขตเมือง

ด้วยการเล็งเห็นความสำคัญของชีวิตและทรัพย์สินของประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคนี้ ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รวบรวมมาจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปีงบประมาณ พ.ศ. 2508-2554 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหาโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรีย เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย และใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวังของสำนักระบาดวิทยาและกรมควบคุมโรคติดต่อ กระทรวงสาธารณสุขต่อไป





### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เสนอแนวทางใหม่ในการลดการระบาดของโรคมัลเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ โดยที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร
2. เป็นแนวทางวิจัยสำหรับผู้ที่มีความสนใจเกี่ยวกับวิธีการควบคุมการระบาดของโรคควบคู่ไปกับแนวทางความคิดเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
3. เป็นแนวทางสำหรับการลดจำนวนผู้ที่ป่วยเป็น โรคมัลเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในแต่ละปี

## บทที่ 2

### นิยาม ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 ค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvalue and Eigenvector)

นิยามที่ 2.1.1 ให้  $A$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $n \times n$ ,  $X$  เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน  $\mathbb{R}^n$ ,  $X$  เรียกว่า เป็น **เวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvector)** ของ  $A$  ก็ต่อเมื่อ  $AX = \lambda X$  สำหรับบางค่าสเกลาร์ โดยที่ สเกลาร์  $\lambda$  เรียกว่า **ค่าเฉพาะ  $A$  (Eigenvalue)**

#### 2.2 ฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial)

นิยามที่ 2.2.1 ให้  $A$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $n \times n$ ,  $\det(A - \lambda I_n)$  เรียกว่า **ฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial function)** และสมการ  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  เรียกว่า **สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)**

#### 2.3 จาคอเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix)

นิยามที่ 2.3.1 ให้  $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$  และ  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของ  $x$  โดยที่  $f(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m(x)]^T$  ดังนั้น อนุพันธ์ของ  $f(x)$  เทียบกับ  $x$  เรียกว่า **จาคอเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix)** หรือ **จาคอเบียนของ  $f(x)$**  นิยามโดย

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

## 2.4 จุดสมดุล (Equilibrium point)

นิยาม 2.4.1 จุด  $X_e \in \mathbb{R}^n$  เป็น จุดสมดุล (Equilibrium point) ของ

$$\frac{dX_e}{dt} = f(t, X_e) \quad (2.1)$$

เมื่อ  $f(t, X_e) = 0$

ถ้า  $X_e$  เป็นจุดสมดุลของ (2.1) แล้ว  $X_e$  เป็นจุดสมดุลสำหรับทุกๆ  $t$

นิยาม 2.4.2 จุดสมดุลของสมการ (2.1) มีความเสถียรภาพ ถ้าสำหรับทุกๆ  $\delta > 0$  และ  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  มี

$\omega(\delta, t_0) > 0$  ซึ่งทำให้  $|u(t, t_0, \gamma)| < \delta$  สำหรับทุกๆ  $t \geq t_0$  เมื่อ  $|\gamma| < \omega(\delta, t_0)$  และ  $u(t, \gamma)$  เป็น

คำตอบของสมการ(2.1)

นิยาม 2.4.3 จุดสมดุลของสมการ(2.1)มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically stable)

เมื่อ 1. จุดสมดุล ของสมการ (2.1) มีความเสถียรภาพ และ

2. สำหรับทุกๆ มี  $\varepsilon(t_0) > 0$  ซึ่งทำให้  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, t_0, \gamma) = 0$  เมื่อ  $|\gamma| < \varepsilon$

นิยาม 2.4.4 จุดสมดุล ของสมการ (2.1) ไม่มีความเสถียรภาพ เมื่อ  $t_0 \geq 0$  และลำดับ  $\gamma_n \rightarrow 0$  ของ

จุดเริ่มต้นและลำดับ  $t_m$  ซึ่ง  $|u(t_0 + t_m, t_0, \gamma_m)| \geq \gamma$  สำหรับทุกๆ  $m, t_m \geq 0$

โดยทั่วไปมีการพิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งสองสมการ มาใช้ดังนี้

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y) \quad (2.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y) \quad (2.3)$$

เมื่อ  $f_1$  และ  $f_2$  เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นและให้  $(\bar{X}, \bar{Y})$  เป็นจุดสมดุล แล้ว

$$f_1(\bar{X}, \bar{Y}) = f_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$$

จัดผลเฉลยให้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$X(t) = \bar{X} + x(t) \quad (2.4)$$

$$Y(t) = \bar{Y} + y(t) \quad (2.5)$$

วิธีการนี้เรียกว่า เพอร์เทอร์เบชัน (Perturbation) ของจุดสมดุล จากนั้นแทน (2.4) และ (2.5) ใน (2.2) และ (2.3) จะได้

$$\frac{d}{dt}(\bar{X} + x) = f_1(\bar{X} + x, \bar{Y} + y)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{Y} + y) = f_2(\bar{X} + x, \bar{Y} + y)$$

ต่อไปกระจายอนุพันธ์ทางซ้ายและกระจาย  $f_1$  และ  $f_2$  ทางขวาโดยอนุกรมเทเลอร์รอบจุดสมดุล  $(\bar{X}, \bar{Y})$  แล้วจะได้ว่า

$$\frac{d\bar{X}}{dt} + \frac{dx}{dt} = f_1(\bar{X}, \bar{Y}) + f_{1_x}(\bar{X}, \bar{Y})x + f_{1_y}(\bar{X}, \bar{Y})y + \quad (2.6)$$

พจน์ของอันดับ  $x^2, y^2, xy$  และอันดับที่สูงขึ้น

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} + \frac{dy}{dt} = f_2(\bar{X}, \bar{Y}) + f_{2_x}(\bar{X}, \bar{Y})x + f_{2_y}(\bar{X}, \bar{Y})y + \quad (2.7)$$

พจน์ของอันดับ  $x^2, y^2, xy$  และอันดับที่สูงขึ้น

เมื่อ  $f_{1_x}(\bar{X}, \bar{Y})$  เป็น  $\frac{\partial f_1}{\partial t}$  ถูกคำนวณที่  $(\bar{X}, \bar{Y})$  และในทำนองเดียวกันสำหรับ

$f_{1_y}(\bar{X}, \bar{Y}), f_{2_x}(\bar{X}, \bar{Y}), f_{2_y}(\bar{X}, \bar{Y})$  และพจน์อื่นๆด้วย

โดยนิยามของจุดสมดุลได้ว่า  $\frac{d\bar{X}}{dt} = 0, \frac{d\bar{Y}}{dt} = 0, f_1(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$  และ  $f_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$  ดังนั้น

จากสมการ (2.6) และ (2.7) จะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$

จากนิยาม  $J$  เป็นจาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (2.2) และ (2.3) โดย

$$J(\bar{X}, \bar{Y}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y})}$$

เรียก  $J(\bar{X}, \bar{Y})$  ว่าจาโคเบียนเมทริกซ์ของระบบสมการ

กำหนดให้ 
$$\alpha = \text{trace}(J(\bar{X}, \bar{Y})) = a_{11} + a_{22}$$

$$\beta = \det(J(\bar{X}, \bar{Y})) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

และ 
$$\gamma = \text{discriminant} = \alpha^2 - 4\beta$$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ  $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$  ดังนั้น ค่าเฉพาะจะอยู่ในรูปของ  $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\gamma}}{2}$  ซึ่ง

ระบบเชิงเส้น สามารถมีจุดสมดุลได้มากกว่าหนึ่งจุด

**ทฤษฎีบท 2.4.1** จุดสมดุลของสมการ (2.1) มีเสถียรภาพ ถ้าค่าเฉพาะของ  $J$  ทั้งหมดมีส่วนจริงเป็นลบ

## 2.5 การหาผลเฉลยจุดสมดุลของระบบ

### 2.5.1 แบบจำลองจุดสมดุลของระบบเชิงเส้นชนิดไม่ต่อเนื่อง

สมการผลต่างไม่เชิงเส้น คือ สมการที่อยู่ในรูปของ

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots)$$

เมื่อ  $x_n$  คือค่าของ  $x$  ในลำดับที่  $n$  และ  $f$  เป็นฟังก์ชันของการทำซ้ำๆกัน

ผลเฉลยจุดสมดุลของระบบ ซึ่งเมื่อ  $\bar{x}$  ถูกกำหนดให้ค่าสัมพัทธ์ได้อย่างชัดเจน คือ

$$x_{n+1} = x_n = \bar{x}$$

ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงในลำดับที่  $n$  ถึงลำดับที่  $n+1$  จากสมการที่อยู่ในรูป  $x_{n+1} = f(x_n)$  จะได้รูปแบบความสัมพันธ์ที่เข้าใจได้ง่ายขึ้นอีก คือ

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

**นิยาม 2.5.1** จุด  $\bar{x}$  เป็น จุดตรึง ของฟังก์ชัน  $f$  ก็ต่อเมื่อ  $f(\bar{x}) = \bar{x}$

### 2.5.2 แบบจำลองจุดสมดุลของระบบสมการชนิดต่อเนื่อง

การหาจุดสมดุลของระบบ หาได้โดยพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{dX_1}{dt} = F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

.

.

.

$$\frac{dX_n}{dt} = F_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \quad (2.8)$$

ผลเฉลยจุดสมดุลของระบบสมการนี้ สามารถหาได้จากการจัดให้สมการทุกสมการของ (2.8)

เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$$

$$F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$$

•  
•  
•

$$F_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$$

## 2.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามหนึ่งตัว หรือหลายตัวเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือหลายตัว โดยที่ฟังก์ชันสามารถแบ่งได้ดังนี้

1). สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential Equation) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์เชิงสามัญของตัวแปรตาม (หนึ่งตัวหรือมากกว่า) เทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวเท่านั้น เช่น

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \quad (\text{Chevbyshev differential equation})$$

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (\text{Newton's second law})$$

2). สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential Equation) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตาม (หนึ่งตัวหรือมากกว่า) เทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว เช่น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{1D-wave equation})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ระดับชั้น (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือกำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยพิจารณาหลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว เช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 1}$$

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ระดับชั้น 1}$$

และสมการอันดับที่  $n$  จะอยู่ในรูปแบบ

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

หรือ 
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่  $n$  หมายถึงฟังก์ชัน  $f$  ซึ่ง  $y = f(x)$  ที่นิยามบนช่วง  $I$  และ

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \in I$$

### 2.6.1 วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตานี้ พัฒนามาจากวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงดังนี้

จากสูตรของออยเลอร์

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

สำหรับวิธีรุงเง-คุดตานี้ กำหนดให้

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1)$$

อนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

$$f(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1) = f(x_i, y_i) + \alpha h f_x + \beta k_1 f_y + \frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha h \beta k_1 f_{xy} + \frac{\beta^2 k_1^2}{2} f_{yy} + \dots$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i + \alpha h, \beta h f(x_i, y_i)) \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 + a_2) hf + a_2 \alpha h^2 f_x + a_2 \beta h^2 f_y f + a_2 h^3 \left( \frac{\alpha^2}{2} f_{xx} + \alpha \beta f_{xy} f + \frac{\beta^2}{2} f_{yy} f^2 \right) + \dots$$

ปัญหาค่าเริ่มต้น  $y' = f(x, y)$  เมื่อ  $y(x_0) = y_0$  อนุกรมเทย์เลอร์รอบ  $x = x_i$  จะได้

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf + \frac{h^2}{2} f_x + \frac{h^2}{2} f_y f + \frac{h^3}{6} (f_{xx} 2f_y f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + \dots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์  $y(x_{i+1})$  และ  $y_{i+1}$  ได้  $a_1 + a_2 = 1$ ,  $a_2 \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 \beta = \frac{1}{2}$

1. ถ้า  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \alpha = 1$  จะได้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

เรียกสูตรรุงเง-คุดตาอันดับที่สอง สูตรที่ 1

2. ถ้า  $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}, \beta = \alpha = \frac{2}{3}$  จะได้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1\right)$$

เรียกสูตรรุ่งเง-กูดตาอันดับที่สอง สูตรที่ 2

3. สูตรรุ่งเง-กูดตาอันดับที่สาม

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1)$$

4. สูตรรุ่งเง-กูดตาอันดับที่สี่

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

สูตรรุ่งเง-กูดตาอันดับที่สี่ เป็นสูตรที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

## 2.7 รouth-Hurwitz criteria

จากเวกเตอร์สัญกรณ์ (vector notation)

$$N' = F(N) \quad (2.9)$$

สำหรับ  $N = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  โดยที่แต่ละฟังก์ชัน  $f_1, f_2, \dots, f_k$  จะขึ้นอยู่กับทุกชนิดหรือบางชนิดของ  $N_1, N_2, \dots, N_k$

จากสมการเชิงเส้น (2.9) จะได้จาโคเบียนของ  $F(N)$  อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$J = \frac{\partial F}{\partial N}(N)$$

หรือ

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1}{\partial N_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial N_1} & \frac{\partial f_k}{\partial N_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}_N$$

โดยที่  $J$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $k \times k$  ค่าเฉพาะ (eigenvalue)  $\lambda$  ของเมทริกซ์จะสอดคล้องกับ

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

ซึ่ง  $\lambda$  จะต้องสอดคล้องกับสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) ที่อยู่ในรูปแบบ

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \dots + a_k = 0 \quad (2.10)$$

จากสมการลักษณะเฉพาะ (2.10) กำหนดให้มี  $k$  เมทริกซ์ จะได้ว่า

$$H_1 = (a_1)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$H_j = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{pmatrix}$$

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

โดยที่เทอมของ  $(l, m)$  ในเมทริกซ์  $H_k$  คือ

$$a_{2l-m} \quad \text{สำหรับ } 0 < 2l - m \leq k$$

$$1 \quad \text{สำหรับ } 2l = m$$

$$0 \quad \text{สำหรับ } 2l < m \text{ หรือ } 2l > k + m$$

แล้วทุกค่าเจาะจงจะต้องมีส่วนจริงเป็นลบ สภาวะคงที่ (steady-state)  $N$  จะเสถียรภาพก็

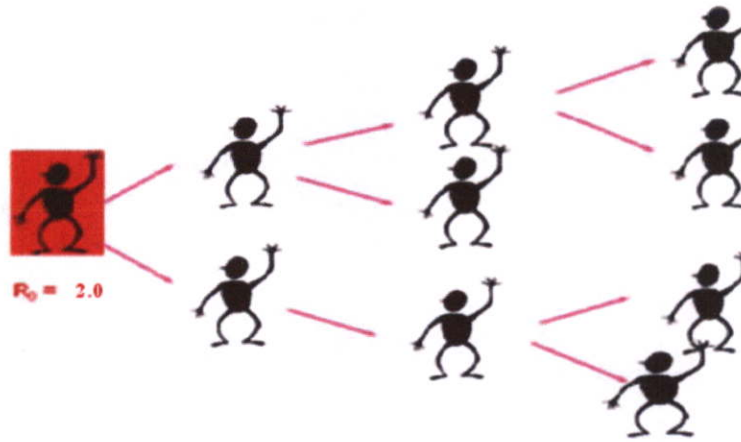
ต่อเมื่อดีเทอร์มิแนนต์ของทุกเมทริกซ์ Hurwitz จะต้องเป็นบวก ซึ่งก็คือ  $\det H_i > 0$  โดยที่

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

## 2.8 ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (Basic Reproductive Number)

ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (Basic Reproductive Number) หรือ  $R_0$  หมายถึงจำนวนเฉลี่ยของผู้ที่ติดเชื้อ

รายใหม่ในประชากรที่ไม่มีภูมิคุ้มกัน ที่เกิดขึ้นจากผู้ป่วยรายแรกแพร่เชื้อให้



รูปที่ 2.1 การแพร่เชื้อจากผู้ป่วยรายแรกทำให้มีการติดเชื้อเพิ่มขึ้น

จากรูปที่ 2.1 ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน หรือ  $R_0$  มีค่าเท่ากับ 2.0 หมายความว่าผู้ป่วยรายแรกสามารถแพร่เชื้อต่อทำให้มีผู้ติดเชื้ออีก 2.0 ราย โดยเฉลี่ย

## 2.9 โรคมalaria

### 2.9.1 ประวัติศาสตร์

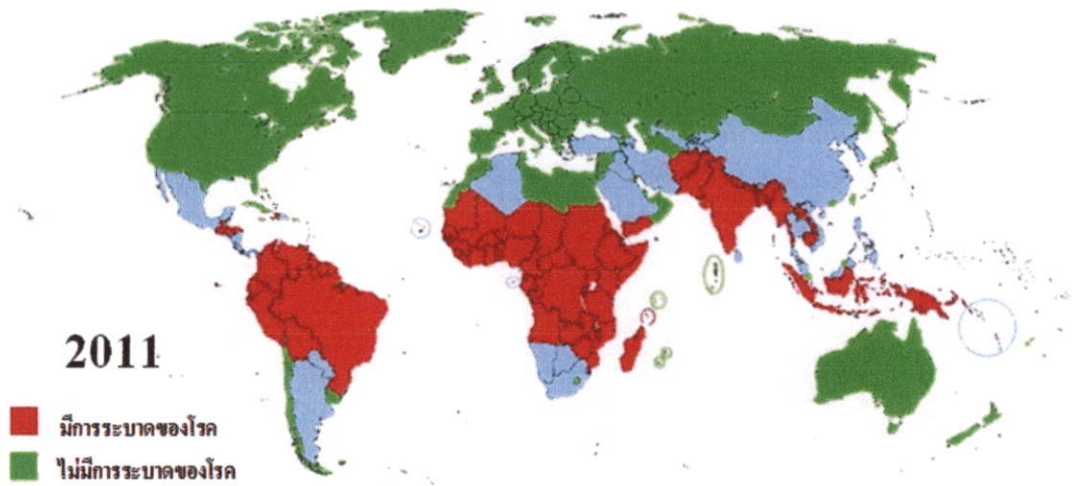
โรคมalaria เป็นโรคที่ระบาดและคุกคามมาตั้งแต่เมื่อ 1,500 ปีก่อน แพทย์ชาวกรีกชื่อ ฮิปโปคราเตส ได้พบว่า malaria เป็นโรคชนิดหนึ่งที่มีสาเหตุจากการที่ผู้ป่วยใช้ชีวิตใกล้ชิดกับบริเวณที่มีน้ำนิ่ง แต่ฮิปโปคราเตสไม่รู้ว่าโรคนี้อาจมีสาเหตุที่แท้จริงมาจากเชื้อปรสิตในยุง นอกจากนี้กรุงโรมในอดีตเมื่อ 700 ปีก่อนก็เคยถูกคุกคามด้วยโรคมalaria จนกระทั่งทางรัฐบาลต้องออกกฎหมายให้กำจัดแหล่งน้ำเน่าในเมืองให้หมด บุคคลสำคัญในสมัยนั้นที่เสียชีวิตด้วยโรคมalaria ได้แก่ กวีดานเต้ และสันตะปาปาซิกคัสที่ 5 ชาวโรมันในสมัยนั้นจึงได้ตั้งชื่อโรคร้ายนี้ว่า มalaria (malaria) ซึ่งมาจากการสนธิคำว่า “mal” ที่แปลว่า “เสีย” กับคำว่า “aria” ที่แปลว่า “อากาศ” เพราะในสมัยนั้นเชื่อว่าอากาศเสียคือสาเหตุที่ทำให้คนเป็นโรคนี

ในปี พ.ศ. 2423 ชาร์ลลูยส์ อาลฟงส์ ลาฟว์ร็อง แพทย์ทหารชาวฝรั่งเศสซึ่งขณะนั้นทำงานอยู่ที่ประเทศแอลจีเรียได้สังเกตเห็นเชื้อมาลาเรียในเลือดของคนป่วย โดยใช้กล้องจุลทรรศน์แต่เขาไม่รู้ว่าเชื้อโรคที่เห็นนั้นมาจากแหล่งใด อย่างไรก็ตามความสับสนเกี่ยวกับที่มาของโรคมมาลาเรียได้ถูกเปิดเผยเป็นครั้งแรกโดย จีโอเวนนี่ บาติस्ता กราสซี นักชีววิทยาชาวอิตาลี พบเชื้อมาลาเรียในยุงก้นปล่องตัวเมียและในขณะเดียวกัน โรนัลด์ โรส นักจุลชีววิทยาชาวอังกฤษซึ่งขณะนั้นทำงานอยู่ที่โรงพยาบาลไฮเดอราบัด ประเทศอินเดีย เมื่อโรนัลด์ โรส สามารถพิสูจน์ได้ว่าเชื้อพยาธิที่ ชาร์ลลูยส์ อาลฟงส์ ลาฟว์ร็อง เห็นนั้นมาจากการที่คนถูกยุงก้นปล่องกัด จากการค้นพบนี้ทำให้โรนัลด์ โรส ได้รับรางวัลโนเบล สาขาการแพทย์



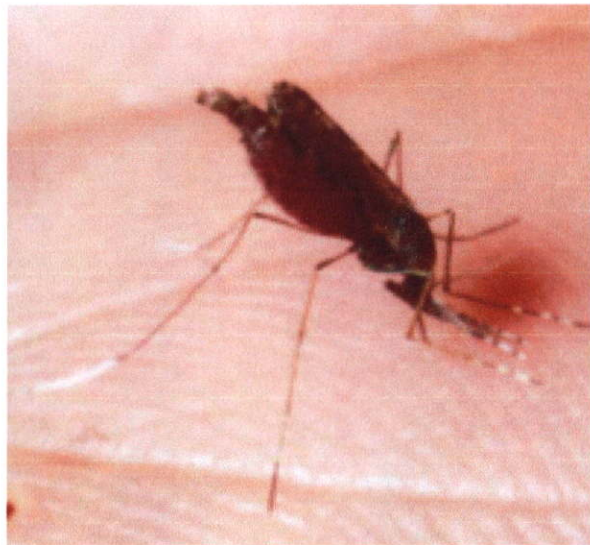
รูปที่ 2.2 Ronald Ross นักจุลชีววิทยาชาวอังกฤษ

องค์การอนามัยโรคประมาณกันว่าในแต่ละปีจะมีผู้ป่วยเป็นมาลาเรียถึงปีละ 300-400 ล้านคนทั่วโลกและมีคนเสียชีวิตปีละประมาณ 1 ล้านคน โดยส่วนใหญ่เกิดในทวีปแอฟริกา ส่วนในประเทศไทยเองสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า โดยเฉพาะตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่นชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา



รูปที่ 2.3 การระบาดของโรคมาลาเรีย ในปี 2554

### 2.9.2 ยุงพาหะนำโรคไข้มาลาเรีย



รูปที่ 2.4 ลักษณะการเกาะของยุงก้นปล่องขณะดูดกินเลือด

ยุงพาหะนำโรคไข้มาลาเรีย ในประเทศไทย คือ ยุงก้นปล่อง (*Anopheles* spp.) เนื่องจากเวลาที่

ยุงกัดคน มันจะเกาะ โดยยกก้นขึ้นทำมุมกับผิวหนัง 45 องศา

ยุงก้นปล่อง ที่เป็นพาหะหลักของการนำเชื้อ โรคมาลาเรียที่สำคัญ ได้แก่

1. *Anopheles dirus*
2. *Anopheles minimus*
3. *Anopheles maculatus*
4. *Anopheles sudaicus*

**2.9.2.1 *Anopheles dirus*** ส่วนของปาก ( *proboscis* ) จะยาวเกือบเท่าระยะค้ำปาก ( *maxillary palpi* ) และส่วนปลายอก ( *scutellum* ) จะโค้งเรียบไม่มี รอยหยัก ส่วนขาจะขาลายทั้ง 3 คู่ ข้อต่อระหว่างขาคู่ หลังตรงส่วน *Tibia* และ *Tarsi* จะมีปีกขาวยาวมาก เห็นได้ชัดเจน

*Anopheles Dirus* พบในป่าที่ขอบออกไปตามแอ่งน้ำนิ่งขังตามธรรมชาติ ลักษณะนิสัยคือ ชอบกินเลือดคนมาก ไม่ชอบกินเลือดสัตว์อื่นออกหากินตอนกลางคืนถึงเช้ามืด แต่ถ้าป่าทึบมากๆ ก็หากินช่วงกลางวันด้วย ยุงชนิดนี้ เป็นชนิดที่มีความสามารถในการแพร่เชื้อมาลาเรียมากกว่ายุงพาหะชนิดอื่นในประเทศไทย

**2.9.2.2 *Anopheles minimus*** ลักษณะปาก ระยะค้ำปากและส่วนปลายของอกคล้าย *Anopheles dirus* แต่ ส่วนของปากและขาคล้าย *Anopheles Minimus* พบตามชายป่า ชอบวางไข่ในลำธาร น้ำใส ไหลเอื่อยๆ ยุง *Anopheles* ชอบออกไข่ในน้ำนิ่ง ดังนั้น วิธีหนึ่งที่เราจะช่วยกำจัดมาลาเรียคือ ทำลายแหล่งน้ำนิ่งทั้งในและนอกบ้านให้หมดสิ้น

**2.9.2.3 *Anopheles maculatus*** ลักษณะปาก, ระยะค้ำปาก และส่วนปลายของอกคล้าย *Anopheles dirus* แต่ลักษณะของขาจะลายทั้ง 3 คู่ ขาคู่หลังจะมีปื้นขาวที่ส่วนปลาย

**2.9.2.4 Anopheles sudaicus** ลักษณะปาก,ระยางค์ปาก และส่วนปลายของอก คล้าย Anopheles dirus แต่ลักษณะของขาทุกขา จะมีจุดขาวเป็นกระ ไม่มีปื้นขาวเลย

ยุงมีปากที่เป็นท่อแหลมสำหรับดูดเลือดจากคนเพื่อเอา โปรตีน ไปสร้างไข่ ยุงตัวเมียมักออกหาเหยื่อเวลากลางคืน โดยใช้ปากที่มีลักษณะเป็นท่อเจาะผิวหนังเพื่อดูดกินเลือด กระบวนการนี้ ตามปกติจะดำเนินไปโดยเหยื่อไม่รู้ตัว เนื่องจากยุงจะปล่อยน้ำลายออกมา เพื่อทำหน้าที่เป็นยาชา ทำให้คนถูกกัดไม่รู้สึกรู้เจ็บ ซึ่งน้ำลายนี้เองที่มีเชื้อมาลาเรีย โดยยุงได้เชื้อมาจากคนที่มันไปกัดมาก่อน

### 2.9.3 เชื้อมาลาเรีย

ในปัจจุบันนี้ วิทยาการทางการแพทย์ก้าวหน้าขึ้น ทำให้มีการค้นพบว่า เชื้อมาลาเรียเกิดจากเชื้อปรสิตสกุล พลาสโมเดียม 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม ไวเวกซ์ โอวัลต์และมาลาเรีย โดยฟัลซิพารัมและมาลาเรีย ทำลายเซลล์เม็ดเลือดแดงทุกระยะ แต่ไวเวกซ์และโอวัลต์นั้นจะฆ่าเฉพาะเซลล์เม็ดเลือดแดงที่ยังเจริญเติบโตไม่สมบูรณ์เท่านั้น โดยเชื้อที่มีความสำคัญในบ้านเรามี 2 ชนิดคือ เชื้อพลาสโมเดียมฟัลซิพารัมและพลาสโมเดียมไวเวกซ์

#### 2.9.3.1 พลาสโมเดียมฟัลซิพารัมมาลาเรีย

เป็นเชื้อพลาสโมเดียมชนิดที่รุนแรงและเป็นอันตรายมากที่สุด จึงมีชื่อว่า “malignant malaria” ผู้ที่ได้รับเชื้อนี้เข้าไปและไม่ได้รับการรักษาจะมีอาการรุนแรงเกิดเป็นมาลาเรียขึ้นสมองได้ แต่ถ้าได้รับการรักษาและหายจากโรคแล้วมักจะหายเป็นปกติ โดยไม่มีอาการอื่นหลงเหลืออีกเลย ผู้ป่วยฟัลซิพารัมมาลาเรียจะเกิดภาวะแทรกซ้อนต่างๆ ได้บ่อย เช่น เกิดภาวะน้ำตาลในเลือดต่ำ เกิดภาวะความเป็นกรดเกินและเสียชีวิตจากปอดบวมน้ำหรือไตวายได้

ผู้ป่วยฟัลซิพารัมมาลาเรีย ในระยะแรกของโรคจะมีอาการไข้ ปวดเมื่อยตามตัว คลื่นไส้ อาเจียน ปวดท้องหรือท้องเดิน บางคนอาจไอหรือลักษณะคล้ายไข้หวัดได้ใน 4 – 5 วันแรกของโรค ไข้จะสูงตลอดเวลา เนื่องจากการแตกของเม็ดเลือดแดงแต่ละชุดไม่พร้อมกัน แต่หลังจากเชื้อมาลาเรียเจริญอยู่ในระยะเดียวกันแล้วเม็ดเลือดแดงจะแตกพร้อมกันทุก 48 ชั่วโมง จึงให้ชื่อว่า tertian malaria ผู้ป่วยอาจซึมและเหลือง ตับม้ามโต

### 2.9.3.2 พลาสโมเดียมไวเวกซ์

ผู้ป่วยที่เป็นไวเวกซ์มาลาเรียมักจะไม่เสียชีวิต จึงมีชื่อว่า “benign tertian malaria” แต่ผู้ป่วยจะเป็นโรคซ้ำอีก อาการของผู้ป่วยไวเวกซ์มาลาเรียจะมีลักษณะคล้ายกับฟัลซิพารัมมาลาเรีย แต่จะพบหนาวสั่นได้บ่อยกว่า และขณะเกิดหนาวสั่นมักมีอาการปวดหัว ปวดกล้ามเนื้อมาก ผู้ป่วยที่ไม่ได้รับการรักษาอาการไข้จะค่อยๆ ทุเลาและหายได้ แต่จะเป็นซ้ำได้อีกภายใน 2 ปี นานที่สุด 8 ปี

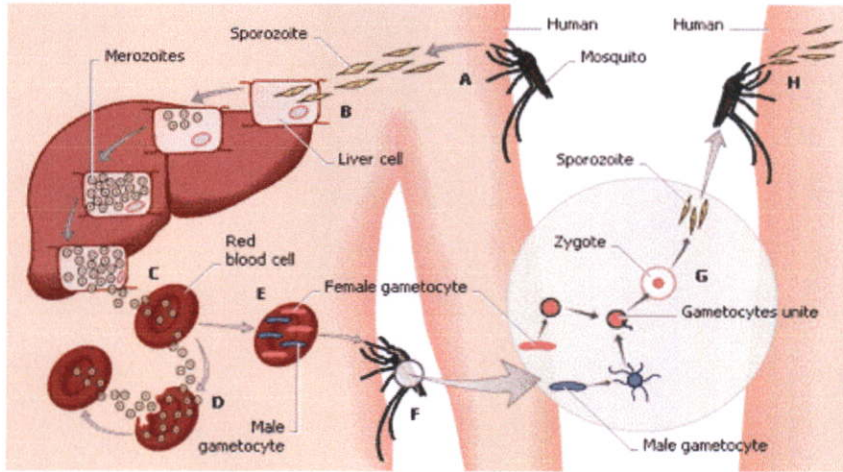
### 2.9.3.3 พลาสโมเดียมโอวัลเด่

อาการทางคลินิกของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดโอวัลเด่ จะมีลักษณะคล้ายกับไวเวกซ์มาลาเรีย แต่จะมีอาการน้อยกว่า และมีเชื้อกลับเป็นซ้ำน้อยกว่า ถ้าไม่ได้รับการรักษาอาการไข้จะทุเลาและหายไปได้เอง แต่เป็นซ้ำได้อีกภายใน 1 ปี นานที่สุด 5 ปี

### 2.9.3.4 พลาสโมเดียมมาลารีอิ

เชื้อมาลารีอิมาลาเรีย ทำให้ผู้ป่วยมีไข้หนาวสั่นวันเว้น 3 วัน คือมีไข้วันที่ 1 แล้วสบายอยู่ 3 วัน วันที่ 4 จึงมีไข้อีก จึงเรียกว่า “quartan malaria” ผู้ป่วยมักไม่มีอาการรุนแรง และกว่าจะเกิดอาการไข้ อาจใช้เวลานานเป็นปี เชื้อมาลารีอิอยู่ในคนได้เป็นเวลานานหลายปี มีรายงานนานถึง 53 ปี

## 2.9.4 วงชีวิตของเชื้อมาลาเรีย

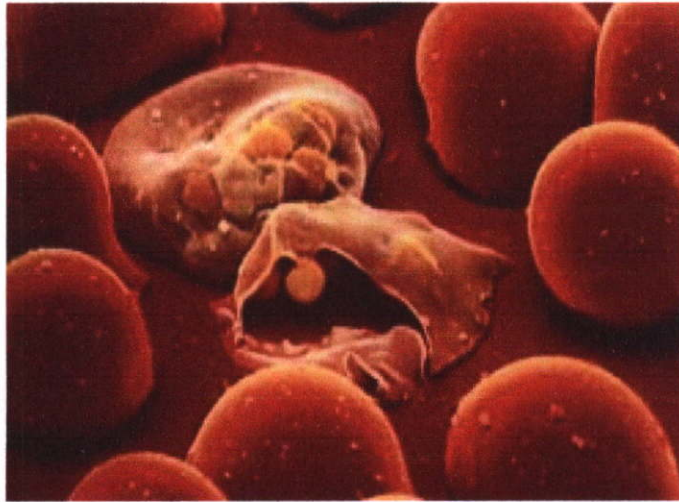


รูปที่ 2.5 วงจรชีวิตของเชื้อมาลาเรีย

การติดเชื้อมาลาเรีย เริ่มเมื่อยุงที่ติดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์มากัดคนมนุษย์และปล่อยเชื้อมาลาเรียระยะสปอโรซอइटเข้าสู่กระแสเลือด จากนั้นเชื้อระยะสปอโรซอइटจะเข้าสู่เซลล์ตับ เพื่อเจริญเติบโตและแบ่งตัวจนได้เซลล์เล็กๆจำนวนมากมาย ซึ่งเรียกว่าเมอโรซอइट และเรียกเชื้อระยะนี้ว่าสคิซอนต์ เมื่อเชื้อระยะสคิซอइटแตก จะปลดปล่อยเมอโรซอइटจำนวนมากเข้าสู่กระแสเลือด เมอโรซอइटจะรุกรานเข้าสู่เซลล์เม็ดเลือดแดง เจริญเติบโตเป็นเชื้อระยะริงค์ฟอร์ม โตรโฟซอइट และสคิซอนต์ซึ่งภายในมีเมอโรซอइटจำนวนมากมาย เมื่อสคิซอนต์เจริญเติบโตเต็มที่แตกและปลดปล่อยเมอโรซอइटจำนวนมากมาย

จากนั้นเมอโรซอइटเหล่านี้ จะรุกรานเข้าสู่เซลล์เม็ดเลือดแดงอีกครั้งและดำเนินวงจรชีวิตในกระแสเลือดต่อไป อย่างไรก็ตามจะมีเชื้อบางส่วนที่จะพัฒนาเป็นเซลล์สืบพันธุ์เพศผู้และเพศเมีย เมื่อยุงก้นปล่องกัดคนมนุษย์ที่ติดเชื้อมาลาเรียก็จะได้รับเชื้อระยะเซลล์สืบพันธุ์เข้าไป เซลล์สืบพันธุ์ดังกล่าวจะปฏิสนธิกลายเป็นไซโกทภายในทางเดินอาหารส่วนกลางของยุง จากนั้นไซโกทจะพัฒนาต่อไปเป็นเชื้อระยะโอโอไคโนิต ซึ่งจะไซทะลุผนังของทางเดินอาหารกลายเป็นโอโอซิสต์

ซึ่งภายในมีเชื้อระยะสปอโรซอยต์ เมื่อโอโอซิสต์เจริญเติบโตเต็มที่แล้วจะปลดปล่อยเชื้อระยะสปอโรซอยต์ ซึ่งจะเคลื่อนที่เข้าสู่ต่อมน้ำลายของยุงและเมื่อยุงกัดมนุษย์ เชื้อระยะสปอโรซอยต์ก็จะถ่ายทอดเข้าสู่ร่างกายมนุษย์ต่อไป



รูปที่ 2.6 เม็ดเลือดแดงที่ถูกเชื้อมาลาเรียทำลาย

## 2.9.5 วงจรชีวิตของยุง

2.9.5.1 ระยะเวลาไข่ ยุงก้นปล่องจะวางไข่ในน้ำนิ่งใต้อุณหภูมิระดับน้ำเล็กน้อย ไข่มีลักษณะรีคล้ายกระสวย เมื่อออกมาใหม่ๆ มีสีขาวนวลต่อมาเปลี่ยนเป็นสีน้ำตาลและสีดำจะฟักเป็นตัวลูกน้ำภายใน 1-2 วัน ไข่ยุงก้นปล่องจะทนต่อความแห้งแล้งในสภาพนั้นได้นานหลายเดือน เมื่อไข่นั้นได้รับความชื้นหรือมีน้ำมาท่วมไข่ ไข่ก็จะฟักออกเป็นตัวลูกน้ำได้ในเวลาอันรวดเร็วตั้งแต่ 20-60 นาที แต่อัตราการฟักตัวออกเป็นลูกน้ำจะลดน้อยลงตามระยะเวลาที่นานขึ้น ยุงก้นปล่องวางไข่ได้ประมาณ 50-150 ฟอง ตลอดชีวิตวางไข่ได้ 1-7 ครั้ง

**2.9.5.2 ระยะเวลาลูกน้ำ** ลักษณะลูกน้ำขุ่นปนปล่องที่แตกต่างจากขุ่นราคาญ คือท่อหายใจขุ่นปนปล่องจะสั้น และอ้วนป้อม ส่วนอกจะใหญ่กว่าส่วนหัวมีลำตัวยาวเรียว ลำตัวเกือบอยู่ในแนวตั้งฉากกับผิวน้ำ ไม่ชอบแสงสว่างมักไวต่อแสงไฟและการสั่นสะเทือน เคลื่อนไหวอย่างว่องไวคล้ายงูเลื้อย ลูกน้ำจะกินอินทรีย์สารและอาหารอื่นๆ ระยะเวลาลูกน้ำใช้เวลาประมาณ 6-8 วัน อาหารลูกน้ำได้แก่ ตะไคร่น้ำ อินทรีย์สารต่างๆ และจุลินทรีย์

ระยะตัวโม่่ง จากระยะลูกน้ำ จะมีการลอกคราบและเปลี่ยนแปลงรูปร่างเป็นตัวโม่่ง มีท่อหายใจคู่หนึ่งอยู่ตอนหัวลักษณะคล้ายแตร มีนิสย์ลอยนึ่งอยู่บนผิวน้ำ แต่จะเคลื่อนที่เร็วเมื่อถูกรบกวน ตัวโม่่งไม่กินอาหาร ใช้เวลา 1-2 วัน จึงลอกคราบเป็นตัวขุ่น

**2.9.5.3 ขุ่นตัวเต็มวัย** ลักษณะที่เห็นได้ชัดคือ ลำตัวและขามีจุดลายดำสลับขาว ลักษณะขุ่นปนปล่องตัวผู้ หนวดหนาเป็นพุ่ม คุคน้ำหวานจากเกสรดอกไม้ ลักษณะขุ่นปนปล่องตัวเมียมีหนวดบางและสั้น ขุ่นปนปล่องชอบกินเลือดคนมากกว่าเลือดสัตว์ ขุ่นปนปล่องตัวเมียมีอายุประมาณ 30-45 วัน

## 2.9.6 การแพร่ระบาดของโรค

- (1) การแพร่ในธรรมชาติ (natural transmission) เกิดจากการถูกขุ่นกัด
- (2) การแพร่โดยบังเอิญ (accidental transmission) เช่น การถ่ายเลือด, การใช้เข็มฉีดยาร่วมกันในผู้เสพยาเสพติด
- (3) การแพร่ผ่านทางรก (congenital transmission) พบน้อยมาก
- (4) การแพร่โดยเจตนา (deliberate transmission) เช่น ใช้มาลาเรียรักษาโรคซิฟิลิส โดยเอาเลือดจากผู้ป่วยมาลาเรียให้แก่ผู้ป่วยที่เป็น โรคซิฟิลิสขั้นสมอง

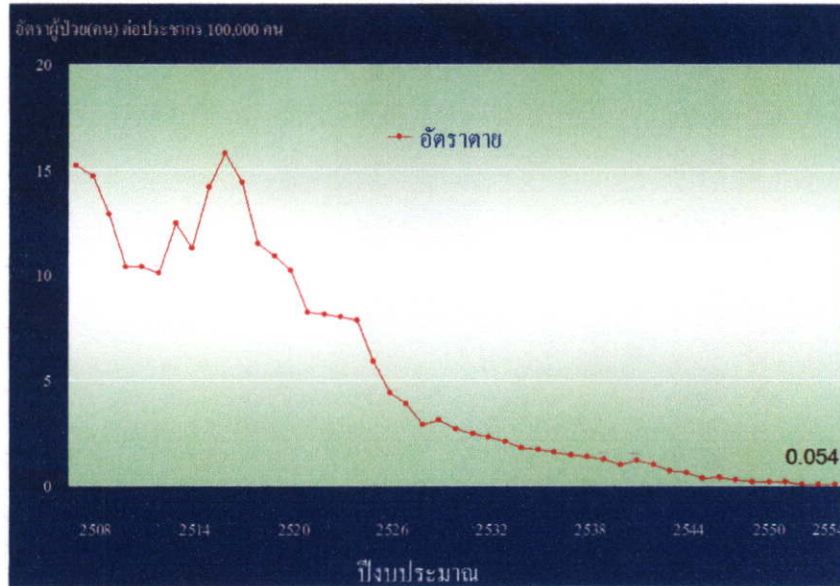
### 2.9.7 โรคมาลาเรียในประเทศไทย

ส่วนในประเทศไทยเองสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า โดยเฉพาะตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่น ชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา โดยจังหวัดที่มีการรายงานพบผู้ป่วยมาลาเรียเป็นจำนวนมากคือ จังหวัดตาก กาญจนบุรี ตราด ราชบุรี แม่ฮ่องสอน เป็นต้น โดยจะพบในเขตพื้นที่ที่เป็นป่าเขาเท่านั้น ไม่พบมาลาเรียในเขตเมือง โรคมาลาเรียยังคงเป็นปัญหาสาธารณสุขที่สำคัญเช่นกัน แม้ว่าโรคนี้อาจมีอัตราป่วยและอัตราเสียชีวิตลดลง ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2539 เป็นต้นมา

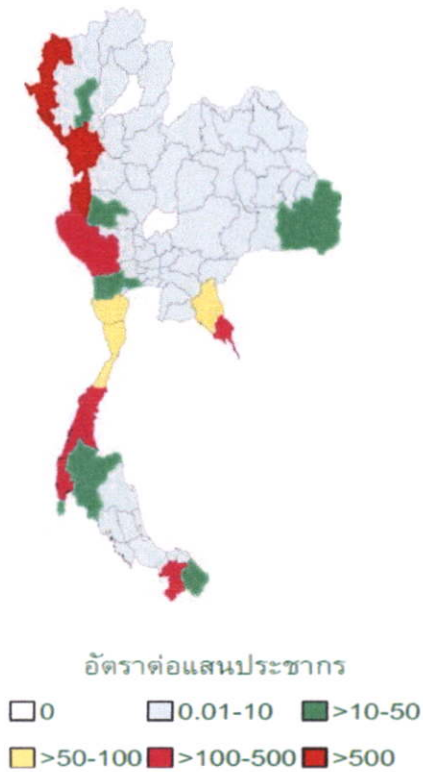


รูปที่ 2.7 แสดงผู้ป่วยไทยและผู้ติดเชื้อมาลาเรียชนิด

*P.falciparum* และ *P.vivax* ปีงบประมาณ พ.ศ. 2508-2554



รูปที่ 2.8 แสดงผู้เสียชีวิตด้วยโรคมาลาเรีย ปีงบประมาณพ.ศ. 2508-2554



สิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยโรคมาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย ปีงบประมาณ พ.ศ. 2554	ประชากรที่อพยพเข้า (คน)	ประชากรที่อพยพออก (คน)
1.ตาก	1,027.16	28,091
2.แม่ฮ่องสอน	548.90	11,066
3.ระนอง	274.71	11,057
4.ยะลา	150.44	28,461
5.ชุมพร	143.22	28,519
6.กาญจนบุรี	128.04	49,622
7.พังงา	115.43	15,780
8.ตราด	102.15	14,367
9.จันทบุรี	81.24	31,362
10.เพชรบุรี	56.77	24,548

รูปที่ 2.9 แสดงสิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยโรค

มาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย ปีงบประมาณ พ.ศ. 2554

## 2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

A.Kammanee, N.Kanyamee and IM.Tang (2001) ได้สร้างแบบจำลอง(SIDR)ทางคณิตศาสตร์ สำหรับการแพร่โรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์ สามารถหาจุดวิกฤตได้ 2 จุด คือจุดสถานะไร้โรคและจุดสถานะระบาดเรื้อรัง ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือทำให้ทราบค่าการแพร่พันธุ์พื้นฐาน ทำให้ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรคนี

P.Pongsumpun and IM.Tang (2007) ได้สร้างแบบจำลอง(SIDR)ทางคณิตศาสตร์ โดยคำนึงถึงระยะการฟักตัวของเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในมนุษย์ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สถานะไร้โรค(disease free state)และสถานะระบาดเรื้อรัง(disease endemic state) ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรค และกราฟในการวิเคราะห์แบบจำลองเพื่อใช้ในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์

K.Nah, Y.Kim and JM.Lee (2010) ได้สร้างแบบจำลองเชิงพลวัตของการป้องกันโรคจากสัตว์ (zooprophyllaxis)การแพร่ระบาดของยุง การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์ไปยังประชากรมนุษย์ และวิเคราะห์สมดุลการระบาด ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือทำให้ทราบค่าการแพร่พันธุ์พื้นฐาน ได้ค่าประมาณความเสี่ยงต่อคนที่สามารถได้รับโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์

## บทที่ 3

### วิธีดำเนินงานวิจัย

#### 3.1 วิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ

ไข้มาลาเรียเกิดจากเชื้อปรสิต สกุลพลาสโมเดียม 4 ชนิดได้แก่ ฟัลซิพารัม ไวเวกซ์ โอวัลต์ และมาลาเรีย โดยฟัลซิพารัมและ มาลาเรีย ทำลายเซลล์เม็ดเลือดแดงทุกระยะ แต่ไวเวกซ์และ โอวัลต์ นั้นจะฆ่าเฉพาะเซลล์เม็ดเลือดแดงที่ยังเจริญเติบโตไม่สมบูรณ์เท่านั้น โดยเชื้อที่มีความสำคัญในบ้านเรามี 2 ชนิดคือ เชื้อพลาสโมเดียมฟัลซิพารัมและพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จากการนำข้อมูลทางสถิติของผู้ป่วยในแต่ละปี ตั้งแต่ปีงบประมาณ 2508-2554 ที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลของกองมาลาเรีย กรมควบคุมโรคติดต่อ กระทรวงสาธารณสุข มาวิเคราะห์ข้อมูล ผลปรากฏว่าในระยะเวลา 47 ปี พบว่าอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนของเชื้อชนิด Plasmodium vivax สูงกว่าเชื้อชนิด Plasmodium falciparum ในปีงบประมาณ 2543 ซึ่งในปีนั้นมีผู้ป่วยจำนวน 78,015 คน แยกเป็นชนิดเชื้อ Plasmodium vivax จำนวน 40,709 คน ชนิดเชื้อ Plasmodium falciparum จำนวน 36,881 คน และมีอัตราผู้ป่วย 159.88 คนต่อประชากรแสนคน[1]

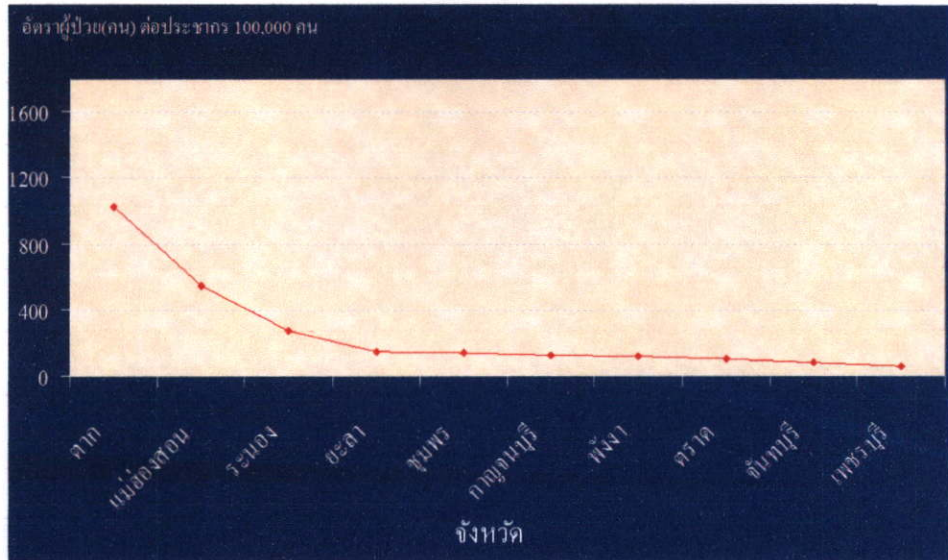
เมื่อพิจารณาตามจังหวัด สิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยมาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย ปีงบประมาณ 2554 มีผลดังนี้

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 1.ตาก (1027.16 คนต่อประชากรแสนคน)  | 2.แม่ฮ่องสอน (548.90 คนต่อประชากรแสนคน) |
| 3.ระนอง (274.71 คนต่อประชากรแสนคน) | 4.ยะลา (150.44 คนต่อประชากรแสนคน)       |
| 5.ชุมพร (143.22 คนต่อประชากรแสนคน) | 6.กาญจนบุรี (128.04 คนต่อประชากรแสนคน)  |
| 7.พังงา (115.43 คนต่อประชากรแสนคน) | 8.ตราด (102.15 คนต่อประชากรแสนคน)       |

9.จันทบุรี (81.24 คนต่อประชากรแสนคน)

10.เพชรบุรี (56.77 คนต่อประชากรแสนคน)

โดยปีงบประมาณเริ่มตั้งแต่เดือนตุลาคมจนถึงกันยายนในปีถัดไป ซึ่งแสดงเป็นกราฟดังนี้[2]

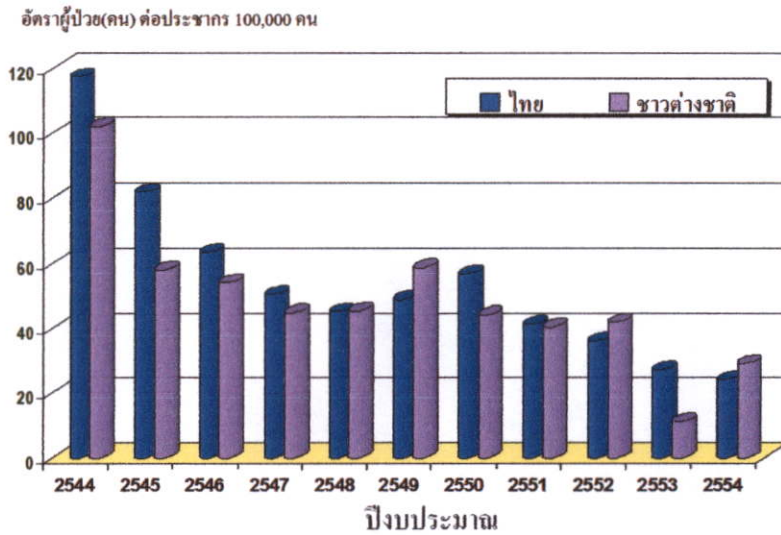


รูปที่ 3.1 แสดงสิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยโรคมาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย

ปีงบประมาณ พ.ศ.2554

จากข้อมูลข้างต้นพบว่าประเทศไทยสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า โดยจังหวัดที่มีการรายงานพบผู้ป่วยมาลาเรียเป็นจำนวนมากคือ จังหวัดดาก กาญจนบุรี ระนอง ตรัง ราชบุรี และแม่ฮ่องสอน เป็นต้น

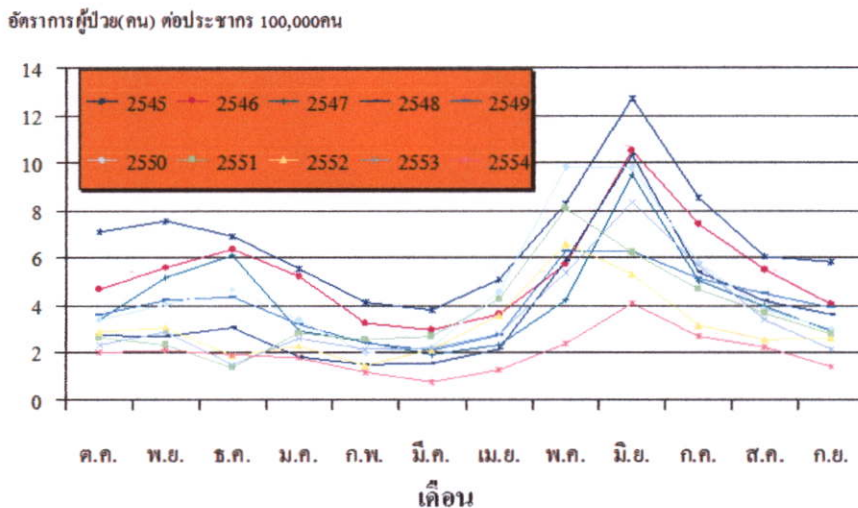
ผู้ป่วยโรคมาลาเรียสามารถแบ่งเป็นชาวไทยและชาวต่างชาติ ซึ่งแสดงเป็นกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 3.2 แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียชาวไทยและชาวต่างชาติ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2544-2554

จากข้อมูลข้างต้นพบว่าประเทศไทยสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ โดยเฉพาะตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่น ชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา ชายแดนไทย-มาเลเซีย เป็นต้น

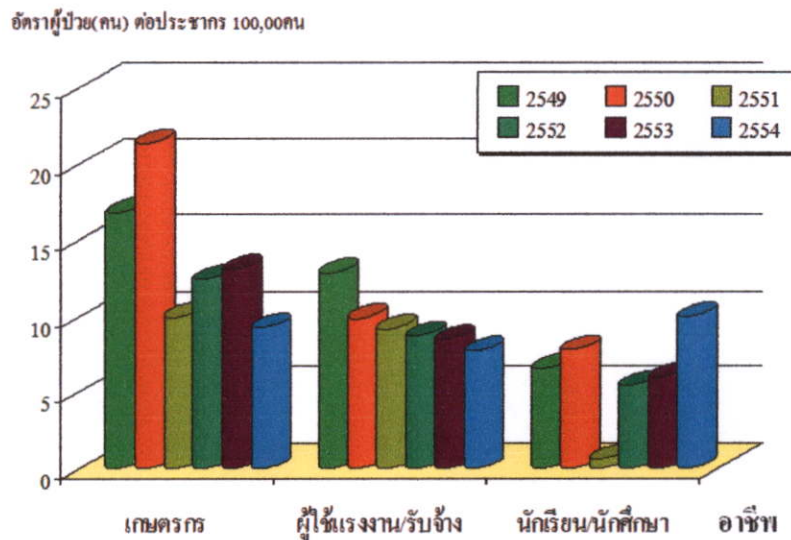
จำนวนผู้ป่วยโรคมาลาเรียเป็นรายเดือน (ผู้ป่วยไทย)แยกตาม ปีงบประมาณ พ.ศ. 2545-2554 แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3.3 แสดงผู้ป่วยรายเดือน (ผู้ป่วยไทย) ปีงบประมาณ พ.ศ. 2545-2554

จากข้อมูลข้างต้นพบได้ว่าจำนวนผู้ป่วยรายเดือนจะสูงขึ้นตอนฤดูฝนซึ่งเริ่มประมาณกลางเดือนพฤษภาคมถึงประมาณกลางเดือนตุลาคม เพราะเป็นช่วงที่มีแหล่งน้ำขัง มีความเหมาะสมและกระตุ้นให้ยุงมาวางไข่และเพาะพันธุ์

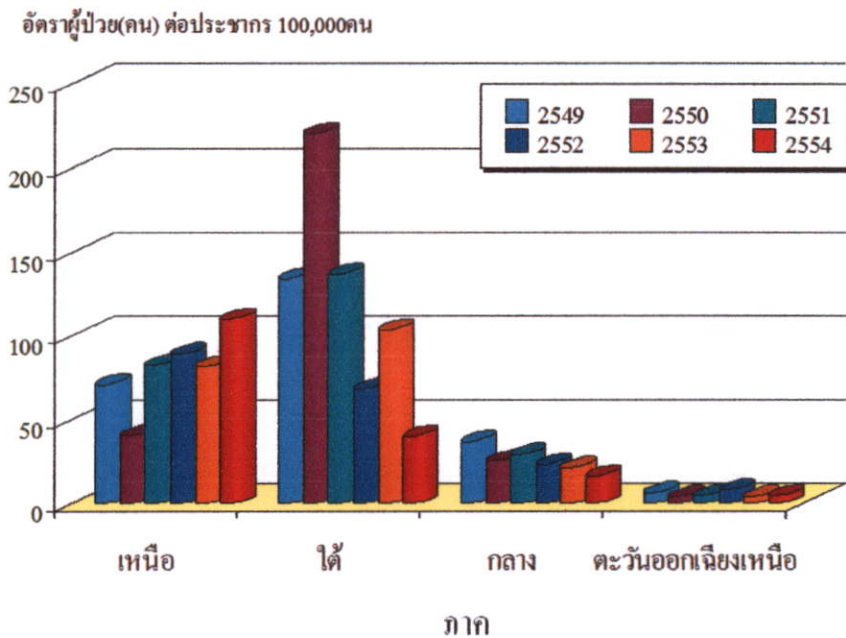
ผู้ป่วยโรคมalariaเรียส่วนใหญ่ประกอบอาชีพเกษตรกร (9.62 คนต่อประชากรแสนคน) อาชีพผู้ใช้แรงงาน/รับจ้าง (7.70 คนต่อประชากรแสนคน) และ อาชีพนักเรียน/นักศึกษา (9.99 คนต่อประชากรแสนคน) ซึ่งแสดงเป็นกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 3.4 แสดงผู้ป่วยโรคมalariaเรียแยกตามอาชีพ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554

จากข้อมูลข้างต้นพบว่าผู้ป่วยโรคมalariaเรียส่วนใหญ่พบในกลุ่มเกษตรกร อาชีพรับจ้าง นักเรียน เหตุที่พบในกลุ่มเกษตรกรเป็นจำนวนมาก คงเป็นเพราะเกษตรกรมีโอกาสสัมผัสกับสิ่งต่างๆมากกว่า ไม่ว่าจะเป็นการย่ำบนพื้นดิน เดินลุยน้ำ หรือสัมผัสสัตว์ต่างๆ

โดยภาคที่มีผู้ป่วยสูงสุดคือ ภาคเหนือ (110.00 คนต่อประชากรแสนคน) ภาคใต้ (40.21 คนต่อประชากรแสนคน) ภาคกลาง (16.37 คนต่อประชากรแสนคน) และภาคตะวันออกเฉียงเหนือ (4.70 คนต่อประชากรแสนคน) ซึ่งแสดงเป็นกราฟได้ดังนี้

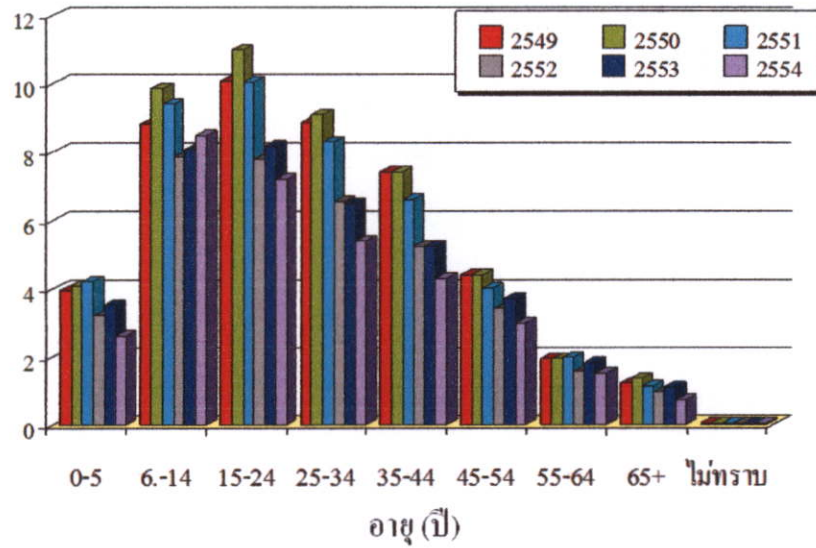


รูปที่ 3.5 แสดงผู้ป่วยโรคมลาเรียแยกรายภาค ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554

ผู้ป่วยโรคมลาเรียส่วนใหญ่พบได้ในเขตป่า โดยเฉพาะตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่น ชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา ชายแดนไทย-มาเลเซีย เป็นต้น

โดยสามารถแบ่งจำแนกตามกลุ่มอายุและพบมากในช่วงอายุ 6 –14 ปี (8.07 คนต่อประชากรแสนคน) ในช่วงอายุ 15 –24 ปี(8.16 คนต่อประชากรแสนคน) และในช่วงอายุ 25–34 ปี(6.48 คนต่อประชากรแสนคน) ซึ่งแสดงเป็นกราฟได้ดังนี้

อัตราผู้ป่วย(คน) ต่อประชากร 100,000คน

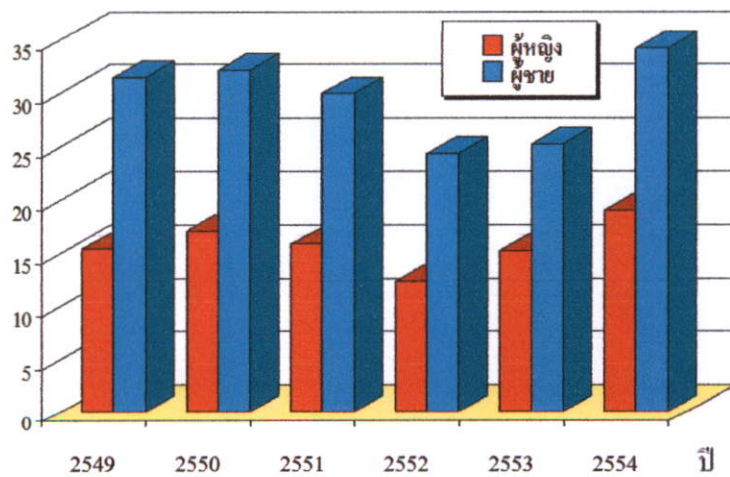


รูปที่ 3.6 แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียจำแนกตามกลุ่มอายุ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554

เนื่องจากอาการแสดงของผู้ป่วยโรคมาลาเรียไม่มีลักษณะพิเศษบ่งเฉพาะ โดยมากจะมีอาการนำคล้ายกับคนเป็นไข้หวัด คือ มีไข้ต่ำๆ ปวดศีรษะ ปวดตามตัว และกล้ามเนื้อ จึงทำให้คนคิดว่าเป็นไข้หวัดธรรมดา

โดยผู้ป่วยโรคมาลาเรียสามารถแบ่งแยกตามเพศได้ดังนี้

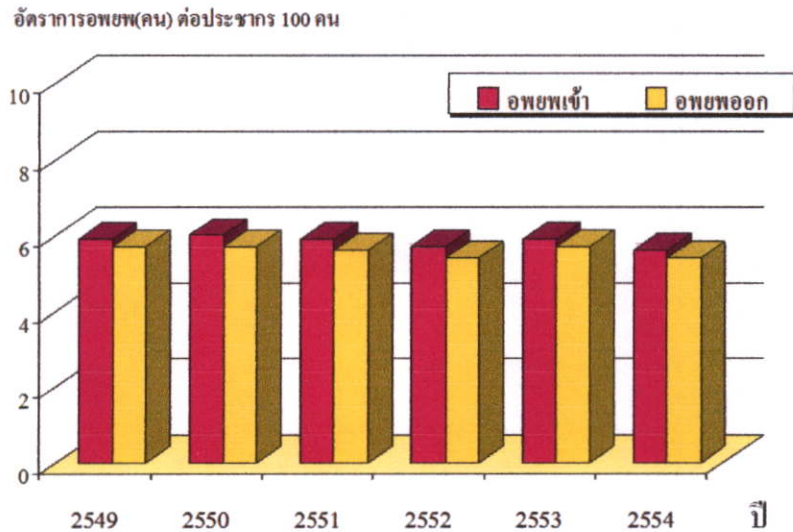
อัตราผู้ป่วย(คน) ต่อประชากร 100,000คน



รูปที่ 3.7 แสดงผู้ป่วยโรคมาลาเรียแยกตามเพศ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554

เพราะประเทศไทยมีอาชีพหลักคือเกษตรกรและส่วนใหญ่เป็นผู้ชาย จึงทำให้มีโอกาสสัมผัสกับสิ่งต่างๆ มากกว่า ไม่ว่าจะเป็นการขำบนพื้นดินเดินลุยน้ำ จึงพบผู้ป่วยโรคมาลาเรียที่เป็นผู้ชายมากกว่าผู้หญิง

การอพยพเข้า – ออก ของประชากรไทย ตั้งแต่ปี 2549 – 2554 แสดงเป็นกราฟได้ดังนี้ [3]



รูปที่ 3.8 แสดงการอพยพเข้า – ออก ของประชากรไทย

ปีงบประมาณ พ.ศ. 2549-2554

จากข้อมูลข้างต้นพบว่าการย้ายถิ่นฐานของคนไทยเพื่อมาประกอบอาชีพ โดยมีแรงผลักดันหลายด้าน เช่น ความยากจน การว่างงานและการแสวงหางานทำเพื่อรายได้ที่ดีกว่า ซึ่งการย้ายถิ่นฐานอาจเป็นการย้ายถิ่นฐานแบบชั่วคราวเพื่อหางานทำตามฤดูกาล หรือย้ายถิ่นฐานแบบถาวร[4] โดยงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้ข้อมูลของ ปีงบประมาณ พ.ศ. 2554

### 3.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรียตามชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์

ด้วยการเล็งเห็นความสำคัญของชีวิตและทรัพย์สินของประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคนี้ จึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รวบรวมมาจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปีงบประมาณ พ.ศ. 2508-2554 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหาโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ ที่มีการเคลื่อนที่ของประชากร เพื่อให้เป็นแนวทางหาวิธีป้องกันโรคและลดจำนวนผู้ป่วยโรคมาลาเรีย โดยพิจารณาการสร้างแบบจำลองของประชากรมนุษย์และยุง ดังนี้

- 1) แบบจำลองของประชากรมนุษย์แบ่งออกเป็น 4 กลุ่ม คือประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ และประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ
- 2) แบบจำลองของยุงแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ และยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้[5]

ตารางที่ 3.1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองสำหรับมนุษย์และยุง

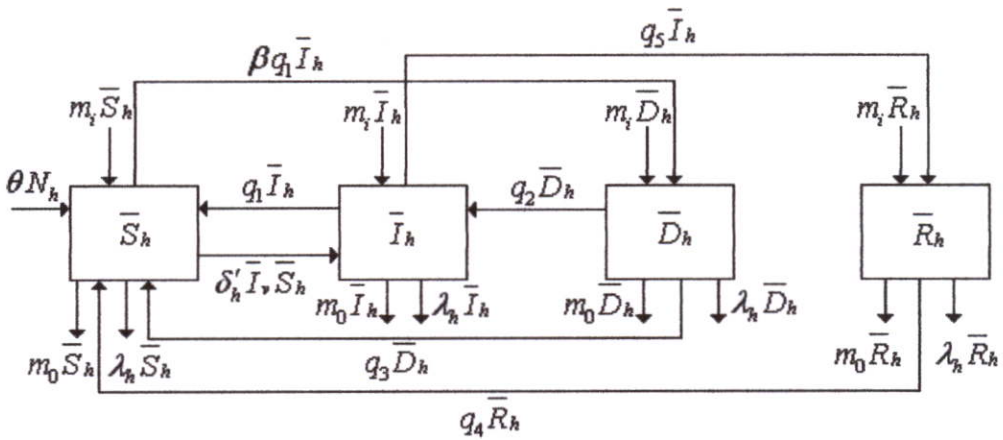
สัญลักษณ์	ข้อความ	หน่วย
$\bar{S}_h$	จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	คน
$\bar{I}_h$	จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้	คน
$\bar{D}_h$	จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่	คน
$\bar{R}_h$	จำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ	คน
$\lambda_h$	อัตราการเสียชีวิตของประชากร	คน <sup>-1</sup>
$\beta$	ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	เปอร์เซ็นต์

สัญลักษณ์ (ต่อ)	ข้อความ (ต่อ)	หน่วย (ต่อ)
$\delta'_h$	อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากยุงไปสู่ประชากร	คน <sup>-1</sup> /ยุง <sup>-1</sup>
$\theta$	อัตราการเกิดของประชากร	คน <sup>-1</sup>
$N_h$	จำนวนประชากรทั้งหมด	คน
$\mu_v$	อัตราการตายของยุง	ตัว <sup>-1</sup>
$q_1$	อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	คน <sup>-1</sup>
$q_2$	อัตราผู้ที่มีเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	คน <sup>-1</sup>
$q_3$	อัตราผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	คน <sup>-1</sup>
$q_4$	อัตราผู้ที่พ้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	คน <sup>-1</sup>
$q_5$	อัตราการฟื้นฟูไขของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์	คน <sup>-1</sup>
$m_i$	อัตราการอพยพเข้าของประชากร	คน <sup>-1</sup>
$m_o$	อัตราการอพยพออกของประชากร	คน <sup>-1</sup>
$L$	จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น	ตัว
$\bar{S}_v$	จำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	ตัว
$\bar{I}_v$	จำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้	ตัว
$\delta'_v$	อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากประชากร ไปสู่ยุง	คน <sup>-1</sup> /ยุง <sup>-1</sup>
$N_v$	จำนวนยุงทั้งหมด	ตัว

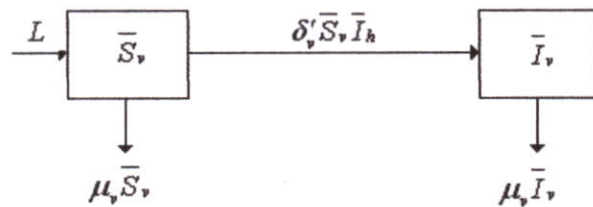
3.2.1 แบบจำลองโรคมalariaเรื้อรังของประชากรมนุษย์และยุง

จาก P.Pongsumpun and IM.Tang (2007) ได้สร้างแบบจำลอง(SIDR)ทางคณิตศาสตร์ โดยคำนึงถึงระยะการฟักตัวของเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในมนุษย์ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค(disease free state)และสภาวะระบาดเรื้อรัง(disease endemic state)[6]

โดยในการสร้างแบบจำลองในครั้งนี้ได้สร้างแบบจำลอง(SIDR)ทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมalariaเรื้อรังชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร ดังนี้



รูปที่ 3.9 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรมนุษย์



รูปที่ 3.10 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของยุง





ข้อสังเกต ลูกศรที่ชี้เข้ามีค่าเป็นบวก และลูกศรที่ชี้ออกมีค่าเป็นลบ

จากแผนภาพแสดงแนวความคิดเบื้องต้น นำมาเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนและยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ(ต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

$$\frac{d}{dt} \bar{S}_h = \theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_1 \bar{I}_h + q_4 \bar{R}_h + m_i \bar{S}_h - m_o \bar{S}_h - \lambda_h \bar{S}_h - \beta q_1 \bar{I}_h - \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h$$

$$\frac{d}{dt} \bar{S}_v = L - \bar{S}_v \mu_v - \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนและยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดได้(ต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

$$\frac{d}{dt} \bar{I}_h = \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h + m_i \bar{I}_h - m_o \bar{I}_h - q_1 \bar{I}_h - \lambda_h \bar{I}_h - q_5 \bar{I}_h$$

$$\frac{d}{dt} \bar{I}_v = \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \mu_v \bar{I}_v$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่มีเชื้อฝังตัวอยู่(ต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

$$\frac{d}{dt} \bar{D}_h = \beta q_1 \bar{I}_h + m_i \bar{D}_h - m_o \bar{D}_h - q_2 \bar{D}_h - \lambda_h \bar{D}_h - q_3 \bar{D}_h$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่ฟื้นจากการติดเชื้อ(ต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

$$\frac{d}{dt} \bar{R}_h = q_5 \bar{I}_h + m_i \bar{R}_h - m_o \bar{R}_h - \lambda_h \bar{R}_h - q_4 \bar{R}_h$$

และสองเงื่อนไขดังนี้

$$N_h = \bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{D}_h + \bar{R}_h \quad \text{และ} \quad N_v = \bar{S}_v + \bar{I}_v$$

## บทที่ 4

### ผลการวิจัย

#### 4.1 กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดคงที่

แสดงว่าอัตราการอพยพเข้า-ออกมีค่าเท่ากัน และอัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรมนุษย์และ  
ยุงมีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ

$$m_i = m_o, \frac{d}{dt} N_h = 0 \text{ และ } \frac{d}{dt} N_v = 0$$

จาก  $N_h = \bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{D}_h + \bar{R}_h$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_h &= \frac{d}{dt} (\bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{D}_h + \bar{R}_h) \\ &= \frac{d}{dt} \bar{S}_h + \frac{d}{dt} \bar{I}_h + \frac{d}{dt} \bar{D}_h + \frac{d}{dt} \bar{R}_h \\ &= \theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_1 \bar{I}_h + q_4 \bar{R}_h + m_i \bar{S}_h - m_o \bar{S}_h - \lambda_h \bar{S}_h - \beta q_1 \bar{I}_h - \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h \\ &\quad + \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h + m_i \bar{I}_h - m_o \bar{I}_h - q_1 \bar{I}_h - \lambda_h \bar{I}_h - q_5 \bar{I}_h \\ &\quad + \beta q_1 \bar{I}_h + m_i \bar{D}_h - m_o \bar{D}_h - q_2 \bar{D}_h - \lambda_h \bar{D}_h - q_3 \bar{D}_h \\ &\quad + q_5 \bar{I}_h + m_i \bar{R}_h - m_o \bar{R}_h - \lambda_h \bar{R}_h - q_4 \bar{R}_h \\ &= \theta N_h - \lambda_h \bar{S}_h - \lambda_h \bar{I}_h - \lambda_h \bar{D}_h - \lambda_h \bar{R}_h \\ &= \theta N_h - \lambda_h (\bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{D}_h + \bar{R}_h) \\ &= \theta N_h - \lambda_h N_h \\ &= N_h (\theta - \lambda_h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อ  $\theta = \lambda_h$

สรุปผลสมการ ได้ว่าอัตราการเกิดและอัตราการเสียชีวิตของประชากรมีค่าเท่ากัน

จาก  $N_v = \bar{S}_v + \bar{I}_v$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_v &= \frac{d}{dt} (\bar{S}_v + \bar{I}_v) \\ &= \frac{d}{dt} \bar{S}_v + \frac{d}{dt} \bar{I}_v \\ &= L - \mu_v \bar{S}_v - \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v + \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \mu_v \bar{I}_v \\ &= L - \mu_v \bar{S}_v - \mu_v \bar{I}_v \\ &= L - \mu_v (\bar{S}_v + \bar{I}_v) \\ &= L - \mu_v N_v \\ &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อ  $L = \mu_v N_v$  หรือ  $\mu_v = \frac{L}{N_v}$

สรุปผลสมการ ได้ว่าอัตราการตายของยุงเท่ากับอัตราส่วนระหว่างจำนวนยุง ณ เวลาเริ่มต้นกับ

จำนวนยุงทั้งหมด

เพื่อทำการลดจำนวนสมการจาก 6 สมการเป็น 4 สมการกำหนดให้สมการเป็นดังนี้

$$\begin{array}{lll} 1.) S_h = \frac{\bar{S}_h}{N_h} & 2.) I_h = \frac{\bar{I}_h}{N_h} & 3.) D_h = \frac{\bar{D}_h}{N_h} \\ 4.) R_h = \frac{\bar{R}_h}{N_h} & 5.) S_v = \frac{\bar{S}_v}{N_v} & 6.) I_v = \frac{\bar{I}_v}{N_v} \end{array}$$

หาสมการได้ดังนี้

หา 1.)  $\frac{d}{dt} S_h$  จะได้ว่า

$$S_h = \frac{\bar{S}_v}{N_h}$$

$$S_h N_h = \bar{S}_v$$

$$\frac{d}{dt} (S_h N_h) = \frac{d}{dt} \bar{S}_v$$

$$N_h \frac{d}{dt} S_h = \theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_1 \bar{I}_h + q_4 \bar{R}_h + m_i \bar{S}_h - m_o \bar{S}_h - \lambda_h \bar{S}_h - \beta q_1 \bar{I}_h - \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_h &= \frac{\theta N_h}{N_h} + \frac{q_3 \bar{D}_h}{N_h} + \frac{q_1 \bar{I}_h}{N_h} + \frac{q_4 \bar{R}_h}{N_h} + \frac{m_i \bar{S}_h}{N_h} - \frac{m_o \bar{S}_h}{N_h} - \frac{\lambda_h \bar{S}_h}{N_h} - \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{N_h} - \frac{\delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h}{N_h} \\ &= \theta + q_3 D_h + q_4 R_h + (1 - \beta) q_1 I_h - (\lambda_h + \delta'_h \bar{I}_v) S_h + m_i S_h - m_o S_h \end{aligned}$$

จาก  $\theta = \lambda_h$ ,  $\bar{I}_v = I_v N_v$  และ  $m_i S_h = m_o S_h$  จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} S_h = \lambda_h + q_3 D_h + q_4 R_h + (1 - \beta) q_1 I_h - (\lambda_h + \delta'_h I_v N_v) S_h$$

ทหา 2.)  $\frac{d}{dt} I_h$  จะได้ว่า

$$I_h = \frac{\bar{I}_h}{N_h}$$

$$I_h N_h = \bar{I}_h$$

$$\frac{d}{dt} (I_h N_h) = \frac{d}{dt} \bar{I}_h$$

$$N_h \frac{d}{dt} I_h = \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h + m_i \bar{I}_h - m_o \bar{I}_h - q_1 \bar{I}_h - \lambda_h \bar{I}_h - q_5 \bar{I}_h$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_h &= \frac{\delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h}{N_h} + \frac{q_2 \bar{D}_h}{N_h} + \frac{m_i \bar{I}_h}{N_h} - \frac{m_o \bar{I}_h}{N_h} - \frac{q_1 \bar{I}_h}{N_h} - \frac{\lambda_h \bar{I}_h}{N_h} - \frac{q_5 \bar{I}_h}{N_h} \\ &= \delta'_h \bar{I}_v S_h + q_2 D_h - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h + m_i \bar{I}_h - m_o \bar{I}_h \end{aligned}$$

จาก  $\bar{I}_v = I_v N_v$  และ  $m_i I_h = m_o I_h$  จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} I_h = \delta'_h I_v N_v S_h + q_2 D_h - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h$$

ทหา 3.)  $\frac{d}{dt}D_h$  จะได้ว่า

$$D_h = \frac{\bar{D}_h}{N_h}$$

$$D_h N_h = \bar{D}_h$$

$$\frac{d}{dt}(D_h N_h) = \frac{d}{dt}\bar{D}_h$$

$$N_h \frac{d}{dt}D_h = \beta q_1 \bar{I}_h + m_i \bar{D}_h - m_o \bar{D}_h - q_2 \bar{D}_h - \lambda_h \bar{D}_h - q_3 \bar{D}_h$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D_h &= \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{N_h} + \frac{m_i \bar{D}_h}{N_h} - \frac{m_o \bar{D}_h}{N_h} - \frac{q_2 \bar{D}_h}{N_h} - \frac{\lambda_h \bar{D}_h}{N_h} - \frac{q_3 \bar{D}_h}{N_h} \\ &= \beta q_1 I_h - (q_2 + q_3 + \lambda_h) D_h + m_i D_h - m_o D_h \end{aligned}$$

จาก  $m_i D_h = m_o D_h$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dt}D_h = \beta q_1 I_h - (q_2 + q_3 + \lambda_h) D_h$

ทหา 4.)  $\frac{d}{dt}R_h$  จะได้ว่า

$$R_h = \frac{\bar{R}_h}{N_h}$$

$$R_h N_h = \bar{R}_h$$

$$\frac{d}{dt}(R_h N_h) = \frac{d}{dt}\bar{R}_h$$

$$N_h \frac{d}{dt}R_h = q_5 \bar{I}_h + m_i \bar{R}_h - m_o \bar{R}_h - \lambda_h \bar{R}_h - q_4 \bar{R}_h$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_h &= \frac{q_5 \bar{I}_h}{N_h} + \frac{m_i \bar{R}_h}{N_h} - \frac{m_o \bar{R}_h}{N_h} - \frac{\lambda_h \bar{R}_h}{N_h} - \frac{q_4 \bar{R}_h}{N_h} \\ &= q_5 I_h - (q_4 + \lambda_h) R_h + m_i R_h - m_o R_h \end{aligned}$$

จาก  $m_i R_h = m_o R_h$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dt}R_h = q_5 I_h - (q_4 + \lambda_h) R_h$

ทหา 5.)  $\frac{d}{dt}S_v$  จะได้ว่า

$$S_v = \frac{\bar{S}_v}{N_v}$$

$$S_v N_v = \bar{S}_v$$

$$\frac{d}{dt}(S_v N_v) = \frac{d}{dt}\bar{S}_v$$

$$N_v \frac{d}{dt}S_v = L - \bar{S}_v \mu_v - \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S_v &= \frac{L}{N_v} - \frac{\bar{S}_v \mu_v}{N_v} - \frac{\delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v}{N_v} \\ &= \frac{L}{N_v} - S_v \mu_v - \delta'_v \bar{I}_h S_v \end{aligned}$$

จาก  $\mu_v = \frac{L}{N_v}$  และ  $\bar{I}_h = I_h N_h$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dt}S_v = \mu_v - (\mu_v + \delta'_v I_h N_h) S_v$

ทหา 6.)  $\frac{d}{dt}I_v$  จะได้ว่า

$$I_v = \frac{\bar{I}_v}{N_v}$$

$$I_v N_v = \bar{I}_v$$

$$\frac{d}{dt}(I_v N_v) = \frac{d}{dt}\bar{I}_v$$

$$N_v \frac{d}{dt}I_v = \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \mu_v \bar{I}_v$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_v &= \frac{\delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v}{N_v} - \frac{\mu_v \bar{I}_v}{N_v} \\ &= \delta'_v \bar{I}_h S_v - \mu_v I_v \end{aligned}$$

จาก  $\bar{I}_h = I_h N_h$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dt}I_v = \delta'_v I_h N_h S_v - \mu_v I_v$

จะได้สองเงื่อนไขใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} S_h + I_h + D_h + R_h &= \frac{\bar{S}_h}{N_h} + \frac{\bar{I}_h}{N_h} + \frac{\bar{D}_h}{N_h} + \frac{\bar{R}_h}{N_h} \\ &= \frac{\bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{D}_h + \bar{R}_h}{N_h} \end{aligned}$$

จาก  $N_h = \bar{S}_h + \bar{I}_h + \bar{D}_h + \bar{R}_h$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_h + I_h + D_h + R_h &= \frac{N_h}{N_h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} S_v + I_v &= \frac{\bar{S}_v}{N_v} + \frac{\bar{I}_v}{N_v} \\ &= \frac{\bar{S}_v + \bar{I}_v}{N_v} \end{aligned}$$

จาก  $N_v = \bar{S}_v + \bar{I}_v$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_v + I_v &= \frac{N_v}{N_v} \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการใหม่ 4 สมการดังนี้

$$\frac{d}{dt}S_h = \lambda_h + q_3D_h + q_4R_h + (1-\beta)q_1I_h - (\lambda_h + \delta'_hI_vN_v)S_h$$

$$\frac{d}{dt}I_h = \delta'_hI_vN_vS_h + q_2D_h - (q_1 + q_5 + \lambda_h)I_h$$

$$\frac{d}{dt}D_h = \beta q_1I_h - (q_2 + q_3 + \lambda_h)D_h$$

$$\frac{d}{dt}I_v = \delta'_vI_hN_hS_v - \mu_vI_v$$

โดยที่  $S_h + I_h + D_h + R_h = 1$  และ  $S_v + I_v = 1$

จุดสมดุล  $(I_h, S_h, D_h, I_v)$  หาได้จากการจัดสมการข้างต้นให้เท่ากับศูนย์จะได้

$$\lambda_h + q_3D_h + q_4R_h + (1-\beta)q_1I_h - (\lambda_h + \delta'_hI_vN_v)S_h = 0$$

$$\delta'_hI_vN_vS_h + q_2D_h - (q_1 + q_5 + \lambda_h)I_h = 0$$

$$\beta q_1I_h - (q_2 + q_3 + \lambda_h)D_h = 0$$

$$\delta'_vI_hN_hS_v - \mu_vI_v = 0$$

จะได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$S_h = \frac{\lambda_h + q_3D_h + q_4R_h + (1-\beta)q_1I_h}{\lambda_h + \delta'_hI_vN_v} \quad (4.1)$$

$$I_h = \frac{\delta'_hI_vN_vS_h + q_2D_h}{q_1 + q_5 + \lambda_h} \quad (4.2)$$

$$D_h = \frac{\beta q_1I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \quad (4.3)$$

$$I_v = \frac{\delta'_vI_hN_hS_v}{\mu_v} \quad (4.4)$$

จาก  $R_h = 1 - S_h - I_h - D_h$  แทนในสมการที่ (4.1) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}
 S_h &= \frac{\lambda_h + q_3 D_h + q_4 (1 - S_h - I_h - D_h) + (1 - \beta) q_1 I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \\
 &= \frac{\lambda_h + q_3 D_h + q_4 - q_4 S_h - q_4 I_h - q_4 D_h + (1 - \beta) q_1 I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \\
 &= \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 - q_4 S_h + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \\
 S_h + \frac{q_4 S_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} &= \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \\
 \left( \frac{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \right) S_h + \frac{q_4 S_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} &= \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \\
 \left( \frac{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \right) S_h &= \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \\
 S_h &= \left[ \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v} \right] \left[ \frac{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4} \right] \\
 S_h &= \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4} \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

จาก  $S_v = 1 - I_v$  แทนในสมการที่(4.4)จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}
 I_v &= \frac{\delta'_v I_h N_h S_v}{\mu_v} \\
 &= \frac{\delta'_v I_h N_h (1 - I_v)}{\mu_v} \\
 &= \frac{\delta'_v I_h N_h - \delta'_v I_h N_h I_v}{\mu_v} \\
 I_v + \frac{\delta'_v I_h N_h I_v}{\mu_v} &= \frac{\delta'_v I_h N_h}{\mu_v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_v}{\mu_v}\right) I_v + \frac{\delta'_v I_h N_h I_v}{\mu_v} &= \frac{\delta'_v I_h N_h}{\mu_v} \\ \left(\frac{\delta'_v I_h N_h + \mu_v}{\mu_v}\right) I_v &= \frac{\delta'_v I_h N_h}{\mu_v} \\ I_v &= \left[ \frac{\delta'_v I_h N_h}{\mu_v} \right] \left[ \frac{\mu_v}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right] \\ I_v &= \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \end{aligned} \tag{4.6}$$

นำสมการ(4.3)และ (4.6) แทนลงใน(4.5)

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4} \\ &= \frac{\lambda_h + (q_3 - q_4) \left( \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right) + q_4} \\ &= \frac{\lambda_h + q_4 + (q_3 - q_4) \left( \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} \\ &= \frac{\lambda_h + q_4 + I_h \left( \frac{\beta q_1 (q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} + (q_1 - q_4 - \beta q_1) \right)}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} \\ S_h &= \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta (q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

นำสมการ(4.3),(4.6)และ(4.7) แทนลงใน(4.2)

$$I_h = \frac{\delta'_h I_v N_v S_h + q_2 D_h}{q_1 + q_5 + \lambda_h}$$

$$\delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right) \left( \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} \right) + q_2 \left( \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right)$$

$$= \frac{\quad}{q_1 + q_5 + \lambda_h}$$

$$(q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h = \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right) \left( \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} \right) + q_2 \left( \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right)$$

$$\delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right) \left( \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} \right) + q_2 \left( \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h = 0$$

$$\left( \frac{\delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right) \left( \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}{\lambda_h + q_4 + \frac{\delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v}} \right) + \frac{\beta q_1 q_2 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h = 0$$

$$\frac{\delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h \left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right)}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v \left( \left( \frac{\delta'_v I_h N_h + \mu_v}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right) \lambda_h + \left( \frac{\delta'_v I_h N_h + \mu_v}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right) q_4 + \frac{\delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} + \frac{\beta q_1 q_2 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h = 0$$

$$\frac{\delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h \left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right)}{(\delta'_v I_h N_h + \mu_v) \lambda_h + (\delta'_v I_h N_h + \mu_v) q_4 + \delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h} + \frac{\beta q_1 q_2 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h = 0$$

$$\frac{\delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h \left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right)}{I_h N_h \delta'_v (q_4 + N_v \delta'_h + \lambda_h) + (q_4 + \lambda_h) \mu_v} + \frac{\beta q_1 q_2 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h = 0$$

$$I_h (-q_1 - q_5 - \lambda_h + \frac{\beta q_1 q_2}{q_2 + q_3 + \lambda_h} + \frac{N_h N_v \delta'_h \delta'_v ((q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_4 + \lambda_h) - I_h (q_4 (q_2 + q_3 + \lambda_h) + q_1((-1 + \beta)q_2 - q_3 + \beta q_4 + (-1 + \beta)\lambda_h)))}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(I_h N_h \delta'_v (q_4 + N_v \delta'_h + \lambda_h) + (q_4 + \lambda_h) \mu_v)}) = 0$$

จะได้  $I_h = 0$  และ

$$\begin{aligned} & (-N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v \lambda_h - N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \lambda_h - N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v \lambda_h \\ & - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \lambda_h^2 - \beta q_1 q_2 \lambda_h \mu_v - \beta q_1 q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_3 q_4 \mu_v + q_2 q_4 q_5 \mu_v + q_3 q_4 q_5 \mu_v \\ & + q_1 q_2 \lambda_h \mu_v + q_1 q_3 \lambda_h \mu_v + q_1 q_4 \lambda_h \mu_v + q_2 q_4 \lambda_h \mu_v + q_3 q_4 \lambda_h \mu_v + q_2 q_5 \lambda_h \mu_v + q_3 q_5 \lambda_h \mu_v \\ & + q_4 q_5 \lambda_h \mu_v + q_1 \lambda_h^2 \mu_v + q_2 \lambda_h^2 \mu_v + q_3 \lambda_h^2 \mu_v + q_4 \lambda_h^2 \mu_v + q_5 \lambda_h^2 \mu_v + \lambda_h^3 \mu_v) \\ I_h = & \frac{(N_h \delta'_v (-q_1 q_2 q_4 + \beta q_1 q_2 q_4 - q_1 q_3 q_4 - q_2 q_4 q_5 - q_3 q_4 q_5 - \beta N_v q_1 q_4 \delta'_h - N_v q_2 q_4 \delta'_h - N_v q_3 q_4 \delta'_h \\ & - N_v q_2 q_5 \delta'_h - N_v q_3 q_5 \delta'_h - q_1 q_2 \lambda_h + \beta q_1 q_2 \lambda_h - q_1 q_3 \lambda_h - q_1 q_4 \lambda_h - q_2 q_4 \lambda_h - q_3 q_4 \lambda_h - q_2 q_5 \lambda_h \\ & - q_3 q_5 \lambda_h - q_4 q_5 \lambda_h - \beta N_v q_1 \delta'_h \lambda_h - N_v q_2 \delta'_h \lambda_h - N_v q_3 \delta'_h \lambda_h - N_v q_4 \delta'_h \lambda_h - N_v q_5 \delta'_h \lambda_h - q_1 \lambda_h^2 \\ & - q_2 \lambda_h^2 - q_3 \lambda_h^2 - q_4 \lambda_h^2 - q_5 \lambda_h^2 - N_v \delta'_h \lambda_h^2 - \lambda_h^3))}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(I_h N_h \delta'_v (q_4 + N_v \delta'_h + \lambda_h) + (q_4 + \lambda_h) \mu_v)} \end{aligned}$$

พิจารณาที่  $I_h = 0$  จะได้ว่า

$$S_h = 1 \quad D_h = 0 \quad I_v = 0$$

ภายใต้สภาวะไร้โรค จะได้จุดสมดุล  $E_1(I_h, S_h, D_h, I_v)$  คือ  $(0, 1, 0, 0)$

ภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง จะได้จุดสมดุล  $E_2(I_h, S_h, D_h, I_v)$  เมื่อ

$$\begin{aligned}
& (-N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v \lambda_h - N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \lambda_h - N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v \lambda_h \\
& - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \lambda_h^2 - \beta q_1 q_2 \lambda_h \mu_v - \beta q_1 q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_3 q_4 \mu_v + q_2 q_4 q_5 \mu_v + q_3 q_4 q_5 \mu_v \\
& + q_1 q_2 \lambda_h \mu_v + q_1 q_3 \lambda_h \mu_v + q_1 q_4 \lambda_h \mu_v + q_2 q_4 \lambda_h \mu_v + q_3 q_4 \lambda_h \mu_v + q_2 q_5 \lambda_h \mu_v + q_3 q_5 \lambda_h \mu_v \\
& + q_4 q_5 \lambda_h \mu_v + q_1 \lambda_h^2 \mu_v + q_2 \lambda_h^2 \mu_v + q_3 \lambda_h^2 \mu_v + q_4 \lambda_h^2 \mu_v + q_5 \lambda_h^2 \mu_v + \lambda_h^3 \mu_v) \\
I_h = & \frac{(N_h \delta'_v (-q_1 q_2 q_4 + \beta q_1 q_2 q_4 - q_1 q_3 q_4 - q_2 q_4 q_5 - q_3 q_4 q_5 - \beta N_v q_1 q_4 \delta'_h - N_v q_2 q_4 \delta'_h - N_v q_3 q_4 \delta'_h \\
& - N_v q_2 q_5 \delta'_h - N_v q_3 q_5 \delta'_h - q_1 q_2 \lambda_h + \beta q_1 q_2 \lambda_h - q_1 q_3 \lambda_h - q_1 q_4 \lambda_h - q_2 q_4 \lambda_h - q_3 q_4 \lambda_h - q_2 q_5 \lambda_h \\
& - q_3 q_5 \lambda_h - q_4 q_5 \lambda_h - \beta N_v q_1 \delta'_h \lambda_h - N_v q_2 \delta'_h \lambda_h - N_v q_3 \delta'_h \lambda_h - N_v q_4 \delta'_h \lambda_h - N_v q_5 \delta'_h \lambda_h - q_1 \lambda_h^2 \\
& - q_2 \lambda_h^2 - q_3 \lambda_h^2 - q_4 \lambda_h^2 - q_5 \lambda_h^2 - N_v \delta'_h \lambda_h^2 - \lambda_h^3))}{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]} \\
S_h = & \frac{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)}
\end{aligned}$$

$$D_h = \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h}$$

$$I_v = \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v}$$

จากจุดสมมูลภายใต้ภายใต้สภาวะระบาคเรื่อร้งจะพบว่  $I_h > 0$

จากสมการที่ 4.2

$$\begin{aligned}
& (-N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v \lambda_h - N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \lambda_h - N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v \lambda_h \\
& - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \lambda_h^2 - \beta q_1 q_2 \lambda_h \mu_v - \beta q_1 q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_3 q_4 \mu_v + q_2 q_4 q_5 \mu_v + q_3 q_4 q_5 \mu_v \\
& + q_1 q_2 \lambda_h \mu_v + q_1 q_3 \lambda_h \mu_v + q_1 q_4 \lambda_h \mu_v + q_2 q_4 \lambda_h \mu_v + q_3 q_4 \lambda_h \mu_v + q_2 q_5 \lambda_h \mu_v + q_3 q_5 \lambda_h \mu_v \\
& + q_4 q_5 \lambda_h \mu_v + q_1 \lambda_h^2 \mu_v + q_2 \lambda_h^2 \mu_v + q_3 \lambda_h^2 \mu_v + q_4 \lambda_h^2 \mu_v + q_5 \lambda_h^2 \mu_v + \lambda_h^3 \mu_v) \\
I_h = & \frac{(N_h \delta'_v (-q_1 q_2 q_4 + \beta q_1 q_2 q_4 - q_1 q_3 q_4 - q_2 q_4 q_5 - q_3 q_4 q_5 - \beta N_v q_1 q_4 \delta'_h - N_v q_2 q_4 \delta'_h - N_v q_3 q_4 \delta'_h \\
& - N_v q_2 q_5 \delta'_h - N_v q_3 q_5 \delta'_h - q_1 q_2 \lambda_h + \beta q_1 q_2 \lambda_h - q_1 q_3 \lambda_h - q_1 q_4 \lambda_h - q_2 q_4 \lambda_h - q_3 q_4 \lambda_h - q_2 q_5 \lambda_h \\
& - q_3 q_5 \lambda_h - q_4 q_5 \lambda_h - \beta N_v q_1 \delta'_h \lambda_h - N_v q_2 \delta'_h \lambda_h - N_v q_3 \delta'_h \lambda_h - N_v q_4 \delta'_h \lambda_h - N_v q_5 \delta'_h \lambda_h - q_1 \lambda_h^2 \\
& - q_2 \lambda_h^2 - q_3 \lambda_h^2 - q_4 \lambda_h^2 - q_5 \lambda_h^2 - N_v \delta'_h \lambda_h^2 - \lambda_h^3))}{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{(N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v \lambda_h + N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \lambda_h + N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v \lambda_h + N_h N_v \delta'_h \delta'_v \lambda_h^2 + \beta q_1 q_2 \lambda_h \mu_v + \beta q_1 q_2 q_4 \mu_v - q_1 q_2 q_4 \mu_v - q_1 q_3 q_4 \mu_v - q_2 q_4 q_5 \mu_v - q_3 q_4 q_5 \mu_v - q_1 q_2 \lambda_h \mu_v - q_1 q_3 \lambda_h \mu_v - q_1 q_4 \lambda_h \mu_v - q_2 q_4 \lambda_h \mu_v - q_3 q_4 \lambda_h \mu_v - q_2 q_5 \lambda_h \mu_v - q_3 q_5 \lambda_h \mu_v - q_4 q_5 \lambda_h \mu_v - q_1 \lambda_h^2 \mu_v - q_2 \lambda_h^2 \mu_v - q_3 \lambda_h^2 \mu_v - q_4 \lambda_h^2 \mu_v - q_5 \lambda_h^2 \mu_v - \lambda_h^3 \mu_v)}{(N_h \delta'_v (q_1 q_2 q_4 - \beta q_1 q_2 q_4 + q_1 q_3 q_4 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \beta N_v q_1 q_4 \delta'_h + N_v q_2 q_4 \delta'_h + N_v q_3 q_4 \delta'_h + N_v q_2 q_5 \delta'_h + N_v q_3 q_5 \delta'_h + q_1 q_2 \lambda_h - \beta q_1 q_2 \lambda_h + q_1 q_3 \lambda_h + q_1 q_4 \lambda_h + q_2 q_4 \lambda_h + q_3 q_4 \lambda_h + q_2 q_5 \lambda_h + q_3 q_5 \lambda_h + q_4 q_5 \lambda_h + \beta N_v q_1 \delta'_h \lambda_h + N_v q_2 \delta'_h \lambda_h + N_v q_3 \delta'_h \lambda_h + N_v q_4 \delta'_h \lambda_h + N_v q_5 \delta'_h \lambda_h + q_1 \lambda_h^2 + q_2 \lambda_h^2 + q_3 \lambda_h^2 + q_4 \lambda_h^2 + q_5 \lambda_h^2 + N_v \delta'_h \lambda_h^2 + \lambda_h^3))} > 0$$

$$(N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v \lambda_h + N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \lambda_h + N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v \lambda_h + N_h N_v \delta'_h \delta'_v \lambda_h^2 + \beta q_1 q_2 \lambda_h \mu_v + \beta q_1 q_2 q_4 \mu_v - q_1 q_2 q_4 \mu_v - q_1 q_3 q_4 \mu_v - q_2 q_4 q_5 \mu_v - q_3 q_4 q_5 \mu_v - q_1 q_2 \lambda_h \mu_v - q_1 q_3 \lambda_h \mu_v - q_1 q_4 \lambda_h \mu_v - q_2 q_4 \lambda_h \mu_v - q_3 q_4 \lambda_h \mu_v - q_2 q_5 \lambda_h \mu_v - q_3 q_5 \lambda_h \mu_v - q_4 q_5 \lambda_h \mu_v - q_1 \lambda_h^2 \mu_v - q_2 \lambda_h^2 \mu_v - q_3 \lambda_h^2 \mu_v - q_4 \lambda_h^2 \mu_v - q_5 \lambda_h^2 \mu_v - \lambda_h^3 \mu_v) > 0$$

$$(q_4 + \lambda_h)(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v) - (q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_4 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v > 0$$

$$(q_4 + \lambda_h)(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v) > (q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_4 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v$$

$$(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v) > (q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v$$

นั่นคือ  $I_h > 0$  เมื่อ

$$(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v) > (q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v$$

$$\frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v} > 1$$

$$R_0 > 1$$

$$\text{เมื่อ } R_0 = \frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $S_h > 0$

$$\text{จากสมการที่ 4.1} \quad S_h = \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right)}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} > 0 \\ & \frac{\left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right) (\delta'_v I_h N_h + \mu_v)}{(\delta'_v I_h N_h + \mu_v) \lambda_h + (\delta'_v I_h N_h + \mu_v) q_4 + \delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h} > 0 \\ & \left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right) (\delta'_v I_h N_h + \mu_v) > 0 \\ & \delta'_v I_h N_h + \mu_v > 0 \\ & I_h > \frac{-\mu_v}{\delta'_v N_h} \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} & \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right)}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)} > 0 \\ & \frac{\left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right) (\delta'_v I_h N_h + \mu_v)}{(\delta'_v I_h N_h + \mu_v) \lambda_h + (\delta'_v I_h N_h + \mu_v) q_4 + \delta'_h N_v \delta'_v I_h N_h} > 0 \\ & \left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right) (\delta'_v I_h N_h + \mu_v) > 0 \end{aligned}$$

$$\left( q_4 + \lambda_h + I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) \right) > 0$$

$$I_h \left( -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right) > 0$$

$$I_h > 0$$

นั่นคือ  $S_h > 0$  เมื่อ  $I_h > \frac{-\mu_v}{\delta'_v N_h}$  และ  $I_h > 0$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $D_h > 0$

จากสมการที่ 4.3 
$$D_h = \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h}$$

จะได้ว่า 
$$D_h = \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h} > 0$$
 เสมอ

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $I_v > 0$

จากสมการที่ 4.4 
$$I_v = \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v}$$

จะได้ว่า 
$$I_v = \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} > 0$$
 เสมอ

จากการพิจารณาข้างต้นพบว่าเงื่อนไขที่ทำให้  $(I_h, S_h, D_h, I_v)$  มีค่ามากกว่าศูนย์คือ

$$\frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v} > 1$$

$$R_0 > 1$$

เมื่อ 
$$R_0 = \frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v}$$

เพื่อพิจารณาว่าจุดสมดุล  $(I_h, S_h, D_h, I_v)$  จะมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อดีเทอร์มิแนนต์ของทุก

เมทริกซ์ Hurwitz จะต้องเป็นบวก ซึ่งก็คือ  $\det H_i > 0$  โดยที่  $i = 1, 2, 3, \dots, k$

กำหนดให้ สมการที่ (4.1) - (4.4) เป็นดังนี้

$$X_1(I_h, S_h, D_h, I_v) = \delta'_h I_v N_v S_h + q_2 D_h - (q_1 + q_5 + \lambda_h) I_h$$

$$X_2(I_h, S_h, D_h, I_v) = \lambda_h + (q_3 - q_4) D_h + q_4 + (q_1 - q_4 - \beta q_1) I_h - (\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4) S_h$$

$$X_3(I_h, S_h, D_h, I_v) = \beta q_1 I_h - (q_2 + q_3 + \lambda_h) D_h$$

$$X_4(I_h, S_h, D_h, I_v) = \delta'_v I_h N_h (1 - I_v) - \mu_v I_v$$

จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ คือ

$$J = \begin{pmatrix} X_{1I_h} & X_{1S_h} & X_{1D_h} & X_{1I_v} \\ X_{2I_h} & X_{2S_h} & X_{2D_h} & X_{2I_v} \\ X_{3I_h} & X_{3S_h} & X_{3D_h} & X_{3I_v} \\ X_{4I_h} & X_{4S_h} & X_{4D_h} & X_{4I_v} \end{pmatrix}_{(I_h, S_h, D_h, I_v)}$$

โดยสมาชิกของจาโคเบียนเมทริกซ์ คือ

$$X_{1I_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = -(q_1 + q_5 + \lambda_h)$$

$$X_{1S_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = \delta'_h I_v N_v$$

$$X_{1D_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = q_2$$

$$X_{1I_v}(I_h, S_h, D_h, I_v) = \delta'_h N_v S_h$$

$$X_{2I_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = q_1 - q_4 - \beta q_1$$

$$X_{2S_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = -(\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4)$$

$$X_{2D_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = (q_3 - q_4)$$

$$X_{2I_v}(I_h, S_h, D_h, I_v) = -\delta'_h N_v S_h$$

$$X_{3I_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = \beta q_1$$

$$X_{3S_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = 0$$

$$X_{3D_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = -(q_2 + q_3 + \lambda_h)$$

$$X_{3I_v}(I_h, S_h, D_h, I_v) = 0$$

$$X_{4I_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = \delta'_v N_h (1 - I_v)$$

$$X_{4S_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = 0$$

$$X_{4D_h}(I_h, S_h, D_h, I_v) = 0$$

$$X_{4I_v}(I_h, S_h, D_h, I_v) = -(\delta'_v I_h N_h + \mu_v)$$

ซึ่งสามารถนำมาเขียนรูปแบบของเมทริกซ์ดังนี้[7]

$$J = \begin{pmatrix} -(q_1 + q_5 + \lambda_h) & \delta'_v I_v N_v & q_2 & \delta'_h N_v S_h \\ q_1 - q_4 - \beta q_1 & -(\lambda_h + \delta'_v I_v N_v + q_4) & (q_3 - q_4) & -\delta'_h N_v S_h \\ \beta q_1 & 0 & -(q_2 + q_3 + \lambda_h) & 0 \\ \delta'_v N_h (1 - I_v) & 0 & 0 & -(\delta'_v I_h N_h + \mu_v) \end{pmatrix}_{(I_h, S_h, D_h, I_v)}$$

ค่าเฉพาะของสมการหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ(Characteristic equation)

$$\det(J - \lambda I_4) = 0$$

เมื่อ  $I_4$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด  $4 \times 4$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค  $E_1(0, 1, 0, 0)$  จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ของจุดสมดุลดังนี้

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -(q_1 + q_5 + \lambda_h) & \delta'_v I_v N_v & q_2 & \delta'_h N_v S_h \\ q_1 - q_4 - \beta q_1 & -(\lambda_h + \delta'_v I_v N_v + q_4) & (q_3 - q_4) & -\delta'_h N_v S_h \\ \beta q_1 & 0 & -(q_2 + q_3 + \lambda_h) & 0 \\ \delta'_v N_h (1 - I_v) & 0 & 0 & -(\delta'_v I_h N_h + \mu_v) \end{pmatrix}_{(I_h, S_h, D_h, I_v)}$$

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -(q_1 + q_5 + \lambda_h) & 0 & q_2 & \delta'_h N_v \\ q_1 - q_4 - \beta q_1 & -(\lambda_h + q_4) & (q_3 - q_4) & -\delta'_h N_v \\ \beta q_1 & 0 & -(q_2 + q_3 + \lambda_h) & 0 \\ \delta'_v N_h & 0 & 0 & -\mu_v \end{pmatrix}_{(0, 1, 0, 0)}$$

$$J_{E_1} - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -(q_1 + q_5 + \lambda_h) - \lambda & 0 & q_2 & \delta'_h N_v \\ q_1 - q_4 - \beta q_1 & -(\lambda_h + q_4) - \lambda & (q_3 - q_4) & -\delta'_h N_v \\ \beta q_1 & 0 & -(q_2 + q_3 + \lambda_h) - \lambda & 0 \\ \delta'_v N_h & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda \end{pmatrix}_{(0,1,0,0)}$$

$$\det(J_{E_1} - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -(q_1 + q_5 + \lambda_h) - \lambda & 0 & q_2 & \delta'_h N_v \\ q_1 - q_4 - \beta q_1 & -(\lambda_h + q_4) - \lambda & (q_3 - q_4) & -\delta'_h N_v \\ \beta q_1 & 0 & -(q_2 + q_3 + \lambda_h) - \lambda & 0 \\ \delta'_v N_h & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda \end{vmatrix}_{(0,1,0,0)}$$

$$0 = (-\lambda_h - \lambda - q_4)(N_h(\lambda_h N_v \delta_h + \lambda N_v \delta_h + N_v q_2 \delta_h + N_v q_3 \delta_h) \delta_v + ((-\lambda_h - \lambda - q_2 - q_3)(-\lambda_h - \lambda - q_1 - q_5) - q_2 \beta q_1)(-\lambda - \mu_v))$$

จากสมการลักษณะเฉพาะจะได้ค่าลักษณะเฉพาะ 1 ค่าดังนี้

$$-\lambda_h - \lambda - q_4 = 0 \quad \text{หรือ} \quad \lambda = -\lambda_h - q_4$$

และค่าลักษณะเฉพาะที่เหลือหาได้จาก

$$(N_h(\lambda_h N_v \delta_h + \lambda N_v \delta_h + N_v q_2 \delta_h + N_v q_3 \delta_h) \delta_v + ((-\lambda_h - \lambda - q_2 - q_3)(-\lambda_h - \lambda - q_1 - q_5) - q_2 \beta q_1)(-\lambda - \mu_v)) = 0$$

จากสมการข้างต้นจะได้

$$\begin{aligned} & \lambda_h^2 \lambda + 2\lambda_h \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda_h \lambda q_1 + \lambda^2 q_1 + \lambda_h \lambda q_2 + \lambda^2 q_2 + \lambda q_1 q_2 + \lambda_h \lambda q_3 + \lambda^2 q_3 + \lambda q_1 q_3 + \lambda_h \lambda q_5 + \lambda^2 q_5 \\ & + \lambda q_2 q_5 + \lambda q_3 q_5 - \lambda q_2 \beta q_1 - \lambda_h N_h N_v \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^2 \mu_v \\ & + 2\lambda_h \lambda \mu_v + \lambda^2 \mu_v + \lambda_h q_1 \mu_v + \lambda q_1 \mu_v + \lambda_h q_2 \mu_v + \lambda q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + \lambda_h q_3 \mu_v + \lambda q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v + \\ & \lambda_h q_5 \mu_v + \lambda q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v - q_2 \beta q_1 \mu_v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -N_h N_v \delta'_h \delta'_v (\lambda_h + q_2 + q_3) + (q_1 (\lambda_h + q_2 + q_3) + (\lambda_h + q_3) (\lambda_h + q_5) + q_2 (\lambda_h + q_5 - \beta q_1)) \mu_v \\ & + (\lambda_h^2 + \lambda_h q_1 + \lambda_h q_2 + q_1 q_2 + \lambda_h q_3 + q_1 q_3 + \lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 - q_2 \beta q_1 - N_h N_v \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h \mu_v \\ & + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v) \lambda + (2\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v) \lambda^2 + \lambda^3 = 0 \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} a_3 &= -N_h N_v \delta'_h \delta'_v (\lambda_h + q_2 + q_3) + (q_1 (\lambda_h + q_2 + q_3) + (\lambda_h + q_3) (\lambda_h + q_5) + q_2 (\lambda_h + q_5 - \beta q_1)) \mu_v \\ a_2 &= \lambda_h^2 + \lambda_h q_1 + \lambda_h q_2 + q_1 q_2 + \lambda_h q_3 + q_1 q_3 + \lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + 2\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v \\ &\quad - q_2 \beta q_1 - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \\ a_1 &= 2\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v \end{aligned}$$

จากสมการลักษณะเฉพาะจะอยู่ในรูป  $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$

ค่าลักษณะเฉพาะจะเป็นลบ เมื่อสัมประสิทธิ์  $a_1, a_2$  และ  $a_3$  สอดคล้องกับ Routh-Hurwitz Criteria

ดังนี้

i)  $a_3 > 0$

ii)  $a_2 > 0$

iii)  $a_1 > 0$

iv)  $a_1 a_2 - a_3 > 0$

v)  $a_3 a_2 a_1 - a_3^2 > 0$  หรือ  $\Delta_2 a_3 > 0$  โดย  $(a_3 a_2 a_1 - a_3^2 = \Delta_2 a_3)$

i) พิจารณา  $a_1 > 0$  จาก  $T_3 = 2\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v$

จะได้ว่า  $2\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v > 0$

ซึ่งทุกพจน์ใน  $a_1$  เป็นบวกทั้งหมด ดังนั้น  $a_1 > 0$  เสมอ

ii) พิจารณา  $a_2 > 0$  จาก

$$\begin{aligned} a_2 &= \lambda_h^2 + \lambda_h q_1 + \lambda_h q_2 + q_1 q_2 + \lambda_h q_3 + q_1 q_3 + \lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 \\ &\quad + 2\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v - q_2 \beta q_1 - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &(\lambda_h^2 + \lambda_h q_1 + \lambda_h q_2 + q_1 q_2 + \lambda_h q_3 + q_1 q_3 + \lambda_h q_5 \\ &+ q_2 q_5 + q_3 q_5 + 2\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v) > q_2 \beta q_1 + N_h N_v \delta'_h \delta'_v \end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_2 > 0$  เมื่อ

$$(\lambda_h^2 + \lambda_h q_1 + \lambda_h q_2 + q_1 q_2 + \lambda_h q_3 + q_1 q_3 + \lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + 2\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v) > q_2 \beta q_1 + N_h N_v \delta'_h \delta'_v$$

iii) พิจารณา  $a_3 > 0$  จาก

$$a_3 = -N_h N_v \delta'_h \delta'_v (\lambda_h + q_2 + q_3) + (q_1 (\lambda_h + q_2 + q_3) + (\lambda_h + q_3) (\lambda_h + q_5) + q_2 (\lambda_h + q_5 - \beta q_1)) \mu_v$$

จะได้ว่า

$$(q_2 + q_3 + \lambda_h) (q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v > N_h N_v \delta'_h \delta'_v (\lambda_h + q_2 + q_3) + \beta q_1 q_2 \mu_v$$

$$\frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h) (q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v} < 1$$

$$R_0 < 1$$

นั่นคือ  $a_3 > 0$  เมื่อ  $(q_2 + q_3 + \lambda_h) (q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v > N_h N_v \delta'_h \delta'_v (\lambda_h + q_2 + q_3) + \beta q_1 q_2 \mu_v$

iv) พิจารณา  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  จาก

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= (2\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v) (\lambda_h^2 + \lambda_h q_1 + \lambda_h q_2 + q_1 q_2 + \lambda_h q_3 + q_1 q_3 + \lambda_h q_5 + q_2 q_5 \\ &\quad + q_3 q_5 + 2\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v - q_2 \beta q_1 - N_h N_v \delta'_h \delta'_v) \\ &= 2\lambda_h^3 + 3\lambda_h^2 q_1 + \lambda_h q_1^2 + 3\lambda_h^2 q_2 + 4\lambda_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + \lambda_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3\lambda_h^2 q_3 + 4\lambda_h q_1 q_3 + q_1^2 q_3 \\ &\quad + 2\lambda_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + A q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3\lambda_h^2 q_5 + 2A q_1 q_5 + 4\lambda_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 + q_2^2 q_5 + 4\lambda_h q_3 q_5 \\ &\quad + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + \lambda_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 - 2\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_1 q_2 \beta q_1 - q_2^2 \beta q_1 - q_2 q_3 \beta q_1 \\ &\quad - q_2 q_5 \beta q_1 - 3\lambda_h N_h N_v \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_1 \delta'_h \delta'_v - 2N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v - 2N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v \\ &\quad + 4\lambda_h^2 \mu_v + 4\lambda_h q_1 \mu_v + q_1^2 \mu_v + 4\lambda_h q_2 \mu_v + 2q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 4\lambda_h q_3 \mu_v + 2q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v \\ &\quad + q_3^2 \mu_v + 4\lambda_h q_5 \mu_v + 2q_1 q_5 \mu_v + 2q_2 q_5 \mu_v + 2q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \mu_v + 2\lambda_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 \\ &\quad + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \end{aligned}$$

$$a_3 = N_h N_v \delta'_h \delta'_v (\lambda_h + q_2 + q_3) - (q_1 (\lambda_h + q_2 + q_3) + (\lambda_h + q_3) (\lambda_h + q_5) + q_2 (\lambda_h + q_5 - \beta q_1)) \mu_v$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 &= 2\lambda_h^3 + 3\lambda_h^2 q_1 + \lambda_h q_1^2 + 3\lambda_h^2 q_2 + 4\lambda_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + \lambda_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3\lambda_h^2 q_3 + 4\lambda_h q_1 q_3 \\
&\quad + q_1^2 q_3 + 2\lambda_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + \lambda_h q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3\lambda_h^2 q_5 + 2\lambda_h q_1 q_5 + 4\lambda_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 \\
&\quad + q_2^2 q_5 + 4\lambda_h q_3 q_5 + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + \lambda_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 + 5\lambda_h^2 \mu_v + 5\lambda_h q_1 \mu_v \\
&\quad + q_1^2 \mu_v + 5\lambda_h q_2 \mu_v + 3q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 5\lambda_h q_3 \mu_v + 3q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v + q_3^2 \mu_v + 5\lambda_h q_5 \mu_v \\
&\quad + 2q_1 q_5 \mu_v + 3q_2 q_5 \mu_v + 3q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v + 2\lambda_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\
&\quad - 2\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_1 q_2 \beta q_1 - q_2^2 \beta q_1 - q_2 q_3 \beta q_1 - q_2 q_5 \beta q_1 - 2\lambda_h N_h N_v \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_1 \delta'_h \delta'_v \\
&\quad - N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v - q_2 \beta q_1 \mu_v - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \mu_v
\end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned}
&2\lambda_h^3 + 3\lambda_h^2 q_1 + \lambda_h q_1^2 + 3\lambda_h^2 q_2 + 4\lambda_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + \lambda_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3\lambda_h^2 q_3 + 4\lambda_h q_1 q_3 \\
&\quad + q_1^2 q_3 + 2\lambda_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + \lambda_h q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3\lambda_h^2 q_5 + 2\lambda_h q_1 q_5 + 4\lambda_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 \\
&\quad + q_2^2 q_5 + 4\lambda_h q_3 q_5 + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + \lambda_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 + 5\lambda_h^2 \mu_v + 5\lambda_h q_1 \mu_v \\
&\quad + q_1^2 \mu_v + 5\lambda_h q_2 \mu_v + 3q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 5\lambda_h q_3 \mu_v + 3q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v + q_3^2 \mu_v + 5\lambda_h q_5 \mu_v \\
&\quad + 2q_1 q_5 \mu_v + 3q_2 q_5 \mu_v + 3q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v + 2\lambda_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\
&> 2\lambda_h q_2 \beta q_1 + q_1 q_2 \beta q_1 + q_2^2 \beta q_1 + q_2 q_3 \beta q_1 + q_2 q_5 \beta q_1 + 2\lambda_h N_h N_v \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_1 \delta'_h \delta'_v \\
&\quad + N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v + N_h N_v \delta'_h \delta'_v \mu_v
\end{aligned}$$

v) พิสูจน์ว่า  $a_3 a_2 a_1 - a_3^2 > 0$  หรือ  $\Delta_2 a_3 > 0$  จาก

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= 2\lambda_h^3 + 3\lambda_h^2 q_1 + \lambda_h q_1^2 + 3\lambda_h^2 q_2 + 4\lambda_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + \lambda_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3\lambda_h^2 q_3 + 4\lambda_h q_1 q_3 \\
&\quad + q_1^2 q_3 + 2\lambda_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + \lambda_h q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3\lambda_h^2 q_5 + 2\lambda_h q_1 q_5 + 4\lambda_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 \\
&\quad + q_2^2 q_5 + 4\lambda_h q_3 q_5 + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + \lambda_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 + 5\lambda_h^2 \mu_v + 5\lambda_h q_1 \mu_v \\
&\quad + q_1^2 \mu_v + 5\lambda_h q_2 \mu_v + 3q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 5\lambda_h q_3 \mu_v + 3q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v + q_3^2 \mu_v + 5\lambda_h q_5 \mu_v \\
&\quad + 2q_1 q_5 \mu_v + 3q_2 q_5 \mu_v + 3q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v + 2\lambda_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\
&\quad - 2\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_1 q_2 \beta q_1 - q_2^2 \beta q_1 - q_2 q_3 \beta q_1 - q_2 q_5 \beta q_1 - 2\lambda_h N_h N_v \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_1 \delta'_h \delta'_v \\
&\quad - N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v - q_2 \beta q_1 \mu_v - N_h N_v \delta'_h \delta'_v \mu_v
\end{aligned}$$

$$a_3 = N_h N_v \delta'_h \delta'_v (\lambda_h + q_2 + q_3) - (q_1 (\lambda_h + q_2 + q_3) + (\lambda_h + q_3) (\lambda_h + q_5) + q_2 (\lambda_h + q_5 - \beta q_1)) \mu_v$$

จะได้ว่า  $a_3 a_2 a_1 - a_3^2 =$

$$\begin{aligned}
& 2\lambda_n^4 N_h N_v \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n^3 N_h N_v q_1 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n^2 N_h N_v q_1^2 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n^3 N_h N_v q_2 \delta_h' \delta_v' + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_1 q_2 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_1^2 q_2 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n^2 N_h N_v q_2^2 \delta_h' \delta_v' \\
& + 5\lambda_n^3 N_h N_v q_1 q_2 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1^2 q_2^2 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n N_h N_v q_1^3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1 q_2^3 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n^3 N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_1^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 8\lambda_n^2 N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 10\lambda_n N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 2N_h N_v q_1^2 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_1 q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n^2 N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \\
& + 5\lambda_n N_h N_v q_1 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1^2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_1 q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n^2 N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 2\lambda_n^2 N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 2N_h N_v q_1 q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1^2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \\
& + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' + 10\lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 4N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 2N_h N_v q_1 q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1^2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n^2 N_h N_v q_2^2 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_2^2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \\
& + 2N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_2^2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n^3 q_2 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^2 q_1 q_2 \beta q_1 \mu_v + 2\lambda_n q_1^2 q_2 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^2 q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_1 q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 2q_1^2 q_2^2 \beta q_1 \mu_v \\
& + 2\lambda_n q_2^3 \beta q_1 \mu_v + 2q_1 q_2^3 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^2 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 2q_1^2 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4\lambda_n q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4q_1 q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 2\lambda_n q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v \\
& + 2q_1 q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^2 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4\lambda_n q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v \\
& + 4q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 2q_1 q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 2\lambda_n q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 2q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 2q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 7\lambda_n^3 N_h N_v \delta_h' \delta_v' \mu_v + 8\lambda_n^2 N_h N_v q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 2\lambda_n N_h N_v q_1^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 13\lambda_n^2 N_h N_v q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_1 q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_1^2 q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 7\lambda_n N_h N_v q_2^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_2^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + N_h N_v q_2^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 13\lambda_n^2 N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_1^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 14\lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 8N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 3N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 7\lambda_n N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 3N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 8\lambda_n^2 N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 4\lambda_n N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 8N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2\lambda_n N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_3^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4\lambda_n^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_1 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 \\
& + q_1^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_2^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_1 q_2^2 \beta q_1 \mu_v^2 + q_2^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 \\
& + 2q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + q_2^2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 3\lambda_n^2 N_h N_v \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2\lambda_n N_h N_v q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 4\lambda_n N_h N_v q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 \\
& + 2N_h N_v q_1 q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + N_h N_v q_2^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 4\lambda_n N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 \\
& + 2\lambda_n N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_3 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2\lambda_n q_2 \beta q_1 \mu_v^3 + q_1 q_2 \beta q_1 \mu_v^3 + q_2^2 \beta q_1 \mu_v^3 + q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^3 + q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^3 \\
& - 2\lambda_n^2 N_h N_v q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - \lambda_n N_h N_v q_1 q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - 3\lambda_n N_h N_v q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - N_h N_v q_1 q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - 4\lambda_n q_1 q_3 \mu_v^3 - q_1^2 q_3 \mu_v^3 \\
& - N_h N_v q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - 3\lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - N_h N_v q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - 2N_h N_v q_2^2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - N_h N_v q_2 q_3^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - \lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \\
& - N_h N_v q_2^2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - N_h N_v q_2 q_3^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' - 3\lambda_n^2 N_h^2 N_v^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - \lambda_n N_h^2 N_v^2 q_1 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - 5\lambda_n N_h^2 N_v^2 q_2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - N_h^2 N_v^2 q_1 q_2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - 2N_h^2 N_v^2 q_2^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \\
& - 5\lambda_n N_h^2 N_v^2 q_3 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - N_h^2 N_v^2 q_1 q_3 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - 4N_h^2 N_v^2 q_2 q_3 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - 2N_h^2 N_v^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - \lambda_n N_h^2 N_v^2 q_2 q_3 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - N_h^2 N_v^2 q_2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 - N_h^2 N_v^2 q_3 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \\
& - 2\lambda_n^5 \mu_v - 5\lambda_n^4 q_1 \mu_v - 4\lambda_n^3 q_1^2 \mu_v - \lambda_n^2 q_1^3 \mu_v - 5\lambda_n^4 q_2 \mu_v - 12\lambda_n^3 q_1 q_2 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_1^2 q_2 \mu_v - 2\lambda_n q_1^3 q_2 \mu_v - 4\lambda_n^3 q_2^2 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_1 q_2^2 \mu_v - 6\lambda_n q_1^2 q_2^2 \mu_v \\
& - q_1^3 q_2^2 \mu_v - \lambda_n^2 q_3 \mu_v - 2\lambda_n q_1 q_2 \mu_v - q_1^2 q_2 \mu_v - 5\lambda_n^4 q_3 \mu_v - 12\lambda_n^3 q_1 q_3 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_1^2 q_3 \mu_v - 2\lambda_n q_1^3 q_3 \mu_v - 8\lambda_n^3 q_2 q_3 \mu_v - 18\lambda_n^2 q_1 q_2 q_3 \mu_v \\
& - 12\lambda_n q_1^2 q_2 q_3 \mu_v - 2q_1^2 q_2 q_3 \mu_v - 3\lambda_n^2 q_2^2 q_3 \mu_v - 6\lambda_n q_1 q_2^2 q_3 \mu_v - 3q_1^2 q_2^2 q_3 \mu_v - 4\lambda_n^3 q_3^2 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_1 q_3^2 \mu_v - 6\lambda_n q_1^2 q_3^2 \mu_v - q_1^3 q_3^2 \mu_v - 3\lambda_n^2 q_2 q_3^2 \mu_v \\
& - 6\lambda_n q_1 q_2 q_3^2 \mu_v - 3q_1^2 q_2 q_3^2 \mu_v - \lambda_n^2 q_3^3 \mu_v - 2\lambda_n q_1 q_3^3 \mu_v - q_1^2 q_3^3 \mu_v - 5\lambda_n^4 q_3 \mu_v - 8\lambda_n^3 q_1 q_3 \mu_v - 3\lambda_n^2 q_1^2 q_3 \mu_v - 12\lambda_n q_1 q_2 q_3 \mu_v - 18\lambda_n^2 q_1 q_2 q_3 \mu_v \\
& - 6\lambda_n q_1^2 q_2 q_3 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_2^2 q_3 \mu_v - 12\lambda_n q_1 q_2^2 q_3 \mu_v - 3q_1^2 q_2^2 q_3 \mu_v - 2\lambda_n q_2^3 q_3 \mu_v - 2q_1 q_2^3 q_3 \mu_v - 12\lambda_n^3 q_3 q_3 \mu_v - 18\lambda_n^2 q_1 q_3 q_3 \mu_v - 6\lambda_n q_1^2 q_3 q_3 \mu_v \\
& - 18\lambda_n^2 q_2 q_3 q_3 \mu_v - 24\lambda_n q_1 q_2 q_3 q_3 \mu_v - 6q_1^2 q_2 q_3 q_3 \mu_v - 6\lambda_n q_2^2 q_3 q_3 \mu_v - 6q_1 q_2^2 q_3 q_3 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_3^2 q_3 \mu_v - 12\lambda_n q_1 q_3^2 q_3 \mu_v - 3q_1^2 q_3^2 q_3 \mu_v \\
& - 6\lambda_n q_2 q_3^2 q_3 \mu_v - 6q_1 q_2 q_3^2 q_3 \mu_v - 2\lambda_n q_3^3 q_3 \mu_v - 2q_1 q_3^3 q_3 \mu_v - 4\lambda_n^3 q_3^2 \mu_v - 3\lambda_n^2 q_1 q_3^2 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_2 q_3^2 \mu_v - 6\lambda_n q_1 q_2 q_3^2 \mu_v - 6\lambda_n q_2^2 q_3^2 \mu_v - 3q_1^2 q_2^2 \mu_v \\
& - q_2^3 q_3^2 \mu_v - 9\lambda_n^2 q_3 q_3^2 \mu_v - 6\lambda_n q_1 q_3 q_3^2 \mu_v - 12\lambda_n q_2 q_3 q_3^2 \mu_v - 6q_1 q_2 q_3 q_3^2 \mu_v - 3q_2^2 q_3 q_3^2 \mu_v - 6\lambda_n q_3^2 q_3^2 \mu_v - 3q_1 q_3^2 q_3^2 \mu_v - 3q_2 q_3^2 q_3^2 \mu_v - q_3^3 q_3^2 \mu_v \\
& - \lambda_n^2 q_3^3 \mu_v - 2\lambda_n q_2 q_3^3 \mu_v - q_2^2 q_3^3 \mu_v - 2\lambda_n q_3 q_3^3 \mu_v - 2q_2 q_3 q_3^3 \mu_v - q_2^2 q_3^3 \mu_v - 2\lambda_n q_2^2 \beta q_1^2 \mu_v - q_1 q_2^2 \beta q_1^2 \mu_v - q_2^2 \beta q_1^2 \mu_v - q_2^2 q_3 \beta q_1^2 \mu_v - q_2^2 q_3^2 \beta q_1^2 \mu_v \\
& - 3\lambda_n N_h N_v q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v - N_h N_v q_1 q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v - 2q_2 q_3 q_3 \mu_v^3 - q_3^2 q_3 \mu_v^3 - \lambda_n q_3^2 \mu_v^3 - q_2 q_3^2 \mu_v^3 - q_3 q_3^2 \mu_v^3 - \lambda_n q_3^2 \mu_v^3 - q_1 q_2^2 \mu_v^3 - 3\lambda_n^2 q_3 \mu_v^3 \\
& - 2N_h N_v q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v - 2N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v - N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v - \lambda_n N_h^2 N_v^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \mu_v - N_h^2 N_v^2 q_2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \mu_v - N_h^2 N_v^2 q_3 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \mu_v - 4\lambda_n^4 \mu_v^2 \\
& - 8\lambda_n^3 q_1 \mu_v^2 - 5\lambda_n^2 q_1^2 \mu_v^2 - \lambda_n q_1^3 \mu_v^2 - 8\lambda_n^3 q_2 \mu_v^2 - 14\lambda_n^2 q_1 q_2 \mu_v^2 - 7\lambda_n q_1^2 q_2 \mu_v^2 - q_1^3 q_2 \mu_v^2 - 5\lambda_n^2 q_2^2 \mu_v^2 - 7\lambda_n q_1 q_2^2 \mu_v^2 - 2q_1^2 q_2^2 \mu_v^2 - \lambda_n q_2^2 \mu_v^2 - q_1 q_2^2 \mu_v^2 \\
& - 8\lambda_n^3 q_3 \mu_v^2 - 14\lambda_n^2 q_1 q_3 \mu_v^2 - 7\lambda_n q_1^2 q_3 \mu_v^2 - q_1^3 q_3 \mu_v^2 - 10\lambda_n^2 q_2 q_3 \mu_v^2 - 14\lambda_n q_1 q_2 q_3 \mu_v^2 - 4q_1^2 q_2 q_3 \mu_v^2 - 3\lambda_n q_2^2 q_3 \mu_v^2 - 3q_1 q_2^2 q_3 \mu_v^2 - 5\lambda_n^2 q_3^2 \mu_v^2 \\
& - 7\lambda_n q_1 q_3^2 \mu_v^2 - 2q_1^2 q_3^2 \mu_v^2 - 3\lambda_n q_2 q_3^2 \mu_v^2 - 3q_1 q_2 q_3^2 \mu_v^2 - \lambda_n q_3^3 \mu_v^2 - q_1 q_3^3 \mu_v^2 - 8\lambda_n^3 q_3 \mu_v^2 - 10\lambda_n^2 q_1 q_3 \mu_v^2 - 3\lambda_n q_1^2 q_3 \mu_v^2 - 14\lambda_n^2 q_2 q_3 \mu_v^2 - 14\lambda_n q_1 q_2 q_3 \mu_v^2 \\
& - 3q_1^2 q_2 q_3 \mu_v^2 - 7\lambda_n q_2^2 q_3 \mu_v^2 - 4q_1 q_2^2 q_3 \mu_v^2 - q_2^3 q_3 \mu_v^2 - 14\lambda_n^2 q_3 q_3 \mu_v^2 - 14\lambda_n q_1 q_2 q_3 \mu_v^2 - 3q_1^2 q_3 q_3 \mu_v^2 - 14\lambda_n q_2 q_3 q_3 \mu_v^2 - 8q_1 q_2 q_3 q_3 \mu_v^2 - 3q_2^2 q_3 q_3 \mu_v^2 \\
& - 7\lambda_n q_3^2 q_3 \mu_v^2 - 4q_1 q_3^2 q_3 \mu_v^2 - 3q_2 q_3^2 q_3 \mu_v^2 - q_3^3 q_3 \mu_v^2 - 5\lambda_n^2 q_3^2 \mu_v^2 - 3\lambda_n q_1 q_3^2 \mu_v^2 - 7\lambda_n q_2 q_3^2 \mu_v^2 - 3q_1 q_2 q_3^2 \mu_v^2 - 2q_2^2 q_3^2 \mu_v^2 - 7\lambda_n q_3 q_3^2 \mu_v^2 - 3q_1 q_3 q_3^2 \mu_v^2 \\
& - 4q_2 q_3 q_3^2 \mu_v^2 - 2q_3^2 q_3^2 \mu_v^2 - \lambda_n q_3^3 \mu_v^2 - q_2 q_3^3 \mu_v^2 - q_3 q_3^3 \mu_v^2 - N_h N_v q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 - 2\lambda_n^3 \mu_v^3 - 3\lambda_n^2 q_1 \mu_v^3 - \lambda_n q_1^2 \mu_v^3 - 3\lambda_n^2 q_2 \mu_v^3 - 4\lambda_n q_1 q_2 \mu_v^3 - q_1^2 q_2 \mu_v^3 \\
& - 2\lambda_n q_2 q_3 \mu_v^3 - 2q_1 q_2 q_3 \mu_v^3 - \lambda_n q_3^3 \mu_v^3 - q_1 q_3^3 \mu_v^3 - 3\lambda_n^2 q_3 \mu_v^3 - 2\lambda_n q_1 q_3 \mu_v^3 - 4\lambda_n q_2 q_3 \mu_v^3 - 2q_1 q_2 q_3 \mu_v^3 - 2q_2 q_3 \mu_v^3 - 4\lambda_n q_3 q_3 \mu_v^3 - 2q_1 q_3 q_3 \mu_v^3
\end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_3 a_2 a_1 - a_3^2 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned}
& 2\lambda_n^4 N_h N_v \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n^3 N_h N_v q_1 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n^2 N_h N_v q_1^2 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n^3 N_h N_v q_2 \delta_h' \delta_v' + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_1 q_2 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_1^2 q_2 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n^2 N_h N_v q_2^2 \delta_h' \delta_v' \\
& + 5\lambda_n N_h N_v q_1 q_2^2 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1^2 q_2^2 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n N_h N_v q_1^3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1 q_2^3 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n^3 N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_1^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 8\lambda_n^2 N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 10\lambda_n N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 2N_h N_v q_1^2 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n N_h N_v q_1 q_2^2 q_3 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_1 q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n^2 N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \\
& + 5\lambda_n N_h N_v q_1 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1^2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_1 q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n N_h N_v q_1^3 q_3^2 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1 q_2^3 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n^3 N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 2\lambda_n^2 N_h N_v q_1 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n N_h N_v q_1 q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n N_h N_v q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 2N_h N_v q_1 q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 7\lambda_n^2 N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n N_h N_v q_1 q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 10\lambda_n N_h N_v q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 4N_h N_v q_1 q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 5\lambda_n N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 2N_h N_v q_1 q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 3N_h N_v q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n^2 N_h N_v q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 2\lambda_n N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \\
& + 2N_h N_v q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n^3 q_2 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^2 q_1 q_2 \beta q_1 \mu_v + 2\lambda_n q_1^2 q_2 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^2 q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_1 q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 2q_1^2 q_2^2 \beta q_1 \mu_v \\
& + 2\lambda_n q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 2q_1 q_2^2 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^3 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 2q_1^2 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4\lambda_n q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4q_1 q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 2\lambda_n q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v \\
& + 2q_1 q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 6\lambda_n^2 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4\lambda_n q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 4q_1 q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 2q_1^2 q_3 \beta q_1 \mu_v + 8\lambda_n q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 4q_1 q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v \\
& + 4q_2^2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 2q_2^2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 2\lambda_n q_2^2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 2q_2^2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 2q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v + 7\lambda_n^3 N_h N_v \delta_h' \delta_v' \mu_v + 8\lambda_n^2 N_h N_v q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 2\lambda_n N_h N_v q_1^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 13\lambda_n^2 N_h N_v q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_1 q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_1^2 q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 7\lambda_n N_h N_v q_2^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_2^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + N_h N_v q_1^2 q_2^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 13\lambda_n^2 N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_1^2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 14\lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 8N_h N_v q_1 q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 3N_h N_v q_1^2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 7\lambda_n N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 3N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v + N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 8\lambda_n^2 N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 4\lambda_n N_h N_v q_1 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_2^2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 12\lambda_n N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_1 q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v \\
& + 8N_h N_v q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2\lambda_n N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_2 q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 4\lambda_n^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_1 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 \\
& + q_1^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_2^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_1 q_2^2 \beta q_1 \mu_v^2 + q_2^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_2^2 q_3 \beta q_1 \mu_v^2 + q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 \\
& + 2q_1 q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_2^2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 2q_2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + q_2^2 q_3^2 \beta q_1 \mu_v^2 + 3\lambda_n^2 N_h N_v \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2\lambda_n N_h N_v q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 4\lambda_n N_h N_v q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 \\
& + 2N_h N_v q_1 q_2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + N_h N_v q_2^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 4\lambda_n N_h N_v q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_1 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_2 q_3 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 \\
& + 2\lambda_n N_h N_v q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_2 q_3^2 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2N_h N_v q_3^3 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2\lambda_n q_2 \beta q_1 \mu_v^3 + q_1 q_2 \beta q_1 \mu_v^3 + q_2^2 \beta q_1 \mu_v^3 + q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^3 + q_2 q_3 \beta q_1 \mu_v^3
\end{aligned}$$

>

$$\begin{aligned}
& 2\lambda_n^2 N_h N_v q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n N_h N_v q_1 q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n N_h N_v q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1 q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + 4\lambda_n q_1 q_3 \mu_v^3 + q_1^2 q_3 \mu_v^3 \\
& + N_h N_v q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_1 q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + 2N_h N_v q_2^2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_2 q_3^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + \lambda_n N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \\
& + N_h N_v q_2^2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + N_h N_v q_2 q_3^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' + 3\lambda_n^2 N_h^2 N_v^2 q_1^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + \lambda_n N_h^2 N_v^2 q_1^2 q_2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + 5\lambda_n N_h^2 N_v^2 q_1^2 q_2^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + N_h^2 N_v^2 q_1^2 q_2^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + 2N_h^2 N_v^2 q_2^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \\
& + 5\lambda_n N_h^2 N_v^2 q_2^2 q_3 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + N_h^2 N_v^2 q_2^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + 4N_h^2 N_v^2 q_2^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + 2N_h^2 N_v^2 q_2^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + \lambda_n N_h^2 N_v^2 q_2^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + N_h^2 N_v^2 q_2^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 + N_h^2 N_v^2 q_2^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \\
& + 2\lambda_n^5 \mu_v + 5\lambda_n^4 q_1 \mu_v + 4\lambda_n^3 q_1^2 \mu_v + \lambda_n^2 q_1^3 \mu_v + 5\lambda_n^4 q_2 \mu_v + 12\lambda_n^3 q_1 q_2 \mu_v + 9\lambda_n^2 q_1^2 q_2 \mu_v + 2\lambda_n q_1^3 q_2 \mu_v + 4\lambda_n^3 q_2^2 \mu_v + 9\lambda_n^2 q_1 q_2^2 \mu_v + 6\lambda_n q_1^2 q_2^2 \mu_v \\
& + q_1^3 q_2^2 \mu_v + \lambda_n^2 q_2^3 \mu_v + 2\lambda_n q_1 q_2^3 \mu_v + q_1^2 q_2^3 \mu_v + 5\lambda_n^4 q_3 \mu_v + 12\lambda_n^3 q_1 q_3 \mu_v + 9\lambda_n^2 q_1^2 q_3 \mu_v + 2\lambda_n q_1^3 q_3 \mu_v + 8\lambda_n^3 q_2 q_3 \mu_v + 18\lambda_n^2 q_1 q_2 q_3 \mu_v \\
& + 12\lambda_n q_1^2 q_2 q_3 \mu_v + 2q_1^2 q_2 q_3 \mu_v + 3\lambda_n^2 q_2^2 q_3 \mu_v + 6\lambda_n q_2^2 q_3 \mu_v + 3q_2^2 q_3 \mu_v + 4\lambda_n^3 q_3^2 \mu_v + 9\lambda_n^2 q_1 q_3^2 \mu_v + 6\lambda_n q_1^2 q_3^2 \mu_v + q_1^3 q_3^2 \mu_v + 3\lambda_n^2 q_2 q_3^2 \mu_v \\
& + 6\lambda_n q_2 q_3^2 \mu_v + 3q_2^2 q_3^2 \mu_v + \lambda_n^2 q_3^3 \mu_v + 2\lambda_n q_2 q_3^3 \mu_v + q_2^2 q_3^3 \mu_v + 5\lambda_n^4 q_3 \mu_v + 8\lambda_n^3 q_1 q_3 \mu_v + 3\lambda_n^2 q_1^2 q_3 \mu_v + 12\lambda_n^3 q_2 q_3 \mu_v + 18\lambda_n^2 q_1 q_2 q_3 \mu_v \\
& + 6\lambda_n q_1^2 q_2 q_3 \mu_v + 9\lambda_n^2 q_2^2 q_3 \mu_v + 12\lambda_n q_1 q_2^2 q_3 \mu_v + 3q_1^2 q_2^2 q_3 \mu_v + 2\lambda_n q_2^2 q_3 \mu_v + 12\lambda_n^3 q_3^3 \mu_v + 18\lambda_n^2 q_1 q_3^3 \mu_v + 6\lambda_n q_1^2 q_3^3 \mu_v \\
& + 18\lambda_n^2 q_2 q_3^3 \mu_v + 24\lambda_n q_1 q_2 q_3^3 \mu_v + 6q_1^2 q_2 q_3^3 \mu_v + 6\lambda_n q_2^2 q_3^3 \mu_v + 6q_2^2 q_3^3 \mu_v + 9\lambda_n^2 q_3^3 \mu_v + 12\lambda_n q_1 q_2 q_3^3 \mu_v + 3q_1^2 q_2^2 q_3^3 \mu_v \\
& + 6\lambda_n q_2^2 q_3^3 \mu_v + 6q_2^2 q_3^3 \mu_v + 2\lambda_n q_3^3 \mu_v + 2q_3^3 \mu_v + 4\lambda_n^3 q_3^2 \mu_v + 3\lambda_n^2 q_1 q_3^2 \mu_v + 9\lambda_n^2 q_2 q_3^2 \mu_v + 6\lambda_n q_1 q_2 q_3^2 \mu_v + 6\lambda_n q_2^2 q_3^2 \mu_v + 3q_1^2 q_2^2 q_3^2 \mu_v \\
& + q_2^2 q_3^2 \mu_v + 9\lambda_n^3 q_3^2 \mu_v + 6\lambda_n q_1 q_2 q_3^2 \mu_v + 12\lambda_n q_2 q_3^2 \mu_v + 6q_2 q_3^2 \mu_v + 3q_2^2 q_3^2 \mu_v + 6\lambda_n q_3^2 \mu_v + 3q_2^2 q_3^2 \mu_v + 3q_2^2 q_3^2 \mu_v + q_3^2 q_3^2 \mu_v \\
& + \lambda_n^2 q_3^3 \mu_v + 2\lambda_n q_2 q_3^3 \mu_v + q_2^2 q_3^3 \mu_v + 2\lambda_n q_3^3 \mu_v + 2q_2 q_3^3 \mu_v + q_3^3 \mu_v + 2\lambda_n q_2^2 \beta q_1^2 \mu_v + q_1 q_2^2 \beta q_1^2 \mu_v + q_2^2 \beta q_1^2 \mu_v + q_2^2 q_3 \beta q_1^2 \mu_v + q_2^2 q_3 \beta q_1^2 \mu_v \\
& + 3\lambda_n N_h N_v q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v + N_h N_v q_1 q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2q_2 q_3 q_3 \mu_v^3 + q_3^2 q_3 \mu_v^3 + \lambda_n q_3^2 \mu_v^3 + q_2 q_3^2 \mu_v^3 + q_3 q_3^2 \mu_v^3 + \lambda_n q_3^2 \mu_v^3 + q_1 q_3^2 \mu_v^3 + 3\lambda_n^2 q_3 \mu_v^3 \\
& + 2N_h N_v q_2^2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v + 2N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v + N_h N_v q_2 q_3 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v + \lambda_n N_h^2 N_v^2 q_2^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \mu_v + N_h^2 N_v^2 q_2^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \mu_v + N_h^2 N_v^2 q_3^2 \delta_h'^2 \delta_v'^2 \mu_v + 4\lambda_n^4 \mu_v^2 \\
& + 8\lambda_n^3 q_1 \mu_v^2 + 5\lambda_n^2 q_1^2 \mu_v^2 + \lambda_n q_1^3 \mu_v^2 + 8\lambda_n^3 q_2 \mu_v^2 + 14\lambda_n^2 q_1 q_2 \mu_v^2 + 7\lambda_n q_1^2 q_2 \mu_v^2 + q_1^3 q_2 \mu_v^2 + 5\lambda_n^2 q_2^2 \mu_v^2 + 7\lambda_n q_1 q_2^2 \mu_v^2 + 2q_1^2 q_2^2 \mu_v^2 + \lambda_n q_2^3 \mu_v^2 + q_1 q_2^3 \mu_v^2 \\
& + 8\lambda_n^3 q_3 \mu_v^2 + 14\lambda_n^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + 7\lambda_n q_1^2 q_3 \mu_v^2 + q_1^3 q_3 \mu_v^2 + 10\lambda_n^2 q_2 q_3 \mu_v^2 + 14\lambda_n q_1 q_2 q_3 \mu_v^2 + 4q_1^2 q_2 q_3 \mu_v^2 + 3\lambda_n q_2^2 q_3 \mu_v^2 + 3q_1 q_2^2 q_3 \mu_v^2 + 5\lambda_n^2 q_3^2 \mu_v^2 \\
& + 7\lambda_n q_1 q_3^2 \mu_v^2 + 2q_1^2 q_3^2 \mu_v^2 + 3\lambda_n q_2 q_3^2 \mu_v^2 + 3q_2 q_3^2 \mu_v^2 + \lambda_n q_3^3 \mu_v^2 + 10\lambda_n^2 q_1 q_3^3 \mu_v^2 + 3\lambda_n q_2 q_3^3 \mu_v^2 + 14\lambda_n^2 q_2 q_3^3 \mu_v^2 + 14\lambda_n q_1 q_2 q_3^3 \mu_v^2 \\
& + 3q_1^2 q_2 q_3^3 \mu_v^2 + 7\lambda_n q_2^2 q_3^3 \mu_v^2 + 4q_1 q_2^2 q_3^3 \mu_v^2 + q_2^2 q_3^3 \mu_v^2 + 14\lambda_n^2 q_3^3 \mu_v^2 + 14\lambda_n q_1 q_2 q_3^3 \mu_v^2 + 3q_1^2 q_2 q_3^3 \mu_v^2 + 14\lambda_n q_2 q_3^3 \mu_v^2 + 8q_1 q_2 q_3^3 \mu_v^2 + 3q_2^2 q_3^3 \mu_v^2 \\
& + 7\lambda_n q_3^3 \mu_v^2 + 4q_1 q_3^3 \mu_v^2 + 3q_2 q_3^3 \mu_v^2 + q_3^3 \mu_v^2 + 5\lambda_n^2 q_3^2 \mu_v^2 + 3\lambda_n q_1 q_2^2 \mu_v^2 + 7\lambda_n q_2^2 q_3^2 \mu_v^2 + 2q_2^2 q_3^2 \mu_v^2 + 7\lambda_n q_3^2 \mu_v^2 + 3q_2 q_3^2 \mu_v^2 \\
& + 4q_2 q_3^2 \mu_v^2 + 2q_2^2 q_3^2 \mu_v^2 + \lambda_n q_3^3 \mu_v^2 + q_2 q_3^3 \mu_v^2 + q_3^3 \mu_v^2 + N_h N_v q_2 \beta q_1 \delta_h' \delta_v' \mu_v^2 + 2\lambda_n^3 \mu_v^2 + 3\lambda_n^2 q_1 \mu_v^2 + \lambda_n q_2 \mu_v^2 + 3\lambda_n^2 q_2 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_1 q_2 \mu_v^2 + q_1^2 q_2 \mu_v^2 \\
& + 2\lambda_n q_2 q_3 \mu_v^2 + 2q_1 q_2 q_3 \mu_v^2 + \lambda_n q_3^2 \mu_v^2 + q_1 q_3^2 \mu_v^2 + 3\lambda_n^2 q_3 \mu_v^2 + 2\lambda_n q_1 q_3 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_2 q_3 \mu_v^2 + 2q_1 q_2 q_3 \mu_v^2 + q_2^2 q_3 \mu_v^2 + 4\lambda_n q_3 \mu_v^2 + 2q_1 q_3 \mu_v^2
\end{aligned}$$

จากค่าเจาะจงทั้ง 4 ค่า พบว่ามีค่าเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0 < 1$

2) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะได้จุดสมดุล  $E_2(I_h, S_h, D_h, I_v)$  เมื่อ

$$I_h = \frac{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_4 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h)\mu_v - (q_4 + \lambda_h)(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{N_h \delta'_v (q_1 ((-1 + \beta)q_2 - q_3 - \beta N_v \delta'_h - \lambda_h)(q_4 + \lambda_h) - (q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_5 + \lambda_h)(N_v \delta'_h + \lambda_h) + q_4(q_5 + N_v \delta'_h + \lambda_h))}$$

$$S_h = \frac{q_4 + \lambda_h + I_h \left[ -q_4 + q_1 \left( 1 - \beta + \frac{\beta(q_3 - q_4)}{q_2 + q_3 + \lambda_h} \right) \right]}{\lambda_h + q_4 + \delta'_h N_v \left( \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v} \right)}$$

$$D_h = \frac{\beta q_1 I_h}{q_2 + q_3 + \lambda_h}$$

$$I_v = \frac{\delta'_v I_h N_h}{\delta'_v I_h N_h + \mu_v}$$

จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ดังนี้

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -(q_1 + q_5 + \lambda_h) & \delta'_h I_v N_v & q_2 & \delta'_h N_v S_h \\ q_1 - q_4 - \beta q_1 & -(\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4) & (q_3 - q_4) & -\delta'_h N_v S_h \\ \beta q_1 & 0 & -(q_2 + q_3 + \lambda_h) & 0 \\ \delta'_v N_h (1 - I_v) & 0 & 0 & -(\delta'_v I_h N_h + \mu_v) \end{pmatrix}_{(I_h, S_h, D_h, I_v)}$$

$$\det(J_{E_2} - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -(q_1 + q_5 + \lambda_h) - \lambda & \delta'_h I_v N_v & q_2 & \delta'_h N_v S_h \\ q_1 - q_4 - \beta q_1 & -(\lambda_h + \delta'_h I_v N_v + q_4) - \lambda & (q_3 - q_4) & -\delta'_h N_v S_h \\ \beta q_1 & 0 & -(q_2 + q_3 + \lambda_h) - \lambda & 0 \\ \delta'_v N_h (1 - I_v) & 0 & 0 & -(\delta'_v I_h N_h + \mu_v) - \lambda \end{vmatrix}_{(I_h, S_h, D_h, I_v)}$$

$$\begin{aligned} & (1 - I_v) N_h \delta'_v (-\lambda - q_2 - q_3 - \lambda_h) (\lambda N_v S_h \delta'_h + N_v q_4 S_h \delta'_h + N_v S_h \delta'_h \lambda_h) + \\ & ((-I_v N_v (q_1 - \beta q_1 - q_4) \delta'_h + (-\lambda - q_1 - q_5 - \lambda_h) (-\lambda - q_4 - I_v N_v \delta'_h - \lambda_h)) \\ & (-\lambda - q_2 - q_3 - \lambda_h) + \beta q_1 (\lambda q_2 + q_2 q_4 + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h - I_v N_v q_4 \delta'_h + q_2 \lambda_h)) \\ & (-\lambda - I_h N_h \delta'_v - \mu_v) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-\lambda_h^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - 2\lambda_h \lambda N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + 2\lambda_h \lambda I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda_h I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda_h I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda_h I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + i_v N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v) + ((-I_v N_v (q_1 - \beta q_1 - q_4) \delta'_h + (-\lambda - q_1 - q_5 - \lambda_h) \\
& (-\lambda - q_4 - I_v N_v \delta'_h - \lambda_h))(-\lambda - q_2 - q_3 - \lambda_h) + \beta q_1 (\lambda q_2 + q_2 q_4 + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& - I_v N_v q_4 \delta'_h + q_2 \lambda_h))(-\lambda - I_h N_h \delta'_v - \mu_v) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-\lambda_h^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - 2\lambda_h \lambda N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h \lambda I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - \lambda_h N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda_h I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + i_v N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v) + \\
& (-\lambda_h^3 - 3\lambda_h^2 \lambda - 3\lambda_h \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda_h^2 q_1 - 2\lambda_h \lambda q_1 - \lambda^2 q_1 - \lambda_h^2 q_2 - 2\lambda_h \lambda q_2 - \lambda^2 q_2 - \lambda_h q_1 q_2 - \lambda q_1 q_2 - \lambda_h^2 q_3 - 2\lambda_h \lambda q_3 - \lambda^2 q_3 \\
& - \lambda_h q_1 q_3 - \lambda q_1 q_3 - \lambda_h^2 q_4 - 2\lambda_h \lambda q_4 - \lambda^2 q_4 - \lambda_h q_1 q_4 - \lambda q_1 q_4 - \lambda_h q_2 q_4 - \lambda q_2 q_4 - q_1 q_2 q_4 - \lambda_h q_3 q_4 - \lambda q_3 q_4 - q_1 q_3 q_4 \\
& - \lambda_h^2 q_5 - 2\lambda_h \lambda q_5 - \lambda^2 q_5 - \lambda_h q_2 q_5 - \lambda q_2 q_5 - \lambda_h q_3 q_5 - \lambda q_3 q_5 - \lambda_h q_4 q_5 - \lambda q_4 q_5 - q_2 q_4 q_5 - q_3 q_4 q_5 + \lambda_h q_2 \beta q_1 + \lambda q_2 \beta q_1 \\
& + q_2 q_4 \beta q_1 - \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h - 2\lambda_h \lambda I_v N_v \delta'_h - \lambda^2 I_v N_v \delta'_h - \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h - \lambda I_v N_v q_2 \delta'_h - \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h - \lambda I_v N_v q_3 \delta'_h - \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h \\
& - \lambda I_v N_v q_4 \delta'_h - I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h - I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h - \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h - \lambda I_v N_v q_5 \delta'_h - I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h - I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h - \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\
& - \lambda I_v N_v \beta q_1 \delta'_h - I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h)(-\lambda - I_h N_h \delta'_v - \mu_v) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-\lambda_h^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - 2\lambda_h \lambda N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h \lambda I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - \lambda_h N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda_h I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^3 \lambda + 3\lambda_h^2 \lambda^2 \\
& + 3\lambda_h \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda_h^2 \lambda q_1 + 2\lambda_h \lambda^2 q_1 + \lambda^3 q_1 + \lambda_h^2 \lambda q_2 + 2\lambda_h \lambda^2 q_2 + \lambda^3 q_2 + \lambda_h \lambda q_1 q_2 + \lambda^2 q_1 q_2 + \lambda_h^2 \lambda q_3 + 2\lambda_h \lambda^2 q_3 + \lambda^3 q_3 + \lambda_h \lambda q_1 q_3 \\
& + \lambda^2 q_1 q_3 + \lambda_h^2 \lambda q_4 + 2\lambda_h \lambda^2 q_4 + \lambda^3 q_4 + \lambda_h \lambda q_1 q_4 + \lambda^2 q_1 q_4 + \lambda_h \lambda q_2 q_4 + \lambda^2 q_2 q_4 + \lambda q_1 q_2 q_4 + \lambda_h \lambda q_3 q_4 + \lambda^2 q_3 q_4 + \lambda q_1 q_3 q_4 \\
& + \lambda_h^2 \lambda q_5 + 2\lambda_h \lambda^2 q_5 + \lambda^3 q_5 + \lambda_h \lambda q_2 q_5 + \lambda^2 q_2 q_5 + \lambda_h \lambda q_3 q_5 + \lambda^2 q_3 q_5 + \lambda_h \lambda q_4 q_5 + \lambda^2 q_4 q_5 + \lambda q_2 q_4 q_5 + \lambda q_3 q_4 q_5 - \lambda_h \lambda q_2 \beta q_1 \\
& - \lambda^2 q_2 \beta q_1 - \lambda q_2 q_4 \beta q_1 + \lambda_h^2 \lambda I_v N_v \delta'_h + 2\lambda_h \lambda^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda^3 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h \lambda I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda^2 I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h \lambda I_v N_v q_3 \delta'_h + \lambda^2 I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& + \lambda_h \lambda I_v N_v q_4 \delta'_h + \lambda^2 I_v N_v q_4 \delta'_h + \lambda I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + \lambda I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h \lambda I_v N_v q_5 \delta'_h + \lambda^2 I_v N_v q_5 \delta'_h + \lambda I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + \lambda I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h \\
& + \lambda_h \lambda I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + \lambda^2 I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + \lambda I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + \lambda_h^3 I_h N_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \lambda I_h N_h \delta'_v + 3\lambda_h \lambda^2 I_h N_h \delta'_v + \lambda^3 I_h N_h \delta'_v + A^2 I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + 2\lambda_h \lambda I_h N_h q_1 \delta'_v + \lambda^2 I_h N_h q_1 \delta'_v + A^2 I_h N_h q_2 \delta'_v + 2\lambda_h \lambda I_h N_h q_2 \delta'_v + \lambda^2 I_h N_h q_2 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + \lambda I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_3 \delta'_v \\
& + 2\lambda_h \lambda I_h N_h q_3 \delta'_v + \lambda^2 I_h N_h q_3 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + \lambda I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_4 \delta'_v + 2\lambda_h \lambda I_h N_h q_4 \delta'_v + \lambda^2 I_h N_h q_4 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v \\
& + \lambda I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + \lambda I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + \lambda I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_5 \delta'_v \\
& + 2\lambda_h \lambda I_h N_h q_5 \delta'_v + \lambda^2 I_h N_h q_5 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v + \lambda I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + \lambda I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + \lambda I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v - \lambda_h I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - \lambda I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - I_h N_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h \lambda I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda^2 I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + \lambda I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v + \lambda I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + \lambda I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 q_5 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_3 q_5 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + \lambda I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^3 \mu_v + 3\lambda_h^2 \lambda \mu_v + 3\lambda_h \lambda^2 \mu_v + \lambda^3 \mu_v \\
& + \lambda_h^2 q_1 \mu_v + 2\lambda_h \lambda q_1 \mu_v + \lambda^2 q_1 \mu_v + \lambda_h^2 q_2 \mu_v + 2\lambda_h \lambda q_2 \mu_v + \lambda^2 q_2 \mu_v + \lambda_h q_1 q_2 \mu_v + \lambda q_1 q_2 \mu_v + \lambda_h^2 q_3 \mu_v + 2\lambda_h \lambda q_3 \mu_v + \lambda^2 q_3 \mu_v \\
& + \lambda_h q_1 q_3 \mu_v + \lambda q_1 q_3 \mu_v + \lambda_h^2 q_4 \mu_v + 2\lambda_h \lambda q_4 \mu_v + \lambda^2 q_4 \mu_v + \lambda_h q_1 q_4 \mu_v + \lambda q_1 q_4 \mu_v + \lambda_h q_2 q_4 \mu_v + \lambda q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_2 q_4 \mu_v + \lambda_h q_3 q_4 \mu_v \\
& + \lambda q_3 q_4 \mu_v + q_1 q_3 q_4 \mu_v + \lambda_h^2 q_5 \mu_v + 2\lambda_h \lambda q_5 \mu_v + \lambda^2 q_5 \mu_v + \lambda_h q_2 q_5 \mu_v + \lambda q_2 q_5 \mu_v + \lambda_h q_3 q_5 \mu_v + \lambda q_3 q_5 \mu_v + \lambda_h q_4 q_5 \mu_v + \lambda q_4 q_5 \mu_v \\
& + q_2 q_4 q_5 \mu_v + q_3 q_4 q_5 \mu_v - \lambda_h q_2 \beta q_1 \mu_v - \lambda q_2 \beta q_1 \mu_v - q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h \mu_v + 2\lambda_h \lambda I_v N_v \delta'_h \mu_v + \lambda^2 I_v N_v \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v \\
& + \lambda I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + \lambda I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + \lambda I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h \mu_v + \\
& \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + \lambda I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v + \lambda I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v) = 0
\end{aligned}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& (\lambda_h^3 I_h N_h \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_1 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_2 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_3 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_4 \delta'_v \\
& + \lambda_h I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_5 \delta'_v \\
& + \lambda_h I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v - \lambda_h I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v \\
& - I_h N_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 q_5 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_3 q_5 \delta'_h \delta'_v - \lambda_h^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - \lambda_h N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + I_v N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h \delta'_v \\
& + \lambda_h^3 \mu_v + \lambda_h^2 q_1 \mu_v + \lambda_h q_2 \mu_v + \lambda_h q_1 q_2 \mu_v + \lambda_h^2 q_3 \mu_v + \lambda_h q_1 q_3 \mu_v + \lambda_h^2 q_4 \mu_v + \lambda_h q_1 q_4 \mu_v + \lambda_h q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_2 q_4 \mu_v \\
& + \lambda_h q_3 q_4 \mu_v + q_1 q_3 q_4 \mu_v + \lambda_h^2 q_5 \mu_v + \lambda_h q_2 q_5 \mu_v + \lambda_h q_3 q_5 \mu_v + \lambda_h q_4 q_5 \mu_v + q_2 q_4 q_5 \mu_v + q_3 q_4 q_5 \mu_v - \lambda_h q_2 \beta q_1 \mu_v \\
& - q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h \mu_v \\
& + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\
&+\lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 - \lambda_h q_2 \beta q_1 - q_2 q_4 \beta q_1 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h \\
&+\lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h \\
&+\lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\
&+I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\
&+I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v - I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\
&+I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v - 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v \\
&+I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v \\
&+I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v \\
&+q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v - q_2 \beta q_1 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v \\
&+I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
&-q_2 \beta q_1 + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v \\
&+I_h N_h q_1 \delta'_v + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v - N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v \\
&+I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) \lambda^2
\end{aligned}$$

$$+(3\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + I_v N_v \delta'_h + I_h N_h \delta'_v + \mu_v) \lambda^3 + \lambda^4 = 0$$

$$\begin{aligned}
&(\lambda_h^3 I_h N_h \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_1 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_2 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_3 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_4 \delta'_v \\
&+\lambda_h I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v + \lambda_h^2 I_h N_h q_5 \delta'_v \\
&+\lambda_h I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + \lambda_h I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v + \lambda_h^2 I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v \\
&+\lambda_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v \\
&+\lambda_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 q_5 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 q_5 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^2 I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v \\
&+\lambda_h I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + \lambda_h I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v \\
&+I_h I_v N_h N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + \lambda_h^3 \mu_v + \lambda_h^2 q_1 \mu_v + \lambda_h q_2 \mu_v + \lambda_h q_1 q_2 \mu_v + \lambda_h^2 q_3 \mu_v + \lambda_h q_1 q_3 \mu_v + \lambda_h^2 q_4 \mu_v + \lambda_h q_1 q_4 \mu_v \\
&+\lambda_h q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_2 q_4 \mu_v + \lambda_h q_3 q_4 \mu_v + q_1 q_3 q_4 \mu_v + \lambda_h^2 q_5 \mu_v + \lambda_h q_2 q_5 \mu_v + \lambda_h q_3 q_5 \mu_v + \lambda_h q_4 q_5 \mu_v + q_2 q_4 q_5 \mu_v \\
&+q_3 q_4 q_5 \mu_v + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h \mu_v \\
&+\lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h \mu_v + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v) \\
&+(-\lambda_h I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - I_h N_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v - \lambda_h^2 N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
&-\lambda_h N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - \lambda_h q_2 \beta q_1 \mu_v - q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +((\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\
& + \lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\
& + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v \\
& + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v \\
& + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) \\
& + (-\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_2 q_4 \beta q_1 - I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - q_2 \beta q_1 \mu_v) \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +((3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
& + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v + I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v \\
& + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) + (-q_2 \beta q_1 - N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v) \lambda^2
\end{aligned}$$

$$+ (3\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + I_v N_v \delta'_h + I_h N_h \delta'_v + \mu_v) \lambda^3 + \lambda^4 = 0$$

$$\begin{aligned}
& I_h N_h ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5) + I_v N_v ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4) \beta q_1) \delta'_h) \delta'_v \\
& + (\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5) \mu_v + I_v N_v \delta'_h (N_h S_h \delta'_v (\lambda_h^2 + (\lambda_h + q_3) q_4 + q_2 (\lambda_h + q_4) + \lambda_h q_3 S_h \delta'_h \delta'_v) \\
& + ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4) \beta q_1) \mu_v) \\
& - (\lambda_h + q_4)(N_h (I_h q_2 \beta q_1 + N_v (\lambda_h + q_2 + q_3) S_h \delta'_h) \delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +((\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\
& + \lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\
& + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v \\
& + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v \\
& + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) \\
& + (-\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_2 q_4 \beta q_1 - I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - q_2 \beta q_1 \mu_v) \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +((3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
& + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v + I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v \\
& + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) + (-q_2 \beta q_1 - N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v)) \lambda^2 \\
& + (3\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + I_v N_v \delta'_h + I_h N_h \delta'_v + \mu_v) \lambda^3 + \lambda^4 = 0
\end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
a_4 = & [I_h N_h ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5) + I_v N_v ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\delta'_h)\delta'_v \\
& + (\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5)\mu_v + I_v N_v \delta'_h (N_h S_h \delta'_v (\lambda_h^2 + (\lambda_h + q_3)q_4 + q_2(\lambda_h + q_4) + \lambda_h q_3 S_h \delta'_h \delta'_v) \\
& + ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\mu_v) \\
& - (\lambda_h + q_4)(N_h (I_h q_2 \beta q_1 + N_v (\lambda_h + q_2 + q_3) S_h \delta'_h)\delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & [(\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\
& + \lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\
& + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v \\
& + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v \\
& + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) \\
& + (-\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_2 \beta q_1 - I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - q_2 \beta q_1 \mu_v)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & [(3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
& + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v + I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v \\
& + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) + (-q_2 \beta q_1 - N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v)]
\end{aligned}$$

$$a_1 = (3\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + I_v N_v \delta'_h + I_h N_h \delta'_v + \mu_v)$$

จากสมการลักษณะเฉพาะจะอยู่ในรูป  $\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^1 + a_4 = 0$

พิจารณา  $a_4 > 0$  จาก

$$\begin{aligned} a_4 = & [I_h N_h ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5) + I_v N_v ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\delta'_h)\delta'_v \\ & + (\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5)\mu_v + I_v N_v \delta'_h (N_h S_h \delta'_v (\lambda_h^2 + (\lambda_h + q_3)q_4 + q_2(\lambda_h + q_4) + \lambda_h q_3 S_h \delta'_h \delta'_v) \\ & + ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\mu_v) \\ & - (\lambda_h + q_4)(N_h (I_h q_2 \beta q_1 + N_v (\lambda_h + q_2 + q_3) S_h \delta'_h)\delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v)] \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & I_h N_h ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5) + I_v N_v ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\delta'_h)\delta'_v \\ & + (\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5)\mu_v + I_v N_v \delta'_h (N_h S_h \delta'_v (\lambda_h^2 + (\lambda_h + q_3)q_4 + q_2(\lambda_h + q_4) + \lambda_h q_3 S_h \delta'_h \delta'_v) \\ & + ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\mu_v) \\ & - (\lambda_h + q_4)(N_h (I_h q_2 \beta q_1 + N_v (\lambda_h + q_2 + q_3) S_h \delta'_h)\delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & I_h N_h ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5) + I_v N_v ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\delta'_h)\delta'_v \\ & + (\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5)\mu_v + I_v N_v \delta'_h (N_h S_h \delta'_v (\lambda_h^2 + (\lambda_h + q_3)q_4 + q_2(\lambda_h + q_4) + \lambda_h q_3 S_h \delta'_h \delta'_v) \\ & + ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\mu_v) > \\ & (\lambda_h + q_4)(N_h (I_h q_2 \beta q_1 + N_v (\lambda_h + q_2 + q_3) S_h \delta'_h)\delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v) \end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_4 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned} & I_h N_h ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5) + I_v N_v ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\delta'_h)\delta'_v \\ & + (\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4)(\lambda_h + q_1 + q_5)\mu_v + I_v N_v \delta'_h (N_h S_h \delta'_v (\lambda_h^2 + (\lambda_h + q_3)q_4 + q_2(\lambda_h + q_4) + \lambda_h q_3 S_h \delta'_h \delta'_v) \\ & + ((\lambda_h + q_2 + q_3)(\lambda_h + q_4 + q_5) + (\lambda_h + q_4)\beta q_1)\mu_v) > \\ & (\lambda_h + q_4)(N_h (I_h q_2 \beta q_1 + N_v (\lambda_h + q_2 + q_3) S_h \delta'_h)\delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v) \end{aligned}$$

พิจารณา  $a_3 > 0$  จาก

$$\begin{aligned} a_3 = & [(\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\ & + \lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \\ & + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\ & + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\ & + I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\ & + I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\ & + I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\ & + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v \\ & + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v \\ & + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) \\ & + (-\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_2 q_4 \beta q_1 - I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\ & - N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - q_2 \beta q_1 \mu_v)] \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\
& + \lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\
& + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v \\
& + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v \\
& + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) \\
& + (-\lambda_h q_2 \beta q_1 - q_2 q_4 \beta q_1 - I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v - 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v - N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& - N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v - q_2 \beta q_1 \mu_v) > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\
& + \lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\
& + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v \\
& + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v \\
& + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) > \\
& (\lambda_h q_2 \beta q_1 + q_2 q_4 \beta q_1 + I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v + 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v)
\end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_3 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned}
& (\lambda_h^3 + \lambda_h^2 q_1 + \lambda_h^2 q_2 + \lambda_h q_1 q_2 + \lambda_h^2 q_3 + \lambda_h q_1 q_3 + \lambda_h^2 q_4 + \lambda_h q_1 q_4 + \lambda_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + \lambda_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 \\
& + \lambda_h^2 q_5 + \lambda_h q_2 q_5 + \lambda_h q_3 q_5 + \lambda_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + \lambda_h^2 I_v N_v \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_2 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_3 \delta'_h \\
& + \lambda_h I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_4 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_4 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v q_2 q_5 \delta'_h + I_v N_v q_3 q_5 \delta'_h + \lambda_h I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \\
& + I_v N_v q_4 \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h^2 I_h N_h \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_1 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_2 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_3 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_1 q_3 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_1 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_4 \delta'_v + I_h N_h q_3 q_4 \delta'_v + 2\lambda_h I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h N_h q_2 q_5 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_3 q_5 \delta'_v + I_h N_h q_4 q_5 \delta'_v + 2\lambda_h I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_2 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_3 \delta'_h \delta'_v \\
& + I_h I_v N_h N_v q_4 \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v q_5 \delta'_h \delta'_v + 2\lambda_h I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + I_v N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \beta q_1 \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h^2 \mu_v + 2\lambda_h q_1 \mu_v + 2\lambda_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v + 2\lambda_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v \\
& + 2\lambda_h q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 2\lambda_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h \mu_v \\
& + I_v N_v q_2 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_3 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_4 \delta'_h \mu_v + I_v N_v q_5 \delta'_h \mu_v + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h \mu_v) > \\
& (\lambda_h q_2 \beta q_1 + q_2 q_4 \beta q_1 + I_h N_h q_2 \beta q_1 \delta'_v + 2\lambda_h N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_2 S_h \delta'_h \delta'_v + N_h N_v q_3 S_h \delta'_h \delta'_v \\
& + N_h N_v q_4 S_h \delta'_h \delta'_v + q_2 \beta q_1 \mu_v)
\end{aligned}$$

พิจารณา  $a_2 > 0$  จาก

$$\begin{aligned}
a_2 = & [(3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
& + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v + I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v \\
& + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) + (-q_2 \beta q_1 - N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v)]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
& + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v + I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v \\
& + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) + (-q_2 \beta q_1 - N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v) > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
& + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v + I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v \\
& + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) > (q_2 \beta q_1 + N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v)
\end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_2 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned}
& (3\lambda_h^2 + 2\lambda_h q_1 + 2\lambda_h q_2 + q_1 q_2 + 2\lambda_h q_3 + q_1 q_3 + 2\lambda_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 2\lambda_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
& + 2\lambda_h I_v N_v \delta'_h + I_v N_v q_2 \delta'_h + I_v N_v q_3 \delta'_h + I_v N_v q_4 \delta'_h + I_v N_v q_5 \delta'_h + I_v N_v \beta q_1 \delta'_h + 3\lambda_h I_h N_h \delta'_v + I_h N_h q_1 \delta'_v \\
& + I_h N_h q_2 \delta'_v + I_h N_h q_3 \delta'_v + I_h N_h q_4 \delta'_v + I_h N_h q_5 \delta'_v + I_h I_v N_h N_v \delta'_h \delta'_v + I_v N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v + 3\lambda_h \mu_v + q_1 \mu_v \\
& + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + I_v N_v \delta'_h \mu_v) > (q_2 \beta q_1 + N_h N_v S_h \delta'_h \delta'_v)
\end{aligned}$$

พิจารณา  $a_1 > 0$  เมื่อ

$$a_1 = 3\lambda_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + I_v N_v \delta'_h + I_h N_h \delta'_v + \mu_v$$

จะได้ว่าทุกพจน์ใน  $a_1$  มีค่าเป็นบวกทั้งหมดเลยส่งผลให้  $a_1$  มีค่าเป็นบวกเสมอ

ดังนั้นจากการพิจารณาค่า  $a_1, a_2, a_3, a_4$  พบว่าทุกค่ามีค่ามากกว่าศูนย์

จาก The Routh-Hurwitz Criteria จะได้ว่า

$$H_1 = (a_1)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\det H_1 = a_1$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3$$

$$\det H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_4 a_1^2 - a_3^2$$

$$\det H_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_4^2 a_1^2 - a_4 a_3^2$$

จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อดีเทอร์มิแนนต์ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก

ดังนั้น จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$\det H_1 = a_1 > 0$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$$

$$\det H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_4 a_1^2 - a_3^2 > 0$$

$$\det H_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_4^2 a_1^2 - a_4 a_3^2 > 0$$

ต่อไปจะพิจารณาตัวอย่างข้อมูลดังนี้

กำหนดให้ จำนวนประชากรทั้งหมด 1,000 คน นั่นคือ  $N_h = 1,000$  คน , ประชากรหนึ่งคนมีอายุเฉลี่ย 65-70 ปี จากจำนวนประชากรคงที่ทำให้อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการเสียชีวิตของประชากร ดังนั้น  $\theta = \lambda_h = \frac{1}{365 \times 70}$  ต่อคน , ระยะเวลาของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เปลี่ยน ไปเป็นผู้

ที่เสี่ยงเท่ากับ 10 วัน นั่นคือ  $q_1 = \frac{1}{10}$  ต่อคน , ระยะเวลาที่เชื้อฝังตัวอยู่ในผู้ป่วย 10 วัน นั่นคือ  $q_2 = \frac{1}{10}$

ต่อคน , ระยะเวลาที่ใช้ในการรักษาอาการป่วยเท่ากับระยะเวลาของการฟื้นจากการติดเชื้อเป็นเวลา 20

วัน นั่นคือ  $q_3 = q_5 = \frac{1}{20}$  ต่อคน , จำนวนยุงทั้งหมด 900 ตัว นั่นคือ  $N_v = 900$  ตัว , ยุงหนึ่งตัวมีอายุ

เฉลี่ย 35 วัน นั่นคือ  $\mu_v = \frac{1}{35}$  ต่อตัว , อัตราการอพยพเข้า - ออกของประชากรเท่ากับ 0.055 นั่นคือ

$m_i = m_0 = 0.055$  ต่อคน , ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากรเท่ากับ 0.75 นั่นคือ  $\beta = 0.75$  ต่อคน , อัตรา

การถ่ายทอดเชื้อจากยุงไปประชากรเท่ากับ 0.004 นั่นคือ  $\delta'_h = 0.004$  ต่อคน , อัตราการถ่ายทอดเชื้อจาก

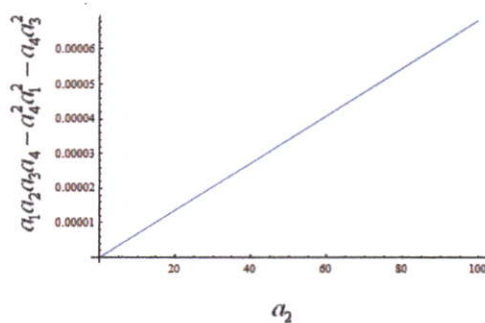
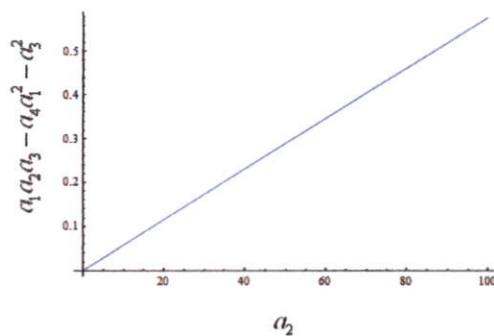
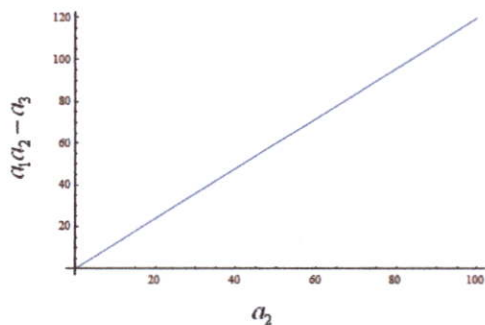
ประชากรไปยุงเท่ากับ 0.004 นั่นคือ  $\delta'_v = 0.004$  ต่อตัว , ระยะเวลาที่ผู้ฟื้นจากการติดเชื้อเปลี่ยน ไปเป็นผู้

เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้งเท่ากับ 15 วัน นั่นคือ  $q_4 = \frac{1}{15}$  ต่อคน , ค่าคงที่อัตราการตายของประชากรยุง

เท่ากับอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่อัตราการเกิดใหม่ของจำนวนยุงกับจำนวนยุงทั้งหมด  $\mu_v = \frac{L}{N_v}$  นั่นคือ

$$L = \frac{900}{35} \approx 25.714 \text{ ตัว [8]}$$

พิจารณาเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria ดังนั้นจากสมการที่เงื่อนไขใช้ค่าพารามิเตอร์  
ข้างต้นสามารถแสดงกราฟของสมการที่ได้ดังนี้



รูปที่ 4.1 กราฟแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาคเรื้อรังซึ่งสอดคล้องกับ  
เงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria

จากกราฟข้างต้นแสดงให้เห็นว่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ Hurwitz ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0 > 1$

จากการสร้างแบบจำลองของโรคมาลาเรียข้างต้นพบว่า เราสามารถหาจุดสมดุลได้ 2 จุด คือ จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0 < 1$  จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0 > 1$  นั้นหมายความว่าในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียควรกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กล่าวมาข้างต้น[9]

#### ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะไร้โรค โดยประชากรทั้งหมดคงที่

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	$\lambda_h$	0.0000391	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จากยุงไปสู่ประชากร	$\delta'_h$	0.001	คน <sup>-1</sup> /ยุง <sup>-1</sup>
อัตราการเกิดของประชากร	$\theta$	0.0000391	คน <sup>-1</sup>
จำนวนประชากรทั้งหมด	$N_h$	1,000	คน
ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	$\beta$	0.75	เปอร์เซ็นต์
อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_1$	0.10	คน <sup>-1</sup>

ข้อความ (ต่อ)	สัญลักษณ์ (ต่อ)	ค่าพารามิเตอร์ (ต่อ)	หน่วย (ต่อ)
อัตราที่เชื่อชนิกพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อ ฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	$q_2$	0.0005479	คน <sup>-1</sup>
อัตราผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อ การติดเชื้อ	$q_3$	0.0333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการตายของยุง	$\mu_v$	0.0714	ตัว <sup>-1</sup>
จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น	$L$	300	ตัว
อัตราผู้ที่พ้นจากการติดเชื้อชนิกพลาสโมเดียม ไวแวกซ์ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_4$	0.0001826	คน <sup>-1</sup>
อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิกพลาสโม เดียมไวแวกซ์	$q_5$	0.333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพเข้าของประชากร	$m_i$	0.057	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพออกของประชากร	$m_o$	0.057	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิกพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากประชากรไปสู่ยุง	$\delta'_v$	0.001	คน <sup>-1</sup> /ยุง <sup>-1</sup>

ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะระบาดเรื้อรัง โดยประชากรทั้งหมดคงที่

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	$\lambda_h$	0.0000391	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสติกโมเดียมไวแวกซ์ จากยูงไปสู่ประชากร	$\delta'_h$	0.004	คน <sup>-1</sup> /ยูง <sup>-1</sup>
อัตราการเกิดของประชากร	$\theta$	0.0000391	วัน <sup>-1</sup>
จำนวนประชากรทั้งหมด	$N_h$	1,000	คน
ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	$\beta$	0.75	เปอร์เซ็นต์
อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_1$	0.10	คน <sup>-1</sup>
อัตราที่เชื้อชนิดพลาสติกโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อ ฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	$q_2$	0.0005479	คน <sup>-1</sup>
อัตราผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการ ติดเชื้อ	$q_3$	0.0333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการตายของยูง	$\mu_v$	0.0714	ตัว <sup>-1</sup>
จำนวนของยูง ณ เวลาเริ่มต้น	$L$	1000	ตัว
อัตราผู้ที่พ้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสติกโมเดียม ไวแวกซ์ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_4$	0.0001826	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพเข้าของประชากร	$m_i$	0.057	คน <sup>-1</sup>

ข้อความ (ต่อ)	สัญลักษณ์ (ต่อ)	ค่าพารามิเตอร์ (ต่อ)	หน่วย (ต่อ)
อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อมีดพลาสติกโมเดียมไวแวกซ์	$q_5$	0.333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพออกของประชากร	$m_o$	0.057	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื้อมีดพลาสติกโมเดียมไวแวกซ์จากประชากรไปสู่ขุง	$\delta'_v$	0.004	คน <sup>-1</sup> /ขุง <sup>-1</sup>

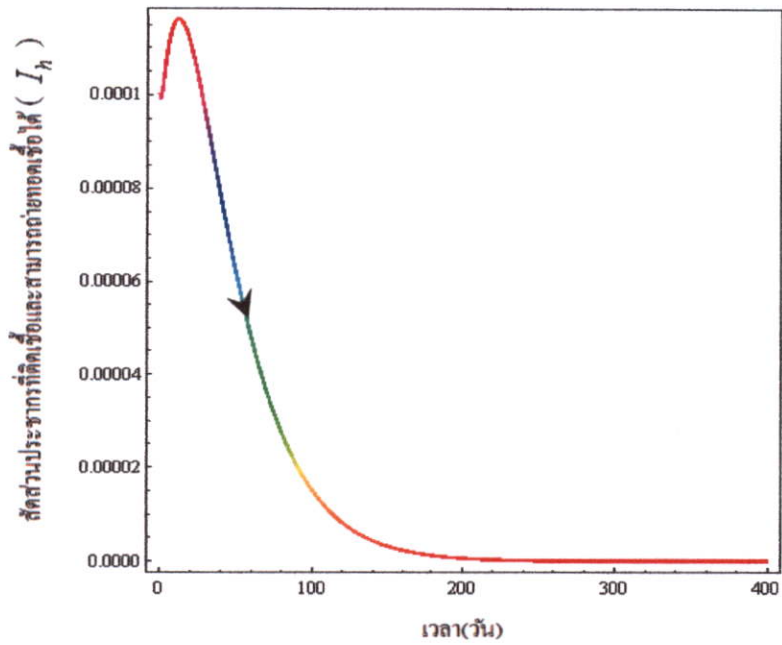
#### การจำลองเชิงตัวเลข

ในกรณีสถานะไร้โรค ( $R_0 < 1$ ) โดย  $R_0 = \frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v}$

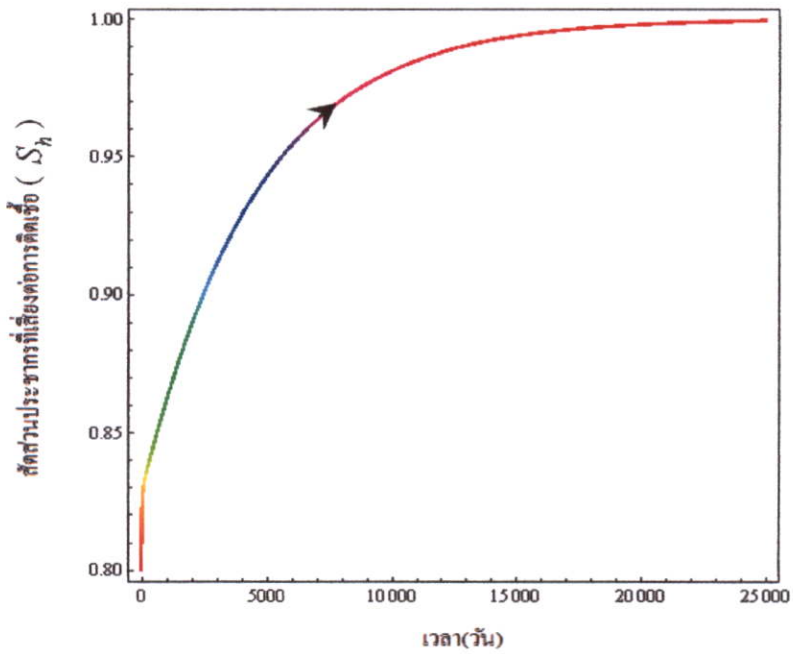
ในกรณีสถานะไร้โรค จากตารางที่ 4.1 ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

$$\lambda_h = 0.0000391, \quad \mu_v = 0.0714, \quad q_1 = 0.10, \quad q_2 = 0.0005479, \quad q_3 = 0.0333333,$$

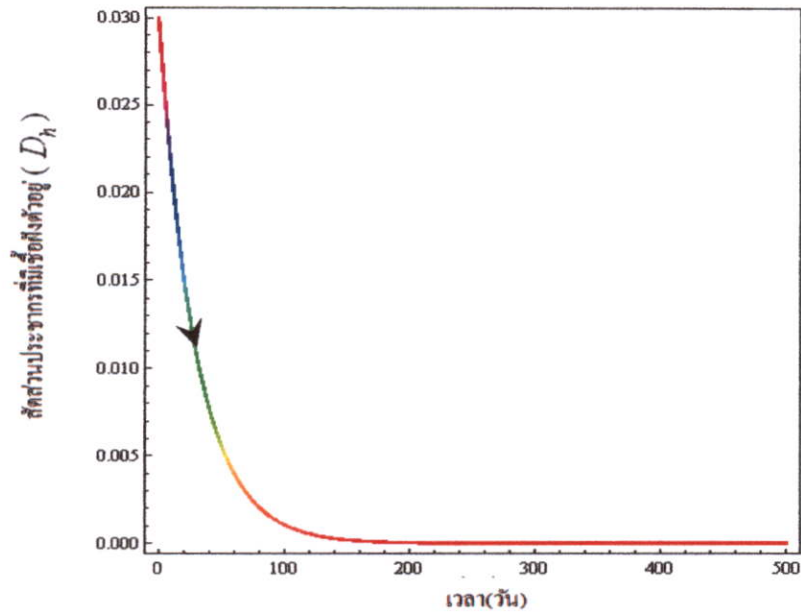
$$q_4 = 0.0001826, \quad q_5 = 0.333333, \quad \delta'_v = 0.001, \quad \delta'_h = 0.001, \quad \beta = 0.75, \quad R_0 = 0.972327$$



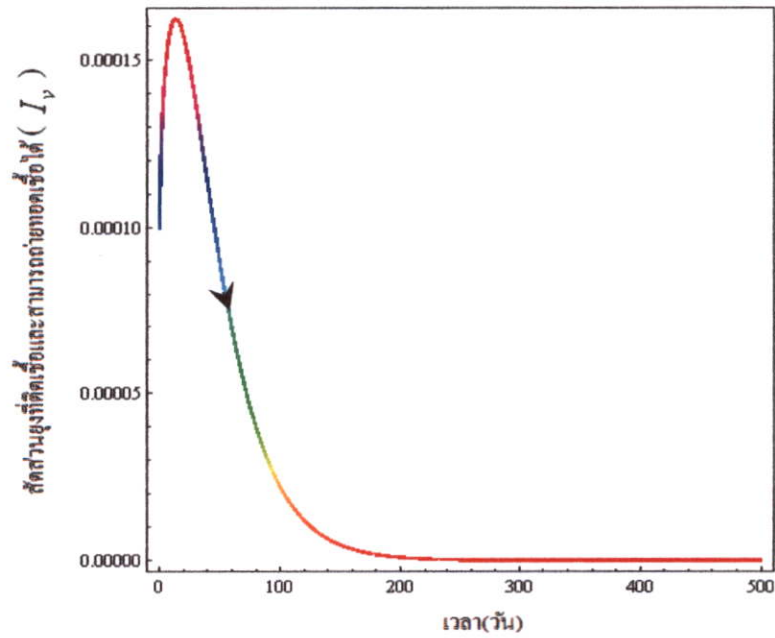
รูปที่ 4.2 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ ( $I_h$ ) เทียบกับเวลา



รูปที่ 4.3 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการคิดเชื่อ ( $S_h$ ) เทียบกับเวลา

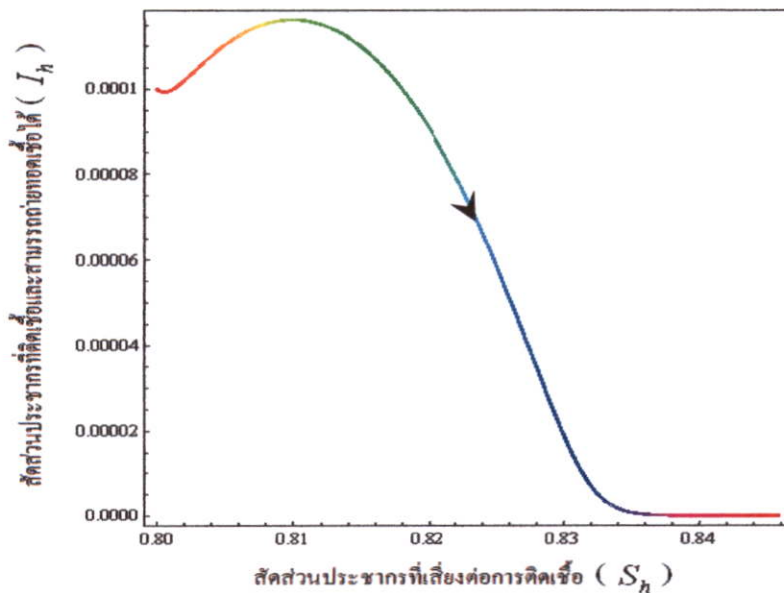


รูปที่ 4.4 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ ) เทียบกับเวลา

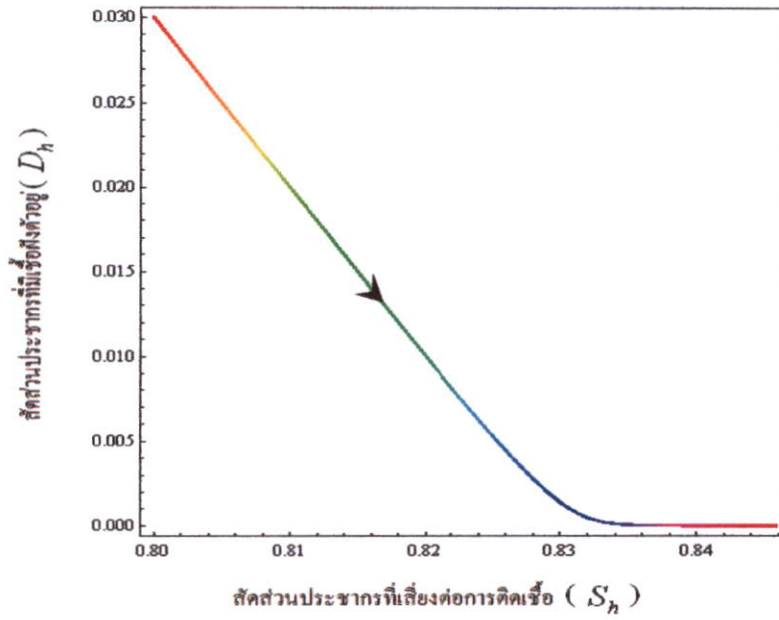


รูปที่ 4.5 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_v$ ) เทียบกับเวลา

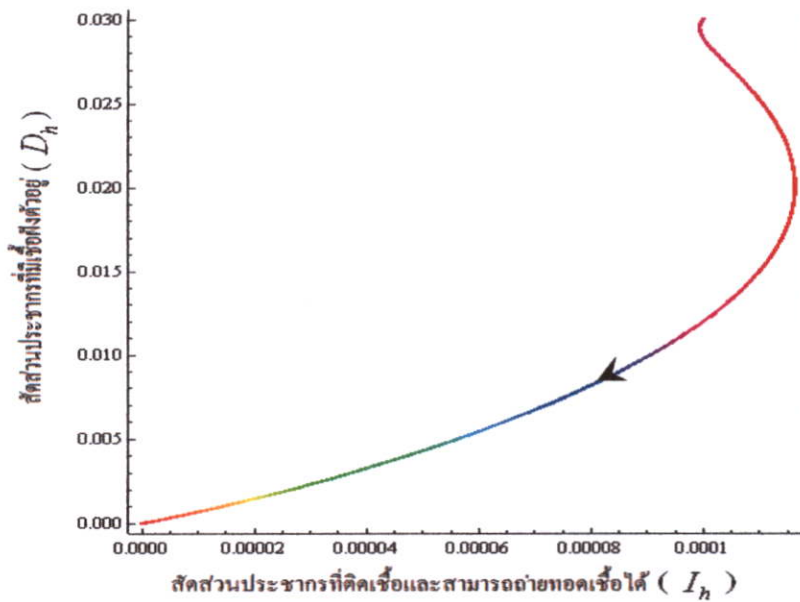
จากรูปที่ 4.2 – รูปที่ 4.5 สรุปได้ว่าในสภาวะไร้โรค สัดส่วนประชากรจะเข้าสู่จุดสมดุล คือ  $E_1(0,1,0,0)$  โดยสัดส่วนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่ 1 เมื่อเวลา 25,000 วัน, สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะเข้าสู่ 0 เมื่อเวลา 250 วัน, สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่จะเข้าสู่ 0 เมื่อ 180 วัน และสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะเข้าสู่ 0 เมื่อ 250 วัน นั้นแสดงให้เห็นว่าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเพิ่มมากขึ้น เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น และประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ และ ยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะลดลง เมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น



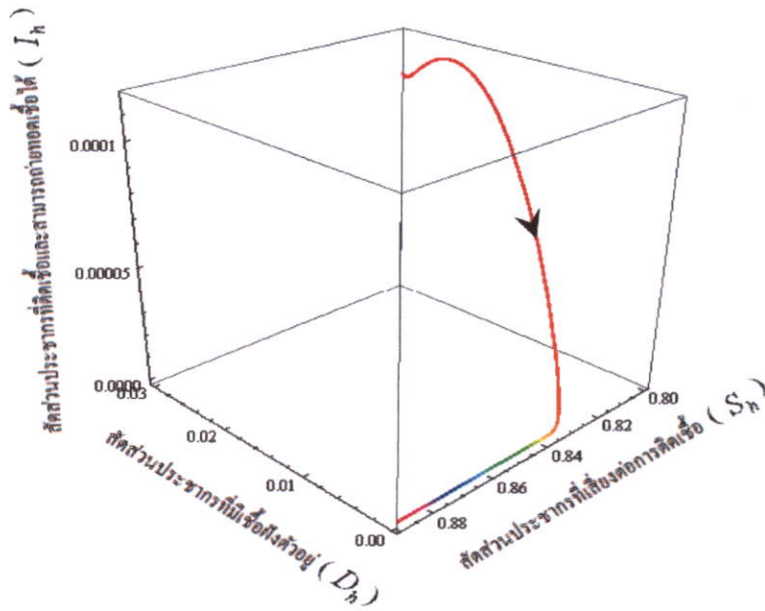
รูปที่ 4.6 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ )



รูปที่ 4.7 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ )



รูปที่ 4.8 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ )



รูปที่ 4.9 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) และสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ )

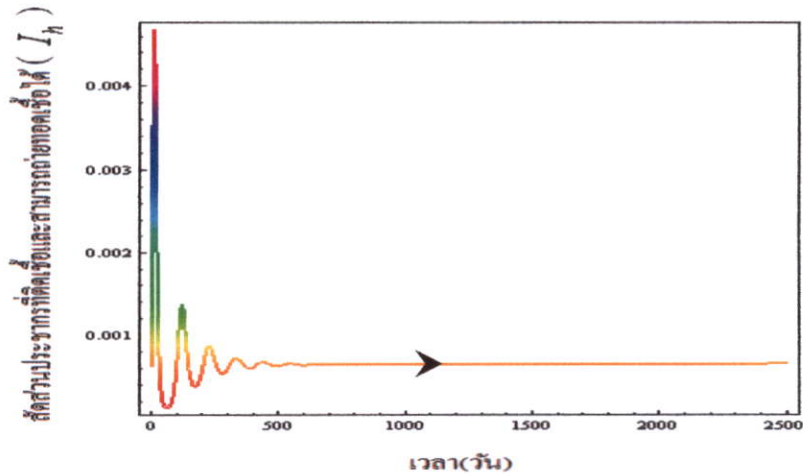
รูปที่ 4.6 – รูปที่ 4.9 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยสัดส่วนประชากรและสัดส่วนยุงจะเข้าสู่จุดสมดุลในสภาวะไร้โรค คือ  $E_1(0,1,0,0)$

ในกรณีสภาวะระบาดเร็วรั้ง ( $R_0 > 1$ ) โดย  $R_0 = \frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v}$

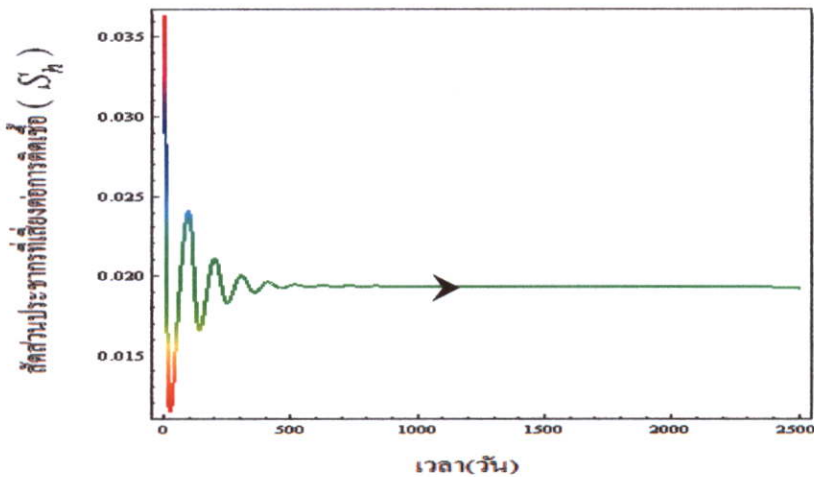
ในกรณีสภาวะระบาดเร็วรั้ง จากตารางที่ 4.2 ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

$$\lambda_h = 0.0000391, \quad \mu_v = 0.0714, \quad q_1 = 0.10, \quad q_2 = 0.0005479, \quad q_3 = 0.0333333,$$

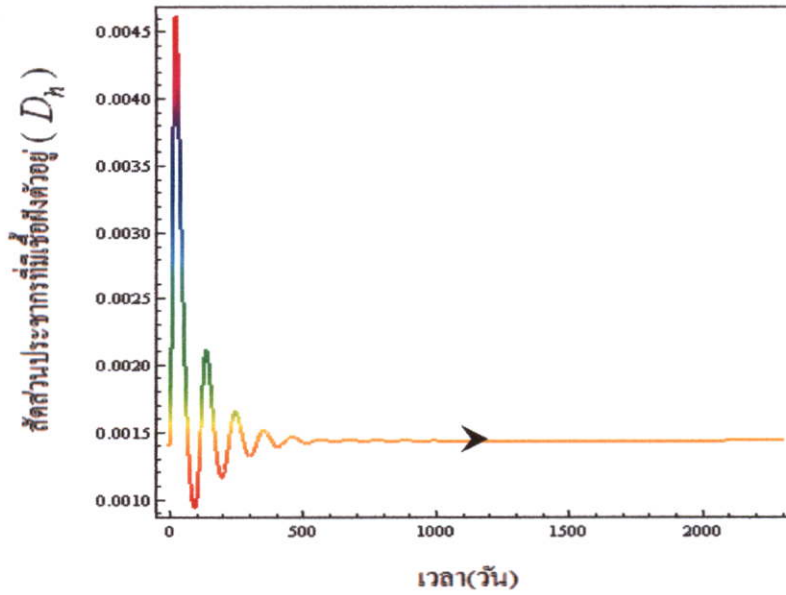
$$q_4 = 0.0001826, \quad q_5 = 0.3333333, \quad \delta'_v = 0.004, \quad \delta'_h = 0.004, \quad \beta = 0.75, \quad R_0 = 51.7112$$



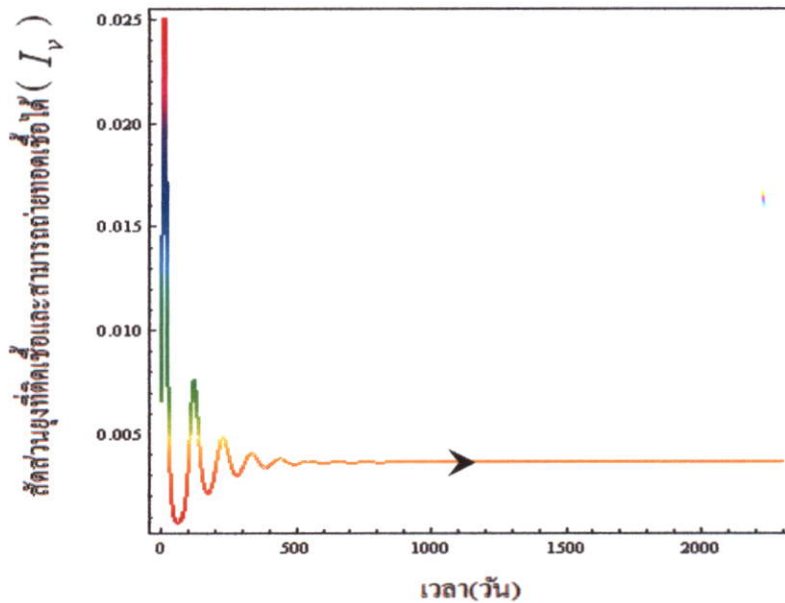
รูปที่ 4.10 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) เทียบกับเวลา



รูปที่ 4.11 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) เทียบกับเวลา

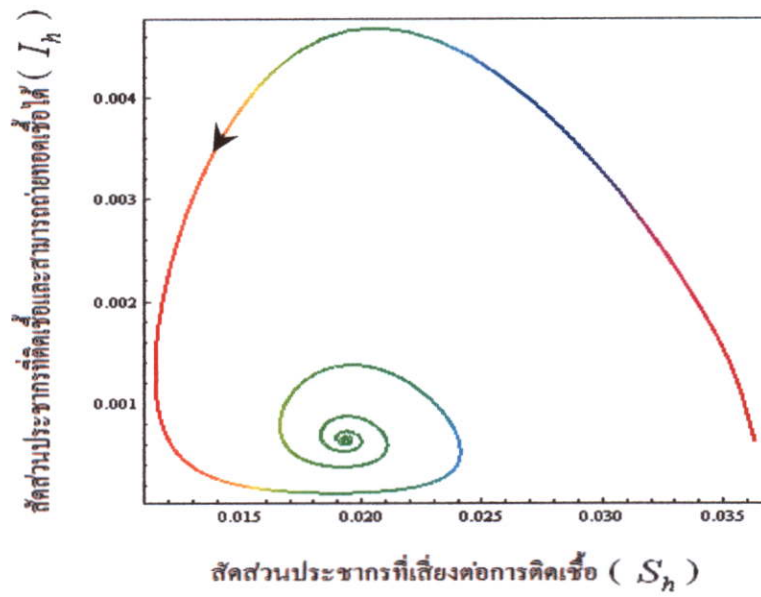


รูปที่ 4.12 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ ) เทียบกับเวลา

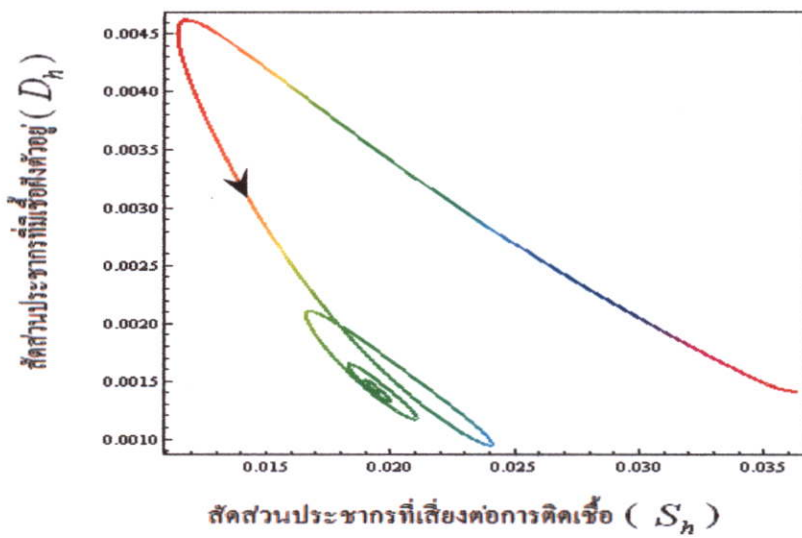


รูปที่ 4.13 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_v$ ) เทียบกับเวลา

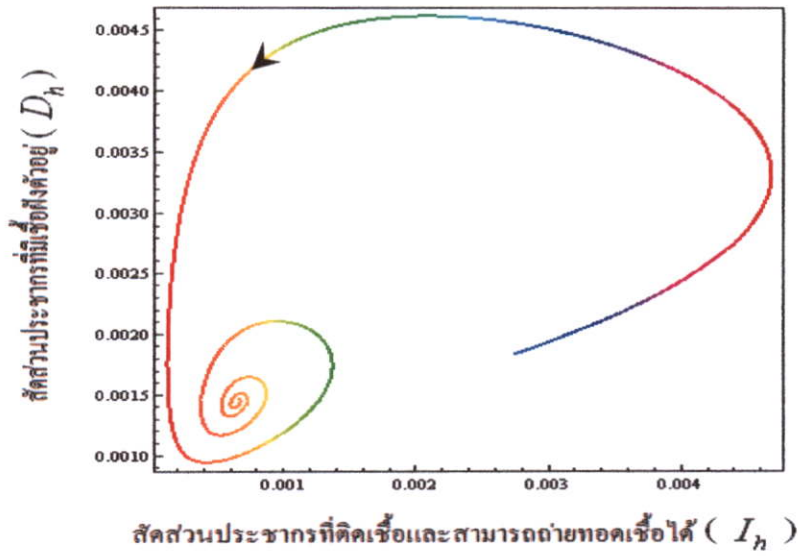
จากกราฟรูปที่ 4.10 – รูปที่ 4.13 สรุปได้ว่าในสภาวะระบาคเรื้อรัง สัดส่วนประชากรและ สัดส่วนยุงจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล  $E_2 = (0.000623, 0.019510, 0.001445, 0.003526,)$



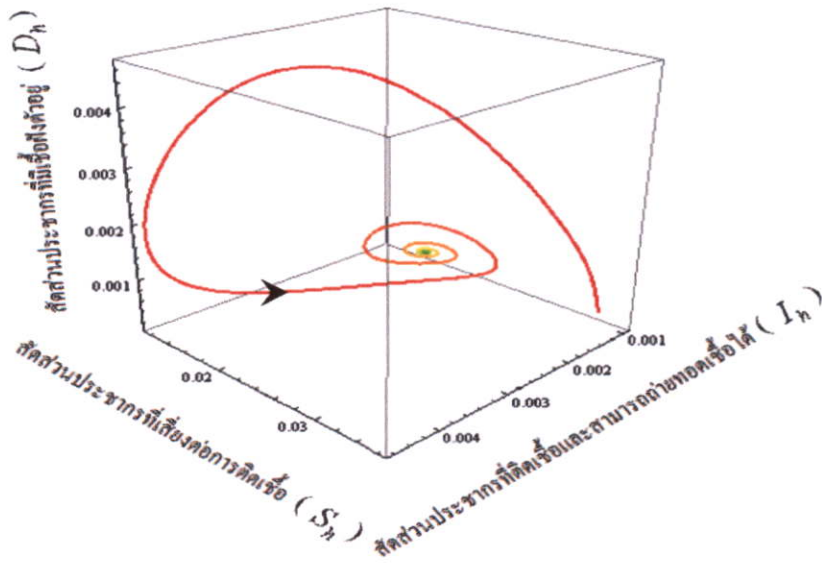
รูปที่ 4.14 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ )  
กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ )



รูปที่ 4.15 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ )  
กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ )



รูปที่ 4.16 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ )



รูปที่ 4.17 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) และสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ )

รูปที่ 4.14 – รูปที่ 4.17 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสำหรับ  $R_0 > 1$  โดยสัดส่วนประชากรและสัดส่วนยุงจะเข้าสู่จุดสมดุลในสภาวะระบาคเรื้อรังคือ  $E_2 = (0.019510, 0.000639, 0.001414, 0.003526,)$  สรุปได้ว่า สัดส่วนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่ 0.019510 เมื่อเวลา 1000 วัน, สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะเข้าสู่ 0.000639 เมื่อเวลา 600 วัน, สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่จะเข้าสู่ 0.001414 เมื่อ 880 วัน และสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะเข้าสู่ 0.003526 เมื่อ 730 วัน

ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ( $R_0$ ) ในสภาวะระบาดเรื้อรังที่อัตราการอพยพเข้า-ออกของประชากรเท่ากัน

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียม

ไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน คือ

$$R_0 = \frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v}$$

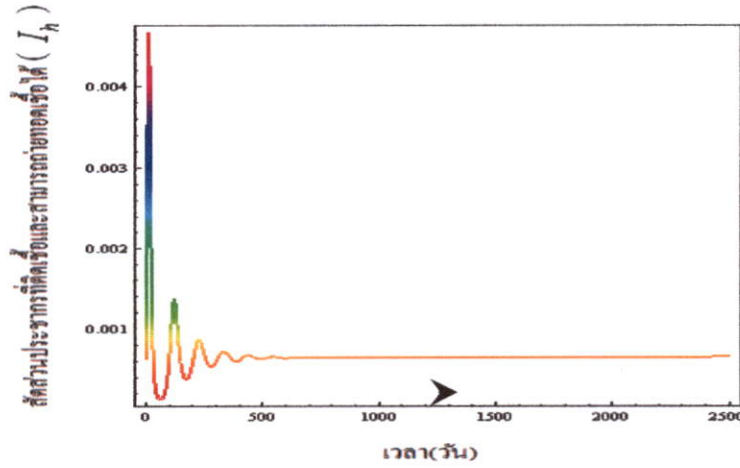
สามารถอธิบายได้ดังนี้

ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน = (จำนวนประชากรทั้งหมด  $\times$  จำนวนยุงทั้งหมด  $\times$  อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากประชากรไปสู่ยุง  $\times$  อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากยุงไปสู่ประชากร  $\times$  (อัตราการที่เชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง + อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ + อัตราการเสียชีวิตของประชากร) + ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร  $\times$  อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ  $\times$  อัตราการที่เชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง  $\times$  อัตราการตายของยุง) / (อัตราการที่เชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง + อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ + อัตราการตายของประชากร)  $\times$  (อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ + อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ + อัตราการตายของประชากร)  $\times$  อัตราการตายของยุง

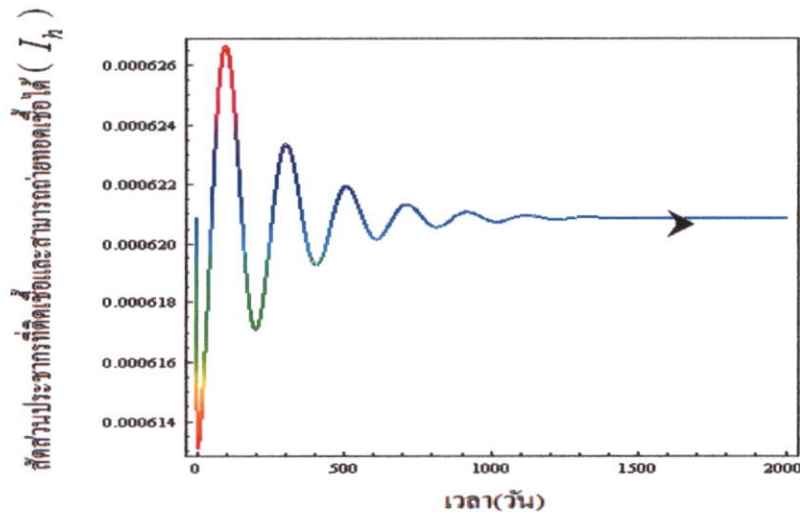
การเปรียบเทียบค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ( $R_0$ ) และจำนวนยุงทั้งหมด ( $N_v$ )

ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

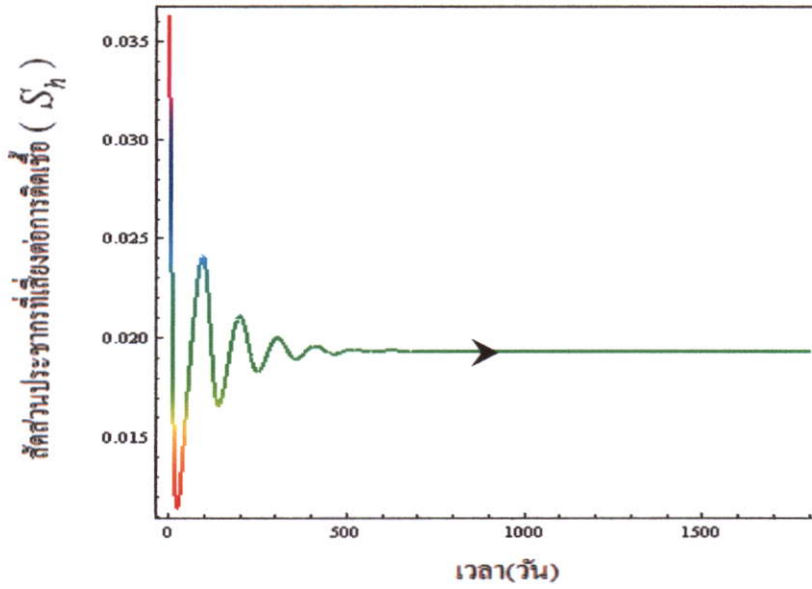
$$\lambda_h = 0.0000391, \quad \mu_v = 0.0714, \quad q_1 = 0.10, \quad q_2 = 0.0005479, \quad q_3 = 0.0333333, \\ q_4 = 0.0001826, \quad q_5 = 0.3333333, \quad \delta'_v = 0.004, \quad \delta'_h = 0.004, \quad \beta = 0.75$$



รูปที่ 4.18 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 51.7112$  และ  $N_v = 1,000$

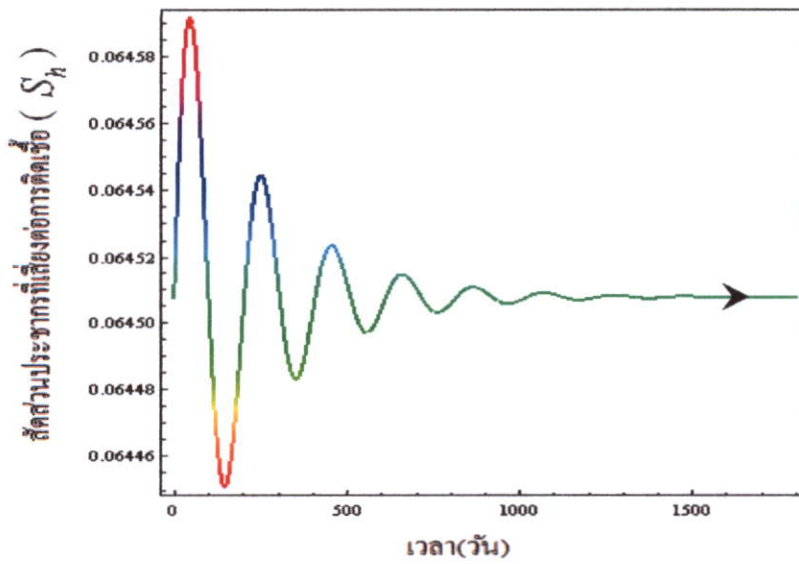


รูปที่ 4.19 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 15.5153$  และ  $N_v = 300$



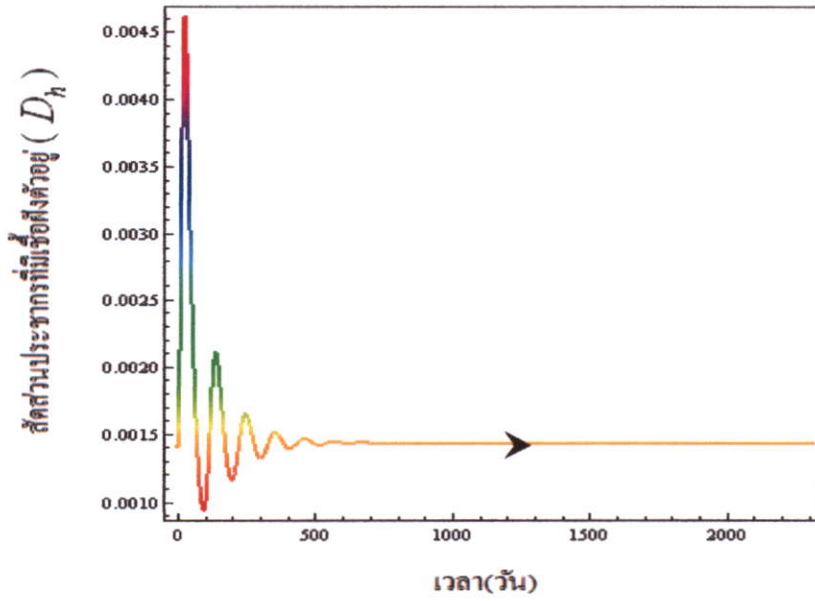
รูปที่ 4.20 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 51.7112$

และ  $N_v = 1,000$

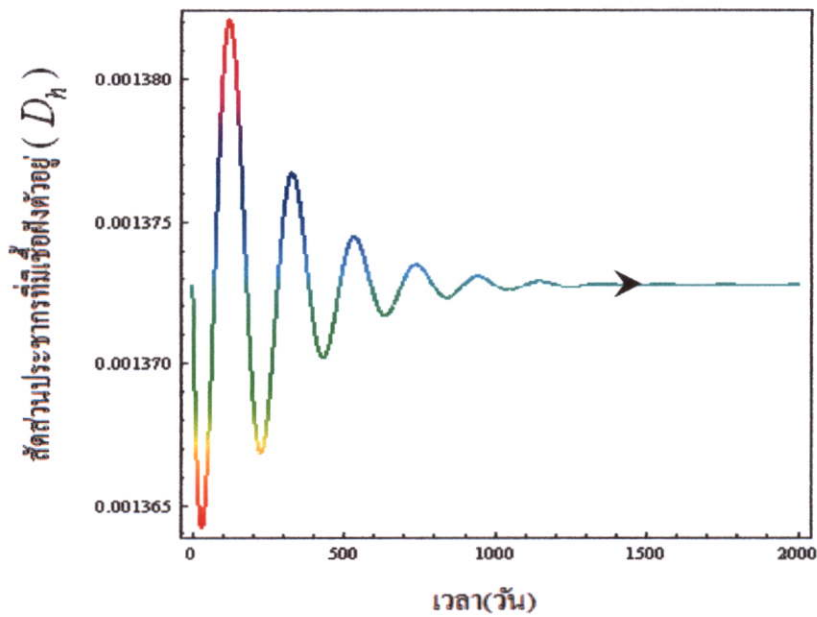


รูปที่ 4.21 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 15.5153$

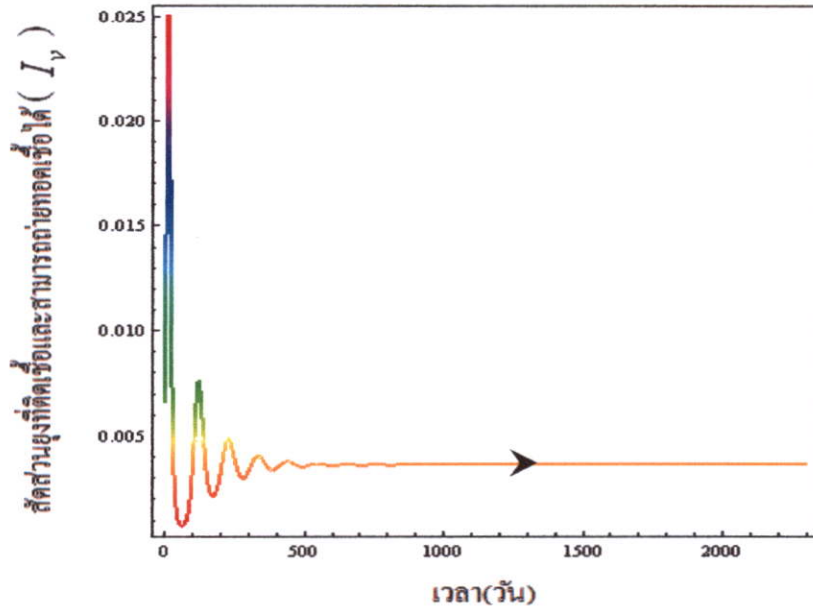
และ  $N_v = 300$



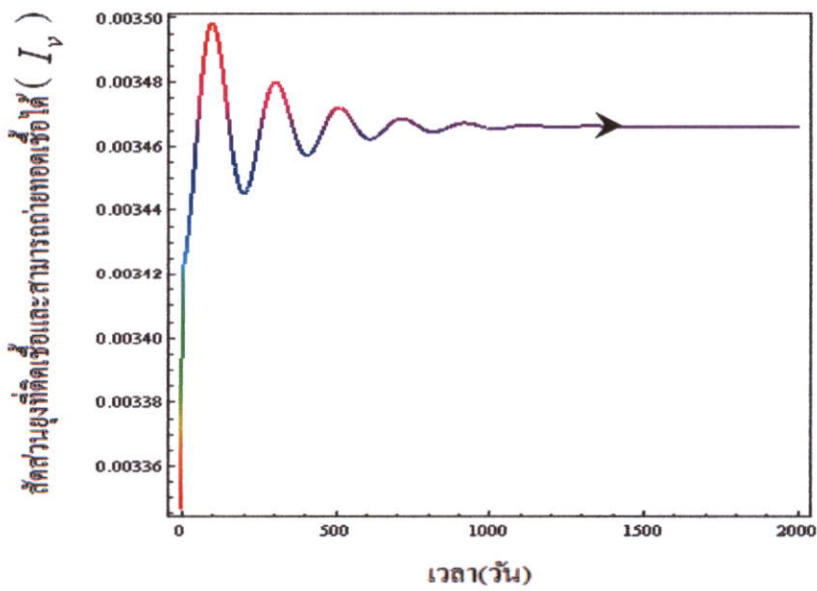
รูปที่ 4.22 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝิ่งตัวอยู่ ( $D_h$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 51.7112$  และ  $N_v = 1,000$



รูปที่ 4.23 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝิ่งตัวอยู่ ( $D_h$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 15.5153$  และ  $N_v = 300$



รูปที่ 4.24 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_v$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 51.7112$  และ  $N_v = 1,000$



รูปที่ 4.25 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_v$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า  $R_0 = 15.5153$  และ  $N_v = 300$

ตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่ของผลเฉลยเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานและจำนวนยุงทั้งหมดแตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดคงที่ดังรูปที่ 4.18 – รูปที่ 4.25

จุดสมดุล	$R_0 = 15.5153$ และ $N_v = 300$	$R_0 = 51.7112$ และ $N_v = 1,000$
	สู่เข้า ณ เวลา (วัน)	สู่เข้า ณ เวลา (วัน)
$I_h$	1,340	580
$S_h$	1,500	560
$D_h$	1,320	700
$I_v$	1,400	850

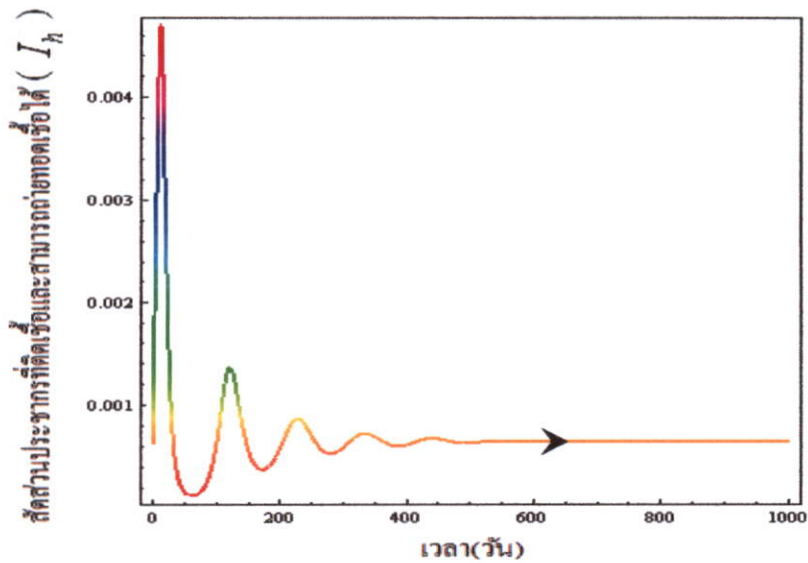
จากตารางที่ 4.3 สรุปได้ว่าชุดข้อมูลที่มี  $R_0$  มากจะสู่เข้าหาจุดสมดุลได้เร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีค่า  $R_0$  น้อยและชุดข้อมูลที่มีจำนวนยุงทั้งหมดมากจะสู่เข้าหาจุดสมดุลได้เร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีจำนวนยุงทั้งหมดน้อย

การเปรียบเทียบระหว่างค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกันในสภาวะระบาดเรื้อรัง

การเปรียบเทียบค่าเริ่มต้นภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะได้จุดสมดุล  $E_2(I_h, S_h, D_h, R_h)$  คือ

$$S_h(0) = 0.0362897973, I_h(0) = 0.0006395983, D_h(0) = 0.0014141936,$$

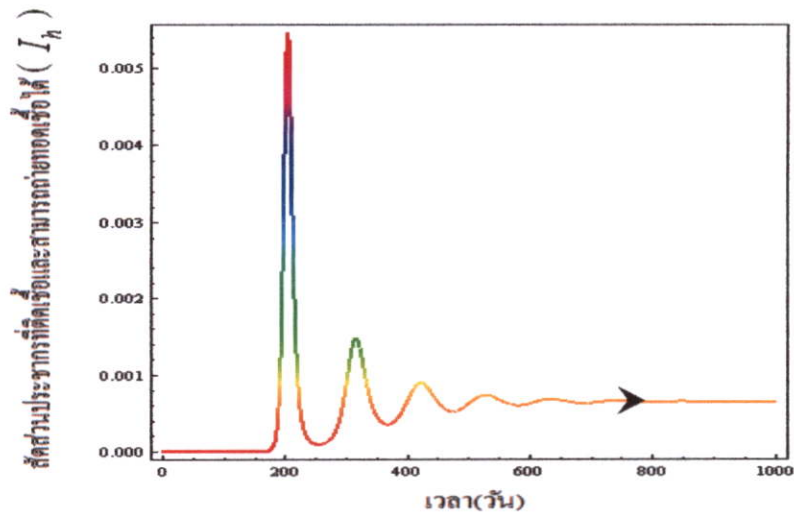
$$I_v(0) = 0.0076167201$$



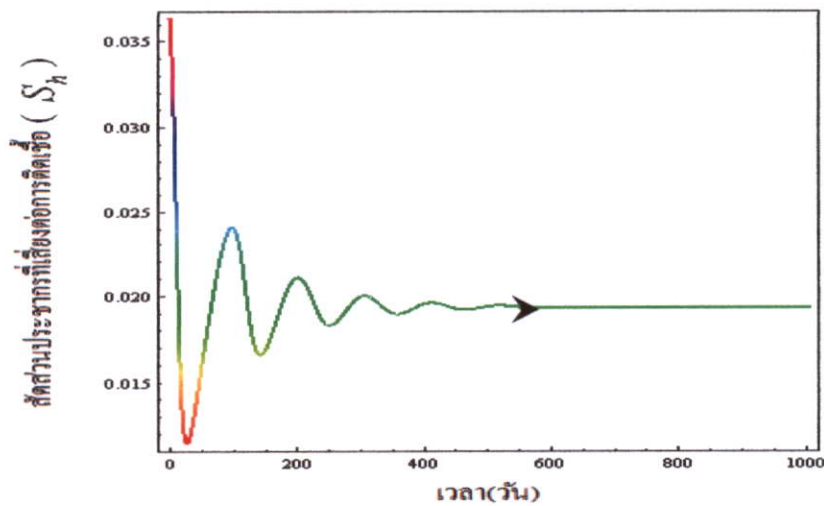
รูปที่ 4.26 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) เทียบกับเวลา

ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้  $S_h(0) = 0.0362897973, I_h(0) = 0.0006395983, D_h(0) = 0.0014141936,$

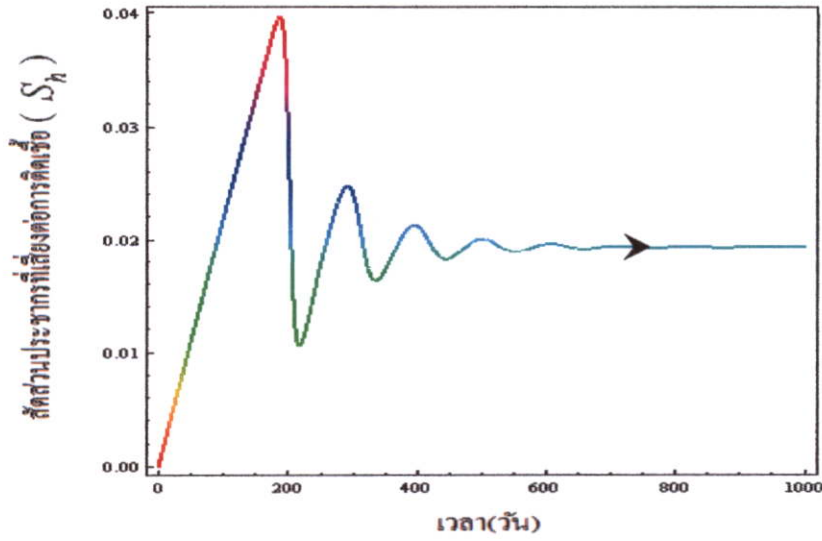
$$I_v(0) = 0.0076167201, R_0 = 51.7112$$



รูปที่ 4.27 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้  $S_h(0) = 0.000001$ ,  $I_h(0) = 0.000001$ ,  $D_h(0) = 0.000001$ ,  $I_v(0) = 0.000001$ ,  $R_0 = 51.7112$

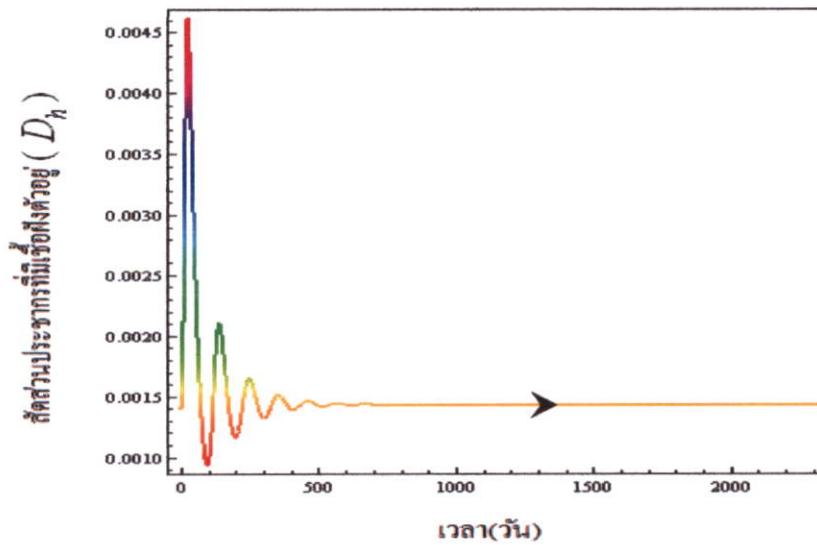


รูปที่ 4.28 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้  $S_h(0) = 0.0362897973$ ,  $I_h(0) = 0.0006395983$ ,  $D_h(0) = 0.0014141936$ ,  $I_v(0) = 0.0076167201$ ,  $R_0 = 51.7112$



รูปที่ 4.29 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $S_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

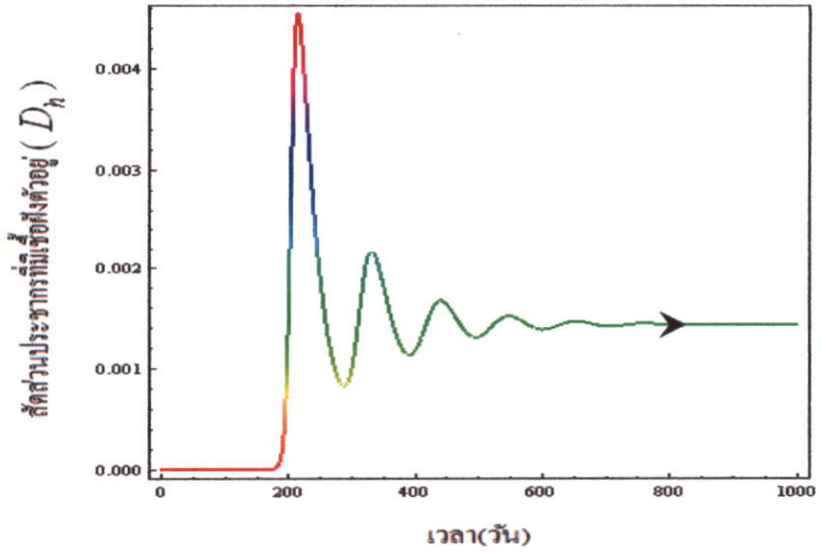
$$S_h(0) = 0.000001, I_h(0) = 0.000001, D_h(0) = 0.000001, I_v(0) = 0.000001, R_0 = 51.7112$$



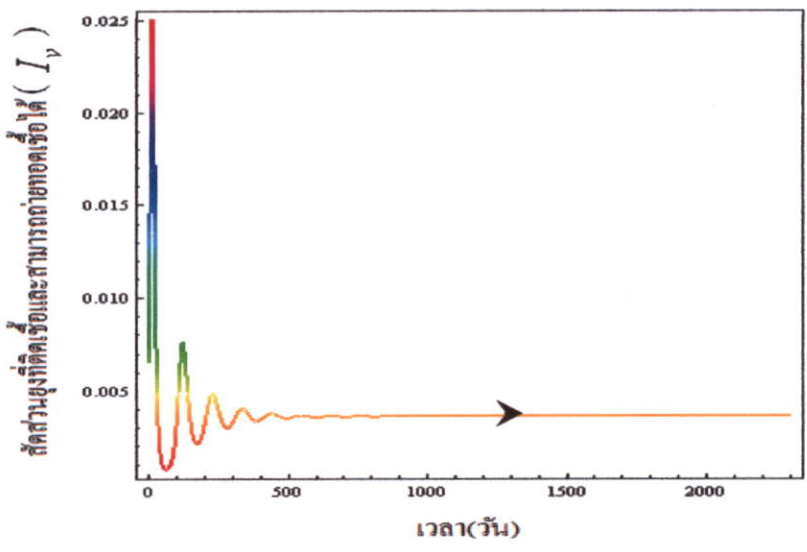
รูปที่ 4.30 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัว ( $D_h$ ) อยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

$$S_h(0) = 0.0362897973, I_h(0) = 0.0006395983, D_h(0) = 0.0014141936,$$

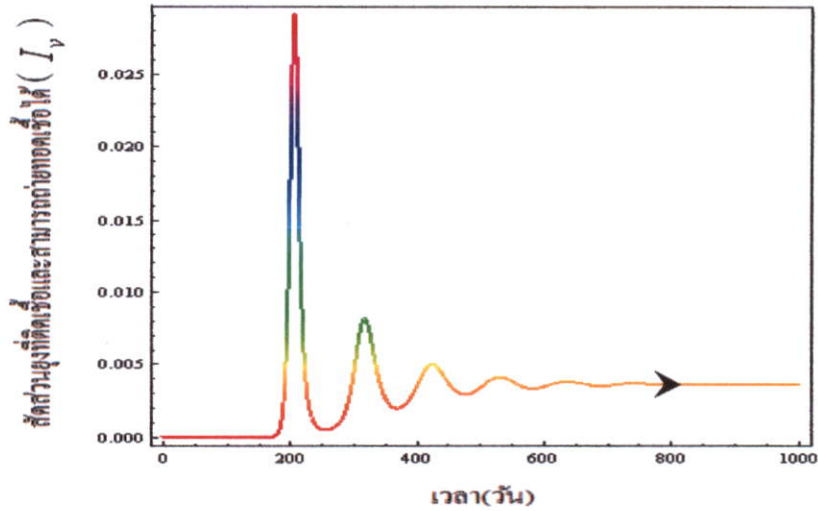
$$I_v(0) = 0.0076167201, R_0 = 51.7112$$



รูปที่ 4.31 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัว ( $D_h$ ) อยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้  $S_h(0) = 0.000001, I_h(0) = 0.000001, D_h(0) = 0.000001, I_v(0) = 0.000001, R_0 = 51.7112$



รูปที่ 4.32 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_v$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้  $S_h(0) = 0.0362897973, I_h(0) = 0.0006395983, D_h(0) = 0.0014141936, I_v(0) = 0.0076167201, R_0 = 51.7112$



รูปที่ 4.33 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_v$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น

ดังนี้  $S_h(0) = 0.000001$ ,  $I_h(0) = 0.000001$ ,  $D_h(0) = 0.000001$ ,  $I_v(0) = 0.000001$ ,

$$R_0 = 51.7112$$

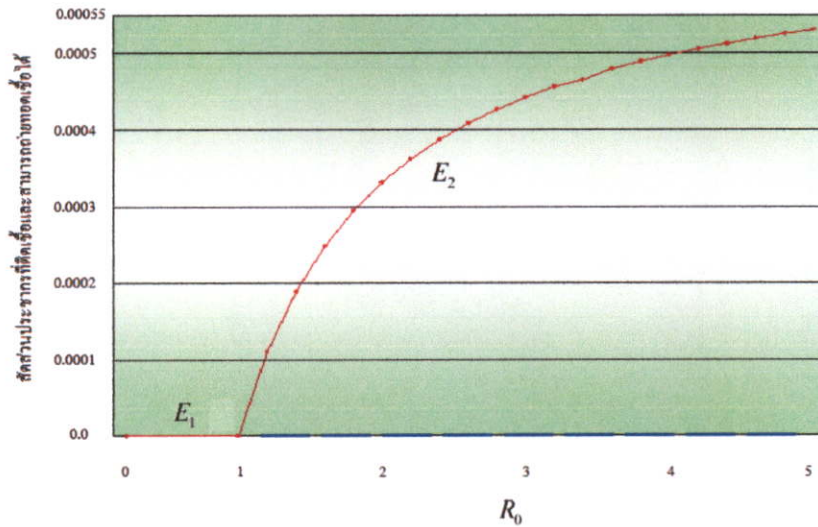
ตารางที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดคงที่

ดังรูปที่ 4.26 – รูปที่ 4.33

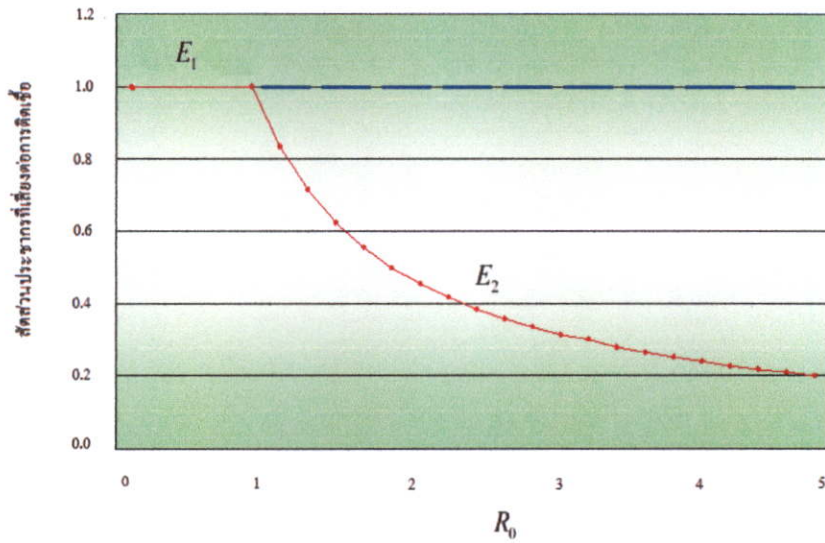
จุดสมดุล	$S_h(0) = 0.0362897973$ , $I_h(0) = 0.0006395983$ , $D_h(0) = 0.0014141936$ , $I_v(0) = 0.0076167201$ , $R_0 = 51.7112$	$S_h(0) = 0.000001$ , $I_h(0) = 0.000001$ , $D_h(0) = 0.000001$ , $I_v(0) = 0.000001$ , $R_0 = 51.7112$
	สู่เข้า ณ เวลา (วัน)	สู่เข้า ณ เวลา (วัน)
$I_h$	580	750
$S_h$	560	720
$D_h$	700	800
$I_v$	850	790

จากรูปที่ 4.26 – รูปที่ 4.33 สรุปได้ว่า พารามิเตอร์ชุดเดียวกัน แม้จะเปลี่ยนจุดเริ่มต้นให้แตกต่างกันแต่ก็ยังคงเข้าสู่จุดสมดุลเดียวกันและชุดข้อมูลที่มีค่าเริ่มต้นเข้าใกล้จุดลู่เข้าจะหาจุดสมดุลได้เร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีค่าเริ่มต้นที่อยู่ห่างไกลจากจุดสมดุล

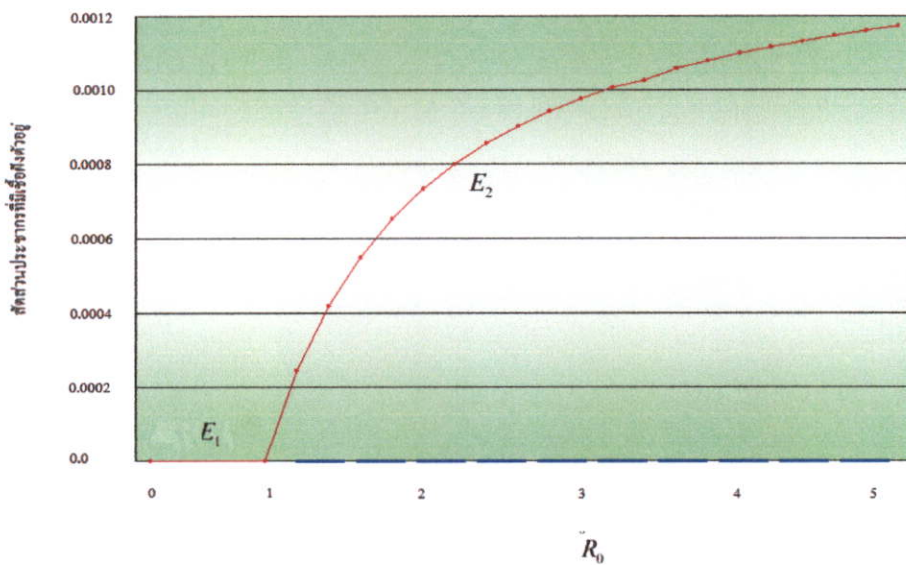
### แผนภาพไบเฟอร์เคชัน (Bifurcation) ของจุดสมดุล



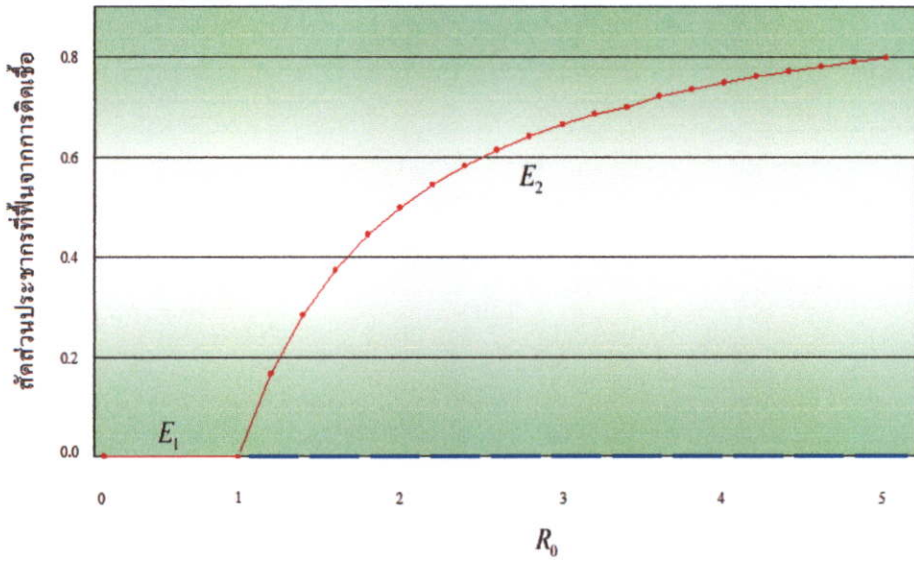
รูปที่ 4.34 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่ —●— แทนความเสถียรภาพ และ - - - แทนความไม่เสถียรภาพ



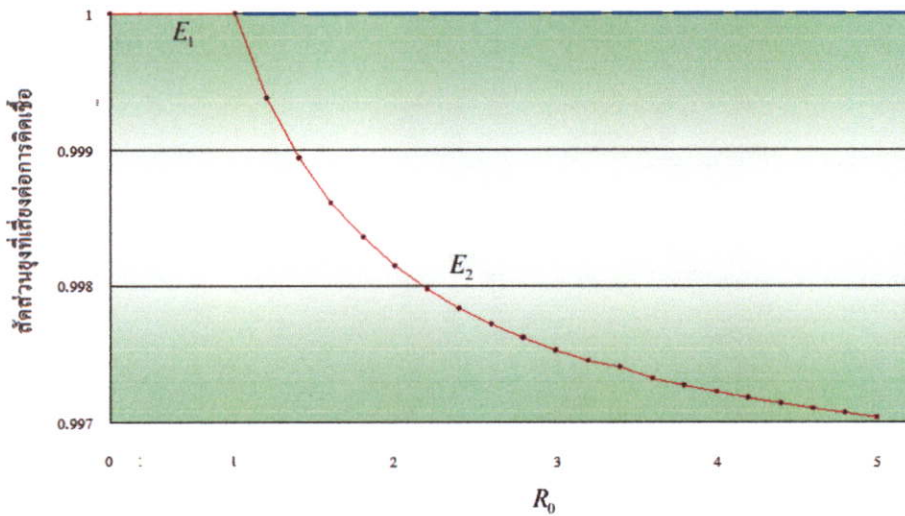
รูปที่ 4.35 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ สถานะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



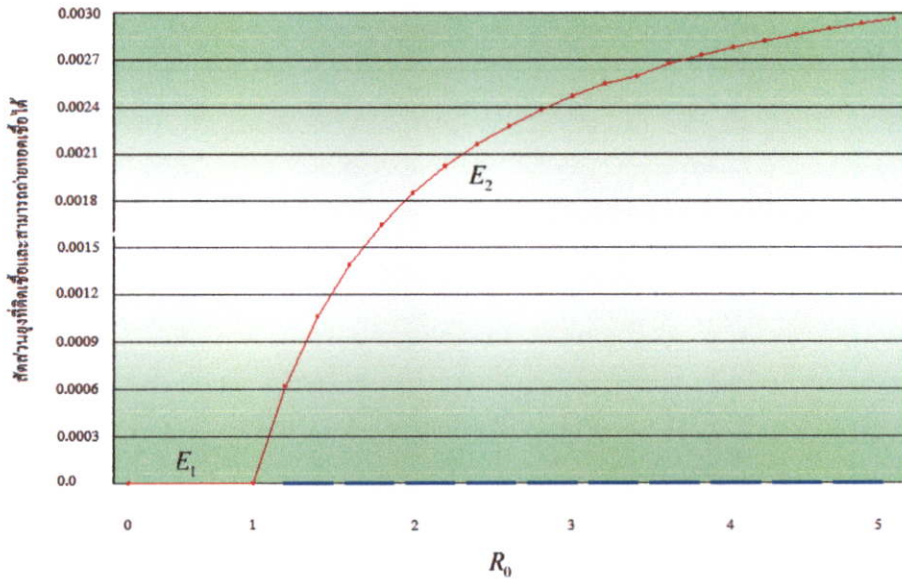
รูปที่ 4.36 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนประชากรที่มีไข้ตั้งตัวอยู่ ณ สถานะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 4.37 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนประชากรที่เชื่อในการคิดเชื่อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}\bullet\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 4.38 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนผู้เชื่อในการคิดเชื่อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}\bullet\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 4.39 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพสัดส่วนผู้ติดเชื้อที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สถานะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\rightarrow$  แทนความเสถียรภาพ และ  $---$  แทนความไม่เสถียรภาพ

จากรูปที่ 4.34 – รูปที่ 4.39 พบว่า  $E_1$  มีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0$  น้อยกว่า 1 และถ้า  $R_0$  มากกว่า 1  $E_1$  จะมีความไม่เสถียรภาพ ในทางกลับกันจะพบว่า  $E_2$  มีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0$  มากกว่า 1

ดังนั้นสรุปได้ว่า จุดสมดุลในสถานะไร้โรคจะมีความเสถียรภาพเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง และจุดสมดุลในสถานะระบาดเรื้อรังจะมีความเสถียรภาพเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมากกว่าหนึ่ง

## 4.2 กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดไม่คงที่

แสดงว่าอัตราการอพยพเข้า-ออกมีค่าไม่เท่ากัน คือ  $m_i \neq m_o$

จากสมการ

$$\frac{d}{dt} \bar{S}_h = \theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_1 \bar{I}_h + q_4 \bar{R}_h + m_i \bar{S}_h - m_o \bar{S}_h - \lambda_h \bar{S}_h - \beta q_1 \bar{I}_h - \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h$$

$$\frac{d}{dt} \bar{I}_h = \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h + m_i \bar{I}_h - m_o \bar{I}_h - q_1 \bar{I}_h - \lambda_h \bar{I}_h - q_5 \bar{I}_h$$

$$\frac{d}{dt} \bar{D}_h = \beta q_1 \bar{I}_h + m_i \bar{D}_h - m_o \bar{D}_h - q_2 \bar{D}_h - \lambda_h \bar{D}_h - q_3 \bar{D}_h$$

$$\frac{d}{dt} \bar{R}_h = q_5 \bar{I}_h + m_i \bar{R}_h - m_o \bar{R}_h - \lambda_h \bar{R}_h - q_4 \bar{R}_h$$

$$\frac{d}{dt} \bar{S}_v = L - \bar{S}_v \mu_v - \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v$$

$$\frac{d}{dt} \bar{I}_v = \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \mu_v \bar{I}_v$$

จุดสมมูล  $(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)$  หาได้จากการจัดสมการข้างต้นให้เท่ากับศูนย์จะได้

$$\theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_1 \bar{I}_h + q_4 \bar{R}_h + m_i \bar{S}_h - m_o \bar{S}_h - \lambda_h \bar{S}_h - \beta q_1 \bar{I}_h - \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h = 0$$

$$\delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h + m_i \bar{I}_h - m_o \bar{I}_h - q_1 \bar{I}_h - \lambda_h \bar{I}_h - q_5 \bar{I}_h = 0$$

$$\beta q_1 \bar{I}_h + m_i \bar{D}_h - m_o \bar{D}_h - q_2 \bar{D}_h - \lambda_h \bar{D}_h - q_3 \bar{D}_h = 0$$

$$q_5 \bar{I}_h + m_i \bar{R}_h - m_o \bar{R}_h - \lambda_h \bar{R}_h - q_4 \bar{R}_h = 0$$

$$L - \bar{S}_v \mu_v - \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v = 0$$

$$\delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \mu_v \bar{I}_v = 0$$

จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\bar{S}_h = \frac{\theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_4 \bar{R}_h + (1-\beta) q_1 \bar{I}_h}{m_o - m_i + \lambda_h + \delta'_h \bar{I}_v} \quad (4.8)$$

$$\bar{I}_h = \frac{\delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h}{m_o - m_i + \lambda_h + q_1 + q_5} \quad (4.9)$$

$$\bar{D}_h = \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_o - m_i + \lambda_h + q_2 + q_3} \quad (4.10)$$

$$\bar{R}_h = \frac{q_5 \bar{I}_h}{m_o - m_i + \lambda_h + q_4} \quad (4.11)$$

$$\bar{S}_v = \frac{L}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v} \quad (4.12)$$

$$\bar{I}_v = \frac{\delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v}{\mu_v} \quad (4.13)$$

กำหนดให้  $m_o - m_i + \lambda_h = m_h$  จะได้สมการ (4.8) – (4.11) ดังนี้

$$\bar{S}_h = \frac{\theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_4 \bar{R}_h + (1-\beta) q_1 \bar{I}_h}{m_h + \delta'_h \bar{I}_v} \quad (4.14)$$

$$\bar{I}_h = \frac{\delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h}{m_h + q_1 + q_5} \quad (4.15)$$

$$\bar{D}_h = \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3} \quad (4.16)$$

$$\bar{R}_h = \frac{q_5 \bar{I}_h}{m_h + q_4} \quad (4.17)$$

นำสมการที่ (4.12) แทนลงในสมการ (4.13) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_v &= \frac{\delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v}{\mu_v} \\
 &= \frac{\delta'_v \bar{I}_h \left( \frac{L}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v} \right)}{\mu_v} \\
 &= \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v} \\
 &= \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

นำสมการที่ (4.16), (4.17) และ (4.18) แทนลงในสมการ (4.14) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_h &= \frac{\theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_4 \bar{R}_h + (1 - \beta) q_1 \bar{I}_h}{m_h + \delta'_h \bar{I}_v} \\
 &= \frac{\theta N_h + q_3 \left( \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3} \right) + q_4 \left( \frac{q_5 \bar{I}_h}{m_h + q_4} \right) + (1 - \beta) q_1 \bar{I}_h}{m_h + \delta'_h \left( \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right)} \\
 &= \frac{\theta N_h + \frac{\beta q_1 q_3 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3} + \frac{q_4 q_5 \bar{I}_h}{m_h + q_4} + (1 - \beta) q_1 \bar{I}_h}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} \\
 &= \frac{\theta N_h + \bar{I}_h \left( q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3} \right)}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

นำสมการที่ (4.16), (4.18) และ (4.19) แทนลงในสมการ (4.15) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{I}_h &= \frac{\delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h}{m_h + q_1 + q_5} \\ &= \frac{\delta'_h \left( \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right) \left( \frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} \right) + q_2 \left( \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3} \right)}{m_h + q_1 + q_5} \\ &= \frac{\left( \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right) \left( \frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} \right) + \frac{\beta q_1 q_2 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3}}{m_h + q_1 + q_5} \\ &= \frac{\left( \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right) \left( \frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} \right) + \frac{\beta q_1 q_2 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3}}{(m_h + q_1 + q_5) \bar{I}_h} \\ &= \frac{\left( \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right) \left( \frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} \right) + \frac{\beta q_1 q_2 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3}}{\left( \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right) \left( \frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} \right) + \frac{\beta q_1 q_2 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3}} - (m_h + q_1 + q_5) \bar{I}_h = 0 \\ &= \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L \left( \theta N_h + \bar{I}_h \left( q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3} \right) \right)}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2 \left( \left( \frac{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right) m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} \right)} + \frac{\beta q_1 q_2 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3} - (m_h + q_1 + q_5) \bar{I}_h = 0 \\ &= \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L \left( \theta N_h + \bar{I}_h \left( q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3} \right) \right)}{\left( \delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2 \right) m_h + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L} + \frac{\beta q_1 q_2 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3} - (m_h + q_1 + q_5) \bar{I}_h = 0 \end{aligned}$$

จะได้  $\bar{I}_h = 0$  และ

$$\begin{aligned} & (m_h - q_4)(L\delta'_v(m_h - q_2 - q_3)\delta'_h\theta N_h \\ \bar{I}_h = & \frac{-m_h((m_h - q_2 - q_3)(m_h - q_1 - q_5) + q_2\beta q_1)\mu_v^2}{m_h(L\delta'_v((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_4 + q_5) + (m_h + q_4)\beta q_1)\delta'_h} \\ & + (m_h + q_4)((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2\beta q_1)\delta'_v\mu_v) \\ & L\delta'_v m_h^2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_3 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_4 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v q_2 q_4 \delta'_h \theta N_h \\ & + L\delta'_v q_3 q_4 \delta'_h \theta N_h - m_h^4 \mu_v^2 - m_h^3 q_1 \mu_v^2 - m_h^3 q_2 \mu_v^2 - m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 - m_h^3 q_3 \mu_v^2 - m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 - m_h^3 q_4 \mu_v^2 \\ & - m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 - m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 - m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 - m_h^2 q_3 q_4 \mu_v^2 - m_h q_1 q_3 q_4 \mu_v^2 - m_h^3 q_5 \mu_v^2 - m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 \\ & - m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 - m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 - m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 - m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2 \\ = & \frac{L\delta'_v m_h^3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h}{L\delta'_v m_h^3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h} \\ & + L\delta'_v m_h q_2 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 \beta q_1 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_4 \beta q_1 \delta'_h + m_h^4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_1 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_2 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_1 q_2 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v - m_h^2 q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v - m_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \\ & (L\delta'_v m_h^2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_3 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_4 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v q_2 q_4 \delta'_h \theta N_h \\ & + L\delta'_v q_3 q_4 \delta'_h \theta N_h + m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2) - (m_h^4 \mu_v^2 + m_h^3 q_1 \mu_v^2 + m_h^3 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 \\ & + m_h^3 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^3 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_4 \mu_v^2 \\ & + m_h q_1 q_3 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2) \\ = & \frac{L\delta'_v m_h^3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h}{L\delta'_v m_h^3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h} \\ & + L\delta'_v m_h q_2 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 \beta q_1 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_4 \beta q_1 \delta'_h + m_h^4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_1 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_2 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_1 q_2 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v - m_h^2 q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v - m_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \end{aligned}$$

พิจารณาที่  $I_h = 0$  จะได้ว่า

$$\bar{S}_h = \frac{\theta N_h}{m_h}, \quad \bar{D}_h = 0, \quad \bar{R}_h = 0, \quad \bar{S}_v = \frac{L}{\mu_v}, \quad \bar{I}_v = 0$$

ภายใต้สภาวะไร้โรค จะได้จุดสมดุล  $E_1(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)$  คือ  $\left(0, \frac{\theta N_h}{m_h}, 0, 0, \frac{L}{\mu_v}, 0\right)$

ภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง จะได้จุดสมดุล  $E_2(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)$  เมื่อ

$$\begin{aligned} & (L\delta'_v m_h^2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_3 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_4 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v q_2 q_4 \delta'_h \theta N_h \\ & + L\delta'_v q_3 q_4 \delta'_h \theta N_h + m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2) - (m_h^4 \mu_v^2 + m_h^3 q_1 \mu_v^2 + m_h^3 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 \\ & + m_h^3 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^3 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_3 q_4 \mu_v^2 \\ & + m_h q_1 q_3 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2) \\ \bar{I}_h = & \frac{L\delta'_v m_h^3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h \\ & + L\delta'_v m_h q_2 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 \beta q_1 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_4 \beta q_1 \delta'_h + m_h^4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_1 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_2 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_1 q_2 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v - m_h^2 q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v - m_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \mu_v} \end{aligned}$$

$$\bar{S}_h = \frac{\theta N_h + \bar{I}_h(q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}}$$

$$\bar{D}_h = \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3}$$

$$\bar{R}_h = \frac{q_5 \bar{I}_h}{m_h + q_4}$$

$$\bar{S}_v = \frac{L}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v}$$

$$\bar{I}_v = \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}$$

จากจุดสมมูลภายใต้ภายใต้สภาวะระบาคเรื่อริงจะพบว่  $\bar{I}_h > 0$  เมื่อ

จาก

$$\begin{aligned} & (L\delta'_v m_h^2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_3 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_4 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v q_2 q_4 \delta'_h \theta N_h \\ & + L\delta'_v q_3 q_4 \delta'_h \theta N_h + m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2) - (m_h^4 \mu_v^2 + m_h^3 q_1 \mu_v^2 + m_h^3 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 \\ & + m_h^3 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^3 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_4 \mu_v^2 \\ & + m_h q_1 q_3 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2) \\ \bar{I}_h = & \frac{L\delta'_v m_h^3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h \\ & + L\delta'_v m_h q_2 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 \beta q_1 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_4 \beta q_1 \delta'_h + m_h^4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_1 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_2 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_1 q_2 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v - m_h^2 q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v - m_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \mu_v} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (L\delta'_v m_h^2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_3 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_4 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v q_2 q_4 \delta'_h \theta N_h \\ & + L\delta'_v q_3 q_4 \delta'_h \theta N_h + m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2) - (m_h^4 \mu_v^2 + m_h^3 q_1 \mu_v^2 + m_h^3 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 \\ & + m_h^3 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^3 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_4 \mu_v^2 \\ & + m_h q_1 q_3 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2) \\ & \frac{L\delta'_v m_h^3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h \\ & + L\delta'_v m_h q_2 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 \beta q_1 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_4 \beta q_1 \delta'_h + m_h^4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_1 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_2 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_1 q_2 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v - m_h^2 q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v - m_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \mu_v} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (L\delta'_v m_h^2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_3 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_4 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v q_2 q_4 \delta'_h \theta N_h \\ & + L\delta'_v q_3 q_4 \delta'_h \theta N_h + m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2) - (m_h^4 \mu_v^2 + m_h^3 q_1 \mu_v^2 + m_h^3 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 \\ & + m_h^3 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^3 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_4 \mu_v^2 \\ & + m_h q_1 q_3 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2) > 0 \end{aligned}$$

$$(m_h + q_4)(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2) - m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_4)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2 > 0$$

$$(m_h + q_4)(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2) > m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_4)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2$$

$$(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2) > m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2$$

นั่นคือ  $\bar{I}_h > 0$  เมื่อ

$$(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2) > m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2$$

$$\frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2} > 1$$

$$R_0 > 1$$

$$\text{เมื่อ } R_0 = \frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $\bar{S}_h > 0$  เมื่อ

$$\text{จาก } \bar{S}_h = \frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} > 0$$

$$\frac{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3}) (\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2)}{(\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2) m_h + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L} > 0$$

$$\begin{aligned} \theta N_h + \bar{I}_h(q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})(\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2) &> 0 \\ (\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2) &> 0 \\ \bar{I}_h &> \frac{-\mu_v^2}{\delta'_v \mu_v} \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \frac{\theta N_h + \bar{I}_h(q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} &> 0 \\ \frac{\theta N_h + \bar{I}_h(q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})(\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2)}{(\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2)m_h + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L} &> 0 \\ \theta N_h + \bar{I}_h(q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})(\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2) &> 0 \\ \bar{I}_h(q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3}) &> 0 \\ \bar{I}_h &> 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $\bar{S}_h > 0$  เมื่อ  $\bar{I}_h > \frac{-\mu_v^2}{\delta'_v \mu_v}$  และ  $\bar{I}_h > 0$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $\bar{D}_h > 0$  เมื่อ

$$\text{จาก } \bar{D}_h = \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3}$$

$$\text{จะได้ว่า } \bar{D}_h = \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3} > 0 \text{ เสมอ}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $\bar{R}_h > 0$  เมื่อ

$$\text{จาก} \quad \bar{R}_h = \frac{q_5 \bar{I}_h}{m_h + q_4}$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \bar{R}_h = \frac{q_5 \bar{I}_h}{m_h + q_4} > 0 \text{ เสมอ}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $\bar{S}_v > 0$  เมื่อ

$$\text{จาก} \quad \bar{S}_v = \frac{L}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v}$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \bar{S}_v = \frac{L}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v} > 0 \text{ เสมอ}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า  $\bar{I}_v > 0$  เมื่อ

$$\text{จาก} \quad \bar{I}_v = \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \bar{I}_v = \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2} > 0 \text{ เสมอ}$$

จากการพิจารณาข้างต้นพบว่าเงื่อนไขที่ทำให้  $(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)$  มีค่ามากกว่าศูนย์คือ

$$(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2) > m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2$$

$$\frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2} > 1$$

$$R_0 > 1$$

$$\text{เมื่อ} \quad R_0 = \frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2}$$

เพื่อพิจารณาว่าจุดสมดุล  $(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)$  จะมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อคือเทอร์มี

แนบของทุกเมทริกซ์ Hurwitz จะต้องเป็นบวก ซึ่งก็คือ  $\det H_i > 0$  โดยที่  $i = 1, 2, 3, \dots, k$

กำหนดให้ สมการที่ (4.8) - (4.13) เป็นดังนี้

$$X_1(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h - (m_h + q_1 + q_5) \bar{I}_h$$

$$X_2(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_4 \bar{R}_h + (1 - \beta) q_1 \bar{I}_h - (m_h + \delta'_h \bar{I}_v) S_h$$

$$X_3(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \beta q_1 \bar{I}_h - (m_h + q_2 + q_3) \bar{D}_h$$

$$X_4(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = q_5 \bar{I}_h - (m_h + q_4) \bar{R}_h$$

$$X_5(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = L - (\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v) \bar{S}_v$$

$$X_6(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_v - \mu_v \bar{I}_v$$

จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ คือ

$$J = \begin{pmatrix} X_{1\bar{I}_h} & X_{1\bar{S}_h} & X_{1\bar{D}_h} & X_{1\bar{R}_h} & X_{1\bar{S}_v} & X_{1\bar{I}_v} \\ X_{2\bar{I}_h} & X_{2\bar{S}_h} & X_{2\bar{D}_h} & X_{2\bar{R}_h} & X_{2\bar{S}_v} & X_{2\bar{I}_v} \\ X_{3\bar{I}_h} & X_{3\bar{S}_h} & X_{3\bar{D}_h} & X_{3\bar{R}_h} & X_{3\bar{S}_v} & X_{3\bar{I}_v} \\ X_{4\bar{I}_h} & X_{4\bar{S}_h} & X_{4\bar{D}_h} & X_{4\bar{R}_h} & X_{4\bar{S}_v} & X_{4\bar{I}_v} \\ X_{5\bar{I}_h} & X_{5\bar{S}_h} & X_{5\bar{D}_h} & X_{5\bar{R}_h} & X_{5\bar{S}_v} & X_{5\bar{I}_v} \\ X_{6\bar{I}_h} & X_{6\bar{S}_h} & X_{6\bar{D}_h} & X_{6\bar{R}_h} & X_{6\bar{S}_v} & X_{6\bar{I}_v} \end{pmatrix}_{(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)}$$

โดยสมาชิกของจาโคเบียนเมทริกซ์ คือ

$$X_{1\bar{I}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = -(m_h + q_1 + q_5)$$

$$X_{1\bar{S}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \delta'_h \bar{I}_v$$

$$X_{1\bar{D}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = q_2$$

$$X_{1\bar{R}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{1\bar{S}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{1\bar{I}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \delta'_h \bar{S}_h$$

$$X_{2\bar{I}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = (1 - \beta)q_1$$

$$X_{2\bar{S}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = -(m_h + \delta'_h \bar{I}_v)$$

$$X_{2\bar{D}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = q_3$$

$$X_{2\bar{R}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = q_4$$

$$X_{2\bar{S}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{2\bar{I}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = -\delta'_h \bar{S}_h$$

$$X_{3\bar{I}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \beta q_1$$

$$X_{3\bar{S}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{3\bar{D}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = -(m_h + q_2 + q_3)$$

$$X_{3\bar{R}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{3\bar{S}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{3\bar{I}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{4\bar{I}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = q_5$$

$$X_{4\bar{S}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{4\bar{D}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{4\bar{R}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = -(m_h + q_4)$$

$$X_{4\bar{S}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{4\bar{I}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{5\bar{S}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{5\bar{D}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{5\bar{R}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{5\bar{S}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = -(\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v)$$

$$X_{5\bar{I}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{4\bar{I}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \delta'_v \bar{S}_v$$

$$X_{6\bar{S}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{6\bar{D}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{6\bar{R}_h}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = 0$$

$$X_{6\bar{S}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = \delta'_v \bar{I}_h$$

$$X_{6\bar{I}_v}(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v) = -\mu_v$$

ซึ่งสามารถนำมาเขียนรูปแบบของเมทริกซ์ดังนี้

$$J = \begin{pmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) & \delta'_h \bar{I}_v & q_2 & 0 & 0 & \delta'_h \bar{S}_h \\ (1-\beta)q_1 & -(m_h + \delta'_h \bar{I}_v) & q_3 & q_4 & 0 & -\delta'_h \bar{S}_h \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) & 0 & 0 \\ -\delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & -(\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v) & 0 \\ \delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & \delta'_v \bar{I}_h & -\mu_v \end{pmatrix}_{(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)}$$

ค่าเฉพาะของสมการหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ(Characteristic equation)

$$\det(J - \lambda I_6) = 0$$

เมื่อ  $I_6$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด  $6 \times 6$

$$I_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค  $E_1 \left( 0, \frac{\theta N_h}{m_h}, 0, 0, \frac{L}{\mu_v}, 0 \right)$  จะได้จากโคเบียนเมทริกซ์ของจุดสมดุลดังนี้

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) & \delta'_h \bar{I}_v & q_2 & 0 & 0 & \delta'_h \bar{S}_h \\ (1-\beta)q_1 & -(m_h + \delta'_h \bar{I}_v) & q_3 & q_4 & 0 & -\delta'_h \bar{S}_h \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) & 0 & 0 \\ -\delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & -(\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v) & 0 \\ \delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & \delta'_v \bar{I}_h & -\mu_v \end{pmatrix}_{(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)}$$

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) & 0 & q_2 & 0 & 0 & \frac{\delta'_h \theta N_h}{m_h} \\ (1-\beta)q_1 & -m_h & q_3 & q_4 & 0 & \frac{-\delta'_h \theta N_h}{m_h} \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) & 0 & 0 \\ \frac{-\delta'_v L}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & -\mu_v & 0 \\ \frac{\delta'_v L}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v \end{pmatrix}_{\left(0, \frac{\theta N_h}{m_h}, 0, 0, \frac{L}{\mu_v}, 0\right)}$$

$$J_{E_1} - \lambda I_6 = \begin{pmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) - \lambda & 0 & q_2 & 0 & 0 & \frac{\delta'_h \theta N_h}{m_h} \\ (1-\beta)q_1 & -m_h - \lambda & q_3 & q_4 & 0 & \frac{-\delta'_h \theta N_h}{m_h} \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{-\delta'_v L}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda & 0 \\ \frac{\delta'_v L}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda \end{pmatrix}_{\left(0, \frac{\theta N_h}{m_h}, 0, 0, \frac{L}{\mu_v}, 0\right)}$$

$$\det(J_{E_1} - \lambda I_6) = \begin{vmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) - \lambda & 0 & q_2 & 0 & 0 & \frac{\delta'_h \theta N_h}{m_h} \\ (1 - \beta)q_1 & -m_h - \lambda & q_3 & q_4 & 0 & \frac{-\delta'_h \theta N_h}{m_h} \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{-\delta'_v L}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda & 0 \\ \frac{\delta'_v L}{\mu_v} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0, \frac{\theta N_h}{m_h}, 0, 0, \frac{L}{\mu_v}, 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = (-\lambda - m_h)(-\lambda - m_h - q_4)((-\lambda - m_h - q_2 - q_3)(-\lambda - m_h - q_1 - q_5) - q_2 \beta q_1) \\ (-\lambda - \mu_v) + \frac{L(-\lambda - m_h - q_2 - q_3)\delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} (-\lambda - \mu_v)$$

จากสมการลักษณะเฉพาะจะได้ค่าลักษณะเฉพาะ 3 ค่าดังนี้

$$-\lambda - m_h = 0 \quad \text{หรือ} \quad \lambda = -m_h$$

$$-\lambda - m_h - q_4 = 0 \quad \text{หรือ} \quad \lambda = -m_h - q_4$$

$$-\lambda - \mu_v = 0 \quad \text{หรือ} \quad \lambda = -\mu_v$$

และค่าลักษณะเฉพาะที่เหลือหาได้จาก

$$((( -\lambda - m_h - q_2 - q_3)( -\lambda - m_h - q_1 - q_5) - q_2 \beta q_1)( -\lambda - \mu_v) + \frac{L(-\lambda - m_h - q_2 - q_3)\delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v})$$

จากสมการข้างต้นจะได้

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 m_h + \lambda m_h^2 + \lambda^2 q_1 + \lambda m_h q_1 + \lambda^2 q_2 + \lambda m_h q_2 + \lambda q_1 q_2 + \lambda^2 q_3 + \lambda m_h q_3 + \lambda q_1 q_3 \\ + \lambda^2 q_5 + \lambda m_h q_5 + \lambda q_2 q_5 + \lambda q_3 q_5 - \lambda q_2 \beta q_1 - \frac{L\delta'_h \delta'_v \theta N_h}{\mu_v} - \frac{L\lambda \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} - \frac{Lq_2 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} \\ - \frac{Lq_3 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} + \lambda^2 \mu_v + 2\lambda m_h \mu_v + m_h^2 \mu_v + \lambda q_1 \mu_v + m_h q_1 \mu_v + \lambda q_2 \mu_v + m_h q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v \\ + \lambda q_3 \mu_v + m_h q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v + \lambda q_5 \mu_v + m_h q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v - q_2 \beta q_1 \mu_v = 0$$

$$\frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h ((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2 \beta q_1) \mu_v^2}{m_h \mu_v}$$

$$+ (m_h^2 + m_h q_1 + m_h q_2 + q_1 q_2 + m_h q_3 + q_1 q_3 + m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 - q_2 \beta q_1)$$

$$- \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v}{m_h \mu_v} + 2m_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v) \lambda$$

$$+ (2m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v) \lambda^2 + \lambda^3 = 0$$

กำหนดให้

$$a_3 = - \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h ((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2 \beta q_1) \mu_v^2}{m_h \mu_v}$$

$$a_2 = m_h^2 + m_h q_1 + m_h q_2 + q_1 q_2 + m_h q_3 + q_1 q_3 + m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 - q_2 \beta q_1 - \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v}{m_h \mu_v}$$

$$+ 2m_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v$$

$$a_1 = (2m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v) \lambda^2 + \lambda^3$$

จากสมการลักษณะเฉพาะจะอยู่ในรูป  $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$

ค่าลักษณะเฉพาะจะเป็นลบ เมื่อสัมประสิทธิ์  $a_3, a_2$  และ  $a_1$  สอดคล้องกับ Routh-Hurwitz Criteria

ดังนี้

- i)  $a_3 > 0$
- ii)  $a_2 > 0$
- iii)  $a_1 > 0$
- iv)  $a_1 a_2 - a_3 > 0$
- v)  $a_3 a_2 a_1 - a_3^2 > 0$  หรือ  $\Delta_2 a_3 > 0$  โดย  $(a_3 a_2 a_1 - a_3^2 = \Delta_2 a_3)$

i) พิจารณา  $a_1 > 0$  จาก  $a_1 = (2m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v) \lambda^2 + \lambda^3$

จะได้ว่า  $(2m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v) \lambda^2 + \lambda^3 > 0$

ซึ่งทุกพจน์ใน  $a_1$  เป็นบวกหมด ดังนั้น  $a_1 > 0$  เสมอ

ii) พิจารณา  $a_2 > 0$  จาก

$$a_2 = m_h^2 + m_h q_1 + m_h q_2 + q_1 q_2 + m_h q_3 + q_1 q_3 + m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 \\ - q_2 \beta q_1 - \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v}{m_h \mu_v} + 2m_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v$$

จะได้ว่า

$$m_h^2 + m_h q_1 + m_h q_2 + q_1 q_2 + m_h q_3 + q_1 q_3 + m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 \\ + 2m_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v > q_2 \beta q_1 + \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v}{m_h \mu_v}$$

นั่นคือ  $a_2 > 0$  เมื่อ

$$m_h^2 + m_h q_1 + m_h q_2 + q_1 q_2 + m_h q_3 + q_1 q_3 + m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 \\ + 2m_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v > q_2 \beta q_1 + \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v}{m_h \mu_v}$$

iii) พิจารณา  $a_3 > 0$  จาก

$$a_3 = - \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h ((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2 \beta q_1) \mu_v^2}{m_h \mu_v}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h ((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2 \beta q_1) \mu_v^2}{m_h \mu_v} > 0 \\ - \delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h ((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2 \beta q_1) \mu_v^2 > 0 \\ - L m_h \delta'_h \delta'_v \theta N_h - L q_2 \delta'_h \delta'_v \theta N_h - L q_3 \delta'_h \delta'_v \theta N_h - m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h^3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 \mu_v^2 \\ + m_h^2 q_2 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 \mu_v^2 + m_h q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_5 \mu_v^2 > 0 \\ m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2 - L \delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) - m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2 > 0 \\ m_h (m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2 > L \delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2$$

$$\frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2}{m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2} < 1$$

$$R_0 < 1$$

นั่นคือ  $a_3 > 0$  เมื่อ  $m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2 > L \delta'_h \theta N_h \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2$

iv) พิจารณา  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  จาก

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= (2m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + \mu_v)(m_h^2 + m_h q_1 + m_h q_2 + q_1 q_2 + m_h q_3 + q_1 q_3 + m_h q_5 \\ &\quad + q_2 q_5 + q_3 q_5 - q_2 \beta q_1 - \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} + 2m_h \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_5 \mu_v) \\ &= 2m_h^3 + 3m_h^2 q_1 + m_h q_1^2 + 3m_h^2 q_2 + 4m_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + m_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3m_h^2 q_3 + 4m_h q_1 q_3 \\ &\quad + q_1^2 q_3 + 2m_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + m_h q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3m_h^2 q_5 + 2m_h q_1 q_5 + 4m_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 \\ &\quad + q_2^2 q_5 + 4m_h q_3 q_5 + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + m_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 - 2m_h q_2 \beta q_1 \\ &\quad - q_1 q_2 \beta q_1 - q_2^2 \beta q_1 - q_2 q_3 \beta q_1 - q_2 q_5 \beta q_1 - \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h} - \frac{2L \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{\mu_v} - \frac{L q_1 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} \\ &\quad - \frac{L q_2 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} - \frac{L q_3 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} - \frac{L q_5 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} + 5m_h^2 \mu_v + 5m_h q_1 \mu_v + q_1^2 \mu_v + 5m_h q_2 \mu_v \\ &\quad + 3q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 5m_h q_3 \mu_v + 3q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v + q_3^2 \mu_v + 5m_h q_5 \mu_v + 2q_1 q_5 \mu_v \\ &\quad + 3q_2 q_5 \mu_v + 3q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v - q_2 \beta q_1 \mu_v + 2m_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\ a_3 &= -\frac{\delta'_h \delta'_v \theta N_h L (m_h + q_2 + q_3) + m_h ((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2 \beta q_1) \mu_v^2}{m_h \mu_v} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= 2m_h^3 + 3m_h^2 q_1 + m_h q_1^2 + 3m_h^2 q_2 + 4m_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + m_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3m_h^2 q_3 + 4m_h q_1 q_3 \\ &\quad + q_1^2 q_3 + 2m_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + m_h q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3m_h^2 q_5 + 2m_h q_1 q_5 + 4m_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 \\ &\quad + q_2^2 q_5 + 4m_h q_3 q_5 + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + m_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 + 6m_h^2 \mu_v + 6m_h q_1 \mu_v \\ &\quad + q_1^2 \mu_v + 6m_h q_2 \mu_v + 4q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 6m_h q_3 \mu_v + 4q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v + q_3^2 \mu_v + 6m_h q_5 \mu_v \\ &\quad + 2q_1 q_5 \mu_v + 4q_2 q_5 \mu_v + 4q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v + 2m_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\ &\quad - 2m_h q_2 \beta q_1 - q_1 q_2 \beta q_1 - q_2^2 \beta q_1 - 2q_2 \beta q_1 \mu - q_2 q_3 \beta q_1 - q_2 q_5 \beta q_1 - \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h} \\ &\quad - \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{\mu_v} - \frac{L q_1 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} - \frac{L q_2 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} - \frac{L q_3 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} \end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned}
 & 2m_h^3 + 3m_h^2 q_1 + m_h q_1^2 + 3m_h^2 q_2 + 4m_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + m_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3m_h^2 q_3 + 4m_h q_1 q_3 \\
 & + q_1^2 q_3 + 2m_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + m_h q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3m_h^2 q_5 + 2m_h q_1 q_5 + 4m_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 \\
 & + q_2^2 q_5 + 4m_h q_3 q_5 + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + m_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 + 6m_h^2 \mu_v + 6m_h q_1 \mu_v \\
 & + q_1^2 \mu_v + 6m_h q_2 \mu_v + 4q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 6m_h q_3 \mu_v + 4q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v + q_3^2 \mu_v + 6m_h q_5 \mu_v \\
 & + 2q_1 q_5 \mu_v + 4q_2 q_5 \mu_v + 4q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v + 2m_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\
 & > 2m_h q_2 \beta q_1 + q_1 q_2 \beta q_1 + q_2^2 \beta q_1 + 2q_2 \beta q_1 \mu + q_2 q_3 \beta q_1 + q_2 q_5 \beta q_1 + \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h} \\
 & + \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta' N_h}{\mu_v} + \frac{L q_1 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} + \frac{L q_5 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v}
 \end{aligned}$$

v) พิจารณา  $a_3 a_2 a_1 - a_3^2 > 0$  หรือ  $\Delta_2 a_3 > 0$  จาก

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= 2m_h^3 + 3m_h^2 q_1 + m_h q_1^2 + 3m_h^2 q_2 + 4m_h q_1 q_2 + q_1^2 q_2 + m_h q_2^2 + q_1 q_2^2 + 3m_h^2 q_3 + 4m_h q_1 q_3 \\
 & + q_1^2 q_3 + 2m_h q_2 q_3 + 2q_1 q_2 q_3 + m_h q_3^2 + q_1 q_3^2 + 3m_h^2 q_5 + 2m_h q_1 q_5 + 4m_h q_2 q_5 + 2q_1 q_2 q_5 \\
 & + q_2^2 q_5 + 4m_h q_3 q_5 + 2q_1 q_3 q_5 + 2q_2 q_3 q_5 + q_3^2 q_5 + m_h q_5^2 + q_2 q_5^2 + q_3 q_5^2 + 6m_h^2 \mu_v + 6m_h q_1 \mu_v \\
 & + q_1^2 \mu_v + 6m_h q_2 \mu_v + 4q_1 q_2 \mu_v + q_2^2 \mu_v + 6m_h q_3 \mu_v + 4q_1 q_3 \mu_v + 2q_2 q_3 \mu_v + q_3^2 \mu_v + 6m_h q_5 \mu_v \\
 & + 2q_1 q_5 \mu_v + 4q_2 q_5 \mu_v + 4q_3 q_5 \mu_v + q_5^2 \mu_v + 2m_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\
 & - 2m_h q_2 \beta q_1 - q_1 q_2 \beta q_1 - q_2^2 \beta q_1 - 2q_2 \beta q_1 \mu - q_2 q_3 \beta q_1 - q_2 q_5 \beta q_1 - \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h} \\
 & - \frac{L \delta'_h \delta'_v \theta' N_h}{\mu_v} - \frac{L q_1 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} - \frac{L q_5 \delta'_h \delta'_v \theta N_h}{m_h \mu_v} \\
 a_3 &= - \frac{\delta'_h \delta'_v \theta N_h L (m_h + q_2 + q_3) + m_h ((m_h + q_2 + q_3)(m_h + q_1 + q_5) - q_2 \beta q_1) \mu_v^2}{m_h \mu_v}
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า  $a_3 a_2 a_1 - a_3^2 =$

$$\begin{aligned}
 & 5Lm_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 4Lm_1q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 11Lm_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 8Lq_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 7Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{Lq_2^3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + 11Lm_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} \\
 & + 8Lq_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 14Lq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{8Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + 7Lq_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{3Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{Lq_2^3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} \\
 & + 4Lm_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 8Lq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + 8Lq_3q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{8Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{4Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} \\
 & + \frac{Lq_1q_2\beta q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{2Lm_1^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{3Lm_2^2q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lm_1q_1^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + 5Lm_1^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{7Lm_1q_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{4Lm_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 & + \frac{5Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1^2q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_2^3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + 5Lm_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{7Lm_1q_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{8Lm_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 & + \frac{10Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1^2q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{3Lq_1q_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{4Lm_1q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + 5Lq_1q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{Lq_1^2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 & + \frac{3Lq_1q_2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_1^2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1q_2^2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lm_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lm_1q_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{7Lm_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{4Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + 5Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} \\
 & + \frac{2Lq_1^2q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_1^2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{7Lm_1q_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{4Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + 10Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} \\
 & + \frac{5Lq_1^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_1^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lm_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_2^2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{2Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 & + \frac{2Lq_1q_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_2^3q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + 2m_1^2\mu + 5m_1^2q_1\mu + 4m_1^2q_1^2\mu + m_1^2q_1^3\mu + 5m_1^2q_2\mu + 12m_1^2q_1q_2\mu + 9m_1^2q_1^2q_2\mu + 2m_1q_1^3q_2\mu + 4m_1^2q_2^2\mu \\
 & + 9m_1^2q_1^2q_2^2\mu + 6m_1q_1^2q_2^2\mu + q_1^2q_2^2\mu + m_1^2q_2^2\mu + 2m_1q_1q_2^2\mu + q_1^2q_2^2\mu + 5m_1^2q_3\mu + 12m_1^2q_1q_3\mu + 9m_1^2q_1^2q_3\mu + 2m_1q_1^3q_3\mu + 8m_1^2q_1q_2q_3\mu + 18m_1^2q_1q_2q_3\mu \\
 & + 12m_1q_1^2q_2q_3\mu + 2q_1^2q_2q_3\mu + 3m_1^2q_2^2q_3\mu + 6m_1q_1q_2^2q_3\mu + 3q_1^2q_2^2q_3\mu + 4m_1^2q_3^2\mu + 9m_1^2q_1q_3^2\mu + 6m_1q_1^2q_3^2\mu + q_1^2q_3^2\mu + 3m_1^2q_2^2\mu + 6m_1q_1q_2^2\mu + 6m_1q_1q_2q_3\mu \\
 & + 3q_1^2q_2^2\mu + m_1^2q_2^2\mu + 2m_1q_1q_2^2\mu + q_1^2q_2^2\mu + 5m_1^2q_3\mu + 8m_1^2q_1q_3\mu + 3m_1^2q_1^2q_3\mu + 12m_1^2q_2q_3\mu + 18m_1^2q_1q_2q_3\mu + 6m_1q_1^2q_2q_3\mu + 18m_1^2q_2q_3\mu + 24m_1q_1q_2q_3\mu + 6q_1^2q_2q_3\mu \\
 & + 6m_1q_2^2q_3\mu + 6q_1q_2^2q_3\mu + 9m_1^2q_3^2\mu + 12m_1q_1q_3^2\mu + 3q_1^2q_3^2\mu + 6m_1q_2q_3^2\mu + 6q_1q_2q_3^2\mu + 2m_1q_3^3\mu + 2q_1q_3^3\mu + 4m_1^2q_3^2\mu + 3m_1^2q_1q_3^2\mu \\
 & + 9m_1^2q_2^2\mu + 6m_1q_1q_2^2\mu + 6m_1q_2^2\mu + 3q_1q_2^2\mu + q_2^2q_3^2\mu + 9m_1^2q_1q_3^2\mu + 6m_1q_1q_2q_3^2\mu + 12m_1q_1q_2q_3^2\mu + 6q_1q_2q_3^2\mu + 3q_2^2q_3^2\mu + 6m_1q_2^2q_3^2\mu \\
 & + 3q_1q_2^2q_3^2\mu + 3q_1q_2q_3^2\mu + q_2^2q_3^2\mu + m_1^2q_3^2\mu + 2m_1q_2q_3^2\mu + q_2^2q_3^2\mu + 2m_1q_1q_3^2\mu + 2q_1q_2q_3^2\mu + q_2^2q_3^2\mu + 2m_1q_2\beta q_1^2\mu + q_1q_2\beta q_1^2\mu + q_2\beta q_1^2\mu + q_2^2\beta q_1^2\mu \\
 & + q_2^2q_3\beta q_1^2\mu + Lm_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu + 2Lq_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu + \frac{Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} + 2Lq_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu + \frac{2Lq_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} + \frac{Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} + \frac{Lq_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} \\
 & + 6m_1^2\mu^2 + 12m_1^2q_1\mu^2 + 7m_1^2q_1^2\mu^2 + m_1q_1^2\mu^2 + 12m_1^2q_2\mu^2 + 22m_1^2q_1q_2\mu^2 + 11m_1q_1^2q_2\mu^2 + q_1^2q_2\mu^2 + 7m_1^2q_2^2\mu^2 + 11m_1q_1q_2^2\mu^2 + 4q_1^2q_2^2\mu^2 + m_1q_3^2\mu^2 + q_1q_3^2\mu^2 \\
 & + 12m_1^2q_3\mu^2 + 22m_1^2q_1q_3\mu^2 + 11m_1q_1^2q_3\mu^2 + q_1^2q_3\mu^2 + 14m_1^2q_2q_3\mu^2 + 22m_1q_1q_2q_3\mu^2 + 8q_1^2q_2q_3\mu^2 + 3m_1q_2^2q_3\mu^2 + 3q_1q_2^2q_3\mu^2 + 7m_1^2q_3^2\mu^2 + 11m_1q_1q_3^2\mu^2 \\
 & + 4q_1^2q_3^2\mu^2 + 3m_1q_2q_3^2\mu^2 + 3q_1q_2q_3^2\mu^2 + m_1q_3^3\mu^2 + q_1q_3^3\mu^2 + 12m_1^2q_1\mu^2 + 14m_1^2q_1q_2\mu^2 + 3m_1q_1^2q_2\mu^2 + 22m_1^2q_1q_3\mu^2 + 22m_1q_1q_2q_3\mu^2 + 3q_1^2q_2q_3\mu^2 + 11m_1q_2^2q_3\mu^2 \\
 & + 8q_1^2q_2^2\mu^2 + q_2^2q_3\mu^2 + 22m_1^2q_1q_3\mu^2 + 22m_1q_1q_2q_3\mu^2 + 3q_1^2q_2q_3\mu^2 + 22m_1q_1q_2q_3\mu^2 + 16q_1^2q_2q_3\mu^2 + 3q_2^2q_3\mu^2 + 11m_1q_2^2q_3\mu^2 + 8q_1q_2^2q_3\mu^2 + 3q_2^2q_3^2\mu^2 \\
 & + q_2^2q_3\mu^2 + 7m_1^2q_3^2\mu^2 + 3m_1q_1q_3^2\mu^2 + 11m_1q_1q_3^2\mu^2 + 3q_1q_2q_3^2\mu^2 + 4q_2^2q_3^2\mu^2 + 11m_1q_2q_3^2\mu^2 + 3q_1q_2q_3^2\mu^2 + 8q_2q_2q_3^2\mu^2 + 4q_2^2q_3^2\mu^2 + m_1q_3^3\mu^2 + q_2q_3^3\mu^2 + q_2q_3^2\mu^2 \\
 & + 2q_2^2\beta q_1^2\mu^2 + 2m_1^2\mu^2 + 3m_1^2q_1\mu^2 + m_1q_1^2\mu^2 + 3m_1^2q_2\mu^2 + 4m_1q_1q_2\mu^2 + q_1^2q_2\mu^2 + m_1q_2^2\mu^2 + q_1q_2^2\mu^2 + 3m_1^2q_3\mu^2 + 4m_1q_1q_3\mu^2 + q_1^2q_3\mu^2 + 2m_1q_2q_3\mu^2 \\
 & + 2q_1q_2q_3\mu^2 + m_1q_3^2\mu^2 + q_1q_3^2\mu^2 + 3m_1^2q_3\mu^2 + 2m_1q_1q_3\mu^2 + 4m_1q_2q_3\mu^2 + 2q_1q_3\mu^2 + q_2^2q_3\mu^2 + 4m_1q_2q_3\mu^2 + 2q_1q_2q_3\mu^2 + 2q_2q_2q_3\mu^2 + q_2^2q_3\mu^2 + m_1q_3^2\mu^2 \\
 & + q_2q_3^2\mu^2 + q_2q_3\mu^2 \\
 & - 2m_1q_2\beta q_1\mu^2 - q_1q_2\beta q_1\mu^2 - q_2^2\beta q_1\mu^2 - q_2q_3\beta q_1\mu^2 - q_2q_3\beta q_1\mu^2 - Lq_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} - \frac{2Lq_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} - \frac{2Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} - \frac{L^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{\mu^2} - \frac{L^2q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} \\
 & - \frac{L^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} - \frac{L^2q_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h^2\mu^2} - \frac{L^2q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} - \frac{L^2q_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h^2\mu^2} - \frac{L^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} - \frac{L^2q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h^2\mu^2} - \frac{L^2q_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h^2\mu^2} - \frac{L^2q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h^2\mu^2} - \frac{2Lm_1q_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 & - \frac{Lq_1q_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} - \frac{3Lq_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} - \frac{Lq_1q_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} - \frac{Lq_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} - \frac{3Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} - \frac{Lq_1q_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} - \frac{2Lq_2^2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} \\
 & - \frac{Lq_1q_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} - \frac{Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} - \frac{Lq_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} - \frac{Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} - \frac{L^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu} - \frac{L^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h^2\mu} - \frac{L^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h^2\mu} - 4m_1^2q_2\beta q_1\mu \\
 & - 6m_1^2q_1q_2\beta q_1\mu - 2m_1q_1^2q_2\beta q_1\mu - 6m_1^2q_2^2\beta q_1\mu - 8m_1q_1q_2^2\beta q_1\mu - 2q_1^2q_2^2\beta q_1\mu - 2m_1q_2^3\beta q_1\mu - 2q_1q_2^3\beta q_1\mu - 6m_1^2q_1q_2\beta q_1\mu - 4m_1q_1q_2q_3\beta q_1\mu - 8m_1q_2^2q_3\beta q_1\mu - 4q_1q_2^2q_3\beta q_1\mu \\
 & - 2q_2^2q_3\beta q_1\mu - 8m_1q_1q_2q_3\beta q_1\mu - 4q_1q_2q_3\beta q_1\mu - 4q_2^2q_3\beta q_1\mu - 2q_1q_2^2q_3\beta q_1\mu - 2m_1q_2^3\beta q_1\mu - 2q_2^3\beta q_1\mu - 2q_1q_2^3\beta q_1\mu - 8m_1^2q_2\beta q_1\mu^2 \\
 & - 8m_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 - q_1^2q_2\beta q_1\mu^2 - 8m_1q_2^2\beta q_1\mu^2 - 6q_1q_2^2\beta q_1\mu^2 - q_2^2\beta q_1\mu^2 - 8m_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 - 6q_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 - 2q_2^2q_3\beta q_1\mu^2 - q_2q_3^2\beta q_1\mu^2 - 8m_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 \\
 & - 2q_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 - 6q_2^2q_3\beta q_1\mu^2 - 6q_2q_3q_3\beta q_1\mu^2 - q_2q_3^2\beta q_1\mu^2
 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_3a_2a_1 - a_3^2 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned}
 &5Lm_h^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 4Lm_hq\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 11Lm_hq_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 8Lq_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 7Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{Lq_2^3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + 11Lm_hq_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} \\
 &+ 8Lq_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 14Lq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{8Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + 7Lq_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{3Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{Lq_2^3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} \\
 &+ 4Lm_hq_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + 8Lq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + 8Lq_3q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{4Lq_1^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} \\
 &+ \frac{Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{2Lm_h^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{3Lm_h^2q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lm_hq_1^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{5Lm_h^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{7Lm_hq_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{4Lm_hq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 &+ \frac{5Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1^2q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{5Lm_h^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{7Lm_hq_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{8Lm_hq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 &+ \frac{10Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1^2q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{3Lq_1q_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{4Lm_hq_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{5Lq_1q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1^2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 &+ \frac{3Lq_1q_2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_1^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lm_h^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lm_hq_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{7Lm_hq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{4Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{5Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 &+ \frac{2Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{7Lm_hq_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{4Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{10Lq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{4Lq_1q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} \\
 &+ \frac{5Lq_1^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_1q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_2^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_1^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lm_hq_1^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{2Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1^2q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{2Lq_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 &+ \frac{2Lq_2q_3^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_1^2q_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + 2m_h^2\mu + 5m_h^2q_1\mu + 4m_h^2q_1^2\mu + m_h^2q_1^3\mu + 5m_h^2q_2\mu + 12m_h^2q_1q_2\mu + 9m_h^2q_1^2q_2\mu + 2m_h^2q_1^3q_2\mu + 4m_h^2q_2^2\mu \\
 &+ 9m_h^2q_1q_2^2\mu + 6m_h^2q_2^2\mu + q_1^2q_2^2\mu + m_h^2q_3^2\mu + 2m_hq_1q_2^2\mu + q_1^2q_2^2\mu + 5m_h^2q_3\mu + 12m_h^2q_1q_3\mu + 9m_h^2q_1^2q_3\mu + 2m_h^2q_1^3q_3\mu + 8m_h^2q_2q_3\mu + 18m_h^2q_1q_2q_3\mu \\
 &+ 12m_h^2q_1^2q_2q_3\mu + 2q_1^2q_2q_3\mu + 3m_h^2q_2^2q_3\mu + 6m_hq_1q_2^2q_3\mu + 3q_1^2q_2^2q_3\mu + 4m_h^2q_3^2\mu + 9m_h^2q_1q_3^2\mu + 6m_hq_1^2q_3^2\mu + q_1^2q_3^2\mu + 3m_h^2q_2^2\mu + 6m_hq_1q_2q_3^2\mu \\
 &+ 3q_1^2q_2q_3^2\mu + m_h^2q_3^3\mu + 2m_hq_1q_3^2\mu + q_1^2q_3^2\mu + 5m_h^2q_3\mu + 8m_h^2q_1q_3\mu + 3m_h^2q_1^2q_3\mu + 12m_h^2q_2q_3\mu + 18m_h^2q_1q_2q_3\mu + 6m_hq_1^2q_2q_3\mu + 9m_h^2q_2^2q_3\mu \\
 &+ 12m_hq_1q_2^2q_3\mu + 3q_1^2q_2^2q_3\mu + 2m_hq_2^2q_3\mu + 2q_1^2q_2^2q_3\mu + 12m_h^2q_1q_2q_3\mu + 18m_h^2q_1q_2q_3\mu + 6m_hq_1^2q_2q_3\mu + 18m_h^2q_2q_3\mu + 24m_hq_1q_2q_3\mu + 6q_1^2q_2q_3\mu \\
 &+ 6m_hq_2^2q_3\mu + 6q_1^2q_2^2q_3\mu + 9m_h^2q_2^2q_3\mu + 12m_hq_1q_2^2q_3\mu + 3q_1^2q_2^2q_3\mu + 6m_hq_2^2q_3\mu + 6q_1q_2^2q_3\mu + 2m_hq_3^2q_3\mu + 2q_1^2q_3^2\mu + 4m_h^2q_1q_2^2\mu \\
 &+ 9m_h^2q_2^2q_3\mu + 6m_hq_1q_2q_3^2\mu + 6m_hq_2^2q_3\mu + 3q_1^2q_2^2q_3\mu + q_2^2q_3^2\mu + 9m_h^2q_2^2q_3\mu + 6m_hq_1q_2^2q_3\mu + 12m_hq_2q_3^2\mu + 6q_1q_2q_3^2\mu + 3q_2^2q_3^2\mu + 6m_hq_2^2q_3\mu \\
 &+ 3q_1q_2^2q_3\mu + 3q_2^2q_3^2\mu + q_2^2q_3^2\mu + m_h^2q_3^3\mu + 2m_hq_1q_3^2\mu + q_2^2q_3^2\mu + 2m_hq_2q_3^2\mu + 2q_1q_2q_3^2\mu + q_2^2q_3^2\mu + 2m_hq_2^2\beta q_1^2\mu + q_1q_2^2\beta q_1^2\mu + q_2^2\beta q_1^2\mu + q_2^2q_3\beta q_1^2\mu \\
 &+ q_2^2q_3\beta q_1^2\mu + Lm_h\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu + 2Lq_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu + \frac{Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} + 2Lq_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu + \frac{2Lq_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} + \frac{Lq_2^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} + \frac{Lq_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}\mu}{m_h} \\
 &+ 6m_h^2\mu^2 + 12m_h^2q_1\mu^2 + 7m_h^2q_1^2\mu^2 + m_hq_1^2\mu^2 + 12m_h^2q_2\mu^2 + 22m_h^2q_1q_2\mu^2 + 11m_hq_1^2q_2\mu^2 + q_1^2q_2\mu^2 + 7m_h^2q_2^2\mu^2 + 11m_hq_1q_2^2\mu^2 + 4q_1^2q_2^2\mu^2 + m_hq_2^2\mu^2 + q_1q_2^2\mu^2 \\
 &+ 12m_h^2q_3\mu^2 + 22m_h^2q_1q_3\mu^2 + 11m_hq_1^2q_3\mu^2 + q_1^2q_3\mu^2 + 14m_h^2q_2q_3\mu^2 + 22m_hq_1q_2q_3\mu^2 + 8q_1^2q_2q_3\mu^2 + 3m_hq_2^2q_3\mu^2 + 3q_1q_2^2q_3\mu^2 + 7m_h^2q_3^2\mu^2 + 11m_hq_1q_3^2\mu^2 \\
 &+ 4q_1^2q_3^2\mu^2 + 3m_hq_2q_3^2\mu^2 + 3q_1q_2q_3^2\mu^2 + m_hq_1^2q_3^2\mu^2 + q_1^2q_3^2\mu^2 + 12m_h^2q_3\mu^2 + 14m_h^2q_1q_3\mu^2 + 3m_hq_1^2q_3\mu^2 + 22m_h^2q_2q_3\mu^2 + 22m_hq_1q_2q_3\mu^2 + 3q_1^2q_2q_3\mu^2 + 11m_hq_2^2q_3\mu^2 \\
 &+ 8q_1q_2^2q_3\mu^2 + q_2^2q_3\mu^2 + 22m_h^2q_1q_2\mu^2 + 22m_hq_1q_2q_3\mu^2 + 3q_1^2q_2q_3\mu^2 + 22m_hq_1q_2q_3\mu^2 + 16q_1q_2q_3\mu^2 + 3q_2^2q_3\mu^2 + 11m_hq_2^2q_3\mu^2 + 8q_1q_2^2q_3\mu^2 + 3q_2^2q_3\mu^2 \\
 &+ q_2^2q_3\mu^2 + 7m_h^2q_3^2\mu^2 + 3m_hq_1q_3^2\mu^2 + 11m_hq_2q_3^2\mu^2 + 4q_2^2q_3^2\mu^2 + 11m_hq_1q_3^2\mu^2 + 3q_1q_2q_3^2\mu^2 + 8q_1q_2q_3\mu^2 + 4q_2^2q_3^2\mu^2 + m_hq_1^2q_3^2\mu^2 + q_2^2q_3^2\mu^2 + q_2^2q_3\mu^2 \\
 &+ 2q_2^2\beta q_1^2\mu^2 + 2m_h^2\mu^2 + 3m_h^2q_1\mu^2 + m_hq_1^2\mu^2 + 3m_h^2q_2\mu^2 + 4m_hq_1q_2\mu^2 + q_1^2q_2\mu^2 + m_hq_2^2\mu^2 + q_1q_2^2\mu^2 + 3m_h^2q_3\mu^2 + 4m_hq_1q_3\mu^2 + q_1^2q_3\mu^2 + 2m_hq_2q_3\mu^2 \\
 &+ 2q_1q_2q_3\mu^2 + m_hq_3^2\mu^2 + q_1q_2q_3\mu^2 + 3m_h^2q_3\mu^2 + 2m_hq_1q_3\mu^2 + 4m_hq_2q_3\mu^2 + 2q_1q_2q_3\mu^2 + q_2^2q_3\mu^2 + 4m_hq_3\mu^2 + 2q_1q_2q_3\mu^2 + 2q_2q_3\mu^2 + q_2^2q_3\mu^2 + m_hq_3^2\mu^2 \\
 &+ q_2^2q_3\mu^2 + q_2q_3\mu^2 \\
 &> \\
 &2m_hq_2\beta q_1\mu^2 + q_2\beta q_1\mu^2 + q_2^2\beta q_1\mu^2 + q_2q_3\beta q_1\mu^2 + q_2q_3\beta q_1\mu^2 + Lq_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h} + \frac{2Lq_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{2Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h} + \frac{L^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{\mu^2} + \frac{L^2q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} \\
 &+ \frac{L^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} + \frac{L^2q_1q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} + \frac{L^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} + \frac{L^2q_1q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} + \frac{L^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} + \frac{L^2q_2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} + \frac{L^2q_3q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu^2} + \frac{2Lm_hq_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} \\
 &+ \frac{Lq_1q_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{3Lq_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1q_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{3Lq_1q_2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_1q_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{2Lq_2^2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} \\
 &+ \frac{Lq_1q_2^2\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{\mu} + \frac{Lq_2^2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{Lq_2q_3\beta q_1\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}}{m_h\mu} + \frac{L^2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu} + \frac{L^2q_2\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu} + \frac{L^2q_3\delta_h^2\delta_h^2\theta_{N_h}^2}{m_h\mu} + 4m_h^2q_2\beta q_1\mu \\
 &+ 6m_h^2q_1q_2\beta q_1\mu + 2m_hq_1^2q_2\beta q_1\mu + 6m_h^2q_2^2\beta q_1\mu + 8m_hq_1q_2^2\beta q_1\mu + 2q_1^2q_2^2\beta q_1\mu + 2m_hq_2^2\beta q_1\mu + 2q_1q_2^2\beta q_1\mu + 6m_h^2q_2q_3\beta q_1\mu + 8m_hq_1q_2q_3\beta q_1\mu \\
 &+ 2q_1^2q_2q_3\beta q_1\mu + 4m_hq_2^2q_3\beta q_1\mu + 4q_1q_2^2q_3\beta q_1\mu + 2m_hq_2q_3^2\beta q_1\mu + 2q_1q_2q_3^2\beta q_1\mu + 6m_h^2q_3\beta q_1\mu + 4m_hq_1q_2q_3\beta q_1\mu + 8m_hq_2^2q_3\beta q_1\mu + 4q_1q_2^2q_3\beta q_1\mu \\
 &+ 2q_2^2q_3\beta q_1\mu + 8m_hq_1q_2q_3\beta q_1\mu + 4q_1q_2q_3\beta q_1\mu + 4q_2^2q_3\beta q_1\mu + 2q_1q_2q_3\beta q_1\mu + 2m_hq_2^2\beta q_1\mu + 2q_2^2q_3\beta q_1\mu + 2q_1q_2q_3\beta q_1\mu + 8m_h^2q_3\beta q_1\mu^2 \\
 &+ 8m_hq_1q_2\beta q_1\mu^2 + q_1^2q_2\beta q_1\mu^2 + 8m_hq_2^2\beta q_1\mu^2 + 6q_1q_2^2\beta q_1\mu^2 + q_2^2\beta q_1\mu^2 + 8m_hq_2q_3\beta q_1\mu^2 + 6q_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 + 2q_2^2q_3\beta q_1\mu^2 + q_2^2q_3\beta q_1\mu^2 + 8m_hq_2q_3\beta q_1\mu^2 \\
 &+ 2q_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 + 6q_2^2q_3\beta q_1\mu^2 + 6q_1q_2q_3\beta q_1\mu^2 + q_2^2q_3\beta q_1\mu^2
 \end{aligned}$$

จากค่าเจาะจงทั้ง 6 ค่า พบว่ามีค่าเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมมูลมีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0 < 1$

ภายใต้สภาวะระบาคเรื่อริง จะได้จุดสมคุด  $E_2(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)$  เมื่อ

$$\begin{aligned} & (L\delta'_v m_h^2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_2 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_3 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v m_h q_4 \delta'_h \theta N_h + L\delta'_v q_2 q_4 \delta'_h \theta N_h \\ & + L\delta'_v q_3 q_4 \delta'_h \theta N_h + m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2) - (m_h^4 \mu_v^2 + m_h^3 q_1 \mu_v^2 + m_h^3 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 \\ & + m_h^3 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^3 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_4 \mu_v^2 \\ & + m_h q_1 q_3 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2) \\ \bar{I}_h = & \frac{L\delta'_v m_h^2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_2 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_3 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_2 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_4 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 q_5 \delta'_h \\ & + L\delta'_v m_h q_2 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_3 q_5 \delta'_h + L\delta'_v m_h^2 \beta q_1 \delta'_h + L\delta'_v m_h q_4 \beta q_1 \delta'_h + m_h^4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_1 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_2 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_1 q_2 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_3 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_1 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h^2 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v + m_h^3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_2 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_3 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h^2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \\ & + m_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v + m_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v - m_h^2 q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v - m_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \mu_v}{\theta N_h + \bar{I}_h (q_1 - \beta q_1 + \frac{q_4 q_5}{m_h + q_4} + \frac{\beta q_1 q_3}{m_h + q_2 + q_3})} \\ \bar{S}_h = & \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{m_h + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}} \end{aligned}$$

$$\bar{D}_h = \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{m_h + q_2 + q_3}$$

$$\bar{R}_h = \frac{q_5 \bar{I}_h}{m_h + q_4}$$

$$\bar{S}_v = \frac{L}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v}$$

$$\bar{I}_v = \frac{\delta'_v \bar{I}_h L}{\delta'_v \bar{I}_h \mu_v + \mu_v^2}$$

จะได้จาโคเป็นเมทริกซ์ดังนี้

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) & \delta'_h \bar{I}_v & q_2 & 0 & 0 & \delta'_h \bar{S}_h \\ (1-\beta)q_1 & -(m_h + \delta'_h \bar{I}_v) & q_3 & q_4 & 0 & -\delta'_h \bar{S}_h \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) & 0 & 0 \\ -\delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & -(\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v) & 0 \\ \delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & \delta'_v \bar{I}_h & -\mu_v \end{pmatrix}_{(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)}$$

$$J_{E_2} - \lambda I_6 = \begin{pmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) - \lambda & \delta'_h \bar{I}_v & q_2 & 0 & 0 & \delta'_h \bar{S}_h \\ (1-\beta)q_1 & -(m_h + \delta'_h \bar{I}_v) - \lambda & q_3 & q_4 & 0 & -\delta'_h \bar{S}_h \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) - \lambda & 0 & 0 \\ -\delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & -(\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v) - \lambda & 0 \\ \delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & \delta'_v \bar{I}_h & -\mu_v - \lambda \end{pmatrix}_{(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)}$$

$$\det(J_{E_2} - \lambda I_6) = \begin{vmatrix} -(m_h + q_1 + q_5) - \lambda & \delta'_h \bar{I}_v & q_2 & 0 & 0 & \delta'_h \bar{S}_h \\ (1-\beta)q_1 & -(m_h + \delta'_h \bar{I}_v) - \lambda & q_3 & q_4 & 0 & -\delta'_h \bar{S}_h \\ \beta q_1 & 0 & -(m_h + q_2 + q_3) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(m_h + q_4) - \lambda & 0 & 0 \\ -\delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & -(\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v) - \lambda & 0 \\ \delta'_v \bar{S}_v & 0 & 0 & 0 & \delta'_v \bar{I}_h & -\mu_v - \lambda \end{vmatrix}_{(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_v, \bar{I}_v)}$$

$$\begin{aligned} & (-\lambda - m_h - q_2 - q_3)(-\lambda - m_h - q_4) \bar{S}_v \delta'_v (-\lambda \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_h - m_h \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{S}_h) + \\ & (-\lambda - \mu_v - \delta'_v \bar{I}_h)((-\lambda - \mu_v)((-\lambda - m_h - q_2 - q_3)q_4 q_5 \delta'_h \bar{I}_v + (-\lambda - m_h - q_4) \\ & (\beta q_1 (\lambda q_2 + m_h q_2 + q_2 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \bar{I}_v) + (-\lambda - m_h - q_2 - q_3)(-\lambda - m_h - q_4) \\ & (-\lambda - m_h - q_1 - q_5)(-\lambda - m_h - \delta'_h \bar{I}_v))) - (-\lambda - m_h - q_2 - q_3)(-\lambda - m_h - q_4) \\ & \delta'_v (\lambda \delta'_h \bar{S}_h + m_h \delta'_h \bar{S}_h) \bar{S}_v = 0 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
&+(m_h^4 + m_h^3 q_1 + m_h^2 q_2 + m_h^2 q_1 q_2 + m_h^3 q_3 + m_h^2 q_1 q_3 + m_h^3 q_4 + m_h^2 q_1 q_4 + m_h^2 q_2 q_4 + m_h q_1 q_2 q_4 + m_h^2 q_3 q_4 + m_h q_1 q_3 q_4 + m_h^3 q_5 + m_h^2 q_2 q_5 + m_h^2 q_3 q_5 \\
&+ m_h^3 q_4 q_5 + m_h q_2 q_4 q_5 + m_h q_3 q_4 q_5 + 8m_h^3 \mu_v + 6m_h^2 q_1 \mu_v + 6m_h^2 q_2 \mu_v + 4m_h q_1 q_2 \mu_v + 6m_h^2 q_3 \mu_v + 4m_h q_1 q_3 \mu_v + 6m_h^2 q_4 \mu_v + 4m_h q_1 q_4 \mu_v \\
&+ 4m_h q_2 q_4 \mu_v + 2q_1 q_2 q_4 \mu_v + 4m_h q_3 q_4 \mu_v + 2q_1 q_3 q_4 \mu_v + 6m_h^2 q_5 \mu_v + 4m_h q_2 q_5 \mu_v + 4m_h q_3 q_5 \mu_v + 4m_h q_4 q_5 \mu_v + 2q_2 q_4 q_5 \mu_v + 2q_3 q_4 q_5 \mu_v \\
&+ 6m_h^2 \mu_v^2 + 3m_h q_1 \mu_v^2 + 3m_h q_2 \mu_v^2 + q_1 q_2 \mu_v^2 + 3m_h q_3 \mu_v^2 + q_1 q_3 \mu_v^2 + 3m_h q_4 \mu_v^2 + q_1 q_4 \mu_v^2 + q_2 q_4 \mu_v^2 + q_3 q_4 \mu_v^2 + 3m_h q_5 \mu_v^2 + q_2 q_5 \mu_v^2 + q_3 q_5 \mu_v^2 \\
&+ q_4 q_5 \mu_v^2 + 4m_h^3 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_1 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_2 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_1 q_2 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_3 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_1 q_3 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_1 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_2 q_4 \delta'_v \bar{I}_h \\
&+ q_1 q_2 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_1 q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_2 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_3 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h \\
&+ 6m_h^2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \\
&+ q_3 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_2 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_3 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^3 \delta'_h \bar{I}_v + \beta m_h^2 q_1 \delta'_h \bar{I}_v + m_h^2 q_2 \delta'_h \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_2 \delta'_h \bar{I}_v + m_h^2 q_3 \delta'_h \bar{I}_v \\
&+ \beta m_h q_1 q_3 \delta'_h \bar{I}_v + m_h^2 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + m_h q_2 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_2 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + m_h q_3 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_3 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + m_h^2 q_5 \delta'_h \bar{I}_v + m_h q_2 q_5 \delta'_h \bar{I}_v \\
&+ m_h q_3 q_5 \delta'_h \bar{I}_v + 6m_h^2 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 4\beta m_h q_1 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_2 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2\beta q_1 q_2 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_3 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2\beta q_1 q_3 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_4 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v \\
&+ 2\beta q_1 q_4 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_2 q_4 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_3 q_4 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_5 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_2 q_5 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_3 q_5 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 3m_h \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v \\
&+ q_3 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + q_4 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + q_5 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + 3m_h^2 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2\beta m_h q_1 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_2 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_2 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_3 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
&+ \beta q_1 q_3 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_4 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_4 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_5 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 q_5 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 q_5 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
&+ 3m_h \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 3m_h^2 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + 2m_h q_2 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v \\
&+ 2m_h q_3 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + 2m_h q_4 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + 3m_h \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_2 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_3 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v \\
&+ q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\
&- (4m_h q_2 \beta q_1 \mu_v - 2q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v - 2m_h q_2 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_h - q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_h - q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h - m_h q_2 \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v - m_h q_3 \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v - q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v - q_3 q_4 \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v \\
&- 2q_2 \beta q_1 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v - 2q_3 \beta q_1 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v - q_2 \beta q_1 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v - q_3 \beta q_1 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v - q_2 \beta q_1 \mu_v^2 - m_h^2 q_2 \beta q_1 - m_h q_2 q_4 \beta q_1) \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(4m_h^3 + 3m_h^2 q_1 + 3m_h^2 q_2 + 2m_h q_1 q_2 + 3m_h^2 q_3 + 2m_h q_1 q_3 + 3m_h^2 q_4 + 2m_h q_1 q_4 + 2m_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + 2m_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 + 3m_h^2 q_5 + 2m_h q_2 q_5 \\
&+ 2m_h q_3 q_5 + 2m_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 - 2m_h q_2 \beta q_1 - q_2 q_4 \beta q_1 + 12m_h^2 \mu_v + 6m_h q_1 \mu_v + 6m_h q_2 \mu_v + 2q_1 q_2 \mu_v + 6m_h q_3 \mu_v + 2q_1 q_3 \mu_v + 6m_h q_4 \mu_v \\
&+ 2q_1 q_4 \mu_v + 2q_2 q_4 \mu_v + 2q_3 q_4 \mu_v + 6m_h q_5 \mu_v + 2q_2 q_5 \mu_v + 2q_3 q_5 \mu_v + 2q_4 q_5 \mu_v - 2q_2 \beta q_1 \mu_v + 4m_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_4 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 \\
&+ 6m_h^2 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_1 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_2 \delta'_v \bar{I}_h + q_1 q_2 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_3 \delta'_v \bar{I}_h + q_1 q_3 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_1 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 q_5 \delta'_v \bar{I}_h \\
&+ q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h - q_2 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_h + 4m_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h^2 \delta'_h \bar{I}_v + 2\beta m_h q_1 \delta'_h \bar{I}_v + 2m_h q_2 \delta'_h \bar{I}_v \\
&+ \beta q_1 q_2 \delta'_h \bar{I}_v + 2m_h q_3 \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_3 \delta'_h \bar{I}_v + 2m_h q_4 \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + q_2 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 q_4 \delta'_h \bar{I}_v + 2m_h q_5 \delta'_h \bar{I}_v + q_2 q_5 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 q_5 \delta'_h \bar{I}_v - q_2 \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v - q_3 \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v \\
&+ 6m_h \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2\beta q_1 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_2 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_3 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_4 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + 2q_5 \delta'_h \mu_v \bar{I}_v + \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + 3m_h \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
&+ q_4 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 3m_h \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_2 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_3 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_4 \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \lambda^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(6m_h^2 + 3m_h q_1 + 3m_h q_2 + q_1 q_2 + 3m_h q_3 + q_1 q_3 + 3m_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 3m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
&- q_2 \beta q_1 + 8m_h \mu_v + 2q_1 \mu_v + 2q_2 \mu_v + 2q_3 \mu_v + 2q_4 \mu_v + 2q_5 \mu_v + \mu_v^2 + 4m_h \delta'_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \bar{I}_h \\
&+ q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_5 \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_h \bar{I}_v + 2\delta'_h \mu_v \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
&+ \delta'_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \lambda^4
\end{aligned}$$

$$+(4m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + 2\mu_v + \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_h \bar{I}_v) \lambda^5 + \lambda^6 = 0$$

$$\begin{aligned}
&(m_h^4 \mu_v^2 + m_h^3 q_1 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_2 \mu_v^2 + m_h^3 q_3 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_3 \mu_v^2 + m_h^3 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 q_4 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h q_1 q_2 q_4 \mu_v^2 + m_h^3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 \\
&+ m_h^3 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_3 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h q_3 q_4 q_5 \mu_v^2 + m_h^2 q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_1 q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \\
&+ m_h^3 q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_1 q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_1 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h q_1 q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h q_1 q_3 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \\
&+ m_h^3 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_2 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_3 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h q_2 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h q_3 q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta m_h^2 q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v \\
&+ m_h^2 q_2 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_2 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h^2 q_3 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_3 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h^2 q_4 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_4 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h^2 q_2 q_4 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta q_1 q_2 q_4 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v \\
&+ m_h q_3 q_4 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta q_1 q_3 q_4 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h^2 q_5 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h q_2 q_5 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h q_3 q_5 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h^2 \delta'_h \mu_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta m_h^2 q_1 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h^2 q_2 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
&+ \beta m_h q_1 q_2 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h^2 q_3 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_3 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h^2 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
&+ \beta q_1 q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h^2 q_5 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h q_2 q_5 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + m_h q_3 q_5 \delta'_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
&+ m_h^2 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + m_h^2 q_2 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + m_h^2 q_3 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + m_h^2 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + m_h q_2 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + m_h q_3 q_4 \delta'_h \delta'_v \mu_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\
&- (m_h^2 q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h q_3 \beta q_1 \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + q_3 q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v \\
&+ m_h q_2 \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h q_3 \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + m_h q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v + q_3 q_4 \beta q_1 \delta'_h \mu_v^2 \bar{I}_v)
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 a_4 = & (m_h^4 + m_h^3 q_1 + m_h^3 q_2 + m_h^2 q_1 q_2 + m_h^2 q_3 + m_h^2 q_1 q_3 + m_h^2 q_4 + m_h^2 q_1 q_4 + m_h^2 q_2 q_4 + m_h q_1 q_2 q_4 + m_h^2 q_3 q_4 + m_h q_1 q_3 q_4 + m_h^3 q_5 + m_h^2 q_2 q_5 + m_h^2 q_3 q_5 \\
 & + m_h^2 q_4 q_5 + m_h q_1 q_4 q_5 + m_h q_2 q_4 q_5 + 8m_h^3 \mu_v + 6m_h^2 q_1 \mu_v + 6m_h^2 q_2 \mu_v + 4m_h q_1 q_2 \mu_v + 6m_h^2 q_3 \mu_v + 4m_h q_1 q_3 \mu_v + 6m_h^2 q_4 \mu_v + 4m_h q_1 q_4 \mu_v \\
 & + 4m_h q_2 q_4 \mu_v + 2q_1 q_2 q_4 \mu_v + 4m_h q_3 q_4 \mu_v + 2q_1 q_3 q_4 \mu_v + 6m_h^2 q_5 \mu_v + 4m_h q_2 q_5 \mu_v + 4m_h q_3 q_5 \mu_v + 4m_h q_4 q_5 \mu_v + 2q_2 q_4 q_5 \mu_v + 2q_3 q_4 q_5 \mu_v \\
 & + 6m_h^2 \mu_v^2 + 3m_h q_1 \mu_v^2 + 3m_h q_2 \mu_v^2 + q_1 q_2 \mu_v^2 + 3m_h q_3 \mu_v^2 + q_1 q_3 \mu_v^2 + 3m_h q_4 \mu_v^2 + q_1 q_4 \mu_v^2 + q_2 q_4 \mu_v^2 + q_3 q_4 \mu_v^2 + 3m_h q_5 \mu_v^2 + q_2 q_5 \mu_v^2 + q_3 q_5 \mu_v^2 \\
 & + q_4 q_5 \mu_v^2 + 4m_h^2 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_1 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_2 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_1 q_2 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_3 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_1 q_3 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_1 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_2 q_4 \delta'_v \bar{I}_h \\
 & + q_1 q_2 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_1 q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h^2 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_2 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_3 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + 2m_h q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h \\
 & + 6m_h^2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \\
 & + q_3 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_2 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_3 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_4 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h^2 \delta'_v \bar{I}_v + \beta m_h^2 q_1 \delta'_v \bar{I}_v + m_h^2 q_2 \delta'_v \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_2 \delta'_v \bar{I}_v + m_h^2 q_3 \delta'_v \bar{I}_v \\
 & + \beta m_h q_1 q_3 \delta'_v \bar{I}_v + m_h^2 q_4 \delta'_v \bar{I}_v + \beta m_h q_1 q_4 \delta'_v \bar{I}_v + m_h q_1 q_2 \delta'_v \bar{I}_v + \beta q_1 q_2 q_4 \delta'_v \bar{I}_v + m_h q_1 q_3 \delta'_v \bar{I}_v + \beta q_1 q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_v + m_h^2 q_5 \delta'_v \bar{I}_v + m_h q_2 q_5 \delta'_v \bar{I}_v \\
 & + m_h q_3 q_5 \delta'_v \bar{I}_v + 6m_h^2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 4\beta m_h q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2\beta q_1 q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2\beta q_1 q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v \\
 & + 2\beta q_1 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_2 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_3 q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 4m_h q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_2 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_3 q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 3m_h \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + q_2 \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v \\
 & + q_3 \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + q_4 \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + q_5 \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + 3m_h^2 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2\beta m_h q_1 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_2 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_2 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_3 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
 & + \beta q_1 q_3 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_4 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 q_4 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_1 q_2 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 q_4 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 2m_h q_5 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 q_5 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 q_5 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
 & + 3m_h \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 3m_h^2 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + 2m_h q_1 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v \\
 & + 2m_h q_2 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + 2m_h q_3 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_2 q_4 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_3 q_4 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + 3m_h \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_2 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_3 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_4 \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{S}_h \bar{S}_v \\
 & - (4m_h q_1 \beta q_1 \mu_v + 2q_2 q_4 \beta q_1 \mu_v + 2m_h q_2 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + m_h q_2 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_v + m_h q_3 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_v + q_2 q_4 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_v + q_3 q_4 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_v \\
 & + 2q_2 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_3 \beta q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + q_2 \beta q_1 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 \beta q_1 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 \beta q_1 \mu_v^2 + m_h^2 q_2 \beta q_1 + m_h q_2 q_4 \beta q_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 = & (4m_h^4 + 3m_h^3 q_1 + 3m_h^3 q_2 + 2m_h q_1 q_2 + 3m_h^2 q_3 + 2m_h q_1 q_3 + 3m_h^2 q_4 + 2m_h q_1 q_4 + 2m_h q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 + 2m_h q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 + 3m_h^2 q_5 + 2m_h q_2 q_5 \\
 & + 2m_h q_3 q_5 + 2m_h q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + 12m_h^3 \mu_v + 6m_h^2 q_1 \mu_v + 6m_h^2 q_2 \mu_v + 2q_1 q_2 \mu_v + 6m_h^2 q_3 \mu_v + 2q_1 q_3 \mu_v + 6m_h^2 q_4 \mu_v + 2q_1 q_4 \mu_v \\
 & + 2q_2 q_4 \mu_v + 6m_h^2 q_5 \mu_v + 2q_2 q_5 \mu_v + 2q_3 q_5 \mu_v + 2q_4 q_5 \mu_v + 4m_h \mu_v^2 + q_1 \mu_v^2 + q_2 \mu_v^2 + q_3 \mu_v^2 + q_4 \mu_v^2 + q_5 \mu_v^2 + 6m_h^2 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_1 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_2 \delta'_v \bar{I}_h \\
 & + q_1 q_2 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_3 \delta'_v \bar{I}_h + q_1 q_3 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_4 \delta'_v \bar{I}_h + q_1 q_4 \delta'_v \bar{I}_h + 3m_h q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 q_5 \delta'_v \bar{I}_h + q_4 q_5 \delta'_v \bar{I}_h \\
 & + 4m_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h^2 \delta'_v \bar{I}_v + 2\beta m_h q_1 \delta'_v \bar{I}_v + 2m_h q_2 \delta'_v \bar{I}_v + \beta q_1 q_2 \delta'_v \bar{I}_v + 2m_h q_3 \delta'_v \bar{I}_v \\
 & + \beta q_1 q_3 \delta'_v \bar{I}_v + 2m_h q_4 \delta'_v \bar{I}_v + \beta q_1 q_4 \delta'_v \bar{I}_v + q_2 q_4 \delta'_v \bar{I}_v + q_3 q_4 \delta'_v \bar{I}_v + 2m_h q_5 \delta'_v \bar{I}_v + q_2 q_5 \delta'_v \bar{I}_v + q_3 q_5 \delta'_v \bar{I}_v + 6m_h \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2\beta q_1 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_2 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v \\
 & + 2q_3 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_4 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + 2q_5 \delta'_v \mu_v \bar{I}_v + \delta'_v \mu_v^2 \bar{I}_v + 3m_h \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v \\
 & + \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{I}_h \bar{I}_v + 3m_h \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_2 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_3 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + q_4 \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v + \delta'_v \delta'_v \mu_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\
 & - (2m_h q_2 \beta q_1 + q_2 q_4 \beta q_1 + q_2 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_v + q_3 \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_v + 2q_2 \beta q_1 \mu_v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 = & +(6m_h^2 + 3m_h q_1 + 3m_h q_2 + q_1 q_2 + 3m_h q_3 + q_1 q_3 + 3m_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 3m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\
 & + 8m_h \mu_v + 2q_1 \mu_v + 2q_2 \mu_v + 2q_3 \mu_v + 2q_4 \mu_v + 2q_5 \mu_v + \mu_v^2 + 4m_h \delta'_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \bar{I}_h + q_4 \delta'_v \bar{I}_h \\
 & + q_5 \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h \delta'_v \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_v \bar{I}_v + q_2 \delta'_v \bar{I}_v + q_3 \delta'_v \bar{I}_v + q_4 \delta'_v \bar{I}_v + q_5 \delta'_v \bar{I}_v + 2\delta'_v \mu_v \bar{I}_v + \delta'_v \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \delta'_v \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\
 & - (q_2 \beta q_1) \lambda^4
 \end{aligned}$$

$$a_1 = 4m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + 2\mu_v + \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_v \bar{I}_v$$

จากสมการลักษณะเฉพาะจะอยู่ในรูป  $\lambda^6 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 = 0$













พิจารณา  $a_2 > 0$  จาก

$$\begin{aligned} a_2 = & +(6m_h^2 + 3m_h q_1 + 3m_h q_2 + q_1 q_2 + 3m_h q_3 + q_1 q_3 + 3m_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 3m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\ & + 8m_h \mu_v + 2q_1 \mu_v + 2q_2 \mu_v + 2q_3 \mu_v + 2q_4 \mu_v + 2q_5 \mu_v + \mu_v^2 + 4m_h \delta'_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \bar{I}_h + q_4 \delta'_v \bar{I}_h \\ & + q_5 \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_h \bar{I}_v + 2\delta'_h \mu_v \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\ & - (q_2 \beta q) \lambda^4 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (6m_h^2 + 3m_h q_1 + 3m_h q_2 + q_1 q_2 + 3m_h q_3 + q_1 q_3 + 3m_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 3m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\ & + 8m_h \mu_v + 2q_1 \mu_v + 2q_2 \mu_v + 2q_3 \mu_v + 2q_4 \mu_v + 2q_5 \mu_v + \mu_v^2 + 4m_h \delta'_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \bar{I}_h + q_4 \delta'_v \bar{I}_h \\ & + q_5 \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_h \bar{I}_v + 2\delta'_h \mu_v \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\ & - (q_2 \beta q) \lambda^4 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (6m_h^2 + 3m_h q_1 + 3m_h q_2 + q_1 q_2 + 3m_h q_3 + q_1 q_3 + 3m_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 3m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\ & + 8m_h \mu_v + 2q_1 \mu_v + 2q_2 \mu_v + 2q_3 \mu_v + 2q_4 \mu_v + 2q_5 \mu_v + \mu_v^2 + 4m_h \delta'_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \bar{I}_h + q_4 \delta'_v \bar{I}_h \\ & + q_5 \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_h \bar{I}_v + 2\delta'_h \mu_v \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\ & > (q_2 \beta q) \lambda^4 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $a_2 > 0$  เมื่อ

$$\begin{aligned} & (6m_h^2 + 3m_h q_1 + 3m_h q_2 + q_1 q_2 + 3m_h q_3 + q_1 q_3 + 3m_h q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 3m_h q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 \\ & + 8m_h \mu_v + 2q_1 \mu_v + 2q_2 \mu_v + 2q_3 \mu_v + 2q_4 \mu_v + 2q_5 \mu_v + \mu_v^2 + 4m_h \delta'_v \bar{I}_h + q_1 \delta'_v \bar{I}_h + q_2 \delta'_v \bar{I}_h + q_3 \delta'_v \bar{I}_h + q_4 \delta'_v \bar{I}_h \\ & + q_5 \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_v \mu_v \bar{I}_h + 3m_h \delta'_h \bar{I}_v + \beta q_1 \delta'_h \bar{I}_v + q_2 \delta'_h \bar{I}_v + q_3 \delta'_h \bar{I}_v + q_4 \delta'_h \bar{I}_v + q_5 \delta'_h \bar{I}_v + 2\delta'_h \mu_v \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{I}_h \bar{I}_v + \delta'_h \delta'_v \bar{S}_h \bar{S}_v) \\ & > (q_2 \beta q) \lambda^4 \end{aligned}$$

พิจารณา  $a_1 > 0$  จาก

$$a_1 = 4m_h + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + 2\mu_v + \delta'_v \bar{I}_h + \delta'_h \bar{I}_v$$

จะได้ว่าทุกพจน์ใน  $a_1$  เป็นบวกทั้งหมดเลยส่งผลให้  $a_1$  มีค่าเป็นบวกเสมอ

ดังนั้นจากการพิจารณาค่า  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  พบว่าทุกค่ามีค่ามากกว่าศูนย์

จาก The Routh-Hurwitz Criteria จะได้ว่า

$$H_1 = (a_1)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$H_5 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 \end{pmatrix}$$

$$H_6 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\det H_1 = a_1$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3$$

$$\det H_3 = a_5 a_1 + a_1 a_2 a_3 - a_4 a_1^2 - a_3^2$$

$$\det H_4 = a_5 a_3 a_2 + 2a_5 a_4 a_1 - a_6 a_3 a_1 + a_4 a_3 a_2 a_1 - a_5 a_2^2 a_1 - a_4^2 a_1^2 + a_6 a_2 a_1^2 - a_5^2 - a_4 a_3^2$$

$$\det H_5 = a_6 a_3^3 + a_5^2 a_3 a_2 + 2a_5^2 a_4 a_1 - 3a_6 a_5 a_3 a_1 + a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 - a_6 a_3^2 a_2 a_1 - a_5^2 a_2^2 a_1 - a_5 a_4^2 a_1^2 + a_6 a_4 a_3 a_1^2 + 2a_6 a_5 a_2 a_1^2 - a_6^2 a_1^3 - a_5^3 - a_5 a_4 a_3^2$$

$$\det H_6 = a_6^2 a_3^3 + a_6 a_5^2 a_3 a_2 + 2a_6 a_5^2 a_4 a_1 - 3a_6^2 a_5 a_3 a_1 + a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 - a_6^2 a_3^2 a_2 a_1 - a_6 a_5^2 a_2^2 a_1 - a_6 a_5 a_4^2 a_1^2 + a_6^2 a_4 a_3 a_1^2 + 2a_6^2 a_5 a_2 a_1^2 - a_6^3 a_1^3 - a_6 a_5^3 - a_6 a_5 a_4 a_3^2$$

จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อดีเทอร์มิแนนต์ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก

ดังนั้น จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$\det H_1 = a_1 > 0$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$$

$$\det H_3 = a_5 a_1 + a_1 a_2 a_3 - a_4 a_1^2 - a_3^2 > 0$$

$$\det H_4 = a_5 a_3 a_2 + 2a_5 a_4 a_1 - a_6 a_3 a_1 + a_4 a_3 a_2 a_1 - a_5 a_2^2 a_1 - a_4^2 a_1^2 + a_6 a_2 a_1^2 - a_5^2 - a_4 a_3^2 > 0$$

$$\det H_5 = a_6 a_3^3 + a_5^2 a_3 a_2 + 2a_5^2 a_4 a_1 - 3a_6 a_5 a_3 a_1 + a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 - a_6 a_3^2 a_2 a_1 - a_5^2 a_2^2 a_1 - a_5 a_4^2 a_1^2 + a_6 a_4 a_3 a_1^2 + 2a_6 a_5 a_2 a_1^2 - a_6^2 a_1^3 - a_5^3 - a_5 a_4 a_3^2 > 0$$

$$\det H_6 = a_6^2 a_3^3 + a_6 a_5^2 a_3 a_2 + 2a_6 a_5^2 a_4 a_1 - 3a_6^2 a_5 a_3 a_1 + a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 - a_6^2 a_3^2 a_2 a_1 - a_6 a_5^2 a_2^2 a_1 - a_6 a_5 a_4^2 a_1^2 + a_6^2 a_4 a_3 a_1^2 + 2a_6^2 a_5 a_2 a_1^2 - a_6^3 a_1^3 - a_6 a_5^3 - a_6 a_5 a_4 a_3^2 > 0$$

ต่อไปจะพิจารณาตัวอย่างข้อมูลดังนี้

กำหนดให้ จำนวนประชากรทั้งหมด 1,000 คน นั่นคือ  $N_h = 1,000$  คน , ประชากรหนึ่งคนมีอายุเฉลี่ย 65-70 ปี จำนวนประชากรคงที่ทำให้อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการเสียชีวิตของประชากร ดังนั้น  $\theta = \lambda_h = \frac{1}{365 \times 70}$  ต่อคน , ระยะเวลาของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้

ที่เสี่ยงเท่ากับ 10 วัน นั่นคือ  $q_1 = \frac{1}{10}$  ต่อคน , ระยะเวลาที่เชื้อฝังตัวอยู่ในผู้ป่วย 10 วัน นั่นคือ  $q_2 = \frac{1}{10}$

ต่อคน , ระยะเวลาที่ใช้ในการรักษาอาการป่วยเท่ากับระยะเวลาของการฟื้นจากการติดเชื้อเป็นเวลา 20

วัน นั่นคือ  $q_3 = q_5 = \frac{1}{20}$  ต่อคน , จำนวนยุงเริ่มต้น 100 ตัว นั่นคือ  $L = 100$  ตัว , ยุงหนึ่งตัวมีอายุเฉลี่ย

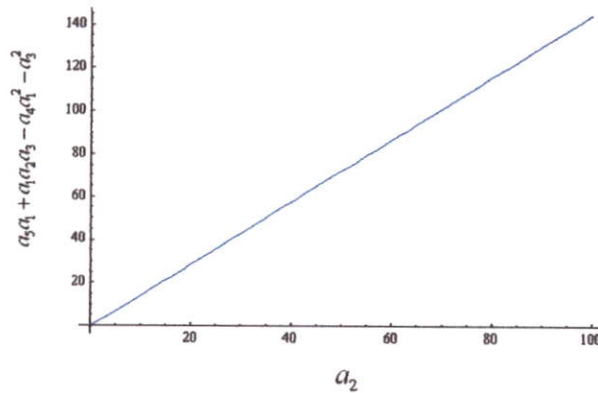
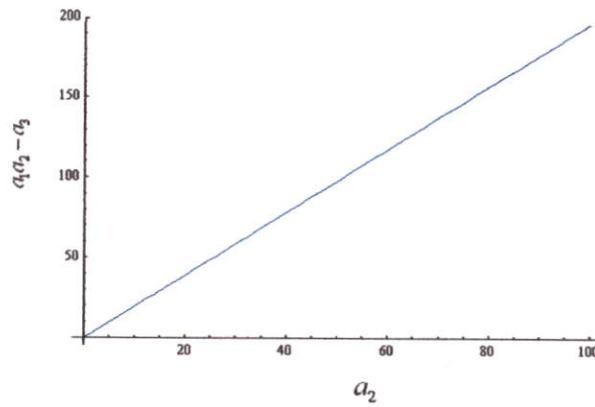
35 วัน นั่นคือ  $\mu_v = \frac{1}{35}$  ต่อตัว , อัตราการอพยพเข้าของประชากรเท่ากับ 0.054 นั่นคือ  $m_i = 0.054$  ต่อ

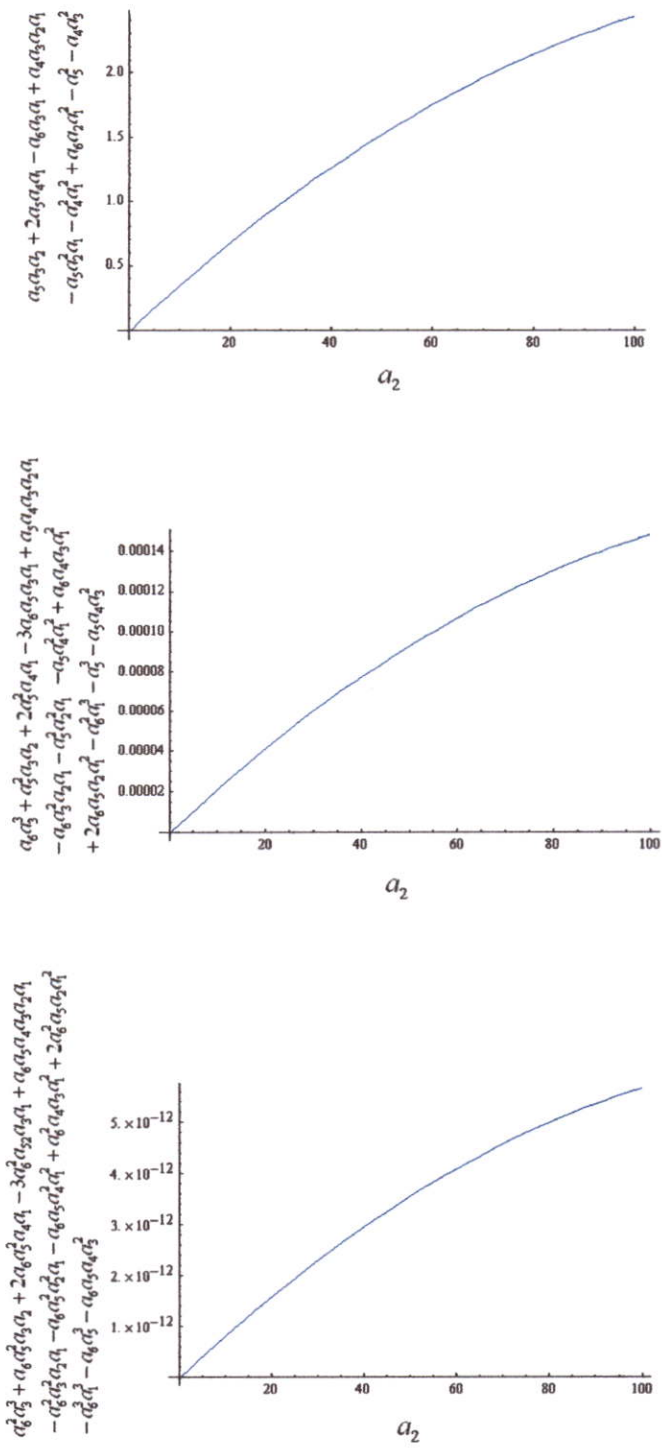
คน , อัตราการอพยพออกของประชากรเท่ากับ 0.055 นั่นคือ  $m_o = 0.055$  ต่อคน , ร้อยละผู้ติดเชื้อของ

ประชากรเท่ากับ 0.75 นั่นคือ  $\beta = 0.75$  เปอร์เซนต์ , อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากยุงไปประชากรเท่ากับ

0.001 นั่นคือ  $\delta'_h = 0.001$  ต่อคน , อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากประชากรไปยังเท่ากับ 0.001 นั่นคือ  $\delta'_v = 0.001$  ต่อตัว , ระยะเวลาที่ผู้ฟื้นจากการติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้งเท่ากับ 15 วัน นั่นคือ  $q_4 = \frac{1}{15}$  ต่อคน

พิจารณาเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria ดังนั้นจากสมการที่เงื่อนไขใช้ค่าพารามิเตอร์ข้างต้นสามารถแสดงกราฟของสมการที่ได้ดังนี้





รูปที่ 4.40 กราฟแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาคเรื้อรังซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria

จากกราฟข้างต้นแสดงให้เห็นว่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ **Hurwitz** ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0 > 1$

จากการสร้างแบบจำลองของโรคมาลาเรียข้างต้นพบว่า เราสามารถหาจุดสมดุลได้ 2 จุด คือ จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมียุทธศาสตร์ภาพเมื่อ  $R_0 < 1$  จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0 > 1$  นั้นหมายความว่าในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียควรกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กล่าวมาข้างต้น

#### ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ตารางที่ 4.5 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะไร้โรค โดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	$\lambda_h$	0.0000391	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จากยุงไปสู่ประชากร	$\delta'_h$	0.001	คน <sup>-1</sup> /ยุง <sup>-1</sup>
อัตราการเกิดของประชากร	$\theta$	0.0000391	คน <sup>-1</sup>
จำนวนประชากรทั้งหมด	$N_h$	1,000	คน
ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	$\beta$	0.75	เปอร์เซ็นต์
อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_1$	0.10	คน <sup>-1</sup>

ข้อความ (ต่อ)	สัญลักษณ์ (ต่อ)	ค่าพารามิเตอร์ (ต่อ)	หน่วย (ต่อ)
อัตราที่เชื่อชนิกพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อ ฝงตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื่ออีกครั้ง	$q_2$	0.0005479	คน <sup>-1</sup>
อัตราผู้ที่มีเชื้อฝงตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการ ติดเชื่อ	$q_3$	0.0333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการตายของยุง	$\mu_v$	0.0714	ตัว <sup>-1</sup>
จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น	$L$	100	ตัว
อัตราผู้ที่พ้นจากการติดเชื่อชนิกพลาสโมเดียม ไวแวกซ์ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อ	$q_4$	0.0001826	คน <sup>-1</sup>
อัตราการฟื้น ไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื่อชนิกพลาสโม เดียมไวแวกซ์	$q_5$	0.333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพเข้าของประชากร	$m_i$	0.054	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพออกของประชากร	$m_o$	0.055	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื่อชนิกพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากประชากรไปสู่ยุง	$\delta'_v$	0.001	คน <sup>-1</sup> /ยุง <sup>-1</sup>

ตารางที่ 4.6 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะระบาดเรื้อรัง โดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	$\lambda_h$	0.0000391	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จากบุงไปสู่ประชากร	$\delta'_h$	0.001	คน <sup>-1</sup> /บุง <sup>-1</sup>
อัตราการเกิดของประชากร	$\theta$	0.0000391	คน <sup>-1</sup>
จำนวนประชากรทั้งหมด	$N_h$	1,000	คน
ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	$\beta$	0.75	เปอร์เซ็นต์
อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_1$	0.10	คน <sup>-1</sup>
อัตราที่เชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อ ฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	$q_2$	0.0005479	คน <sup>-1</sup>
อัตราผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_3$	0.0333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการตายของบุง	$\mu_v$	0.0714	ตัว <sup>-1</sup>
จำนวนของบุง ณ เวลาเริ่มต้น	$L$	300	ตัว
อัตราผู้ที่พ้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียม ไวเวกซ์ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_4$	0.0001826	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพเข้าของประชากร	$m_i$	0.054	คน <sup>-1</sup>

ข้อความ (ต่อ)	สัญลักษณ์ (ต่อ)	ค่าพารามิเตอร์ (ต่อ)	หน่วย (ต่อ)
อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสติกโมเดียมไวแวกซ์	$q_5$	0.333333	คน <sup>-1</sup>
อัตราการอพยพออกของประชากร	$m_o$	0.055	คน <sup>-1</sup>
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสติกโมเดียมไวแวกซ์จากประชากรไปสู่ขุง	$\delta'_v$	0.001	คน <sup>-1</sup> /ขุง <sup>-1</sup>

### การจำลองเชิงตัวเลข

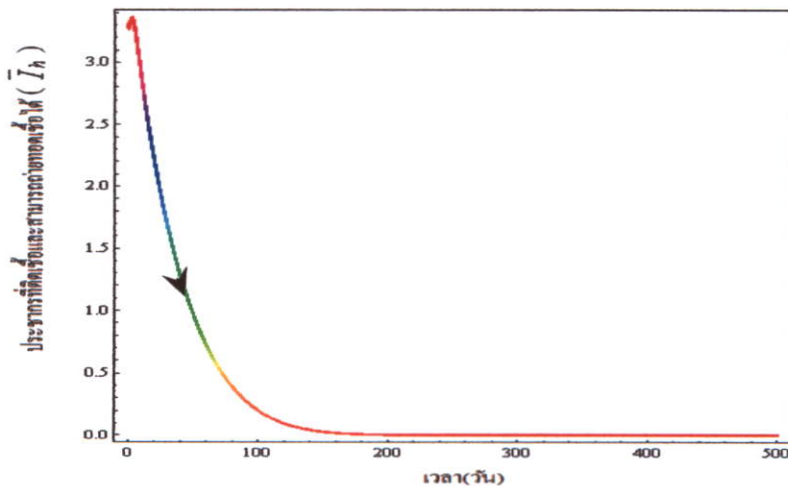
ในกรณีสภาวะไร้โรค ( $R_0 < 1$ ) โดย  $R_0 = \frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2}$

ในกรณีสภาวะไร้โรค จากตารางที่ 4.5 ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

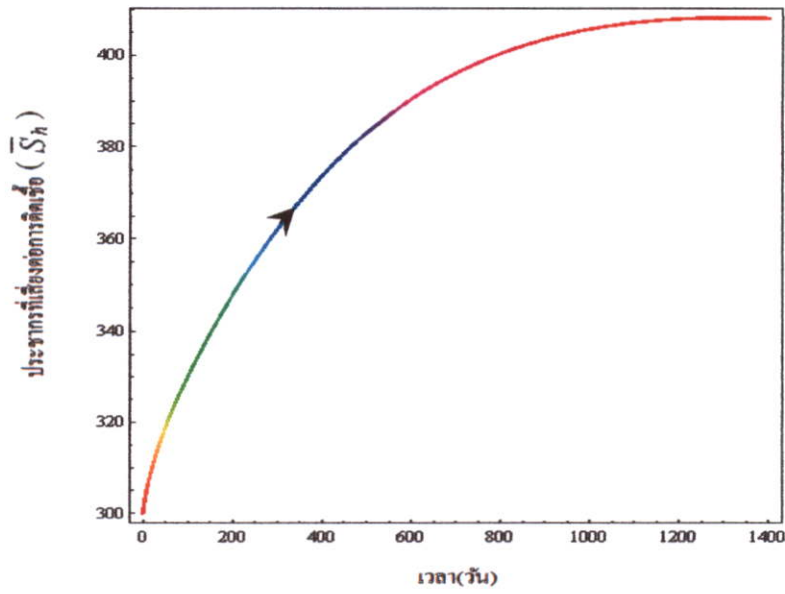
$$\lambda_h = 0.0000391, \mu_v = 0.0714, q_1 = 0.10, q_2 = 0.0005479, q_3 = 0.0333333,$$

$$m_o = 0.055, m_i = 0.054, q_4 = 0.0001826, q_5 = 0.333333, \delta'_v = 0.001, \delta'_h = 0.001,$$

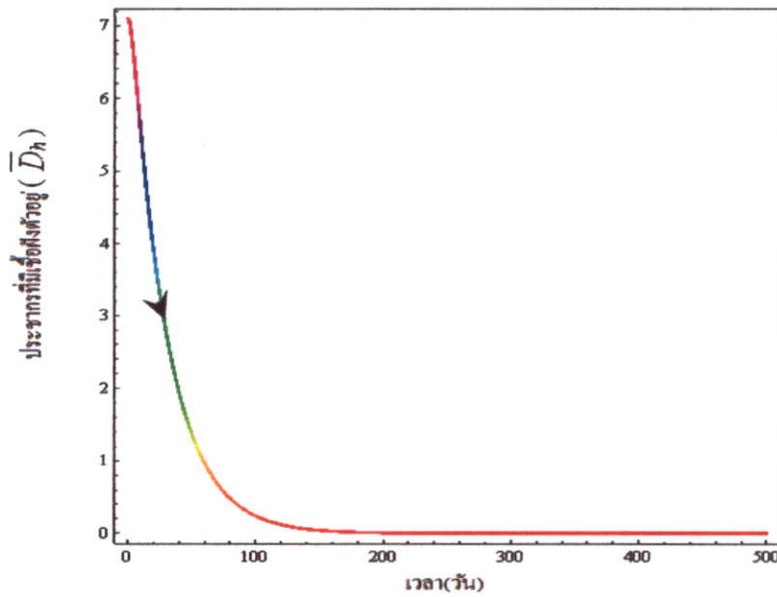
$$\beta = 0.75, L = 100, R_0 = 0.172636$$



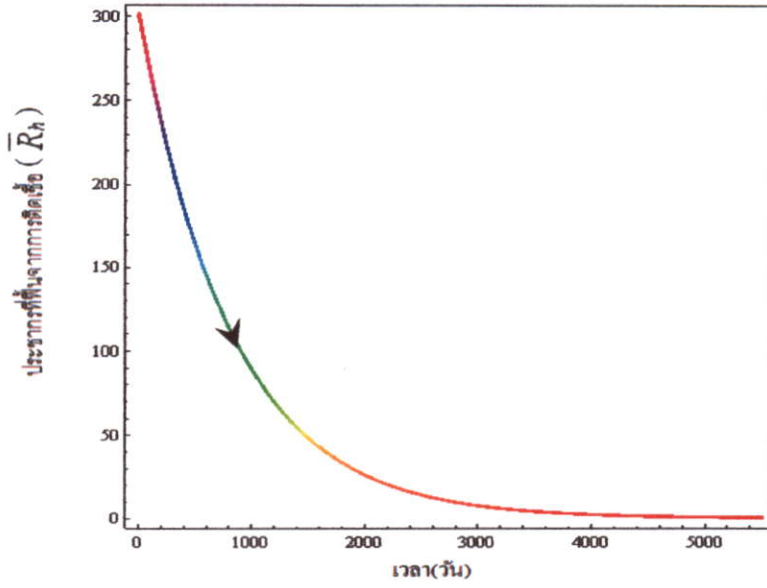
รูปที่ 4.41 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) เทียบกับเวลา



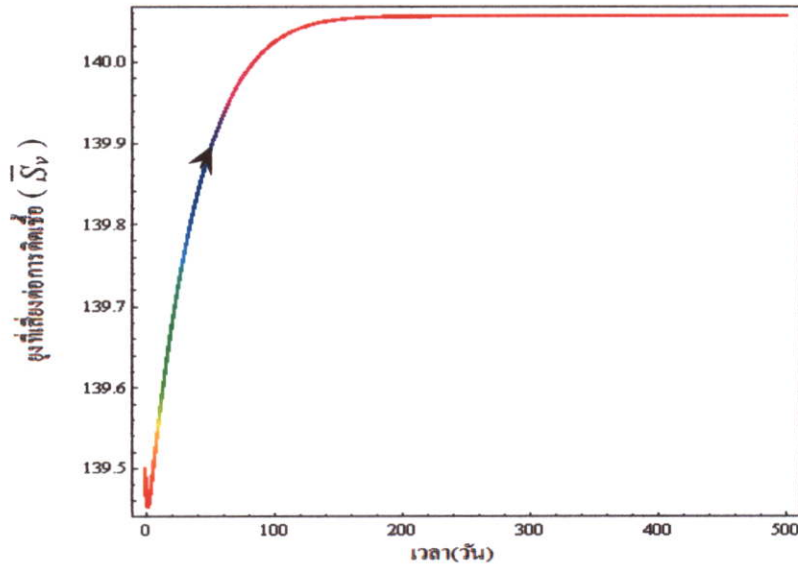
รูปที่ 4.42 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) เทียบกับเวลา



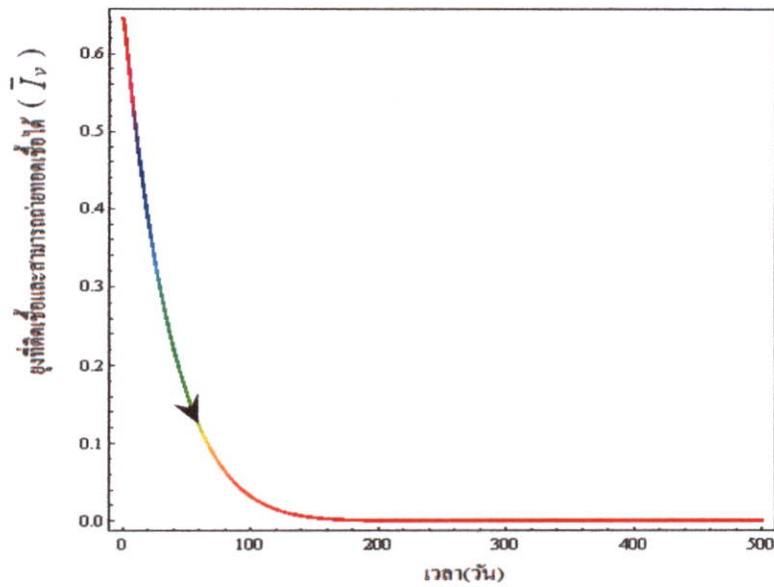
รูปที่ 4.43 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) เทียบกับเวลา



รูปที่ 4.44 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ ) เทียบกับเวลา



รูปที่ 4.45 กราฟแสดงจำนวนผู้ที่ยังเสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) เทียบกับเวลา



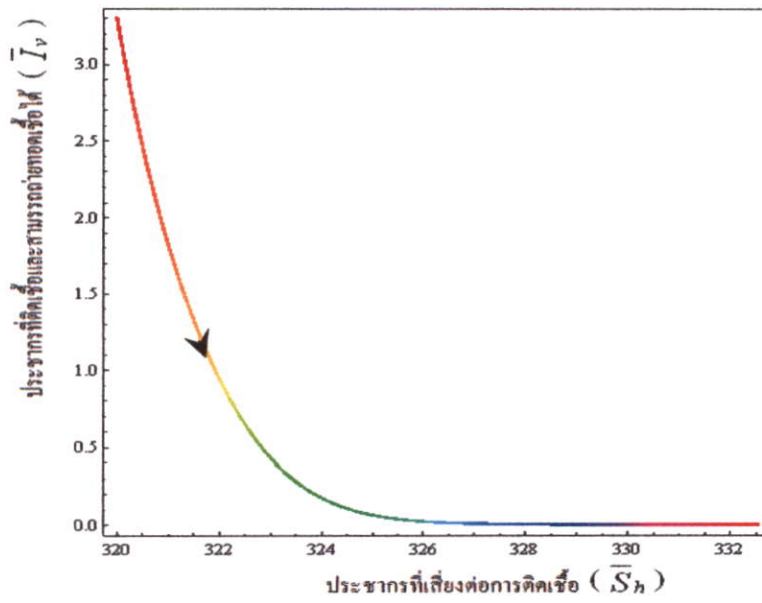
รูปที่ 4.46 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ ) เทียบกับเวลา

จากรูปที่ 4.40 – รูปที่ 4.46 สรุปได้ว่าในสภาวะไร้โรค จำนวนประชากรจะลู่เข้าสู่จุดสมดุล คือ

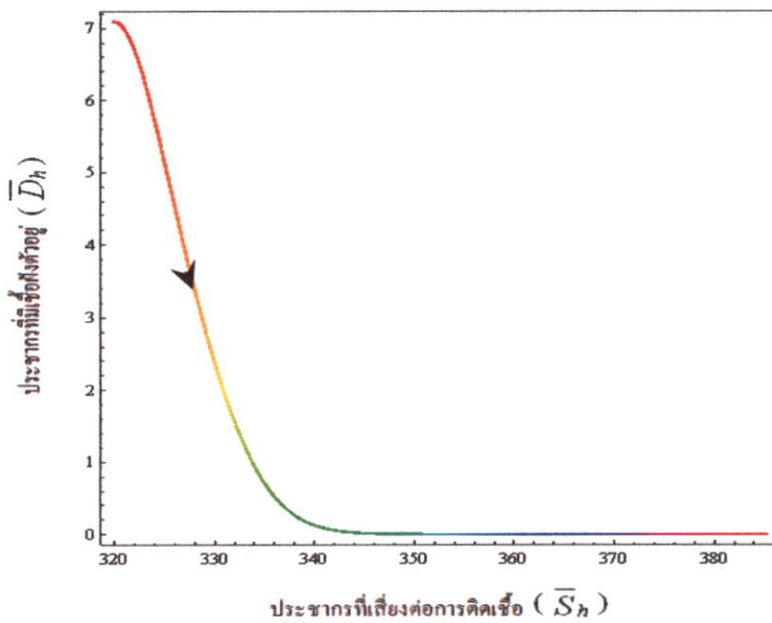
$$E_1 \left( 0, \frac{\theta N_h}{m_h}, 0, 0, \frac{L}{\mu_v}, 0 \right)$$

โดยจำนวนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะลู่เข้าสู่ 430 เมื่อเวลา 1,300

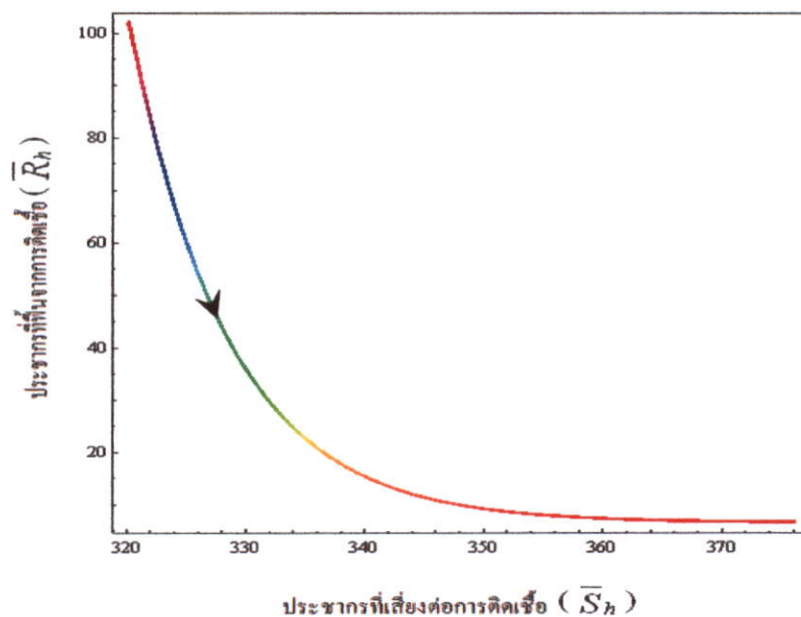
วัน จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลา 200 วัน จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลา 200 วัน จำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อจะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลา 5,170 วัน จำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะลู่เข้าสู่ 141 เมื่อเวลา 230 วัน และจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อเวลา 190 วัน นั้นแสดงให้เห็นว่าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเพิ่มมากขึ้นเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น และประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ และยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะลดลงเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น



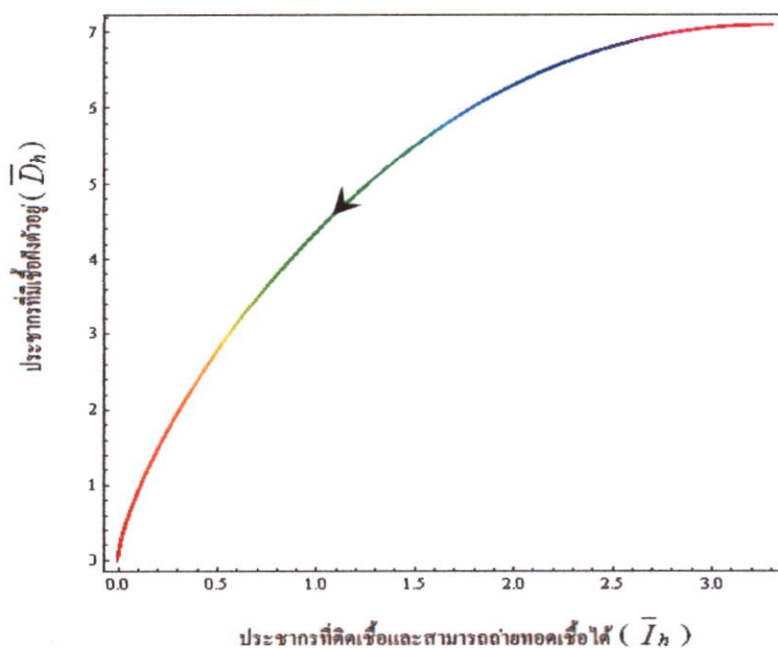
รูปที่ 4.47 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ )  
กับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ )



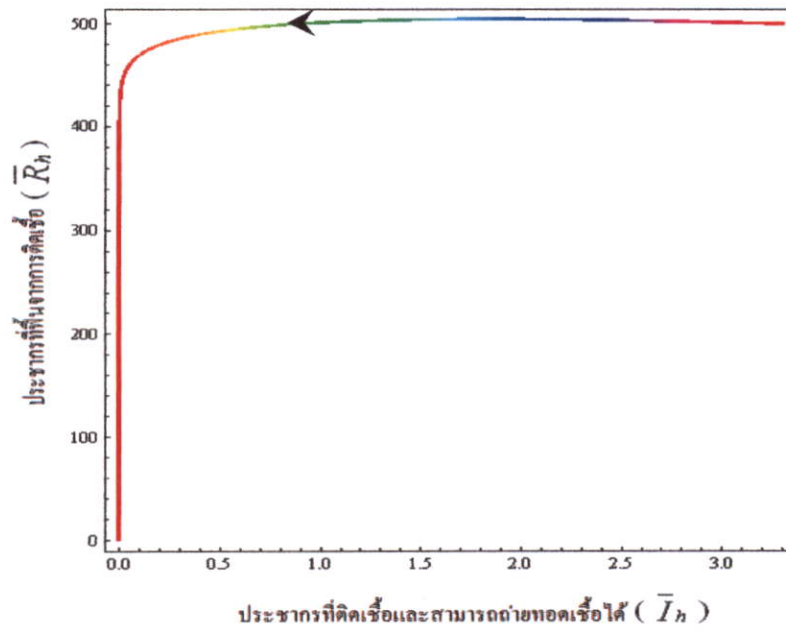
รูปที่ 4.48 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ )  
กับจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )



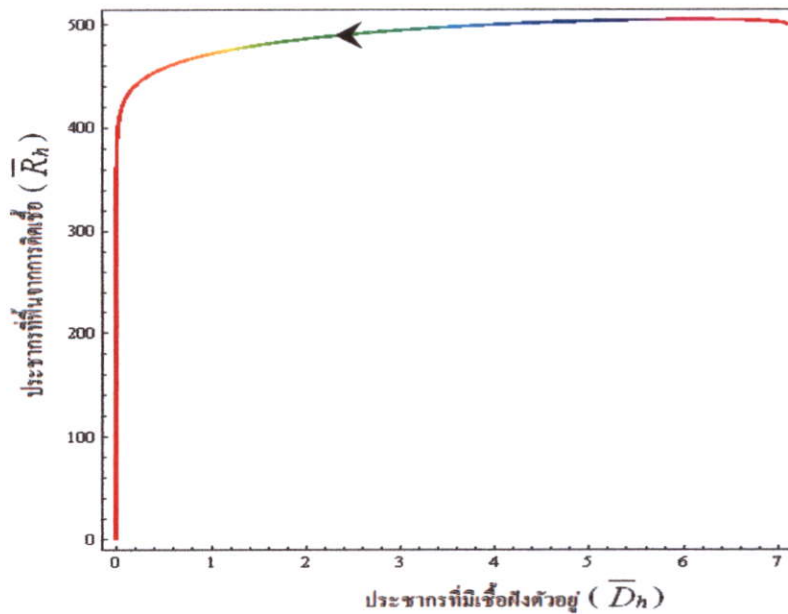
รูปที่ 4.49 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



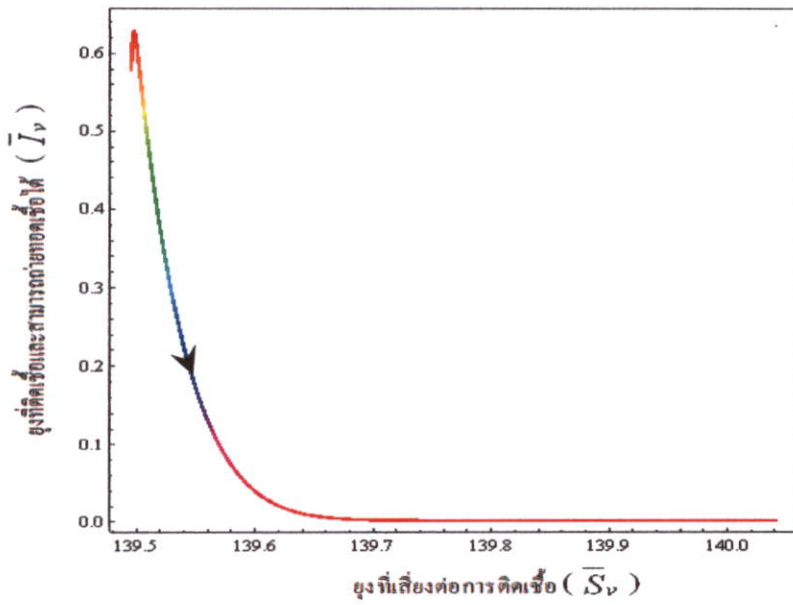
รูปที่ 4.50 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )



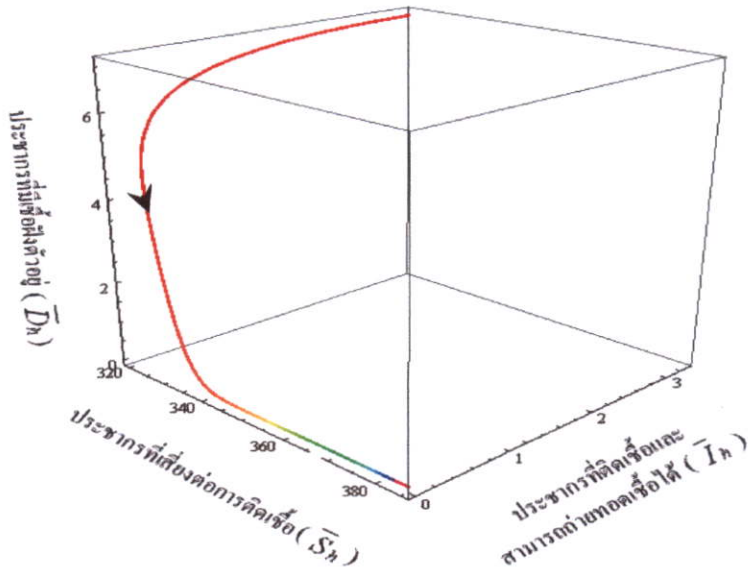
รูปที่ 4.51 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเรือและสามารถย้ายทอดเรือได้ ( $\bar{I}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเรือ ( $\bar{R}_h$ )



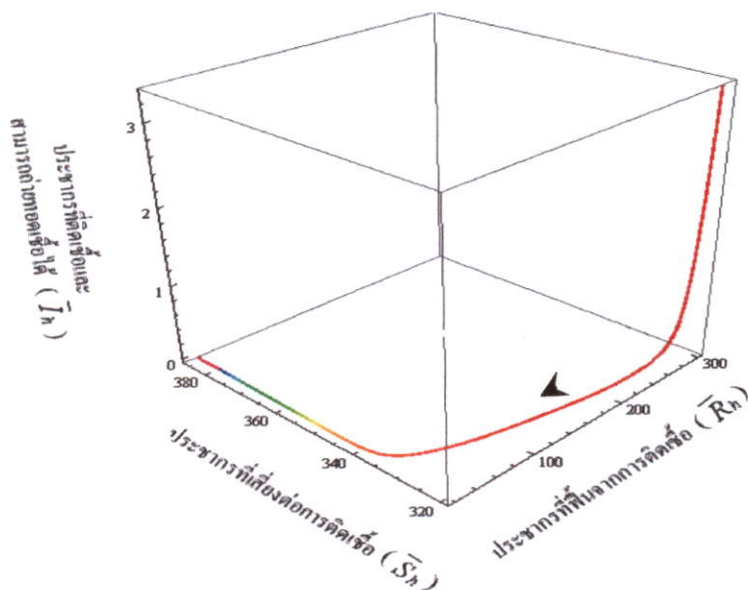
รูปที่ 4.52 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่มีเรือฝั่งตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเรือ ( $\bar{R}_h$ )



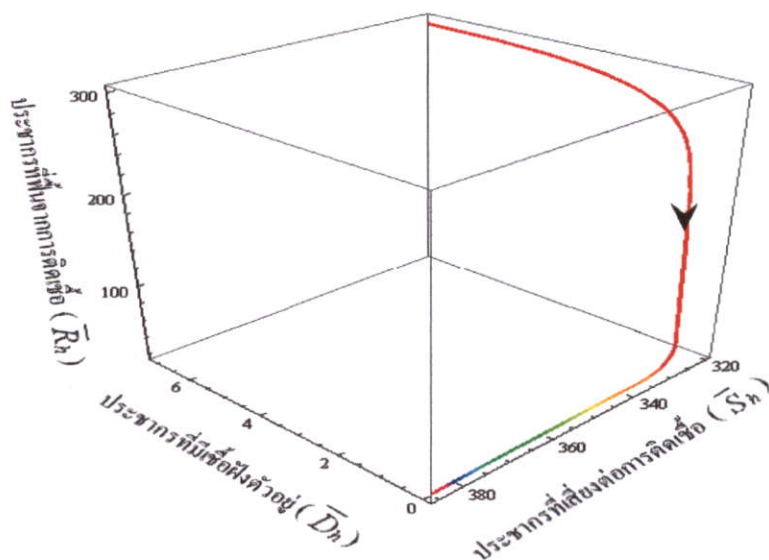
รูปที่ 4.53 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) กับจำนวนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ )



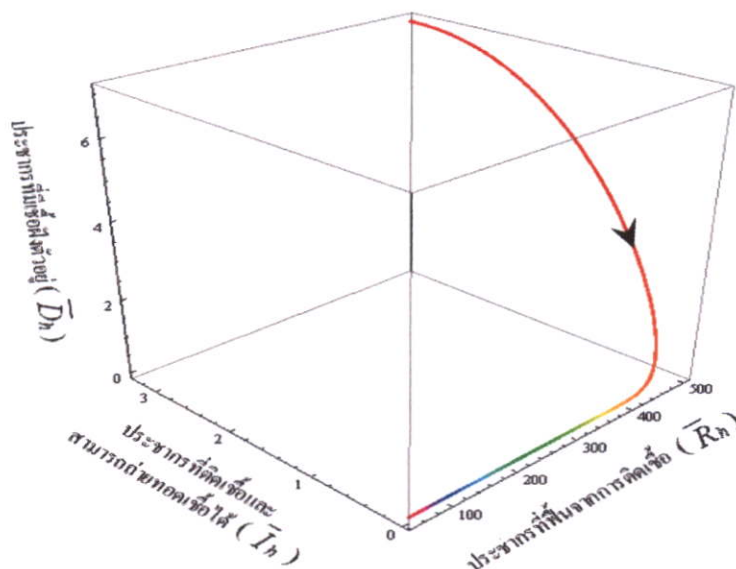
รูปที่ 4.54 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) และจำนวนประชากรที่ไม่ใส่หน้ากากอยู่ ( $\bar{D}_h$ )



รูปที่ 4.55 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) และจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



รูปที่ 4.56 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) และจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



รูปที่ 4.57 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ), จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) และจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )

รูปที่ 4.47 – รูปที่ 4.57 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยจำนวนประชากรและจำนวนยุงจะลู่เข้าสู่จุดสมดุลในสภาวะไร้โรค คือ  $E_1 \left( 0, \frac{\theta N_h}{m_h}, 0, 0, \frac{L}{\mu_v}, 0 \right)$

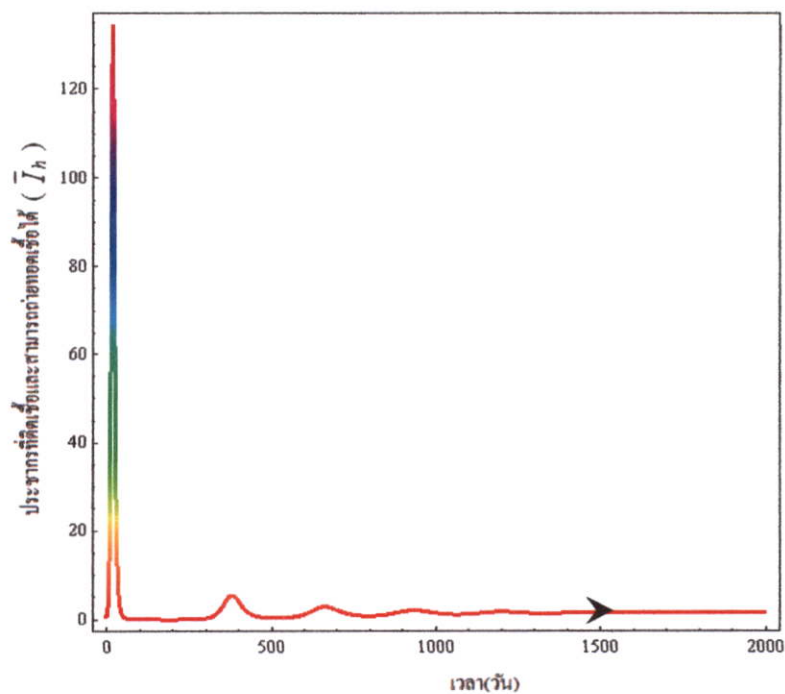
ในกรณีสภาวะระบาดเรื้อรัง ( $R_0 > 1$ ) โดย  $R_0 = \frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2}$

ในกรณีสภาวะระบาดเรื้อรัง จากตารางที่ 4.6 ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

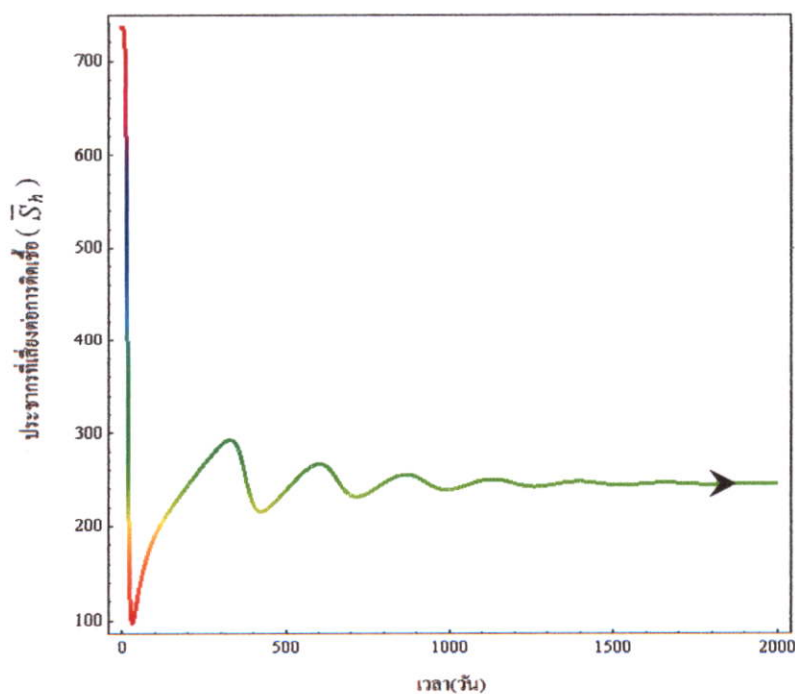
$$\lambda_h = 0.0000391, \mu_v = 0.0714, q_1 = 0.10, q_2 = 0.0005479, q_3 = 0.0333333,$$

$$m_o = 0.055, m_i = 0.054, q_4 = 0.0001826, q_5 = 0.3333333, \delta'_v = 0.001, \delta'_h = 0.001,$$

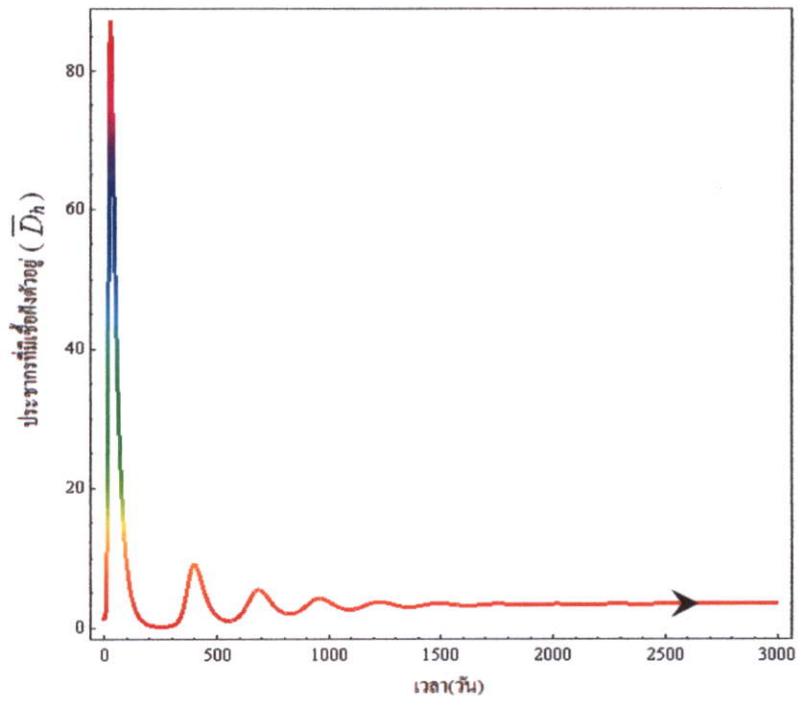
$$\beta = 0.75, L = 300, R_0 = 2.22231$$



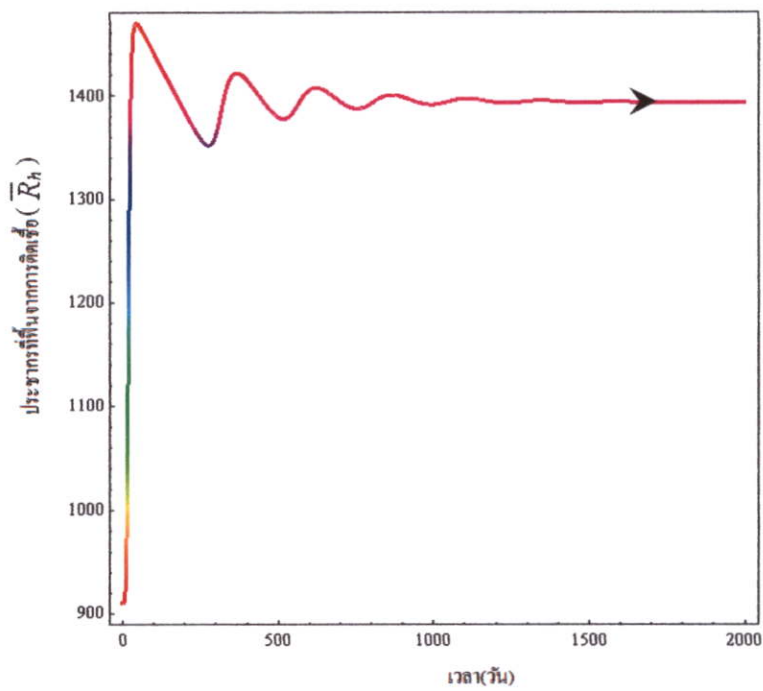
รูปที่ 4.58 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่คิดเชื้อและสามารถถ่ายถอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) เทียบกับเวลา



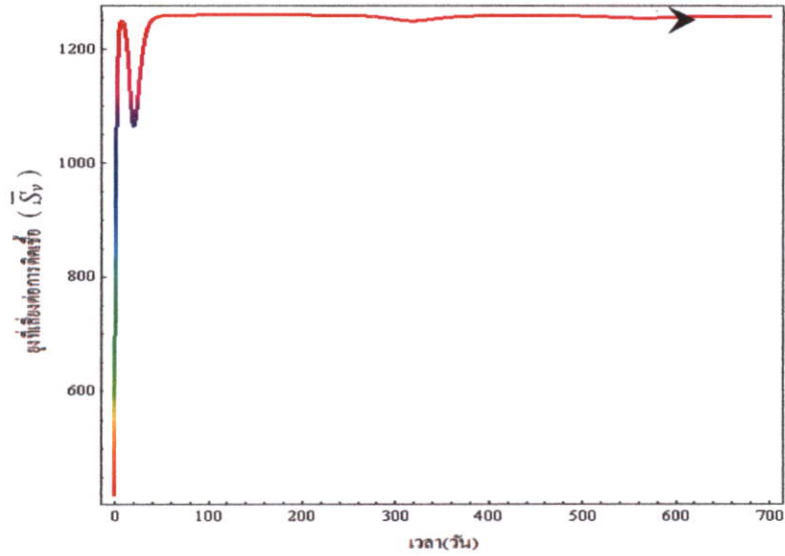
รูปที่ 4.59 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) เทียบกับเวลา



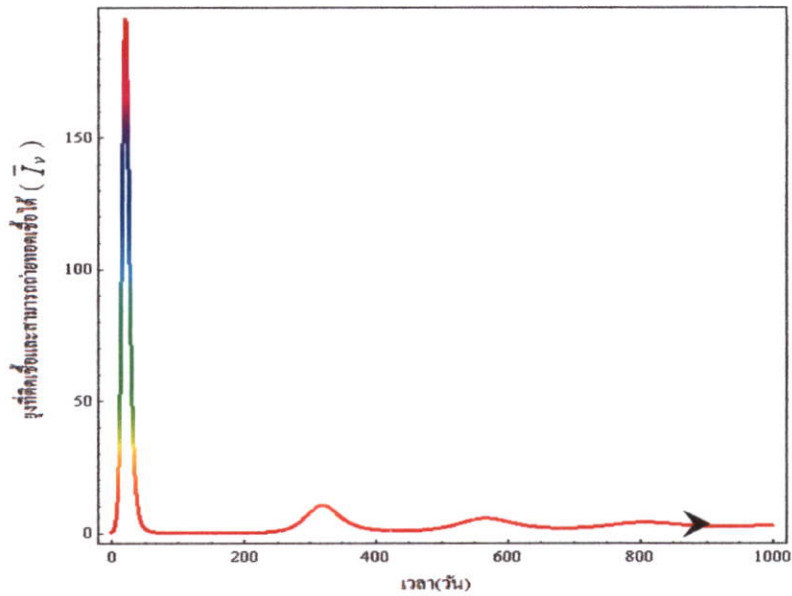
รูปที่ 4.60 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝงตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) เทียบกับเวลา



รูปที่ 4.61 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ ) เทียบกับเวลา

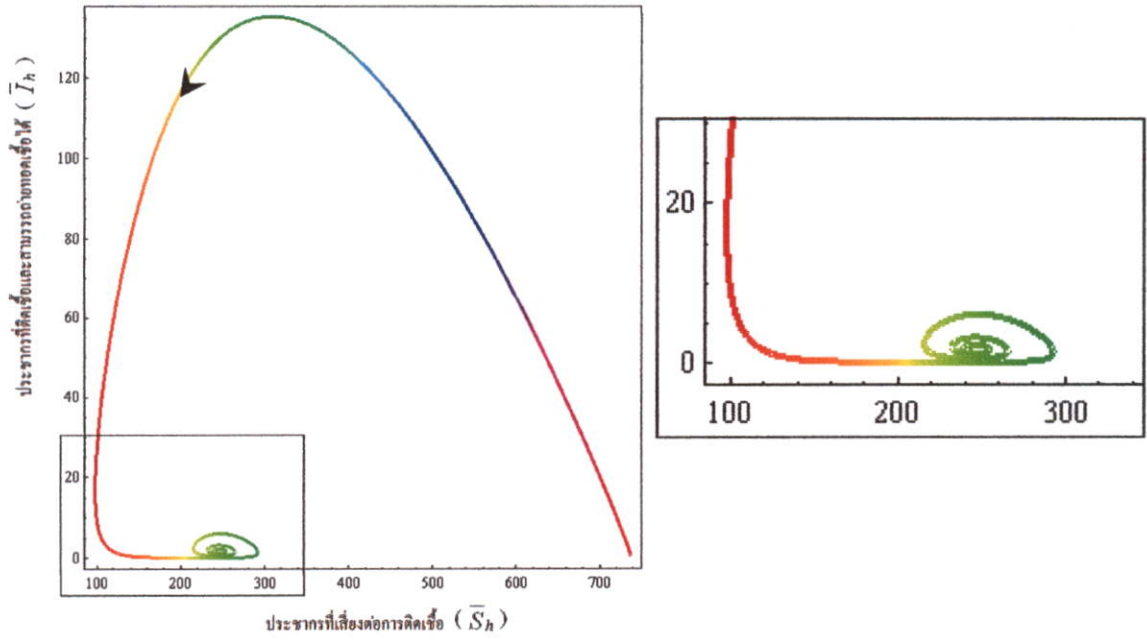


รูปที่ 4.62 กราฟแสดงจำนวนผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) เทียบกับเวลา



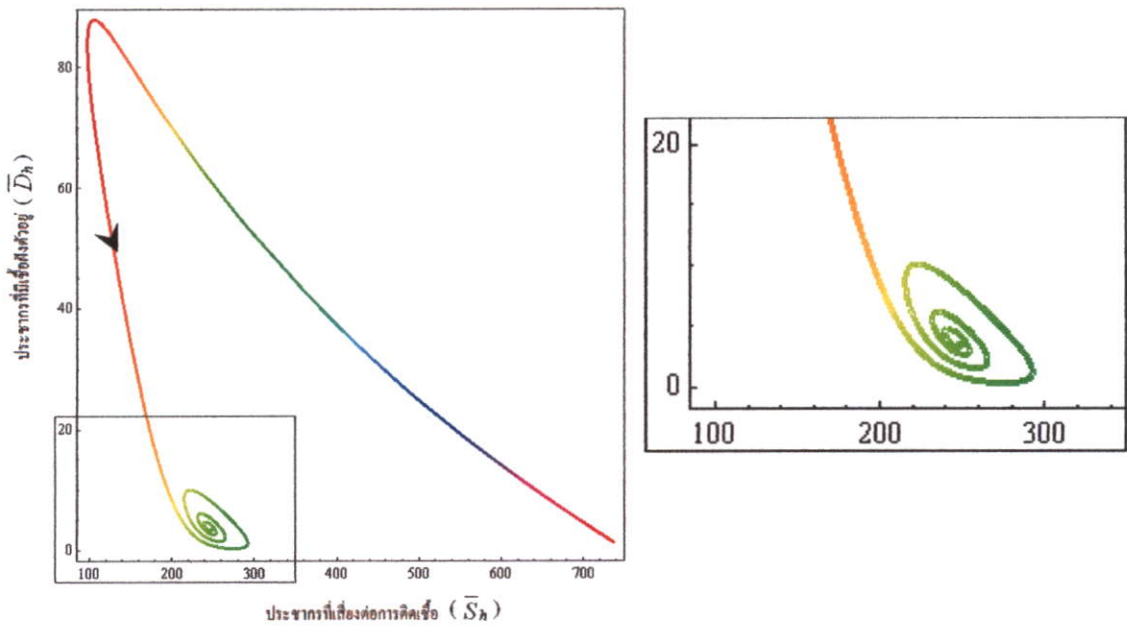
รูปที่ 4.63 กราฟแสดงจำนวนผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ ) เทียบกับเวลา

จากกราฟรูปที่ 4.58 – รูปที่ 4.63 สรุปได้ว่าในสภาวะระบาดเรื้อรัง จำนวนประชากรและจำนวนผู้จะเข้าสู่จุดสมดุล  $E_2 = (2.274, 247.153, 4.264, 1396.124, 1231.587, 3.758)$



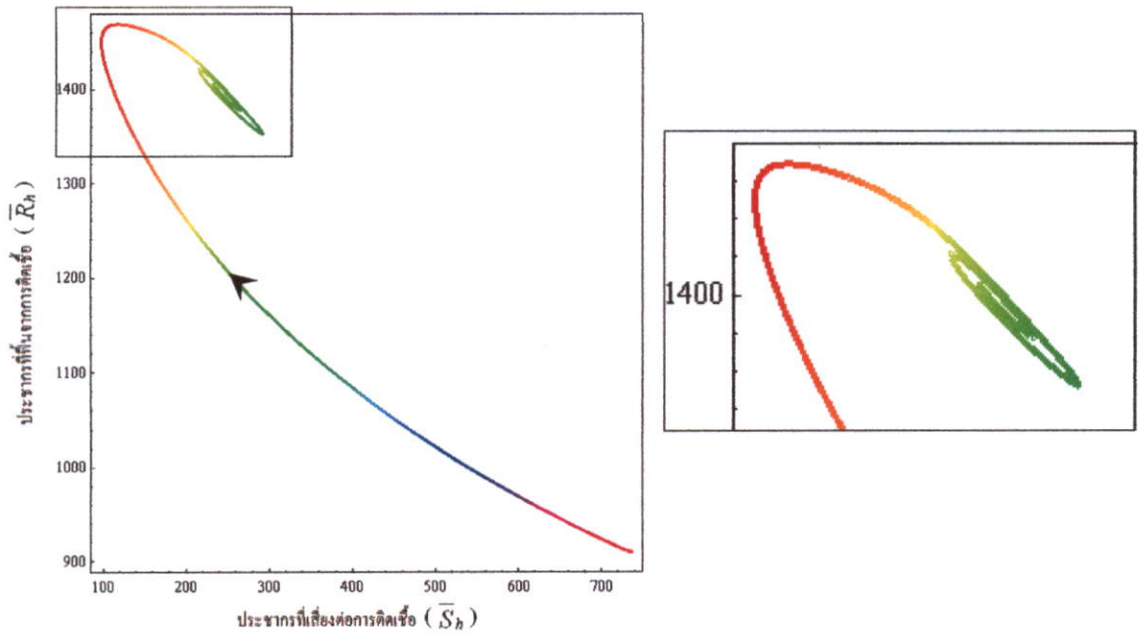
รูปที่ 4.64 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ )

กับจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ )

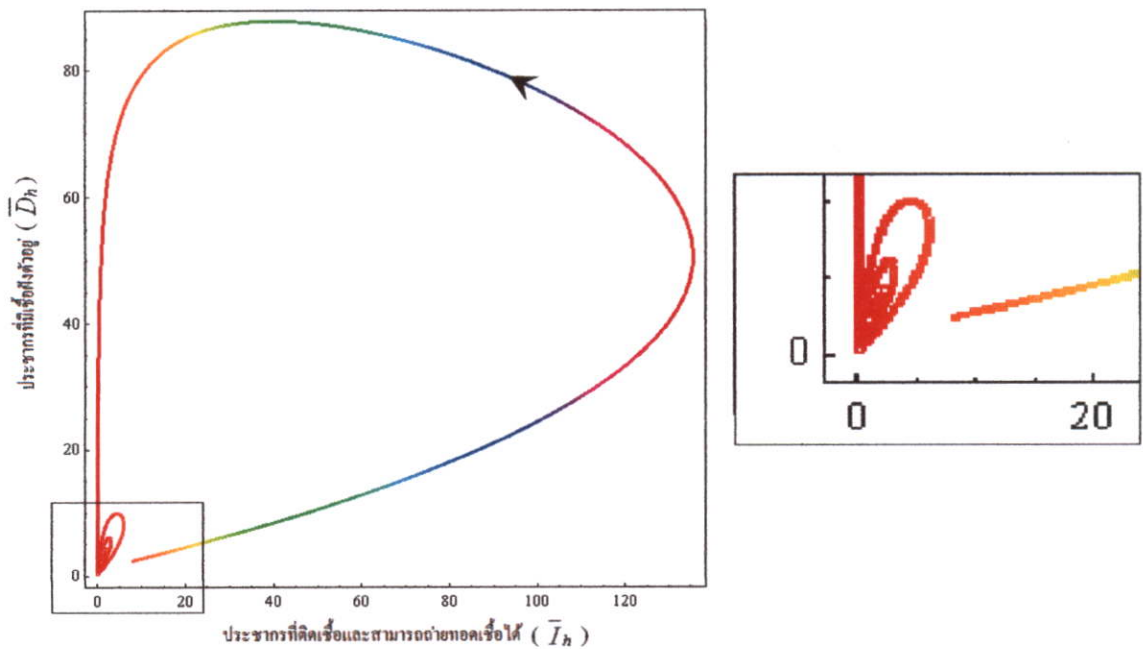


รูปที่ 4.65 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ )

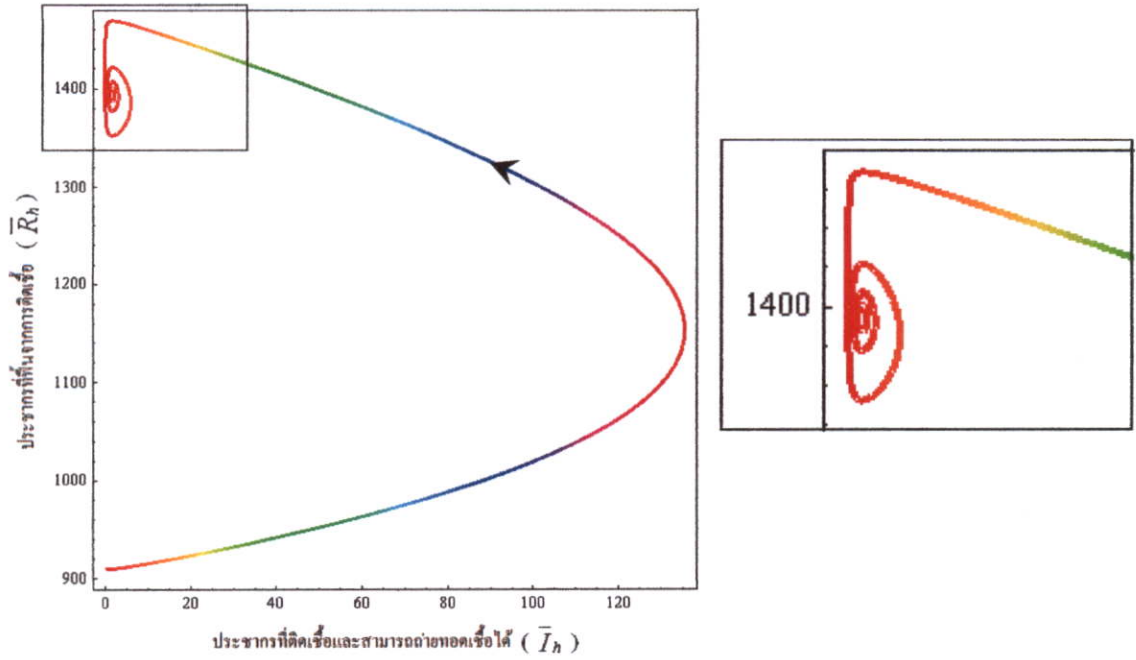
กับจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )



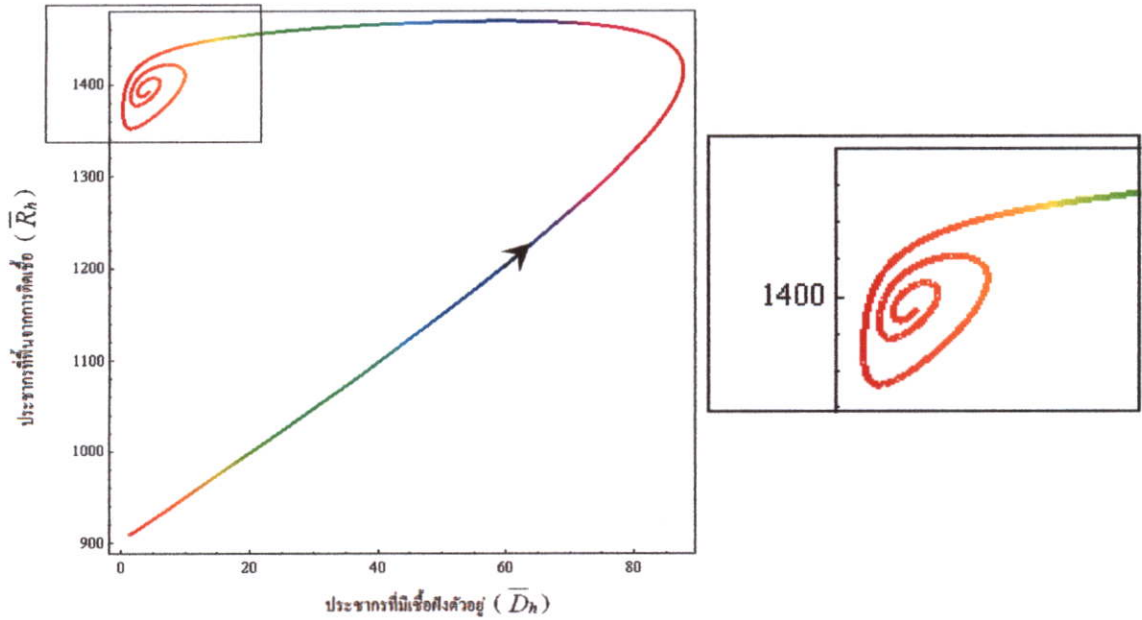
รูปที่ 4.66 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



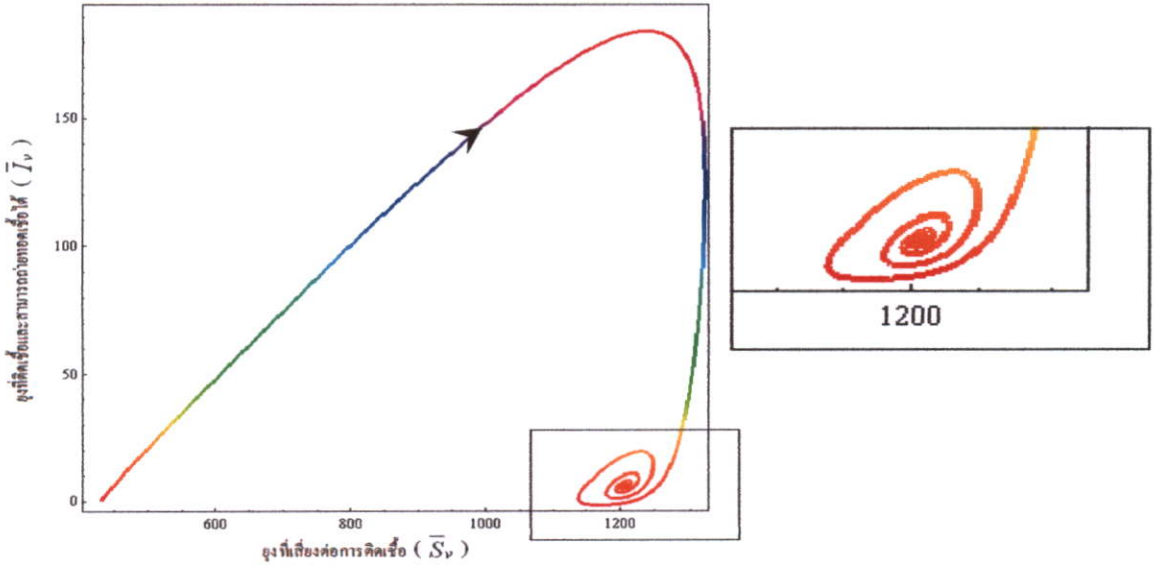
รูปที่ 4.67 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายถอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )



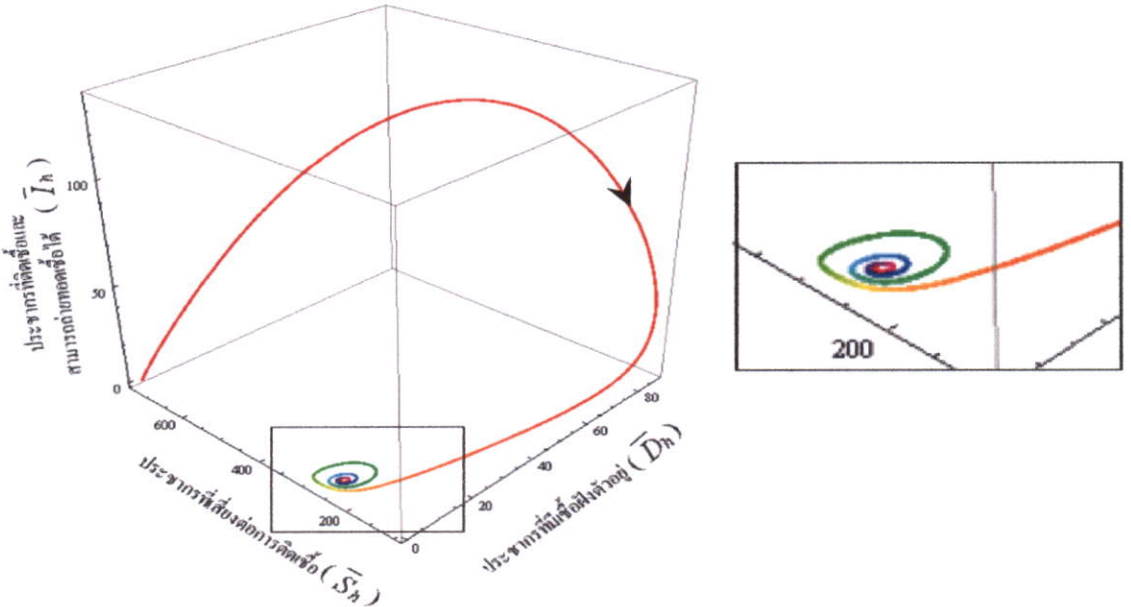
รูปที่ 4.68 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



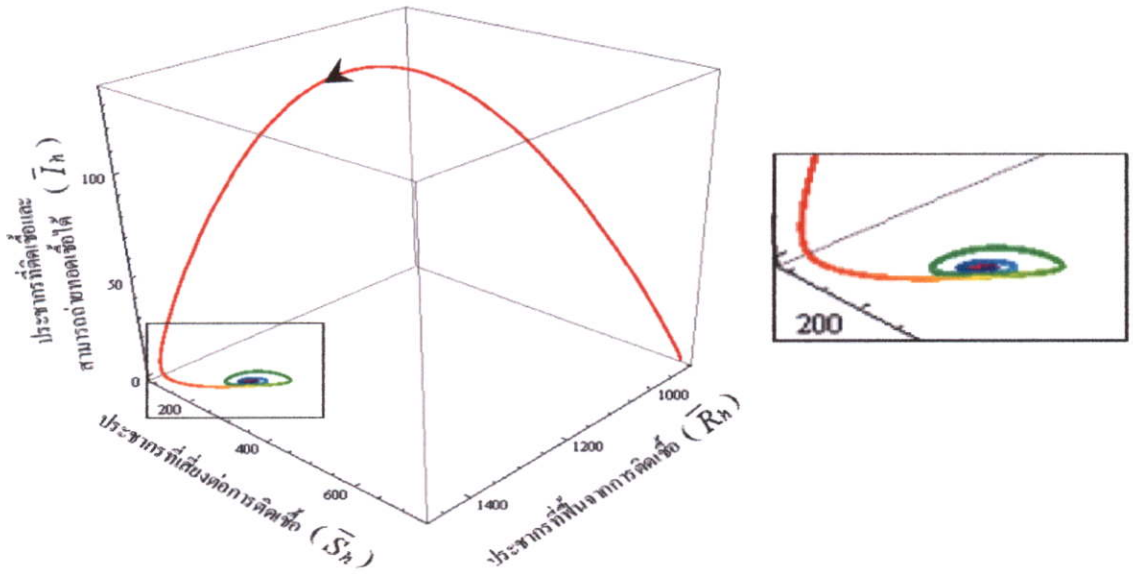
รูปที่ 4.69 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) กับจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



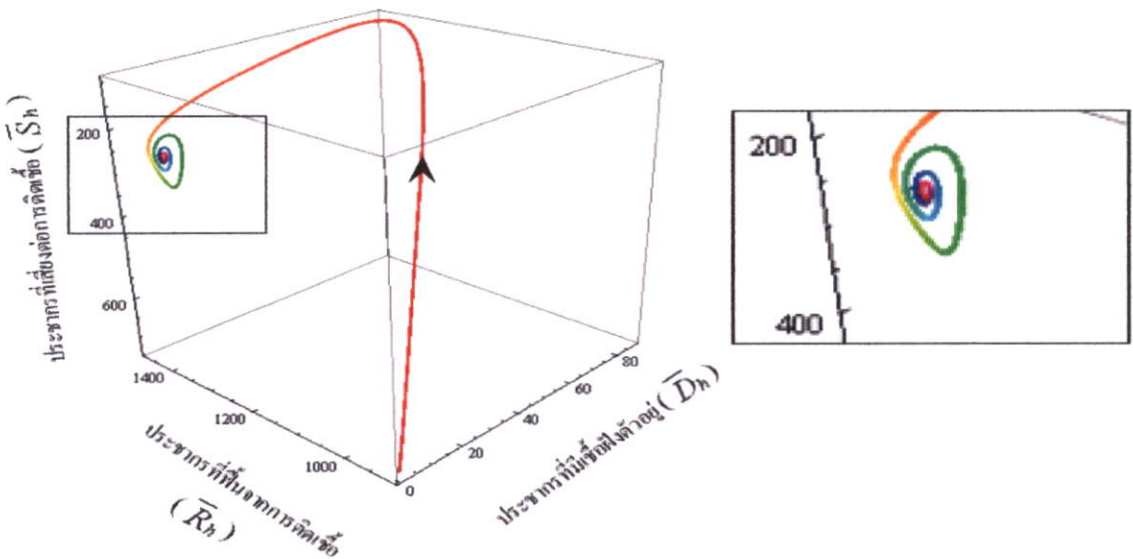
รูปที่ 4.70 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) กับจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ )



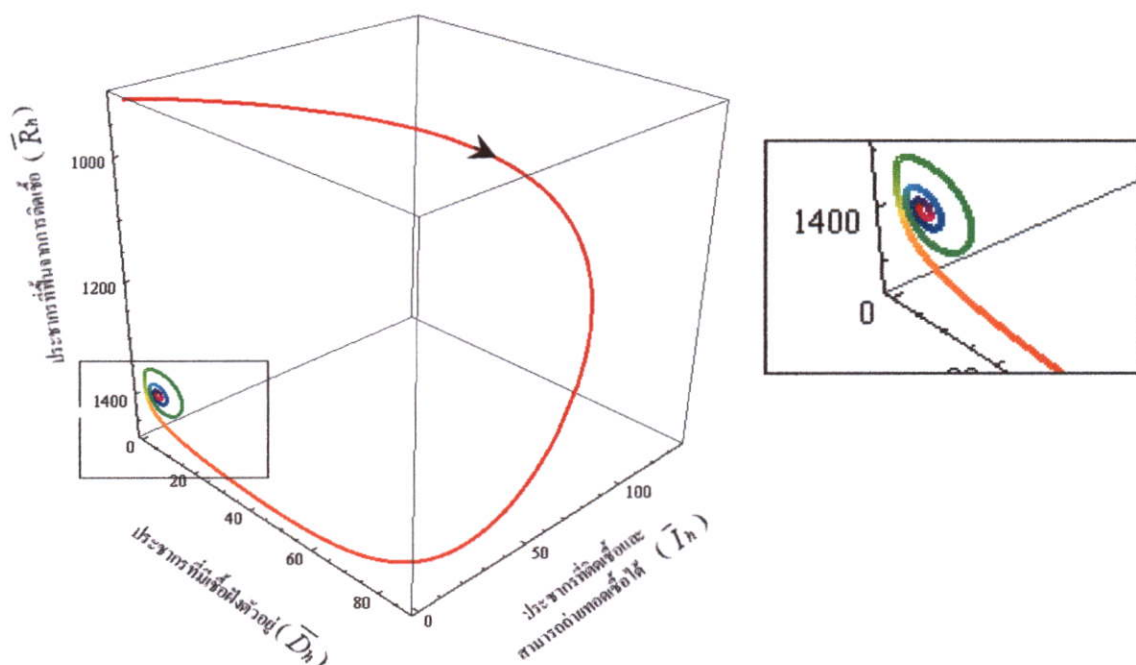
รูปที่ 4.71 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) และจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ )



รูปที่ 4.72 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) และจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



รูปที่ 4.73 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ), จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) และจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ )



รูปที่ 4.74 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $I_h$ ), จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $D_h$ ) และจำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ( $R_h$ )

รูปที่ 4.64 – รูปที่ 4.74 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสำหรับ  $R_0 > 1$  โดยจำนวนประชากรและจำนวนยุงจะลู่เข้าสู่จุดสมดุลในสภาวะระบาคเรื้อรังคือ  $E_2 = (2.274, 247.153, 4.264, 1396.124, 1231.587, 3.758)$  สรุปได้ว่า จำนวนของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะลู่เข้าสู่ 247.153 เมื่อเวลา 1,750 วัน จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะลู่เข้าสู่ 2.274 เมื่อเวลา 1,390 วัน จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่จะลู่เข้าสู่ 4.264 เมื่อเวลา 2,480 วัน จำนวนประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อจะลู่เข้าสู่ 1,396.124 เมื่อเวลา 1,470 วัน จำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะลู่เข้าสู่ 1,231.587 เมื่อเวลา 574 วัน และจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้จะลู่เข้าสู่ 3.758 เมื่อเวลา 950 วัน

ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ( $R_0$ ) ในสภาวะระบาดเรื้อรังที่อัตราการอพยพเข้า-ออกของประชากรไม่คงที่

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียม

ไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน คือ

$$R_0 = \frac{\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_h + q_2 + q_3) + m_h q_2 \beta q_1 \mu_v^2}{m_h (m_h + q_2 + q_3) (m_h + q_1 + q_5) \mu_v^2}$$

หรือ

$$R_0 = \frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_o - m_i + \lambda_h + q_2 + q_3)) + ((m_o - m_i + \lambda_h) q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{(m_o - m_i + \lambda_h) (m_o - m_i + \lambda_h + q_2 + q_3) (m_o - m_i + \lambda_h + q_1 + q_5) \mu_v^2}$$

สามารถอธิบายได้ดังนี้

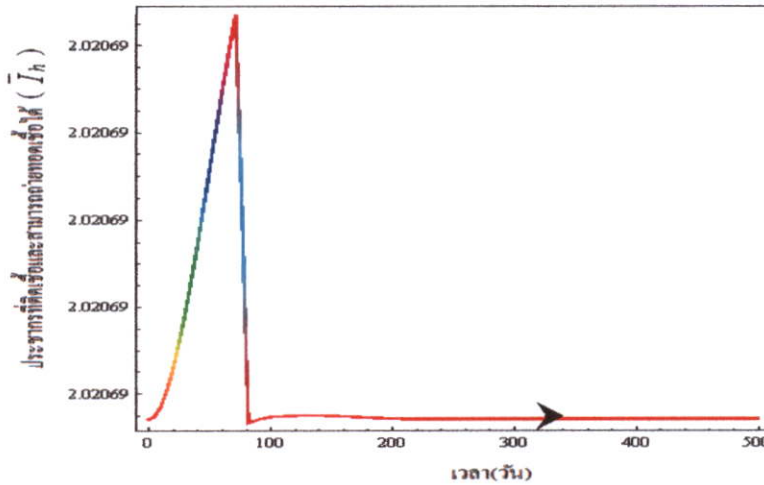
ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน = (อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียม ไวแวกซ์จากยุง ไปสู่ประชากร  
 × อัตราการเกิดของประชากร × จำนวนประชากรทั้งหมด × จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น × อัตราการ  
 ถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียม ไวแวกซ์จากประชากร ไปสู่ยุง (อัตราการอพยพออกของประชากร –  
 อัตราการอพยพเข้าของประชากร + อัตราการเสียชีวิตของประชากร + อัตราการที่เชื้อชนิดพลาสโม  
 เดียม ไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง + อัตราผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไป  
 เป็นผู้ที่เกี่ยวข้องต่อการติดเชื้อ)) + ((อัตราการอพยพออกของประชากร – อัตราการอพยพเข้าของประชากร  
 + อัตราการเสียชีวิตของประชากร) อัตราการที่เชื้อชนิดพลาสโมเดียม ไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่  
 เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง × ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร × อัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอด  
 เชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เกี่ยวข้องต่อการติดเชื้อ × อัตราการตายของยุง × อัตราการตายของยุง) / (อัตราการ  
 อพยพออกของประชากร – อัตราการอพยพเข้าของประชากร + อัตราการเสียชีวิตของประชากร) ×  
 (อัตราการอพยพออกของประชากร – อัตราการอพยพเข้าของประชากร + อัตราการเสียชีวิตของ

ประชากร + อัตราการที่เชื่อชนิดพลาสติกโมเด็มไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื่อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง + อัตราผู้ที่มีเชื่อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการคิดเชื่อ)(อัตราการอพยพออกของประชากร – อัตราการอพยพเข้าของประชากร + อัตราการเสียชีวิตของประชากร + อัตราที่ผู้คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการคิดเชื่อ + อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่คิดเชื่อชนิดพลาสติกโมเด็มไวแวกซ์)(อัตราการตายของบุง × อัตราการตายของบุง)

การเปรียบเทียบค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ( $R_0$ ) และจำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น ( $L$ )

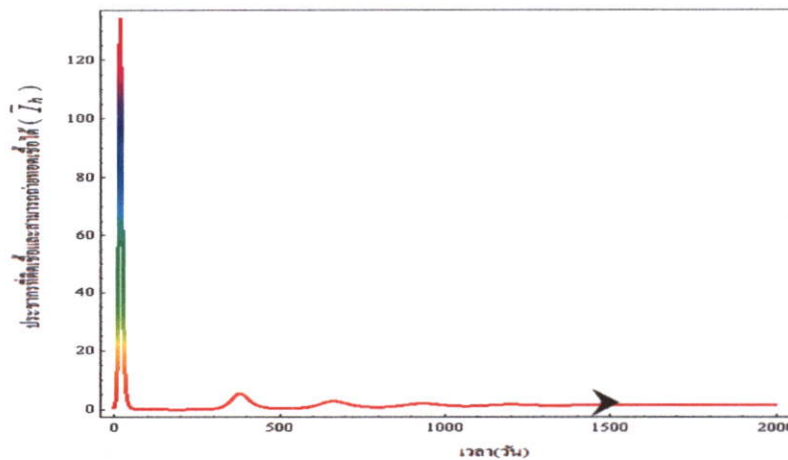
ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

$$\lambda_h = 0.0000391, \mu_v = 0.0714, q_1 = 0.10, q_2 = 0.0005479, q_3 = 0.0333333, \\ q_4 = 0.0001826, q_5 = 0.3333333, \delta'_v = 0.001, \delta'_h = 0.001, \beta = 0.75$$



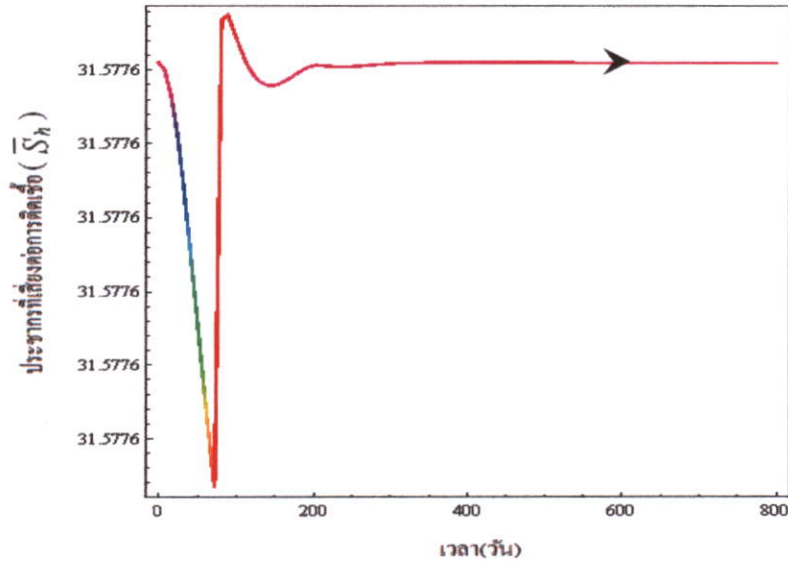
รูปที่ 4.75 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 51.7918$  และ  $L = 7,000$



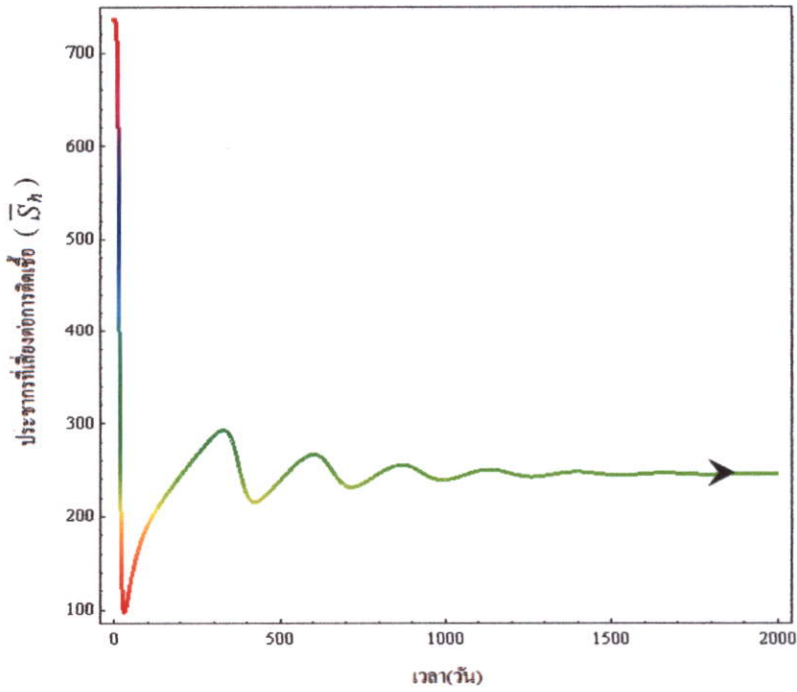
รูปที่ 4.76 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 2.22231$  และ  $L = 300$



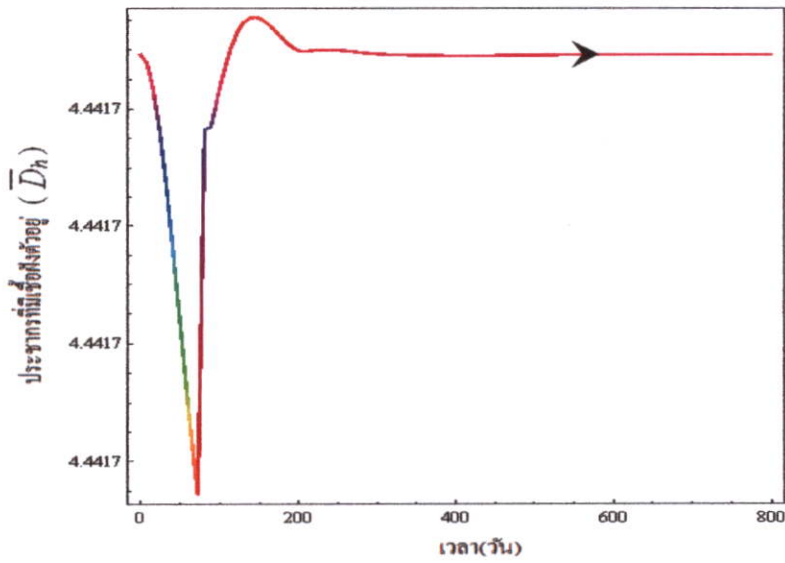
รูปที่ 4.77 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 51.7918$  และ  $L = 7,000$



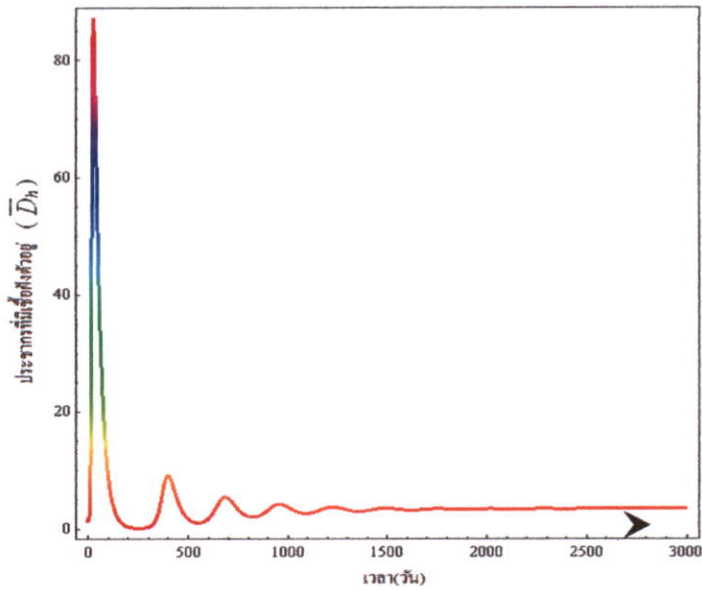
รูปที่ 4.78 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 2.22231$  และ  $L = 300$



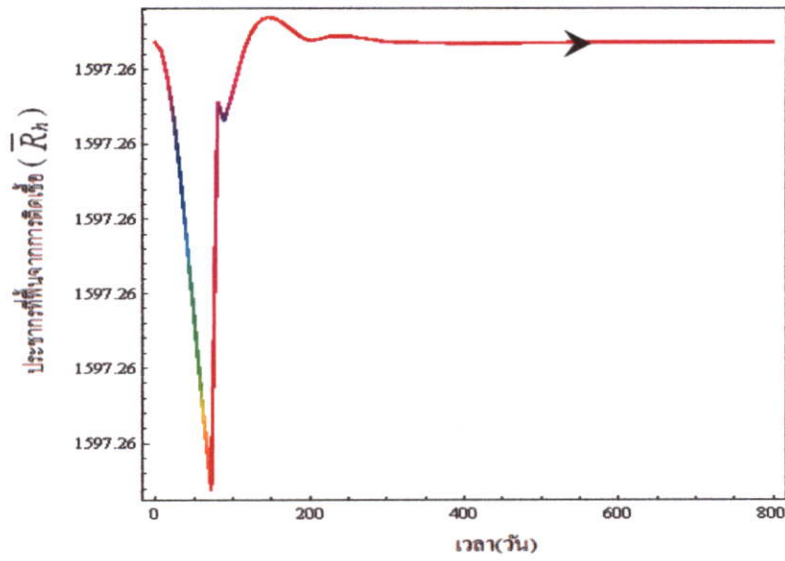
รูปที่ 4.79 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 51.7918$  และ  $L = 7,000$



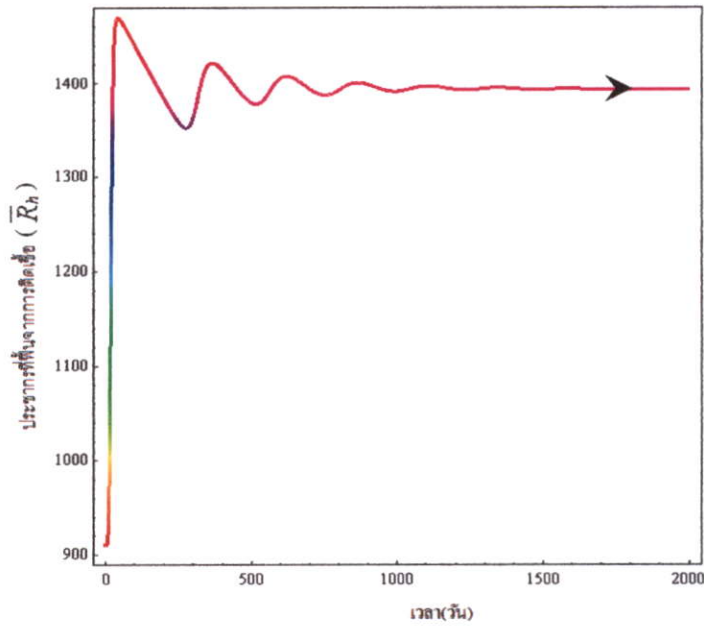
รูปที่ 4.80 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 2.22231$  และ  $L = 300$



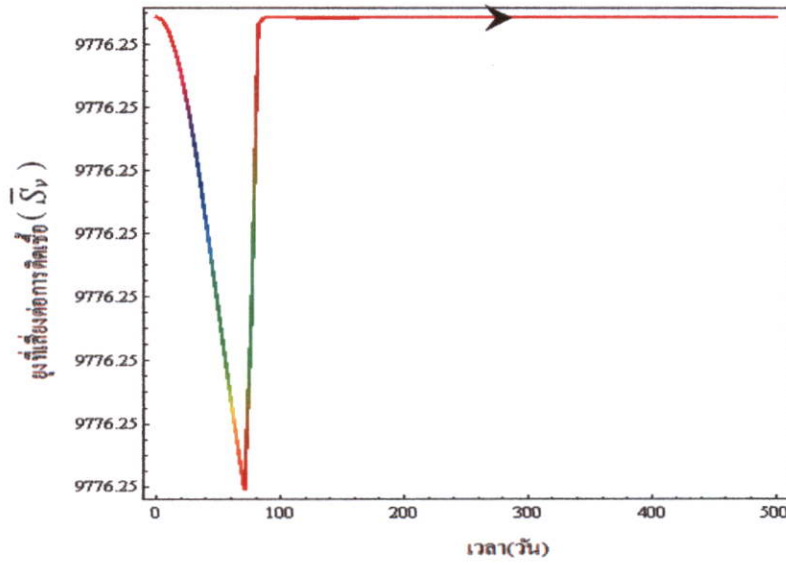
รูปที่ 4.81 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 51.7918$  และ  $L = 7,000$



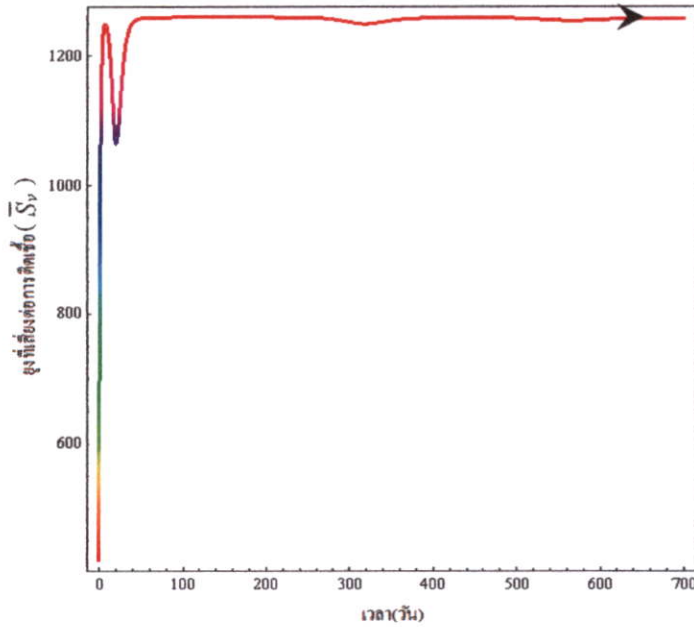
รูปที่ 4.82 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 2.22231$  และ  $L = 300$



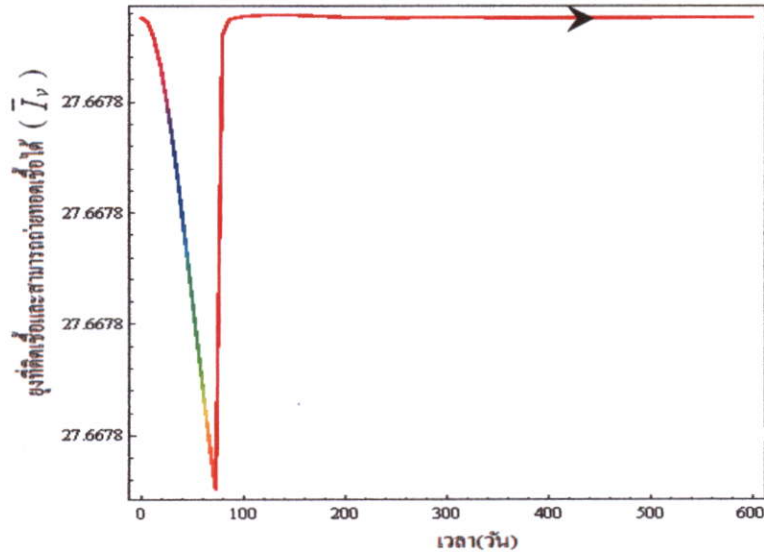
รูปที่ 4.83 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 51.7918$  และ  $L = 7,000$



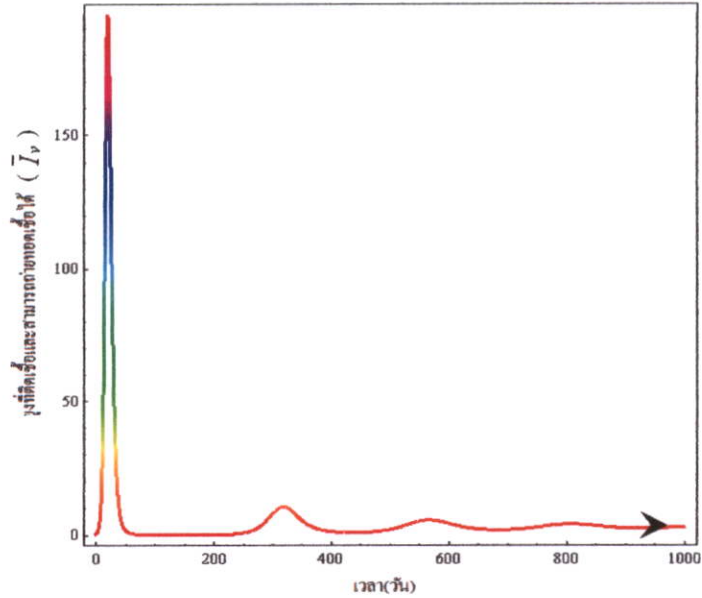
รูปที่ 4.84 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) เทียบกับเวลา

ที่มีค่า  $R_0 = 2.22231$  และ  $L = 300$



รูปที่ 4.85 กราฟแสดงจำนวนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ ) เทียบกับเวลา ที่มีค่า

$$R_0 = 51.7918 \text{ และ } L = 7,000$$



รูปที่ 4.86 กราฟแสดงจำนวนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ ) เทียบกับเวลา ที่มี

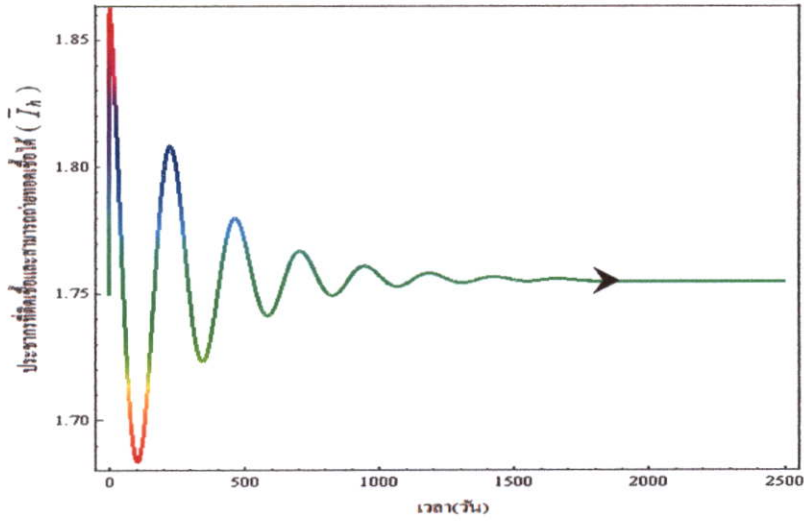
$$\text{ค่า } R_0 = 2.22231 \text{ และ } L = 300$$

ตารางที่ 4.7 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่ของผลเฉลยเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานและจำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้นแตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่ ดังรูปที่ 4.75 – รูปที่ 4.86

จุดสมมูล	$R_0 = 2.22231$ และ $L = 300$	$R_0 = 51.7918$ และ $L = 7,000$
	เข้าสู่ ณ เวลา (วัน)	เข้าสู่ ณ เวลา (วัน)
$\bar{I}_h$	1,390	208
$\bar{S}_h$	1,950	542
$\bar{D}_h$	2,480	528
$\bar{R}_h$	1,470	530
$\bar{S}_v$	574	160
$\bar{I}_v$	950	500

จากตารางที่ 4.7 สรุปได้ว่าชุดข้อมูลที่มี  $R_0$  มากจะเข้าสู่หาจุดสมมูลได้เร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีค่า  $R_0$  น้อยและชุดข้อมูลที่มีจำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้นมากจะเข้าสู่หาจุดสมมูลได้เร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีจำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้นน้อยกว่า

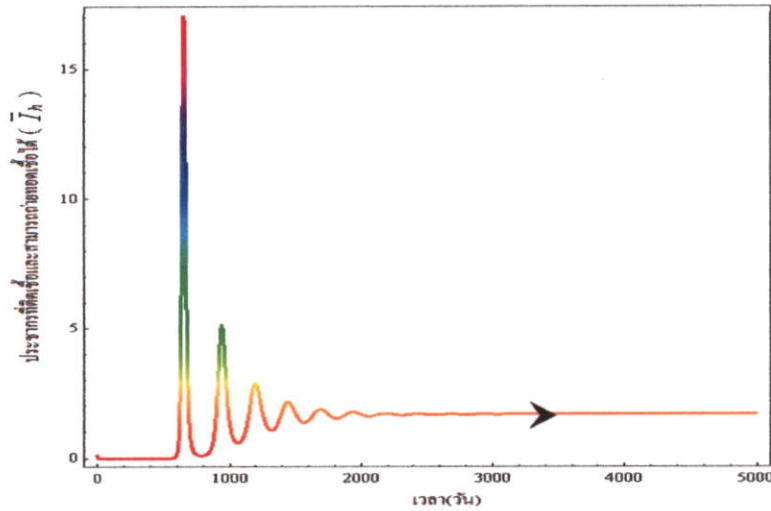
การเปรียบเทียบระหว่างค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกันในสภาวะระบาคเรื้อรัง



รูปที่ 4.87 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่า

เริ่มต้นดังนี้  $\bar{S}_h(0) = 245.51$ ,  $\bar{I}_h(0) = 1.75$ ,  $\bar{D}_h(0) = 3.83$ ,  $\bar{R}_h(0) = 1,384.75$ ,

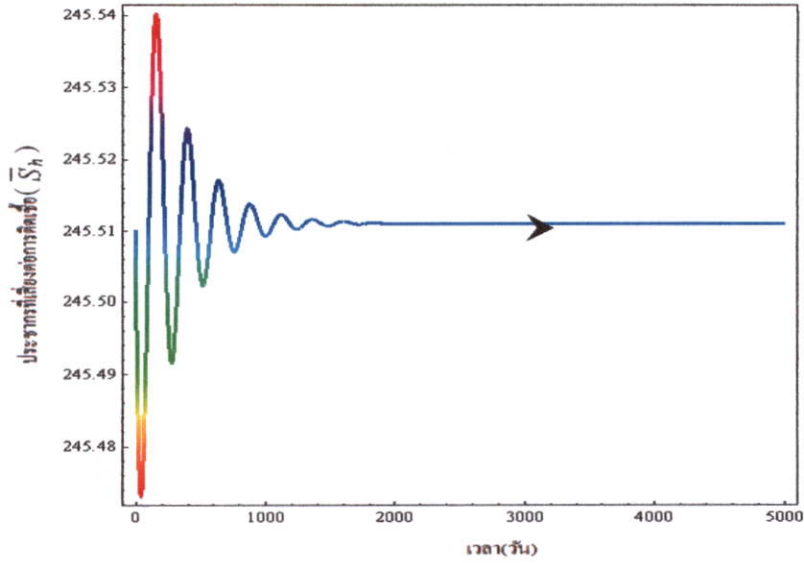
$\bar{S}_v(0) = 1,257.40$ ,  $\bar{I}_v(0) = 3.10$



รูปที่ 4.88 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่า

เริ่มต้นดังนี้  $\bar{S}_h(0) = 10$ ,  $\bar{I}_h(0) = 0.10$ ,  $\bar{D}_h(0) = 0.10$ ,  $\bar{R}_h(0) = 1,620$ ,  $\bar{S}_v(0) = 1,200.40$ ,

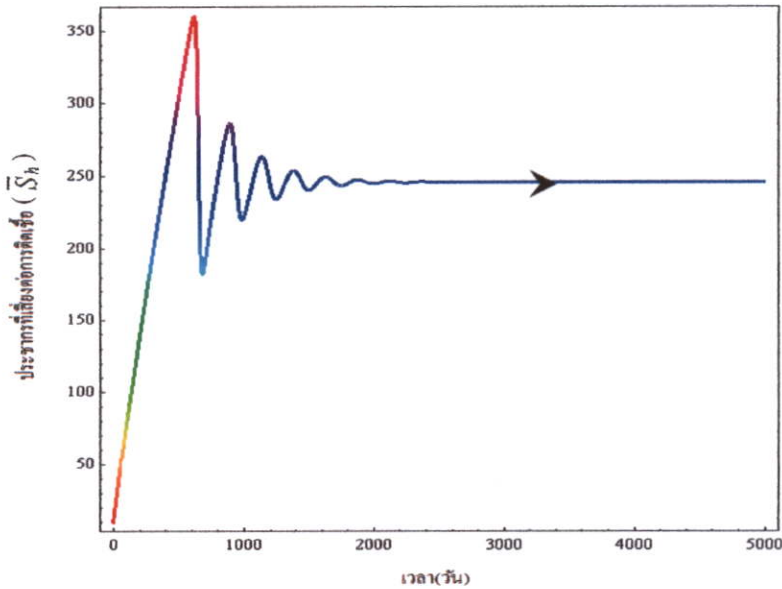
$\bar{I}_v(0) = 0.10$



รูปที่ 4.89 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

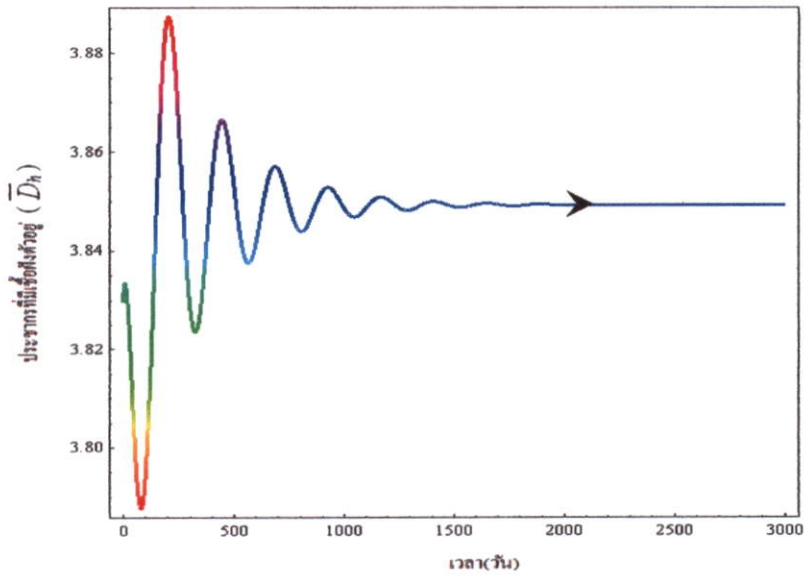
$$\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83, \bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40, ,$$

$$\bar{I}_v(0) = 3.10$$



รูปที่ 4.90 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

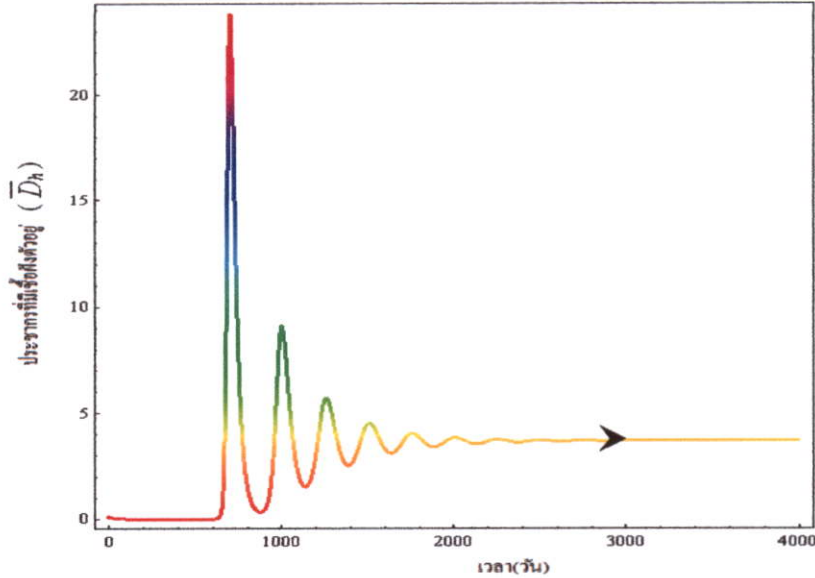
$$\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10, \bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$$



รูปที่ 4.91 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝงตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

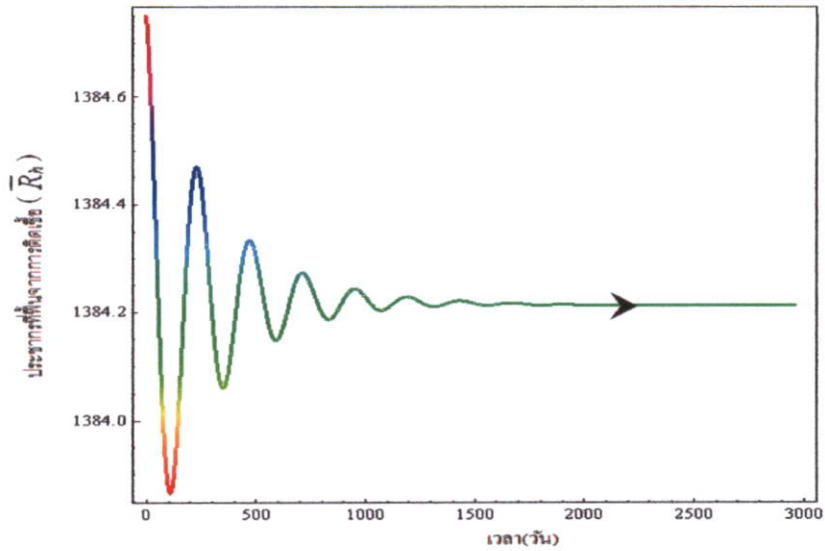
$$\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83, \bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40,$$

$$\bar{I}_v(0) = 3.10$$



รูปที่ 4.92 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝงตัวอยู่ ( $\bar{D}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

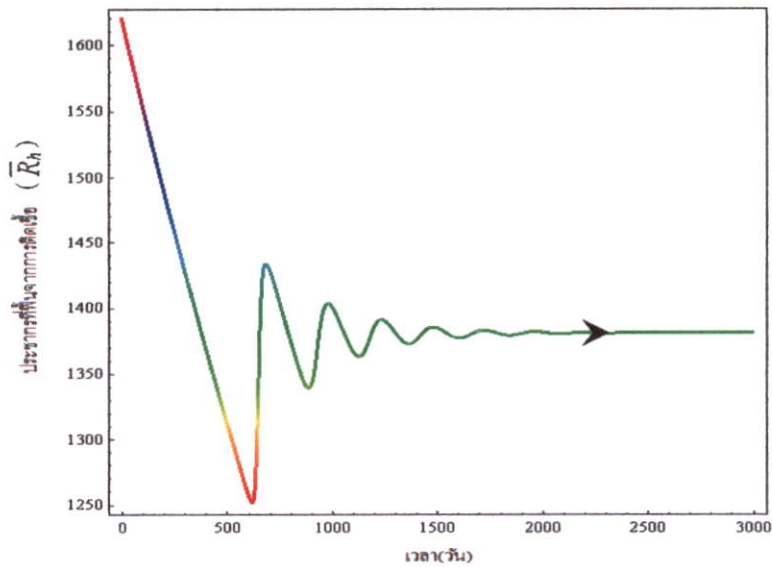
$$\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10, \bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$$



รูปที่ 4.93 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

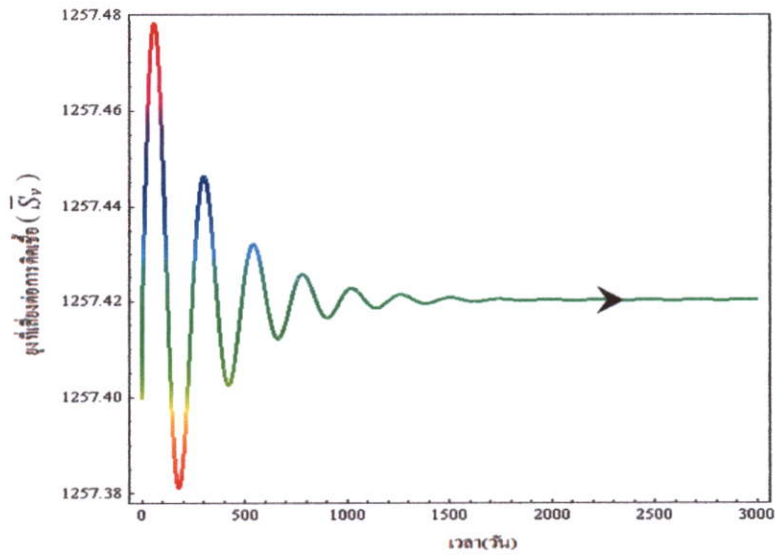
$$\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83, \bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40,$$

$$\bar{I}_v(0) = 3.10$$



รูปที่ 4.94 กราฟแสดงจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ( $\bar{R}_h$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

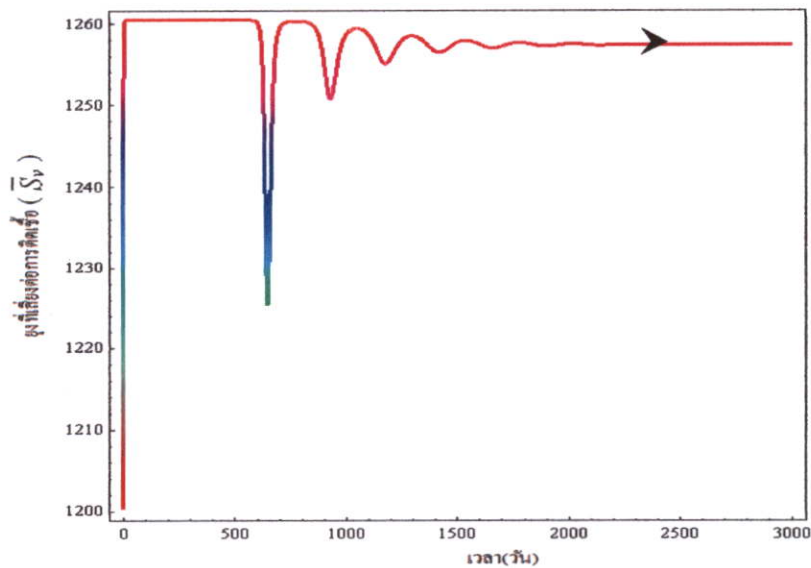
$$\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10, \bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$$



รูปที่ 4.95 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

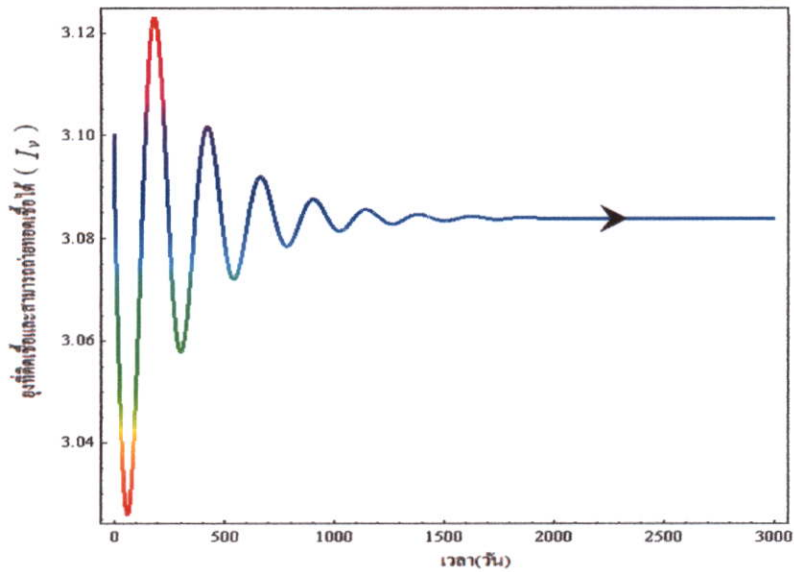
$$\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75, \bar{D}_h(0) = 3.83, \bar{R}_h(0) = 1,384.75, \bar{S}_v(0) = 1,257.40,$$

$$\bar{I}_v(0) = 3.10$$

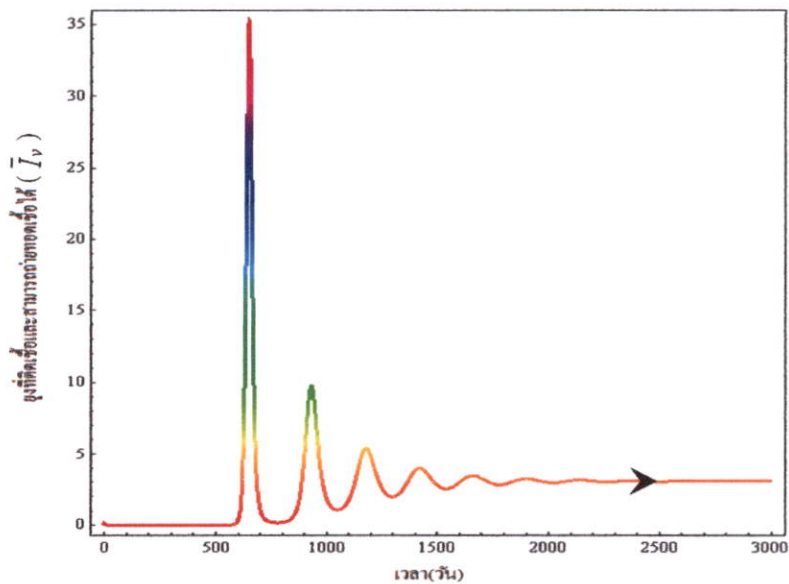


รูปที่ 4.96 กราฟแสดงจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ( $\bar{S}_v$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

$$\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10, \bar{D}_h(0) = 0.10, \bar{R}_h(0) = 1,620, \bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$$



รูปที่ 4.97 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้  $\bar{S}_h(0) = 245.51$ ,  $\bar{I}_h(0) = 1.75$ ,  $\bar{D}_h(0) = 3.83$ ,  $\bar{R}_h(0) = 1,384.75$ ,  $\bar{S}_v(0) = 1,257.40$ ,  $\bar{I}_v(0) = 3.10$



รูปที่ 4.98 กราฟแสดงจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $\bar{I}_v$ ) เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้  $\bar{S}_h(0) = 10$ ,  $\bar{I}_h(0) = 0.10$ ,  $\bar{D}_h(0) = 0.10$ ,  $\bar{R}_h(0) = 1,620$ ,  $\bar{S}_v(0) = 1,200.40$ ,  $\bar{I}_v(0) = 0.10$

ตารางที่ 4.8 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยประชากรทั้งหมดไม่คงที่ ดังรูป

ที่ 4.87 – รูปที่ 4.98

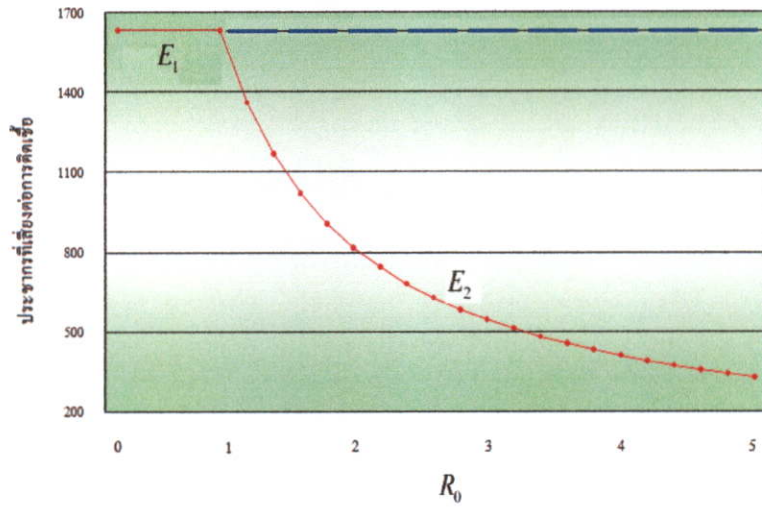
จุดสมดุล	$\bar{S}_h(0) = 245.51, \bar{I}_h(0) = 1.75$ $\bar{D}_h(0) = 3.83, \bar{R}_h(0) = 1,384.75,$ $\bar{S}_v(0) = 1,257.40, \bar{I}_v(0) = 3.10$ $R_0 = 2.22231$	$\bar{S}_h(0) = 10, \bar{I}_h(0) = 0.10,$ $\bar{D}_h(0) = 0.10, \bar{R}_h(0) = 1,620,$ $\bar{S}_v(0) = 1,200.40, \bar{I}_v(0) = 0.10$ $R_0 = 2.22231$
	สู่เข้า ณ เวลา (วัน)	สู่เข้า ณ เวลา (วัน)
$\bar{I}_h$	1,690	3,080
$\bar{S}_h$	1,980	2,506
$\bar{D}_h$	1,960	2,430
$\bar{R}_h$	1,830	2,320
$\bar{S}_v$	1,740	2,180
$\bar{I}_v$	1,910	2,550

จากรูปที่ 4.87 – รูปที่ 4.98 สรุปได้ว่า พารามิเตอร์ชุดเดียวกัน แม้จะเปลี่ยนจุดเริ่มต้นให้

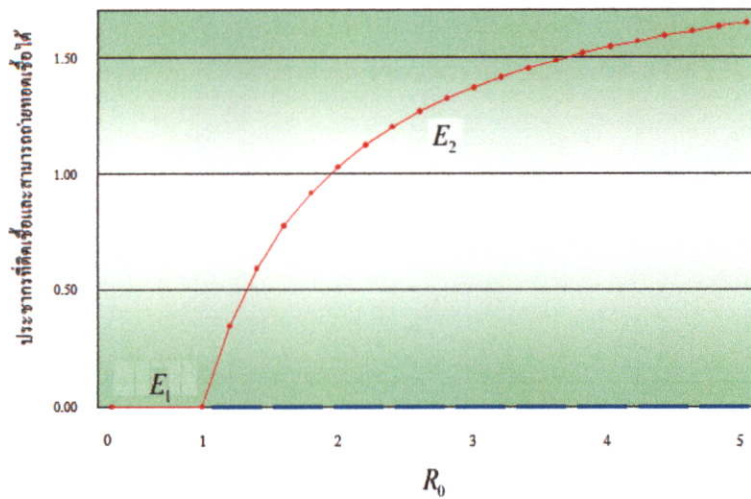
แตกต่างกันแต่ก็ยังจะสู่เข้าจุดสมดุลเดียวกันและชุดข้อมูลที่มีค่าเริ่มต้นเข้าใกล้จุดสู่เข้าจะหาจุดสมดุลได้

เร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีค่าเริ่มต้นที่อยู่ห่างไกลจากจุดสมดุล

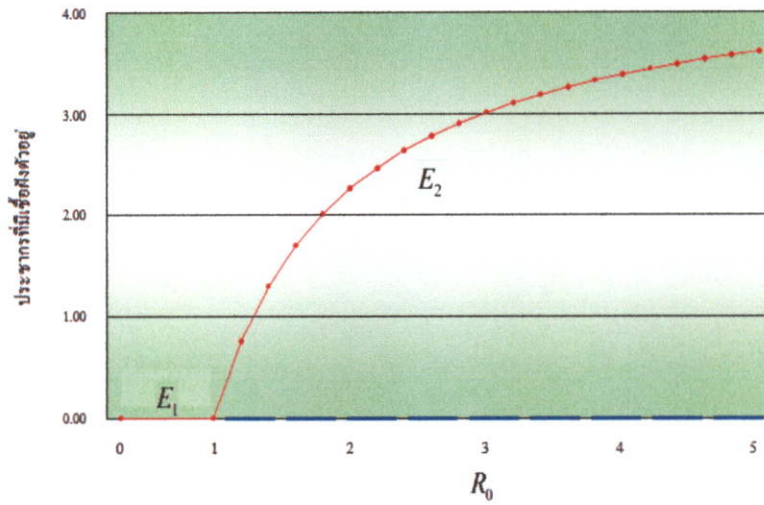
### แผนภาพไบเฟอร์เคชัน (Bifurcation) ของจุดสมดุล



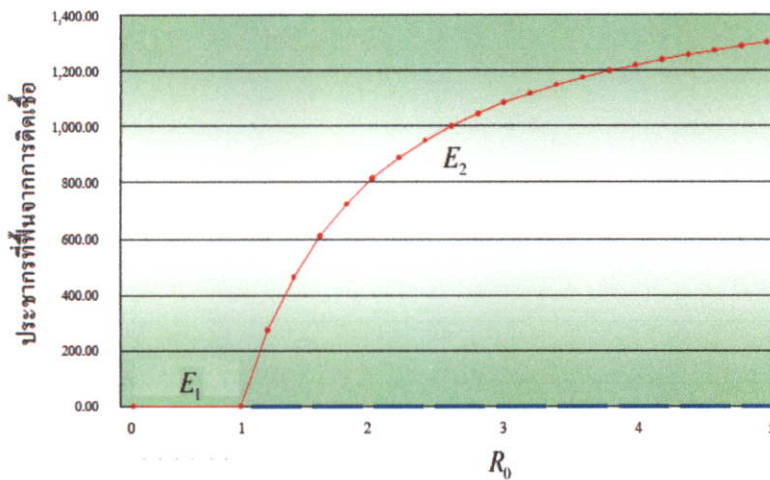
รูปที่ 4.99 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



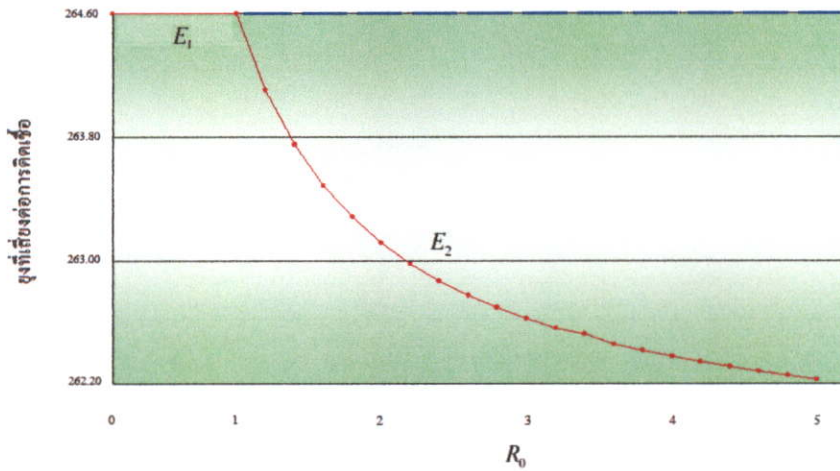
รูปที่ 4.100 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



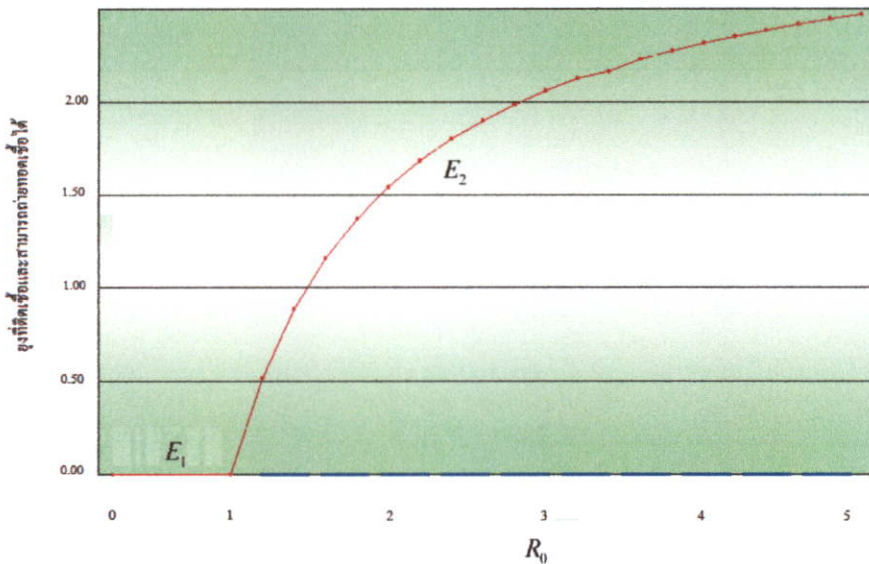
รูปที่ 4.101 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}\bullet\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 4.102 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}\bullet\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 4.103 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 4.104 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพจำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ สภาวะสมดุลเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยที่  $\text{---}$  แทนความเสถียรภาพ และ  $\text{---}$  แทนความไม่เสถียรภาพ

จากรูปที่ 4.99 – รูปที่ 4.104 พบว่า  $E_1$  มีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0$  น้อยกว่า 1 และถ้า  $R_0$  มากกว่า 1  $E_1$  จะมีความไม่เสถียรภาพ ในทางกลับกันจะพบว่า  $E_2$  มีความเสถียรภาพเมื่อ  $R_0$  มากกว่า 1 ดังนั้นสรุปได้ว่า จุดสมดุลในสภาวะไร้โรคจะมีความเสถียรภาพเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง และจุดสมดุลในสภาวะระบาดเรื้อรังจะมีความเสถียรภาพเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมากกว่าหนึ่ง

## บทที่ 5

### สรุปผลการดำเนินงาน อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

#### 5.1 สรุปผลงานวิจัย

##### 1) กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดคงที่

งานวิจัยฉบับนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรีย

ชนิดเชื้อพลาสโมเดียม ไวกัวแว็กซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้สมการอนุพันธ์ของ ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ , ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ , ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ , ยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ พบว่าผลเฉลยของแบบจำลองที่ได้ นั้นจะได้จุดสมดุล 2 จุดคือจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของพารามิเตอร์ และค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ( $R_0$ ) โดยที่

$$R_0 = \frac{(N_h N_v \delta'_h \delta'_v (q_2 + q_3 + \lambda_h) + \beta q_1 q_2 \mu_v)}{(q_2 + q_3 + \lambda_h)(q_1 + q_5 + \lambda_h) \mu_v}$$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่ง จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคจะมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง แต่ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่งจะทำให้จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคจะไม่เสถียรภาพ

ภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังพบว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมดุลคือ ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่มากกว่าจะเข้าสู่หาจุดสมดุลได้เร็วกว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่น้อยกว่า , จำนวนยุงก็มีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมดุลคือ จำนวนยุงที่มากจะเข้าสู่หาจุดสมดุลได้เร็วกว่าจำนวนยุงที่น้อยกว่า และค่าเริ่มต้นก็มี

ผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมดุลคือ ค่าเริ่มต้นที่เข้าใกล้จุดสมดุลจะเข้าสู่หาจุดสมดุลได้เร็วกว่าค่าเริ่มต้นที่อยู่ห่างไกลจากจุดเริ่มต้น การควบคุมโรคมalariaเรื้อขนิคเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ สามารถทำได้โดยการควบคุมประชากรยุงที่มีผลต่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยปีงบประมาณพ.ศ.2554 ประเทศไทยมีประชากรมนุษย์ทั้งหมด 64,076,033 คน หากเกิดการระบาดของโรคมalariaเรื้อขนิคเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จะต้องมีจำนวนยุงก้นปล่องเพศเมียมากกว่า 19,991,722 ตัว จึงจะเกิดการระบาดของโรค ซึ่งค่าสืบพันธุ์พื้นฐานจะมีค่ามากกว่าหนึ่ง และถ้ามีจำนวนยุงก้นปล่องเพศเมียน้อยกว่า 19,991,722 ตัว ก็จะไม่เกิดการระบาดของโรคนี้ ซึ่งค่าสืบพันธุ์พื้นฐานจะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

## 2) กรณีที่จำนวนประชากรทั้งหมดไม่คงที่

งานวิจัยฉบับนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคมalariaเรื้อขนิคเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ที่มีการเคลื่อนย้ายของประชากร แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้สมการอนุพันธ์ของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ , ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ , ประชากรที่มีเชื้อแฝงตัวอยู่ , ประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ , ยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ , ยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ พบว่าผลเฉลยของแบบจำลองที่ได้นั้นจะได้จุดสมดุล 2 จุดคือจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของพารามิเตอร์ และค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ( $R_0$ ) โดยที่

$$R_0 = \frac{(\delta'_h \theta N_h L \delta'_v (m_o - m_i + \lambda_h + q_2 + q_3)) + ((m_o - m_i + \lambda_h) q_2 \beta q_1 \mu_v^2)}{(m_o - m_i + \lambda_h)(m_o - m_i + \lambda_h + q_2 + q_3)(m_o - m_i + \lambda_h + q_1 + q_5) \mu_v^2}$$

จุดสมมูลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่ง จุดสมมูลภายใต้สภาวะไร้โรคจะมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง แต่ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่งจะทำให้จุดสมมูลภายใต้สภาวะไร้โรคจะไม่เสถียรภาพ

ภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังพบว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมมูลคือ ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่มากกว่าจะเข้าสู่หาจุดสมมูลได้เร็วกว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่น้อยกว่า , จำนวนยุง ณ เวลาเริ่มต้นก็มีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมมูลคือ จำนวนยุง ณ เวลาเริ่มต้นที่มากจะเข้าสู่หาจุดสมมูลได้เร็วกว่าจำนวนยุง ณ เวลาเริ่มต้นที่น้อยกว่า และค่าเริ่มต้นก็มีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมมูลคือ ค่าเริ่มต้นที่เข้าใกล้จุดสมมูลจะเข้าสู่หาจุดสมมูลได้เร็วกว่าค่าเริ่มต้นที่อยู่ห่างไกลจากจุดเริ่มต้น การควบคุมโรคมมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ สามารถทำได้โดยการควบคุมประชากรยุงที่มีผลต่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน หากเกิดการระบาดของโรคมมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ โดยปีงบประมาณพ.ศ.2554 ประเทศไทยมีประชากรมนุษย์ทั้งหมด 64,076,033 คน หากเกิดการระบาดของโรคมมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จะต้องมีจำนวนยุงก้นปล่องเพศเมียมากกว่า 9,611,404 ตัว จึงจะเกิดการระบาดของโรค ซึ่งค่าสืบพันธุ์พื้นฐานจะมีค่ามากกว่าหนึ่ง และถ้ามีจำนวนยุงก้นปล่องเพศเมียน้อยกว่า 9,611,404 ตัว ก็จะไม่เกิดการระบาดของโรคนี้ ซึ่งค่าสืบพันธุ์พื้นฐานจะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

แนวทางลดการระบาดของโรคมัลติเรียชนิดเชื้อพลาสมาโมเดียมไวแวกซ์ที่เสนอในงานวิจัยนี้ เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามข้อมูลของการระบาดของโรคมัลติเรียชนิดเชื้อพลาสมาโมเดียมไวแวกซ์เพื่อเป็นการตรวจสอบผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ได้ ผู้วิจัยจึงนำโปรแกรม Mathematica มาช่วยในการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาเงื่อนไขของการระบาดภายใต้สภาวะไร้อโรค และสภาวะระบาดเรื้อรัง โดยผลที่ได้จะบอกให้ทราบถึง การเปลี่ยนแปลงของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เทียบกับเวลา , การเปลี่ยนแปลงของประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ที่เทียบกับเวลา , การเปลี่ยนแปลงของประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ที่เทียบกับเวลา , การเปลี่ยนแปลงของประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อที่เทียบกับเวลา , การเปลี่ยนแปลงของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เทียบกับเวลา , การเปลี่ยนแปลงของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ที่เทียบกับเวลา และค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

1. เนื่องจากโรคมัลติเรียนี้พบได้ทั้งในเพศชายและเพศหญิง จึงควรทำการแยกกลุ่มประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อระหว่างเพศชายกับเพศหญิง ว่ากลุ่มใดมีอัตราการแพร่เชื้อสูงกว่ากันและมีผลต่อการระบาดของโรคนี้อหรือไม่ อย่างไร

## เอกสารอ้างอิง

- [1] สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. “สถานการณ์โรคมาลาเรีย”. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก: <http://www.thaivbd.org> (วันที่สืบค้นข้อมูล: 10 มกราคม 2554).
- [2] สำนักโรคติดต่อวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. “โรคมมาลาเรีย”. [ออนไลน์]. [http://www.boe.moph.go.th/boedb/surdata/506wk/y54/d30\\_5154.pdf](http://www.boe.moph.go.th/boedb/surdata/506wk/y54/d30_5154.pdf) (วันที่สืบค้นข้อมูล: 25 มกราคม 2554).
- [3] สำนักบริหารการทะเบียน กรมการปกครอง กระทรวงมหาดไทย. “รายงานสถิติจำนวนการย้ายออกประจำปี พ.ศ.2554[ออนไลน์]. [http://stat.bora.dopa.go.th/xstat/tran/moveout54\\_1.html](http://stat.bora.dopa.go.th/xstat/tran/moveout54_1.html) (วันที่สืบค้นข้อมูล: 26 มกราคม 2554).
- [4] สำนักบริหารการทะเบียน กรมการปกครอง กระทรวงมหาดไทย. “รายงานสถิติจำนวนการย้ายเข้าประจำปี พ.ศ.2554[ออนไลน์]. [http://stat.bora.dopa.go.th/xstat/tran/movein54\\_1.html](http://stat.bora.dopa.go.th/xstat/tran/movein54_1.html) (วันที่สืบค้นข้อมูล: 26 มกราคม 2554).
- [5] P.Pongsumpun and I.M.Tang, “Transmission Model for *Plasmodium Vivax* Malaria: Conditions for Bifurcation”, *Int j Biol and Med Sci*, vol.3(3),pp.161-168,2008.
- [6] P.Pongsumpun, and I.M.Tang, “Mathematical Model for the Transmission of Plasmodium Vivax Malaria,” *Int j Math Models and Method in Applied Sci*, vol. 3,pp. 117-121,2007.
- [7] P.Pongsumpun, K.Patanarapelert , M.Sripom, S.Varamit, and I.M.Tang, “Infection Risk to Travelers Going to Dengue Fever Endemic Regions,” *Southeast Asian J Trop Med Publ Health*, vol. 35, pp. 155 – 159,2004.
- [8]P.Pongsumpun and I.M.Tang, “Mathematical Model for the Transmission of *P.falciparum* and *P.vivax* Malaria Along the Thai-Myanmar Border,” *Int j Biol and Med Sci*, vol.3(3),pp.200-207, 2008

[9] P.Pongsumpun and I.M.Tang, "Mathematical Model of *Plasmodium Vivax* and *Plasmodium Falciparum* Malaria", *Int j math models and method in applied sci* , vol.3(3), pp. 283-290, 2009.

[10]A.Kammanee, N.Kanyamee and IM.Tang,"Basic Reproduction Number for the Transmission of *Plasmodium Vivax* Malaria", *Southeast Asian J Trop Med Public Health*, vol.32(4),pp.702-706,2001.

[11]K.Nah, Y.Kim and J.M.Lee, "The Dilution Effect of the Domestic Animal Population on the Transmission of *P.vivax* Malaria", *Journal of Theoretical Biology.* , vol.266,pp.702-706,2010.

## ภาคผนวก

## ผลงานทางวิชาการ

- [1] เซาวนิตี เทียมแพ, พันธนี พงศ์สัมพันธ์ และ ปรียาภรณ์ มุมทอง, “แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่สำหรับ โรคมาลาเรียชนิดเชื้อ ไวเวกซ์”, *Proceedings of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011)*, pp. 363-372, 2011.
- [2] C.Teampae and P.Pongsumpun, “THE RELAPSED TRANSMISSION MODEL OF PLASMODIUM VIVAX”, *37th Congress on Science and Technology of Thailand*, 2011.
- [3] เซาวนิตี เทียมแพ และ พันธนี พงศ์สัมพันธ์, “แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการฟักตัวของโรคมาลาเรียชนิดไวเวกซ์”, *Proceedings of the 18th Annual Meeting in Mathematics (AMM2013)*, pp.639 - 651, 2013.

## แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่สำหรับโรคมาเลเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์

เชาวนิตี เทียมแพ<sup>1</sup>, พันชนี พงศ์สัมพันธ์<sup>1</sup>, ปรียากรณ์ มุมทอง<sup>1</sup>

<sup>1</sup>สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

### บทคัดย่อ

ในปัจจุบันนี้ วิทยาการทางการแพทย์ก้าวหน้าขึ้น ทำให้มีการค้นพบว่าไข้มาลาเรียเกิดจากเชื้อปรสิตสกุล พลาสโมเดียม (*Plasmodium*) 4 ชนิดได้แก่ ฟัลซิพารัม (*falciparum*), ไวแวกซ์ (*vivax*), โอวัลเล่ (*ovale*) และมาลาเรีย (*malaria*) โดย ฟัลซิพารัม (*falciparum*) และ มาลาเรีย (*malaria*) จะทำลายเซลล์เม็ดเลือดแดงทุกระยะ แต่ ไวแวกซ์ (*vivax*) และ โอวัลเล่ (*ovale*) นั้น จะฆ่าเฉพาะเซลล์เม็ดเลือดแดงที่ยังเจริญเติบโตไม่สมบูรณ์เท่านั้น โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยนั้นมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (*Plasmodium falciparum*) และพลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) โรคนี้พบได้บ่อยในทวีปแอฟริกา อเมริกา และเอเชีย พบได้ทั้งในเขตร้อนและกึ่งเขตร้อน ส่วนในประเทศไทยเองสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า เฉพาะตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่น ชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา โดยจังหวัดที่มีการรายงานพบผู้ป่วยมาลาเรียเป็นจำนวนมากคือ จังหวัดตาก กาญจนบุรี ตราด ราชบุรี แม่ฮ่องสอน เป็นต้น โดยจะพบในเขตพื้นที่ที่เป็นป่าเขาเท่านั้น ไม่พบมาลาเรียในเขตเมือง ยุ้งก้นปล่องเป็นพหุผลึกในการนำเชื้อโรคมาลาเรีย งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการระบาดโรคมาเลเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์ โดยที่มีการเคลื่อนที่ของประชากร ซึ่งพิจารณาถึงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของประชากรคนและยุง จากนั้นประยุกต์วิธีการของแบบจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (*standard dynamical modeling*) มาวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลแต่ละจุด พร้อมทั้งแสดงการวิเคราะห์การควบคุมโรคมาลาเรีย

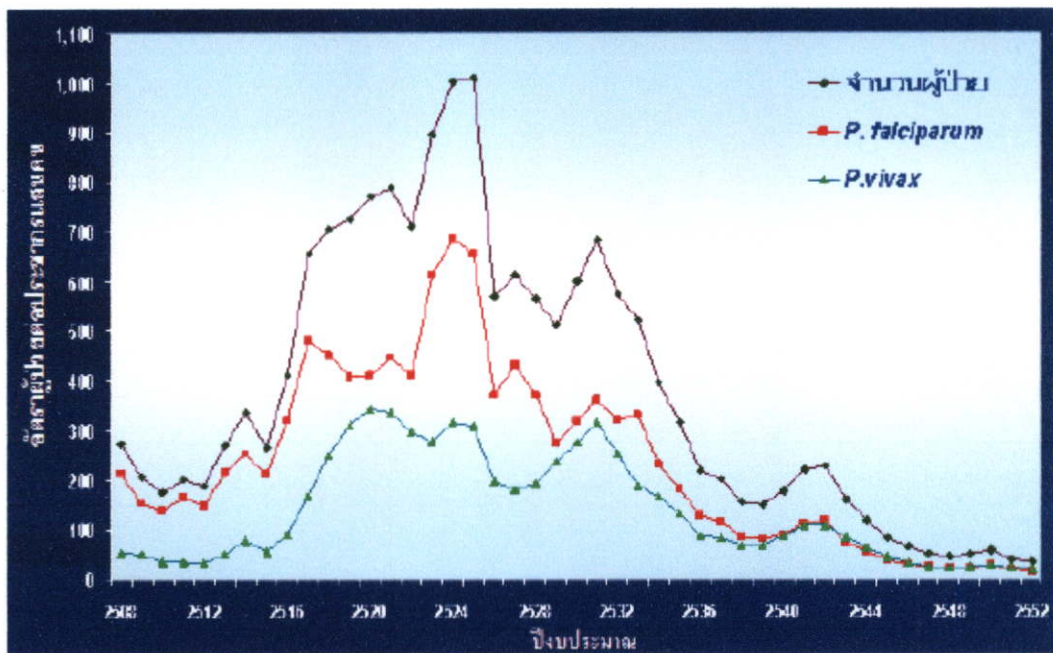
**คำสำคัญ:** พลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*); จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (*disease free state*); จุดสมดุลสภาวะระบาดเรื้อรัง (*disease endemic state*); มาเลเรีย (*malaria*)

### 1. บทนำ

องค์การอนามัยโรคประมาณกันว่าในแต่ละปีจะมีผู้ป่วยเป็นมาลาเรียถึงปีละ 300-400 ล้านคนทั่วโลก และมีคนเสียชีวิตปีละประมาณ 1 ล้านคน โดยส่วนใหญ่เกิดในทวีปแอฟริกา ส่วนในประเทศไทยเองสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่าโดยเฉพาะตามเขตชายแดนติดกับประเทศเพื่อนบ้านเช่น ชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา โรคมาลาเรียเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อปรสิตสกุลพลาสโมเดียม (*Plasmodium*) 4 ชนิดได้แก่ ฟัลซิพารัม (*falciparum*), ไวแวกซ์ (*vivax*), โอวัลเล่ (*ovale*) และมาลาเรีย (*malaria*) โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (*Plasmodium falciparum*) กับ พลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) โดยยุงก้นปล่องเป็นพหุผลึกในของการนำเชื้อโรคมาลาเรีย อาการของโรคนี้ขึ้นอยู่กับชนิดเชื้อ ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (*Plasmodium falciparum*) ในระยะแรกของโรคจะมีอาการไข้ปวดเมื่อยตามตัว คลื่นไส้ อาเจียน ปวดท้องหรือท้องเดิน บางคนอาจมีอาการไอหรือลักษณะคล้ายไข้หวัดได้ใน 4 – 5 วันแรกของโรค ไข้จะสูงลอยตลอดเวลา เนื่องจากการแตกของเม็ดเลือดแดงแต่ละชุดไม่พร้อมกัน แต่หลังจากเชื้อมาลาเรียเจริญอยู่ในระยะ

364 ชาวนิติ เทียมแพ, พันชนี พงศ์สัมพันธ์ และปริยาภรณ์มูมทอง

เดียวกันแล้ว เม็ดเลือดแดงจะแตกพร้อมกันทุก 48 ชั่วโมง อาการของผู้ที่ติดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) ผู้ป่วยที่เป็นไวแวกซ์มาลาเรียมักจะไม่เสียชีวิต จึงมีชื่อว่า "benign tertian malaria" แต่ผู้ป่วยจะเป็นโรคซ้ำอีก อาการของผู้ป่วยไวแวกซ์มาลาเรีย จะมีลักษณะคล้ายกับฟัลซิพาร์มาลาเรีย แต่จะพบหนาวสั่นได้บ่อยกว่า และขณะเกิดหนาวสั่น มักมีอาการปวดหัว ปวดกล้ามเนื้อมาก ผู้ป่วยที่ไม่ได้รับการรักษาอาการไข้จะค่อยๆ ทุเลาและหายได้ แต่จะเป็นซ้ำได้อีกภายใน 2 ปี นานที่สุด 8 ปี อาการของผู้ที่ติดเชื้อพลาสโมเดียมโอวัลเล่ (*Plasmodium ovale*) อาการของผู้ป่วยที่ติดเชื่อนิตโอวัลเล่ จะมีลักษณะคล้ายกับไวแวกซ์มาลาเรีย แต่จะมีอาการน้อยกว่า และมีเชื้อกลับเป็นซ้ำน้อยกว่า ถ้าไม่ได้รับการรักษาอาการไข้จะทุเลาและหายไปได้เอง แต่เป็นซ้ำได้อีกภายใน 1 ปี นานที่สุด 5 ปี อาการของผู้ที่ติดเชื้อ พลาสโมเดียมมาลาเรีย (*Plasmodium malaria*) จะทำให้เกิดมีอาการไข้หนาวสั่นวันเว้น 3 วัน คือมีไข้วันที่ 1 แล้วสบายอยู่ 3 วัน วันที่ 4 จึงมีไข้อีก จึงเรียกว่า "quartan malaria" ผู้ป่วยมักไม่มีอาการรุนแรง และกว่าจะเกิดอาการไข้ อาจใช้เวลานานเป็นปี เชื้อมาลาเรียอยู่ในคนได้เป็นเวลานานหลายปี มีรายงานนานถึง 53 ปี [1]-[2] ในประเทศไทยในปีประมาณ 2552 จังหวัดที่พบผู้มาลาเรียสูง 10 จังหวัดแรกคือ จังหวัดตาก แม่ฮ่องสอน หนอง พังงา ยะลา ชุมพร กาญจนบุรี ตรัง จันทบุรี และ ประจวบคีรีขันธ์ มีจำนวนผู้ป่วย 23,327 คน แยกเป็นชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) 13,616 คน และเชื่อนิตพลาสโมเดียมฟัลซิพาร์มา (*Plasmodium falciparum*) 9,486 คน [3] กราฟแสดงอัตราจำนวนผู้ป่วยแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 1 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคน ใน ปีงบประมาณ 2508-2552

ด้วยการเล็งเห็นความสำคัญของชีวิตและทรัพย์สินของประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชืโรคนี้ ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รับรวบรวมจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2508-2552 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหาโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรีย เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวังของสำนักระบาดวิทยาและกรมควบคุมโรคติดต่อ กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

## 2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในการศึกษาค้นคว้านี้ ได้ทำการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาเลเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรสองกลุ่มคือ ระหว่างประชากรมนุษย์และยุง ซึ่งกลุ่มประชากรมนุษย์จะมีขนาดไม่คงที่ ในกลุ่มประชากรมนุษย์จะแบ่งออกเป็น 4 กรณี ได้แก่ ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, ประชากรที่ติดเชื้อ, ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่, ประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ในกลุ่มของยุงแบ่งออกเป็น 2 กรณี ได้แก่ ยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ และยุงที่ติดเชื้อ ซึ่งสมการพลศาสตร์ของประชากรมนุษย์ สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\bar{S}_h = \theta N_h + q_3 \bar{D}_h + q_4 \bar{R}_h + (1-\beta)q_1 \bar{I}_h - (-m_i + m_0 + \lambda_h + \delta'_h \bar{I}_v) \bar{S}_h \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{I}_h = \delta'_h \bar{I}_v \bar{S}_h + q_2 \bar{D}_h - (-m_i + m_0 + \lambda_h + q_1 + q_5) \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{D}_h = \beta q_1 \bar{I}_h - (-m_i + m_0 + \lambda_h + q_2 + q_3) \bar{D}_h \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{R}_h = q_5 \bar{I}_h - (-m_i + m_0 + \lambda_h + q_4) \bar{R}_h \quad (2.4)$$

โดยที่  $\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{D}_h$  และ  $\bar{R}_h$  เป็นประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, ประชากรที่ติดเชื้อ, ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่, ประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ตามลำดับ

ตารางที่ 1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและยุง

ข้อความ	สัญลักษณ์	ข้อความ	สัญลักษณ์
อัตราการเกิดของประชากร	$\theta$	อัตราการอพยพออกของประชากร	$m_0$
อัตราการตายของประชากร	$\lambda_h$	อัตราการตายของยุง	$\mu_v$
จำนวนประชากรทั้งหมด	$N_h$	จำนวนยุง ณ เวลาเริ่มต้น	$L$
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากยุงไปประชากร	$\delta'_h$	อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากประชากรไปยุง	$\delta'_v$
อัตราที่ผู้ติดเชื้อ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ	$q_1$	อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์	$q_3$
อัตราการอพยพเข้าของประชากร	$m_i$	ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	$\beta$
อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	$q_4$	อัตราการที่เชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	$q_2$
อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์	$q_5$		

366 เขาวนิตี เกียมแพ, พันชนี พงศ์สัมพันธ์ และปริยาภรณ์ มุมทอง

สมการพลศาสตร์ของยุง มีดังนี้

$$\frac{d}{dt} \bar{S}_v = L - \mu_v \bar{S}_v - \delta'_v \bar{S}_v \bar{I}_h \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{I}_v = \delta'_v \bar{S}_v \bar{I}_h - \mu_v \bar{I}_v \quad (1.6)$$

โดยที่  $\bar{S}_v$  และ  $\bar{I}_v$  เป็นจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและจำนวนยุงที่ติดเชื้อ ตามลำดับ และ  $N_v = \bar{S}_v + \bar{I}_v$  เป็นจำนวนยุงทั้งหมด

### 3. การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

#### 3.1 จุดสมดุล

จุดสมดุล  $(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{I}_v)$  หาได้จากการจัดสมการ (2.1) - (2.6) ให้เท่ากับศูนย์ จะได้จุดสมดุลสองจุด

คือจุดสมดุลภายในได้สมการไว้โรค  $E_1 \left( 0, \frac{\theta N_h}{A}, 0, 0, 0 \right)$  และสมการระบาดอย่างแท้จริง  $E_2 (\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{I}_v)$  เมื่อ

$$\bar{I}_h = \frac{(A+q_4)(\theta N_h N_v \delta'_h \delta' (A+q_2+q_3) + A\beta q_1 q_2 \mu_v) - A\mu_v (A+q_2+q_3)(A+q_4)(A+q_1+q_5)}{A\delta'_v (q_1(A+q_4)(A-(-1+\beta)q_2+q_3 + \beta N_v \delta'_h) + (A+q_2+q_3)((A+q_4)(A+q_5) + N_v(A+q_4+q_5)\delta'_h))}$$

$$\bar{S}_h = \frac{\theta N_h + \frac{\beta q_1 q_3 \bar{I}_h}{A+q_2+q_3} + \frac{q_4 q_5 \bar{I}_h}{A+q_4} + (1-\beta) q_1 \bar{I}_h}{A + \frac{\delta'_h \delta'_v \bar{I}_h N_v}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v}}$$

$$\bar{D}_h = \frac{\beta q_1 \bar{I}_h}{A+q_2+q_3}$$

$$\bar{R}_h = \frac{q_5 \bar{I}_h}{A+q_4}$$

$$\bar{I}_v = \frac{\delta'_v \bar{I}_h N_v}{\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v}$$

โดยที่  $\bar{I}_h$  เป็นผลเฉลยของสมการ

$$A_1 (\bar{I}_h)^2 + A_2 \bar{I}_h = 0$$

ผลเฉลยของสมการ คือ  $\bar{I}_h = 0$  และ  $\bar{I}_h = \frac{A_2}{A_1}$  เมื่อ

$$A_2 = (A+q_4)(\theta N_h N_v \delta'_h \delta' (A+q_2+q_3) + A\beta q_1 q_2 \mu_v) - A\mu_v (A+q_2+q_3)(A+q_4)(A+q_1+q_5)$$

$$A_1 = A\delta'_v (q_1(A+q_4)(A-(-1+\beta)q_2+q_3 + \beta N_v \delta'_h) + (A+q_2+q_3)((A+q_4)(A+q_5) + N_v(A+q_4+q_5)\delta'_h))$$

$$\text{เงื่อนไขที่ทำให้ } \bar{I}_h > 0 \text{ และ } D_0 > 1, \left( D_0 = \frac{(\theta N_h N_v \delta'_h \delta' (A + q_2 + q_3) + A \beta q_1 q_2 \mu_v)}{A \mu_v (A + q_2 + q_3)(A + q_1 + q_5)} \right)$$

### 3.2 ความเสถียรภาพ

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลจะพิจารณาในรูปค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ของเมทริกซ์จาโคเบียน ถ้าค่าลักษณะเฉพาะ มีค่าเป็นลบ แสดงว่าจุดสมดุลนั้นมีความเสถียรภาพ จากระบบสมการ (1.1) - (1.6) นำมาเขียนในรูปของเมทริกซ์จาโคเบียนได้ดังนี้

$$J = \begin{pmatrix} -(A + q_1 + q_5) & \delta'_h \bar{I}_v & q_2 & 0 & \delta'_h \bar{S}_h \\ (1 - \beta) q_1 & -(A + \delta'_h \bar{I}_v) & q_3 & q_4 & -\delta'_h \bar{S}_h \\ \beta q_1 & 0 & -(A + q_2 + q_3) & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & 0 & -(A + q_4) & 0 \\ \delta'_v N_v - \delta'_v \bar{I}_v & 0 & 0 & 0 & -(\delta'_v \bar{I}_h + \mu_v) \end{pmatrix}_{(\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{I}_v)}$$

พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

$$\det(J - \lambda I_5) = 0$$

### 3.3 จุดสมดุลภายในสภาวะไร้โรค

จุดสมดุลภายในสภาวะไร้โรค  $E_1 \left( 0, \frac{\theta N_h}{A}, 0, 0, 0 \right)$  ได้สมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$(-A - q_1 - q_5 - \lambda)(-A - \delta'_h \bar{I}_v - \lambda)(-A - q_2 - q_3 - \lambda)(-A - q_4 - \lambda)(-\delta'_v \bar{I}_h - \mu_v - \lambda) = 0$$

จากสมการลักษณะเฉพาะจะได้ค่าลักษณะเฉพาะ 5 ค่าดังนี้

$$\lambda_1 = -A - q_1 - q_5, \lambda_2 = -A - \delta'_h \bar{I}_v, \lambda_3 = -A - q_2 - q_3, \lambda_4 = -A - q_4, \lambda_5 = -\delta'_v \bar{I}_h - \mu_v$$

พบว่ามีค่าลักษณะเฉพาะเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพเมื่อ  $D_0 < 1$

### 3.4 จุดสมดุลภายในสภาวะระบาดเรื้อรัง

จุดสมดุลภายในสภาวะระบาดเรื้อรัง  $E_2 (\bar{I}_h, \bar{S}_h, \bar{D}_h, \bar{R}_h, \bar{I}_v)$  ได้สมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\lambda^5 + T_5 \lambda^4 + T_4 \lambda^3 + T_3 \lambda^2 + T_2 \lambda + T_1 = 0$$

เมื่อ

368 เชาวณิณี เขียวแพ, พันธณี พงศ์สัมพันธ์ และปวีณาภรณ์ มุกทอง

$$T_3 = 4 A + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + i_v \delta_h + i_h \delta_v + \mu_v,$$

$$T_4 = 6 A^2 + 3 A q_1 + 3 A q_2 + q_1 q_2 - \beta q_1 q_2 + 3 A q_3 + q_1 q_3 + 3 A q_4 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 + 3 A q_5 + q_2 q_5 + q_3 q_5 + q_4 q_5 + 3 A i_v \delta_h + \beta i_v q_1 \delta_h + i_v q_2 \delta_h + i_v q_3 \delta_h + i_v q_4 \delta_h + i_v q_5 \delta_h + 4 A i_h \delta_v + i_h q_1 \delta_v + i_h q_2 \delta_v + i_h q_3 \delta_v + i_h q_4 \delta_v + i_h q_5 \delta_v + i_h i_v \delta_h \delta_v + \frac{i_v \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A} - \frac{N_v \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A} + 4 A \mu_v + q_1 \mu_v + q_2 \mu_v + q_3 \mu_v + q_4 \mu_v + q_5 \mu_v + i_v \delta_h \mu_v,$$

$$T_5 = 4 A^3 + 3 A^2 q_1 + 3 A^2 q_2 + 2 A q_1 q_2 - 2 A \beta q_1 q_2 + 3 A^2 q_3 + 2 A q_1 q_3 + 3 A^2 q_4 + 2 A q_1 q_4 + 2 A q_2 q_4 + q_1 q_2 q_4 - \beta q_1 q_2 q_4 + 2 A q_3 q_4 + q_1 q_3 q_4 + 3 A^2 q_5 + 2 A q_2 q_5 + 2 A q_3 q_5 + 2 A q_4 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5 + 3 A^2 i_v \delta_h + 2 A \beta i_v q_1 \delta_h + 2 A i_v q_2 \delta_h + 2 A i_v q_3 \delta_h + 2 A i_v q_4 \delta_h + \beta i_v q_1 q_4 \delta_h + i_v q_2 q_4 \delta_h + i_v q_3 q_4 \delta_h + 2 A i_v q_5 \delta_h + i_v q_2 q_5 \delta_h + i_v q_3 q_5 \delta_h + 6 A^2 i_h \delta_v + 3 A i_h q_1 \delta_v + 3 A i_h q_2 \delta_v + i_h q_1 q_2 \delta_v - \beta i_h q_1 q_2 \delta_v + 3 A i_h q_3 \delta_v + i_h q_1 q_3 \delta_v + 3 A i_h q_4 \delta_v + i_h q_1 q_4 \delta_v + i_h q_2 q_4 \delta_v + i_h q_3 q_4 \delta_v + 3 A i_h q_5 \delta_v + i_h q_2 q_5 \delta_v + i_h q_3 q_5 \delta_v + i_h q_4 q_5 \delta_v + 3 A i_h i_v \delta_h \delta_v + 3 i_h i_v q_1 \delta_h \delta_v + i_h i_v q_2 \delta_h \delta_v + i_h i_v q_3 \delta_h \delta_v + i_h i_v q_4 \delta_h \delta_v + i_h i_v q_5 \delta_h \delta_v + 3 i_v \delta_h \delta_v \Theta N_h - 3 N_v \delta_h \delta_v \Theta N_h + \frac{i_v q_2 \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A} - \frac{N_v q_2 \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A} + \frac{i_v q_3 \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A} - \frac{N_v q_3 \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A}, \frac{i_v q_4 \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A} - \frac{N_v q_4 \delta_h \delta_v \Theta N_h}{A}, \frac{2 i_v^2 \delta_h^2 \delta_v \Theta N_h}{A} - \frac{2 i_v N_v \delta_h^2 \delta_v \Theta N_h}{A} + 6 A^2 \mu_v + 3 A q_1 \mu_v + 3 A q_2 \mu_v + q_1 q_2 \mu_v - \beta q_1 q_2 \mu_v + 3 A q_3 \mu_v + q_1 q_3 \mu_v + 3 A q_4 \mu_v + q_1 q_4 \mu_v + q_2 q_4 \mu_v + q_3 q_4 \mu_v + 3 A q_5 \mu_v + q_2 q_5 \mu_v + q_3 q_5 \mu_v + q_4 q_5 \mu_v + 3 A i_v \delta_h \mu_v + \beta i_v q_1 \delta_h \mu_v + i_v q_2 \delta_h \mu_v + i_v q_3 \delta_h \mu_v + i_v q_4 \delta_h \mu_v + i_v q_5 \delta_h \mu_v,$$

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่สำหรับโรตมาเดรีย... 369

$$\begin{aligned}
 T_2 = & A^4 + A^3 q_1 + A^3 q_2 + A^2 q_1 q_2 - A^2 \beta q_1 q_2 + A^3 q_3 + A^2 q_1 q_3 + A^3 q_4 + A^2 q_1 q_4 + A^2 q_2 q_4 + \\
 & A q_1 q_2 q_4 - A \beta q_1 q_2 q_4 + A^2 q_3 q_4 + A q_1 q_3 q_4 + A^3 q_5 + A^2 q_2 q_5 + A^2 q_3 q_5 + \\
 & A^2 q_4 q_5 + A q_2 q_4 q_5 + A q_3 q_4 q_5 + A^3 i_v \delta_h + A^2 \beta i_v q_1 \delta_h + A^2 i_v q_2 \delta_h + \\
 & A^2 i_v q_3 \delta_h + A^2 i_v q_4 \delta_h + A \beta i_v q_1 q_4 \delta_h + A i_v q_2 q_4 \delta_h + A i_v q_3 q_4 \delta_h + \\
 & A^2 i_v q_5 \delta_h + A i_v q_2 q_5 \delta_h + A i_v q_3 q_5 \delta_h + 4 A^3 i_h \delta_v + 3 A^2 i_h q_1 \delta_v + 3 A^2 i_h q_2 \delta_v + \\
 & 2 A i_h q_1 q_2 \delta_v - 2 A \beta i_h q_1 q_2 \delta_v + 3 A^2 i_h q_3 \delta_v + 2 A i_h q_1 q_3 \delta_v + 3 A^2 i_h q_4 \delta_v + \\
 & 2 A i_h q_1 q_4 \delta_v + 2 A i_h q_2 q_4 \delta_v + i_h q_1 q_2 q_4 \delta_v - \beta i_h q_1 q_2 q_4 \delta_v + 2 A i_h q_3 q_4 \delta_v + \\
 & i_h q_1 q_3 q_4 \delta_v + 3 A^2 i_h q_5 \delta_v + 2 A i_h q_2 q_5 \delta_v + 2 A i_h q_3 q_5 \delta_v + 2 A i_h q_4 q_5 \delta_v + \\
 & i_h q_2 q_4 q_5 \delta_v + i_h q_3 q_4 q_5 \delta_v + 3 A^2 i_h i_v \delta_h \delta_v + 2 A \beta i_h i_v q_1 \delta_h \delta_v + \\
 & 2 A i_h i_v q_2 \delta_h \delta_v + 2 A i_h i_v q_3 \delta_h \delta_v + 2 A i_h i_v q_4 \delta_h \delta_v + \beta i_h i_v q_1 q_4 \delta_h \delta_v + \\
 & i_h i_v q_2 q_4 \delta_h \delta_v + i_h i_v q_3 q_4 \delta_h \delta_v + 2 A i_h i_v q_5 \delta_h \delta_v + i_h i_v q_2 q_5 \delta_h \delta_v + \\
 & i_h i_v q_3 q_5 \delta_h \delta_v + 3 A i_v \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} - 3 A N_v \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} + 2 i_v q_2 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} - \\
 & 2 N_v q_2 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} + 2 i_v q_3 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} - 2 N_v q_3 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} + 2 i_v q_4 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} - \\
 & 2 N_v q_4 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} + \frac{i_v q_2 q_4 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h}}{A} - \frac{N_v q_2 q_4 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h}}{A}, \frac{i_v q_3 q_4 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h}}{A} \\
 & \frac{N_v q_3 q_4 \delta_h \delta_v \Theta_{N_h}}{A} + 4 i_v^2 \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h} - 4 i_v N_v \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h} + \frac{2 i_v^2 q_2 \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h}}{A} - \\
 & \frac{2 i_v N_v q_2 \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h}}{A} + \frac{2 i_v^2 q_3 \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h}}{A} - \frac{2 i_v N_v q_3 \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h}}{A} + \\
 & \frac{2 i_v^2 q_4 \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h}}{A} - \frac{2 i_v N_v q_4 \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h}}{A} + 4 A^3 \mu_v + 3 A^2 q_1 \mu_v + 3 A^2 q_2 \mu_v + \\
 & 2 A q_1 q_2 \mu_v - 2 A \beta q_1 q_2 \mu_v + 3 A^2 q_3 \mu_v + 2 A q_1 q_3 \mu_v + 3 A^2 q_4 \mu_v + 2 A q_1 q_4 \mu_v + \\
 & 2 A q_2 q_4 \mu_v + q_1 q_2 q_4 \mu_v - \beta q_1 q_2 q_4 \mu_v + 2 A q_3 q_4 \mu_v + q_1 q_3 q_4 \mu_v + 3 A^2 q_5 \mu_v + \\
 & 2 A q_2 q_5 \mu_v + 2 A q_3 q_5 \mu_v + 2 A q_4 q_5 \mu_v + q_2 q_4 q_5 \mu_v + q_3 q_4 q_5 \mu_v + 3 A^2 i_v \delta_h \mu_v + \\
 & 2 A \beta i_v q_1 \delta_h \mu_v + 2 A i_v q_2 \delta_h \mu_v + 2 A i_v q_3 \delta_h \mu_v + 2 A i_v q_4 \delta_h \mu_v + \beta i_v q_1 q_4 \delta_h \mu_v + \\
 & i_v q_2 q_4 \delta_h \mu_v + i_v q_3 q_4 \delta_h \mu_v + 2 A i_v q_5 \delta_h \mu_v + i_v q_2 q_5 \delta_h \mu_v + i_v q_3 q_5 \delta_h \mu_v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1 = & \frac{1}{A} (A^2 i_h (q_1 (A + q_4) (A - (-1 + \beta) q_2 + q_3 + \beta i_v \delta_h) + \\
 & (A + q_2 + q_3) ((A + q_5) (A + i_v \delta_h) + q_4 (A + q_5 + i_v \delta_h))) \delta_v + \\
 & 2 i_v^2 (A + q_2 + q_3) (A + q_4) \delta_h^2 \delta_v \Theta_{N_h} + A (A + q_4) (-N_v (A + q_2 + q_3) \delta_h \delta_v \Theta_{N_h} + \\
 & A (q_1 (A - (-1 + \beta) q_2 + q_3) + (A + q_2 + q_3) (A + q_5)) \mu_v) + \\
 & i_v \delta_h ((A + q_2 + q_3) (A + q_4) (A - 2 N_v \delta_h) \delta_v \Theta_{N_h} + \\
 & A^2 (\beta q_1 (A + q_4) + (A + q_2 + q_3) (A + q_4 + q_5)) \mu_v)
 \end{aligned}$$

ค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลภายใต้สภาวะขนาดเพื่อรั้งมีค่าเป็นลบ เมื่อสอดคล้องกับ Routh-Hurwitz Criteria [4]-[8] ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$T_5 > 0 \quad (3.1)$$

$$T_5 T_4 - T_3 > 0 \quad (3.2)$$

$$T_5 T_4 T_3 + T_5 T_1 - T_2 T_5^2 - T_3^2 > 0 \quad (3.3)$$

370 เขาวนิตี เขียวแพ, พันชนี พงศ์สัมพันธ์ และปริญญารัตน์ มุมทอง

$$T_2(T_5 T_4 T_3 - T_3^2 - T_5^2 T_2) - T_1(T_5 T_4^2 - T_3 T_4 - 2T_5 T_2 + T_1) > 0 \quad (3.4)$$

$$T_1(T_2(T_5 T_4 T_3 - T_3^2 - T_5^2 T_2) - T_1^2(T_5 T_4^2 - T_3 T_4 - 2T_5 T_2 + T_1)) > 0 \quad (3.5)$$

กำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมด 1000 คน นั่นคือ  $N_h = 1000$  คน, ประชากรหนึ่งคนมีอายุเฉลี่ย 70 ปี จำนวนประชากร

คงที่ทำให้อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการตายของประชากร ดังนั้น  $\theta = \lambda_h = \frac{1}{365 \times 70}$  ต่อวัน, ระยะเวลาของผู้ที่ติดเชื้อ

ก่อนแสดงอาการ 14 วันเท่ากับระยะเวลาของผู้ที่ฟื้นจากการป่วยแล้วกลับไปป่วยอีกครั้ง นั่นคือ  $q_1 = q_4 = \frac{1}{14}$  ต่อวัน,

ระยะเวลาที่เชื้อฝังตัวอยู่ในผู้ป่วย 10 วัน นั่นคือ  $q_2 = \frac{1}{10}$  ต่อวัน, ระยะเวลาที่ใช้ในการรักษาอาการป่วยเท่ากับระยะเวลาของ

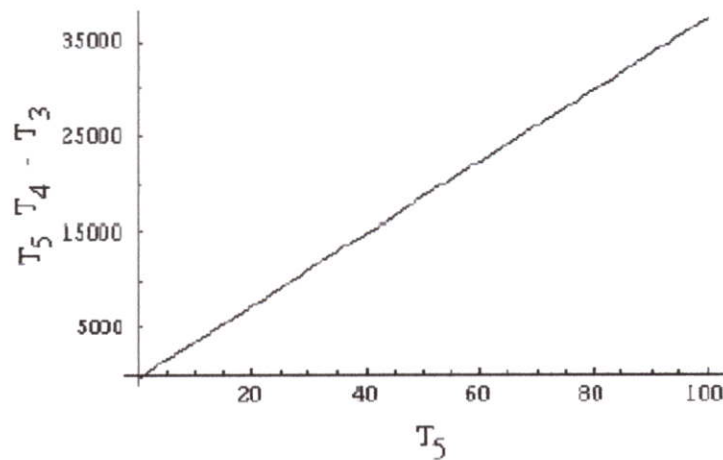
การฟื้นจากการติดเชื้อเป็นเวลา 20 วัน นั่นคือ  $q_3 = q_5 = \frac{1}{20}$  ต่อวัน, จำนวนผู้ทั้งหมด 900 ตัว นั่นคือ  $N_v = 900$  ตัว,

ผู้หนึ่งตัวมีอายุเฉลี่ย 35 วัน นั่นคือ  $\mu_v = \frac{1}{35}$  ต่อวัน, อัตราการอพยพเข้า - ออกของประชากรเท่ากับ 0.1 นั่นคือ

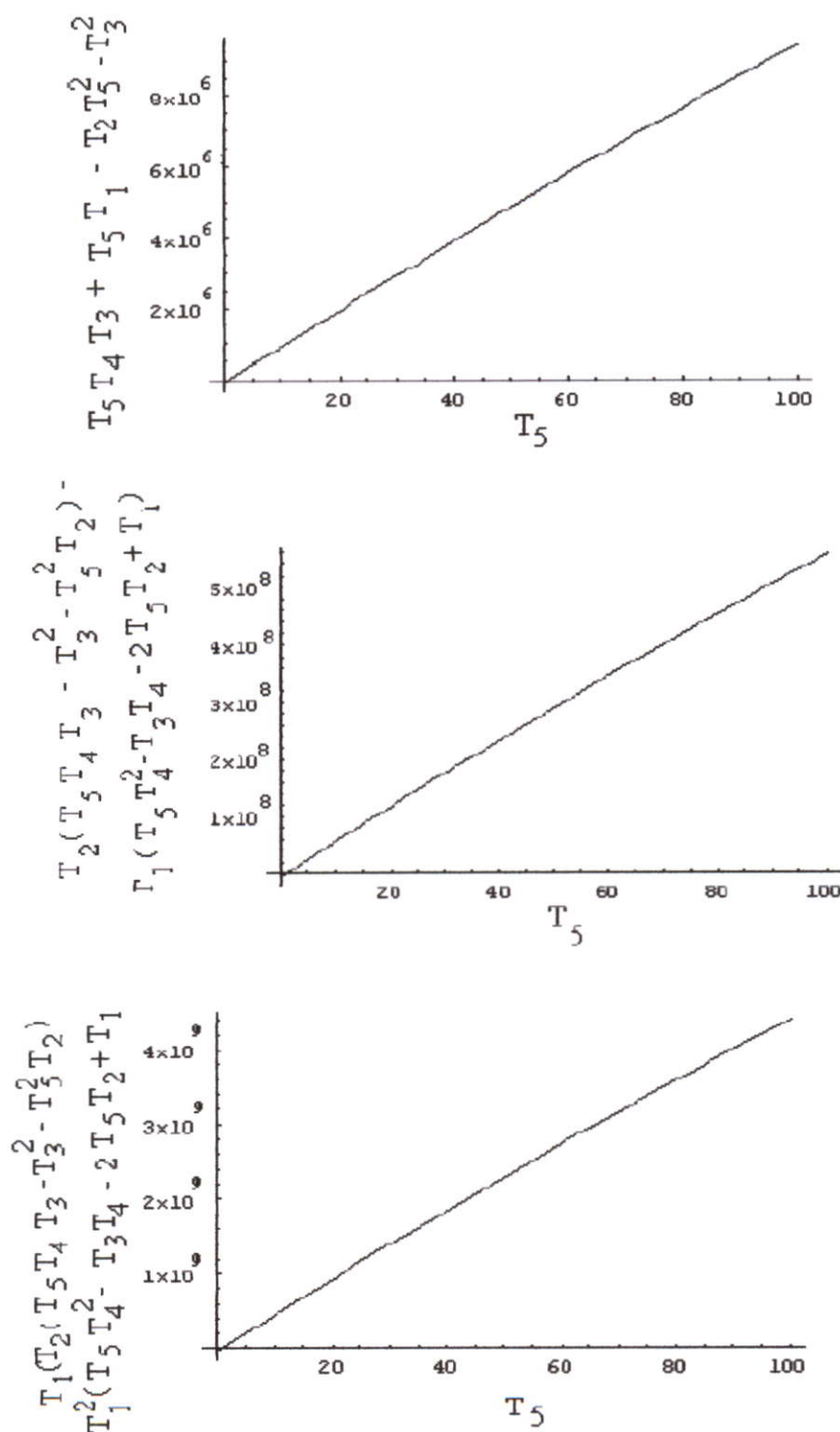
$m_1 = m_0 = 0.1$ , ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากรเท่ากับ 0.4 นั่นคือ  $\beta = 0.4$ , อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากผู้ไปประชากร

เท่ากับ 0.3 นั่นคือ  $\delta'_h = 0.3$ , อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากประชากรไปผู้เท่ากับ 0.2 นั่นคือ  $\delta'_v = 0.3$

พิจารณาเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria ดังนั้นจากสมการที่ (3.1) - (3.5) ใช้ค่าพารามิเตอร์ข้างต้น สามารถแสดงกราฟของสมการที่ (3.1) - (3.5) ได้ดังนี้



แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่สำหรับโรคมาเดเวีย... 371



รูปที่ 2 ภาพของค่าพหุนามดีเทอร์มิแนนต์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะขนาดเชิงจริง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria

372 เขาวนิตี เทียมแพ, พันธณี พงศ์สัมพันธ์ และปริยาภรณ์ มุมทอง

#### 4. บทสรุป

จากการสร้างแบบจำลองของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์ข้างต้นพบว่า เราสามารถหาจุดสมดุลได้ภายใต้ 2 สภาวะ คือ จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง ในแต่ละสภาวะ เราสามารถหาเงื่อนไขที่ส่งผลให้จุดสมดุลแต่ละจุดมีความเสถียรภาพ ในงานวิจัยนี้ได้เสนอแนวทางที่เป็นทางเลือกอีกทางหนึ่งในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์ ซึ่งตัวอย่างข้างต้นเป็นตัวอย่างของชุดพารามิเตอร์ที่ช่วยในการลดการระบาดของโรคนี้ได้ หากเราสามารถกำหนดพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของแต่ละสภาวะข้างต้นได้ เราก็สามารถควบคุมการระบาดของโรคมาลาเรียได้

#### บรรณานุกรม

- [1] <http://lifestyle.kingsolder.com>
- [2] <http://www.thaiclinic.com/medbible/malaria.html>
- [3] [www.thaivbd.org](http://www.thaivbd.org)
- [4] P.Pongsumpun, and I. M. Tang, "Mathematical model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria," *Int j math models and method in applied sci*, vol. 3, pp. 117-121, 2007.
- [5] P.Pongsumpun, K. Patanarapelert, M. Sripom, S. Varamit, and I. M. Tang, "Infection risk to travelers going to dengue fever endemic regions," *Southeast Asian J Trop Med Publ Health*, vol. 35, pp. 155 – 159, 2004.
- [6] P.Pongsumpun and I.M.Tang, "Mathematical model for the transmission of P.falciparum and P. vivax malaria along the Thai-Myanmar border", *Int j Biol and Med Sci*, vol.3(3), pp.200-207, 2008.
- [7] P.Pongsumpun and I.M.Tang, "Mathematical model of Plasmodium Vivax and Plasmodium Falciparum Malaria", *Int j math models and method in applied sci*, vol.3(3), pp. 283-290, 2009. [8] P.Pongsumpun and I.M.Tang, "Transmission Model for Plasmodium Vivax Malaria: Conditions for Bifurcation", *Int j Biol and Med Sci*, vol.3(3), pp.161-168, 2008.

## THE RELAPSED TRANSMISSION MODEL OF PLASMODIUM VIVAX

Choawaniti Teampae, Puntani Pongsumpun\*

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology  
Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

\*e-mail: kppuntan@kmitl.ac.th

**Abstract :** Malaria in human is due to 4 types : Plasmodium falciparum , Plasmodium vivax , Plasmodium ovale and Plasmodium malariae. Plasmodium falciparum and Plasmodium malariae destroy red blood cells at all stages because Plasmodium vivax and Plasmodium ovale destroy only the red blood cells. Most Malaria cases in Thailand are due to Plasmodium falciparum and Plasmodium vivax. This disease occurs in Africa, South America and Asia. In Thailand, Malaria is found along the border with Burma , Cambodia and Malaysia. In 2010, the provinces which have a large number of malaria patients are Tak , Kanchanaburi , Trad , Ratchaburi and Mae Hong Son. It is found in the forest area only. Malaria is not found in urban areas. Anopheles vectors transmit this disease to the human. In this study, the transmission of Plasmodium vivax malaria and the effect of relapsing of Plasmodium vivax are considered by using mathematical model .The population are separated into human and mosquito populations. The application of the standard dynamical modeling method is used for analyzing the behaviors of solutions. The conditions of the parameters for the disease free and endemic states are obtained. The example of parameter which may reduce the outbreak of this disease is given.

**Introduction:** WHO estimated that each year, the malaria cases are 300-400 million persons worldwide [1]. There are about 1 million deaths per year, mostly in Africa. In Thailand, Malaria is found along the border with Burma, Cambodia and Malaysia. Malaria in human is due to 4 types: Plasmodium falciparum , Plasmodium vivax, Plasmodium ovale and Plasmodium malariae. Most Malaria cases in Thailand are due to Plasmodium falciparum and Plasmodium vivax , the anopheles vectors transmit this disease. The symptoms of this disease depend on the type of infection. Body aches, nausea, vomiting abdominal pain or diarrhea are symptoms of the malaria cases. Some people may have a cough or flu-like in 4-5 days of fever. The breakdown of red blood cells is not the same for all people. However, after malaria were in the same period. Red blood cells are broken once every 48 hours. Symptom of patients who be infected with Plasmodium vivax is usually not fatal, so called "benign tertian malaria". The Plasmodium vivax cases can be repeated within two years, the longest is 8 years [2]. Top ten provinces that found malaria patients in fiscal year 2010 are as follows. Tak (1574.87 people per hundred thousand population), Mae Hong Son(649.49 people per hundred thousand population), Ranong (506.12 people per hundred thousand population), Phangnga (338.52 people per hundred thousand population), Yala (328.92 people per hundred thousand population), Chumphon (207.31 people per hundred thousand population), Kanchanaburi (184.43 people per hundred thousand population), Trad (171.10 people per hundred thousand population), Chanthaburi (166.59 people per hundred thousand population), Prachuap Khiri Khan (91.00 people per hundred thousand population).

In 2010, there were 25,639 Malaria patients cases. There are 13,425 cases due to Plasmodium vivax 11,852 cases due to Plasmodium falciparum. The data of Malaria cases are show in the following figure.

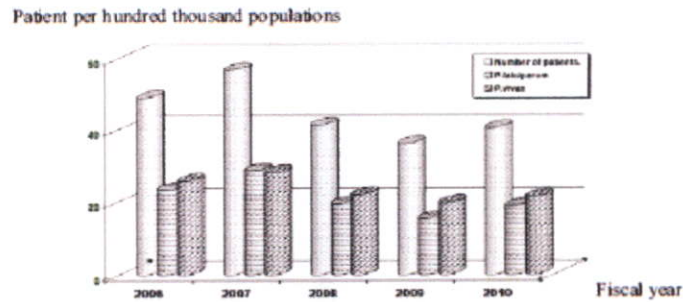


Figure 1. The graph shows the rate per hundred thousand population, patients in the fiscal year 2007-2010.

To recognize the importance of people's lives and property at risk of this infection, we study the problem of patients from the Ministry of Health from 2007 to 2010. We analyze and find the solution to the problem by creating a mathematical model for malaria. We use this as basic information on disease prevention. The output of this study should be the way for reducing the outbreak of this disease.

**Methodology:** In this study. We analyzed the mathematical model for the Plasmodium vivax transmission. The human population is divided into four types. We study the dynamical change of human and mosquito populations:

$S_h$  = the number of population who is at risk of infection,

$E_h$  = the number of population who is infected but cannot transmit the infection,

$I_h$  = the number of population who is infected,

$D_h$  = the number of population who is infected with embedded,

The mosquitoes are divided into two types:

$S_v$  = The number of mosquitoes at risk of infection.

$I_v$  = The number of mosquito that is infected.

The equations for the dynamics of the human population can be explained as follows.

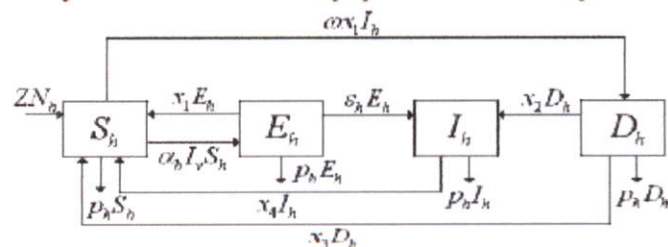


Figure 2. The transmission diagram of human

$$S'_h(t) = ZN_h + x_3D_h(t) + x_1E_h(t) + x_4I_h(t) - (p_h + \alpha_h I_v(t))S_h(t) - \omega x_1 I_h(t), \quad (1)$$

$$E'_h(t) = \alpha_h I_v(t)S_h(t) - (p_h + \varepsilon_h + x_1)E_h(t), \quad (2)$$

$$I'_h(t) = \varepsilon_h E_h(t) + x_2 D_h(t) - (p_h + x_4)I_h(t), \quad (3)$$

$$D'_h(t) = \omega x_1 I_h(t) - (x_2 + p_h + x_3)D_h(t), \quad (4)$$

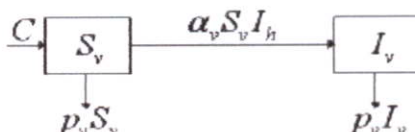


Figure 3: The transmission diagram of mosquitoes

$$S'_v(t) = C - (p_v + \alpha_v I_h(t))S_v(t), \quad (5)$$

$$I'_v(t) = \alpha_v S_v(t)I_h(t) - p_v I_v(t). \quad (6)$$

Where the parameters in the above equations are defined as follows

$Z$  is the birth rate of human population,

$p_h$  is the death rate of human population,

$N_h$  is the total number of human population,

$\omega$  is the percentage of infected human in whom some hypnozoites remain dormant in the liver,

$x_1$  is the rate at which a person leaves the infected class by recovering or by entering into the dormant class,

$x_2$  is the rate at which the dormant human relapses back to the infected human,

$x_3$  is the recovery rate of the dormant human,

$x_4$  is the rate at which the infected human can be susceptible human,

$\alpha_h$  is the rate at which the *P. vivax* parasite is transmitted from the mosquito to the human,

$\varepsilon_h$  is rate of the population who change from an infected person (can not transmit infection) to become infected (can transmit the infection),

$\alpha_v$  is the rate at which the *P. vivax* parasite transmitted from the human to the mosquito,

$C$  is the number of mosquitoes at the beginning,

$p_v$  is the mortality rate of mosquitoes.

We have  $N_h = S_h + E_h + I_h + D_h$  and  $N_v = S_v + I_v$ .

We assume the total of populations are constant.

$$\frac{dN_h}{dt} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dN_v}{dt} = 0$$

From (1) – (6) we let

$$S_h^* = \frac{S_h}{N_h}; \quad E_h^* = \frac{E_h}{N_h}; \quad I_h^* = \frac{I_h}{N_h}; \quad D_h^* = \frac{D_h}{N_h}; \quad S_v^* = \frac{S_v}{N_v}; \quad I_v^* = \frac{I_v}{N_v}$$

These give

$$S_h''(t) = p_h + x_3 D_h^*(t) + x_1 E_h^*(t) + x_4 I_h^*(t) - (p_h + \alpha_h I_v^*(t) N_v) S_h^*(t) - \omega x_1 I_h^*(t), \quad (7)$$

$$E_h''(t) = \alpha_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t) - (p_h + \varepsilon_h + x_1) E_h^*(t), \quad (8)$$

$$I_h''(t) = \varepsilon_h E_h^*(t) + x_2 D_h^*(t) - (p_h + x_4) I_h^*(t), \quad (9)$$

$$I_v''(t) = \alpha_v S_v^*(t) I_h^*(t) N_h - p_v I_v^*(t). \quad (10)$$

$D_h^*$  and  $S_v^*$  are obtained from the conditions:  $D_h^* = 1 - S_h^* - E_h^* - I_h^*$  and  $S_v^* = 1 - I_v^*$ .

#### A. Steady state

The Steady state  $(I_h^*, S_h^*, E_h^*, I_v^*)$  is found from setting the rate of change of each variable equal to zero [3], this gives:

1) The disease Steady state  $F_1(0, 1, 0, 0)$  and

2) The endemic Steady state  $F_2(I_h^*, S_h^*, E_h^*, I_v^*)$

where

$$I_h^* = \frac{p_v x_2 x_3 (p_h + x_1 + \varepsilon_h) - [p_v x_2 x_3 (p_h + x_1 + \varepsilon_h) + N_h N_v \alpha_h \alpha_v \varepsilon_h (p_h + x_1 + x_3) + p_v x_2 \omega x_1 (p_h + x_1 + x_2)]}{(N_h \alpha_v)(x_1 - x_4 + \omega x_1)(p_h x_1 + x_2 x_3 + N_h x_2 \alpha_h + x_1 \varepsilon_h - N_h \alpha_h \varepsilon_h)}$$

$$S_h^* = \frac{[p_h + x_3 + (x_1 - x_4 + \omega x_1) I_h^*](p_h + x_1 + \varepsilon_h)}{\left[ p_h + \varepsilon_h p_h + x_1 p_h + p_h \alpha_h N_h \left( \frac{\alpha_h I_h^* N_h}{p_h + \alpha_h I_h^* N_h} \right) + \varepsilon_h \alpha_h N_h \left( \frac{\alpha_h I_h^* N_h}{p_h + \alpha_h I_h^* N_h} \right) + p_h x_1 + \varepsilon_h x_1 + x_2 x_3 + x_1 \alpha_h N_h \left( \frac{\alpha_h I_h^* N_h}{p_h + \alpha_h I_h^* N_h} \right) \right]}$$

$$E_h^* = \frac{\alpha_h N_h \left( \frac{\alpha_h I_h^* N_h}{p_h + \alpha_h I_h^* N_h} \right) \left( \frac{[p_h + x_3 + (x_1 - x_4 + \omega x_1) I_h^*](p_h + x_1 + \varepsilon_h)}{\left[ p_h + \varepsilon_h p_h + x_1 p_h + p_h \alpha_h N_h \left( \frac{\alpha_h I_h^* N_h}{p_h + \alpha_h I_h^* N_h} \right) + \varepsilon_h \alpha_h N_h \left( \frac{\alpha_h I_h^* N_h}{p_h + \alpha_h I_h^* N_h} \right) + p_h x_1 + \varepsilon_h x_1 + x_2 x_3 + x_1 \alpha_h N_h \left( \frac{\alpha_h I_h^* N_h}{p_h + \alpha_h I_h^* N_h} \right) \right]} \right)}{(p_h + x_1 + \varepsilon_h)}$$

$$I_v^* = \frac{\alpha_v I_h^* N_h}{p_v + \alpha_v I_h^* N_h}$$

$I_h^*$  is the solution of the equation  $A_1 (I_h^*)^2 + A_2 I_h^* = 0$ , where

$$A_1 = p_v x_2 x_3 (p_h + x_1 + \varepsilon_h) - [p_v x_2 x_3 (p_h + x_1 + \varepsilon_h) + N_h N_v \alpha_h \alpha_v \varepsilon_h (p_h + x_1 + x_3) + p_v x_2 \omega x_1 (p_h + x_1 + x_2)]$$

$$A_2 = (N_h \alpha_v)(x_1 - x_4 + \omega x_1)(p_h x_1 + x_2 x_3 + N_h x_2 \alpha_h + x_1 \varepsilon_h - N_h \alpha_h \varepsilon_h)$$

$I_h^* > 0$  when

$$G_0 > 1, \left( G_0 = \frac{p_v x_2 x_3 (p_h + x_1 + \varepsilon_h)}{p_v x_2 x_3 (p_h + x_1 + \varepsilon_h) + N_h N_v \alpha_h \alpha_v \varepsilon_h (p_h + x_1 + x_3) + p_v x_2 \omega x_1 (p_h + x_1 + x_2)} \right)$$

The local stability of each steady state is determined by the sign of all eigenvalues. If all eigenvalues have negative real parts, then that steady state is locally stable. Eigenvalues ( $\eta$ ) for each steady state are obtained by setting

$$\det(J - \eta I) = 0,$$

where J is the gradient matrix evaluated at the steady state and I is the identity matrix.

i) The disease free steady state  $F_1(0, 1, 0, 0)$  the characteristic equation is

$$(-p_h - x_4 - x_2 - \eta)(-p_h - x_3 - \eta)(-p_h - \varepsilon_h - x_1 - \eta)(-p_v - \eta) = 0;$$

so  $\eta = -p_h - x_4 - x_2; \eta = -p_h - x_3; \eta = -p_h - \varepsilon_h - x_1; \eta = -p_v.$

ii) The endemic steady state ;

the correspondent eigenvalues for each equilibrium point are found by solving the characteristic equation; which is in the form

$$\eta^4 + K_4\eta^3 + K_3\eta^2 + K_2\eta + K_1 = 0.$$

By using Routh-Hurwitz criteria, each equilibrium point is locally stable if the following conditions are satisfied;

$$K_4 > 0, \tag{11}$$

$$K_4K_3 - K_2 > 0, \tag{12}$$

$$K_4(K_2K_3 + K_1K_4) - K_2^2 > 0, \tag{13}$$

$$K_1(-K_2^2 + K_2K_3K_4 - K_1K_4^2) > 0, \tag{14}$$

where

$$K_4 = 3p_v^2 + p_v + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + I_1N_h\alpha_h + I_1N_v\alpha_v + e_h$$

$$K_3 = 3p_h^2 + 3p_h p_v + 2p_h x_1 + p_h x_2 + 2p_h x_3 + p_h x_4 + x_1 x_2 + 2p_h x_3 + p_h x_4 + x_1 x_3 + 2p_h x_4 + p_h x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + 2I_1N_h p_h \alpha_h + I_1N_h p_h \alpha_v + I_1N_h x_1 \alpha_h + I_1N_h x_2 \alpha_h + I_1N_h x_3 \alpha_h + 3I_1N_h p_h \alpha_v + I_1N_h x_1 \alpha_v + I_1N_h x_2 \alpha_v + I_1N_h x_3 \alpha_v + I_1N_h x_4 \alpha_v + I_1N_h x_1 \alpha_h + I_1N_h x_2 \alpha_h + I_1N_h x_3 \alpha_h + I_1N_h x_4 \alpha_h + 2p_h e_h + p_h e_v + x_1 e_h + x_2 e_h + I_1N_h \alpha_h e_h + I_1N_h \alpha_v e_h - x_1 \omega x_1$$

$$K_2 = p_v^2 + 3p_h^2 p_v + p_h^2 x_1 + 2p_h p_v x_2 + 2p_h p_v x_3 + p_h x_1 x_2 + p_h^2 x_3 + 2p_h p_v x_4 + p_h x_1 x_3 + p_h x_1 x_4 + p_h^2 x_4 + 2p_h p_v x_1 + p_h x_1 x_2 + p_h x_1 x_3 + p_h x_1 x_4 + x_1 x_2 x_3 + p_h x_1 x_4 + x_1 x_2 x_4 + I_1N_h p_h^2 \alpha_h + 2I_1N_h p_h p_v \alpha_h + I_1N_h p_h x_1 \alpha_h + I_1N_h p_h x_2 \alpha_h + I_1N_h p_h x_3 \alpha_h + I_1N_h p_h x_4 \alpha_h + I_1N_h p_h x_1 \alpha_v + I_1N_h p_h x_2 \alpha_v + I_1N_h p_h x_3 \alpha_v + I_1N_h p_h x_4 \alpha_v + 2I_1N_h p_h x_1 \alpha_h + 2I_1N_h p_h x_2 \alpha_h + 2I_1N_h p_h x_3 \alpha_h + 2I_1N_h p_h x_4 \alpha_h + I_1N_h x_1 x_2 \alpha_h + I_1N_h x_1 x_3 \alpha_h + I_1N_h x_1 x_4 \alpha_h + I_1N_h x_2 x_3 \alpha_h + 2I_1N_h p_h x_1 \alpha_v + I_1N_h p_h x_2 \alpha_v + I_1N_h p_h x_3 \alpha_v + I_1N_h p_h x_4 \alpha_v + I_1N_h x_1 x_2 \alpha_v + I_1N_h x_1 x_3 \alpha_v + I_1N_h x_1 x_4 \alpha_v + I_1N_h x_2 x_3 \alpha_v + 2p_h p_v e_h + p_h x_1 e_h + p_h x_2 e_h + p_h x_3 e_h + p_h x_4 e_h + p_h x_1 e_h + p_h x_2 e_h + x_1 x_2 e_h + x_1 x_3 e_h + x_1 x_4 e_h + I_1N_h p_h \alpha_h e_h + I_1N_h p_h \alpha_v e_h + I_1N_h x_1 \alpha_h e_h + I_1N_h x_2 \alpha_h e_h + I_1N_h x_3 \alpha_h e_h + I_1N_h x_4 \alpha_h e_h + I_1N_h x_1 \alpha_v e_h + I_1N_h x_2 \alpha_v e_h + I_1N_h x_3 \alpha_v e_h + I_1N_h x_4 \alpha_v e_h - N_h N_v S_h \alpha_h \alpha_v + I_1N_h N_v S_h \alpha_h \alpha_v - p_h x_1 \omega x_1 - p_h x_2 \omega x_1 - x_1 x_2 \omega x_1 - I_1N_h x_1 \alpha_h \omega x_1 - I_1N_h x_2 \alpha_h \omega x_1 - x_1 \omega x_1 + I_1N_h \alpha_h \omega x_1$$

$$K_1 = p_v^2 (p_v + I_1N_h \alpha_v) + p_h^2 (p_h + I_1N_h \alpha_h)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + I_1N_h \alpha_h + e_h) + p_h (N_h \alpha_h ((-1 + I_1)N_h S_h \alpha_h e_h + I_1N_h x_1 + x_1(x_2 + x_3 + x_4) + I_1N_h x_1 \alpha_h + I_1N_h x_2 \alpha_h + x_1 e_h + x_2 e_h + I_1N_h \alpha_h e_h + x_3(x_1 + I_1N_h \alpha_h + e_h - \omega x_1))) + p_h (x_1 x_2 + x_1(x_3 + x_4) + I_1N_h x_1 \alpha_h + I_1N_h x_2 \alpha_h + x_1 e_h + x_2 e_h + I_1N_h \alpha_h e_h + x_2(x_1 + I_1N_h \alpha_h + e_h - \omega x_1))) + p_h (x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2(x_1 - \omega x_1)) + e_h (x_1 x_2 + x_2(x_1 - \omega x_1)) + I_1N_h \alpha_h (x_1(x_2 + e_h) + x_2(x_1 + e_h - \omega x_1)) + e_h \omega x_1) + N_h \alpha_h ((-1 + I_1)N_h S_h (x_1 + x_2) \alpha_h e_h + I_1N_h (x_1 x_2 + x_2(x_1 - \omega x_1))) + e_h (x_1 x_2 + x_2(x_1 - \omega x_1)) + I_1N_h \alpha_h (x_1(x_2 + e_h) + x_2(x_1 + e_h - \omega x_1)) + e_h \omega x_1))$$

From our calculations, we found that the disease free steady state is locally stable for  $G_0 < 1$ .

The endemic steady state is locally stable for  $G_0 > 1$ .

The values of the parameter used in this study are as follows :  $p_h = \frac{1}{365 * 71}$  per day corresponds to a life expectancy of 71 years in human. The mean life of mosquito is 35 day ;

$p_v = \frac{1}{35}$  per day. The parameters are assumed as follows:  $N_h = 1000; N_v = 900;$

$$x_1 = \frac{1}{14}; x_2 = \frac{1}{10}; x_3 = \frac{1}{20}; x_4 = \frac{1}{14}; \alpha_v = \frac{1}{0.5}; \alpha_h = \frac{1}{0.5}; \varepsilon_h = 0.001; \omega = 0.001.$$

The conditions of Routh - Hurwitz Criteria are given in (11) - (14).

The conditions (11) - (14) with the above parameter are show in the following figures

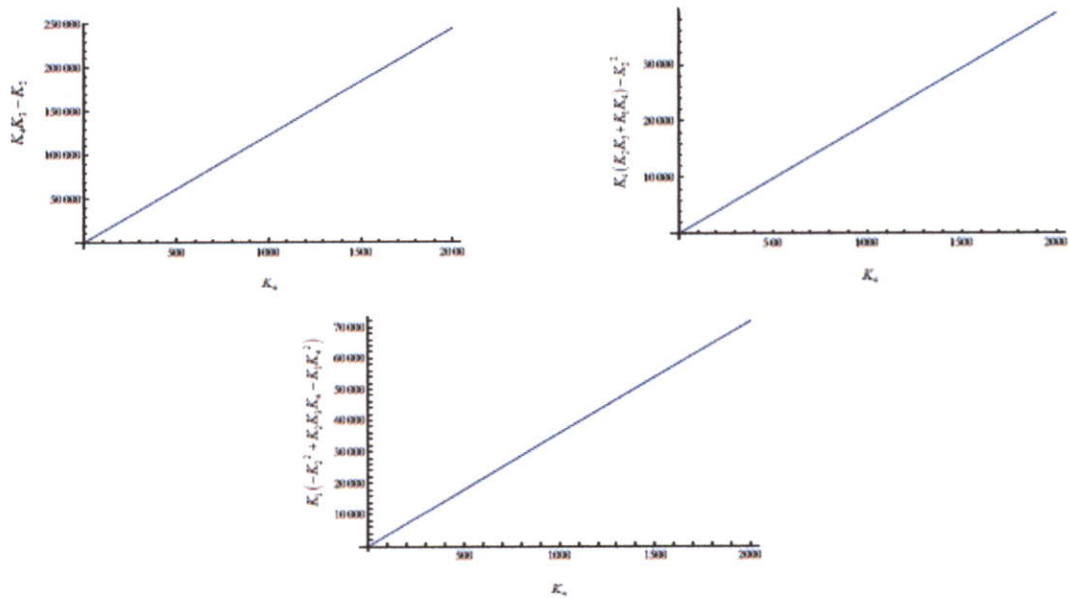


Figure 4: The conditions of Routh-Hurwitz criteria in endemic disease state.

**Results, Discussion and Conclusion:** In analyzing the mathematical model of malaria, we found two steady states. The local stability condition of each steady state is obtained. The basic reproductive number ( $G_0$ ) is used for reducing the outbreak of many diseases [4, 5]. The result of this paper proposes an alternative approach, another way to reduce the spread of malaria vivax. If we can define parameters to meet the conditions above, we can control an outbreak of malaria.

#### References:

1. Pongsumpun, P.; Tang, I. M. *Int j math models and method in applied sci.* **2007**,3,117-121.
2. Pongsumpun, P.; Patanarapelert, K.; Sripom, M.; Varamit, S.; Tang, I. M. *Southeast Asian J Trop Med Publ Health.* **2004**, 35, 155 – 159.
3. Pongsumpun, P.; Tang, I. M. *Int j Biol and Med Sci.* **2008** ,3(3), 200-207.
4. Kammanee, A.; Kanyamee, N.; and Tang, I. M. *Southeast Asian J Trop Med Public Health.* **2001**, 32, 702-706.
5. Nah, K.;Kim, Y.; Lee, J.M. *Journal of Theoretical Biology.* **2010**, 266, 299-306.

**Keywords :** Plasmodium vivax, disease free state, disease endemic state, malaria

## แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการฟักตัวของเชื้อโรคมาลาเรียชนิดไวแวกซ์

พันธณี พงศ์สัมพันธ์<sup>1</sup> และ เขาวินิตี เทียมแพะ<sup>2\*</sup>

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520 ประเทศไทย

<sup>1</sup>kppuntan@kmitl.ac.th, <sup>2</sup>t\_teevow@hotmail.com

บทคัดย่อ : โรคมาลาเรียเกิดจากเชื้อปรสิตสกุล พลาสโมเดียม (Plasmodium) 4 ชนิดได้แก่ ฟัลซิพารัม (Falciparum), ไวแวกซ์ (Vivax), โอวัลล์ (Ovale) และมาลาเรีย (Malaria) โดย ฟัลซิพารัมและ มาลาเรียจะทำลายเซลล์เม็ดเลือดแดงทุกระยะ แต่ ไวแวกซ์ และ โอวัลล์นั้น จะฆ่าเฉพาะเซลล์เม็ดเลือดแดงที่ยังเจริญเติบโตไม่สมบูรณ์เท่านั้น โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยนั้นมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (Plasmodium Falciparum) และ พลาสโมเดียมไวแวกซ์ (Plasmodium Vivax) โรคนี้พบได้บ่อยในทวีปแอฟริกา อเมริกา และ เอเชีย พบได้ทั้งในเขตร้อนและกึ่งเขตร้อน ส่วนในประเทศไทยของสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า โดยเฉพาะ ตามเขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าและเขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าห้วยขาแข้ง ชายแดนไทย-พม่า ชายแดนไทย-กัมพูชา โดยจังหวัดที่มีการรายงานพบผู้ป่วยมาลาเรียเป็นจำนวนมากคือ จังหวัดตาก กาญจนบุรี ตราด ราชบุรี แม่ฮ่องสอน เป็นต้น โดยจะพบในเขตพื้นที่ที่เป็นป่าเขาเท่านั้น ไม่พบมาลาเรียในเขตเมือง ยุ้งกันปล่องเป็นพาหะหลักในการนำเชื้อ โรคมาลาเรีย งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์ ซึ่งพิจารณาถึงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของประชากรคนและยุง จากนั้นประยุกต์วิธีการของแบบจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) มาวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดหรือรัง (disease endemic state) และแสดงการวิเคราะห์การควบคุมโรคมาลาเรีย

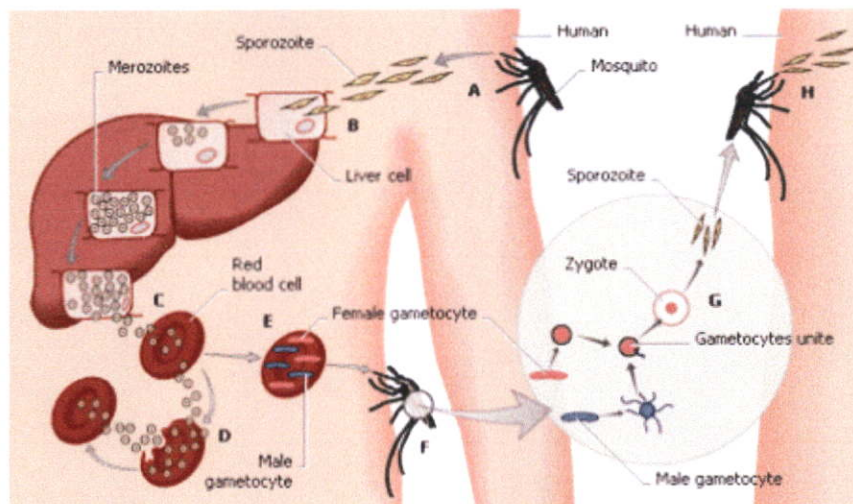
คำสำคัญ : มาลาเรีย (Malaria); พลาสโมเดียมไวแวกซ์ (Plasmodium Vivax); แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model)

\*Corresponding author e-mail : t\_teevow@hotmail.com

## 1 บทนำ

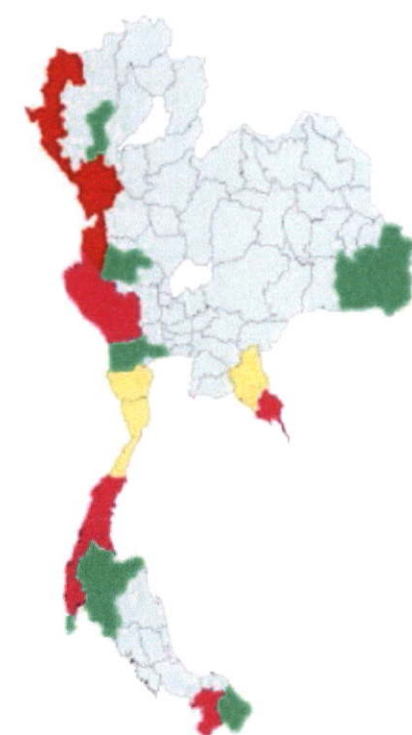
องค์การอนามัยโลกประมาณกันว่าในแต่ละปีจะมีผู้ป่วยเป็นมาลาเรียถึงปีละ 300-400 ล้านคนทั่วโลก และมีคนเสียชีวิตปีละประมาณ 1 ล้านคน โดยส่วนใหญ่เกิดในทวีปแอฟริกา ส่วนในประเทศไทยเองสามารถพบเชื้อมาลาเรียได้ในเขตป่า โดยเฉพาะตามเขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าและเขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าในเขตอุทยานแห่งชาติ โดยเฉพาะในเขตภาคเหนือและภาคตะวันตกของประเทศไทย เช่น เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าห้วยขาแข้ง เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าทุ่งใหญ่นเรศวร เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าดงพญาเย็น-เขาใหญ่นเรศวร เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าภูหลวง เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าภูผาเหล็ก เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าภูหลวง เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าภูผาเหล็ก เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าภูหลวง เขตรักษาพันธุ์สัตว์ป่าภูผาเหล็ก

โรคมมาลาเรียเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อปรสิตสกุลพลาสโมเดียม (Plasmodium) 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม (Falciparum) , ไวเวกซ์ (Vivax) , โอวัลล์ (Ovale) และมาลาเรีย (Malaria) โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (Plasmodium Falciparum) กับ พลาสโมเดียมไวเวกซ์ (Plasmodium Vivax) โดยยุงก้นปล่องเป็นพาหะหลักในการนำเชื้อโรคมมาลาเรีย อาการของโรคนี้นั้นขึ้นอยู่กับชนิดเชื้อ ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมฟัลซิพารัม ในระยะแรกของโรคจะมีอาการไข้ ปวดเมื่อยตามตัว คลื่นไส้ อาเจียน ปวดท้องหรือท้องเดิน บางคนอาจมีอาการไอหรือลักษณะคล้ายไข้หวัดได้ใน 4 - 5 วันแรกของโรค ไข้จะสูงลอยตลอดเวลา เนื่องจากการแตกของเม็ดเลือดแดงแต่ละชุดไม่พร้อมกัน แต่หลังจากเชื้อมาลาเรียเจริญอยู่ในระยะเดียวกันแล้ว เม็ดเลือดแดงจะแตกพร้อมกันทุก 48 ชั่วโมง อาการของผู้ที่ติดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ ผู้ป่วยที่เป็นไวเวกซ์มาลาเรีย มักจะไม่เสียชีวิต จึงมีชื่อว่า "Benign Tertian Malaria" แต่ผู้ป่วยจะเป็นโรคซ้ำอีก อาการของผู้ป่วยไวเวกซ์มาลาเรีย จะมีลักษณะคล้ายกับฟัลซิพารัมมาลาเรีย แต่จะพบหนาวสั่นได้บ่อยกว่า และขณะเกิดหนาวสั่น มักมีอาการปวดหัว ปวดกล้ามเนื้อมาก ผู้ป่วยที่ไม่ได้รับการรักษาอาการไข้อย่างค่อย ๆ ทุเลาและหายได้ แต่จะเป็นซ้ำได้อีกภายใน 2 ปี นานที่สุด 8 ปี



รูปที่ 1 วงจรชีวิตของเชื้อมาลาเรีย

โดยประเทศไทยในปีงบประมาณ 2554 เมื่อพิจารณาตามจังหวัด สิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยมาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย ปีงบประมาณ 2554 มีผลดังนี้



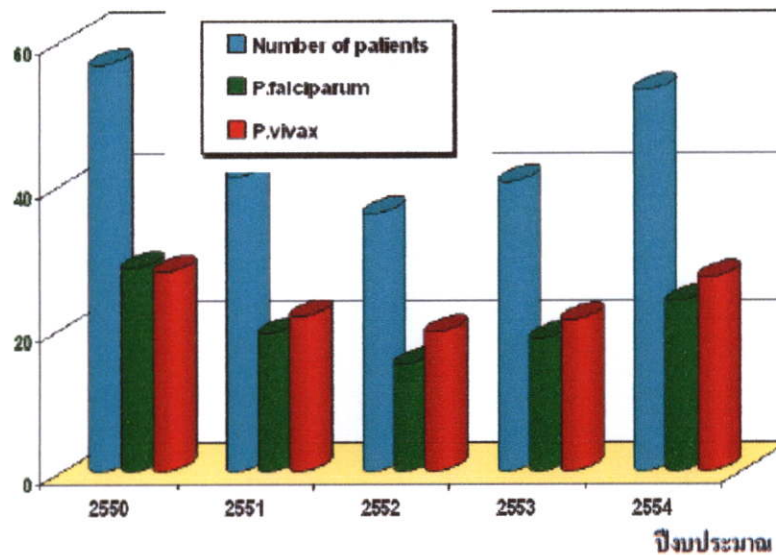
อัตราต่อแสนประชากร



รูปที่ 2 แผนที่แสดงอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคน ในปีงบประมาณ 2550-2554

แสดงสิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยมาลาเรียสูง ในประเทศไทยปีงบประมาณ 2554	
1.ตาก	1027.16
2.แม่ฮ่องสอน	548.90
3.ระนอง	274.71
4.ยะลา	150.44
5.ชุมพร	143.22
6.กาญจนบุรี	128.04
7.พังงา	115.43
8.ตราด	102.15
9.จันทบุรี	81.24
10.เพชรบุรี	56.77

ปีงบประมาณ 2554 มีจำนวนผู้ป่วยทั้งหมด 34,002 คน แยกเป็นชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ 17,385 คน และเชื้อชนิด พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม 15,248 คน กราฟแสดงอัตราจำนวนผู้ป่วยแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคน ใน ปีงบประมาณ 2550-2554

ด้วยการตั้งต้นความสำคัญของชีวิตและทรัพย์สินของประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคนี้ ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รับรวบรวมมาจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2550-2554 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหาโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรีย เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยที่ภูมิภาคของโรคที่มีภาระของสำนักกระบวนวิชาและกรมควบคุมโรคคือ กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

## 2 บทเบื้องต้น

A. Kammanee, N. Kanyamee and IM Tang (2001) ได้สร้างแบบจำลอง (SIDR) ทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่โรคมาลาเรีย ชนิดเชื้อโวกซ์ สามารถหาจุดวิกฤตได้ 2 จุด คือ จุดสภาวะไร้โรคและจุดสภาวะระบาดเรื้อรัง ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ ทำให้ทราบค่าการแพร่พันธุ์พื้นฐาน ทำให้ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรคนี้

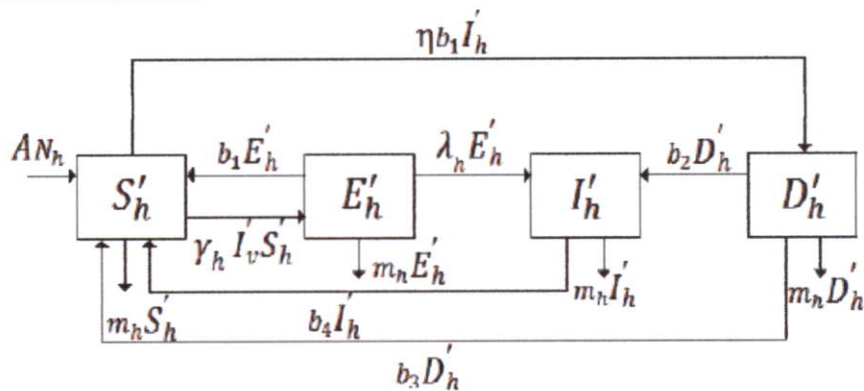
P. Pongsumpun and IM Tang (2007) ได้สร้างแบบจำลอง (SIDR) ทางคณิตศาสตร์ โดยคำนึงถึงระยะการฟักตัวของเชื้อ Plasmodium vivax ในมนุษย์ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดเรื้อรัง (disease endemic state) ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ ได้

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรค และกราฟในการวิเคราะห์แบบจำลองเพื่อใช้ในการลดการระบาดของโรคมลาเรีย ชนิดเชื้อไวแวกซ์

K. Nah , Y. Kim and JM. Lee (2010) ได้สร้างแบบจำลองเชิงพลวัตของการป้องกันโรคจากสัตว์ (Zooprophylaxis) การแพร่ระบาดของยุง การแพร่ระบาดของโรคมลาเรีย ชนิดเชื้อไวแวกซ์ไปยังประชากรมนุษย์ และวิเคราะห์สมดุลการระบาด ผลที่ได้จางานวิจัยนี้ คือ ทำให้ทราบค่าการแพร่พันธุ์พื้นฐาน ได้ค่าประมาณความเสี่ยงต่อคนที่จะสามารถได้รับโรคมลาเรีย ชนิดเชื้อไวแวกซ์

2.1 หัวข้อย่อย

ในการศึกษากครั้งนี้ ได้ทำการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียม ไวแวกซ์ ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรสองกลุ่ม คือ ระหว่างประชากรมนุษย์และยุง ในกลุ่มประชากร มนุษย์จะแบ่งออกเป็น 4 กรณี ได้แก่ ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ เนื่องจากประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เมื่อเข้าสู่สภาวะที่ติดเชื้อแล้วจะต้องใช้ระยะเวลาในการฟักตัวของเชื้อ จึงจำเป็นต้องเพิ่มกลุ่มประชากร ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ( $E'_h$ ) ในกลุ่มของยุงแบ่งออกเป็น 3 กรณี ได้แก่ ยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ , จำนวนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และยุงที่ติดเชื้อ ซึ่งสมการ พลศาสตร์ของประชากรมนุษย์ สามารถอธิบายได้ดังนี้



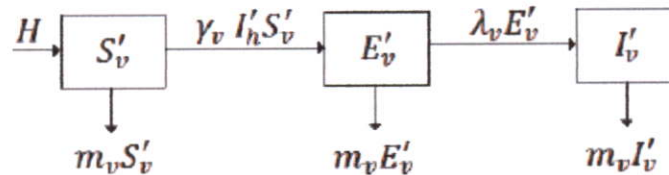
$$\frac{d}{dt} S'_h = AN_h + b_3 D'_h + b_1 E'_h + b_4 I'_h - \eta b_1 I'_h - (m_h + \gamma_h I'_v) S'_h \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt} E'_h = \gamma_h I'_v S'_h - (m_h + \lambda_h + b_1) E'_h \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt} I'_h = \lambda_h E'_h + b_2 D'_h - (m_h + b_4) I'_h \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt} D'_h = \eta b_1 I'_h - (m_h + b_2 + b_3) D'_h \tag{2.4}$$

โดยที่  $S'_h, E'_h, I'_h$  และ  $D'_h$  เป็นประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรที่ติดเชื้อ, ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ ตามลำดับ  
สมการพลศาสตร์ของฝูง มีดังนี้



$$\frac{d}{dt} S'_v = H - (m_v + \gamma_v I'_h) S'_v \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} E'_v = \gamma_v I'_h S'_v - (m_v + \lambda_v) E'_v \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt} I'_v = \lambda_v E'_v - m_v I'_v \quad (2.7)$$

โดยที่  $S'_v, E'_v$  และ  $I'_v$  เป็นจำนวนฝูงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, จำนวนฝูงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และ ฝูงที่ติดเชื้อ ตามลำดับ ซึ่ง  $N_h = S'_h + E'_h + I'_h + D'_h$  เป็นจำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด และ  $N_v = S'_v + E'_v + I'_v$  เป็นจำนวนฝูงทั้งหมด

ตารางที่ 1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและฝูง

ข้อความ	สัญลักษณ์	ข้อความ	สัญลักษณ์
อัตราการเกิดของประชากร	A	อัตราการตายของฝูง	$m_v$
อัตราการตายของประชากร	$m_h$	จำนวนฝูง ณ เวลาเริ่มต้น	H
จำนวนประชากรทั้งหมด	$N_h$	ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	$\eta$
อัตราการที่เชื้อชนิดพลาสโมเดียม ไวกเว็กซ์ ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	$b_2$	อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้	$\lambda_h$
อัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ	$b_1$	อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียม ไวกเว็กซ์ จประชากรไปฝูง	$\gamma_v$

ข้อความ	สัญลักษณ์	ข้อความ	สัญลักษณ์
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสมา เคียมไวแวกซ์ จากฝูงไปประชากร	$\gamma_h$	อัตราผู้ฟื้นจากการติดเชื้อชนิดพ ลาสมาเคียมไวแวกซ์	$b_3$
อัตราประชากรที่ติดเชื้อและสามารถ ถ่ายทอดเชื้อได้ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการ ติดเชื้อ	$b_4$	อัตราที่ฝูงเปลี่ยนจากผู้ติดเชื้อแต่ไม่ สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปเป็นผู้ที่ติด เชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้	$\lambda_v$
จำนวนประชากรของฝูง	$N_v$		

สมมติว่าจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$\frac{dN_h}{dt} = 0 \text{ และ } \frac{dN_v}{dt} = 0$$

จาก  $N_h = S'_h + E'_h + I'_h + D'_h$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dt} N_h = \frac{d}{dt} S'_h + \frac{d}{dt} E'_h + \frac{d}{dt} I'_h + \frac{d}{dt} D'_h$

เนื่องจากจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ให้ด้านขวามือของสมการเป็นศูนย์เมื่อ  $A = m_h$

(ค่าคงที่ของอัตราการเกิดและอัตราการตายต่อประชากรมนุษย์มีค่าเท่ากัน)

จาก  $N_v = S'_v + E'_v + I'_v$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dt} N_v = \frac{d}{dt} S'_v + \frac{d}{dt} E'_v + \frac{d}{dt} I'_v$

เนื่องจากจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ให้ด้านขวามือของสมการเป็นศูนย์เมื่อ  $m_v = \frac{H}{N_v}$

(ค่าคงที่อัตราการตายของฝูงเท่ากับอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่อัตราการเกิดใหม่ของฝูงกับจำนวนฝูงทั้งหมด)

กำหนดให้  $S_h = \frac{S'_h}{N_h}$      $E_h = \frac{E'_h}{N_h}$      $I_h = \frac{I'_h}{N_h}$      $D_h = \frac{D'_h}{N_h}$

$$S_v = \frac{S'_v}{N_v} \quad E_v = \frac{E'_v}{N_v} \quad I_v = \frac{I'_v}{N_v}$$

สามารถจัดสมการ (2.1) - (2.3) และ (2.6) - (2.7) ได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_h &= m_h + b_3 + (b_1 - b_3)E_h + (b_4 - b_3 - \eta b_1)I_h \\ &- (b_3 + m_h + I_v \gamma_h N_v) S_h \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt} E_h = N_v I_v S_h \gamma_h - (b_1 + m_h + \lambda_h) E_h \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} I_h = b_2 + (\lambda_h - b_2) E_h - b_2 S_h - (m_h + b_4 + b_2) I_h \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} I_v = E_v \lambda_v - m_v I_v \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} E_v = \gamma_v N_h I_h m_v - (m_v + \gamma_v N_h I_h) (m_v + \lambda_v) E_v \quad (2.12)$$

สำหรับสมการของ  $D_h$  และ  $S_v$  สามารถหาได้จากเงื่อนไขต่อไปนี้  $S_h + E_h + I_h + D_h = 1$  และ  $S_v + I_v + E_v = 1$

### 3 ผลงานวิจัยหลัก

จากสมการที่ (2.8) – (2.12) ใช้วิธีการของแบบจำลองเชิงพลวัตแบบตรรกะนามวิเคราะห์ดังนี้

#### 3.1 จุดสมดุล

จุดสมดุล ( $I_h, S_h, E_h, I_v, E_v$ ) หาได้จากการจัดสมการ (2.8) – (2.12) ให้เท่ากับศูนย์ จะได้จุดสมดุลสองจุดคือจุดสมดุลภายในได้สภาวะไร้โรค  $E_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$  และสภาวะระบาดเรื้อรัง  $E_2 = (I_h, S_h, E_h, I_v, E_v)$  เมื่อ

$$I_h = \frac{b_2 m_v^2 \eta b_1 (b_1 + m_h + \lambda_h) + (b_2 (b_1 + m_h) m_v \eta b_1 + ((b_2 + b_3 + m_h) N_h N_v \gamma_h \gamma_v + b_2 m_v \eta b_1) \lambda_h) \lambda_v}{N_h \gamma_v (m_v ((b_2 + b_3 + m_h) (b_4 + m_h) - b_2 \eta b_1) (b_1 + m_h + \lambda_h) + ((b_1 + m_h + N_v \gamma_h) ((b_2 + b_3 + m_h) (b_4 + m_h) - b_2 \eta b_1) + ((b_2 + b_3 + m_h) (b_4 + m_h + N_v \gamma_h) + (-b_2 + N_v \gamma_h) \eta b_1) \lambda_h) \lambda_v)}$$

$$S_h = -\frac{-b_3 - m_h + i_h (b_3 - b_4 + \eta b_1)}{b_3 + m_h + \frac{i_h N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v}{(m_v + i_h N_h \gamma_v) (m_v + \lambda_v)} \frac{i_h (b_1 - b_3) N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v}{(m_v + i_h N_h \gamma_v) (b_1 + m_h + \lambda_h) (m_v + \lambda_v)}}$$

$$E_h = \frac{i_h N_h N_v \gamma_h \gamma_v (-b_3 - m_h + i_h (b_3 - b_4 + \eta b_1)) \lambda_v}{(m_v + i_h N_h \gamma_v) (b_1 + m_h + \lambda_h) (m_v + \lambda_v) (b_3 + m_h + \frac{i_h N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v}{(m_v + i_h N_h \gamma_v) (m_v + \lambda_v)} \frac{i_h (b_1 - b_3) N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v}{(m_v + i_h N_h \gamma_v) (b_1 + m_h + \lambda_h) (m_v + \lambda_v)})}$$

$$I_v = \frac{i_h N_h \gamma_v \lambda_v}{(m_v + i_h N_h \gamma_v) (m_v + \lambda_v)}$$

$$E_v = \frac{i_h m_v N_h \gamma_v}{(m_v + i_h N_h \gamma_v) (m_v + \lambda_v)}$$

โดยที่  $I_h$  เป็นผลเฉลยของสมการ  $A_1(I_h)^2 + A_2(I_h)$

ผลเฉลยของสมการผลเฉลยของสมการ คือ  $I_h = 0$  และ  $I_h = \frac{A_2}{A_1}$  เมื่อ

$$A_2 = \frac{b_2 m_v^2 \eta b_1 (b_1 + m_h + \lambda_h) + (b_2 (b_1 + m_h) m_v \eta b_1 + ((b_2 + b_3 + m_h) N_h N_v \gamma_h \gamma_v + b_2 m_v \eta b_1) \lambda_h) \lambda_v}{-(b_2 + b_3 + m_h) (b_4 + m_h) m_v (b_1 + m_h + \lambda_h) (m_v + \lambda_v)}$$

$$A_1 = \frac{N_h \gamma_v (m_v ((b_2 + b_3 + m_h)(b_4 + m_h) - b_2 \eta b_1)(b_1 + m_h + \lambda_h) + ((b_1 + m_h + N_v \gamma_h)((b_2 + b_3 + m_h)(b_4 + m_h) - b_2 \eta b_1) + ((b_2 + b_3 + m_h)(b_4 + m_h + N_v \gamma_h) + (-b_2 + N_v \gamma_h) \eta b_1) \lambda_h) \lambda_v)}{((b_2 + b_3 + m_h)(b_4 + m_h) m_v (b_1 + m_h + \lambda_h) (m_v + \lambda_v))}$$

เงื่อนไขที่ทำให้

$$I_h > 0 \text{ เมื่อ } K_0 > 1, (K_0 = \frac{b_2 m_v^2 \eta b_1 (b_1 + m_h + \lambda_h) + (b_2 (b_1 + m_h) m_v \eta b_1 + ((b_2 + b_3 + m_h) N_h N_v \gamma_h \gamma_v + b_2 m_v \eta b_1) \lambda_h) \lambda_v}{(b_2 + b_3 + m_h)(b_4 + m_h) m_v (b_1 + m_h + \lambda_h) (m_v + \lambda_v)})$$

3.2 ความเสถียรภาพ

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลจะพิจารณาในรูปค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียน ถ้าค่าลักษณะเฉพาะ มีค่าเป็นลบ แสดงว่าจุดสมดุลนั้นมีความเสถียรภาพ พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมการ ลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

$$\det (J - V I_5)$$

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค  $E_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$  ได้สมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$(-m_h - b_4 - b_2 - V)(-b_3 - m_h - I_v \gamma_h N_v - V)(-b_1 - m_h - \lambda_h - V)(-m_v - \gamma_v N_h I_h - \lambda_v - V)(-m_v - V)$$

$$\text{หรือ } V = -m_h - b_4 - b_2, V = -b_3 - m_h - I_v \gamma_h N_v, V = -b_1 - m_h - \lambda_h, V = -m_v - \gamma_v N_h I_h - \lambda_v, V = -m_v$$

พบว่าไม่มีค่าลักษณะเฉพาะเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพเมื่อ  $K_0 < 1$

2) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง  $E_2 = (I_h, S_h, E_h, I_v, E_v)$  ได้สมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$V^5 + G_5 V^4 + G_4 V^3 + G_3 V^2 + G_2 V^1 + G_1 = 0$$

ค่าลักษณะเฉพาะของจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีค่าเป็นลบ เมื่อสอดคล้องกับ Routh-Hurwitz Criteria ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$G_5 > 0 \tag{3.1}$$

$$G_5 G_4 - G_3 > 0 \tag{3.2}$$

$$G_5 G_4 G_3 + G_5 G_1 - G_2 G_5^2 - G_3^2 > 0 \tag{3.3}$$

$$G_2 (G_5 G_4 G_3 - G_3^2 - G_5^2 G_2) - G_1 (G_5 G_4^2 - G_3 G_4 - 2G_5 G_2 + G_1) > 0 \tag{3.4}$$

$$G_1 (G_2 (G_5 G_4 G_3 - G_3^2 - G_5^2 G_2) - G_1^2 (G_5 G_4^2 - G_3 G_4 - 2G_5 G_2 + G_1)) > 0 \tag{3.5}$$

โดยที่

$$G_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + 3m_h + 2m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v + \lambda_h + \lambda_v$$

$$G_4 = b_2 b_4 + 2b_2 m_h + 2b_4 m_h + 3m_h^2 + 2b_2 m_v + 2b_4 m_v + 6m_h m_v + m_v^2 + i_v b_2 N_v \gamma_h + i_v b_4 N_v \gamma_h + 2i_v m_h N_v \gamma_h + 2i_v m_v N_v \gamma_h + i_h b_2 N_h \gamma_v + i_h b_4 N_h \gamma_v + 3i_h m_h N_h \gamma_v + i_h m_v N_h \gamma_v + i_h i_v N_h N_v \gamma_v + b_2 \lambda_h + b_4 \lambda_h + 2m_h \lambda_h + 2m_v \lambda_h + i_v N_v \gamma_h \lambda_h + i_h N_h \gamma_v \lambda_h + (b_2 + b_4 + 3m_h + m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v + \lambda_h) \lambda_v + b_1 (b_2 + b_4 + 2m_h + 2m_v + i_h N_h \gamma_v + \lambda_v) + b_2 (b_4 + 2m_h + 2m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v - \eta b_1 + \lambda_h + \lambda_v)$$

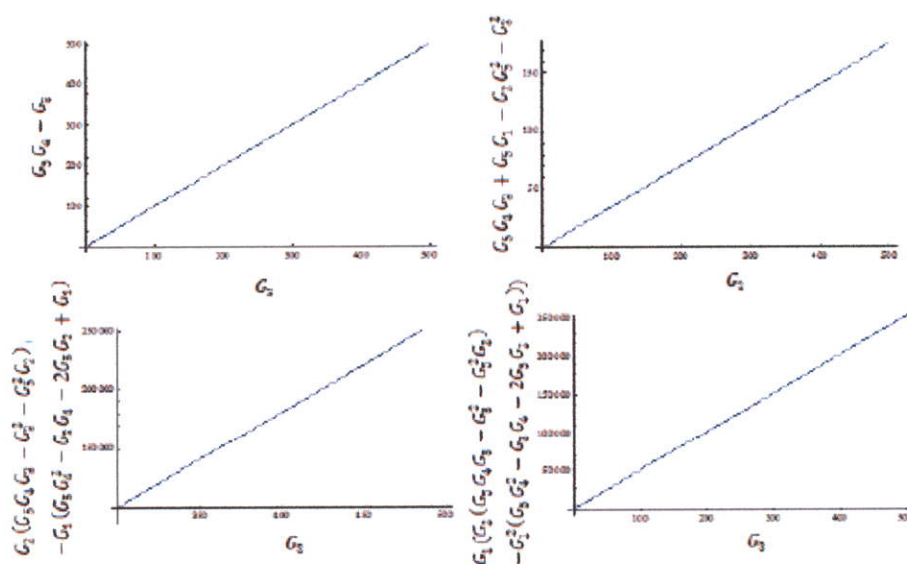
$$G_3 = b_2 b_4 m_h + b_2 m_h^2 + b_4 m_h^2 + m_h^3 + 2b_2 b_4 m_v + 4b_2 m_h m_v + 4b_4 m_h m_v + 6m_h^2 m_v + b_2 m_v^2 + b_4 m_v^2 + 3m_h m_v^2 + i_v b_2 b_4 N_v \gamma_h + i_v b_2 m_h N_v \gamma_h + i_v b_4 m_h N_v \gamma_h + i_v m_h^2 N_v \gamma_h + 2i_v b_2 m_v N_v \gamma_h + 2i_v b_4 m_v N_v \gamma_h + 4i_v m_h m_v N_v \gamma_h + i_v m_v^2 N_v \gamma_h + i_h b_2 b_4 N_h \gamma_v + 2i_h b_2 m_h N_h \gamma_v + 2i_h b_4 m_h N_h \gamma_v + 3i_h m_h^2 N_h \gamma_v + i_h b_2 m_v N_h \gamma_v + i_h b_4 m_v N_h \gamma_v + 3i_h m_h m_v N_h \gamma_v + i_h i_v b_2 N_h N_v \gamma_v + i_h i_v b_4 N_h N_v \gamma_v + 2i_h i_v m_h N_h N_v \gamma_v + i_h i_v m_v N_h N_v \gamma_v + b_1 (b_2 b_4 + b_3 m_h + b_4 m_h + m_h^2 + 2b_2 m_v + 2b_4 m_v + 4m_h m_v + m_v^2 + i_h (b_2 + b_4 + 2m_h + m_v) N_h \gamma_v + b_2 (b_4 + m_h + 2m_v + i_h N_h \gamma_v - \eta b_1)) + b_3 b_4 \lambda_h + b_3 m_h \lambda_h + b_4 m_h \lambda_h + m_h^2 \lambda_h + 2b_2 m_v \lambda_h + 2b_4 m_v \lambda_h + 4m_h m_v \lambda_h + m_v^2 \lambda_h + i_v b_2 N_v \gamma_h \lambda_h + i_v m_h N_v \gamma_h \lambda_h + 2i_v m_v N_v \gamma_h \lambda_h + i_h b_2 N_h \gamma_v \lambda_h + 2i_h m_h N_h \gamma_v \lambda_h + i_h m_v N_h \gamma_v \lambda_h + i_h i_v N_h N_v \gamma_v \lambda_h + i_v N_v \gamma_h \eta b_1 \lambda_h + b_1 (b_2 + b_4 + 2m_h + m_v + i_h N_h \gamma_v) \lambda_v + (3m_h^2 + 3m_h m_v + 2i_v m_h N_v \gamma_h + i_v m_v N_v \gamma_h + 3i_h m_h N_h \gamma_v + i_h i_v N_h N_v \gamma_v + (2m_h + m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v) \lambda_h + b_4 (2m_h + m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v + \lambda_h)) + b_1 (b_4 + 2m_h + m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v + \lambda_h) \lambda_v + b_2 (m_h^2 + m_v^2 + 2i_v m_v N_v \gamma_h + i_h m_v N_h \gamma_v + i_h i_v N_h N_v \gamma_v - 2i_v N_v \gamma_h \eta b_1 - i_h N_h \gamma_v \eta b_1 + 2m_v \lambda_h + i_v N_v \gamma_h \lambda_h + i_h N_h \gamma_v \lambda_h - \eta b_1 \lambda_h + (m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v - \eta b_1 + \lambda_h) \lambda_v + b_1 (m_h + 2m_v + i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v + \lambda_h + \lambda_v)) + m_h (4m_v + i_v N_v \gamma_h + 2i_h N_h \gamma_v - \eta b_1 + \lambda_h + 2\lambda_v)$$

$$G_2 = 2b_2 b_4 m_h m_v + 2b_2 m_h^2 m_v + 2b_4 m_h^2 m_v + 2m_h^3 m_v + b_2 b_4 m_v^2 + 2b_2 m_h m_v^2 + 2b_4 m_h m_v^2 + 3m_h^2 m_v^2 + 2i_v b_2 b_4 m_v N_v \gamma_h + 2i_v b_2 m_h m_v N_v \gamma_h + 2i_v b_4 m_h m_v N_v \gamma_h + 2i_v m_h^2 m_v N_v \gamma_h + i_v b_2 m_v^2 N_v \gamma_h + i_v b_4 m_v^2 N_v \gamma_h + 2i_v m_h m_v^2 N_v \gamma_h + i_h b_2 b_4 m_h N_h \gamma_v + i_h b_2 m_h^2 N_h \gamma_v + i_h b_4 m_h^2 N_h \gamma_v + i_h m_h^3 N_h \gamma_v + i_h b_2 b_4 m_v N_h \gamma_v + 2i_h b_2 m_h m_v N_h \gamma_v + 3i_h m_h^2 m_v N_h \gamma_v + i_h i_v b_2 b_4 N_h N_v \gamma_v + i_h i_v b_2 m_h m_v N_h N_v \gamma_v + i_h i_v b_2 m_h^2 m_v N_h N_v \gamma_v + 2i_h i_v b_2 m_v N_h N_v \gamma_v + 2b_2 b_4 m_v \lambda_h + 2b_2 m_h m_v \lambda_h + 2b_4 m_h m_v \lambda_h + 2m_h^2 m_v \lambda_h + b_2 m_v^2 \lambda_h + b_4 m_v^2 \lambda_h + 2m_h m_v^2 \lambda_h + 2i_v b_2 m_v N_v \gamma_h \lambda_h + 2i_v m_h m_v N_v \gamma_h \lambda_h + i_v m_v^2 N_v \gamma_h \lambda_h + i_h b_2 b_4 N_h \gamma_v \lambda_h + i_h b_2 m_h N_h \gamma_v \lambda_h + i_h b_4 m_h N_h \gamma_v \lambda_h + i_h m_h^2 N_h \gamma_v \lambda_h + i_h i_v b_2 N_h N_v \gamma_v \lambda_h + 2i_h m_h m_v N_h \gamma_v \lambda_h + i_h i_v b_2 m_h m_v N_h N_v \gamma_v \lambda_h + (m_h (m_h^2 + m_h (3m_v + i_v N_v \gamma_h - 3i_h N_h \gamma_v) + 2i_v N_v \gamma_h (m_v - i_h N_h \gamma_v)) + (m_h^2 + m_h (2m_v + i_v N_v \gamma_h - 2i_h N_h \gamma_v) + N_v \gamma_h (-i_h (-1 + \theta_v) N_v S_h \gamma_v + i_v (m_v - i_h N_h \gamma_v (1 + S_h) \gamma_v + \eta b_1))) \lambda_h + b_4 (m_h^2 + (m_v - i_h N_h \gamma_v) (i_v N_v \gamma_h + \lambda_h) + m_h (2m_v + i_v N_v \gamma_h - 2i_h N_h \gamma_v + \lambda_h)) + b_2 (m_h^2 + i_v N_v \gamma_h (m_v - i_h N_h \gamma_v) + (m_v + i_v N_v \gamma_h - i_h N_h \gamma_v) \lambda_h + m_h (2m_v + i_v N_v \gamma_h - 2i_h N_h \gamma_v + \lambda_h)) + b_1 (m_h + m_v + i_v N_v \gamma_h - i_h N_h \gamma_v + \lambda_h)) \lambda_v + b_1 (2b_2 b_4 m_h m_v + 2m_h^2 m_v + b_4 m_v^2 + 2m_h m_v^2 + i_h b_4 m_h N_h \gamma_v + i_h m_h^2 N_h \gamma_v + i_h b_4 m_v N_h \gamma_v + 2i_h m_h m_v N_h \gamma_v + (b_4 m_h + m_h^2 + b_4 m_v + 2m_h m_v - i_h (b_4 + 2m_h) N_h \gamma_v) \lambda_v + b_3 (m_v (m_v + i_h N_h \gamma_v) + (m_v - i_h N_h \gamma_v) \lambda_v + b_4 (2m_v + i_h N_h \gamma_v + \lambda_v) + m_h (2m_v + i_h N_h \gamma_v + \lambda_v)) + b_2 (m_v^2 + i_h m_v N_h \gamma_v - 2m_v \eta b_1 - i_h N_h \gamma_v \eta b_1 + (m_v - i_h N_h \gamma_v - \eta b_1) \lambda_v + b_4 (2m_v + i_h N_h \gamma_v + \lambda_v) + m_h (2m_v + i_h N_h \gamma_v + \lambda_v))) + b_2 (i_v m_v^2 N_v \gamma_h + i_h i_v m_h N_h N_v \gamma_v - m_v^2 \eta b_1 - 2i_v m_v N_v \gamma_h \eta b_1 - i_h m_v N_h \gamma_v \eta b_1 - i_h i_v N_h N_v \gamma_v \eta b_1 + m_v^2 \lambda_h + 2i_v m_v N_v \gamma_h \lambda_h + i_h m_h N_h \gamma_v \lambda_h + i_h i_v N_h N_v \gamma_v \lambda_h - 2m_v \eta b_1 \lambda_h - i_h N_h \gamma_v \eta b_1 \lambda_h + (-m_v \eta b_1 + i_h N_h \gamma_v ((-1 + \theta_v) N_v S_h \gamma_h + \eta b_1 - \lambda_h)) + (m_v - \eta b_1) \lambda_h + i_v N_v \gamma_h (m_v + i_h N_h \gamma_v (-1 + S_h) \gamma_v - \eta b_1 + \lambda_h)) \lambda_v + m_h^2 (2m_v + i_h N_h \gamma_v + \lambda_v) + m_h (2m_v^2 + i_h N_h \gamma_v (i_v N_v \gamma_h - \eta b_1 + \lambda_h - 2\lambda_v) + (i_v N_v \gamma_h - \eta b_1 + \lambda_h) \lambda_v + 2m_v (i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v - \eta b_1 + \lambda_h + \lambda_v)) + b_1 (m_v^2 + i_h N_h \gamma_v (i_v N_v \gamma_h + \lambda_h) + (i_v N_v \gamma_h - i_h N_h \gamma_v + \lambda_h) \lambda_v + m_h (2m_v + i_h N_h \gamma_v + \lambda_v) + m_v (2i_v N_v \gamma_h + i_h N_h \gamma_v + 2\lambda_h + \lambda_v)))$$

$$\begin{aligned}
G_1 = & b_3 b_4 m_h m_v^2 + b_3 m_h^2 m_v^2 + b_4 m_h^2 m_v^2 + m_h^2 m_v^2 + i_v b_3 b_4 m_v^2 N_v \gamma_h + i_v b_3 m_h m_v^2 N_v \gamma_h + \\
& i_v b_4 m_h m_v^2 N_v \gamma_h + i_v m_h^2 m_v^2 N_v \gamma_h + i_h b_3 b_4 m_h m_v N_h \gamma_v + i_h b_3 m_h^2 m_v N_h \gamma_v + i_h b_4 m_h^2 m_v N_h \gamma_v + \\
& i_h m_h^2 m_v N_h \gamma_v + i_h i_v b_3 b_4 m_v N_h N_v \gamma_h \gamma_v + i_h i_v b_3 m_h m_v N_h N_v \gamma_h \gamma_v + i_h i_v b_4 m_h m_v N_h N_v \gamma_h \gamma_v + \\
& i_h i_v m_h^2 m_v N_h N_v \gamma_h \gamma_v + b_3 b_4 m_v^2 \lambda_h + b_3 m_h m_v^2 \lambda_h + b_4 m_h m_v^2 \lambda_h + m_h^2 m_v^2 \lambda_h + i_v b_3 m_v^2 N_v \gamma_h \lambda_h + \\
& i_v m_h m_v^2 N_v \gamma_h \lambda_h + i_h b_3 b_4 m_v N_h \gamma_v \lambda_h + i_h b_3 m_h m_v N_h \gamma_v \lambda_h + i_h b_4 m_h m_v N_h \gamma_v \lambda_h + i_h m_h^2 m_v N_h \gamma_v \lambda_h + \\
& i_h i_v b_3 m_v N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_h + i_h i_v m_h m_v N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_h + i_v m_v^2 N_v \gamma_h \eta b_1 \lambda_h + i_h i_v m_v N_h N_v \gamma_h \eta b_1 \lambda_h + \\
& b_3 b_4 m_h m_v \lambda_v + b_3 m_h^2 m_v \lambda_v + b_4 m_h^2 m_v \lambda_v + m_h^2 m_v \lambda_v + i_v b_3 b_4 m_v N_v \gamma_h \lambda_v + i_v b_3 m_h m_v N_v \gamma_h \lambda_v + \\
& i_v b_4 m_h m_v N_v \gamma_h \lambda_v + i_v m_h^2 m_v N_v \gamma_h \lambda_v - i_h b_3 b_4 m_h N_h \gamma_v \lambda_v - i_h b_3 m_h^2 N_h \gamma_v \lambda_v - i_h b_4 m_h^2 N_h \gamma_v \lambda_v - \\
& i_h m_h^2 N_h \gamma_v \lambda_v - i_h i_v b_3 b_4 N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v - i_h i_v b_3 m_h N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v - i_h i_v b_4 m_h N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v - \\
& i_h i_v m_h^2 N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_v + b_3 b_4 m_v \lambda_h \lambda_v + b_3 m_h m_v \lambda_h \lambda_v + b_4 m_h m_v \lambda_h \lambda_v + m_h^2 m_v \lambda_h \lambda_v + \\
& i_v b_3 m_v N_v \gamma_h \lambda_h \lambda_v + i_v m_h m_v N_v \gamma_h \lambda_h \lambda_v - i_h b_3 b_4 N_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h b_3 m_h N_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - \\
& i_h b_4 m_h N_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h m_h^2 N_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h i_v b_3 N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h i_v m_h N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v + \\
& i_h b_3 N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h i_v b_3 N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h b_3 e_v N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v + \\
& i_h m_h N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h i_v m_h N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h e_v m_h N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_h \lambda_v + \\
& i_h i_v N_h N_v S_h^2 \gamma_h^2 \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h i_v^2 N_h N_v^2 S_h \gamma_h^2 \gamma_v \lambda_h \lambda_v - i_h i_v e_v N_h N_v^2 S_h \gamma_h^2 \gamma_v \lambda_h \lambda_v + i_v m_v N_v \gamma_h \eta b_1 \lambda_h \lambda_v - \\
& i_h i_v N_h N_v \gamma_h \eta b_1 \lambda_h \lambda_v + b_1 ((b_3 + m_h)(m_v^2 - i_h N_h \gamma_v \lambda_v + m_v(i_h N_h \gamma_v + \lambda_v))) + \\
& b_2 (-m_v^2 \eta b_1 - i_h m_v N_h \gamma_v \eta b_1 - i_h N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_v + i_h i_v N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_v + i_h e_v N_h N_v S_h \gamma_h \gamma_v \lambda_v - \\
& m_v \eta b_1 \lambda_v + i_h N_h \gamma_v \eta b_1 \lambda_v + b_4 (m_v^2 - i_h N_h \gamma_v \lambda_v + m_v(i_h N_h \gamma_v + \lambda_v))) + m_h (m_v^2 - i_h N_h \gamma_v \lambda_v + \\
& m_v(i_h N_h \gamma_v + \lambda_v))) + b_2 (-i_v m_v^2 N_v \gamma_h \eta b_1 - i_h i_v m_v N_h N_v \gamma_h \eta b_1 + i_v m_v^2 N_v \gamma_h \lambda_h + \\
& i_h i_v m_v N_h N_v \gamma_h \gamma_v \lambda_h - m_v^2 \eta b_1 \lambda_h - i_h m_v N_h \gamma_v \eta b_1 \lambda_h - i_h i_v N_h N_v^2 S_h \gamma_h^2 \gamma_v \lambda_v + i_h i_v^2 N_h N_v^2 S_h \gamma_h^2 \gamma_v \lambda_v + \\
& i_h i_v e_v N_h N_v^2 S_h \gamma_h^2 \gamma_v \lambda_v - i_v m_v N_v \gamma_h \eta b_1 \lambda_v + i_h i_v N_h N_v \gamma_h \eta b_1 \lambda_v + i_v m_v N_v \gamma_h \lambda_h \lambda_v - \\
& i_h i_v N_h N_v \gamma_h \lambda_h \lambda_v - m_v \eta b_1 \lambda_h \lambda_v + i_h N_h \gamma_v \eta b_1 \lambda_h \lambda_v + m_h^2 (m_v^2 - i_h N_h \gamma_v \lambda_v + m_v(i_h N_h \gamma_v + \lambda_v)) + \\
& b_4 (m_h + i_v N_v \gamma_h + \lambda_h)(m_v^2 - i_h N_h \gamma_v \lambda_v + m_v(i_h N_h \gamma_v + \lambda_v)) + m_h (m_v^2 (-\eta b_1 + \lambda_h) + \\
& i_h N_h \gamma_v (-1 + e_v) N_v S_h \gamma_h + \eta b_1 - \lambda_h) \lambda_v - m_v (\eta b_1 - \lambda_h) (i_h N_h \gamma_v + \lambda_v) + i_v N_v \gamma_h (m_v^2 + \\
& i_h N_h (-1 + S_h) \gamma_v \lambda_v + m_v (i_h N_h \gamma_v + \lambda_v)))
\end{aligned}$$

กำหนดให้ จำนวนประชากรทั้งหมด 1500 คน นั่นคือ  $N_h = 1500$  คน , ประชากรหนึ่งคนมีอายุเฉลี่ย 65-70 ปี จำนวนประชากรคงที่ทำให้อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการตายของประชากร ดังนั้น  $A = m_h = \frac{1}{365 \cdot 70}$  ต่อวัน , ระยะเวลาของผู้ที่คิดเชื่อก่อนแสดงอาการ 14 วันเท่ากับระยะเวลาของผู้ที่พ้นจากการป่วยแล้วกลับไปป่วยอีกครั้ง นั่นคือ  $b_1 = b_4 = \frac{1}{14}$  ต่อวัน , ระยะเวลาที่เชื้อฝังตัวอยู่ในผู้ป่วย 10 วัน นั่นคือ  $b_2 = \frac{1}{14}$  ต่อวัน , ระยะเวลาที่ใช้ในการรักษาอาการป่วยเท่ากับระยะเวลาของการพ้นจากการคิดเชื่อเป็นเวลา 20 วัน นั่นคือ  $b_3 = \frac{1}{14}$  ต่อวัน , จำนวนฝูงทั้งหมด 500 ตัว นั่นคือ  $N_v = 500$  ตัว , ฝูงหนึ่งควมมีอายุเฉลี่ย 35 วัน นั่นคือ  $m_v = \frac{1}{35}$  ต่อวัน , ร้อยละผู้คิดเชื่อของประชากรเท่ากับ 0.02 นั่นคือ  $\eta = 0.02$ , อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากฝูงไปประชากรเท่ากับ 0.01 นั่นคือ  $\gamma_h = 0.01$ , อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากประชากรไปฝูงเท่ากับ 0.01 นั่นคือ  $\gamma_v = 0.01$

พิจารณาเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria ดังนั้น จากสมการที่ (3.1) – (3.5) ใช้ค่าพารามิเตอร์ข้างต้นสามารถแสดงกราฟของสมการที่ (3.1) – (3.5) ได้ดังนี้



รูปที่ 4 กราฟของค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ  
Routh-Hurwitz Criteria

#### 4 สรุปผลงานวิจัย

ในการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคมลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์ จะพบจุดสมดุลได้ภายใต้ 2 สภาวะ คือ จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคพบว่ามีค่าลักษณะเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพเมื่อ  $K_0 < 1$  และจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีค่าเป็นลบ เมื่อสอดคล้องกับ Routh-Hurwitz Criteria ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข  $K_0 > 1$  เราควรควบคุม อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากยุงไปประชากร ( $\gamma_H$ ) และ อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จากประชากรไปยุง ( $\gamma_V$ ) ซึ่งพารามิเตอร์เหล่านี้ ส่งผลให้เกิดการระบาดอยู่ในสภาวะไร้โรคหรือสภาวะระบาดเรื้อรัง ในงานวิจัยนี้ได้เสนอแนวทางที่เป็นทางเลือกอีกทางหนึ่งที่จะลดการระบาดของโรคมลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์

## เอกสารอ้างอิง

- [1] P. Pongsumpun and I.M. Tang, *Mathematics model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria*, Int J Math Models and Method in Applied Sci, 3 (2007), 117-121.
- [2] P. Pongsumpun, K. Patanarapelert, M. Sripom, S. Varamit and I.M. Tang, *Infection risk to travelers going to dengue fever endemic regions*, Southeast Asian J Trop Med Publ Health, 35 (2004), 155 – 159.
- [3] P. Pongsumpun and I.M. Tang, *Mathematical model for the transmission of P.falciparum and P. vivax malaria along the Thai-Myanmar border*, Int J Biol and Med Sci, 3 : 3 (2008), 200-207.
- [4] A. Kammanee, N. Kanyamee and I.M. Tang, *The basic reproduction number for transmission of Plasmodium Vivax Malaria*, Southeast Asian J Trop Med Public Health, 2001, 32, 702-706.
- [5] K. Nah, Y. Kim and J.M. Lee, *The dilution effect of the domestic animal population on the transmission of P. Vivax Malaria*, Journal of Theoretical Biology, 226 (2010), 299-306.

## ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นายเชาวนิตี เทียมแพ
วัน เดือน ปีเกิด	6 กันยายน 2530
สถานที่เกิด	จ.ราชบุรี
ที่อยู่ปัจจุบัน	69/3 หมู่ 2 ต.รางบั้ง อ.จอมบึง จ.ราชบุรี 70150
ประวัติการศึกษา	ระดับปริญญาตรี (พ.ศ. 2549 - 2553) - สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ระดับปริญญาโท (พ.ศ. 2553 - 2556) - สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีที่สำเร็จการศึกษา	ระดับปริญญาตรี : 2553 ระดับปริญญาโท : 2556
อีเมล	t_teevow@hotmail.com