วิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริง

A METHOD FOR FINDING ALL EIGENVALUES OF A REAL MATRIX

สมเกียรติ สมบูรณ์เงิน
SOMKIAT SOMBOON-NGERN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2545
ISBN 974-648-563-6

วิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริง

A METHOD FOR FINDING ALL EIGENVALUES OF A REAL MATRIX

สมเกียรติ สมบูรณ์เงิน

SOMKIAT SOMBOON-NGERN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2545

ISBN 974-648-563-6

A METHOD FOR FINDING ALL EIGENVALUES OF A REAL MATRIX

SOMKIAT SOMBOON-NGERN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT' S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2002

ISBN 974-648-563-6

หัวข้อวิทยานิพนธ์	วิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริง
นักศึกษา	นายสมเกียรติ สมบูรณ์เงิน
รหัสประจำตัว	41065310
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.อุบลวรรณา เงินวิจิตร
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม	รศ.ดร.อำพล ธรรมเจริญ

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการนำเสนอวิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริง ซึ่งเราจะดำเนินการสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n จุด คือ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้พหุนามลักษณะเฉพาะกำลัง n อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์

$$p_n(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(1)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n} (\lambda - x_i)$$

เมื่อ $f^{(1)}(x) = \det(A - xI)$ จากนั้นใช้วิธีเซแคนต์หาค่าตัวศูนย์ตัวหนึ่งของ $p_n(\lambda)$ แล้วทำการลดทอนกำลังของ $p_n(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n - 1 จุดเดิม คือ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ซึ่งเราจะได้พหุนามกำลัง n - 1 อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์

$$p_{n-1}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(2)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - x_i)$$

เมื่อ $f^{(2)}(x) = \dfrac{f^{(1)}(x)}{x - z}$ โดยที่ z เป็นตัวศูนย์ของ $p_n(\lambda)$ จากนี้เราดำเนินการหาตัวศูนย์และลดทอนกำลังของ $p_{n-1}(\lambda)$ ตามขั้นตอนเดิมที่กล่าวจนพหุนามที่ได้มีกำลังเป็น 1 จะทำให้เราได้ตัวศูนย์ของ $p_n(\lambda)$ จำนวน n ตัว ซึ่งเป็นค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์

Thesis Title	A Method for Finding all Eigenvalues of a Real Matrix
Student	Mr. Somkiat Somboon-ngern
Student ID.	41065310
Degree	Master of Science
Programme	Applied Mathematics
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Ubolwanna Ngernwichit
Thesis Co-advisor	Assoc.Prof.Dr.Ampon Dhamacharoen

ABSTRACT

This research proposes a direct method for computing all eigenvalues of a real $n \times n$ square matrix. Using the Lagrange's interpolation method with the initial n points, we obtain the characteristic polynomial of degree n in the form :

$$p_n(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(1)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n} (\lambda - x_i)$$

where $f^{(1)}(x) = \det(A - xI)$. The secant method is uses to find a zero of $p_n(\lambda)$, and then reduce the degree of $p_n(\lambda)$ by using the Lagrange's interpolation method with the initial n - 1 points, we obtain the characteristic polynomial of degree $n-1$ in the form :

$$p_{n-1}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(2)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - x_i)$$

where $f^{(2)}(x) = \dfrac{f^{(1)}(x)}{x - z}$ and z is a zero of $p_n(\lambda)$. We find the zero of $p_{n-1}(\lambda)$ and then reduce the degree of the polynomial in the same manner until the degree of the polynomial is 1. So we obtain all zeros of $p_n(\lambda)$ which are eigenvalues of given matrix.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาเกี่ยวกับความรู้ต่าง ๆ ที่ใช้ในการวิจัยรวมทั้งข้อผิดพลาดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจาก รศ.อุบลวรรณา เงินวิจิตร ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.อำพล ธรรมเจริญ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม รศ.ภัคคินี ชิตสกุล รศ.ดร.ปรีชา ยุพาพิน และ ผศ.กฤษฎา ไตรสุรัตน์ ซึ่งเป็นคณะกรรมการพิจารณาวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยซาบซึ้งในความอนุเคราะห์จากท่านและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ นักศึกษาทุกคนที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำต่าง ๆ พร้อมทั้งช่วยตรวจเทียบและแก้ไขทฤษฎีและอื่น ๆ ที่ผิดพลาด จนสำเร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้นและยังให้กำลังใจต่อผู้วิจัยอย่างใกล้ชิดตลอดมา

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

สมเกียรติ สมบูรณ์เงิน

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปัญหาค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของเมทริกซ์ เป็นปัญหาที่เราพบมากในการประยุกต์ในด้านต่าง ๆ ทั้งด้านคณิตศาสตร์ ด้านชีววิทยา ด้านฟิสิกส์ ด้านวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น ในการประยุกต์งานแต่ละด้านนั้นต้องการหาค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของเมทริกซ์ เพื่อใช้ช่วยในการแก้ปัญหาในด้านนั้น ๆ ปัญหาค่าเฉพาะแต่ละปัญหามีความต้องการชนิดของค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน บางปัญหาต้องการค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนจริง แต่ในบางปัญหาก็ต้องการค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ตัวอย่างการประยุกต์ในด้านต่าง ๆ ของปัญหาค่าเฉพาะ เช่น

ปัญหาการหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ [1] ให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots.. + a_{nn}x_n
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

เมื่อ x_i คือฟังก์ชันของ t ระบบสมการ (1.1) เขียนได้ในรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$\widehat{X} = AX \tag{1.2}$$

เมื่อ

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \quad , A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ในกรณีทั่วไป ถ้าเมทริกซ์ A ของสมการ (1.1) มีค่าเฉพาะ λ_i ที่แตกต่างกัน m ค่า ซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์เฉพาะ C_i ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.1) คือ

$$X = k_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots.. + k_m C_m e^{\lambda_m t}$$

การพิจารณาประชากรของสิ่งมีชีวิตสิ่งหนึ่งซึ่งอยู่ในสิ่งแวดล้อมที่ไม่มีการเคลื่อนเข้าหรือย้ายออกจากสิ่งแวดล้อมนั้น การแจกแจงของประชากรอธิบายได้ด้วยเวกเตอร์ แต่ละองค์ประกอบเป็นจำนวนสิ่งมีชีวิตตามกลุ่มอายุ การแจกแจงของประชากรนี้จะเปลี่ยนไปในแต่ละช่วงเวลา ในกรณีพิเศษการแจกแจงเมื่อสิ้นช่วงเวลาหนึ่งเป็นผลคูณของสเกลาร์ (หรือเป็นสัดส่วน) กับการแจกแจงเมื่อช่วงเวลาเริ่มต้น เราต้องการหาการแจกแจงของประชากรที่คงที่นั้น

ให้ $x_{i,t}$ เป็นจำนวนสิ่งมีชีวิตที่มีอายุ i ที่ช่วงเวลา t

p_i เป็นความน่าจะเป็นที่สิ่งมีชีวิตอายุ i ที่เวลา t จะมีชีวิตรอดถึงเวลา t+1

b_i เป็นจำนวนสิ่งมีชีวิตใหม่ที่เกิดจากสิ่งมีชีวิตเดิม 1 หน่วยที่อายุ i

n เป็นอายุที่มากที่สุดที่เป็นไปได้

เมทริกซ์หลักซึ่งแทนจำนวนของสิ่งมีชีวิตที่คาดว่าจะมีที่เวลา t+1 หาได้จากสมการเมทริกซ์

$$X_{t+1} = AX_t \tag{1.3}$$

เมื่อ

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{0,t+1} \\ x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n,t+1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ P_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{bmatrix}$$

สมมุติว่าเราต้องการหาจำนวนประชากรที่เวลา t ซึ่งจะทำให้ประชากรที่เวลา t+1 เป็นสัดส่วนกับประชากรเดิมนี้ หรือหาประชากรที่ทำให้เกิดความสมดุลของกลุ่มอายุ นั้นคือ เราต้องหาเวกเตอร์เฉพาะ X_t ที่ทำให้

$$X_{t+1} = \lambda X_t \tag{1.4}$$

เมื่อ λ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ดังนั้นสมการ (1.3) สามารถเขียนได้เป็น

$$\lambda X_t = AX_t \tag{1.5}$$

เมทริกซ์ A ในสมการ (1.3) เรียกว่าเมทริกซ์เลสลี (Leslie Matrix) มีค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวที่มากกว่าศูนย์ สมมติให้เป็น λ_1 เวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับ λ_1 คือ

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ P_0/\lambda_1 \\ P_0P_1/\lambda_1^2 \\ P_0P_1P_2/\lambda_1^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}/\lambda_1^n \end{bmatrix}$$

สมการพหุนามที่ให้ค่าเฉพาะ λ คือ

$$\lambda^{n+1} - b_0\lambda^n - b_1P_0\lambda^{n-1} - b_2P_0P_1\lambda^{n-2} - \ldots\ldots - b_1P_0P_1\ldots\ldots P_{n-1} = 0 \tag{1.6}$$

สำหรับค่า b_i และ P_i ที่คงเดิม และ $|\lambda_1| < \lambda$ โดยไม่ขึ้นกับ X_0 ซึ่งเป็นการแจกแจงของประชากรที่จุดเริ่มต้น นั่นหมายความว่าในระยะเวลายาว อัตราส่วนของจำนวนประชากรในแต่ละช่วงอายุมีค่าคงที่เป็นผลคูณของสเกลลาร์กับ Y_t ตัวอย่างเช่น การใช้แบบจำลองของเลสลีกับข้อมูลอัตราการเกิดและการอยู่รอดของหญิงชราชาวแคนนาดา ในปี ค.ศ. 1965 หญิงเหล่านี้อายุตั้งแต่ 0-50 ปี แบ่งอายุเป็นช่วง ๆ ช่วงละ 5 ปี แบบจำลองนี้ให้ค่าประมาณของ λ_1 เป็น 1.076 หมายความว่าประชากรหญิงจะเพิ่มขึ้น 7.6 % ในช่วง 5 ปี และเวกเตอร์เฉพาะ Y_t หมายถึงลิมิตของการแจกแจงตามอายุทั้ง 10 ช่วง เมื่อเทียบกับอัตราการเกิดและอยู่รอดของหญิงชาวแคนนาดาในปี 1965

ซึ่งปัญหาส่วนมากที่พบจะเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง (Real Matrix) ดังนั้นงานวิจัยนี้จะศึกษาการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ในกรณีที่สมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริงเท่านั้น ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ที่คำนวณเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหานั้น ในแต่ละปัญหาอาจจะมีความต้องการแตกต่างกัน เช่น บางปัญหาอาจจะต้องการค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนจริง หรือบางปัญหาอาจจะต้องการค่าเฉพาะทั้งหมดทั้งที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ในปัจจุบันมีวิธีการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์อยู่หลายวิธี คือ

วิธีการตรง (The Direct Method) [2] วิธีนี้เป็นวิธีการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์โดยการหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ แล้วหาตัวศูนย์ของพหุนามลักษณะเฉพาะนี้โดยใช้วิธีการต่าง ๆ ซึ่งในการหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์นั้นสามารถกระทำได้หลายวิธี เช่น ใช้นิยามของดีเทอร์มิแนนท์ ใช้การกระจายโคแฟกเตอร์ หรือใช้การกระทำตามแถวหรือการกระทำตามคอลัมน์ของเมทริกซ์ หาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A - \lambda I$ หรืออาจจะหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A - \lambda I$ โดยใช้วิธีของฟาดิเอฟ-ลาวาลิเอ (The Faddeev-Leverrier's Method) วิธีแมกซิมโบเชอร์ (Maxim Bocher's Method) หรือ วิธีของคลีลอฟ (The Krylov's Method) [3] ซึ่งทั้งสามวิธีนี้เป็นวิธีที่สร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์โดยวิธีการหาสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของพหุนามลักษณะเฉพาะ

วิธีกำลัง (The Power Method) [4-5] วิธีนี้เป็นวิธีที่ใช้สำหรับหาค่าเฉพาะที่ขนาดใหญ่ที่สุด หรือ ค่าเฉพาะที่มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดของเมทริกซ์และหาเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะที่ได้โดยการหาค่าเวกเตอร์ $x^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ โดยเริ่มต้นจากการเลือกเวกเตอร์เริ่มต้น $x^{(0)}$ จากนั้นคำนวณหาค่าของเวกเตอร์ $Ax^{(k)}$ แล้วทำการหารเวกเตอร์ $Ax^{(k)}$ ด้วยส่วนประกอบตัวแรกของเวกเตอร์ $Ax^{(k)}$ ที่คำนวณได้ (อาจจะหารด้วยขนาดของเวกเตอร์ x หรือส่วนประกอบที่ใหญ่ที่สุดของเวกเตอร์ x ก็ได้) ซึ่งจะได้เวกเตอร์ $x^{(k+1)}$ เราจะกระทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกระทั้งเวกเตอร์ $x^{(k+1)}$ จะลู่เข้า ท้ายที่สุดจะได้ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ ส่วนประกอบตัวแรกของเวกเตอร์ $x^{(k+1)}$ ที่ได้ (ขนาดของเวกเตอร์ x หรือส่วนประกอบที่ใหญ่ที่สุดของเวกเตอร์ x) และเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะที่ได้ก็คือ $x^{(k+1)}$ เราสามารถหาค่าเฉพาะตัวที่มีขนาดใหญ่รองลงมาของเมทริกซ์ได้ โดยเมื่อได้ค่าเฉพาะตัวที่มีขนาดใหญ่ที่สุดแล้ว จะดำเนินการทำการหาค่าเฉพาะตัวที่ใหญ่ที่สุดของเมทริกซ์ $A-\lambda_1 I$ เมื่อ λ_1 คือค่าเฉพาะตัวที่ใหญ่ที่สุดของเมทริกซ์ A สำหรับวิธีการนี้มีปัญหาบางประการ เช่น การเลือกเวกเตอร์เริ่มต้น ถ้าเลือกเวกเตอร์เริ่มต้นเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะที่ใหญ่ที่สุดของ A^T แล้วค่าเฉพาะที่ได้อาจจะไม่ใช่ค่าเฉพาะที่มีขนาดใหญ่ที่สุด หรือในกรณีที่ค่าเฉพาะที่มีขนาดใหญ่ที่สุดของเมทริกซ์ A มีค่าใกล้เคียงกับตัวอื่น จะพบว่าต้องคำนวณมากครั้งยิ่งขึ้น

วิธีกำลังผกผัน (The Inverse Power Method) [4] วิธีนี้เป็นวิธีที่ใช้สำหรับหาค่าเฉพาะที่ขนาดเล็กที่สุด หรือ ค่าเฉพาะที่มีค่าสัมบูรณ์น้อยที่สุดของเมทริกซ์และหาเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะที่ได้ โดยเริ่มต้นหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A จากนั้นใช้วิธีกำลัง ในวิธีการนี้สามารถที่จะหาค่าเฉพาะที่มีขนาดเล็กรองลงมาและเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะนั้นได้ โดยใช้หลักการของวิธีกำลังเช่นกัน แต่เมทริกซ์ที่สามารถใช้วิธีนี้ได้นั้นจะต้องเป็นเมทริกซ์ที่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้

วิธีจาโคบี (The Jacobi Method) [3] เป็นวิธีที่ใช้หาค่าเฉพาะของเมทริกซ์สมมาตรโดยอาศัยการแปลงเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Transform) แปลงเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) ในการสร้างเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก สามารถสร้างได้ดังนี้

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
P_k = & \begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \sin\theta & \cdots & -\cos\theta & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

โดยที่ θ ขึ้นอยู่กับสมาชิก a_{ij} และ a_{ji} ของเมทริกซ์ A_k

- ถ้า $a_{ij} \neq a_{ji}$ แล้ว $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$
- ถ้า $a_{ij} = a_{ji}$ แล้ว $\theta = \frac{\pi}{4}$

เมื่อได้เมทริกซ์ P_k (ซึ่ง $P_k^{-1} = P_k^T$) แล้วจะทำการหา A_{k+1} จาก $A_{k+1} = P_k A_k P_k^T$ ซึ่งจะได้ว่า a_{ij} และ a_{ji} ของเมทริกซ์ A_{k+1} เป็นศูนย์ เราจะกระทำจนกระทั่งเมทริกซ์ A_{k+1} เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ซึ่งสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) ของค่าของเมทริกซ์ A_{k+1} คือค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A

วิธีแบ่งครึ่ง (The Bisection Method) [6] เป็นวิธีที่ใช้หา λ_k ซึ่งเป็นค่าเฉพาะลำดับที่ k ของเมทริกซ์สมมาตร A โดยเริ่มต้นแปลงเมทริกซ์ A ให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง (Tridiagonal Matrix) จากนั้นใช้ทฤษฎีบทของเกอสช์กอริน (Gerschgorin) หาช่วง [a,b] ที่คลุมค่าเฉพาะ λ_k ของเมทริกซ์ A แล้วหาจุดกึ่งกลาง σ ของช่วง [a,b] จากนั้นหาเมทริกซ์ $A - \sigma I$ แล้วทำการแยกเป็นเมทริกซ์ LU โดยที่เมทริกซ์ L เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างที่สมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็น 1 (Unit Lower Triangular Matrix) และ U เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) จากนั้นพิจารณาค่าเฉพาะของเมริกซ์ A ว่ามีค่ามากกว่า σ และน้อยกว่า σ จำนวนเท่าใด โดยพิจารณาจากเครื่องหมายของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ U ถ้ามีค่าเฉพาะมากกว่า σ จำนวนมากกว่า k ตัว ค่าเฉพาะจะอยู่ในช่วง $[\sigma, b]$ แต่ถ้ามีค่าเฉพาะน้อยกว่า σ จำนวน k ตัว ค่าเฉพาะจะอยู่ในช่วง $[a, \sigma]$ ทั้งสองกรณีจะทำให้เราได้ช่วงที่เล็กลงที่คลุมค่าของ λ_k เราจะทำซ้ำในลักษณะนี้ไปเรื่อย ๆ ซึ่งเราจะได้ช่วงที่เล็กลงเรื่อย ๆ ท้ายที่สุดเราจะได้ค่า λ_k ในวิธีการนี้จะใช้ได้เฉพาะกรณีที่ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A เป็นจำนวนจริงเท่านั้น

วิธี QR (The QR Method) [3-8] วิธีนี้เป็นวิธีที่ใช้หาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยวิธีการสร้างลำดับของเมทริกซ์ $\{A_k\}$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ โดยเริ่มต้นให้เมทริกซ์ $A = A_0$ แล้วทำการหาลำดับของเมริกซ์ $\{A_k\}$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
A_0 &= Q_0R_0 &, \quad A_1 &= R_0Q_0 \\
A_1 &= Q_1R_1 &, \quad A_2 &= R_1Q_1 \\
A_2 &= Q_2R_2 &, \quad A_3 &= R_2Q_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
A_{k-1} &= Q_{k-1}R_{k-1} &, \quad A_k &= R_{k-1}Q_{k-1}
\end{aligned}
$$

ลำดับของเมทริกซ์ $\{A_k\}$ จะลู่เข้าสู่เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ซึ่งสมาชิกที่อยู่บนแนวเส้นทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ A_k ก็คือค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ในการแยกเมทริกซ์ A_k เป็นเมทริกซ์ Q_kR_k นั้นสามารถที่จะทำได้โดยใช้การหมุนระนาบ (Plane Rotation) [9] หรือใช้การสะท้อนของเฮาส์โฮลเดอร์ (Householder Reflection) [9]

ในแต่ละวิธีที่กล่าวมานั้นมีข้อดีและข้อด้อยที่แตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับเมทริกซ์ที่เราต้องการหาค่าเฉพาะ ในบางวิธีนั้นเราไม่สามารถหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ได้ สำหรับในงานวิจัยนี้เป็นวิธีตรงวิธีหนึ่ง กล่าวคือ หาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A และทำการหาตัวศูนย์ทั้งหมดของพหุนามลักษณะเฉพาะนี้ ในการหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ถ้าเราหาโดยวิธีการหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ $A - \lambda I$ หรือ วิธีของฟาดิเอฟ-ลาวาลิเอ วิธีของคลีลอฟ หรือ วิธีแมกซิมโปเซอร์ นั้น พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่ได้จะอยู่ในรูป

$$p_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\lambda + a_0) \tag{1.7}$$

ซึ่งถ้าหากว่าเมทริกซ์ A มีขนาดใหญ่ วิธีการต่าง ๆ ที่ใช้ในการหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่ได้กล่าวมาข้างต้นนั้นค่อนข้างที่จะยุ่งยากและจะต้องใช้กระบวนการในการคำนวณมาก

ในงานวิจัยนี้จะประยุกต์ใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ [10] เพื่อสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยปกติแล้ววิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ จะต้องใช้จุดเริ่มต้น $n+1$ ที่แตกต่างกันเราจึงจะได้พหุนามที่มีกำลัง n แต่ในงานวิจัยนี้จะใช้จุดเริ่มต้น n จุด ในการหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่มีกำลัง n ซึ่งรูปของพหุนามที่ได้จะอยู่ในรูป

$$p_n(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) \tag{1.8}$$

รูปแบบของพหุนามที่ได้จากการใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์นี้ จะช่วยให้ง่ายต่อการลดทอนกำลังของพหุนาม $p_n(\lambda)$ ซึ่งจะทำให้เราสามารถหาตัวศูนย์ทั้งหมดของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ได้

ตัวศูนย์ทั้งหมด (ที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ทั้งในกรณีที่มีรากแตกต่างกันทั้งหมดและกรณีที่มีรากซ้ำกัน) ของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่ได้ก็คือค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อหาวิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมด (ที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ทั้งกรณีที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด และในกรณีที่มีค่าเฉพาะซ้ำกัน) ของเมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึง การหาค่าเฉพาะทั้งหมด (ที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ทั้งกรณีที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด และในกรณีที่มีค่าเฉพาะซ้ำกัน) ของเมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริงเท่านั้น และจะเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์จากวิธีการที่ได้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้วิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง
2. ได้ขั้นตอนวิธีการเพื่อใช้สำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ ที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง (ที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ทั้งกรณีที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด และในกรณีที่มีค่าเฉพาะซ้ำกัน)

1.5 ขั้นตอนการศึกษา

ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 3 ศึกษาหาวิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริง

ขั้นตอนที่ 4 เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการที่ได้

ขั้นตอนที่ 5 เรียบเรียงและเขียนวิทยานิพนธ์

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 งานวิจัย

ปัญหาค่าเฉพาะเป็นปัญหาที่นำไปประยุกต์ใช้ในหลาย ๆ สาขาวิชา เราจึงถือได้ว่าปัญหาค่าเฉพาะนี้มีความสำคัญมาก ซึ่งในการแก้ปัญหาค่าเฉพาะนี้ ได้มีนักคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมากที่ศึกษาหาขั้นตอนวิธีการใหม่ ๆ เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาค่าเฉพาะ

ในปี ค.ศ 1981 นักวิทยาศาสตร์ชื่อ แดกซ์ และ คาเนียล (A. Dax and S. Kaniel) ได้เสนอวิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์เรื่อง The ELR Method for Computing the Eigenvalues of a General Matrix [11] ซึ่งในวิธีการนี้เริ่มต้นโดยการแปลงเมทริกซ์จตุรัส A ให้เป็นเมทริกซ์เฮซเซนเบิร์ก H (Hessenberg Matrix) และทำการแปลงให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง T แล้วคำนวณหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์จากเมทริกซ์ T ในการแปลงเมทริกซ์เฮซเซนเบิร์ก H ให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง T กระทำโดยวิธีการกำจัด (Elimination Method) และในการคำนวณหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์จากเมทริกซ์สามแนวเฉียง T จะใช้วิธี LR

ในปี ค.ศ. 1997 ชุย ฮุน ฮู (Shui-Hunn Hou) ได้กล่าวถึงวิธีการพิสูจน์วิธีการหาพหุนามลักษณะเฉพาะของฟาดิเอฟ-ลาวาลิเอ (Leverrier-Faddeev) ในงานวิจัยเรื่อง The Simple Proof of the Leverrier-Faddeev Characteristic Polynomial Algorithm [12] สำหรับที่มาของวิธีของฟาดิเอฟ-ลาวาลิเอ นั้นจะทำการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของ s ที่มีกำลังเท่ากัน ในสูตร

$$(sI - A)N(s) = Ip(s) \tag{2.1}$$

ซึ่งจะทำให้เราได้ค่าของ $N_1, N_2, \ldots\ldots, N_n$ ดังนี้

$$\begin{aligned} N_1 &= I \\ N_2 &= AN_1 + a_1 I \\ &\vdots \\ N_n &= AN_{n-1} + a_{n-1} I \\ 0 &= AN_n + a_n I \end{aligned} \tag{2.2}$$

ถ้า $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามลักษณะเฉพาะ p(s) แล้วเราสามารถที่จะตรวจสอบความถูกต้องของเมทริกซ์ $N_1, N_2, \ldots\ldots, N_n$ ที่คำนวณได้ โดยการหาค่าของเมทริกซ์

$AN_n + a_n I$ ในสมการสุดท้ายของ (2.2) ซึ่งถ้า $AN_n + a_n I = 0$ แสดงว่าค่า $N_1, N_2, \ldots\ldots, N_n$ ที่คำนวณได้เป็นค่าที่ถูกต้อง

ซึ่งจะได้วิธีการสำหรับคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$a_k = -\frac{1}{k}\operatorname{tr}AN_k \ , \ k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

เมื่อ $\operatorname{tr}(AN_k)$ แทนรอยของเมทริกซ์ AN_k ซึ่งกำหนดโดยผลบวกของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของเมทริกซ์

ถ้าเรารวมเซตของสูตรในสมการ (2.2) และ (2.3) เข้าด้วยกัน จะทำให้เราได้ขั้นตอนวิธีการของฟาดิเอฟ-ลาวาลิเอ ซึ่งใช้ในการสร้างลำดับ $\{N_k\}$ และ $\{a_k\}$ ดังนี้

$$\begin{array}{ll}
N_1 = I & , \quad a_1 = \frac{1}{1}\operatorname{tr}AN_1 \\
N_2 = AN_1 + a_1 I & , \quad a_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}AN_2 \\
N_3 = AN_2 + a_2 I & , \quad a_3 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}AN_3 \\
\quad \vdots & \qquad \vdots \\
N_n = AN_{n-1} + a_{n-1} I & , \quad a_n = \frac{1}{n}\operatorname{tr}AN_n \\
0 \ \ = AN_n + a_n I &
\end{array}$$

ในปี ค.ศ. 1998 นักวิทยาศาสตร์ชื่อ แดริโอ บินี และ วิคเตอร์ วาย แพน (Dario Bini and Victor Y. Pan) ได้เสนองานวิจัยเรื่อง Computing Matrix Eigenvalues and Polynomial Zeros where the Output is Real [13] ซึ่งเป็นวิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A ที่มีค่าเฉพาะทั้งหมดเป็นจำนวนจริง วิธีการในงานวิจัยนี้ คือ ทำการสร้างเมทริกซ์

$$T_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตรสามแนวเฉียงที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง (real symmetric tridiagonal matrix) และมีพหุนามลักษณะเฉพาะเป็น $\det(T_n - \lambda I) = p(\lambda)$ เมื่อ $p(\lambda)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A และทำการหาพหุนามลักษณะเฉพาะ $\det(T_n - \lambda I)$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

ข้อมูลเข้า : จำนวนเต็มบวก $n = 2^h$ และ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{n-1}$

คำนวณ : ให้ $H_j^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{j+1} - \lambda & -b_j^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

คำนวณหาค่า $H_j^{(i)} = H_{2j+1}^{(i-1)} H_{2j}^{i-1}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, \log n = h$

และ $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{-1}n - 1$

ผลลัพธ์ : $p(\lambda) = \det(T_n - \lambda I) = (1 \ \ 0) H_0^{(h)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

เมื่อได้ $p(\lambda)$ แล้วคำนวณหาค่า $p'(\lambda)$ จากนั้นใช้วิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน double exponential sieve และวิธีแบ่งครึ่ง ในการประมาณค่าเฉพาะของเมทริกซ์ T_n

ในงานวิจัยนี้เราจะประยุกต์ใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ เพื่อสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งเราต้องหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A - x_i I$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ เพื่อใช้ในการสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A และทำการประมาณค่าหาตัวศูนย์ทั้งหมดของพหุนามลักษณะเฉพาะที่ได้ ซึ่งในการศึกษางานวิจัยได้มีผู้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จตุรัสและการประมาณหาค่าตัวศูนย์ของพหุนาม ดังนี้

ในปี ค.ศ. 1996 เฟิ่ง เช็ง ชาง และ ชิง ซง ซู (Feng Cheng Chang and Ching-Tzong Su) ได้เสนองานวิจัยเรื่อง Quick Evaluation of Determinants [14] ซึ่งเป็นวิธีการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จตุรัสขนาด n โดยสามารถคำนวณได้จากสูตรการลดขนาด (order-reduction formular) ดังนี้

$$\det\begin{bmatrix} W & v \\ u & r \end{bmatrix} = r \det\left[W - \frac{1}{r} vu \right] \tag{2.4}$$

เราสามารถใช้สูตร (2.4) ได้เมื่อ $r \neq 0$ โดยที่ W , v , u และ r เป็น เมทริกซ์จตุรัส เมทริกซ์คอลัมน์ เมทริกซ์แถว และ ค่าคงที่ ตามลำดับ การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่มากเราสามารถที่จะใช้สูตรที่ (2.4) เพื่อหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ได้โดยง่าย ในกรณีที่ ถ้า $r = 0$ เราสามารถแก้ไขได้โดยเปลี่ยนแถวหรือคอลัมน์ เพื่อหลีกเลี่ยง $r = 0$ จำนวนครั้งของการดำเนินการของการคูณทั้งหมดที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3} n(2n^2 - 3n + 4)$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1998 เฟิง เช็ง ชาง และ ชิง ซง ซู (Feng Cheng Chang and Ching-Tzong Su) ได้เสนองานวิจัยเรื่อง More on Quick Evaluation of Determinants [15] ซึ่งเป็นการปรับปรุงงานวิจัยเดิม จากสูตรที่ (2.4) สามารถเปลี่ยนแปลงได้เป็น

$$\det\begin{bmatrix} W_{11} & v_1 & W_{12} \\ u_1 & r & u_2 \\ W_{22} & v_2 & W_{23} \end{bmatrix} = r\det\left\{\begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{r}\begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}[u_1 \quad -u_2]\right\} \tag{2.5}$$

ในสูตรที่ (2.5) นี้ค่า r ที่เลือกสามารถอยู่ในตำแหน่งใด ๆ ของเมทริกซ์ก็ได้ โดยที่ ค่า r มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ในการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ด้วยวิธีนี้นั้นเพื่อง่ายต่อการคำนวณจะเลือกค่า r ซึ่งอยู่ในแถว $[u_1 \quad -u_2]$ หรือคอลัมน์ $[v_1 \quad -v_2]^T$ ที่มีศูนย์ปรากฏอยู่มากที่สุด ซึ่งจากการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยใช้สูตรที่ (2.5) นี้จำนวนครั้งของการดำเนินการของการคูณทั้งหมดในการคำนวณยังคงมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}n(2n^2 - 3n + 4)$

ในปี ค.ศ. 1999 ชิมมิง เช็ง และแฟงกิว ซัน (Shiming Zheng and Fanggyu Sun) ได้เสนองานวิจัยเรื่อง Some Simultaneous Iterations for Finding al Zero of a Polynomial with High Order Convergence [16] ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการทำซ้ำสำหรับหาค่ารากทั้งหมดของพหุนามซึ่งสามารถทำซ้ำโดยใช้สูตร

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{2u_i}{1 + s_i + u_i t_i} \tag{2.6}$$

หรือ

$$x_i^{k+1} = x_i^k - u_i(1 - s_i + s_i^2 - u_i t_i) \tag{2.7}$$

เมื่อ $$u_i = \frac{f(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

$$s_i = \sum_{j\neq i}\frac{u_j}{x_i - x_j}$$

$$t_i = \sum_{j\neq i}\frac{u_j}{(x_i - x_j)^2}$$

2.2 ดีเทอร์มิแนนต์

วิธีการสำหรับหาการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์อันดับ n ที่กำหนดให้ โดยทั่วไปแล้วมีด้วยกันหลายวิธีเช่น

1) ใช้นิยามของดีเทอร์มิแนนท์ [17]

2) ใช้การกระจายโดยโคแฟกเตอร์ [17]

3) ใช้การกระทำตามแถวหรือการกระทำตามคอลัมน์ของเมทริกซ์ [17]

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ที่ได้กล่าวมาในตอนต้นและการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์โดยวิธีการกระทำตามแถวหรือการกระทำตามคอลัมน์ของเมทริกซ์เราสามารถที่จะหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ได้ โดยใช้สูตรซึ่งเป็นการลดขนาดของเมทริกซ์ลงเรื่อย ๆ ดังนี้

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จตุรัสขนาด n ใด ๆ แล้วดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ A สามารถหาได้จากสูตรลดขนาดของเมทริกซ์ ดังนี้

$$\det\begin{bmatrix} W_{11} & v_1 & W_{12} \\ u_1 & r & u_2 \\ W_{22} & v_2 & W_{23} \end{bmatrix} = (-1)^{i+j} r \det\left\{ \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{r}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \right\} \qquad (2.8)$$

โดยที่ r เป็นสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ i และ คอลัมน์ที่ j และมีค่าไม่เท่ากับ 0

$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์จตุรัสที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ออก

$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์คอลัมน์ที่สมาชิกทุกตัวเป็นสมาชิกคอลัมน์ที่ j โดยตัด r ออก

$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แถวที่สมาชิกทุกตัวเป็นสมาชิกแถวที่ i โดยตัด r ออก

ในการใช้สูตรที่ (2.8) เพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์นั้น ค่า r ที่เลือกสามารถอยู่ในตำแหน่งใด ๆ ของเมทริกซ์ก็ได้

2.3 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับค่าเฉพาะของเมทริกซ์

พิจารณาการแปลงเชิงเส้น $T : V \rightarrow V$ บนปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือสนาม F ซึ่งกำหนดโดย

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \tag{2.9}$$

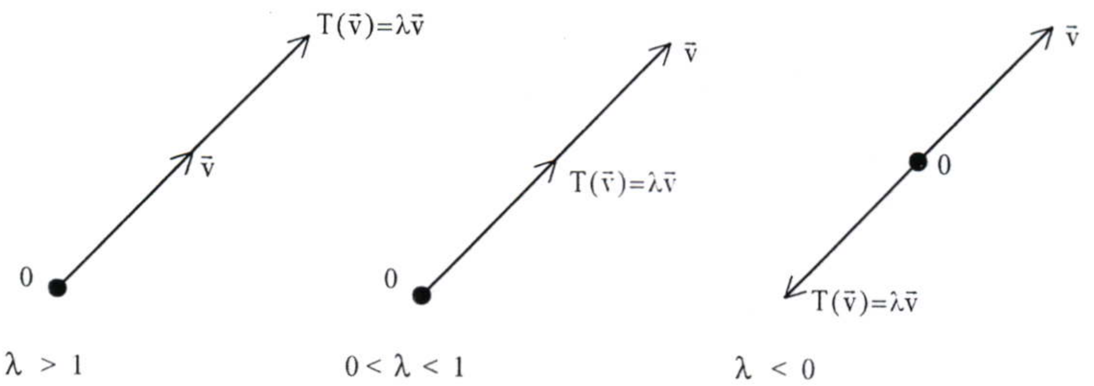
โดยที่ $\vec{v} \in F$ และ $\lambda \in F$ เราเรียก λ และ เวกเตอร์ $\vec{v}$ ที่สอดคล้องกับสมการ (2.9) ว่า ค่าเฉพาะ (eigenvalue , characteristic value หรือ characteristic root) และ เวกเตอร์เฉพาะ (eigenvector หรือ characteristic vector) ตามลำดับ

ถ้าพิจารณาความหมายในทางเรขาคณิตจะพบว่า ค่าเฉพาะ λ ของเมทริกซ์ A ในเวกเตอร์สเปซ R^2 และ R^3 คือ

ถ้า $\lambda > 1$ หมายถึง เป็นการขยายเวกเตอร์

$0 < \lambda < 1$ หมายถึง เป็นการย่อเวกเตอร์

$\lambda < 0$ หมายถึง เป็นการเปลี่ยนทิศทางตรงข้ามของเวกเตอร์ ดังภาพ



ภาพที่ 2.1 ความหมายของค่าเฉพาะทางเรขาคณิต

ตัวอย่างของการแปลงในสมการ (2.9) ได้แก่

การแปลงเอกลักษณ์ $I : V \rightarrow V$ ซึ่งกำหนดโดย $I(\vec{v}) = 1\vec{v}$ โดยที่ 1 เป็นค่าเฉพาะ และ $\vec{v}$ ทุกตัวใน V เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกัน

การหาอนุพันธ์ $D = d/dx$ บนปริภูมิ V ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งกำหนดโดย $D(e^{ax}) = ae^{ax}$ โดยที่ a เป็นค่าเฉพาะ และ e^{ax} เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกัน

ในกรณีของเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n อย่างเช่นเมทริกซ์ A ซึ่งถือได้ว่าแทนการแปลงบน F^n เราจะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$Ax = \lambda x \tag{2.10}$$

โดยที่ $\lambda \in F$ โดยที่ x เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ที่ไม่เป็น 0 ใน F^n

ในที่นี้เราต้องการหาค่าเวกเตอร์ x ค่าใดบ้างที่ถูกแปลงโดย A แล้วได้ผลเป็นค่าคงตัว λ คูณกับ x ตามสมการ (2.10) จากเงื่อนไขนี้เราได้

$$(A - \lambda)x = 0 \tag{2.11}$$

ซึ่งจะให้ผลเฉลยเมื่อ $\det(A - \lambda I) = 0$ ดังนั้น ถ้าให้ A และ X เป็นเมทริกซ์อันดับ $n \times n$ และเมทริกซ์อันดับ $n \times 1$ ตามลำดับ คือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

เราสามารถหาเวกเตอร์ x ซึ่งมีคุณสมบัติตามสมการ (2.11) ออกมาได้ เมื่อ

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{2.12}$$

โดยการกระจายดีเทอร์มิแนนของเมทริกซ์ $A - \lambda I$ เราจะได้

$$|A - \lambda I| = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0) \tag{2.13}$$

ซึ่งเรียกว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) ของเมทริกซ์ A ดังนั้น จะได้ว่า

$$|A - \lambda I| = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0) = 0 \tag{2.14}$$

ซึ่งสมการ (2.14) นี้เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของเมทริกซ์ A

สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A จะมีรากของสมการได้ n ค่า ซึ่งรากของสมการทั้งหมดที่ได้อาจจะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งอาจจะแตกต่างกันทั้งหมดหรือมีค่าซ้ำกันก็ได้ และรากของสมการทั้งหมดที่ได้ คือ ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A

นิยาม 2.3.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n และ x เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน R^n x เรียกว่าเป็นเวกเตอร์เฉพาะของเมทริกซ์ A ก็ต่อเมื่อ

$$Ax = \lambda x$$

สำหรับบางค่าคงที่ λ และค่าคงที่ λ เรียกว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A

นิยาม 2.3.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n $\det(A - \lambda I)$ เรียกว่าฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ characteristic polynomial) ของเมทริกซ์ A และสมการ $\det(A - \lambda I) = 0$ เรียกว่า สมการพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A (characteristic equation)

ทฤษฎีบท 2.3.1 พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จตุรัส A อันดับ n คือพหุนามที่มีกำลังสูงสุดเท่ากับ n และตัวศูนย์กพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A และค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A จะมีอย่างมากที่สุด n ตัวถ้าทุกตัวมีค่าแตกต่างกันทั้งหมด

นิยาม 2.3.3 ผลบวกของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก (main diagonal) ของเมทริกซ์จตุรัส A อันดับ n เรียกว่า รอยเมทริกซ์ (trac of matrix) เขียนแทนโดย tr(A)

ทฤษฎีบท 2.3.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n และ ให้ λ_1 , λ_2 , λ_3 , ….. , λ_n เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว

1. $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots\dots\dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

2. $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots\dots\dots \cdot \lambda = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

ทฤษฎีบท 2.3.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n และให้ $\lambda_1 = a + bi$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว สังยุคของ λ_1 คือ $\overline{\lambda_1} = a - bi$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ด้วย

2.4 ทฤษฎีจานของเกอสช์กอริน (The Gerschgorin Disk Theorem)

ทฤษฎีบท 2.4.1 (Gerschgorin Disk Theorem) ให้ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ นิยาม

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้นค่าเฉพาะ λ แต่ละค่าของเมทริกซ์ A สอดคล้องกับอสมการ

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

อย่างน้อย 1 อสมการ หรือจะกล่าวได้ว่า ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A จะอยู่ในยูเนียนของจาน (disk)

$$\{ r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \ i = 1, 2, \ldots, n \}$$

นิยาม 2.4.1 จาน$\{ z : |z - a_{ii}| \leq r_i \}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ เรียกว่า **จานเกอสช์กอริน** (Gerschgorin Disk) ในระนาบเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท 2.4.2 (Gerschgorin's second Theorem) สมมุติให้จานเกอสช์กอรินจำนวน r จาน ที่ไม่มีส่วนร่วมกับจานเกอสช์กอรินที่เหลือ แล้วจะมีค่าเฉพาะ λ จำนวน r ตัวเท่านั้นที่อยู่ในยูเนียนของจานเกอสช์กอริน r จานนี้

2.5 การประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์

สมมุติให้ว่า มีฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $x \in R$ กำหนดให้ $x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ จุดที่แตกต่างกัน $n+1$ และให้ $f(x_0) , f(x_1) , f(x_2) , \ldots , f(x_n)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ต้องการจะแสดงว่าจะต้องมีฟังก์ชันพหุนาม

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 \tag{2.15}$$

กำลัง n ซึ่งมีคุณสมบัติ $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$
เรากำหนดให้

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \qquad (2.16)$$

สำหรับค่าของ $i = 0,1,2,\ldots,n$ จะเห็นได้ว่า $l_i(x)$ ในสมการ (2.16) เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง n และมีคุณสมบัติ

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} \quad , \quad i,j = 0,1,2,\ldots,n \qquad (2.17)$$

เมื่อ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$$

ดังนั้น

$$p_n(x) = \sum_{i=o}^{n} f_i l_i(x_j) \qquad (2.18)$$

เป็นพหุนามกำลัง n ซึ่ง

$$p_n(x_i) = f(x_i) \ , \quad i = 0,1,2,\ldots,n \qquad (2.19)$$

พหุนาม $p_n(x) = \sum_{i=o}^{n} f_i l_i(x_j)$ เรียกว่า ฟังก์ชันพหุนาม (ประมาณค่า $f(x)$) แบบลากรองจ์ (Lagrange interpolating polynomial of $f(x)$) และพหุนาม $l_i(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันพหุนามฐานของ $p_n(x)$ (Basic polynomial for $p_n(x)$)

ทฤษฎีบท 2.5.1 กำหนดให้ $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ เป็นจุดต่างกัน $n+1$ จุด และ $f_0, f_1, f_2, \ldots f_n$ เมื่อ $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2,\ldots,n$ เป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดต่างๆ ดังนั้นเมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ จะต้องมีฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ กำลัง n เพียงหนึ่งเท่านั้น ซึ่งประมาณค่า $f(x)$ ที่จุด x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$

2.6 ระเบียบวิธีเซแคนต์

ระเบียบวิธีเซแคนต์เป็นระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีนิวตัน ซึ่งในการหาค่าราก ของสมการโดยระเบียบวิธีนิวตันนั้นคำนวณจากสมการ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.20}$$

ซึ่งในระเบียบวิธีนิวตันนี้จะต้องหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันบางชนิด กระทำได้ยาก เนื่องจากอนุพันธ์ของฟังก์ชันก็คือค่าความชันของฟังก์ชัน ดังนั้นถ้าทำการประมาณ ค่าความชันของฟังก์ชันโดยการคำนวณฟังก์ชันที่จุด x_n และ x_{n-1} จะได้ว่า

$$f'(x) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{2.21}$$

เมื่อเราแทนค่า $f'(x)$ ลงในสมการ (2.21) จะได้สมการ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{2.22}$$

ซึ่งสมการ (2.22) ที่ได้คือสูตรที่ใช้ในการหาค่ารากของสมการโดยระเบียบวิธีเซแคนต์

บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้ในการแก้ปัญหา

3.1 การหาฟังก์ชันพหุนามกำลัง n โดยวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n จุด

ให้ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามกำลัง n เราสามารถที่จะเขียน p(x) ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ ได้เป็น

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)} \qquad (3.1)$$

โดยที่จุด x_i เมื่อ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด n+1 จุด และ $p(x_i)$ เมื่อ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ เป็นค่าของพหุนาม p(x) ที่จุดต่าง ๆ แต่เนื่องจากฟังก์ชันพหุนาม p(x) สามารถที่จะทำให้อยู่ในรูปของพหุนามโมนิกกำลัง n (monic polynomial) ได้โดยการหารพหุนาม p(x) ด้วยสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^n ซึ่งเราจะได้พหุนามโมนิก q(x) ดังนี้

$$q(x) = \frac{P(x)}{a_n}$$

$$= x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{n-2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

$$= x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \qquad (3.2)$$

ซึ่งพหุนาม q(x) ที่ได้ก็เป็นพหุนามกำลัง n ดังนั้นเราสามารถที่จะเขียนฟังก์ชันพหุนาม q(x) ให้อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ได้เช่นเดียวกัน ดังนี้

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} q(x_i) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{p(x_i)}{a_n} \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)} \qquad (3.3)$$

เมื่อจุด x_i เมื่อ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด n+1 จุด และ $q(x_i)$ และ $p(x_i)$ เมื่อ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เป็นค่าของฟังก์ชันพหุนาม $q(x)$ และ $p(x)$ ที่จุดต่าง ๆ

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง n เราสามารถใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ สร้างพหุนามกำลัง n ได้อยู่ในรูป

$$p(x) = a_n \sum_{i=0}^{n} q(x_i) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)} \qquad (3.4)$$

เพียงหนึ่งเท่านั้น เมื่อ $q(x) = \frac{p(x)}{a_n}$ และจุด x_i เมื่อ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด n+1 จุด และ $p(x_i)$ เมื่อ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เป็นค่าของฟังก์ชันพหุนาม $p(x)$ ที่จุดต่าง ๆ

พิสูจน์ ให้จุด x_i เมื่อ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด และ $p(x_i)$ เมื่อ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เป็นค่าของพหุนามที่จุดต่าง ๆ จากทฤษฎีบทของลากรองจ์ สามารถเขียนฟังก์ชันพหุนาม $p(x)$ ได้อยู่ในรูปแบบพหุนามแบบลากรองจ์

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}$$

เนื่องจาก

$$q(x) = \frac{P(x)}{a_n}$$

จะได้ว่า

$$p(x) = a_n\, q(x)$$

เนื่องจาก $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง n ดังนั้นสามารถที่จะเขียนสามารถเขียนในรูปแบบพหุนามแบบลากรองจ์

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} q(x_i) \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}$$

ฉะนั้น

$$p(x) = a_n \sum_{i=0}^{n} q(x_i) \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)} \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ $p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโมนิกกำลัง n (monic polynomial) เราสามารถใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ สร้างพหุนามกำลัง n ได้อยู่ในรูปแบบพหุนามแบบลากรองจ์

$$p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i)}{(x - x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \tag{3.5}$$

โดยที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด n จุด และ $p(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นค่าของฟังก์ชันพหุนาม $p(x)$ ที่จุดต่าง ๆ

พิสูจน์ ให้ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด

กำหนดให้

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \tag{3.6}$$

ดังนั้น $g(x)$ เป็นพหุนามโมนิกกำลัง n

เนื่องจาก $p(x)$ เป็นพหุนามโมนิกกำลัง n

ดังนั้น จะได้ว่า $p(x) - g(x)$ เป็นพหุนามกำลัง $n - 1$

สมมุติให้

$$q(x) = p(x) - g(x) \tag{3.7}$$

ดังนั้น q(x) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ได้ ดังนี้

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{q(x_i)}{(x-x_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \right) \prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \tag{3.8}$$

เนื่องจาก $q(x_i) = p(x_i) - g(x_i)$ สำหรับทุกค่าของ $i = 1, 2, \ldots, n$
ดังนั้น

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i) - g(x_i)}{(x-x_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \right) \prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \tag{3.9}$$

แต่ $g(x_i) = 0$ สำหรับทุกค่าของ $i = 1, 2, \ldots, n$
จะได้ว่า

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i)}{(x-x_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \right) \prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \tag{3.10}$$

จาก (3.7) จะได้ว่า $p(x) = q(x) + g(x)$

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i)}{(x-x_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \right) \prod_{i=1}^{n}(x-x_i) + \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i)}{(x-x_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \qquad \square$$

3.2 การหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

ฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n นั้นสามารถหาได้หลายวิธี เช่น วิธีของฟาดิเอฟ-ลาวาลิเอ วิธีของคลีลอฟ หรือ วิธีแมกซิมโปเซอร์ ซึ่งเป็นวิธีการหาฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยวิธีการหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ของฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A หรืออาจจะหาโดยใช้วิธีการหาดีเทอร์ มิแนนท์ของเมทริกซ์ $A-\lambda I$ สำหรับการหาโดยวิธีการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ $A-\lambda I$ นั้นเราสามารถหาได้โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ วิธีการกระทำเชิงแถว (Row Operattion) หรือการกระทำเชิงคอลัมน์ (Column Operationaa) ซึ่งในวิธีการนี้ถ้าหากว่าเมทริกซ์มีขนาดใหญ่นั้นกระทำได้ยากเพราะสมาชิกของเมทริกซ์มีตัวแปร λ อยู่

ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะทำการหาฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ โดยใช้จุดเริ่มต้น n จุด โดยที่ทุกจุดเป็นจำนวนจริงที่มีค่าแตกต่างกันทั้งหมด และหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ $A-x_iI$ เมื่อ $i=1,2,\ldots,n$ เนื่องจากพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A เป็นพหุนามโมนิก ดังนั้นเราสามารถสร้างพหุนามกำลัง n ให้อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ได้โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 3.1.2 ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 กำหนดให้ x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด n จุด และ $f(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ ของ f(x) เมื่อ $f(x) = \det(A-xI)$ โดยที่ A เป็นเมทริกซ์จตุรัสขนาด n แล้วพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$p_n(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) \tag{3.11}$$

พิสูจน์ ให้ $p_n(\lambda)$ เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งสามารถหาได้จาก $\det(A-\lambda I)$ จากคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \det(-(\lambda I - A)) \\ &= (-1)^n \det(\lambda I - A) \end{aligned} \tag{3.12}$$

เนื่องจาก $\det(\lambda I - A)$ เป็นพหุนามโมนิกกำลัง n ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.1.2 สามารถเขียน $\det(\lambda I - A)$ ให้อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ได้เป็น

$$\det(\lambda I - A) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\det(x_i I - A)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) \qquad (3.13)$$

โดยที่ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด n จุด ดังนั้น จากสมการ (3.12) และสมการ (3.13) จะได้ว่า

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\det(x_i I - A)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^n \det(x_i I - A)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\det(A - x_i I)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) \qquad (3.14)$$

เนื่องจาก $f(x) = \det(A - xI)$

ฉะนั้นได้ว่า $$p_n(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) \qquad \square$$

3.3 การลดทอนกำลังของฟังก์ชันพหุนาม

ให้ $p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง n และให้ λ_1 เป็นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของ $p(x)$ โดยที่ λ_1 เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน เราสามารถแยกตัวประกอบ $(x - \lambda_1)$ จากพหุนาม $p(x)$ ทำให้ได้

$$p(x) = (x - \lambda_1) q_1(x) \tag{3.15}$$

ซึ่ง $q_1(x)$ เป็นพหุนามกำลัง $n-1$ ตัวศูนย์ที่เหลือของพหุนาม $p(x)$ ก็คือตัวศูนย์ทั้งหมดของพหุนาม $q_1(x)$ โดยที่ $q_1(x)$ สามารถหาได้จากการหารสังเคราะห์

$$q_1(x) = \frac{p(x)}{(x - \lambda_1)} \tag{3.16}$$

ต่อไปถ้าหาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $q_1(x)$ ได้สมมุติ คือ λ_2 ซึ่ง λ_2 ก็เป็นตัวศูนย์อีกตัวหนึ่งของพหุนาม $p(x)$ ด้วย ดังนั้นเราสามารถแยกตัวประกอบ $(x - \lambda_2)$ ออกจากพหุนาม $q_1(x)$ และทำการหารสังเคราะห์ได้พหุนาม $q_2(x)$ เป็นพหุนามกำลัง $n-2$ โดยทั่วไปถ้าเราทราบตัวศูนย์ $\lambda_1, \lambda_2\ \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ ของพหุนาม $p(x)$ จะได้

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\ldots(x-\lambda_n)q_k(x) \tag{3.17}$$

โดยที่ $q_k(x)$ เป็นพหุนามกำลัง $n-k$ ตัวศูนย์ที่เหลือของพหุนาม $p(x)$ ก็คือตัวศูนย์ทั้งหมดของ $q_k(x)$ วิธีการเช่นนี้เราเรียกว่าวิธีลดรูปของพหุนาม

แต่ในงานวิจัยนี้พหุนาม $p(x)$ คือพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ ซึ่งเป็นพหุนามโมนิกที่อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ ในการลดรูปของพหุนาม $p(x)$ นี้เราจะใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ ซึ่งพหุนาม $q(x)$ ที่ได้จากการลดรูปของพหุนาม $p(x)$ ยังคงเป็นพหุนามโมนิกและอยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์เช่นเดิม

ทฤษฎีบทที่ 3.3.1 ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามโมนิกกำลัง n และให้ λ_1 เป็นตัวศูนย์ของ $p(x)$ เราสามารถสร้างฟังก์ชันพหุนาม $q(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง $n-1$ ได้อยู่ในรูป

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{p(x_i)/(x_i - \lambda_1)}{(x - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i) \tag{3.18}$$

โดยที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมดและไม่เท่ากับ λ_1 และ $p(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ เป็นค่าของฟังก์ชันพหุนาม $p(x)$ ที่จุดต่าง ๆ

พิสูจน์ กำหนดให้ x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ เป็นจุดที่แตกต่างกันทั้งหมดและไม่เท่ากับ λ_1 และ $p(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ เป็นค่าของฟังก์ชันพหุนาม $p(x)$ ที่จุดต่าง ๆ เนื่องจาก λ_1 เป็นตัวศูนย์ของพหุนาม $p(x)$ ดังนั้น $(x - \lambda_1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $p(x)$ เราสามารถลดรูปของพหุนามได้เป็น

$$q(x) = \frac{p(x)}{(x - \lambda_1)}$$

เนื่องจาก $q(x)$ เป็นพหุนามโมนิกกำลัง $n-1$ จากทฤษฎีบทที่ 3.1.2 พหุนาม $q(x)$ สามารถเขียนได้ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ดังนี้

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{q(x_i)}{(x - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{p(x_i)/(x_i - \lambda_1)}{(x - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} + 1 \right) \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i) \qquad \square$$

บทที่ 4
ขั้นตอนวิธีการ

4.1 ปัญหาและขั้นตอนวิธีการหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริง

จากเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์จตุรัสอันดับ n และสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กล่าวคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} เป็นจำนวนจริง เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ และ $j = 1,2,\ldots,n$

การหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A นี้จะดำเนินการสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n จุด โดยให้ x_i เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ เป็นจุดเริ่มต้น เมื่อ n มีค่าเท่ากับอันดับของเมทริกซ์ A ในการกำหนดจุดเริ่มต้นทั้งหมดนั้น จะเลือกค่าที่เป็นจำนวนจริงที่มีค่าแตกต่างกันทั้งหมด และทุกจุดอยู่ในจานเกอสช์กอริน โดยที่มีจุดหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ จากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าฟังก์ชันของจุด x_i แต่ละจุด ในการหาค่าฟังก์ชันนี้สามารถหาได้จากค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A - x_i I$ เมื่อเมทริกซ์ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ โดยใช้สูตรการลดขนาดของเมทริกซ์ เมื่อได้ค่าฟังก์ชันที่จุด x_i แต่ละจุดแล้ว จะนำค่าของ x_i และค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i มาสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้ $f(x) = \det(A - xI)$ ซึ่งจะได้พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์อยู่ในรูป

$$p_n(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i) \qquad (4.1)$$

จากนั้นจะใช้วิธีเซแคนต์ประมาณค่าตัวศูนย์ตัวหนึ่งของ $p_n(\lambda)$ ซึ่งในการประมาณค่าตัวศูนย์นี้จะเริ่มต้นจากจุดที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งจุด โดยจุดเริ่มต้นทั้งสองจุดนี้เป็นจุดที่อยู่ภายในจานเกอสช์กอรินเช่นกัน เมื่อได้ตัวศูนย์ตัวหนึ่งจากการประมาณค่าโดยใช้วิธีเซแคนต์แล้ว

จะทำการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ ในการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะนั้น เราแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้ คือ

1. กรณีที่ตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้เป็นจำนวนจริง
2. กรณีที่ตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

กรณีที่ 1 ถ้าตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้เป็นจำนวนจริง สามารถที่จะทำการลดกำลังของพหุนามลงได้ 1 อันดับ ดังนี้

เริ่มทำการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n - 1 จุด โดยที่ใช้ n - 1 จุดเดิม คือ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n-1$ และทำการคำนวณหาค่าฟังก์ชันของจุด x_i แต่ละจุด เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนจะใช้ $f^{(1)}(x_i)$ แทนค่าฟังก์ชันของจุด x_i นี้ ในการคำนวณนั้นจะคำนวณโดยใช้ค่าของ $f(x_i)$ โดยที่

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - \lambda_1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

โดยที่ λ_1 คือ ตัวศูนย์ของ $p_n(\lambda)$ ที่ประมาณค่าได้จากวิธีเซแคนต์ เมื่อได้จุด n – 1 จุด และค่าของฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ แล้ว จากนั้นใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์สร้างพหุนามกำลัง n - 1 ได้อยู่ในรูป

$$p_{n-1}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(1)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n-1}(\lambda - x_i) \tag{4.2}$$

กรณีที่ 2 ถ้าตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน สามารถที่จะทำการลดกำลังของพหุนามลงได้ 2 อันดับ ดังนี้

สมมุติว่าตัวศูนย์ตัวหนึ่งของ $p_n(\lambda)$ ที่ได้จากการประมาณค่าโดยใช้ใช้วิธีเซแคนต์เป็นจำนวนเชิงซ้อน คือ $\lambda_1 = a + bi$ จากทฤษฎีบททราบว่าสังยุคของ λ_1 คือ $\overline{\lambda}_1 = a - bi$ ก็เป็นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของ $p_n(\lambda)$ ด้วย ดังนั้นทำการลดทอนกำลังของพหุนาม $p_n(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n - 2 จุด โดยที่ใช้ n - 2 จุดเดิม คือ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n-2$ และทำการคำนวณหาค่าฟังก์ชันของจุด x_i แต่ละจุด เพื่อไม่ให้เกิดความสับสน

จะใช้ $f^{(2)}(x_i)$ แทนค่าฟังก์ชันของจุด x_i นี้ ในการคำนวณนั้นจะคำนวณโดยใช้ค่าของ $f(x_i)$ โดยที่

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{f(x_i)}{(x_i - \lambda_1)(x_i - \bar{\lambda}_1)} \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, \ldots, n-2$$

$$= \frac{f(x_i)}{\big(x_i - (a+bi)\big)\big(x_i - (a-bi)\big)}$$

$$= \frac{f(x_i)}{(x_i - a)^2 + b^2}$$

เมื่อได้จุด $n-1$ จุดและค่าฟังก์ชันที่จุดต่างๆ แล้วจากนั้นใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์สร้างพหุนามกำลัง $n-2$ ได้อยู่ในรูป

$$p_{n-2}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{f^{(2)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-2}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n-2}(\lambda - x_i) \qquad (4.3)$$

เมื่อทำการลดทอนกำลังของ $p_n(\lambda)$ เรียบร้อยแล้ว จากนั้นใช้วิธีเซแคนต์หาค่าตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามที่ได้จากการลดทอนกำลังของ $p_n(\lambda)$ ในการหาตัวศูนย์โดยใช้วิธีเซแคนต์นี้จะเริ่มต้นจากจุดที่เป็นตัวศูนย์ของ $p_n(\lambda)$ ที่ได้จากการประมาณค่าในตอนต้นหนึ่งจุดและอีกจุดหนึ่งเป็นจุดที่กำหนดและอยู่ในจานเกอสช์กอริน โดยที่จุดทั้งสองจุดนี้จะต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งจุด เมื่อประมาณค่าหาตัวศูนย์ได้แล้วก็ดำเนินการลดทอนกำลังของพหุนามแบบเดียวกับการลดทอนกำลังของ $p_n(\lambda)$ ที่ได้กล่าวมาแล้ว เราจะดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ท้ายที่สุดจะได้ตัวศูนย์ทั้งหมดของ $p_n(\lambda)$ จำนวน n ตัว (ที่เป็นจำนวนจริงและ จำนวนเชิงซ้อน ทั้งกรณีที่ตัวศูนย์แตกต่างกันทั้งหมดและกรณีที่มีตัวศูนย์ซ้ำกัน) ซึ่งตัวศูนย์ทั้ง n ตัว ของ $p_n(\lambda)$ ที่ได้ก็คือค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A

จากที่กล่าวมาในตอนต้น ถ้าหากว่าในการสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดเริ่มต้นนั้น เนื่องจากจุดเริ่มต้นทั้งหมดอยู่ในจานเกอสช์กอริน ดังนั้นค่าของจุด x_i แต่ละจุดอาจจะทำให้ค่าของฟังก์ชัน $\det(A - xI)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ได้ จุดนั้นก็เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ด้วย นั้นคือถ้าหากเกิด

ในกรณีที่จุดเริ่มต้นบางจุดให้ค่าของฟังก์ชันเป็นศูนย์ สามารถสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ได้อยู่ในรูป

$$p_n(\lambda) = (\lambda - x_{m+1})(\lambda - x_{m+2})\ldots(\lambda - x_n)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n\right)\prod_{i=1}^{n-m}(\lambda - x_i) \tag{4.4}$$

เมื่อ $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ เป็นจุดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \det(A - xI)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ หลังจากที่ได้พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว เราสามารถลดทอนกำลังของพหุนามได้ m อันดับ หลังจากลดทอนแล้วพหุนามที่ได้จะเป็นพหุนามกำลัง $n - m$ โดยสามารถเขียนพหุนามได้อยู่ในรูป

$$p_{n-m}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n-m}\frac{f^{(m)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-m}(x_i - x_j)} + (-1)^n\right)\prod_{i=1}^{n-m}(\lambda - x_i) \tag{4.5}$$

เมื่อ $f^{(m)}(x) = \dfrac{f(x)}{(x - x_{m+1})(x - x_{m+2})\ldots(x - x_n)}$ จากนั้นจะดำเนินการตามที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นต่อไป

จากที่กล่าวมาทั้งหมดในตอนต้น สามารถเขียนเป็นขั้นตอนวิธีการหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง ได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาจานเกอสช์กอริน (Gerschgorin Disk)

ขั้นตอนที่ 2 สร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n จุด โดยที่ทุกจุดมีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าแตกต่างกันทั้งหมดและทุกจุดอยู่ภายในจานเกอสช์กอริน ซึ่งพหุนามที่ได้ยังคงอยู่ในรูปของพหุนามแบบลากรองจ์

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีเซแคนต์ โดยเริ่มต้นจากจุด 2 จุด โดยที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งจุด โดยทั้งสองจุดนี้อยู่ในจานเกอสช์กอรินและไม่ซ้ำกับจุดเริ่มต้นทั้ง n จุดที่ใช้ในการสร้างพหุนามลักษณเฉพาะโดยวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ ตัวศูนย์ที่ได้อาจเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

ขั้นตอนที่ 4 ทำการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์

- ถ้าตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้ในขั้นตอนที่ 3 เป็นจำนวนจริง ลดทอนได้ 1 อันดับ
- ถ้าตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้ในขั้นตอนที่ 3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ลดทอนได้ 2 อันดับ

ขั้นตอนที่ 5 ตรวจสอบกำลังสูงสุดของพหุนามที่ได้ในขั้นตอนที่ 4

- ถ้ามีค่ามากกว่า 0 ให้กลับไปทำขั้นตอนที่ 3
- ถ้ามีค่าเท่ากับ 0 จบการขั้นตอนการทำงาน

4.2 รายละเอียดขั้นตอนวิธีการหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนจริง

จากที่ขั้นตอนวิธีการหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง ที่กล่าวมาในหัวข้อ 4.1 สามารถเขียนรายละเอียดของขั้นตอนวิธีการได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาจานเกอสช์กอริน (Gerschgorin Disk)

จากเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} เป็นจำนวนจริง เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ และ $j = 1, 2, \dots, n$ จากนั้นคำนวณหาค่า r_i เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ โดยที่

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| , \; i = 1, 2, \dots, n \tag{4.6}$$

ซึ่งจะได้ค่า r ทั้งหมด n ตัว คือ $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ จากนั้นแก้อสมการ

$$\left| \lambda - a_{ii} \right| \le r_i \; , \; i = 1, 2, \dots, n \tag{4.7}$$

เราจะได้จาน n จาน ซึ่งค่าเฉพาะแต่ละค่าของเมทริกซ์ A จะสอดคล้องกับอสมการ (4.7) อย่างน้อย 1 อสมการ หรือจะกล่าวได้ว่า ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A จะอยู่ในยูเนียนของจาน $\{ r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| \; , \; i = 1, 2, \dots, n \}$

ขั้นตอนที่ 2 หาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

กำหนดจุดเริ่มต้น n จุด คือ x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ โดยที่ทุกจุดเป็นจำนวนจริงและมีค่าที่แตกต่างกันทั้งหมด และอยู่ในจานเกอสช์กอรินที่หาได้ในขั้นตอนที่ 1

หาค่าฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \det(A - xI) \tag{4.8}$$

โดยการแทนค่า x ด้วย x_i แต่ละจุดในสมการ (4.8) ได้

$$f(x_i) = \det(A - x_i I) = \begin{bmatrix} a_{11} - x_i & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x_i & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x_i \end{bmatrix}$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ จากนั้นจะทำการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A - x_i I$ ซึ่งจะได้ค่าของ $f(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A - x_i I$ จะหาโดยใช้สูตรลดขนาดของเมทริกซ์

$$\det\begin{bmatrix} W_{11} & v_1 & W_{12} \\ u_1 & r & u_2 \\ W_{21} & v_2 & W_{23} \end{bmatrix} = (-1)^{i+j} r \det\left\{ \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{r}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \right\} \tag{4.9}$$

ในการเลือก r_i นั้น เราจะเลือก r_i ซึ่งค่าสัมบูรณ์มีค่ามากที่สุด โดยที่ $r_i \neq 0$ และเป็นสมาชิกในแถวที่ i ของเมทริกซ์ $A - x_i I$

เมื่อได้ค่าฟังก์ชันของ จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ แล้วจะทำการตรวจสอบว่ามีจุด x_i จุดใดหรือไม่ที่ทำให้ค่าฟังก์ชัน $\det(A - xI) = 0$ จากนั้นจะนำค่าของ x_i และ $f(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ที่ได้มาสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยเริ่มต้นคำนวณหาค่าของ

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

และนำค่าที่ได้มาคำนวณหาค่าของ

$$\frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

จากนั้นนำค่าที่ได้มาสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n จุด ซึ่งจะได้พหุนามกำลัง n ดังนี้

ในกรณีที่ไม่มีจุด x_i จุดใดที่ทำให้ค่าฟังก์ชัน $\det(A - xI) = 0$ จะสามารถสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นพหุนามกำลัง n ได้ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ ดังนี้

$$p_n(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i)$$

ในกรณีที่มีจุด x_i ที่ทำให้ค่าฟังก์ชัน $\det(A - xI) = 0$ เราจะสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นพหุนามกำลัง n อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ ดังนี้

$$p_n(\lambda) = (\lambda - x_{m+1})(\lambda - x_{m+2})\ldots(\lambda - x_n) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n-m}(\lambda - x_i)$$

เมื่อ $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ เป็นจุดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \det(A - xI)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่ได้นั้นจะไม่กระจายให้อยู่ในรูปของ

$$p_n(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\lambda + a_0 \right)$$

แต่จะเขียนพหุนามให้คงอยู่ในรูปแบบของลากรองจ์ตามรูปแบบ (4.1)

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

ในการหาตัวศูนย์ตัวของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่สร้างได้จากขั้นตอนที่ 2 จะใช้วิธีเซแคนต์ในการประมาณค่า ซึ่งตัวศูนย์ของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่ประมาณได้อาจจะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้

โดยเริ่มต้นจากการกำหนดจุดเริ่มต้น 2 จุด คือ จุด $\lambda_1^{(0)}$ และจุด $\lambda_1^{(1)}$ ซึ่งทั้งสองจุดจะต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งจุด โดยทั้งจุด $\lambda_1^{(0)}$ และ $\lambda_1^{(1)}$ นี้อยู่ภายในจานเกอสช์กอรินและแตกต่างจากจุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ที่ใช้ในการหาพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ในขั้นตอนที่ 2 และหาค่าฟังก์ชันของจุด $\lambda_1^{(0)}$ และ $\lambda_1^{(1)}$ โดยการแทนค่า $\lambda_1^{(0)}$ และ $\lambda_1^{(1)}$ ในพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่หาได้ในขั้นตอนที่ 2 จากนั้นใช้วิธีเซแคนต์ประมาณค่า ตัวศูนย์ตัวหนึ่งพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยการประมาณหาค่า $\lambda_1^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ

$$\lambda_1^{(k+1)} = \lambda_1^{(k)} - f(\lambda_1^{(k)})\frac{\left(\lambda_1^{(k-1)} - \lambda_1^{(k)}\right)}{\left(f(\lambda_1^{(k-1)}) - f(\lambda_1^{k})\right)} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots\ldots \qquad (4.10)$$

ในการประมาณค่าตัวศูนย์ตัวหนึ่งพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A เราจะตรวจสอบค่าของ $\lambda_1^{(k+1)}$ ในแต่ละครั้งที่ได้จากการประมาณค่าว่ามีความคาดเคลื่อนที่จะยอมรับได้หรือไม่ ซึ่งในงานวิจัยนี้ความคลาดเคลื่อนที่สามารถยอมรับได้ คือ $\left|f(\lambda_1^{k+1})\right| \leq 10^{-18}$ เมื่อ $\lambda_1^{(k+1)}$ เป็นค่าที่ยอมรับได้จะได้ว่า $\lambda_1 = \lambda_1^{(k+1)}$ ซึ่งเป็นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

ขั้นตอนที่ 4 ทำการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

เมื่อได้ค่าของ λ_1 ในขั้นตอนที่ 3 แล้วทำการตรวจสอบค่าของ λ_1 ที่ได้ว่าเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

ในกรณีที่ λ_1 เป็นจำนวนจริง จะทำการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ลง 1 อันดับ คือ จากพหุนามกำลัง n เป็นพหุนามกำลัง $n-1$ ดังนี้

กำหนดจุดเริ่มต้น $n-1$ จุด คือจุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ ซึ่งเป็นจุดเดิมที่กำหนดไว้ในขั้นตอนที่ 2 และหาค่าของ $f^{(1)}(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ โดยที่

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x)}{x - \lambda_1} \qquad (4.11)$$

จากนั้นใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น $n-1$ จุด เพื่อสร้างพหุนามกำลัง $n-1$ โดยเริ่มต้นคำนวณหาค่าของ

$$\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}(x_i - x_j) = \frac{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}{(x_i - x_n)} \quad , \; i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

และนำค่าที่ได้มาคำนวณหาค่าของ

$$\frac{f^{(1)}(x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} \quad , \; i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

จากนั้นนำค่าที่ได้มาสร้างพหุนามกำลัง n - 1 โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n - 1 จุด ซึ่งจะได้พหุนามกำลัง n -1 ดังนี้

$$p_{n-1}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(1)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n-1}(\lambda - x_i)$$

ในกรณีที่ λ_1 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้ $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ เมื่อ $\overline{\lambda}_1$ คือสังยุคของ λ_1 แล้วทำการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ลง 2 อันดับ คือ จากพหุนามกำลัง n เป็นพหุนามกำลัง n - 2 ดังนี้

กำหนดจุดเริ่มต้น n - 2 จุด คือจุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-2$ ซึ่งเป็นจุดเดิมที่กำหนดไว้ในขั้นตอนที่ 2 และหาค่าของ $f^{(1)}(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n-2$ โดยที่

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_i)}{(x_i - a)^2 + b^2}$$

เมื่อ $\lambda_1 = a + bi$ และ $\overline{\lambda}_1 = a - bi$ ซึ่งเป็นสังยุคของ λ_1 จากนั้นใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n - 2 จุด เพื่อสร้างพหุนามกำลัง n -2 โดยเริ่มต้นคำนวณหาค่าของ

$$\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-2}(x_i - x_j) = \frac{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}{(x_i - x_n)(x_i - x_{n-1})} \quad , \; i = 1, 2, 3, \ldots, n-2$$

และนำค่าที่ได้มาคำนวณหาค่าของ

$$\frac{f^{(1)}(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-2}(x_i - x_j)} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n-2$$

จากนั้นนำค่าที่ได้มาสร้างพหุนามกำลัง $n-2$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น $n-2$ จุด ซึ่งจะได้พหุนามกำลัง $n-2$ ดังนี้

$$p_{n-2}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{f^{(1)}(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-2}(x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n-2}(\lambda - x_i)$$

ขั้นตอนที่ 5 ถ้ากำลังสูงสุดของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A มากกว่า 0 เราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 คือ หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามโดยใช้วิธีเซแคนต์ในการประมาณค่า และทำการลดทอนกำลังของพหุนามลง 1 อันดับ หรือ 2 อันดับ ขึ้นอยู่กับตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้ เราจะดำเนินการทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 3 และ 4 ไปเรื่อย ๆ จนกำลังสูงสุดของพหุนามเท่ากับ 0 จึงจบการขั้นตอนการทำงาน

4.3 ตัวอย่างและผลการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 1 กรณีที่เมทริกซ์มีค่าเฉพาะทั้งหมดเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมด

$$\text{กำหนดเมทริกซ์ } A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

โดยการคำนวณหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MathCad 7.0 ให้ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ดังนี้

$$\lambda_1 = 0.843107150 \;,\; \lambda_2 = 0.010150048 \;,\; \lambda_3 = 3.858057456 \;,\; \lambda_4 = 30.288685346$$

ต่อไปจะใช้ขั้นตอนของวิธีการที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้หาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาจานเกอสช์กอริน (Gerschgorin Disk)

หาค่า r_i จากสมการ (4.6) ซึ่งจะได้ $r_1 = 10$, $r_2 = 5$, $r_3 = 10$ และ $r_4 = 10$ ซึ่งทำให้ได้จานเกอสช์กอรินทั้ง 4 จาน คือ

$$|\lambda - 10| \le 22$$

$$|\lambda - 5| \le 18$$

$$|\lambda - 10| \le 23$$

$$|\lambda - 10| \le 21$$

ดังนั้น จะได้ว่าค่าเฉพาะทั้งหมดจะอยู่ภายในยูเนียนของจาน $\{ r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} |a_{ij}| \quad , \ i = 1,2,3,4 \}$

ขั้นตอนที่ 2 สร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

เลือกจุดเริ่มต้น 4 จุด โดยที่ทุกจุดเป็นจำนวนจริงทั้งหมด เพื่อใช้สำหรับสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยเราจะเลือกจุดที่อยู่ภายในจานเกอสช์กอรินที่หาไว้ในขั้นตอนที่ 1 และจุดเริ่มต้นจุดหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 5 \ , \ x_3 = 2 \ , \ x_4 = -4$$

จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4$ โดยที่ $f(x) = \det(A - xI)$ โดยใช้สูตรลดขนาด (4.9) ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ $\det(A - x_i I)$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1$ ค่าของ $x_1 = 0$ จะได้

$$f(x_1) = \det(A - 0I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (10)\det\left(\begin{bmatrix} 0.100000000 & 0.400000000 & 0.100000000 \\ 0.400000000 & 3.600000000 & 3.400000000 \\ 0.100000000 & 3.400000000 & 5.100000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (10)(-0.400000000)\det\left(\begin{bmatrix} -0.500000000 & 2.500000000 \\ -0.750000000 & 4.250000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (10)(-0.40000000)(-2.500000000)\det\left(\begin{bmatrix} 0.100000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (10)(-0.40000000)(-2.500000000)(0.100000000)$$

$$= 1$$

เมื่อ $i = 2$ ค่าของ $x_2 = 5$ จะได้

$$f(x_2) = \det(A - 5I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 5 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)\det\left(\begin{bmatrix} 3.250000000 & -5.250000000 & -0.250000000 \\ 4.875000000 & 1.625000000 & 4.625000000 \\ 1.375000000 & -2.875000000 & -2.875000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)(5.250000000)\det\left(\begin{bmatrix} 5.880952381 & 4.547619048 \\ -0.404761905 & -2.738095238 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)(5.250000000)(5.880952381)\det\left(\begin{bmatrix} -2.425101215 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)(5.250000000)(5.880952381)(-2.425101215)$$

$$= -599$$

เมื่อ i = 3 ค่าของ $x_3 = 2$ จะได้

$$f(x_3) = \det(A - 2I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 3 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)\det\left(\begin{bmatrix} -3.125000000 & -1.000000000 & -1.125000000 \\ -1.000000000 & 0.000000000 & 2.000000000 \\ -1.125000000 & 2.000000000 & 1.875000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)(-3.12500000)\det\left(\begin{bmatrix} 0.320000000 & 2.360000000 \\ 2.360000000 & 2.280000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)(-3.12500000)(-2.36000000)\det\left(\begin{bmatrix} 2.050847458 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (8)(-3.12500000)(-2.36000000)(2.050847458)$$

$$= 121$$

เมื่อ i = 4 ค่าของ $x_4 = -4$ จะได้

$$f(x_4) = \det(A + 4I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 14 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 9 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 14 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 14 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (14)\det\left(\begin{bmatrix} 5.500000000 & 2.000000000 & 1.500000000 \\ 2.000000000 & 9.428571429 & 5.000000000 \\ 1.500000000 & 5.000000000 & 10.500000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad (14)(5.500000000)\det\left(\begin{bmatrix} 8.701298701 & 4.454545455 \\ 4.454545455 & 10.090909091 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad (14)(5.500000000)(8.701298701)\det\left(\begin{bmatrix} 7.810447761 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad (14)(5.500000000)(8.701298701)(7.810447761)$$

$$= \quad 5233$$

จากนั้นคำนวณหาค่า $\dfrac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4}(x_i - x_j)}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$\frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{4}(x_1 - x_j)} = \frac{1}{(0-5)(0-2)(0+4)}$$

$$= \frac{1}{40}$$

$$= 0.025$$

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$$\frac{f(x_2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{4}(x_2 - x_j)} = \frac{-599}{(5-0)(5-2)(5+4)}$$

$$= \frac{-599}{135}$$

$$= -4.437037037$$

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$$\frac{f(x_3)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{4}(x_3 - x_j)} = \frac{121}{(2-0)(2-5)(2+4)}$$

$$= \frac{121}{-36}$$

$$= -3.361111111$$

เมื่อ i = 4 จะได้

$$\frac{f(x_4)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{4}(x_4 - x_j)} = \frac{5233}{(-4-0)(-4-5)(-4-2)}$$

$$= \frac{5233}{-216}$$

$$= -24.226851852$$

จากนั้นทำการสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ได้จากสมการ (4.1) ดังนี้

$$p_4(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}(x_i - x_j)} + (-1)^4 \right) \prod_{i=1}^{4}(\lambda - x_i) \qquad (4.12)$$

แทนค่า $\dfrac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}(x_i - x_j)}$ เมื่อ i = 1 , 2 , 3 , 4 ลงในสมการ (4.12) จะได้พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ดังนี้

$$p_4(\lambda) = \left(\frac{0.025}{(\lambda - 0)} - \frac{4.437037037}{(\lambda - 5)} - \frac{3.361111111}{(\lambda - 2)} - \frac{24.226851852}{(\lambda + 4)} + 1 \right)(\lambda - 0)(\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 4)$$

(4.13)

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีเซแคนต์

เริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $\lambda_1^{(0)} = 2+i$ และ $\lambda_1^{(1)} = 9+3i$ หาค่าฟังก์ชันของจุดเริ่มต้นทั้งสองจุด โดยแทนค่า $\lambda_1^{(0)}$ และ $\lambda_1^{(1)}$ ลงในสมการ (4.13) ได้

$$P_4(\lambda_1^{(0)}) = P_4(2+i) = 162.000000000 + 123.000000000\,i$$

และ $$P_4(\lambda_1^{(1)}) = P_4(9+3i) = -5129.000000000 - 9210.000000000\,i$$

จากนั้นประมาณหาค่า $\lambda_1^{(k-1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ (4.10) ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.1 ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 1 ของเมทริกซ์ A

k	$\lambda_1^{(k+1)}$	$P_4(\lambda_1^{(k+1)})$
1	2.136907662 + 0.982468492 i	183.461465894 + 107.160207287 i
2	2.274620946 + 0.949055160 i	200.260928942 + 86.681062578 i
3	1.698048245 – 0.066064458 i	89.182735288 – 7.451011685 i
4	1.006073282 – 0.256003228 i	10.515422928 – 23.961270866 i
5	0.899331977 – 0.048221378 i	4.216043519 – 3.889713797 i
6	0.845868465 – 0.013596616 i	0.193297109 – 1.010139905 i
7	0.842777107 – 0.000720662 i	– 0.024431164 – 0.053261722 i
8	0.843098200 + 0.000001906 i	– 0.000661801 + 0.000140960 i
9	0.843107153 + 0.000000005 i	0.000000267 + 0.000000360 i
10	0.843107150 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i
11	0.843107150 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i

ดังนั้นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ $\lambda_1 = 0.843107150$

ขั้นตอนที่ 4 ลดทอนกำลังของพหุนาม $P_4(\lambda)$

จากขั้นตอนที่ 3 ตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_4(\lambda)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นเราสามารถทำการลดทอนกำลังของพหุนาม $P_4(\lambda)$ ลงได้หนึ่งอันดับ เราจะทำการลดทอนโดยการสร้างพหุนาม $P_3(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ โดยที่ใช้จุดเริ่มต้น 3 จุด ดังนี้

เลือกจุดเริ่มต้นที่จะใช้สำหรับสร้างพหุนาม $P_3(\lambda)$ และหาค่าฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ โดยเราจะใช้จุดเริ่มต้น 3 จุดจากจุดเริ่มต้นเดิม คือ

$$x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2$$

จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ โดยที่ $f^{(1)}(x) = \dfrac{f(x)}{(x_i - \lambda)}$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1$ ค่าของ $x_1 = 0$ จะได้

$$f^{(1)}(x_1) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - \lambda)} = \frac{1}{0 - 0.843107150} = -1.186088862$$

เมื่อ $i = 2$ ค่าของ $x_2 = 5$ จะได้

$$f^{(1)}(x_2) = \frac{f(x_2)}{(x_2 - \lambda)} = \frac{-599}{5 - 0.843107150} = -144.098013010$$

เมื่อ $i = 3$ ค่าของ $x_3 = 2$ จะได้

$$f^{(1)}(x_3) = \frac{f(x_3)}{(x_3 - \lambda)} = \frac{121}{2 - 0.843107150} = 104.590498580$$

จากนั้นคำนวณหาค่า

$$\frac{f^{(1)}(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3}(x_i - x_j)}, \quad i = 1, 2, 3$$

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$\frac{f^{(1)}(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{3}(x_1 - x_j)} = \frac{-1.186088862}{(0-5)(0-2)}$$

$$= \frac{-1.186088862}{10}$$

$$= -0.118608886$$

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$$\frac{f(x_2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{3}(x_2 - x_j)} = \frac{-144.098013010}{(5-0)(5-2)}$$

$$= \frac{-144.098013010}{15}$$

$$= -9.606534201$$

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$$\frac{f(x_3)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 3}}^{3}(x_3 - x_j)} = \frac{104.590498580}{(2-0)(2-5)}$$

$$= \frac{104.590498580}{-6}$$

$$= -17.431749763$$

จากนั้นทำการสร้างพหุนาม $P_3(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์โดยแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (4.1) ได้ดังนี้

$$p_3(\lambda) = \left(-\frac{0.1186088886}{(\lambda-0)} - \frac{9.606534201}{(\lambda-5)} - \frac{17.431749763}{(\lambda-2)} + 1\right)(\lambda-0)(\lambda-5)(\lambda-2) \tag{4.14}$$

ขั้นตอนที่ 5 กำลังของพหุนาม $P_3(\lambda)$ มีค่ามากกว่า 0 ดังนั้นเราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_3(\lambda)$ โดยใช้วิธีเซแคนต์

เริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $\lambda_2^{(0)} = 2+i$ และ $\lambda_2^{(1)} = 0.843107150$ หาค่าฟังก์ชันของจุดเริมต้นทั้งสองจุด โดยแทนค่า $\lambda_2^{(0)}$ และ $\lambda_2^{(1)}$ ลงในสมการ (4.14) ได้

$$P_3(\lambda_2^{(0)}) = P_3(2+i) = 132.747391430 - 8.425491979\,i$$

และ $P_3(\lambda_2^{(1)}) = P_3(0.843107105) = 73.947395109$

จากนั้นประมาณหาค่า $\lambda_2^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ (4.10) ได้ดังนี้

ตารางที่ **4.2** ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 2 ของเมทริกซ์ A

k	$\lambda_2^{(k+1)}$	$P_3(\lambda_2^{(k+1)})$
1	– 0.405961729 – 1.436588779 i	18.544242099 – 205.957253379 i
2	0.249617791 + 0.288818224 i	28.743669371 + 28.954966839 i
3	– 0.036018069 + 0.143961291 i	– 4.741703908 + 17.224360491 i
4	0.026930821 – 0.004505173 i	1.946197564 – 0.519737025 i
5	0.010214477 – 0.000760277 i	0.007526057 – 0.088575776 i
6	0.010150743 + 0.000003838 i	0.000080974 + 0.000447165 i
7	0.010150048 + 0.000000000 i	– 0.000000101 + 0.000000010 i
8	0.010150048 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i
9	0.010150048 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i

ดังนั้นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ $\lambda_2 = 0.010150048$

ขั้นตอนที่ 4 ลดทอนกำลังของพหุนาม $P_3(\lambda)$

จากขั้นตอนที่ 3 ตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_3(\lambda)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นเราสามารถทำการลดทอนกำลังของพหุนาม $P_3(\lambda)$ ลงได้หนึ่งอันดับ เราจะทำการลดทอนโดยการสร้างพหุนาม $P_2(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ โดยที่ใช้จุดเริ่ม 2 จุด ดังนี้

เลือกจุดเริ่มต้นที่จะใช้สำหรับสร้างพหุนาม $P_2(\lambda)$ และหาค่าฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ เราจะใช้จุดเริ่มต้น 2 จุดจากจุดเริ่มต้นเดิม คือ

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 5$$

จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2$ โดยที่ $f^{(2)}(x) = \dfrac{f^{(1)}(x)}{(x_i - \lambda)}$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1$ ค่าของ $x_1 = 0$ จะได้

$$f^{(2)}(x_1) = \frac{f^{(1)}(x_1)}{(x_1 - \lambda_2)} = \frac{-1.186088862}{0 - 0.010150048} = 116.855488329$$

เมื่อ $i = 2$ ค่าของ $x_1 = 5$ จะได้

$$f^{(1)}(x_2) = \frac{f^{(1)}(x_2)}{(x_2 - \lambda_2)} = \frac{-144.098013010}{5 - 0.010150048} = -28.878225680$$

จากนั้นคำนวณหาค่า

$$\frac{f^{(2)}(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}(x_i - x_j)} \quad , \ i = 1, 2$$

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$\frac{f^{(2)}(x_1)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{2}(x_1 - x_j)} = \frac{116.855488329}{(0-5)}$$

$$= \frac{116.855488329}{-5}$$

$$= -23.371097666$$

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$$\frac{f(x_2)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{2}(x_2 - x_j)} = \frac{-28.878225680}{(5-0)}$$

$$= \frac{-28.878225680}{5}$$

$$= -5.775645136$$

จากนั้นทำการสร้างพหุนาม $P_2(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ โดยแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (4.1) ได้ดังนี้

$$p_2(\lambda) = \left(-\frac{23.371097666}{(\lambda-0)} - \frac{5.775645136}{(\lambda-5)} + 1\right)(\lambda-0)(\lambda-5) \qquad (4.15)$$

ขั้นตอนที่ 5 กำลังของพหุนาม $P_2(\lambda)$ มีค่ามากกว่า 0 ดังนั้นเราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_2(\lambda)$ โดยใช้วิธีเซแคนต์

เริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $\lambda_3^{(0)} = 2+i$ และ $\lambda_3^{(1)} = 0.010150048$ หาค่าฟังก์ชันของจุดเริ่มต้นทั้งสองจุด โดยแทนค่า $\lambda_3^{(0)}$ และ $\lambda_3^{(1)}$ ลงในสมการ (4.15) ได้

$$P_2(\lambda_3^{(0)}) = P_2(2+i) = 51.562002726 - 30.146742802\,i$$

และ $$P_2(\lambda_3^{(1)}) = P_3(0.010150048) = 116.509000261$$

จากนั้นประมาณหาค่า $\lambda_3^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ (4.10) ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.3 ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 3 ของเมทริกซ์ A

k	$\lambda_3^{(k+1)}$	$P_2(\lambda_3^{(k+1)})$
1	3.632074037 + 0.112704045 i	6.011249951 – 3.029777160 i
2	3.829499272 + 0.014111224 i	0.755427181 – 0.373774501 i
3	3.857874072 + 0.000239244 i	0.004846921 – 0.006323460 i
4	3.858057385 + 0.000000356 i	0.000001864 – 0.000009409 i
5	3.858057456 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i
6	3.858057456 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i

ดังนั้นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ $\lambda_3 = 3.858057456$

ขั้นตอนที่ 4 ลดทอนกำลังของพหุนาม $P_2(\lambda)$

จากขั้นตอนที่ 3 ตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_2(\lambda)$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นเราสามารถทำการลดทอนกำลังของพหุนาม $P_2(\lambda)$ ลงได้หนึ่งอันดับ เราจะทำการลดทอนโดยการสร้างพหุนาม $P_1(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ โดยที่ใช้จุดเริ่มต้น 1 ดังนี้

เลือกจุดเริ่มต้นที่จะใช้สำหรับสร้างพหุนาม $P_1(\lambda)$ และหาค่าฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ เราจะใช้จุดเริ่มต้น 1 จุดจากจุดเริ่มต้นเดิม คือ $x_1 = 0$

จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1$ โดยที่ $f^{(3)}(x) = \dfrac{f^{(2)}(x)}{(x_i - \lambda)}$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1 \quad x_1 = 0$

$$f^{(3)}(x_1) = \frac{f^{(2)}(x_1)}{(x_1 - \lambda_3)} = \frac{116.855488329}{0 - 3.858057456} = -30.288685346$$

จากนั้นคำนวณหาค่า

$$\frac{f^{(3)}(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{1}(x_i - x_j)} \quad , \; i = 1$$

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$\frac{f^{(2)}(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{1}(x_1 - x_j)} \quad = \quad -30.288685346$$

จากนั้นทำการสร้างพหุนาม $P_1(\lambda)$ โดยใช้การประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์โดยแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (4.1) ได้ดังนี้

$$p_1(\lambda) = \left(-\frac{30.288685346}{(\lambda - 0)} + 1\right)(\lambda - 0) \qquad (4.16)$$

ขั้นตอนที่ 5 กำลังของพหุนาม $P_1(\lambda)$ มีค่ามากกว่า 0 ดังนั้นเราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_1(\lambda)$ โดยใช้วิธีเซแคนต์

เริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $\lambda_4^{(0)} = 2 + i$ และ $\lambda_4^{(1)} = 3.858057456$ หาค่าฟังก์ชันของจุดเริมต้นทั้งสองทั้งสองจุด โดยแทนค่า $\lambda_4^{(0)}$ และ $\lambda_4^{(1)}$ ลงในสมการ (4.16) ได้

$P_1(\lambda_4^{(0)}) = P_1(2+i) = -28.288685346 + 1.000000000\,i$

และ $P_1(\lambda_4^{(1)}) = P_1(3.858057456) = -26.430627890$

จากนั้นประมาณหาค่า $\lambda_4^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ (4.10) ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.4 ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 4 ของเมทริกซ์ A

k	$\lambda_4^{(k+1)}$	$P_1(\lambda_4^{(k+1)})$
1	30.288685346 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i
2	30.288685346 + 0.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i

ดังนั้นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ $\lambda_4 = 30.288685346$

ขั้นตอนที่ 4 ลดทอนกำลังของพหุนาม $P_1(\lambda)$

พหุนาม $P_0(\lambda) = 0$

ขั้นตอนที่ 5 กำลังของพหุนาม $P_0(\lambda)$ มีเท่ากับ 0 ดังนั้นจบการขั้นตอนการทำงาน

นั่นคือ ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A คือ $\lambda_1 = 0.843107150$, $\lambda_2 = 0.010150048$, $\lambda_3 = 3.858057456$ และ $\lambda_4 = 30.288685346$ ซึ่งค่าเฉพาะทั้งหมดที่ได้มีค่าเท่ากับค่าที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MathCad 7.0 □

ตัวอย่างที่ 2 กรณีที่เมทริกซ์มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทั้งหมด

$$\text{กำหนดเมทริกซ์ } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

โดยการคำนวณหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ B ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MathCad 7.0 ให้ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ B ดังนี้

$$\lambda_1 = i \ , \ \lambda_2 = -i \ , \ \lambda_3 = 1+2i \ , \ \lambda_4 = 1-2i \ , \ \lambda_5 = 3$$

ต่อไปจะใช้ขั้นตอนของวิธีการที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้หาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ B ซึ่งจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาจานเกอสช์กอริน (Gerschgorin Disk)

หาค่า r_i จากสมการ (4.6) ซึ่งจะได้ $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -1$, $r_4 = 3$ และ $r_5 = -1$ ซึ่งทำให้ได้จานเกอร์สกอรินทั้ง 5 จาน คือ

$$|\lambda - 1| \leq 4$$

$$|\lambda - 3| \leq 8$$
$$|\lambda + 1| \leq 7$$
$$|\lambda - 3| \leq 6$$
$$|\lambda + 1| \leq 11$$

ดังนั้น จะได้ว่าค่าเฉพาะทั้งหมดจะอยู่ภายในยูเนียนของจาน $\{ r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{5} |a_{ij}| \quad , \ i = 1, 2, 3, 4, 5 \}$

ขั้นตอนที่ 2 สร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

เลือกจุดเริ่มต้น 5 จุด โดยที่ทุกจุดเป็นจำนวนจริงทั้งหมด เพื่อใช้สำหรับสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยเราจะเลือกจุดที่อยู่ภายในจานเกอสช์กอรินที่หาไว้ในขั้นตอนที่ 1 และจุดเริ่มต้นจุดหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$x_1 = 0 \, , \; x_2 = 1 \, , \; x_3 = -5 \, , \; x_4 = 12 \, , x_5 = 9$$

จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ โดยที่ $f(x) = \det(A - xI)$ โดยใช้สูตรลดขนาดในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ $\det(A - x_iI)$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1$ ค่าของ $x_1 = 0$ จะได้

$$f(x_1) = \det(A - 0I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)\det\left(\begin{bmatrix} -5.500000000 & -2.000000000 & -2.000000000 & -3.000000000 \\ -5.000000000 & -1.000000000 & 0.000000000 & -4.000000000 \\ 3.000000000 & 0.000000000 & 3.000000000 & 0.000000000 \\ 5.000000000 & 2.000000000 & 2.000000000 & 3.000000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-5.500000000)\det\left(\begin{bmatrix} 0.818181818 & 1.818181818 & -1.272727273 \\ -1.090909091 & 1.909090909 & -1.636363636 \\ 0.181818182 & 0.181818182 & 0.272727273 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-5.500000000)(-1.818181818)\det\left(\begin{bmatrix} -1.950000000 & -0.300000000 \\ 0.100000000 & 0.400000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-5.500000000)(-1.818181818)(-1.950000000)\det\left(\begin{bmatrix} 0.384615385 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-5.500000000)(\,(-1.818181818))(-1.950000000)(\,0.384615385)$$

$$= 15$$

เมื่อ $i = 2$ ค่าของ $x_2 = 1$ จะได้

$$f(x_2) = \det(A - 1I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)\det\left(\begin{bmatrix} -4.000000000 & -2.000000000 & -2.000000000 & -2.000000000 \\ -3.000000000 & -2.000000000 & 0.000000000 & -4.000000000 \\ 2.000000000 & 0.000000000 & 2.000000000 & 0.000000000 \\ 3.000000000 & 2.000000000 & 2.000000000 & 2.000000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-4.000000000)\det\left(\begin{bmatrix} -0.500000000 & 1.500000000 & -2.500000000 \\ -1.000000000 & 1.000000000 & -1.000000000 \\ 0.500000000 & 0.500000000 & 0.500000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-4.000000000)(-2.500000000)\det\left(\begin{bmatrix} -0.800000000 & 0.400000000 \\ 0.400000000 & 0.800000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-4.000000000)(-2.500000000)(-0.800000000)\det\left(\begin{bmatrix} 1.000000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-4.000000000)(-2.500000000)(-0.800000000)(1.000000000)$$

$$= 16$$

เมื่อ $i = 3$ ค่าของ $x_3 = -5$ จะได้

$$f(x_3) = \det(A + 5I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 8 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (6)\det\left(\begin{bmatrix} 9.333333333 & -2.000000000 & -2.000000000 & 1.333333333 \\ 5.000000000 & 4.000000000 & 0.000000000 & 1.000000000 \\ -2.666666667 & 0.000000000 & 8.000000000 & -2.666666667 \\ -5.000000000 & 2.000000000 & 2.000000000 & 3.000000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (6)(9.333333333)\det\left(\begin{bmatrix} 5.071428571 & 1.071428571 & 0.285714286 \\ -0.571428571 & 7.428571429 & -2.285714286 \\ 0.928571429 & 0.928571429 & 3.714285714 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (6)(9.333333333)(5.071428571)\det\left(\begin{bmatrix} 7.549295775 & -2.253521127 \\ 0.732394366 & 3.661971831 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (6)(9.333333333)(5.071428571)(7.549295775)\det\left(\begin{bmatrix} 3.880597015 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (6)(9.333333333)(5.071428571)(7.549295775)(3.880597015)$$

$$= 8320$$

เมื่อ $i = 4$ ค่าของ $x_4 = 12$ จะได้

$$f(x_4) = \det(A - 12I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -11 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -13 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -9 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & -13 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-11)\det\left(\begin{bmatrix} -9.727272727 & -2.000000000 & -2.000000000 & -0.727272727 \\ 3.454545455 & -13.000000000 & 0.000000000 & -0.545454545 \\ -1.636363636 & 0.000000000 & -9.000000000 & -1.636363636 \\ -3.454545455 & 2.000000000 & 2.000000000 & -12.454545455 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-11)(-9.727272727)\det\left(\begin{bmatrix} -13.710280374 & -0.710280374 & -0.803738318 \\ 0.336448598 & -8.663551402 & -1.514018692 \\ 2.710280374 & 2.710280374 & -12.196261682 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-11)(-9.727272727)(-13.710280374)\det\left(\begin{bmatrix} -8.680981595 & -1.533742331 \\ 2.569870484 & -12.355146558 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-11)(-9.727272727)(-13.710280374)(-8.680981595)\det\left(\begin{bmatrix} -12.809187279 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-11)(-9.727272727)(-13.710280374)(-8.680981595)(-12.809187279)$$

$$= -163125$$

เมื่อ $i = 5$ ค่าของ $x_4 = 9$ จะได้

$$f(x_4) = \det(A - 9I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -10 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-8)\det\left(\begin{bmatrix} -7.000000000 & -2.000000000 & -2.000000000 & -1.000000000 \\ 3.250000000 & -10.000000000 & 0.000000000 & -0.750000000 \\ -1.500000000 & 0.000000000 & -6.000000000 & -1.500000000 \\ -3.250000000 & 2.000000000 & 2.000000000 & -9.250000000 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad (-8)(-7.000000000)\det\left(\begin{bmatrix} -10.928571429 & -0.928571429 & -1.214285714 \\ 0.428571429 & -5.571428571 & -1.285714286 \\ 2.928571429 & 2.928571429 & -8.785714286 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad (-8)(-7.000000000)(-10.928571429)\det\left(\begin{bmatrix} -5.607843137 & -1.333333333 \\ 2.679738562 & -9.111111111 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad (-8)(-7.000000000)(-10.928571429)(-5.607843137)\det\left(\begin{bmatrix} -9.748251748 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad (-8)(-7.000000000)(-10.928571429)(-5.607843137)(-9.748251748)$$

$$= \quad -33456$$

จากนั้นคำนวณหาค่า $\dfrac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{5}(x_i - x_j)}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5$

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$\frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{5}(x_1 - x_j)} = \frac{15}{(0-1)(0+5)(0-12)(0-9)}$$

$$= \frac{15}{-540}$$

$$= -0.027777778$$

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$$\frac{f(x_2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{5}(x_2 - x_j)} = \frac{16}{(1-0)(1+5)(1-12)(1-9)}$$

$$= \frac{16}{528}$$

$$= 0.030303030$$

เมื่อ i = 3 จะได้

$$\frac{f(x_3)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq 3}}^{5}(x_3 - x_j)} = \frac{8320}{(-5-0)(-5-1)(-5-12)(-5-9)}$$

$$= \frac{8320}{7140}$$

$$= 1.165266106$$

เมื่อ i = 4 จะได้

$$\frac{f(x_4)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq 4}}^{5}(x_4 - x_j)} = \frac{-163125}{(12-0)(12-1)(12+5)(12-9)}$$

$$= \frac{-163125}{6732}$$

$$= -24.231283422$$

เมื่อ i = 5 จะได้

$$\frac{f(x_5)}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq 5}}^{5}(x_5 - x_j)} = \frac{-33456}{(9-0)(9-1)(9+5)(9-12)}$$

$$= \frac{-33456}{-3024}$$

$$= 11.063492063$$

จากนั้นทำการสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ B โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองซ์ โดยการแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (4.1) ได้ดังนี้

$$p_5(\lambda) = \left(-\frac{0.027777778}{(\lambda-0)} + \frac{0.030303030}{(\lambda-1)} + \frac{1.165266106}{(\lambda+5)} - \frac{24.231283422}{(\lambda-12)} + \frac{11.063492063}{(\lambda-9)} - 1\right)\prod_{i=1}^{5}(\lambda - x_i) \tag{4.17}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ B โดยใช้วิธีเซแคนต์

เริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $\lambda_1^{(0)} = 5+6i$ และ $\lambda_1^{(1)} = 4+5i$ หาค่าฟังก์ชันของจุดเริ่มต้นทั้งสองทั้งสองจุด โดยแทนค่า $\lambda_1^{(0)}$ และ $\lambda_1^{(1)}$ ลงในสมการ (4.17) ได้

$$P_5(\lambda_1^{(0)}) = P_4(5+6i) = -3200.000000000 + 19200.000000000\,i$$

และ $$P_5(\lambda_1^{(1)}) = P_4(4+5i) = -2496.000000000 + 6240.000000000\,i$$

จากนั้นประมาณหาค่า $\lambda_1^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ (4.10) ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.5 ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 1 ของเมทริกซ์ B

k	$\lambda_1^{(k+1)}$	$P_5(\lambda_1^{(k+1)})$
1	3.675452407 + 4.343555672 i	−1030.392022204 + 3312.079542135 i
2	3.223663384 + 3.712916448 i	−491.221286836 + 1459.390086812 i
3	2.884302627 + 3.195126688 i	−216.176307936 + 694.649446454 i
4	2.560622334 + 2.745278115 i	−94.960429633 + 324.057521026 i
5	2.268333564 + 2.364580146 i	−38.770349292 + 154.692404082 i
6	1.982424673 + 2.044809587 i	−13.401337319 + 74.934318546 i
7	1.686623888 + 1.790425638 i	−1.939263591 + 37.242917891 i
8	1.356860500 + 1.624131367 i	3.147949851 + 18.980454755 i
9	0.982227659 + 1.612499583 i	5.781842020 + 10.164621166 i
10	0.642385091 + 1.946324384 i	14.393868575 + 4.594639072 i
11	1.340185765 + 2.021006095 i	−15.668267021 + 12.475751434 i
12	0.909395524 + 2.158732454 i	3.939144354 − 10.336855097 i
13	1.041260142 + 2.057374625 i	−3.239754487 − 2.178805349 i
14	0.999027241 + 2.015101991 i	−0.193824615 − 0.756151422 i
15	1.000384583 + 2.001293737 i	−0.039233638 − 0.056045881 i
16	0.999999109 + 2.000027156 i	−0.000391743 − 0.001317814 i
17	1.000000000 + 2.000000049 i	−0.000000773 − 0.000002372 i
18	1.000000000 + 2.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i
19	1.000000000 + 2.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i

ดังนั้นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ B คือ $\lambda_1 = 1+2i$

ขั้นตอนที่ 4 ทำการลดทอนกำลังของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ B

จากขั้นตอนที่ 3 ตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_5(\lambda)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ทำให้เราได้ตัวศูนย์อีกตัวหนึ่งของ $P_5(\lambda)$ คือ สังยุคของ λ_1 ให้ $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1 - 2i$ ดังนั้นสามารถทำการลดทอนกำลังของพหุนาม $P_5(\lambda)$ ลงได้สองอันดับ เราจะทำการลดทอนโดยการสร้างพหุนาม $P_3(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ โดยที่ใช้จุดเริ่มต้น 3 ดังนี้

เลือกจุดเริ่มต้นที่จะใช้สำหรับสร้างพหุนาม $P_3(\lambda)$ และหาค่าฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ โดยเราจะใช้จุดเริ่มต้น 3 จุดจากจุดเริ่มต้นเดิม คือ

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 1\ ,\ x_3 = -5$$

จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ โดยที่ $f^{(1)}(x) = \dfrac{f(x)}{(x_i - \lambda)}$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1$ ค่าของ $x_1 = 0$ จะได้

$$f^{(1)}(x_1) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - \lambda_1)(x_1 - \bar{\lambda}_1)}$$

$$= \frac{15}{(0-(1+2i))(0-(1-2i))}$$

$$= 3.000000000$$

เมื่อ $i = 2$ ค่าของ $x_1 = 1$ จะได้

$$f^{(1)}(x_2) = \frac{f(x_2)}{(x_2 - \lambda_1)(x_2 - \bar{\lambda}_1)}$$

$$= \frac{16}{(1-(1+2i))(1-(1-2i))}$$

$$= 4.000000000$$

เมื่อ $i = 3$ $x_1 = -5$

$$f^{(1)}(x_3) = \frac{f(x_3)}{(x_3 - \lambda_1)(x_3 - \bar{\lambda}_1)}$$

$$= \frac{8320}{(-5-(1+2i))(-5-(1-2i))}$$

$$= 208.000000000$$

จากนั้นคำนวณหาค่า

$$\frac{f^{(1)}(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3}(x_i - x_j)} \quad \text{เมื่อ} \quad i = 1, 2, 3$$

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$\frac{f^{(1)}(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{3}(x_1 - x_j)} = \frac{3.000000000}{(0-1)(0+5)}$$

$$= \frac{3.000000000}{-5}$$

$$= -0.600000000$$

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$$\frac{f(x_2)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{3}(x_2 - x_j)} = \frac{4.000000000}{(1-0)(1+5)}$$

$$= \frac{4.000000000}{6}$$

$$= 0.666666667$$

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$$\frac{f(x_3)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 3}}^{3}(x_3 - x_j)} = \frac{208.000000000}{(-5-0)(-5-1)}$$

$$= \frac{208.000000000}{30}$$

$$= 6.933333333$$

จากนั้นทำการสร้างพหุนาม $P_3(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์โดยแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (4.1) ได้ดังนี้

$$p_3(\lambda) = \left(-\frac{0.600000000}{(\lambda - 0)} + \frac{0.666666667}{(\lambda - 1)} + \frac{6.933333333}{(\lambda + 5)} - 1 \right)(\lambda - 0)(\lambda - 1)(\lambda + 5) \qquad (4.18)$$

ขั้นตอนที่ 5 กำลังของพหุนาม $P_3(\lambda)$ มีค่ามากกว่า 0 ดังนั้นเราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_3(\lambda)$ โดยใช้วิธีเซแคนต์

เริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $\lambda_3^{(0)} = 5 + 6i$ และ $\lambda_3^{(1)} = 1 + 2i$ หาค่าฟังก์ชันของจุดเริ่มต้นทั้งสองจุด โดยแทนค่า $\lambda_3^{(0)}$ และ $\lambda_3^{(1)}$ ลงในสมการ (4.18) ได้

$$P_3(\lambda_3^{(0)}) = P_3(5 + 6i) = 380.000000000 - 60.000000000\, i$$

และ $$P_3(\lambda_3^{(1)}) = P_3(1 + 2i) = 4.000000000 + 12.000000000\, i$$

จากนั้นประมาณหาค่า $\lambda_3^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ (4.10) ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.6 ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 3 ของเมทริกซ์ B

k	$\lambda_3^{(k+1)}$	$P_3(\lambda_3^{(k+1)})$
1	1.113537118 + 1.851528384 i	5.393279984 + 9.978785058 i
2	0.740865609 + 1.072458321 i	2.604988896 + 3.162373888 i
3	0.414445911 + 0.719918142 i	2.119216192 + 1.072434238 i
4	−0.116721448 + 0.746546254 i	1.292031860 − 0.883813018 i
5	−0.019749954 + 1.126336783 i	−0.860142226 + 0.167784359 i
6	−0.018047968 + 0.982940498 i	0.068202640 − 0.140651878 i
7	−0.001824000 + 0.999123549 i	0.001627975 − 0.012694978 i
8	0.000022609 + 0.999974760 i	0.000196654 + 0.000085172 i

ตารางที่ 4.6 ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 3 ของเมทริกซ์ B (ต่อ)

k	$\lambda_3^{(k+1)}$	$P_3(\lambda_3^{(k+1)})$
9	0.000000035 + 1.000000030 i	–0.000000111 + 0.000000269 i
10	0.000000000 + 1.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i
11	0.000000000 + 1.000000000 i	0.000000000 + 0.000000000 i

ดังนั้นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ B คือ $\lambda_3 = i$

ขั้นตอนที่ 4 ทำการลดทอนกำลังของพหุนาม $P_3(\lambda)$

จากขั้นตอนที่ 3 ตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_3(\lambda)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ทำให้เราได้ตัวศูนย์อีกตัวหนึ่งของ $P_3(\lambda)$ คือ สังยุคของ λ_3 ให้ $\lambda_4 = \bar{\lambda}_3 = -i$ ดังนั้นเราสามารถทำการลดทอนกำลังของพหุนาม $P_3(\lambda)$ ลงได้สองอันดับ เราจะทำการลดทอนโดยการสร้างพหุนาม $P_1(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ โดยที่ใช้จุดเริ่มต้นลดลง 2 จุด ดังนี้

เลือกจุดเริ่มต้นที่จะใช้สำหรับสร้างพหุนาม $P_1(\lambda)$ และหาค่าฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ โดยเราจะใช้จุดเริ่มต้น 1 จุดจากจุดเริ่มต้นเดิม คือ $x_1 = 0$

จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันที่จุด x_i เมื่อ $i = 1$ โดยที่ $f^{(2)}(x) = \dfrac{f^{(1)}(x)}{(x_i - \lambda)}$ ดังนี้

เมื่อ $i = 1$ ค่าของ $x_1 = 0$ จะได้

$$f^{(2)}(x_1) = \frac{f^{(1)}(x_1)}{(x_1 - \lambda_1)(x_1 - \bar{\lambda}_1)}$$

$$= \frac{3.000000000}{(0 - i)(0 + i))}$$

$$= 3.000000000$$

จากนั้นคำนวณหาค่า $\dfrac{f^{(2)}(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{1}(x_i - x_j)}$, $i = 1$

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$\frac{f^{(2)}(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{1}(x_1 - x_j)} \qquad = \qquad 3.000000000$$

จากนั้นทำการสร้างพหุนาม $P_1(\lambda)$ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์โดยแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (4.1) ได้ดังนี้

$$p_1(\lambda) = \left(\frac{3.000000000}{(\lambda - 0)} \;-1\right)(\lambda - 0) \tag{4.19}$$

ขั้นตอนที่ 5 กำลังของพหุนาม $P_1(\lambda)$ มีค่ามากกว่า 0 ดังนั้นเราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม $P_1(\lambda)$ โดยใช้วิธีเซแคนต์

เริ่มต้นจากจุดเริ่มต้น $\lambda_5^{(0)} = 5+6\,i$ และ $\lambda_5^{(1)} = i$ หาค่าฟังก์ชันของจุดเริมต้นทั้งสองจุดโดยแทนค่า $\lambda_5^{(0)}$ และ $\lambda_5^{(1)}$ ลงในสมการ (4.19) ได้

$P_1(\lambda_5^{(0)}) \;=\; P_1(5+6i) \;=\; -2.000000000 - 6.000000000\,i$

และ $P_1(\lambda_5^{(1)}) \;=\; P_1(i) \;=\; 3.000000000 - 1.000000000\,i$

จากนั้นประมาณหาค่า $\lambda_5^{(k+1)}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ จากสูตรการทำซ้ำ (4.10) ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.7 ผลการประมาณค่าเฉพาะตัวที่ 5 ของเมทริกซ์ B

k	$\lambda_5^{(k+1)}$	$P_1(\lambda_5^{(k+1)})$
1	3.000000000 + 0.000000000	0.000000000 + 0.000000000
2	3.000000000 + 0.000000000	0.000000000 + 0.000000000

ดังนั้นตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ B คือ $\lambda_2 = 3$

ขั้นตอนที่ 4 ลดทอนกำลังของพหุนาม $P_1(\lambda)$

พหุนาม $P_0(\lambda) = 0$

ขั้นตอนที่ 5 กำลังของพหุนาม $P_0(\lambda)$ มีเท่ากับ 0 ดังนั้นจบการขั้นตอนการทำงาน

นั่นคือ ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ B คือ $\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = 1-2i$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ และ $\lambda_5 = 3$ ซึ่งค่าเฉพาะทั้งหมดที่ได้มีค่าเท่ากับค่าที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MathCad 7.0 □

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดเมทริกซ์

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 & -4 \\ 5 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เลือกจุดเริ่มต้น $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ และ $x_4 = 6$ จากนั้นใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์สร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ C ได้ดังนี้

$$p_4(\lambda) = \left(-\frac{0.20}{(\lambda-0)} + \frac{0.75}{(\lambda-2)} - \frac{4.80}{(\lambda-5)} + \frac{12.25}{(\lambda-6)} + 1 \right)(\lambda-0)(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-6)$$

จากนั้นทำการหาตัวศูนย์ตัวทั้งหมดของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ C ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบเซแคนต์โดยเริ่มต้นจากจุด $\lambda_1^{(0)} = 1+2i$ และ $\lambda_1^{(1)} = 3+4i$ และวิธีการลดทอนพหุนามตามขั้นตอนที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น ซึ่งท้ายที่สุดจะได้ค่าเฉพาะทั้งหมดของของเมทริกซ์ C ได้ดังตารางที่ 4.8

ตารางที่ 4.8 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ C

i	λ_i
1	4.000000000
2	3.000000000
3	–1.000000000
4	–1.000000000

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดเมทริกซ์

$$D = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ สามารถหาค่าเฉพาะทั้งหมดของของเมทริกซ์ D ได้ดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.9 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ D

i	λ_i
1	0.763932023
2	0.763932022
3	5.236067978
4	5.236067977

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดเมทริกซ์

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & -5 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เราสามารถหาค่าเฉพาะทั้งหมดของของเมทริกซ์ E ได้ดังตารางที่ 4.10

ตารางที่ 4.10 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ E

i	λ_i
1	3.406085773 + 0.604355714 i
2	3.406085773 – 0.604355714 i
3	3.072037478 + 4.171646199 i

ตารางที่ 4.10 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ E (ต่อ)

i	λ_i
4	3.072037478 – 4.171646199 i
5	–1.745889940 + 0.000000000 i
6	–8.210356562 + 0.000000000 i

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดเมทริกซ์

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & -8 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 2 & -4 & -5 & 0 & 2 \\ -3 & -6 & 4 & 7 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 6 & -9 \\ 8 & -5 & 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 3 & 1 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เราสามารถหาค่าเฉพาะทั้งหมดของของเมทริกซ์ F ได้ตารางที่ 4.11

ตารางที่ 4.11 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ F

i	λ_i
1	–1.699716436 + 3.980809989 i
2	–1.699716436 – 3.980809989 i
3	3.387980593 + 5.224117026 i
4	3.387980593 – 5.224117026 i
5	–3.275499697 + 0.000000000 i
6	6.449485691 + 9.730853837 i
7	6.449485691 – 9.730853837 i

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดเมทริกซ์

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & -8 & 7 & -6 & 9 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 4 & 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 5 & -4 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & -6 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 2 & 5 & -4 & -8 \\ -5 & -4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เราสามารถหาค่าเฉพาะทั้งหมดของของเมทริกซ์ G ได้ดังตารางที่ 4.12

ตารางที่ 4.12 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ G

i	λ_i
1	0.056125021 + 0.000000000 i
2	4.017028904 + 0.000000000 i
3	–5.186314176 + 0.000000000 i
4	7.523813119 + 0.000000000 i
5	–8.631248670 + 6.997178513 i
6	–8.631248670 – 6.997178513 i
7	1.925922236 + 9.928230852 i
8	1.925922236 – 9.928230852 i

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดเมทริกซ์

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & -1 & -2 & 3 & 3 & -6 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 4 & -5 & 4 & -7 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 6 & -8 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 & -5 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3 & 6 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -5 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & -3 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 5 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เราสามารถหาค่าเฉพาะทั้งหมดของของเมทริกซ์ H ได้ดังตารางที่ 4.13

ตารางที่ 4.13 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ H

i	λ_i
1	1.197760384 + 3.947287340 i
2	1.197760384 – 3.947287340 i
3	2.566307059 + 1.698649728 i
4	2.566307059 – 1.698649728 i
5	5.702901200 + 0.000000000 i
6	9.801394072 + 0.000000000 i
7	4.197499038 – 7.985570493 i
8	4.197499038 + 7.985570493 i
9	–4.427428235 + 0.000000000 i

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลเฉลยของ $x_1'''(t) - 6x_1''(t) + 11x_1'(t) - 6x_1(t) = 0$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$x_1'''(t) = 6x_1(t) - 11x_1'(t) + 6x_1''(t)$$

ให้ $x_1'(t) = x_2(t)$ และ $x_1''(t) = x_3(t)$

ดังนั้น $x_1''(t) = x_2'(t) = x_3(t)$

และ $x_1'''(t) = x_2''(t) = x_3'(t)$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ สามารถหาได้จากผลเฉลย $x_1(t)$ ของระบบสมการ ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \qquad (4.20) \\ x_3'(t) &= 6x_1(t) - 11x_2(t) + 6x_3(t) \end{aligned}$$

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ของระบบสมการ (4.20) คือ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$$

ใช้ขั้นตอนวิธีการที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้หาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งได้ค่าเฉพาะทั้งหมด คือ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ และ $\lambda_3 = 3$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ (4.20) คือ

$$x_1(t) = b_1e^{t} + b_2e^{2t} + b_3e^{3t}$$

เมื่อ b_1 , b_2 และ b_3 เป็นค่าคงที่ที่แปรค่าได้ □

ตัวอย่างที่ 10 เซลล์ 2 เซลล์ถูกกั้นด้วยเยื่อที่ของเหลวซึมผ่านได้ ถ้าการซึมของของเหลวจากเซลล์ที่หนึ่งไปยังเซลล์ที่สองซึมด้วยอัตราของปริมาตรที่เป็นสามเท่าของปริมาตรของของเหลวในเซลล์ที่หนึ่ง และของเหลวจากเซลล์ที่สองซึมออกด้วยอัตราของปริมาตรที่เป็นสองเท่าของปริมาตรของของเหลวในเซลล์ที่สอง ถ้าให้ปริมาตรเริ่มต้นของของเหลวในเซลล์ที่หนึ่งเป็น 40 มิลลิลิตรและในเซลล์ที่สองเป็น 5 มิลลิลิตร จงหาปริมาตรของของเหลวในแต่ละเซลล์เมื่อเวลาผ่านไป t

ให้ $x_1(t)$ เป็นปริมาตรของของเหลวในเซลล์ที่หนึ่งเมื่อเวลา t

$x_2(t)$ เป็นปริมาตรของของเหลวในเซลล์ที่สองเมื่อเวลา t

ปริมาตรของของเหลวในแต่ละเซลล์ที่เปลี่ยนไปสามารถหาได้จากผลต่างของปริมาตรของของเหลวที่ซึมเข้าและซึมออก แต่เนื่องจากเซลล์ที่หนึ่งไม่มีของเหลวซึมเข้าดังนั้นจะได้ว่า

$$x_1'(t) = -3x_1(t)$$

โดยที่เครื่องหมายลบแสดงทิศทางการไหลออกของของเหลว และในเซลล์ที่สองของเหลวซึมเข้า $3x_1(t)$ และซึมออก $2x_2(t)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t)$$

การหาปริมาตรของของเหลวในแต่ละเซลล์เมื่อเวลา t ก็คือการหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -3x_1(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) - 2x_2(t) \end{aligned} \tag{4.21}$$

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ของระบบสมการ (4.21) คือ

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ใช้ขั้นตอนวิธีการที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้หาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งได้ค่าเฉพาะทั้งหมด คือ $\lambda_1 = -2$ และ $\lambda_2 = -3$

เมื่อ $\lambda_1 = -2$ เวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับ λ_1 คือ $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \;,\; r \neq 0$

$\lambda_2 = -3$ เวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับ λ_2 คือ $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} s \;,\; s \neq 0$

จากเวกเตอร์เฉพาะของ $\lambda_1 = -2$ และ $\lambda_2 = -3$ จะได้

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $U' = DU$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_1' &= -2u_1 \\ u_2' &= -3u_2 \end{aligned} \qquad (4.22)$$

ผลเฉลยของระบบสมการ (4.22) คือ

$$u_1 = c_1 e^{-2t}$$

$$u_2 = c_2 e^{-3t}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการคือ X โดยที่ $X = PU$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = c_2 e^{-3t} \qquad (4.23)$$

$$x_2(t) = c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t} \qquad (4.24)$$

โจทย์กำหนดให้ปริมาตรเริ่มต้นในเซลล์ที่หนึ่งและเซลล์ที่สองเป็น 40 และ 5 มิลลิลิตรตามลำดับ นั่นคือ $x_1(0) = 40$ และ $x_2(0) = 5$ ดังนั้นจากสมการ (4.23) และสมการ (4.24) จะได้ $c_2 = 40$ และ $c_1 = 125$ นั้นคือปริมาตรของของเหลวในแต่ละเซลล์เมื่อเวลา t คือ

$$x_1(t) = 40e^{-3t}$$

$$x_2(t) = 125e^{-2t} - 120c_2 e^{-3t}$$

□

ตัวอย่างที่ 11 ข้อมูลอัตราการเกิดและการอยู่รอดของประชากรหญิงชาวแคนนาดาอายุตั้งแต่ 0 – 50 ปี ในปี ค.ศ. 1965 แบ่งตามช่วงอายุ ช่วงละ 5 ปี แสดงดังตารางที่ 4.14

ตารางที่ 4.14 ข้อมูลอัตราการเกิดและการอยู่รอดของประชากรหญิงชาวแคนนาดาอายุตั้งแต่ 0 – 50 ปี ในปี ค.ศ. 1965 แบ่งตามช่วงอายุ ช่วงละ 5 ปี

ช่วงอายุ	b_i	p_i
[0 , 5)	0.00000	0.99651
[5 , 10)	0.00024	0.99820
[10 , 15)	0.05861	0.99802
[15 , 20)	0.28608	0.99729
[20 , 25)	0.44791	0.99694
[25 , 30)	0.36399	0.99621
[30 , 35)	0.22259	0.99460
[35 , 40)	0.10457	0.99184
[40 , 45)	0.02826	0.98700
[45 , 50)	0.00240	–

จากข้อมูลในตารางที่ 4.13 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์เลสลี ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}
0.00000 & 0.00024 & 0.05861 & 0.28608 & 0.44791 & 0.36399 & 0.22259 & 0.10457 & 0.02826 & 0.00240 \\
0.99651 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.99820 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.00000 & 0.99802 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.99729 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.99694 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.99621 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.99460 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.99184 & 0.00000 & 0.00000 \\
0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.98700 & 0.00000
\end{bmatrix}$$

จากนั้นใช้ขั้นตอนวิธีการที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้คำนวณหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์เลสลีนี้ จะได้ค่าเฉพาะทั้งหมด ดังตารางที่ 4.15

ตารางที่ 4.15 ค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์เลสลี

i	λ_i
1	0.368700136 + 0.765465668 i
2	0.368700136 – 0.765465668 i
3	0.003493687 + 0.560768974 i
4	0.003493687 – 0.560768974 i
5	– 0.441482610 + 0.134524381 i
6	– 0.441482607 – 0.134524383 i
7	– 0.137679959
8	– 0.399980816 + 0.400886235 i
9	– 0.399980818 – 0.400886234 i
10	1.076219166

จากตารางที่ 4.15 จะพบว่าค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์เลสลีจะมีค่าเฉพาะที่เป็นจำนวนจริงและมีค่ามากกว่า 0 เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ 1.076219166 นั้นแสดงว่าในทุก ๆ 5 ปี จำนวนประชากรหญิงชาวแคนนาดาจะเพิ่มขึ้น 0.076219166 %

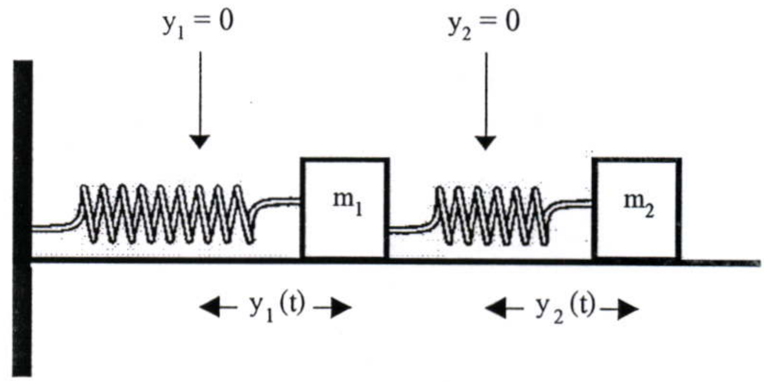
เวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ 1.076219166 คือ

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ P_0/\lambda_1 \\ P_0P_1/\lambda_1^2 \\ P_0P_1P_2/\lambda_1^3 \\ \vdots \\ P_0P_1P_2\ldots P_9/\lambda_1^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.92594 \\ 0.85881 \\ 0.79641 \\ 0.73800 \\ 0.68364 \\ 0.63281 \\ 0.58482 \\ 0.53897 \\ 0.49429 \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์เฉพาะ Y แสดงให้ทราบว่าอัตราส่วนของประชากรหญิงชาวแคนนาดาอายุตั้งแต่ 0 – 50 ปี โดยแบ่งตามช่วงอายุช่วงละ 5 ปี มีอัตราส่วนระหว่างช่วงที่ 1 จนถึงช่วงที่ 10 เป็น 1 : 0.92594 : 0.85881 : 0.79641 : 0.73800 : 0.68364 : 0.63281 : 0..58482 : 0.53897 : 0.49429 นั้นหมายความว่า ถ้ามีประชากรหญิงในช่วงอายุ 0 – 5 ปีจำนวน 100,000 คนจะมีประชากรหญิงในช่วงอายุ 5 – 10 ปี จำนวน 92,594 คน ประชากรหญิงในช่วงอายุ 10 – 15 ปี จำนวน 85,881 คน ประชากรหญิงในช่วงอายุ 15 – 20 ปีจำนวน 79,641 คน ประชากรหญิงในช่วงอายุ 20 – 25 ปี จำนวน 73,800 คน

ประชากรหญิงในช่วงอายุ 25 – 30 ปีจำนวน 68,364 คน ประชากรหญิงในช่วงอายุ 30 – 35 ปี จำนวน 63,281 คน ประชากรหญิงในช่วงอายุ 35 – 40 ปีจำนวน 58,482 คน ประชากรหญิงในช่วงอายุ 40 – 45 ปี จำนวน 53,897 คน และประชากรหญิงในช่วงอายุ 45 – 50 ปีจำนวน 49,429 คน □

ตัวอย่างที่ 12 พิจารณาระบบกลศาสตร์ดังภาพที่ 4.1



ภาพที่ 4.1 ระบบมวล – สปริงคู่

ถ้าวัตถุซ้ายมีมวลเท่ากับวัตถุขวา คือ $m_1 = m_2 = 1$ ค่าคงที่ของสปริงขวา คือ $k_1 = 3$ และค่าคงที่ของสปริงซ้าย คือ $k_2 = 2$ หาค่า $y_1(t)$ และ $y_2(t)$ เมื่อ $y_1(t)$ และ $y_2(t)$ คือความยาวของสปริงที่เปลี่ยนไปของสปริงซ้ายและสปริงขวาเมื่อเวลา t ถ้ากำหนดให้

$$y_1(0) = 0 \ , \ y_2(0) = 10$$

$$y_1'(0) = 0 \ , \ y_2'(0) = 0$$

จากการเคลื่อนที่ของระบบจะได้ระบบสมการ คือ

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1(t) + \frac{k_2}{m_1} y_2(t) \\ y_2''(t) &= \frac{k_2}{m_2} y_1(t) - \frac{k_2}{m_2} y_2(t) \end{aligned} \tag{4.25}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$y''(t) = A\,y(t) \tag{4.26}$$

$$\begin{bmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการ (4.2.5) ถ้าให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \tag{4.27}$$

หลังจากทำการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระ 2 ครั้งจะได้

$$\begin{bmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \tag{4.28}$$

ดังนั้นสมการ (4.28) จะมีผลเฉลยเมื่อ

$$\lambda^2 e^{\lambda t} u - e^{\lambda t} A u = 0 \tag{4.29}$$

โดยที่ λ^2 เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A และ u เวกเตอร์เฉพาะของเมทริกซ์ A ดังนั้นใช้วิธีการที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้หาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ในสมการ (4.26) ได้ $\lambda_1 = -1$ และ $\lambda_2 = -6$ และหาค่าเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการ (4.25) คือ

$$y(t) = c_1 e^{it} u_1 + c_2 e^{-it} u_1 + c_3 e^{\sqrt{6}\,it} u_2 + c_3 e^{-\sqrt{6}\,it} u_2 \tag{4.30}$$

หาค่า c_1 , c_2 , c_3 และ c_4 จากโจทย์ทราบว่า

$$y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ และ } y'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากสมการที่ (4.30) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y(0) &= (c_1 + c_2)u_1 + (c_3 + c_4)u_2 \\ y'(0) &= i(c_1 - c_2)u_1 + i\sqrt{6}(c_3 - c_4)u_2 \end{aligned} \qquad (4.31)$$

จากระบบสมการ (4.31) จะได้ว่า $c_1 = c_2 = 2$ และ $c_3 = c_4 = 1$ จากสมการ (4.30) จะได้

$$y(t) = 2(e^{it}u_1 + e^{-it}u_1) + (e^{\sqrt{6}\,it}u_2 + e^{-\sqrt{6}\,it}u)$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cos t - 4\cos(\sqrt{6}\,t) \\ 8\cos t + 2\cos(\sqrt{6}\,t) \end{bmatrix} \qquad \square$$

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์จตุรัสขนาด n และสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กล่าวคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} เป็นจำนวนจริง เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ สามารถหาได้โดยใช้วิธีการต่าง ๆ ได้หลายวิธี ในการหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยศึกษาเลือกศึกษาวิจัยโดยใช้วิธีการตรง คือ ดำเนินการสร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n จุด โดยให้ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นจุดเริ่มต้น ซึ่งจะได้พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ ดังนี้

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} + (-1)^n \right) \prod_{i=1}^{n} (\lambda - x_i)$$

เมื่อ $f(x) = \det(A - xI)$ ซึ่งรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามแบบลากรองจ์นี้ จะช่วยให้ง่ายต่อการลดรูปของพหุนาม จากนั้นเราจะใช้วิธีเซแคนต์หาค่าตัวศูนย์ตัวหนึ่งของพหุนาม เมื่อได้ตัวศูนย์ตัวหนึ่งแล้ว จะทำการลดรูปของพหุนามโดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n - 1 จุด ถ้าตัวศูนย์ที่ได้เป็นจำนวนจริง หรือที่จุดเริ่มต้น n - 2 จุด ถ้าตัวศูนย์ที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน จากนั้นทำการหาตัวศูนย์ของพหุนามที่ได้ เราจะกระทำซ้ำในลักษณะนี้ไปเรื่อย ๆ ท้ายที่สุดเราจะได้ตัวศูนย์ทั้งหมดของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ตัวศูนย์ทั้งหมด (ที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ทั้งในกรณีที่มีรากแตกต่างกันทั้งหมดและกรณีที่มีรากซ้ำกัน) ที่ได้ก็คือค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A

เราสามารถสรุปเป็นขั้นตอนวิธีการหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง ได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาจานเกอสช์กอริน (Gerschgorin Disk)

ขั้นตอนที่ 2 สร้างพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ที่จุดเริ่มต้น n จุด โดยที่ทุกจุดมีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าแตกต่างกันทั้งหมดและทุกจุดอยู่ในจานเกอสช์กอริน ซึ่งจะได้พหุนามอยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ ดังนี้

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{(\lambda - x_i)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} + (-1)^n\right)\prod_{i=1}^{n}(\lambda - x_i)$$

เมื่อ $f(x) = \det(A - xI)$

ขั้นตอนที่ 3 หาตัวศูนย์ของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีเซแคนต์ โดยเริ่มต้นจากจุด 2 จุด โดยที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งจุด โดยทั้งสองจุดนี้อยู่ในจานเกอสช์กอรินและไม่ซ้ำกับจุดเริ่มต้นทั้ง n จุดที่ใช้ในการสร้างพหุนามลักษณเฉพาะโดยวิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ ตัวศูนย์ที่ได้อาจเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

ขั้นตอนที่ 4 ทำการลดรูปของพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A โดยใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์

- ถ้าตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้ในขั้นตอนที่ 3 เป็นจำนวนจริง ลดรูปของพหุนามได้ 1 อันดับ
- ถ้าตัวศูนย์ที่ประมาณค่าได้ในขั้นตอนที่ 3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ลดรูปของพหุนามได้ 2 อันดับ

ขั้นตอนที่ 5 ตรวจสอบกำลังสูงสุดของพหุนามที่ได้ในขั้นตอนที่ 4

- ถ้ามีค่ามากกว่า 0 ให้กลับไปทำขั้นตอนที่ 3
- ถ้ามีค่าเท่ากับ 0 จบการขั้นตอนการทำงาน

จากขั้นตอนวิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ เมื่อทำการเปรียบเทียบกับวิธีการต่าง ๆ ที่ได้กล่าวไว้ในส่วนของบทที่ 1 นั้น พบว่ามีข้อดีกว่าในหลาย ๆ วิธี คือ

ในกรณีที่เมทริกซ์มีค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน วิธีกำลัง วิธีกำลังผกผัน และวิธีแบ่งครึ่งไม่สามารถที่จะคำนวณหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์นั้นได้ ในกรณีที่เมทริกซ์ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ ก็ไม่สามารถที่จะใช้วิธีกำลังผกผันได้ และในกรณีที่เมทริกซ์เป็นเมทริกซ์สมมาตรนั้น

วิธีจาโคบีก็ไม่สามารถที่จะคำนวณหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์นั้นได้ แต่ในกรณีต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมานั้น ถ้าใช้ขั้นตอนวิธีการสำหรับหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถที่จะคำนวณหาค่าเฉพาะของเมททริกซ์ได้ทุกกรณี

5.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากปัญหาค่าเฉพาะ เป็นปัญหาที่พบมากในงานด้านต่าง ๆ จึงมีผู้วิจัยพยายามที่จะคิดหาวิธีใหม่ ๆ และปรับปรุงวิธีการเดิมที่มีอยู่ เพื่อให้ได้วิธีการที่มีประสิทธิภาพในการหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ สำหรับในงานวิจัยนี้เป็นวิธีการที่สามารถหาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ได้ทั้งที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ทั้งในกรณีที่มีรากแตกต่างกันทั้งหมดและกรณีที่มีรากซ้ำกัน เนื่องจากในการคำนวณผู้วิจัยเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อตรวจสอบขั้นตอนวิธีการที่ได้นำเสนอ โดยใช้ภาษา Delphi 5.0 ซึ่งมีความสามารถที่จะเก็บทศนิยมได้สูงสุดเพียง 18 – 20 ตำแหน่ง ซึ่งผู้วิจัยพบปัญหาที่เกิดขึ้น ดังนี้

ในการหาค่าตัวศูนย์ของพหุนามผู้วิจัยเลือกใช้วิธีเซแคนต์ ซึ่งคำนวณโดยใช้สูตร

$$\lambda_1^{(k+1)} = \lambda_1^{(k)} - f(\lambda_1^{(k)})\frac{\left(\lambda_1^{(k-1)} - \lambda_1^{(k)}\right)}{\left(f(\lambda_1^{(k-1)}) - f(\lambda_1^{k})\right)}$$

ซึ่งในกรณีที่เมทริกซ์ไม่มีค่าเฉพาะซ้ำ ค่าเฉพาะที่ได้จะมีค่าความถูกต้องของทศนิยมอย่างน้อย 15 ตำแหน่ง แต่ในกรณีที่เมทริกซ์มีค่าเฉพาะซ้ำ ค่าเฉพาะที่ได้จะมีค่าความถูกต้องของทศนิยมลดลงเนื่องจากเมื่อค่าของ $f(\lambda^{(k-1)})$ และ $f(\lambda^{(k)})$ มีค่าใกล้เคียงกันและทำให้ค่าของ $f(\lambda^{(k-1)}) - f(\lambda^{(k)})$ มีค่าน้อยกว่า 10^{-18} และคอมพิวเตอร์ไม่สามารถคำนวณต่อได้ ในขณะที่ค่าของ $f(\lambda^{(k-1)})$ และ $f(\lambda^{(k)})$ ยังคงมีค่ามากกว่า 10^{-18} จึงทำให้ค่าของ $\lambda^{(k+1)}$ ที่ได้มีความถูกต้องของทศนิยมประมาณ 9 ตำแหน่งเท่านั้น

ในการประมาณค่าตัวศูนย์ของพหุนามผู้วิจัยเลือกใช้วิธีการประมาณค่าแบบเซแคนต์ สาเหตุที่ไม่เลือกใช้วิธีการประมาณค่าวิธีอื่น เช่น วิธีแบ่งครึ่งเนื่องจากว่าวิธีแบ่งครึ่งสามารถประมาณค่าตัวศูนย์ของพหุนามได้เฉพาะในกรณีที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น ถ้าตัวศูนย์ของพหุนามเป็นจำนวนเชิงซ้อนวิธีการนี้ไม่สามารถประมาณค่าได้ ส่วนสาเหตุที่ไม่เลือกใช้วิธีของนิวตันซึ่งมีอันดับการลู่เข้าสูงกว่า เนื่องจากในการคำนวณหาตัวศูนย์ด้วยวิธีนิวตันนั้นจะต้องหาค่าของอนุพันธ์ทุกครั้ง แต่ในงานวิจัยนี้พหุนามลักษณะเฉพาะถูกสร้างให้อยู่ในรูปพหุนามแบบลากรองจ์ ซึ่งการหาอนุพันธ์ของพหุนามกระทำได้ยาก แต่เราสามารถใช้วิธีของนิวตันได้แต่ต้องใช้แรงงานในการคำนวณมากขึ้นในแต่ละครั้งของการกระทำซ้ำ

ในงานวิจัยนี้ศึกษาเฉพาะกรณีที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกเมทริกซ์เป็นจำนวน แต่หากผู้สนใจที่จะศึกษาต่อ ผู้วิจัยคาดว่าสามารถที่จะนำขั้นตอนวิธีการไปใช้หาค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้

เอกสารอ้างอิง

[1] เรไร ตั้งสาโรจ, **พีชคณิตเชิงเส้นและการประยุกต์**. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์. 2542.

[2] J. D. Hoffman. **Numerical Methods for Engineering and Scientists**. New York : McGraw-Hill, Inc. 1993.

[3] G. J. Lastman and N. K. Sinha. **Microcomputer-Based Numerical Methods for Science and Engineering**. New York : Saunders College Publishing. 1988.

[4] B. N. Datta. **Numerical Linear Algebra and Application.** New Yrok : Thomson Publishing, Inc. 1995.

[5] W. Cheney and D. Kincaid. **Numerical Mathematics and Computing**. 3rd Ed. California : Wadsworth, Inc. 1994.

[6] W. W. Hager. **Applied Numerical Linear Algebra**. London : Prentice- Hall, Inc. 1988.

[7] J. L. Buchanan and P. R. Turner. **Numerical Methods and Analysis**. New York : McGraw-Hill, Inc. 1992.

[8] E. V. Krishnamurthy and S. K. Sen. **Numerical Algorithms.** New Delhi : Rekha Printers (P) Ltd. 1986.

[9] R. L. Burden and J. D. Faires. **Numerical Analysis.** 6th Ed. California : Thomson Publishing Inc. 1997.

[10] R. Hosking. et. al. **First Steps in Numerical Analysis.** 2nd Ed. London : A member of the Hodder Headline Group. 1996.

[11] A. Dax and S. Kaniel. "The ELR Method for Computing the Eigenvalues of a General Matrix." Siam J. Numer. Anal., vol. 18, August 1981. pp. 597-605.

[12] S. H. Hou. "A Simple Proof of the Leverrier-Faddeev Characteristic Polynomial Algorithm." Siam J. Review., vol. 40, September 1998. pp. 706-709.

[13] D. Bini and V. Y. Pan. "Computing Matrix Eigenvalues and Polynomial Zeros Where the Output is Real." Siam J. Comput., vol. 27, August 1998. pp. 1099-1115.

[14] C. T. Su and F.C. Chang. "Quick Evaluation of Determinants." Appl. Math. Comput., vol. 75, March 1996. pp. 117-118.

[15] C. T. Su and F. C. Chang. "More on Quick Evaluation of Determinants." Appl. Math. Comput., vol. 93, March 1998. pp. 97-99.

[16] S. Zheng and F. Sun. "Some Simultaneous Iterations for Finding all Zeros of a Polynomial with High Order Convergence." Appl. Math. Comput., vol. 99, March 1999. pp. 233-240.

[17] P. Lancaster and M. Tismenetsky. **The Theory of Matrices.** 2nd Ed. Orlando : Academic Press, Inc. 1985.

ประวัติผู้เขียน

นายสมเกียรติ สมบูรณ์เงิน เกิดเมื่อวันที่ 14 เมษายน พ.ศ. 2518 ที่จังหวัดชลบุรี สำเร็จการศึกษาหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนชลบุรี “สุขบท” และสำเร็จการศึกษาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ปีการศึกษา 2540

ปี พ.ศ. 2540 เข้าทำงานในตำแหน่งอาจารย์ประจำ คณะสารสนเทศศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีปทุม วิทยาเขตชลบุรี จนถึงปัจจุบัน