

อะแดปทีฟอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดสำหรับตัวกรอง  
อะแดปทีฟแบบ notch อันดับสองและการประยุกต์ใช้งาน

VARIABLE STEP-SIZE ADAPTIVE ALGORITHMS FOR  
IIR NOTCH FILTER AND ITS APPLICATIONS

ปารวี วัฒนลักษ์

PARAWEE WATTANALUK

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศ

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2549

ISBN 974-15-2441-2

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

อะแดปทีฟอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดสำหรับตัวกรอง  
อะแดปทีฟแบบนอตช์อันดับสองและการประยุกต์ใช้งาน

VARIABLE STEP-SIZE ADAPTIVE ALGORITHMS FOR  
IIR NOTCH FILTER AND ITS APPLICATIONS



ปารวี วัฒนลักษณ์

PARAWEE WATTANALUK

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 61653  
วัน,เดือน,ปี..... 19 ก.ค. 2549

.b.....
.i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศ

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2549

ISBN 974-15-2441-2

**VARIABLE STEP-SIZE ADAPTIVE ALGORITHMS FOR  
IIR NOTCH FILTER AND ITS APPLICATIONS**

**PARAWEE WATTANALUK**

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN INFORMATION ENGINEERING  
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**2006**

**ISBN 974-15-2441-2**

**COPYRIGHT 2006**

**SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

หัวข้อวิทยานิพนธ์	อะแดปทีฟอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้ำวกระโดดสำหรับตัวกรองอะแดปทีฟแบบนอตช์อันดับสองและการประยุกต์ใช้งาน
นักศึกษา	นางสาวปารวี วัฒนลักษณ์
รหัสนักศึกษา	47061115
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมสารสนเทศ
พ.ศ.	2549
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ. ดร. ชวลิต เบญจางคประเสริฐ

### บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอ อะแดปทีฟอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้ำวกระโดด และการประยุกต์ใช้งานตัวกรองอะแดปทีฟ IIR แบบนอตช์ อันดับสอง สำหรับการประมาณค่าความถี่ในสัญญาณรบกวน และใช้สำหรับกำจัดคลื่นไซน์ความถี่ 50 Hz ออกจากสัญญาณคลื่นหัวใจ (ECG) ของผู้ป่วย ขณะที่แพทย์กำลังบันทึก อัลกอริทึมที่นำเสนอมี 3 แบบ ได้แก่ อัลกอริทึมแบบ Variable step-size (VSS) อัลกอริทึมแบบ Noise robust variable step-size (NRVSS) และอัลกอริทึมแบบ Variable notch bandwidth (VNB) ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่ปรับปรุงมาจากอัลกอริทึมแบบ Modified Memoryless nonlinear gradient (Modified MNG) [8] โดยจุดประสงค์ของการปรับปรุงอัลกอริทึมคือการเพิ่มความเร็วในการปรับตัวเมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวกรองอยู่ห่างไกลจากค่าที่เหมาะสม ลดความแปรปรวน ลดค่าความเบี่ยงเบน และลดความผิดพลาด หรือค่า MSE ให้น้อยลง ในอัลกอริทึมแบบ VSS จะใช้ค่าสหสัมพันธ์ของสัญญาณเอาต์พุตเพื่อปรับเปลี่ยนค่าก้ำวกระโดดแบบคงที่ให้เป็นค่าก้ำวกระโดดแบบเปลี่ยนตามเวลา อัลกอริทึมแบบ NRVSS ใช้วิธีการเพิ่มตัวแปรที่ใช้ควบคุมค่าก้ำวกระโดดให้ปรับเปลี่ยนตามเวลาโดยใช้ค่าสหสัมพันธ์ของสัญญาณเอาต์พุตและสัญญาณผิดพลาด โดยทั้งสองอัลกอริทึมมีความกว้างของแถบความถี่หยุดคงที่ และอัลกอริทึมแบบ VNB จะเพิ่มการปรับเปลี่ยนความกว้างของแถบความถี่หยุด โดยเมื่อสัมประสิทธิ์อยู่ห่างไกลจากค่าที่เหมาะสม แถบความถี่หยุดจะกว้าง และ ความกว้างของแถบความถี่หยุดจะลดลง เมื่อถึงช่วงเวลาที่อัลกอริทึมปรับสัมประสิทธิ์ให้เข้าใกล้ค่าที่เหมาะสมเพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้องที่สุด จากผลการทดลอง โดยการจำลองการทำงานด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์พบว่า อะแดปทีฟอัลกอริทึมที่นำเสนอให้ประสิทธิภาพที่ดีทั้งการทำงานในสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน และสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์

<b>Thesis Title</b>	VARIABLE STEP-SIZE ADAPTIVE ALGORITHMS FOR IIR NOTCH FILTER AND ITS APPLICATIONS
<b>Student</b>	Miss Parawee Wattanaluk
<b>Student ID.</b>	47061115
<b>Degree</b>	Master of Engineering
<b>Programme</b>	Information Engineering
<b>Year</b>	2549
<b>Thesis Adviser</b>	Assoc. Prof. Dr. Chawalit Benjangkprasert

### **ABSTRACT**

This thesis introduces variable step-size adaptive algorithms for a second order adaptive IIR notch filter and applications to frequency estimation in background noise and for eliminating 50 Hz power line interference that induces to disturb the signal of electrocardiogram (ECG) signal of patient while the physician is recording it. The proposed adaptive algorithm are consists of the variable step-size (VSS) algorithm, the noise-robust variable step-size (NRVSS) algorithm, and the variable notch bandwidth (VNB) algorithm for direct form structure and lattice form structure. All of them are developed from the modified memoryless nonlinear gradient (modified-MNG) algorithm [8]. The objective of the proposed algorithms is to improve the performance of the adaptive IIR notch filter such as fast convergence speed, low variance, and low means-square error (MSE). The VSS algorithm is using the auto-correlation of the output signal to control the time-varying step-size. In the NRVSS algorithm, the step-size control parameter is using the auto-correlation of the output signal and the auto-correlation of the error signal. In the VSS algorithm and the NRVSS algorithm are using a fixed bandwidth. The VNB algorithm is to change the variable notch bandwidth instead of the fixed bandwidth. By the proposed techniques, they provide the fast convergence speed and ensuring low MSE. The simulation results are showing the excellent performance in both Gaussian noise environment and impulse noise environment.

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยคำแนะนำ คำปรึกษา และแนวความคิดจาก รศ. ดร. ชวลิต เบญจางคประเสริฐ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้การสนับสนุนทางด้านข้อมูลต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ที่ใช้ในการดำเนินงานวิจัย นอกจากนั้นแล้ว การสนับสนุนที่ดี ไมตรี และความอนุเคราะห์จากท่านที่ได้มอบให้ตลอดเวลาเป็นสิ่งที่ผู้วิจัยทราบซึ่ง และขอกราบขอบพระคุณท่านมา ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ รศ. นภพินทุ์ อนันตรศิริชัย และ รศ. อรลภก แสงอรุณ ที่ได้ให้กำลังใจ และมอบคำแนะนำที่ดี และมีคุณค่าให้ตลอดเวลา

และขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ วัฒนา วัฒนลักษณ์ คุณแม่ สาธิตา วัฒนลักษณ์ และครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่ง ที่ได้ให้การสนับสนุน และส่งเสริมทางการศึกษา รวมถึงกำลังใจ และความช่วยเหลือในทุกๆ ด้านตลอดเวลา

ขอขอบคุณ พี่ ๆ เพื่อน ๆ และน้อง ๆ ภาควิชาวิศวกรรมสารสนเทศ ที่ได้ให้คำแนะนำ และความคิดเห็น ตลอดจนถึงความช่วยเหลือในทุกๆ ด้าน รวมถึงเพื่อน ๆ จากสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล ที่ให้ความช่วยเหลือ และกำลังใจเสมอมา

ปารวี วัฒนลักษณ์

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมาย และวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 แนวความคิดที่ใช้ในการทำวิจัย.....	3
1.4 ขอบเขตการวิจัย.....	3
บทที่ 2 ตัวกรองความถี่ดิจิทัล.....	4
2.1 ตัวกรองความถี่แบบ IIR.....	6
2.2 โครงสร้างของตัวกรองความถี่แบบ IIR.....	8
2.2.1 ตัวกรองโครงสร้างรูปแบบโดยตรง.....	8
2.2.2 ตัวกรองโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ.....	10
2.3 การทดสอบเสถียรภาพ.....	12
2.4 สรุป.....	14
บทที่ 3 กระบวนการสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องจากเวลา.....	15
3.1 ชนิดของสัญญาณ.....	15
3.2 ตัวแปรสุ่ม.....	16
3.2.1 คุณสมบัติของตัวแปรสุ่ม.....	17
3.2.2 ค่าเฉลี่ยทั้งหมดเชิงสถิติ.....	21
3.2.3 ค่าสหสัมพันธ์.....	23
3.2.4 ค่าความแปรปรวนร่วม.....	24
3.2.5 ความเป็นอิสระ.....	25
3.2.6 Orthogonality.....	25

## สารบัญ(ต่อ)

3.2.7 Stationary.....	25
3.2.8 สหสัมพันธ์ไขว้.....	26
3.3 สรุป.....	28
<b>บทที่ 4 ทฤษฎีการประมาณค่า.....</b>	<b>29</b>
4.1 หลักการประมาณค่า.....	30
4.2 ชนิดของการประมาณ.....	32
4.3 คุณภาพของตัวประมาณ.....	33
4.4 ชนิดของตัวประมาณ.....	36
4.4.1 Block-based estimator.....	36
4.4.2 Sequential estimator.....	36
4.5 Cramer-Rao Lower Bound (CRLB).....	37
4.6 ตัวประมาณค่าแบบ Least square.....	43
4.7 Sequential least square.....	45
4.8 สรุป.....	48
<b>บทที่ 5 ตัวกรองอะแดปทีฟ IIR แบบนอตซ์ อันดับสอง.....</b>	<b>49</b>
5.1 โครงสร้างของตัวกรองแบบอะแดปทีฟ IIR แบบนอตซ์ อันดับสอง.....	51
5.1.1 โครงสร้างของตัวกรองรูปแบบโดยตรง.....	52
5.1.2 โครงสร้างของตัวกรองรูปแบบแลตทิซ.....	53
5.2 วิธี Steepest Descent.....	54
5.3 อัลกอริทึมแบบ LMS.....	57
5.4 อัลกอริทึมที่น่าสนใจ.....	61
5.5 อะแดปทีฟอัลกอริทึมที่ใช้ในการวิจัย.....	62
5.5.1 อัลกอริทึมแบบ VSS.....	63
5.5.1.1 โครงสร้างรูปแบบโดยตรง.....	63
5.5.1.2 โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ.....	64
5.5.2 อัลกอริทึมแบบ NRSS.....	64
5.5.2.1 โครงสร้างรูปแบบโดยตรง.....	65

## สารบัญ(ต่อ)

5.5.2.2	โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ.....	66
5.5.3	อัลกอริทึมแบบ VNB.....	67
5.5.3.1	โครงสร้างรูปแบบโดยตรง.....	68
5.5.3.2	โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ.....	69
5.6	สรุป.....	70
บทที่ 6	ผลการวิจัย.....	71
6.1	การประมาณสัญญาณไซน์คลื่นเดี่ยวในสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน.....	71
6.2	ความถูกต้องของคำตอบ.....	81
6.3	การประมาณสัญญาณไซน์คลื่นเดี่ยวในสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์.....	95
6.4	การประยุกต์ใช้งาน ANF สำหรับกำจัดสัญญาณไซน์ความถี่ 50 Hz ออกจากสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (ECG).....	98
6.5	สรุป.....	101
บทที่ 7	สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	102
บรรณานุกรม.....		104
ภาคผนวก.....		108
ภาคผนวก ก.	ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์.....	109
ภาคผนวก ข.	ประวัติผู้เขียน.....	115

# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 แนวความคิดในการกำจัดสัญญาณรบกวนด้วยตัวกรองดิจิทัลแบบปรับตัว.....	1
2.1 ผลตอบสนองต่อสัญญาณอิมพัลส์ของตัวกรองแบบ FIR และแบบ IIR.....	4
2.2 Signal flow graph ของโครงสร้างรูปแบบโดยตรง 1 สำหรับระบบที่มี $N$ ลำดับ.....	9
2.3 Signal flow graph ของโครงสร้างรูปแบบโดยตรง 2 สำหรับระบบที่มี $N$ ลำดับ.....	9
2.4 โครงสร้างตัวกรองแบบ predictor-error (a) forward PEF และ (b) backward PEF.....	10
2.5 ลักษณะของตัวกรองโครงสร้างรูปแบบแลตทิส (a) โครงสร้างของตัวกรองรูปแบบแลตทิส (b) โครงสร้างของตัวกรองแลตทิส $m$ อันดับ.....	11
2.6 สามเหลี่ยมเสถียรภาพสำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนแบบดิจิทัลอันดับสอง.....	13
3.1 รูปตัวอย่างตัวอย่างของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา (a) สัญญาณ deterministic แบบคาบ (b) สัญญาณ deterministic แบบไม่เป็นคาบ และ(c) สัญญาณสุ่ม.....	16
3.2 สัญญาณแบบสุ่มที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา.....	17
3.3 ตัวอย่างและคุณลักษณะของสัญญาณสุ่ม(a) สัญญาณแบบไบนารี, (b) Pdf และ (c) Cdf ของ สัญญาณในรูป (a).....	18
3.4 Pdf และ Cdf ของตัวแปรสุ่มที่เป็นการแจกแจงแบบเกาส์.....	19
3.5 สัญญาณสุ่มแบบไบนารี.....	19
3.6 คุณลักษณะของสัญญาณสุ่ม (a) Pdf ของ $x(1)$ และ (b) $x(2)$ .....	20
3.7 Joint Pdf ของ $x(1)$ และ $x(2)$ .....	20
3.8 ตัวแปรสุ่มสองตัว.....	23
3.9 อธิบายความหมายของ auto-correlation.....	26
4.1 ระบบเรดาร์.....	29
4.2 สัญญาณที่ได้จากการวัด.....	30
4.3 Pdf ของตัวแปร.....	31
4.4 ค่า $C$ และ $M$ ที่ต้องการประมาณ.....	32
4.5 Pdf ของ $C$ .....	32
4.6 สัญญาณรบกวนและ Pdf ของมัน.....	37
4.7 Curvature ของ Pdf .....	38
4.8 (a) Curvature มีค่าเป็นอนันต์ (b) Curvature มีค่าเป็นศูนย์.....	38
4.9 Pdf ของ $x[0]$ .....	39

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.10 Likelihood function (a) เมื่อ $\sigma_1 = 1/3$ (b) เมื่อ $\sigma_2 = 1$ .....	39
4.11 Cramer-Rao lower bound สำหรับการประมาณความถี่สัญญาณไซน์ .....	42
4.12 Cost function ที่เป็นเชิงเส้นกับ $\theta$ .....	44
4.13 Cost function ที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับ $\theta$ .....	44
4.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง $x[n]$ กับ $s[n]$ .....	45
5.1 แนวความคิดในการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบอะแดปทีฟ .....	49
5.2 ส่วนประกอบของตัวกรองความถี่อะแดปทีฟแบบ IIR .....	51
5.3 การประยุกต์ใช้งานเพื่อทำการกำจัดสัญญาณรบกวน .....	52
5.4 ตัวกรองอะแดปทีฟแบบนอตช์ที่ใช้โครงสร้างแบบแลตทิซ .....	53
5.5 วงจรกรองแบบทรานสเวอร์ส .....	54
5.6 ตัวกรองแบบปรับตัวได้แบบทรานเวอร์ส $N$ แท้ป .....	57
5.7 ค่า MSE ของอัลกอริทึมแบบ Modified MNG เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดมีค่าต่าง ๆ กัน .....	62
6.1 แผนภาพบล็อกสำหรับการประมาณค่าสัญญาณไซน์ในสัญญาณรบกวน โดยใช้ ANF .....	71
6.2 ลักษณะของสัญญาณไซน์, สัญญาณรบกวน, สัญญาณอินพุตที่ใช้สำหรับจำลองการทำงานและ สัญญาณเอาต์พุตที่เป็นสัญญาณไซน์ที่ถูกประมาณแล้ว .....	73
6.3 ลักษณะของสัญญาณเอาต์พุตขณะเกิดการปรับตัวของอัลกอริทึม .....	73
6.4 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	75
6.5 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.05$ .....	76
6.6 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.1$ .....	77
6.7 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	78
6.8 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.05$ .....	79
6.9 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.1$ .....	80
6.10 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	82
6.11 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.05$ .....	83
6.12 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.1$ .....	84
6.13 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	86
6.14 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.05$ .....	87
6.15 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.1$ .....	88

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.16 เปรียบเทียบความเร็วในการปรับตัวของ “ $a(n)$ ” เมื่อให้ MSE มีค่าใกล้เคียงกัน.....	89
6.17 เปรียบเทียบความเร็วในการปรับตัวของ “ $k(n)$ ” เมื่อให้ MSE มีค่าใกล้เคียงกัน.....	90
6.18 เปรียบเทียบความเร็วในการปรับตัวของตัวกรองโครงสร้างแบบ โดยตรงและแลตทิซ.....	91
6.19 เปรียบเทียบค่า variance ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	92
6.20 เปรียบเทียบค่า variance ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	92
6.21 เปรียบเทียบค่า bias ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	93
6.22 เปรียบเทียบค่า bias ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	93
6.23 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	94
6.24 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ $\mu(0) = 0.01$ .....	94
6.25 ลักษณะของสัญญาณอินพุตที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน $SNR = 10dB$ และสัญญาณ รบกวนแบบอิมพัลส์ $20\delta(n-500)$ .....	95
6.26 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์เมื่อสัญญาณรบกวนเป็นแบบเกาส์เซียน และอิมพัลส์ เมื่อตัวกรองใช้ โครงสร้างแบบ โดยตรง.....	96
6.27 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์เมื่อสัญญาณรบกวนเป็นแบบเกาส์เซียน และอิมพัลส์ เมื่อตัวกรองใช้ โครงสร้างแบบแลตทิซ.....	97
6.28 การกำจัดสัญญาณรบกวน 50Hz ออกจากคลื่น ECG โดยใช้ ANF.....	98
6.29 ลักษณะของสัญญาณไฟฟ้าหัวใจ (ECG: electrocardiogram) และสัญญาณไฟฟ้าหัวใจเมื่อถูก รบกวนด้วยสัญญาณไซน์ 50 Hz.....	98
6.30 ผลการจำลองการกำจัดสัญญาณไซน์คลื่นความถี่ 50 Hz ออกจากคลื่นไฟฟ้าหัวใจของอัลกอริ ทึมที่ทำงานกับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างรูปแบบ โดยตรง.....	99
6.31 ผลการจำลองการกำจัดสัญญาณไซน์คลื่นความถี่ 50 Hz ออกจากคลื่นไฟฟ้าหัวใจของอัลกอริ ทึมที่ทำงานกับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ.....	100

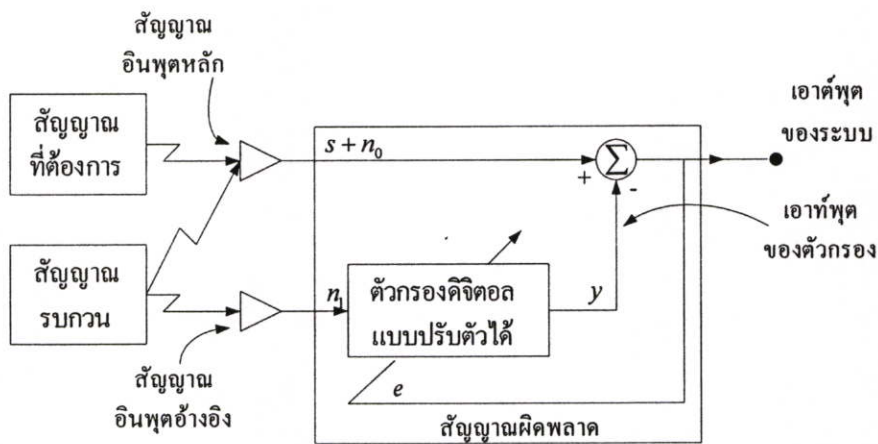
# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมา และความสำคัญของปัญหา

การกำจัดสัญญาณรบกวนแบบอะแดปทีฟ ได้ถูกนำเสนอขึ้นโดย Widrow [1] ในปี ค.ศ.1975 ซึ่งเป็นแนวคิดในการประมาณค่าสัญญาณซึ่งถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบบวกหรือถูกแทรกสอด โดยการนำสัญญาณอินพุตหลัก (Primary input) ซึ่งเป็นสัญญาณที่ถูกรบกวน และสัญญาณอินพุตอ้างอิง (Reference input) ที่เป็นสัญญาณรบกวนที่มีความสัมพันธ์กับสัญญาณรบกวนหลัก (Primary noise) มาใช้ร่วมกัน สัญญาณอินพุตอ้างอิงจะถูกกรองด้วยตัวกรองแบบอะแดปทีฟ และนำไปลบจากสัญญาณอินพุตหลัก ซึ่งจะทำให้ได้การประมาณสัญญาณนั้น ๆ

ตัวกรองความถี่ที่นำมาใช้สำหรับการประมาณค่าสัญญาณสามารถใช้ได้ทั้งตัวกรองแบบคงที่ (Fixed filter) และตัวกรองแบบอะแดปทีฟ (Adaptive filter) แต่การออกแบบตัวกรองแบบคงที่นั้นต้องทราบถึงคุณสมบัติของสัญญาณก่อน (Primary knowledge) ทั้งสัญญาณที่ต้องการประมาณ และสัญญาณรบกวน แต่สำหรับตัวกรองแบบปรับตัวนั้น มีความสามารถในการปรับแต่งตัวแปรของตัวเองได้ และการออกแบบก็ไม่ต้องทราบคุณสมบัติของสัญญาณก่อน หรือต้องการเพียงเล็กน้อยเท่านั้น



รูปที่ 1.1 แนวความคิดในการกำจัดสัญญาณรบกวนด้วยตัวกรองดิจิทัลแบบปรับตัว

จากรูปที่ 1.1 แสดงแนวความคิดในการกำจัดสัญญาณรบกวนด้วยตัวกรองดิจิทัลแบบอะแดปทีฟ สัญญาณอินพุตหลัก ประกอบด้วยสัญญาณ  $s$  และสัญญาณรบกวน  $n_0$  ส่วนสัญญาณอินพุตอ้างอิงเป็นสัญญาณรบกวน  $n_1$  ซึ่งมีความสัมพันธ์กับสัญญาณรบกวนหลัก  $n_0$  ซึ่งสัญญาณอินพุตอ้างอิงนี้จะถูกนำไปใช้เพื่อสร้างสัญญาณ  $y$  ซึ่งเป็นสัญญาณที่จำลองสัญญาณ

รบกวนหลัก  $n_0$  ให้ใกล้เคียงได้มากที่สุด และสัญญาณ  $y$  นี้ก็จะถูกนำไปลบกับสัญญาณอินพุตหลัก เพื่อสร้างสัญญาณเอาต์พุตของระบบซึ่งประกอบด้วยสัญญาณอินพุตหลัก และสัญญาณรบกวนที่ถูกลดทอนขนาดลง กระบวนการนี้แม้จะดูเหมือนว่าอันตราย เพราะถ้าหากกระทำอย่างไม่เหมาะสมแล้ว จะเป็นการเพิ่มกำลังงานของสัญญาณรบกวนที่เอาต์พุตของระบบ แต่อย่างไรก็ตาม ถ้ากระบวนการกรองและการลบถูกควบคุมอย่างเหมาะสมแล้ว กระบวนการปรับตัวจะสามารถทำการลดสัญญาณรบกวนเป็นไปอย่างสมบูรณ์โดยทำให้สัญญาณมีความผิดเพี้ยนน้อยที่สุด

การประยุกต์ใช้งานสำหรับการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบอะแดปทีฟได้แก่ การประมาณค่า (Estimation) การตรวจวัด (Detecting) และการยกระดับ (Enhancement) สัญญาณคลื่นไซน์ (Sinusoid) ความถี่ต่ำ โดยใช้ตัวกรองความถี่ออกแถบแคบ (Notch filter) ซึ่งง่ายต่อการปรับเปลี่ยนความถี่เป็น infinite null และสามารถติดตามความถี่ที่ถูกต้องของสัญญาณได้

นอกจากนั้นแล้วตัวกรองยังสามารถแบ่งได้อีกสองชนิดคือตัวกรองแบบ FIR (Finite impulse response) และแบบ IIR (Infinite impulse response) โดย ตัวกรองความถี่แบบ FIR นั้น ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) จะมีเฉพาะซีโร (Zero) ไม่มีโพล (Pole) จึงทำให้ระบบมีความเสถียรภาพแน่นอน และมีผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้น (Linear phase) แต่มีข้อเสียคือ ต้องใช้จำนวนอันดับ (Order) สูงจึงจะทำให้ตัวกรองทำงานได้ดี ส่วนตัวกรองความถี่แบบ IIR นั้น ฟังก์ชันถ่ายโอนจะประกอบด้วยซีโรและโพล ทำให้มีปัญหาเรื่องเสถียรภาพที่ไม่แน่นอน แต่ถ้ามีการออกแบบที่ดี จะทำให้ปัญหาดังกล่าวลดลง หรือไม่เกิดขึ้นเลย ข้อดีของตัวกรองความถี่แบบ IIR เมื่อเทียบกับแบบ FIR คือ ที่สมรรถนะการทำงาน (Performance) เท่ากันตัวกรองความถี่แบบ IIR จะใช้อันดับน้อยกว่าแบบ FIR นอกจากนั้นแล้ว ตัวกรองความถี่แบบ IIR ยังมีการตอบสนองทางขนาดที่คี่ มีแถบเปลี่ยนความถี่หยุดที่ชันเหมาะสำหรับการใช้งานสำหรับการประมาณค่าสัญญาณไซน์คลื่นเดี่ยว

กระบวนการที่สำคัญสำหรับการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบอะแดปทีฟก็คือ กระบวนการในการแก้ปัญหาเพื่อปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองความถี่ โดยหลักแล้วสามารถแบ่งได้สองวิธีคือ กระบวนการแบบ Stochastic gradient approach เช่น อัลกอริทึมแบบ LMS (Least-mean-square algorithm) และ Least-square estimation เช่น การประมาณค่าแบบ RLS (Recursive least-square estimation) ซึ่งกระบวนการแบบ stochastic gradient approach เป็นกระบวนการที่น่าสนใจ เนื่องจากมีโครงสร้างที่ง่ายกว่า

## 1.2 ความมุ่งหมาย และวัตถุประสงค์ของการศึกษา

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนออะแดปทีฟอัลกอริทึม 3 แบบ ซึ่งแต่ละแบบจะพัฒนามาจากอะแดปทีฟอัลกอริทึมในบทวิจัย [8] ดังนี้คือ 1) แบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดด [38] 2) แบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดและทนต่อสัญญาณรบกวน 3) แบบปรับเปลี่ยนค่าแถบความถี่หยุด [39] ทำงานร่วมกับ

ตัวกรองอะแคปทีฟ IIR แบบนอตซ์อันดับสองที่ใช้โครงสร้างแบบโดยตรง และ โครงสร้างแบบแลตทิซ สำหรับการตรวจวัดความถี่สัญญาณไซน์คลื่นเดี่ยวที่ถูก รบกวนด้วยสัญญาณรบกวน และ ใช้กำจัดสัญญาณคลื่น ไซน์ความถี่ 50 Hz ที่เป็นคลื่นแทรกสอดจากไฟฟ้ากระแสสลับออกจากคลื่นไฟฟ้าหัวใจขณะบันทึกโดยเครื่องมือวัดทางการแพทย์

### 1.3 แนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

แนวความคิดแรกที่ใช้ในบทวิจัย [38] คือการใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดด (Step-size) ของอัลกอริทึม โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาออกเพื่อควบคุมการปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดด ซึ่งมีผลต่อลักษณะในการลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริงของสัมประสิทธิ์ และมีผลต่อค่าที่ถูกต้องของสัมประสิทธิ์ที่ลู่เข้าอีกด้วย ทั้งนี้เนื่องมาจากการใช้อัลกอริทึมที่อยู่บนพื้นฐานของเกรเดียนต์ ทำให้เกิดสัญญาณรบกวนเกรเดียนต์ ซึ่งมีผลต่อความแปรปรวน (Variance) ของสัมประสิทธิ์ เมื่อสามารถลดความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ลงได้ จะสามารถเพิ่มความถูกต้องของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองนั้นได้ แนวความคิดที่สองที่ใช้ในงานวิจัย [16] คือการปรับเปลี่ยนตัวแปรหนึ่งที่ควบคุมการปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดซึ่งมีผลต่อการกำหนดค่าก้าวกระโดดเริ่มต้น และแนวความคิดที่สามที่ใช้ในบทวิจัย [39] คือ การปรับเปลี่ยนขนาดของแถบความถี่หยุด นอกเหนือจากการปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดด วิธีนี้จะทำให้ได้ความถูกต้องของคำตอบที่แท้จริงสูงสุด เนื่องจากการลดความกว้างของแถบความถี่หยุด ทำให้การประมาณค่าสัญญาณ ไซน์ใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงที่สุด

### 1.4 ขอบเขตการวิจัย

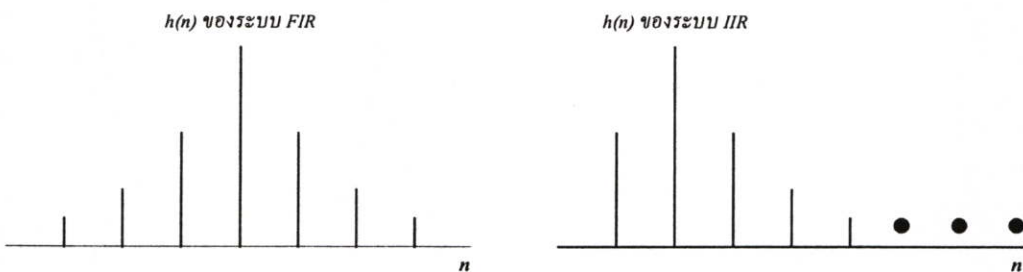
วิทยานิพนธ์นี้จะขยายความจากบทวิจัย [38-39] โดยจะกล่าวถึงที่มาของหลักการที่ใช้ในบทวิจัย รวมถึงการพัฒนาประสิทธิภาพของอะแคปทีฟอัลกอริทึมให้มีความเร็วในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง มีความถูกต้อง และทนทานต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ดีซีขึ้น และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการทดสอบทำงานของอะแคปทีฟอัลกอริทึมที่ได้นำเสนอสำหรับตัวกรองความถี่อะแคปทีฟ IIR แบบนอตซ์อันดับสองที่ใช้โครงสร้างแบบโดยตรงและแบบแลตทิซ

## บทที่ 2

# ตัวกรองความถี่แบบดิจิทัล

คำว่าตัวกรอง หรือวงจรถกรอง (Filters) บ่อยครั้งใช้ในการอธิบายรูปแบบของอุปกรณ์หรือวงจรอิเล็กทรอนิกส์ หรือในรูปแบบของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และถูกใช้กับกลุ่มของข้อมูลที่มีสัญญาณรบกวนมาก เพื่อที่จะดึงข้อมูลของกลุ่มที่สนใจในช่วงหนึ่งออกมา อาจกล่าวได้ว่าตัวกรองใช้เพื่อปฏิบัติในกระบวนการเกี่ยวกับข่าวสารพื้นฐานสามอย่าง คือ การกรอง (Filtering) ซึ่งหมายถึงการนำเฉพาะข่าวสารข้อมูลที่น่าสนใจในช่วงเวลาหนึ่งออกมา โดยการใช้ข้อมูลซึ่งรับได้ในช่วงเวลานั้น การทำให้เรียบ (Smoothing) ต่างจากการกรอง โดยที่กลุ่มข่าวสารที่สนใจไม่จำเป็นที่จะต้องมีอยู่ในช่วงเวลา  $t$  และข้อมูลที่ถูกวัดหลังช่วงเวลา  $t$  สามารถถูกใช้เพื่อให้ข่าวสารนี้มาได้ หมายความว่าในกรณีของการทำให้เรียบจะมีการหน่วงเวลาการตัดผลที่น่าสนใจ และใช้ข้อมูลที่ได้มาในช่วงเวลา  $t$  และได้มาหลังช่วงเวลา  $t$  ควบคู่กัน ทำให้ผลที่ได้มีความแม่นยำมากกว่าการกรอง และการทำนาย (Prediction) เป็นการทำนายล่วงหน้าของค่าประมาณนั้น ๆ สามารถทำนายถึงข้อมูลที่น่าสนใจในอนาคตได้ โดยใช้ข้อมูลก่อนหน้าและข้อมูลปัจจุบัน

ตัวกรองความถี่ นับเป็นวงจรอิเล็กทรอนิกส์ที่มีความสำคัญมาก ไม่ว่าจะทางด้านอิเล็กทรอนิกส์ การสื่อสาร การควบคุม และทางด้านเครื่องมือแพทย์ ในทุกวันนี้ตัวกรองความถี่แบ่งออกเป็นสองรูปแบบคือตัวกรองความถี่แบบแอนะล็อก (Analog filter) กับตัวกรองความถี่แบบดิจิทัล (Digital filter) นอกจากนั้นแล้ว ยังสามารถแบ่งตัวกรองความถี่ตามคุณลักษณะของผลตอบสนองความถี่ (Frequency response) ได้อีกคือ ตัวกรองความถี่แบบผ่านต่ำ (Low-pass filter, LPF) ตัวกรองความถี่แบบผ่านสูง (High-pass filter, HPF) ตัวกรองความถี่แบบผ่านแถบ (Band-pass filter, BPF) ตัวกรองความถี่แบบหยุดแถบ (Band-stop filter, BSF) หรือ Notch filter และตัวกรองความถี่แบบผ่านทุกความถี่ (All-pass filter)



รูปที่ 2.1 ผลตอบสนองต่อสัญญาณอิมพัลส์ของตัวกรองแบบ FIR และแบบ IIR

ตัวกรองความถี่แบบดิจิทัล (Digital filter) แบ่งตามผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบได้เป็นสองชนิด คือ ตัวกรองความถี่แบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำนวนจำกัด หรือตัวกรองแบบ FIR (Finite impulse response) และตัวกรองความถี่แบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำนวนไม่จำกัด หรือตัวกรองแบบ IIR (Infinite impulse response) โดยตัวกรองความถี่แบบ FIR นั้น ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) จะมีเฉพาะซีโร (Zero) ไม่มีโพล (Pole) ทำให้ระบบมีความเสถียรภาพแน่นอน และมีผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้น (Linear phase) แต่มีข้อเสียคือ ต้องใช้จำนวนอันดับ (Order) สูงจึงจะทำให้ตัวกรองทำงานได้ดี ส่วนตัวกรองความถี่แบบ IIR นั้น ฟังก์ชันถ่ายโอนจะประกอบด้วยซีโรและโพล ทำให้มีปัญหาเรื่องเสถียรภาพที่ไม่แน่นอน แต่ถ้ามีการออกแบบที่ดี จะทำให้ปัญหาดังกล่าวน้อยลง หรือไม่เกิดขึ้นเลย ข้อดีของตัวกรองความถี่แบบ IIR เมื่อเทียบกับแบบ FIR คือ ที่สมรรถนะ (Performance) เท่ากัน ตัวกรองความถี่แบบ IIR จะใช้จำนวนอันดับน้อยกว่า ซึ่งทำให้การคำนวณน้อยกว่าด้วย การเลือกใช้งานระหว่าง FIR และ IIR สามารถเลือกให้เหมาะสมกับการประยุกต์ใช้ การเลือกใช้งานระหว่าง FIR และ IIR สามารถสรุปได้คร่าว ๆ ดังนี้

- 1) การประยุกต์ใช้งานทางการส่งข้อมูล (Data transmission) เครื่องมือทางการแพทย์ (Biomedicine) การประมวลผลภาพ (Image processing) จำเป็นต้องใช้ตัวกรองความถี่ที่ให้ผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้น ดังนั้นตัวกรองความถี่แบบ FIR จึงเหมาะสมกว่าแบบ IIR
- 2) สำหรับการใช้งานที่เวลาจริงซึ่งต้องมีการจำกัดจำนวนบิตนั้น การคำนวณสัมประสิทธิ์ของตัวกรองจะต้องทำการปัดเศษ (Round-off) ซึ่งจะทำให้เกิด round-off noise ขึ้น ซึ่ง round-off noise นี้จะเกิดขึ้นในตัวกรองแบบ FIR น้อยกว่าที่เกิดขึ้นในตัวกรองแบบ IIR
- 3) ในกรณีที่มีความต้องการความชันในช่วงแถบความถี่ตัด (Cut off) สูงนั้นตัวกรองแบบ FIR ต้องใช้จำนวนอันดับสูงกว่า ทำให้มีสัมประสิทธิ์จำนวนมากและมีความยุ่งยากกว่าตัวกรองแบบ IIR เนื่องจากตัวกรองแบบ IIR มีผลตอบสนองทางแอมพลิจูดดีกว่าตัวกรองแบบ FIR
- 4) ตัวกรองความถี่แบบ IIR สามารถออกแบบได้โดยตรงจากตัวกรองที่เป็นแบบแอนะล็อก แต่ FIR ไม่สามารถทำได้
- 5) ตัวกรองความถี่แบบ FIR จะสังเคราะห์ได้ค่อนข้างยาก ถ้าหากไม่ใช้คอมพิวเตอร์ (CAD) ช่วยในการออกแบบ

จากทั้งหมดที่กล่าวมาพอจะสรุปเป็นแนวทางสำหรับการใช้งานได้ดังนี้

- ในงานที่มีความต้องการความชันในช่วงแถบความถี่ตัดสูง ตัวกรองแบบ IIR จะใช้จำนวนอันดับที่น้อยกว่า ทำให้ตัวหน่วง และความยุ่งยากของตัวกรองน้อยกว่าตัวกรองแบบ FIR
- ตัวกรองแบบ FIR จะเหมาะสมกับงานที่ต้องการความแม่นยำทางเฟส เช่น เครื่องมือทางการแพทย์ หรือการประมวลผลภาพ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเอาตัวกรองความถี่แบบ IIR มาใช้ เนื่องจากต้องการความชันในช่วงแถบความถี่ตัดสูง ดังนั้นเนื้อหาที่จะได้กล่าวต่อไป มีเพียงเฉพาะตัวกรองความถี่แบบ IIR เท่านั้น ส่วนตัวกรองความถี่แบบ FIR สามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิง [2]

## 2.1 ตัวกรองความถี่แบบ IIR (IIR filters)

ตัวกรองความถี่แบบ IIR เป็นหนึ่งในการประยุกต์ใช้ที่สำคัญของระบบการประมวลผลแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete-time processing) มีข้อดีหลาย ๆ ข้อที่เหนือกว่าตัวกรองแบบ FIR โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ด้านผลตอบสนองทางแอมพลิจูด เช่น เมื่อมีความต้องการให้ช่วงแถบเปลี่ยน (Transition band) ของช่วงแถบความถี่ผ่าน (Pass band) หรือแถบความถี่หยุด (Stop band) มีความชันมาก ๆ โดยที่ตัวกรองแบบ IIR จะใช้จำนวนอันดับน้อยกว่าตัวกรองแบบ FIR และยังมีความยุ่งยากในการคำนวณน้อยกว่าอีกด้วย

ตัวกรองความถี่แบบ IIR จะมีสมการของสัญญาณเอาต์พุตที่เป็นฟังก์ชันของสัญญาณอินพุตปัจจุบัน อินพุตในอดีต และสัญญาณเอาต์พุตในอดีต ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงผลต่าง (Difference equation) ได้ดังนี้

$$y(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.1)$$

เมื่อ  $x(n)$  คือลำดับของสัญญาณอินพุต และ  $y(n)$  คือลำดับของสัญญาณเอาต์พุต  $N, M$  คือ จำนวนตัวอย่าง (Samples) ทั้งหมดของสัญญาณเอาต์พุตและอินพุตที่ทราบค่า สมการที่ (2.1) สามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาสัญญาณเอาต์พุตต่อ ๆ กันไปได้ รูปแบบของการนำเอาสัญญาณเอาต์พุตก่อนหน้ามาใช้สำหรับคำนวณหาสัญญาณเอาต์พุตต่อ ๆ กันไปจะเรียกว่า recursive โดยทั่วไป ตัวกรองความถี่แบบ IIR และตัวกรองแบบ recursive มักจะนำมาใช้ในความหมายเดียวกัน ทั้งนี้เพราะสมการที่ (2.1) สามารถนำไปใช้สร้างตัวกรองความถี่ทั้งสองแบบได้เหมือนกัน คำว่า IIR จะหมายถึงรูปแบบของผลตอบสนองอิมพัลส์ (Impulse response) ของตัวกรองความถี่ ในขณะที่คำว่า recursive หมายถึงตัวกรองความถี่นี้ถูกสร้างขึ้นมาอย่างไร ตัวกรองความถี่แบบ FIR ก็สามารถสร้างในรูปแบบ recursive ได้ ในขณะเดียวกันตัวกรองความถี่แบบ IIR ก็ยังสามารถสร้างในรูปแบบ non-recursive ได้เหมือนกัน

เพื่อความสะดวกจะนิยามตัวกรองความถี่แบบรีเคอร์ซีฟด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน หรือ ฟังก์ชันของระบบ (System function) โดยฟังก์ชันของระบบคือการแปลง  $z$  (Z-transform) ของผลตอบสนองอิมพัลส์ของตัวกรองความถี่ ซึ่งจะอยู่ในรูปเศษส่วน (Rational function) ในตัวแปร  $z^{-1}$  ตามระบบสมการที่ (2.1) จะมีฟังก์ชันของระบบเป็นไปตามสมการคือ

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.2)$$

จากสมการที่ (2.2) ถ้ากำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์ จะสามารถเขียนใหม่ได้ คือ

$$H(z) = G \frac{\prod_{k=0}^M (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - \alpha_k z^{-1})} \quad (2.3)$$

ราก (Root) ของพหุนามตัวเศษ  $\beta_k$  เรียกว่าซีโร (Zeros) ของตัวกรองความถี่ และรากของตัวส่วน  $\alpha_k$  เรียกว่าโพล (Poles) และ  $G$  เป็นอัตราขยายซึ่งมีค่าคงที่ โดยทั่วไป จำนวนของซีโรและโพลจะขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ใช้งานในการออกแบบ จำนวนอันดับ (Order) ของตัวกรองความถี่แบบ IIR จะหาได้จากจำนวนรากของโพลที่อยู่ในระนาบ  $z$  ที่มีค่าจำกัด (Finite  $z$ -plane)

ตัวกรองความถี่ที่มีความเป็นเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (Linear time-invariant, LTI) จะมีคุณสมบัติเป็น causal ถ้าผลตอบสนองอิมพัลส์มีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ  $n < 0$  ตัวอย่างสัญญาณเอาต์พุตของตัวกรองความถี่ที่เป็น causal จะขึ้นกับตัวอย่างสัญญาณอินพุตปัจจุบันและในอดีตเท่านั้น ถ้าจำกัดสัญญาณอินพุตให้มีค่าเป็นศูนย์  $x(n) = 0$  สำหรับ  $n < 0$  และค่าเริ่มต้นของ  $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-N) = 0$  จะทำให้ตัวกรองความถี่แบบ recursive ตามสมการที่ (2.1) มีคุณสมบัติเป็น causal ความเป็น causal ของตัวกรองความถี่ มีความสำคัญมากในการประยุกต์ใช้งานที่เวลาจริง (Real time) เมื่อมีการ tick ของสัญญาณนาฬิกาจะได้ตัวอย่างอินพุต 1 ตัวอย่างจากนั้นตัวกรองความถี่จะต้องสร้างตัวอย่างของเอาต์พุตออกมาด้วย

ข้อควรคำนึงอีกอันหนึ่งของตัวกรองความถี่แบบ IIR คือความเสถียร (Stable) ถ้าตัวกรองความถี่ที่ไม่เสถียร (Unstable) จะทำให้ลำดับของสัญญาณเอาต์พุตเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต ถ้าสัญญาณอินพุตยังคงป้อนให้อยู่ ซึ่งเสถียรภาพของตัวกรองความถี่แบบ IIR จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งโพลของฟังก์ชันระบบในระนาบ  $z$  ตัวกรองความถี่แบบ IIR ที่มีคุณสมบัติเป็น causal LTI จะมีความเสถียร ถ้าค่าโพลเป็นไปตามเงื่อนไข  $|\alpha_k| < 1$  ซึ่งหมายความว่าตำแหน่งโพลทุกตัวจะต้องอยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วย (Unit circle) บนระนาบ  $z$  นั่นเอง

## 2.2 โครงสร้างของตัวกรองความถี่แบบ IIR (Basic structure for IIR systems)

โครงสร้างของตัวกรองแบบ IIR มีหลายรูปแบบ เช่น รูปแบบโดยตรง 1 และ 2 (Direct Forms I และ II), Transpose Form, Parallel Form, and Cascade Form ข้อสำคัญในการเลือกรูปแบบของโครงสร้างของตัวกรองนั้น พิจารณาจากความยุ่งยากในการคำนวณ เช่น จำนวนการคูณ (Multiplication) และการหน่วง (Delay) ซึ่งการคูณนอกจากจะมีราคาแพงเมื่อนำไปทำเป็นฮาร์ดแวร์ (Hardware) แล้ว ยังสิ้นเปลืองเวลา (Time-consuming) ในการทำงานของตัวกรอง เมื่อสามารถลดจำนวนของการคูณลงได้ ตัวกรองจะสามารถทำงานได้เร็วขึ้น ส่วนการหน่วงเวลาจะใช้หน่วยความจำ (Memory) ซึ่งเมื่อสามารถลดจำนวนการหน่วงเวลา จะสามารถลดหน่วยความจำที่ใช้ได้ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงโครงสร้างของตัวกรองความถี่แบบ IIR แสดงในรูปของ signal flow graph [3] โดยจะกล่าวถึงเฉพาะโครงสร้างรูปแบบโดยตรง (Direct form) และโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ (Lattice form)

### 2.2.1 ตัวกรองโครงสร้างรูปแบบโดยตรง

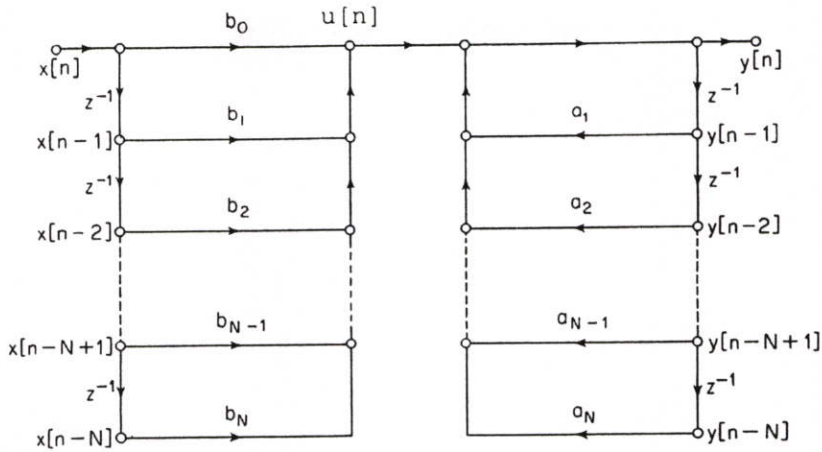
จากสมการที่ (2.1) และ (2.2) ประกอบไปด้วยการบวกจำนวน  $M + 1$  ครั้ง สำหรับพจน์อินพุต  $x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)$  และ  $N$  ครั้ง สำหรับพจน์เอาต์พุต  $y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)$  และแต่ละพจน์จะถูกถ่วงน้ำหนักด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวกรองความถี่ จากสมการที่ (2.1) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$u(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) \quad (2.4)$$

$$y(n) = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \dots - a_Ny(n-N) + u(n) \quad (2.5)$$

จากสมการที่ (2.4) และ (2.5) จะเห็นได้ว่าตัวกรองความถี่แบบ IIR จะประกอบด้วยระบบย่อย (Subsystem) สองระบบต่อกันเป็นชั้น (Cascade) กัน กล่าวคือ ชั้นที่หนึ่งเป็นชั้นของฟังก์ชันเศษในสมการที่ (2.2) และชั้นที่สองเป็นของฟังก์ชันส่วนของสมการที่ (2.2) เมื่อนำสองส่วนนี้มารวมกัน จะได้โครงสร้างรูปแบบโดยตรง 1 (Direct form I) ซึ่งสามารถเขียนเป็น signal flow graph สำหรับตัวกรองความถี่อันดับ  $N$  ตามรูปที่ 2.2

จะสังเกตเห็นว่าโครงสร้างแบบโดยตรง 1 จะมีจำนวนพจน์ทั้งหมด  $M + N + 1$  พจน์ คือ  $x(n), x(n-1), \dots, x(n-M), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)$  แต่ละพจน์จะถูกคูณด้วยสัมประสิทธิ์ และนำมาบวกกัน ซึ่งจำนวนของการคูณสำหรับตัวอย่างเอาต์พุตแต่ละค่าจะเท่ากับจำนวนสัมประสิทธิ์ที่เป็น nontrivial เท่านั้น (การคูณด้วย 1, -1 และ 0 จะไม่นำมาคิดเป็นการคูณ)



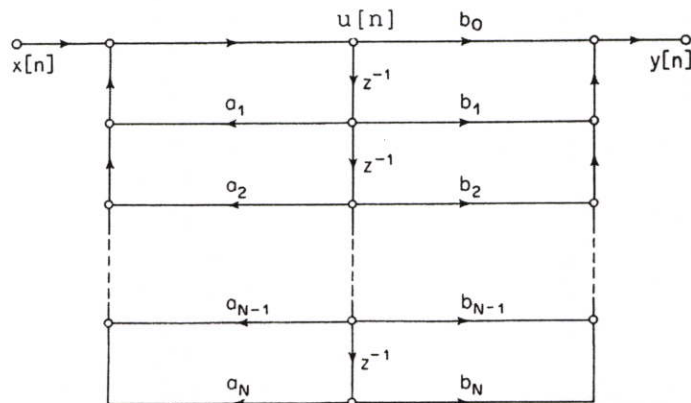
รูปที่ 2.2 Signal flow graph ของโครงสร้างรูปแบบโดยตรง 1 สำหรับระบบที่มี  $N$  ลำดับ

จากสมการที่ (2.2) ตัวเศษของฟังก์ชันระบบ ต้องการสัญญาณอินพุตเป็น  $x(n)$  และให้สัญญาณเอาต์พุตเป็น  $u(n)$  และตัวส่วนต้องการสัญญาณอินพุตเป็น  $u(n)$  และให้สัญญาณเอาต์พุตเป็น  $y(n)$  จากรูปที่ 2.2 ถ้าทำการพลิก (Reverse) แต่ละระบบย่อย จะทำให้ตัวอย่างข้อมูลที่ถูกรับในระบบย่อยที่ 1 สามารถเก็บไว้ร่วมกับระบบย่อยที่ 2 ได้ ซึ่งโครงสร้างลักษณะนี้จะเรียกว่ารูปแบบโดยตรง 2 (Direct form II) หรือ canonic direct form ซึ่งมีข้อดีคือต้องการจำนวนตัวหน่วงเวลาน้อยกว่า โดยจะมีค่าสูงสุดเท่ากับ  $M, N$  และจะใช้การคูณเท่ากับ  $M + N + 1$  ครั้ง โครงสร้างรูปแบบโดยตรง 2 จะมีสมการผลต่าง คือ

$$u(n) = x(n) - a_1 u(n-1) - a_2 u(n-2) - \dots - a_N u(n-N) \quad (2.6)$$

$$y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M) \quad (2.7)$$

และ signal flow graph ของโครงสร้างแบบโดยตรง 2 แสดงดังรูปที่ 2.3

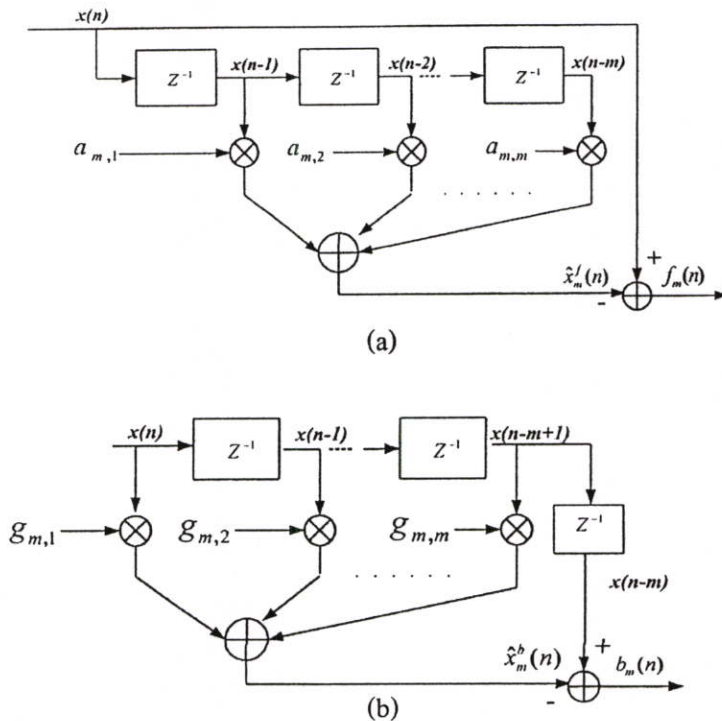


รูปที่ 2.3 Signal flow graph ของโครงสร้างรูปแบบโดยตรง 2 สำหรับระบบที่มี  $N$  ลำดับ

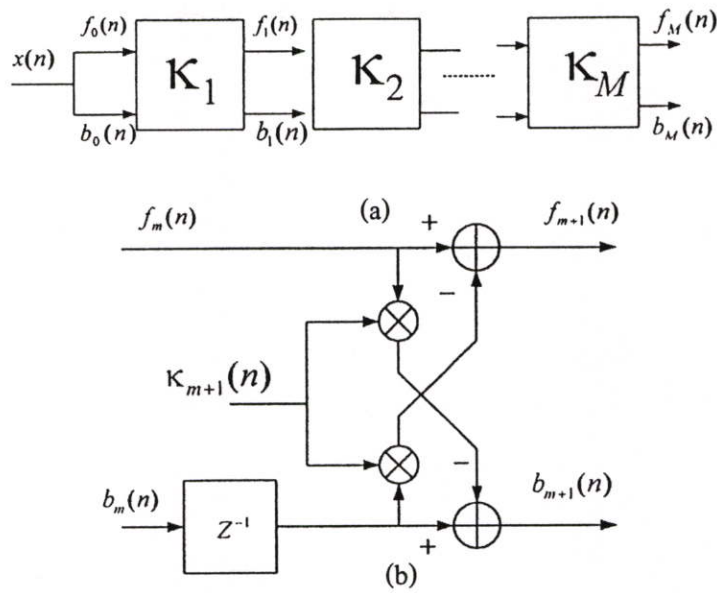
ข้อสังเกตจากโครงสร้างรูปแบบโดยตรง 1 ในรูปที่ 2.2 และโครงสร้างรูปแบบโดยตรง 2 ในรูปที่ 2.3 จะเห็นได้ว่าทั้งสองโครงสร้างต่างสอดคล้องกับสมการที่ (2.4) และ (2.5) เพียงแต่โครงสร้างรูปแบบโดยตรง 1 จะใช้จำนวน unit delay ( $z^{-1}$ ) เท่ากับ  $M+N$  ในขณะที่โครงสร้างรูปแบบโดยตรง 2 จะใช้จำนวนตัวหน่วงเวลา ( $z^{-1}$ ) เพียง  $\max\{M,N\}$  ซึ่งเป็นการประหยัดตัวหน่วงเวลาได้จำนวนหนึ่ง

### 2.2.2 ตัวกรองโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ

โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ [4] เป็นโครงสร้างตัวกรองแบบ predictor-error หรือ PEF (Prediction-error filter) ซึ่งประกอบด้วยการคูณสัญญาณด้วยสัมประสิทธิ์หลายครั้ง เพื่อให้ทำให้กำลังงานเอาต์พุต (Prediction-error) ของตัวกรองถูกทำให้น้อยที่สุด PEF มีอยู่สองรูปแบบ แบ่งตามลำดับของอินพุต คือ forward PEF เป็นรูปแบบซึ่งออกแบบให้ลดค่า mean-square ของ forward prediction-error คือความต่างของค่าที่ประมาณได้ในอนาคตและค่าที่แท้จริงของมัน ในขณะที่ backward PEF ได้ออกแบบให้ลดค่า mean-square ของ backward prediction-error ของค่าที่ประมาณได้ในอดีต และค่าที่แท้จริง จำนวนอันดับ (Order) ของตัวกรองคือจำนวนชั้น (Stage) ของโครงสร้างแบบแลตทิซนั่นเอง



รูปที่ 2.4 โครงสร้างตัวกรองแบบ predictor-error (a) forward PEF และ (b) backward PEF



รูปที่ 2.5 ลักษณะของตัวกรองโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ (a) โครงสร้างของตัวกรองแลตทิซ (b) โครงสร้างของตัวกรองแลตทิซ  $m$  อันดับ

เมื่อให้  $x(n)$  เป็นสัญญาณอินพุตจะได้เอาต์พุตของรูปที่ 2.5 (b) ดังนี้

$$f_{m+1} = f_m(n) - \kappa_{m+1} b_m(n-1) \quad (2.8)$$

$$b_{m+1}(n) = b_m(n) - \kappa_{m+1} f_m(n) \quad (2.9)$$

เมื่อ  $m = 0, 1, 2, \dots$  และสำหรับค่าเริ่มต้นอันดับที่ศูนย์ กำหนดให้  $f_0(n) = b_0(n) = x(n)$  และค่าสัมประสิทธิ์  $\kappa_{m+1}$  กำหนดดังนี้

$$\kappa_{m+1} = \frac{E[f_m(n) b_m(n-1)]}{P_m} \quad (2.10)$$

$$P_{m+1} = (1 - \kappa_{m+1}^2) P_m \quad (2.11)$$

โครงสร้างแบบแลตทิซมีข้อดีที่น่าสนใจ เช่น เป็นโครงสร้างที่มีประสิทธิภาพสูง แต่ละชั้นของตัวกรองเป็นอิสระต่อกัน โดยที่ backward prediction error ของเอาต์พุตแต่ละชั้นนั้น ตั้งฉากต่อกัน เมื่อมีสัญญาณอินพุตแบบ WSS (Wide sense stationary) เมื่อต้องการเพิ่มอันดับของตัวกรอง

สามารถเพิ่ม stage ของตัวกรองได้เลย โดยไม่มีผลต่อ stage ก่อนหน้าของตัวกรอง และทุกชั้นของตัวกรองมีโครงสร้างเสมือน เหมาะสำหรับการสร้างตัวกรองบน VLSI (Very large scale integration)

### 2.3 การทดสอบเสถียรภาพ (Stability test) [22]

เพื่อที่จะทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรองแบบ IIR ในสมการที่ (2.3) เป็น causal และมีความเสถียรแบบ BIBO (Bound In Bound Out) นั้น จะต้องทำให้โพลทุกตัวอยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วย (Unit circle) เท่านั้น การวิเคราะห์เพื่อหาตำแหน่งโพลของฟังก์ชันถ่ายโอนที่อันดับสูงกว่าอันดับสองนั้น ทำได้ค่อนข้างยาก และจะต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการหาราก แต่สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสองมีวิธีการง่าย ๆ ในการทดสอบเสถียรภาพดังนี้

ให้

$$D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \quad (2.12)$$

โดยที่  $D(\cdot)$  คือตัวส่วนอันดับสองของสมการที่ (2.2) จากสมการที่ (2.12) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปโพลดังสมการ

$$D(z) = (1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-2}) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) z^{-1} + \alpha_1 \alpha_2 z^{-2} \quad (2.13)$$

เปรียบเทียบสมการที่ (2.12) กับสมการที่ (2.13) แล้วจะได้

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2), \quad a_2 = \alpha_1 \alpha_2 \quad (2.14)$$

เพื่อให้ฟังก์ชันถ่ายโอนมีเสถียรภาพ ตำแหน่งโพลจะต้องอยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วย นั่นคือ

$$|\alpha_1| < 1, \quad |\alpha_2| < 1$$

เนื่องจากสมการที่ (2.12) สัมประสิทธิ์  $a_2$  ถูกกำหนดเป็นผลคูณของโพล ดังนั้นจะได้ว่า

$$|a_2| < 1 \quad (2.15)$$

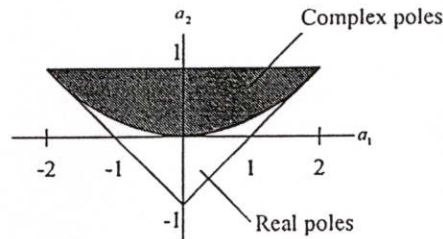
และจะสามารถกำหนดรากของพหุนาม  $D(z)$  ดังนี้คือ

$$\alpha_1 = -\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \alpha_2 = -\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (2.16)$$

และจากสมการที่ (2.16) จะได้ว่า

$$|a_1| < 1 + a_2 \quad (2.17)$$

ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองความถี่เป็นไปตามสมการที่ (2.15) และสมการที่ (2.16) จะสามารถวาดขอบเขตของค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังคงทำให้ตัวกรองความถี่มีความเสถียรเป็นรูปสามเหลี่ยมในระนาบ  $(a_1, a_2)$  ซึ่งรู้จักกันทั่วไปในชื่อของสามเหลี่ยมเสถียรภาพ (Stability triangle) สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนดิจิทัลอันดับสอง แสดงดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 สามเหลี่ยมเสถียรภาพสำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนแบบดิจิทัลอันดับสอง

โพลที่เกิดจากฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสองนั้นจะมีสามชนิด คือ โพลสังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate poles) โพลค่าจริงที่ไม่ซ้ำกัน (Real and unequal) และโพลค่าจริงและเท่ากัน (Real and equal) โพลที่เป็นสังยุคเชิงซ้อนมักจะเกิดขึ้นถ้า  $a_1^2 < 4a_2$  ซึ่งกรณีนี้ โพลแต่ละค่าจะอยู่ที่ตำแหน่งรัศมี  $r$  จากจุดกำเนิดของวงกลมหนึ่งหน่วย และที่มุม  $\theta$  ซึ่งกำหนดได้ตามสมการดังนี้คือ

In term of

$$\alpha_1 = r \angle \theta \quad (2.18)$$

เมื่อ

$$r = a_2^{1/2}, \theta = \cos^{-1} \left( \frac{-a_1}{2r} \right) \quad (2.19)$$

จากสมการที่ (2.15) และ (2.17) สามารถใช้เป็นสูตรสำหรับประมาณจำนวนบิตเมื่อนำไปใช้งานที่เวลาจริง ที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้ซึ่งเป็นหนึ่งในหลาย ๆ วิธีที่มีใช้กัน สำหรับวิธีการหา

เงื่อนไขของสัมประสิทธิ์ที่ทำให้มีเสถียรภาพของฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสูง ๆ สามารถดูได้จากเอกสารอ้างอิง [8]

## 2.4 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงตัวกรองความถี่ดิจิทัลแบบ IIR และ โครงสร้างสองแบบคือ โครงสร้างแบบโดยตรง และ โครงสร้างแบบแลตทิซ ซึ่งใช้ในวิทยานิพนธ์ ในการเลือกใช้ตัวกรองแบบดิจิทัลแต่ละแบบ สิ่งที่สำคัญคือการเลือกการใช้งานตัวกรองให้ถูกประเภท ในการประยุกต์ใช้ที่ต้องการผลตอบแทนทางเฟสที่ดี และให้ความผิดเพี้ยนน้อยที่สุด เช่น การประยุกต์ใช้กับการประมวลผลสัญญาณภาพ และการสื่อสารข้อมูล ควรใช้ตัวกรองแบบ FIR แต่ในงานที่ต้องการการตอบสนองทางแอมพลิจูดที่ดี ต้องการความชันของแถบเปลี่ยนความถี่ที่สูง และไม่สนใจความผิดเพี้ยนทางเฟสมากนัก ควรเลือกใช้ตัวกรองแบบ IIR นอกจากนี้แล้ว เมื่อต้องนำไปสร้างจริง ขนาดของตัวกรองมีความสำคัญที่ต้องคำนึงถึงอีกด้วย เนื่องจาก ถ้าต้องการตัวกรองที่มีสมรรถนะที่ดี ตัวกรองแบบ FIR จะมีจำนวนของอันดับสูงกว่า ทำให้ต้องการหน่วยความจำมากกว่าตัวกรองแบบ IIR

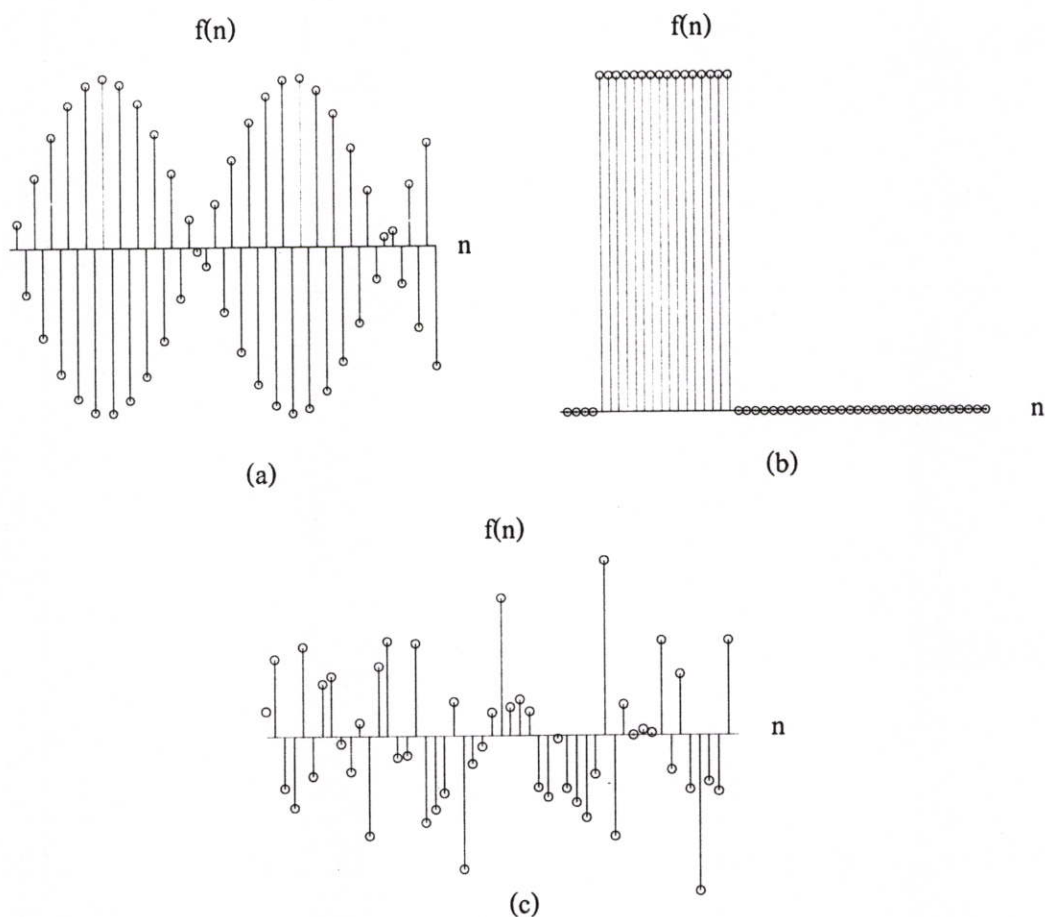
## บทที่ 3

# กระบวนการสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา

ในบทนี้จะกล่าวถึง กระบวนการสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete-time random processes) ซึ่งเป็นทฤษฎีที่มีความสำคัญต่อการศึกษาการประมวลผลสัญญาณแบบปรับตัว (Adaptive signal processing) ทั้งนี้เพราะการประมวลผลสัญญาณแบบปรับตัวจะเกี่ยวข้องกับสัญญาณแบบสุ่ม ทั้งที่เป็นแบบ strictly stationary, wide-sense stationary และแบบ non-stationary การวิเคราะห์คุณสมบัติของสัญญาณแบบสุ่มจะต้องอาศัยหลักการทางสถิติ โดยอาจอธิบายในรูปของค่าเฉลี่ยเชิงสถิติ เช่น ค่ากลาง (Mean) ค่าความแปรปรวน (Variance) และค่าสหสัมพันธ์ (Correlation) เป็นต้น

### 3.1 ชนิดของสัญญาณ

สัญญาณ โดยทั่วไปอาจแบ่งได้อย่างกว้าง ๆ เป็นสองประเภท [17] คือแบบ deterministic และแบบสุ่ม (Random หรือ Stochastic) สัญญาณแบบ deterministic นั้นเป็นสัญญาณที่สามารถอธิบายได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์หรือตาราง ดังนั้นจึงสามารถคำนวณสัญญาณล่วงหน้าได้และง่ายต่อการวิเคราะห์ สัญญาณแบบ deterministic ยังแบ่งได้อีกสองประเภทคือ สัญญาณแบบเป็นคาบ (Periodic) ตัวอย่างของสัญญาณชนิดนี้ได้แก่ สัญญาณไซน์ และสัญญาณแบบไม่เป็นคาบ (Non periodic) ตัวอย่างของสัญญาณชนิดนี้ได้แก่ unit sample ส่วนสัญญาณแบบสุ่ม หรือกระบวนการสุ่ม คือสัญญาณที่สร้างซ้ำโดยไม่สามารถกำหนดรูปแบบได้ สัญญาณแบบสุ่มเกิดจากการรวมตัวกันของสัญญาณที่มีคุณลักษณะทางสถิติหลายตัว เช่นสัญญาณไซน์ที่เป็นสัญญาณแบบ deterministic แต่สามารถรวมตัวกันเป็นความถี่และขนาดใดก็ได้ โดยมากสัญญาณแบบสุ่มนี้จะเกี่ยวข้องกับสัญญาณรบกวน (Noise) สัญญาณรบกวนจะกระจายและเกิดขึ้นได้ทุกแห่งและมีหลายรูปแบบ เช่น ความผิดพลาดจากการควอนไทซ์ในวงจรแปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล A/D หรืออาจเป็นสัญญาณรบกวนแบบ round-off ซึ่งเกิดจากการปัดเศษในการใช้การประมวลผลสัญญาณแบบ fixed-point หรือสัญญาณเสียงก็เรียกได้ว่าเป็นสัญญาณสุ่ม ซึ่งเมื่อวิเคราะห์สัญญาณเสียงแล้วจะพบว่าเกิดจากสัญญาณแบบ deterministic ที่รวมตัวกัน นอกจากนี้แล้วยังมีสัญญาณอีกชนิดหนึ่งเรียกว่าสัญญาณแบบ chaotic ซึ่งเป็นสัญญาณที่คล้ายคลึงกับสัญญาณแบบสุ่ม แต่จะมีรูปแบบ (Pattern) เฉพาะตัว ตัวอย่างเช่น การหมุนวนของน้ำทำให้เกิดสิ่งที่เรียกว่า swirl การพัดของพัดลม หรือแม้กระทั่งการหมุนเวียนของเลือดในเส้นเลือด ซึ่งสามารถหารูปแบบได้จากสิ่งที่เรียกว่า attractor หรือตัวที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์ chaos นั่นเอง ซึ่งสัญญาณในลักษณะนี้ยังอยู่ในขั้นการทำวิจัย



รูปที่ 3.1 รูปตัวอย่างตัวอย่างของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา (a) สัญญาณ deterministic แบบคาบ (b) สัญญาณ deterministic แบบไม่เป็นคาบ และ (c) สัญญาณสุ่ม

### 3.2 ตัวแปรสุ่ม (Random variables)

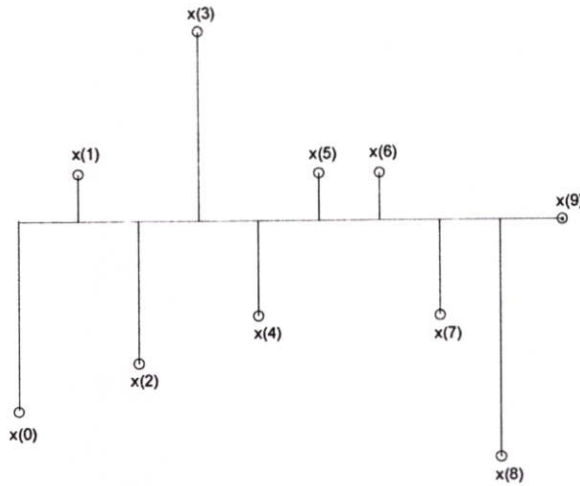
ตัวแปรสุ่ม (Random variables) คือตัวแปรที่เกิดจากการสุ่ม และไม่สามารถคาดเดาค่าที่แท้จริงของตัวแปรสุ่มนี้ล่วงหน้าได้ แต่สามารถทราบถึงค่าที่เป็นไปได้และความเป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม ตัวแปรสุ่มแบ่งออกเป็นสองชนิดคือ ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random variables) คือตัวแปรสุ่มที่มีจำนวนของค่าที่เป็นไปได้จำนวนไม่จำกัดในช่วงของค่าที่เป็นไปได้นั้น และไม่สามารถที่จะระบุค่าที่แท้จริงได้ และตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random variables) คือตัวแปรสุ่มที่สามารถระบุค่าที่แท้จริงได้

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง แนวความคิดของตัวแปรสุ่ม และคุณลักษณะพื้นฐาน และคุณลักษณะเฉพาะตัวต่าง ๆ ซึ่งค่อนข้างมีความสำคัญ เนื่องจากตัวแปรสุ่มมีค่าการกระจายที่กระจายไม่แน่นอน และพบได้บ่อยในทางปฏิบัติ เช่นการตรวจหา (Detection) การประมาณค่า (Estimation) การสร้าง

กลับคืน (Restore) และการยกระดับ (Enhancement) สัญญาณที่ผิดเพี้ยนไป การศึกษาเรื่องตัวแปรสุ่ม เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับผู้ที่ศึกษาในเรื่องกระบวนการสุ่มในขั้นสูงต่อไป

3.2.1 คุณลักษณะของตัวแปรสุ่ม

ให้  $x(n)$  เป็นสัญญาณสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา แสดงดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 สัญญาณแบบสุ่มที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

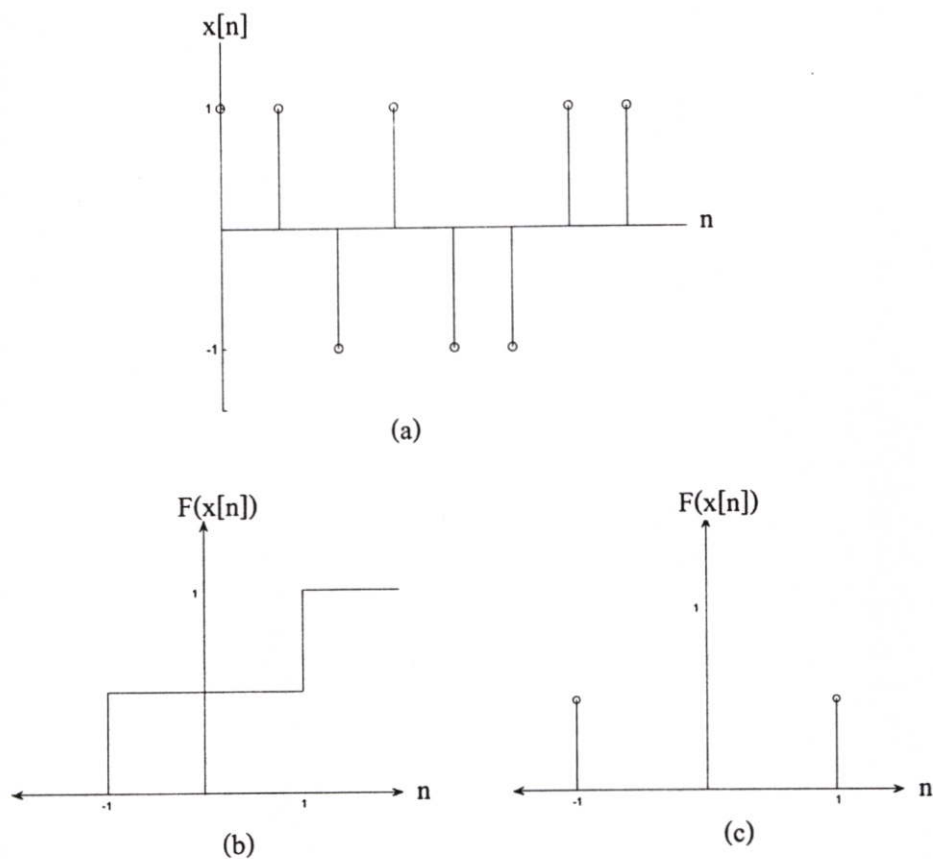
$x(n)$  แต่ละตัวจะเรียกว่าตัวแปรสุ่ม คุณลักษณะของตัวแปรสุ่มที่สำคัญคือ probability density function หรือ Pdf หรือ  $f(x(n))$  เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม หรือจะกล่าวได้ว่า Pdf ของตัวแปรสุ่มเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชันการแจกแจง หรือ Cdf (Cumulative distribution function) หรือ  $F(x(n))$  เมื่อ Cdf มีค่าดังสมการ

$$F(x(n)) = \Pr(x \leq x(n)) \tag{3.1}$$

และ Pdf กำหนดได้ดังสมการ

$$f(x(n)) = \frac{dF(x(n))}{dx(n)} \tag{3.2}$$

เช่นถ้าสัญญาณสุ่มเป็นสัญญาณแบบไบนารี ซึ่งจะมีค่าเป็น 1 และ -1 ดังแสดงในรูปที่ 3.3 (a) จะได้ Pdf ดังรูปที่ 3.3 (b) และ Cdf ดังรูปที่ 3.3 (c) เรียกลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนี้ว่า uniform distribution



รูปที่ 3.3 ตัวอย่างและคุณลักษณะของสัญญาณสุ่ม (a) สัญญาณสุ่มแบบไบนารี (b) Pdf และ (c) Cdf ของสัญญาณในรูป (a)

ลักษณะของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม มีหลายประเภท เช่น uniform distribution, binomial distribution, และ Poisson distribution เป็นต้น แต่การแจกแจงที่สำคัญคือการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) หรือการแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian probability distribution function) ลักษณะของ Pdf จะเป็นรูประฆังคว่ำ (Bell curve) และมีสมการดังนี้

$$f(x(n)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x(n)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.3)$$

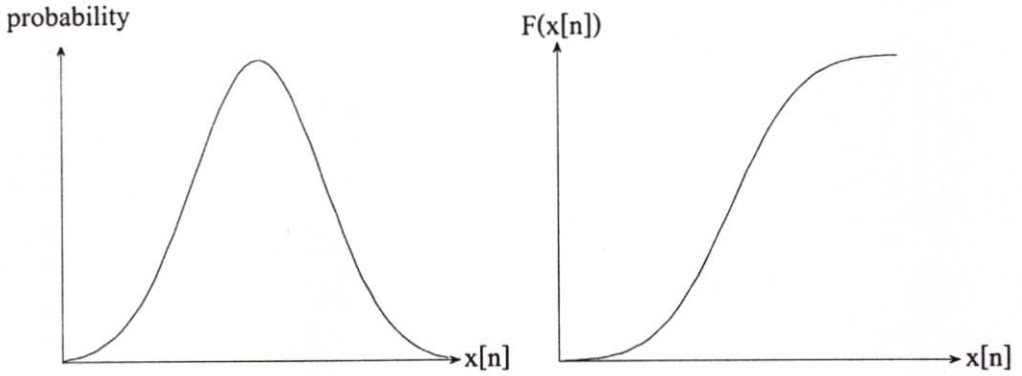
โดยที่  $\mu$  = Mean

$\sigma$  = Standard deviation

$\sigma^2$  = Variance

และสมการของ Cdf แสดงได้ดังสมการที่ 3.4

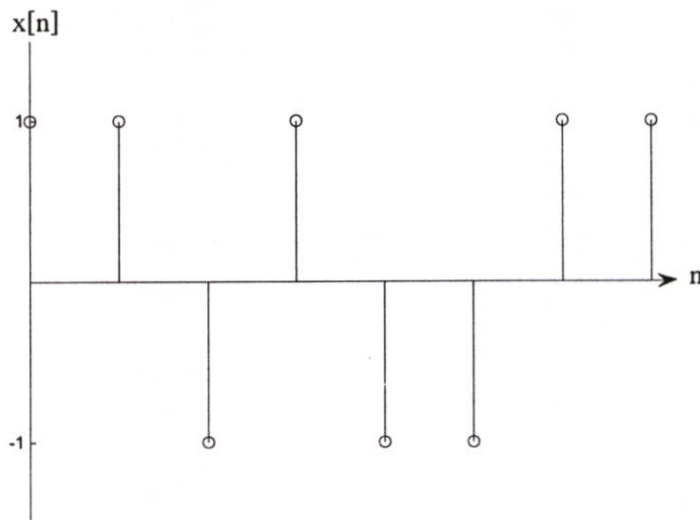
$$F(x(n)) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \frac{x(n) - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \quad (3.4)$$



รูปที่ 3.4 Pdf และ Cdf ของตัวแปรสุ่มที่เป็นการแจกแจงแบบเกาส์

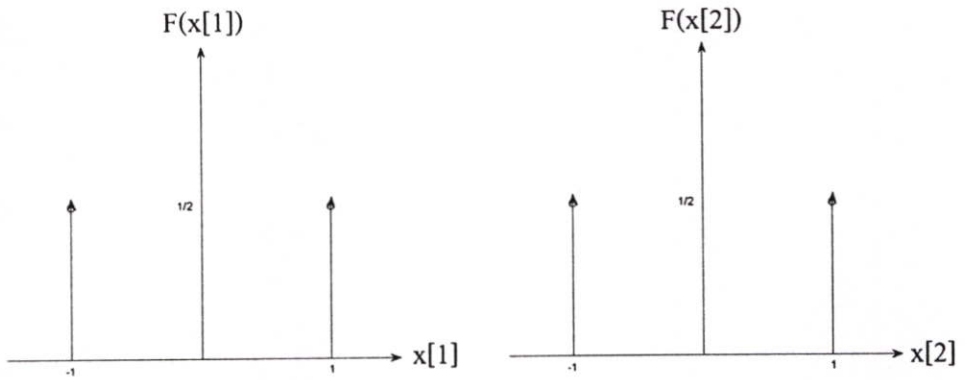
โดยทั่วไป ไม่ได้คาดหวังว่าค่า Pdf ของ  $x(1)$  และ  $x(2)$  จะเหมือนกัน ดังนั้นจึงมีวิธีการหาความสัมพันธ์ของ  $x(1)$  และ  $x(2)$  ในรูปของ Pdf ร่วม หรือ Joint Pdf

ให้  $x(1)$  และ  $x(2)$  เป็นสัญญาณสุ่มแบบไบนารีแสดงดังรูปที่ 3.5



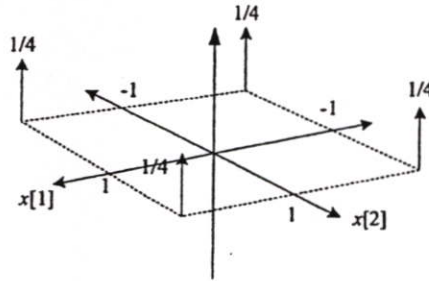
รูปที่ 3.5 สัญญาณสุ่มแบบไบนารี

จะได้ Pdf สำหรับ  $x(1)$  และ  $x(2)$  ดังรูปที่ 3.6 (a) และ 3.6 (b) ตามลำดับ



รูปที่ 3.6 คุณลักษณะของสัญญาณสุ่ม (a) Pdf ของ  $x(1)$  และ (b)  $x(2)$

จะได้ Joint Pdf เป็น  $f_x(x(1), x(2))$  แสดงดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 Joint Pdf ของ  $x(1)$  และ  $x(2)$

หรือเขียนความสัมพันธ์นี้ในรูปสมการ Joint Cdf ดังนี้คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x(1), x(2)) dx(1) dx(2) = 1 \quad (3.5)$$

$$= F(x(1), x(2))$$

และจะได้ Joint Pdf ดังสมการ

$$f(x(1), x(2)) = \frac{\partial^2 F_x(x(1), x(2))}{\partial x(1) \partial x(2)} \quad (3.6)$$

ดังนั้นทำให้สามารถคิดต่อไปได้ว่า หากเป็นการกระจายแบบตัวแปรสุ่มหลายตัว ก็จะได้เป็น *k-th order multivariate distribution* เป็น

$$F_x(x(1), x(2), \dots, x(n)) = \Pr(X(1) \leq x(1), \dots, X(n) \leq x(n)) \quad (3.7)$$

และได้ Pdf เป็น

$$f_x(x(1), \dots, x(n)) = \frac{\partial^n F_x(x(1), \dots, x(n))}{\partial x(1) \dots \partial x(n)} \quad (3.8)$$

### 3.2.2 ค่าเฉลี่ยทั้งชุดเชิงสถิติ

ลักษณะทางสถิติที่สมบูรณ์ของตัวแปรสุ่มต้องการทราบค่าความเป็นได้ของข้อมูลทุกตัวที่มีในชุดข้อมูล แต่ในการประยุกต์ใช้ ลักษณะดังกล่าวอาจไม่จำเป็นถ้าทราบคุณลักษณะเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มนั้น ๆ ดังนั้นจึงต้องทราบค่าคาดหวัง (Expected value) ของตัวแปรสุ่ม และฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม

เมื่อ  $x$  คือตัวแปรสุ่มที่มีขนาดของข้อมูล  $N$  ครั้ง ค่ากลาง (Mean) หรือค่าคาดหวัง (Expected value) ของตัวแปรสุ่มนี้แบบไม่ต่อเนื่อง  $x$  แสดงได้ดังนี้

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (3.9)$$

โดยที่  $f(x)$  เป็น Pdf ค่ากลาง มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า first moment และจะสามารถเขียนค่ากลางในรูปของ relative frequency ได้เป็น

$$\mu(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n) \right\} \quad (3.10)$$

ซึ่งจะใช้แทนค่าเฉลี่ย ensemble ได้ แต่โดยทั่วไป หาก Pdf ของ  $x(n)$  ไม่เท่ากับ Pdf ของ  $x(m)$  จะได้ว่า

$$\mu(n) \neq \mu(m) \quad (3.11)$$

ตัวกระทำ expectation ที่น่าสนใจ ซึ่งพอจะสรุปได้ดังนี้คือ

i) ความเป็นเชิงเส้น

$$E\{ax(n) + by(m)\} = aE\{x(n)\} + bE\{y(m)\} \quad (3.12)$$

ii) ความไม่เป็นอิสระต่อกัน

$$E\{x(n)y(m)\} \neq E\{x(n)\} \cdot E\{y(m)\} \quad (3.13)$$

คุณสมบัติข้อนี้จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ  $x(n)$  และ  $y(m)$  นั้นเป็นอิสระต่อกัน

iii) หาก  $y(m) = g(x(n))$  และ Pdf ของ  $x(n)$  เป็น  $f(x(n))$  แล้วจะสามารถหา  $E\{y(n)\}$  โดยที่ Pdf ที่ต้องการทราบมีเพียง  $f(x(n))$  เท่านั้น จะได้ว่า

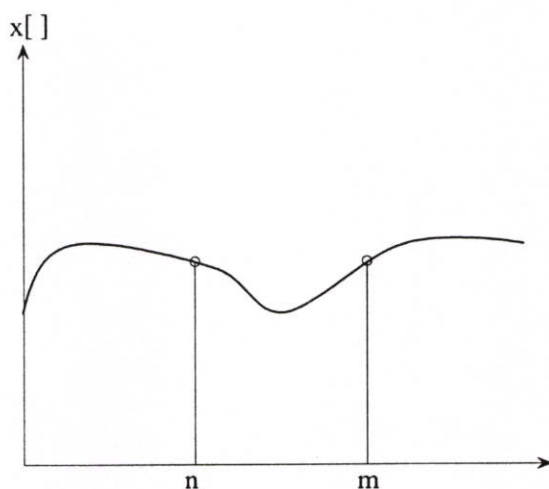
$$E\{y(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x(n)) \cdot f(x(n)) dx(n) \quad (3.14)$$

ค่าเฉลี่ยทางสถิติที่เกี่ยวข้องกัน คือค่าความแปรปรวน (Variance) ซึ่งคือค่ากำลังสองของตัวแปรสุ่ม  $y = x - E(x)$  แทนด้วย  $Var(x)$  หรือ  $\sigma_x^2$

$$\sigma_x^2 = E\{[x - E\{x\}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha - E\{x\}]^2 f_x(\alpha) d\alpha \quad (3.15)$$

รากที่สองของค่าความแปรปรวนเรียกว่า ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)

## 3.2.3 ค่าสหสัมพันธ์(Correlation)



รูปที่ 3.8 ตัวแปรสุ่มสองตัว

correlation เป็นตัวบอกถึงความเหมือนของตัวแปรสุ่ม 2 ตัวดังตัวอย่างในรูปที่ 3.8 ตัวแปรสุ่มมีสองตัวคือ  $x[n]$  และ  $x[m]$  ความเกี่ยวเนื่องกันของตัวแปรทั้งสองจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$r(m, n) = E \{ x[m] \cdot x[n] \} \quad (3.16)$$

หรือ

$$r(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x[m] x[n] f(x[m], x[n]) dx[m] dx[n] \quad (3.17)$$

และในรูปของ relative frequency จะได้ว่า

$$r(m, n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i[m], x_i[n] \right\} \quad (3.18)$$

กรณีพิเศษเมื่อ  $n=m$  จะได้

$$r(m, n) = E \{ x^2[n] \} \quad (3.19)$$

ซึ่งเป็นค่ากำลังงานหรือพลังงานเฉลี่ยของสัญญาณใด ๆ ในสมการที่ (3.16)-(3.19) โดยทั่วไป จะเรียกว่า auto-correlation

### 3.2.4 ค่าความแปรปรวนร่วม (Covariance)

ค่า covariance กำหนดได้ตามสมการ

$$c(m, n) = E\{(x[m] - \mu[m])(x[n] - \mu[n])\} \quad (3.20)$$

ถ้า  $\mu[n] = \mu[m] = 0$  จะได้ว่า covariance จะมีค่ากับ autocorrelation จากสมการที่ (3.20) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c(m, n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x[m] - \mu[m])(x[n] - \mu[n]) f(x[m], x[n]) dx[m] dx[n] \\ &= E\{x[m]x[n]\} - \mu[m]\mu[n] \end{aligned} \quad (3.21)$$

จากสมการที่ (3.20) ถ้าหากว่า  $m=n$  แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} c(n, n) &= E\{(x[n] - \mu[n])^2\} \\ &= \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

จากสมการที่ (3.22) เรียกว่าค่าความแปรปรวนหรือ variance นั้นเอง และจากสมการที่ (3.22) จะสามารถหาค่า variance ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \int (x[n] - \mu[n])^2 f[x] dx \\ &= E\{x^2[n]\} - (E\{x[n]\})^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ในกรณีของกระบวนการสุ่มแบบ Gaussian จะได้ว่า

$$\sigma_n^2 = 1 \quad (3.24)$$

### 3.2.5 ความเป็นอิสระ (Independence)

จะกล่าวว่า  $\{x_1[n]\}$  และ  $\{x_2[n]\}$  เป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$f(x_1[n]x_2[n]) = f(x_1[n]) \cdot f(x_2[n]) \quad (3.25)$$

และ

$$E\{x_1[n], x_2[n]\} = E\{x_1[n]\} \cdot E\{x_2[n]\} \quad (3.26)$$

หรือแม้กระทั่ง  $x_1[n]$  และ  $x_2[n]$  จะเป็นสัญญาณ  $x[n]$  เดียวกันก็ได้ โดยที่  $x_1[n] = x_2[m]$  และ  $x_2[n] = x[m+n]$  จากสมการที่ (3.21) หากกล่าวว่า  $x[m]$  และ  $x[n]$  เป็นอิสระต่อกันแล้ว จะได้ว่า

$$c(m, n) = E\{x[m]x[n]\} - \mu[n]\mu[m] = 0 \quad (3.27)$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ตัวแปรสุ่มทั้งสองไม่เกี่ยวข้องกัน (Uncorrelated)

### 3.2.6 Orthogonality

หาก  $x[m]$  และ  $x[n]$  นั้น uncorrelated กัน และ  $\mu = 0$  จะกล่าวว่ามัน orthogonal กัน สัญลักษณ์ที่ใช้คือ  $\perp$  หรือเขียนในเทอมของ  $E\{\cdot\}$  จะได้ว่า

$$E\{x[m] \cdot x[n]\} = 0 \quad (3.28)$$

### 3.2.7 Stationary

ความหมายที่แท้จริงของ stationary คือ ค่าของ  $f_x(x[n])$  จะต้องมีค่าเท่ากัน สำหรับทุก ๆ ค่าของ  $n$  หรือจะมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Strictly Stationary จะสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$f(x[n_1 + n_0], x[n_2 + n_0]) = f(x[n_1], \dots, x[n_k]) \quad (3.29)$$

โดยทั่วไปในทางปฏิบัติจะไม่ค่อยมี Strictly Stationary ดังนั้นจึงลดข้อกำหนดลงเหลือเพียงการดูที่ mean และ variance ซึ่งเป็น 1<sup>st</sup> และ 2<sup>nd</sup> moment เท่านั้น และเรียกชื่อใหม่ว่า Wide-sense stationary หรือ WSS สำหรับ  $x[n]$  ซึ่งเป็น WSS จะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้คือ

i)

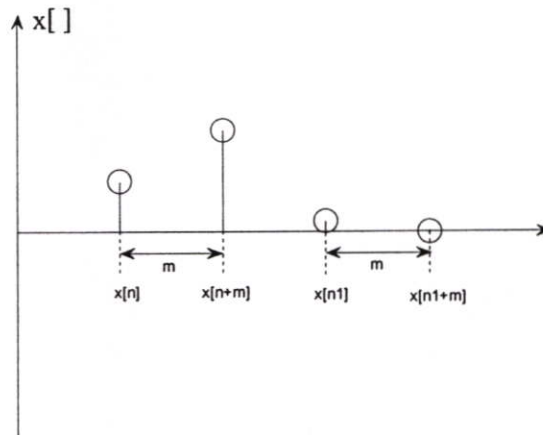
$$E\{x[m]\} = E\{x[n]\} = \mu \quad (3.30)$$

เช่น  $x[n]$  เป็น Gaussian จะได้ว่า  $\mu = 0$

ii)

$$r(m) = E\{x[n] \cdot x[n+m]\} \quad (3.31)$$

หมายความว่าค่า auto-correlation จะขึ้นกับค่าของ  $m$  เท่านั้น เช่น ในรูปที่ 3.9 จะได้ว่า autocorrelation ของ  $x[n]$  กับ  $x[n+m]$  มีค่าเท่ากับ auto-correlation ของ  $x[n_1]$  กับ  $x[n_1+m]$



รูปที่ 3.9 อธิบายความหมายของ auto-correlation

### 3.2.8 สหสัมพันธ์ไขว้ (Cross-correlation)

cross-correlation จะมีนิยามตามสมการคือ

$$r_{xy}(m) = E\{x[n]y[n+m]\} = r_{yx}[-m] \quad (3.32)$$

เนื่องจาก correlation และ covariance จะอธิบายความสัมพันธ์กันระหว่างสัญญาณสองสัญญาณ โดยที่ถ้าสัญญาณทั้งสองเป็นสัญญาณเดียวกันแล้วจะได้ auto-correlation และ auto-

covariance และถ้าสัญญาณทั้งสองมาจากคนละแห่งแล้วจะได้ cross-correlation และ cross-covariance ถ้าสัญญาณแบบสุ่มที่มีคุณสมบัติเป็น stationary สองสัญญาณคือ  $x[n]$  และ  $y[n]$  จะสามารถค่าหาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณ ซึ่งสามารถลำดับได้ดังสมการต่อไปนี้

$$r_{xx}(m) = E\{x[n]x[n+m]\} \quad (3.33)$$

$$c_{xx}(m) = E\{(x[n] - \mu_x)(x[n+m] - \mu_x)\} \quad (3.34)$$

$$r_{xy}(m) = E\{x[n]y[n+m]\} \quad (3.35)$$

$$c_{xy}(m) = E\{(x[n] - \mu_x)(y[n+m] - \mu_y)\} \quad (3.36)$$

เมื่อ  $\mu_x$  และ  $\mu_y$  คือค่า mean ของสัญญาณ  $x[n]$  และ  $y[n]$  ตามลำดับ ซึ่งมีคุณสมบัติที่น่าสนใจดังนี้คือ

i)

$$c_{xx}(m) = r_{xx}(m) - \mu_x^2 \quad (3.37)$$

$$c_{xy}(m) = r_{xy}(m) - \mu_x\mu_y \quad (3.38)$$

จากสมการที่ (3.37) และสมการที่ (3.38) ถ้า  $\mu_x = 0$  จะทำให้ correlation และ covariance มีค่าเท่ากัน

ii)

$$r_{xx}(0) = E\{x^2[n]\} \text{ (ค่ากำลังสองเฉลี่ย)} \quad (3.39)$$

$$c_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad (3.40)$$

iii)

$$r_{xx}(m) = r_{xx}(-m) \quad (3.41)$$

$$c_{xx}(m) = c_{xx}(-m) \quad (3.42)$$

$$r_{xy}(m) = r_{xy}(-m) \quad (3.43)$$

$$c_{xy}(m) = c_{xy}(-m) \quad (3.44)$$

iv) สำหรับกระบวนการสุ่มใด ๆ เมื่อ  $m \rightarrow \infty$  แล้วจะทำให้ตัวแปรสุ่มมีการ uncorrelated กันน้อยมาก ดังนั้นจะได้

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{xx}(m) = (E\{x[n]\})^2 = \mu_x^2 \quad (3.45)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_{xx}(m) = 0 \quad (3.46)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{xy}(m) = \mu_x \mu_y \quad (3.47)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_{xy}(m) = 0 \quad (3.48)$$

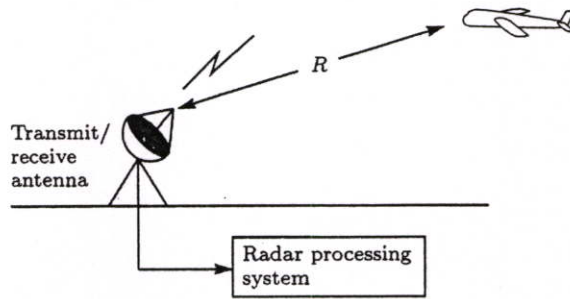
### 3.3 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึง ทฤษฎีพื้นฐานของกระบวนการสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา โดยเริ่มจากพื้นฐานของตัวแปรสุ่ม คุณสมบัติที่สำคัญต่อกระบวนการประมวลผลสัญญาณ ซึ่งการอธิบายคุณสมบัติของตัวแปรสุ่มได้อย่างสมบูรณ์นั้นจำเป็นต้องทราบถึงคุณลักษณะทางสถิติ แต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้ค่า mean, variance และ auto-correlation โดยการใช้ค่าเฉลี่ยแบบ ensemble แทน density function ได้ จากนั้นได้กล่าวถึง กระบวนการสุ่มที่มีคุณสมบัติเป็น stationary และแบบ wide-sense stationary (WSS) ซึ่งพบว่าค่า mean ของกระบวนการสุ่มนี้จะมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา นอกจากนี้ค่า auto-correlation  $E\{x[n]x[n+m]\}$  จะขึ้นกับค่าความแตกต่างทางเวลา  $m$  เท่านั้น ถึงแม้ว่าในทางปฏิบัติ เงื่อนไขที่เป็น WSS ยากที่จะเกิดขึ้นได้ แต่ถ้าพิจารณาในช่วงเวลาสั้น ๆ ก็อาจจะสมมติได้ว่า กระบวนการสุ่มนั้นมีคุณสมบัติเป็น WSS ได้ ในบางปัญหามีความจำเป็นจะต้องทราบค่าทางสถิติอันดับหนึ่ง (mean, variance) ค่าทางสถิติอันดับสอง (correlation, covariance) ของกระบวนการสุ่ม ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะทราบล่วงหน้าได้ ดังนั้น จำเป็นจะต้องใช้วิธีการประมาณค่าทั้งสอง ซึ่งมีด้วยกันสองแบบคือ ค่าเฉลี่ยแบบ ensemble และค่าเฉลี่ยทางเวลา (time average) ในกรณีที่ค่าเฉลี่ยทั้งสองเท่ากัน จะเรียกกระบวนการสุ่มนั้นว่ามีคุณสมบัติเป็นเออร์กอดิก (Ergodic)

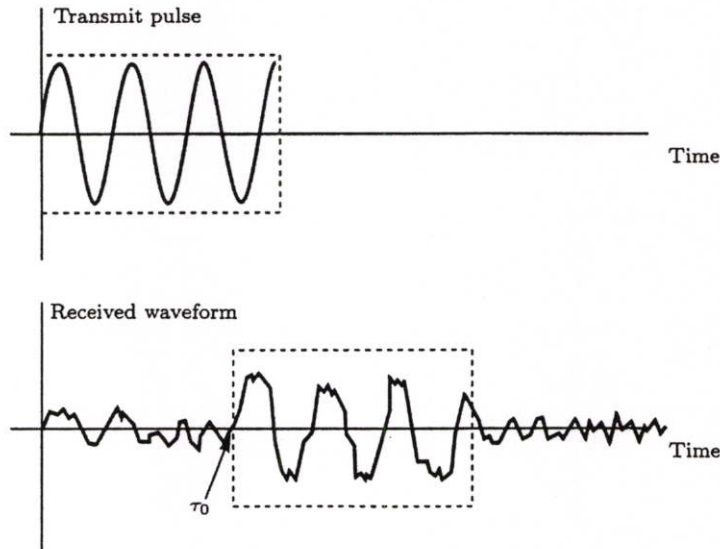
## บทที่ 4

# ทฤษฎีการประมาณค่า

ทฤษฎีการประมาณค่า (Estimation theory) จะพบในระบบการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลหลากหลายระบบ [18] เช่นระบบเรดาร์ (Radar) ระบบโซนาร์ (Sonar) ระบบประมวลผลสัญญาณเสียง (Speech processing) การวิเคราะห์สัญญาณภาพ (Image analysis) การแพทย์ (Biomedicine) ระบบสื่อสาร (Communication) และระบบควบคุม (Control) เป็นต้น ซึ่งระบบเหล่านี้จะทำการประมาณตัวแปรต่างๆ ในระบบออกมา ยกตัวอย่าง เช่น ระบบเรดาร์ ซึ่งใช้สำหรับหาดำแหน่งของเครื่องบินในสนามบิน ดังแสดงในรูปที่ 4.1



(a) ระบบเรดาร์



(b) รูปคลื่นที่ส่งไป และรูปคลื่นที่รับได้

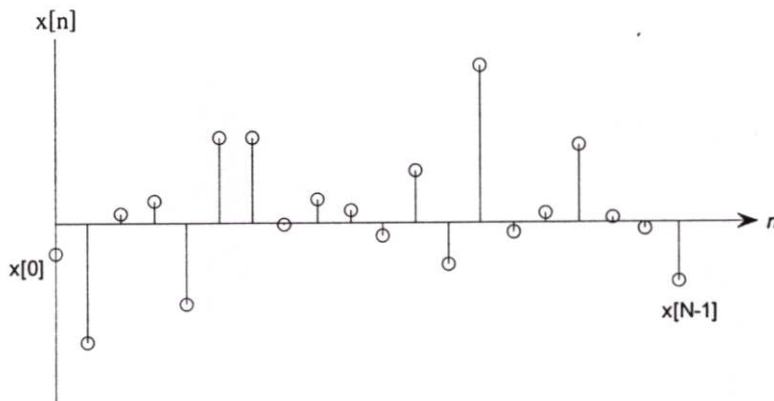
รูปที่ 4.1 ระบบเรดาร์

จากรูปที่ 4.1 การหาระยะ  $R$  จะเริ่มจากการส่งพัลส์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าออกไป จากนั้นเครื่องบินจะสะท้อนคลื่นนี้กลับมา โดยจะถูกหน่วงเวลาไป  $\tau_0$  วินาที ระยะ  $R$  จะสามารถหาได้จากสมการ  $\tau_0 = 2R/c$  เมื่อ  $c$  คือความเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในอากาศ นอกจากนั้นแล้ว คลื่นสัญญาณที่รับได้จะเกิดการสูญเสียจากการเดินทาง และยังเกิดการรบกวนจากสัญญาณรบกวน และยังมีเวลาหน่วงเนื่องจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ในเครื่องรับ ดังนั้นการคำนวณระยะทางที่แน่นอนนั้น ต้องใช้ตัวแปรอื่น ๆ ที่มีผลต่อเวลาอีกด้วย

ในบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีการประมาณค่าตัวแปรในระบบต่าง ๆ ซึ่งเป็นพื้นฐานของการประมวลผลสัญญาณแบบอะแดปทีฟ

#### 4.1 หลักการประมาณค่า

สมมติว่ามีสัญญาณ  $x(n)$  ที่ได้จากการวัด  $N$  ค่าดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 สัญญาณที่ได้จากการวัด

สัญญาณที่วัดได้นี้ อาจมีพารามิเตอร์บางตัวที่ต้องการทราบ เช่น ค่ากลาง (Mean value) ดังนั้นในกรณีนี้ค่ากลางจึงเป็นค่ากลาง (Mean) ที่ต้องการประมาณ ถ้าแทนตัวแปรที่ต้องการประมาณ (Estimate) ด้วย  $\theta$  ส่วนฟังก์ชันที่จะใช้หาค่าการประมาณของ  $\theta$  เรียกว่า estimation หรือใช้สัญลักษณ์  $g(\cdot)$  และสำหรับค่าประมาณสัญญาณ  $x(n)$  จะได้ว่า

$$\hat{\theta} = g(x(0), x(1), \dots, x(N-1)) \quad (4.1)$$

$\hat{\theta}$  คือ ค่าประมาณของ  $\theta$  ซึ่งเป็นค่าเฉพาะของแต่ละเซตของ  $x(n)$  เพื่อให้เกิดความกระจ่างในการแยกความหมายของค่า estimate  $\hat{\theta}$  และ estimator  $g(\cdot)$  จะแสดงดังตัวอย่างข้างล่าง

ถ้าตัวแปรที่ต้องการทราบคือค่ากลาง ดังนั้นค่าประมาณของค่ากลางก็คือ  $\hat{\mu}$  กำหนดได้ดังนี้คือ

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (4.2)$$

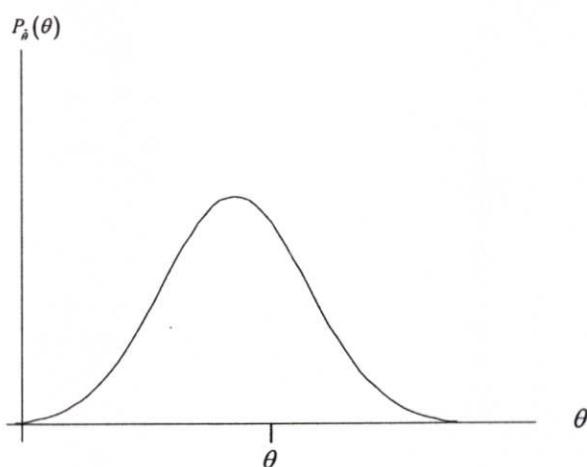
ซึ่งก็หมายความว่า estimator  $g(\cdot)$  ก็คือการรวม (Sum) ทุก ๆ ค่าของสัญญาณ  $x(n)$  และหารด้วย  $N$  นั่นคือ

$$g(\cdot) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\cdot) \quad (4.3)$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า  $\hat{\mu}$  ค่าประมาณของ  $\mu$  เป็นค่าที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน  $g(\cdot)$  ซึ่งเป็นตัวประมาณฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ กระทบกับเซตของการวัดหนึ่ง ๆ

ค่า  $x(n)$  ที่วัดได้นั้นเป็นสัญญาณสุ่ม ดังนั้นค่าประมาณที่วัดได้จึงเป็นค่าสุ่มด้วย หากให้  $x(n)$  มีการแจกแจงแบบเกาส์ แล้ว Pdf ของ  $\hat{\theta}$  ก็จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบเกาส์เช่นกัน

สมมติว่า บังเอิญทราบค่าในเซตจากค่าที่วัดได้คือ  $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$  ค่าที่ได้ี้จะมีค่ากลางเป็น  $\theta$  ซึ่งเป็นค่าจริงของการวัดนี้ ในการประมาณค่าก็จะมี ความหวังว่า จะได้ค่าประมาณเฉลี่ย หรือ  $E\{\hat{\theta}\}$  เท่ากับค่า  $\theta$  ด้วย ดังแสดงตามรูปที่ 4.3 และหาก  $E\{\hat{\theta}\} = \theta$  จะเรียกตัว estimator นี้ว่า unbiased estimator



รูปที่ 4.3 Pdf ของตัวแปร

นอกจากนี้แล้วค่า  $P_{\hat{\theta}}(\theta)$  ควรจะมีการกระจายที่น้อย นั่นคือค่า variance ของค่าที่ประมาณได้จะต้องน้อยมาก ๆ ดังนั้นสรุปได้ว่า estimator ที่ดีก็ควรจะ

- i) เป็น unbiased
- ii) ความแปรปรวน (variance) ต่ำ

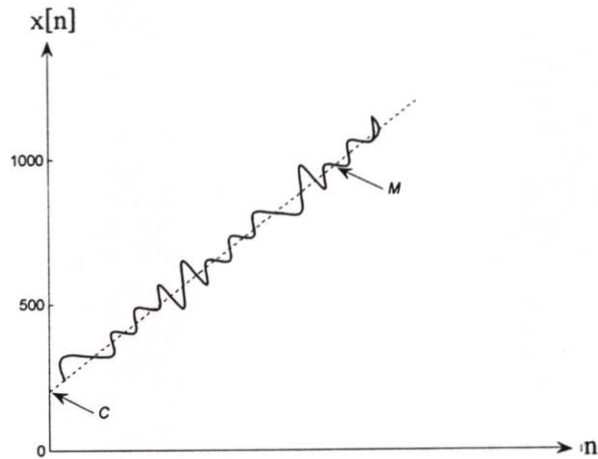
## 4.2 ชนิดของการประมาณ

การประมาณค่าจะสามารถแบ่งออกได้เป็นสองแบบคือ

i) แบบ Classical estimation เป็นการประมาณค่าตัวแปรสุ่มแบบ deterministic

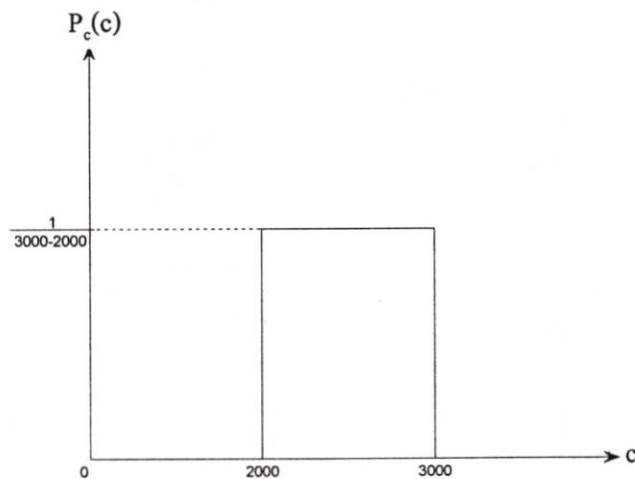
ii) แบบ Bayesian estimation เป็นการประมาณค่าตัวแปรสุ่ม พิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

มีความต้องการประมาณลักษณะของ index ก็คือต้องการประมาณค่า  $M$  และ  $C$  ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 ค่า  $C$  และ  $M$  ที่ต้องการประมาณ

ในกรณีของ Bayesian estimation นั้น ทั้ง  $M$  และ  $C$  เป็น random ซึ่งหากเขียน Pdf ของ  $C$  หรือ  $P_c(C)$  จะได้ดังรูปที่ 4.5 ส่วนของ  $P_M(M)$  ก็จะได้เช่นเดียวกัน



รูปที่ 4.5 Pdf ของ  $C$

ดังนั้น สำหรับ Bayesian estimation จะได้ joint Pdf สำหรับ  $\underline{x}$  และ  $\theta$  เป็น

$$P(\underline{x}, \theta) = P(x|\theta) \cdot P(\theta) \quad (4.4)$$

โดยที่  $\theta$  เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า สังเกตเครื่องหมาย “;” ระหว่าง  $\underline{x}$  และ  $\theta$  ใน  $P(\underline{x}, \theta)$  จะแตกต่างจาก  $P(\underline{x}; \theta)$  เพราะในกรณี Bayesian ทั้ง  $\underline{x}$  และ  $\theta$  ต่างก็เป็น random ในกรณีการหา  $P(\underline{x}, C)$  จะได้ว่า

$$P(\underline{x}, C) = P(x|C) \cdot P_C(C) \quad (4.5)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P(\underline{x}, M) = P(x|M) \cdot P_M(M) \quad (4.6)$$

### 4.3 คุณภาพของตัวประมาณ

เมื่อได้ตัวประมาณมาแล้ว สิ่งที่ต้องการต่อไปคือ performance ของมัน ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ข้อมูลข่าวสารทางสถิติของค่าประมาณคือ bias และ variance โดยตัวประมาณค่าที่ดีจะต้องเป็น unbiased และมี variance น้อย ๆ

สมมติว่ามีข้อมูล  $x[n]$  เป็น

$$x[n] = A + w[n] \quad (4.7)$$

เมื่อ

$$w[n] \approx N(0, \sigma_w^2)$$

$$x[n] = \{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$$

หากให้ตัวประมาณเป็น mean ก็จะได้ว่า

$$A = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (4.8)$$

ซึ่งค่า mean ของ  $x[n]$  คือ  $E\{x[n]\}$  หรือ

$$\begin{aligned} E\{x[n]\} &= E\{A\} + E\{w[n]\} \\ &= E\{A\} = A \end{aligned} \quad (4.9)$$

และหากมีตัวประมาณ  $\hat{A}'$  อีกหนึ่งตัว โดยที่  $\hat{A}' = x[0]$  ซึ่งก็คือ การเลือกเฉพาะ  $x[0]$  เป็นตัวประมาณ ทั้งการวัด (Measurement) จะได้ว่า ค่า mean ของ  $x[0]$  คือ

$$E\{x[0]\} = A \quad (4.10)$$

นั่นคือ

$$E\{\hat{A}'\} = E\{A\} = A \quad (4.11)$$

ซึ่งจะพบว่า ตัวประมาณค่าทั้งสองให้ค่า mean ที่เท่ากัน แต่หากพิจารณาค่า variance ในกรณี  $\hat{A}$  ค่า  $\text{var}\{\hat{A}\}$  ก็คือ

$$\begin{aligned} E\{\hat{A}^2\} &= \text{var}\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right\} \\ &= E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right)\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right)\right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

หาก  $w[n]$  เป็นอิสระทางสถิติ (Independent, identically, distributed random variables: IID) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E\{\hat{A}^2\} &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} E\{x^2[n]\} \\ &= \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned} \quad (4.13)$$

ส่วนกรณีของ  $\hat{A}'$  ค่า  $\text{var}\{\hat{A}'\}$  คือ

$$\begin{aligned} E\{\hat{A}'^2\} &= \text{var}\{x[0]\} \\ &= E\{x^2[0]\} = \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

นั่นคือค่า  $\text{var}\{\hat{A}\}$  มีค่าน้อยกว่า  $\text{var}\{\hat{A}'\}$  แต่อย่างไรก็ตาม  $\hat{A}$  ก็จะมี ความซับซ้อนในการคำนวณมากกว่า  $\hat{A}'$  เช่นกัน

ประเด็นสำคัญของการทำการประมาณคือ

- i) เนื่องจากผลที่ได้มาจากการใช้ตัวประมาณกับเซตของข้อมูลที่วัดได้นั้น เป็น random ดังนั้นการทดสอบประสิทธิภาพก็ขึ้นกับรูปแบบ random ด้วย เช่น อาจดูได้จาก Pdf เป็นต้น
- ii) ประสิทธิภาพของการประมาณได้มาจากการคำนวณโดยตรง ไม่สามารถใช้การ simulation ได้
- iii) ประสิทธิภาพและความซับซ้อนในการคำนวณเป็น trade-off ซึ่งกันและกัน ดังนั้นในบางครั้ง ตัวประมาณค่าที่ใช้ก็อาจจะไม่ใช่ตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด (Optimum estimator)

สรุปได้ว่า การจะดูว่าตัวประมาณค่าตัวใดมีประสิทธิภาพที่ดีนั้น จะดูได้จากข้อมูลทางสถิติ ก็คือ bias หรือ variance ถ้าหากตัวประมาณนั้นเป็นแบบ unbiased อยู่แล้ว ก็จะหันมาพิจารณาที่ variance อย่างเดียว

เกณฑ์ในการพิจารณา variance ของตัวประมาณนั้นว่าน้อยที่สุด (Minimum variance) ว่าเป็นเท่าใดนั้น จะใช้ Cramer-Rao Bound (CRB) เป็นตัวเปรียบเทียบ นั่นหมายความว่า หากหา minimum variance ของตัวประมาณออกมาได้แล้วเท่ากับ CRB ก็จะกล่าวว่า ตัวประมาณตัวนั้นเป็น Minimum variance unbiased estimator (MVUE)

จากตัวอย่างในเรื่องของการหา variance ของตัวประมาณ ของค่า mean จากสัญญาณ  $x[n] = A + w[n]$  โดยที่  $w[n] \approx N(0, \sigma^2)$  พบว่า มีความจำเป็นจะต้องทราบ Pdf หรือ joint Pdf,  $P(\underline{x}; \theta)$  ก่อน นั่นหมายความว่า การที่จะได้ MVUE จะต้องทราบ Pdf

ในทางปฏิบัติ บางครั้งไม่ทราบ Pdf แต่ทราบ mean และ auto-correlation function เท่านั้น เมื่อเป็นอย่างนี้จะต้องใช้ตัวประมาณอีกแบบ ที่เรียกว่า Best linear unbiased estimator (BLUE) หรือถ้าหากไม่ทราบข้อมูลทางสถิติใด ๆ เลย ก็ยังคงจะสามารถหาตัวประมาณได้ด้วย Least square estimator (LSE)

## 4.4 ชนิดของตัวประมาณ

ชนิดของตัวประมาณสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทหลัก คือ

### 4.4.1 Block-based estimator

หมายความว่า จะต้องมึข้อมูลทั้งหมดก่อน จึงจะทำการประมาณ เช่น สำหรับ sample mean estimator นั่นคือ

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (4.15)$$

### 4.4.2 Sequential estimator

เป็นการประมาณ โดยอาศัยข้อมูลเก่า หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นการประมาณที่เวลา  $N$  เป็นฟังก์ชันของข้อมูลก่อนหน้า  $N$  นั่นคือ

$$\hat{\mu}(N) = f(\hat{\mu}(N-1)) \quad (4.16)$$

เช่น สำหรับ sample mean ดังตัวอย่างที่แล้ว หากตัวประมาณเป็นแบบ sequential และจะพิจารณา  $\hat{\mu}(N)$  จะได้

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(N) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x[n] \\ &= \frac{1}{N+1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x[n] + x[N] \right) \end{aligned}$$

สังเกตว่า  $\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$  นั่นคือ  $\hat{\mu}(N-1)$  ดังนั้น หากแยกพจน์ทั้งสองออกจากกันจะได้

$$= \frac{N}{N+1} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right) + \frac{x[N]}{N+1}$$

ทราบค่า  $\frac{N}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$  ดังนั้นจะได้ว่า

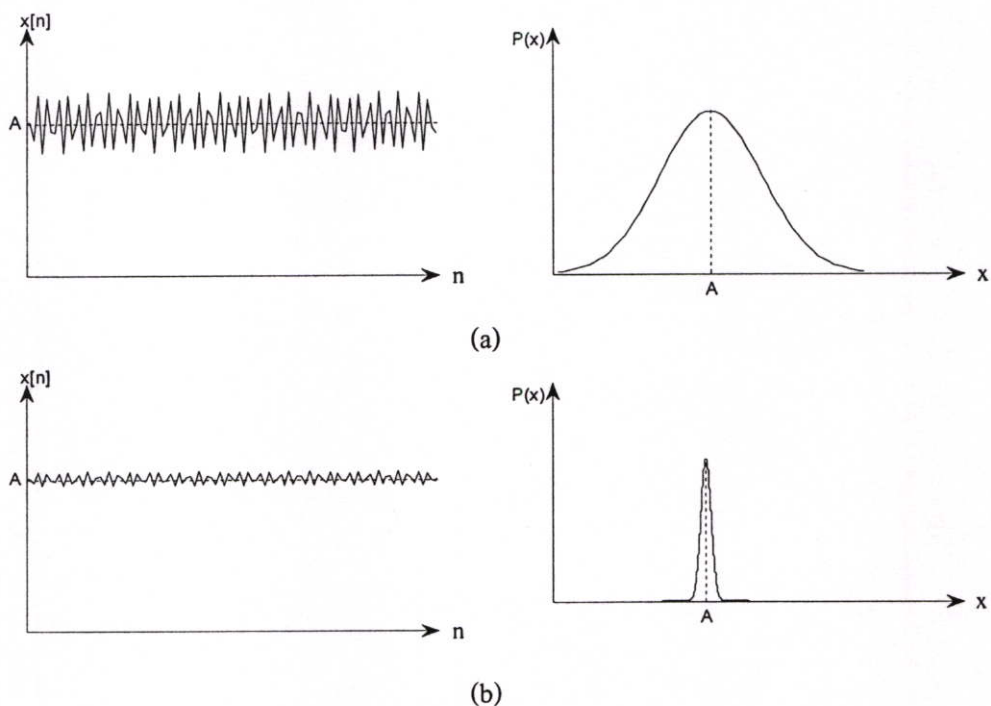
$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) \hat{\mu}(N-1) + \frac{1}{N+1} x[N] \\
 &= \hat{\mu}(N-1) + \frac{1}{N+1} (x[N] - \hat{\mu}(N-1)) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

จะสังเกตเห็นว่าพจน์สุดท้ายขวามือคือ  $(x[N] - \hat{\mu}(N-1))$  ในสมการที่ (4.17) นั้น เป็นความแตกต่างของ  $x[N]$  ซึ่งเป็นค่าใหม่กับ  $\hat{\mu}(N-1)$  ซึ่งเป็นค่า mean ของเวลาก่อนหน้า ส่วน  $\frac{1}{N+1}$  เป็น gain factor สำหรับความแตกต่างนี้ หากเขียนสมการข้างบนในรูปแบบทั่วไปไปได้

$$New\ value = Old\ value + gain[f(error)] \quad (4.18)$$

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นว่า ตัวประมาณค่านั้นมีหลายแบบ การจะเลือกใช้แบบในนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะงานและข้อมูลทางสถิติ เนื่องจากตัวประมาณค่านั้นมีหลายแบบ และแต่ละแบบก็จะมี การวิเคราะห์ที่ซับซ้อน ซึ่งสามารถศึกษารายละเอียดได้จากเอกสารอ้างอิง [18]

#### 4.5 Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) [18]

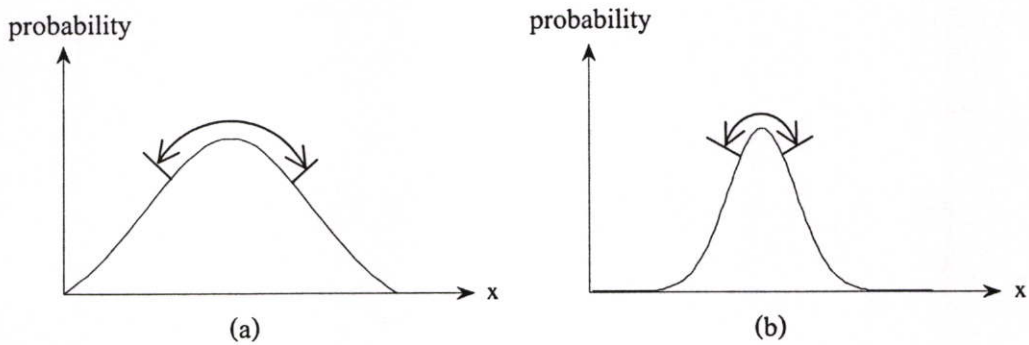


รูปที่ 4.6 สัญญาณรบกวนและ Pdf ของมัน

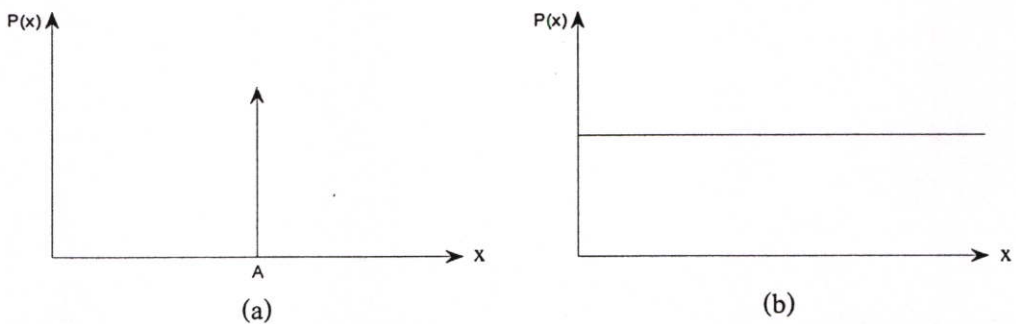
เคอร์เวเจอร์-เรโอ บาวนด์เป็นการหาขอบเขตค่า variance ที่น้อยที่สุดที่จะเป็นไปได้สำหรับ unbiased estimator จากที่ทราบมาแล้วว่า ตัวประมาณค่าจะดีแค่ไหนนั้นขึ้นอยู่กับ variance ของสัญญาณรบกวน ตัวอย่าง เช่น ในการประมาณค่า mean ของสัญญาณ  $x[n]$  ซึ่งมีสัญญาณรบกวน  $w[n]$  ปนอยู่หรือ  $x[n] = A + w[n]$ ,  $w[n] \approx N(0, \sigma^2)$  จะได้ว่า หาก variance ของสัญญาณรบกวนมีค่ามาก จะได้  $x[n]$  และ Pdf ของ  $x[n]$  เป็นดังรูปที่ 4.6 (a) และถ้า variance ของสัญญาณรบกวนมีค่าน้อยก็จะได้ดังรูปที่ 4.6 (b) จะเห็นว่าในกรณีที่ variance น้อย ค่า  $P_x(x)$  จะแคบ ดังนั้น CRLB นั้นจะอาศัยการดูที่ Pdf ของ  $x[n]$  ว่าแคบเพียงใด

การวัดความแคบของ Pdf จะอาศัยสิ่งที่เรียกว่า curvature ของ Pdf ที่ค่าจริง (True value) ดังแสดงในรูปที่ 4.7 (a) variance มาก และ (b) variance น้อย สรุปก็คือ ยิ่ง curvature ยิ่งมีค่ามากเท่าใด ค่าที่ประมาณได้ก็ยิ่งใกล้เคียงกับค่าจริงมากขึ้นเท่านั้น

หาก  $\sigma^2 = 0$  จะได้ว่า Pdf เป็นอิมพัลส์ (Impulse) ที่ค่าจริง ดังในรูปที่ 4.8 (a) ซึ่งกรณีนี้ curvature มีค่าเป็นอนันต์ หรือได้ความถูกต้องสูงมาก แต่หาก Pdf เป็นลักษณะราบเรียบตลอด ดังในรูปที่ 4.8 (b) กรณีนี้ค่า curvature มีค่าเป็นศูนย์ หรือความถูกต้องไม่มีเลย นั่นหมายความว่า ค่า variance ของตัวประมาณจะแปรผกผันกับค่า curvature ซึ่ง curvature นี้จะหาได้จาก การคำนวณค่าลบของอนุพันธ์อันดับสองของ log-likelihood function ที่ true parameter  $\theta$



รูปที่ 4.7 Curvature ของ Pdf



รูปที่ 4.8 (a) Curvature มีค่าเป็นอนันต์ (b) Curvature มีค่าเป็นศูนย์

Likelihood function คือ ค่า Pdf ของ actual measurement ใด ๆ เช่น  $x[0]$  หรือก็คือ

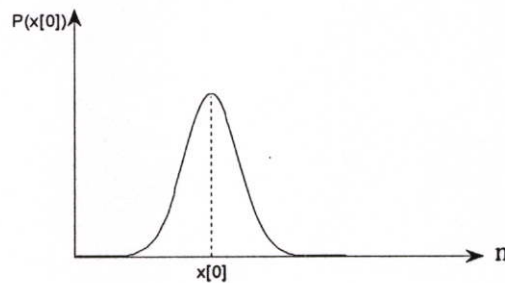
$$P_x(x)|_{x=x[0]}$$

นั่นคือ จะแทน  $x$  ซึ่งเป็นสัญญาณใด ๆ ทั่วไปด้วย  $x[0]$  ซึ่งเป็นค่า actual measurement ค่า Pdf ขณะนี้ ซึ่งเป็น likelihood function แล้วจะเป็นดังในรูปที่ 4.9

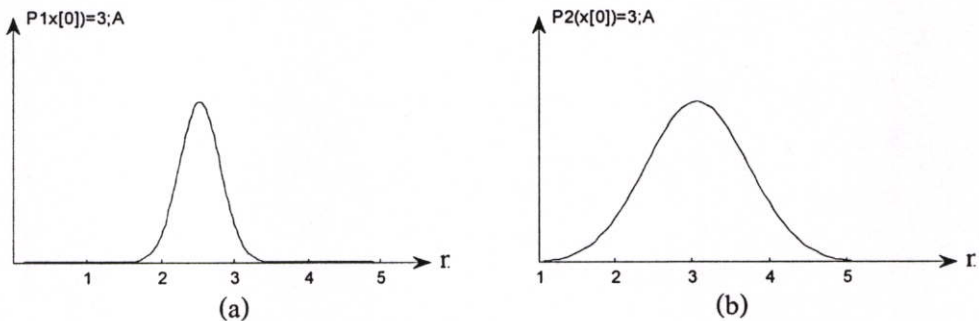
ตัวอย่างก็คือ หากทำการพิจารณา  $x[0] = A + w[0]$  โดยที่  $w[n] \approx N(0, \sigma^2)$  และต้องการประมาณค่า  $A$  จะได้ว่า ค่าประมาณ  $\hat{A} = x[0]$  และจะเห็นว่าตัวประมาณค่านี้จะเป็นแบบ unbiased และมีค่า variance เป็น  $\sigma^2$  ดังนั้นจะได้ likelihood function เป็นดังสมการ คือ

$$P_i(x[0]; A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x[0] - A)^2\right] \quad (4.19)$$

หากกำหนดให้  $x[0]$  เป็นค่าคงที่ เช่น ให้  $i = 1, 2$  เพื่อแสดงว่าเมื่อ  $\sigma_1 = 1/3$  และ  $\sigma_2 = 1$  จะทำให้เกิด likelihood function 2 แบบ ดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.9 Pdf ของ  $x[0]$



รูปที่ 4.10 Likelihood function (a) เมื่อ  $\sigma_1 = 1/3$  (b) เมื่อ  $\sigma_2 = 1$

ในกรณีรูปที่ 4.10 (a) เนื่องจาก variance ต่ำ จึงทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากกว่าแบบในรูป (b) ซึ่ง variance สูงกว่า และจะสามารถหา curvature ได้ดังนี้ คือ

$$\ln(P(x[0]; A)) = -\ln(\sqrt{2\pi\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2}(x[0] - A)^2 \quad (4.20)$$

จากนั้นหา  $\frac{\partial}{\partial A}$  ทั้งสองข้างของสมการที่ (4.20) จะได้

$$\frac{\partial \ln(P(x[0]; A))}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2}(x[0] - A) \quad (4.21)$$

และได้ค่า curvature เป็น

$$-\frac{\partial^2 \ln P(x[0]; A)}{\partial A^2} = \frac{1}{\sigma^2} \quad (4.22)$$

พบว่า

$$\text{Curvature} = \frac{1}{\sigma^2} \quad (4.23)$$

และก็ทราบว่า ค่า variance ของตัวประมาณมีค่าเป็น  $\sigma^2$  หรือจะได้ว่า

$$\text{var}\{\hat{A}\} = \frac{1}{-\frac{\partial^2 \ln P(x[0]; A)}{\partial A^2}} \quad (4.24)$$

แต่โดยทั่วไปแล้วค่าอนุพันธ์อันดับสองนั้นขึ้นอยู่กับ  $x[0]$  ซึ่งเป็น random ดังนั้นจะใช้  $E\{\cdot\}$  เพื่อให้ curvature เป็น deterministic หรือ

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln P(x[0]; A)}{\partial A^2}\right] \quad (2.25)$$

ซึ่งหมายถึงค่าเฉลี่ยของ curvature ของ log-likelihood function ดังนั้นจะได้สมการสุดท้ายสำหรับคำนวณ CRLB ของตัวประมาณใด ๆ

$$\text{var}\{\hat{A}\} \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad (2.26)$$

เขียนในรูปทั่วไป คือ

$$\text{var}\{\hat{\theta}\} \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad (2.27)$$

โดยทั่วไปแล้ว สัญญาณมักจะมีรูปแบบตามสมการ คือ

$$x[n] = S[n; \theta] + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.28)$$

โดยที่  $S[n; \theta]$  นั้นอาจเป็นสัญลักษณ์ที่เป็นเชิงเส้นกับตัวแปรบางตัว อย่างในกรณีที่  $S[n; \theta]$  เป็น  $an + b$ ,  $a \sin(2\pi fn)$  หรือ  $ar^n$  นั้น  $S[n; \theta]$  เป็นเชิงเส้นกับ  $a$  แต่ในบางกรณี ตัวแปรที่กำลังพิจารณาอาจไม่ใช่ตัวแปรที่เป็นเชิงเส้นก็ได้เช่น  $S[n; \theta]$  เป็น  $a \sin(2\pi fn + \phi)$  จะเห็นได้ชัดว่า  $f$  และ  $\phi$  นั้น ไม่เชิงเส้นกับ  $S[n; \theta]$  จริง ๆ แล้วตัวแปรที่ต้องการจะประมาณไม่จำเป็นจะต้องเป็นเชิงเส้นก็ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การหา CRLB ของตัวประมาณ  $\hat{\theta}$  ของสัญญาณ  $S[n; \theta]$  นั้นมีรูปแบบทั่ว ๆ ไปเป็น

$$\text{var}\{\hat{\theta}\} \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial S[n; \theta]}{\partial \theta} \right)^2} \quad (4.29)$$

สังเกตว่า หาก  $\sigma^2$  หรือ variance ของ  $w[n]$  ไม่เปลี่ยนแปลง ก็หมายความว่าส่วนตัวหารหรือ  $\frac{\partial S[n; \theta]}{\partial \theta}$  ซึ่งคืออัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณ  $S[n; \theta]$  เทียบกับ  $\theta$  จะเป็นตัวกำหนดค่า variance ในสมการที่ (4.29) จะสรุปในแบบทั่วไปไปได้ว่า หากสัญญาณมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ตามการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่กำลังประมาณ จะทำให้ได้ตัวประมาณที่ค่อนข้างเที่ยงตรง

เช่น หาก  $\hat{\theta}$  นั้น เป็น  $\hat{f}_0$  ซึ่งหมายถึงว่า กำลังจะทำการประมาณความถี่  $f_0$  ของ ซึ่งถูกบวกรด้วย  $w[n]$  และ  $S[n; \theta]$  จะมีสมการเป็น

$$S[n; \theta] = A \cos(2\pi f_0 n + \phi), \quad 0 < f < 1/2 \quad (4.30)$$

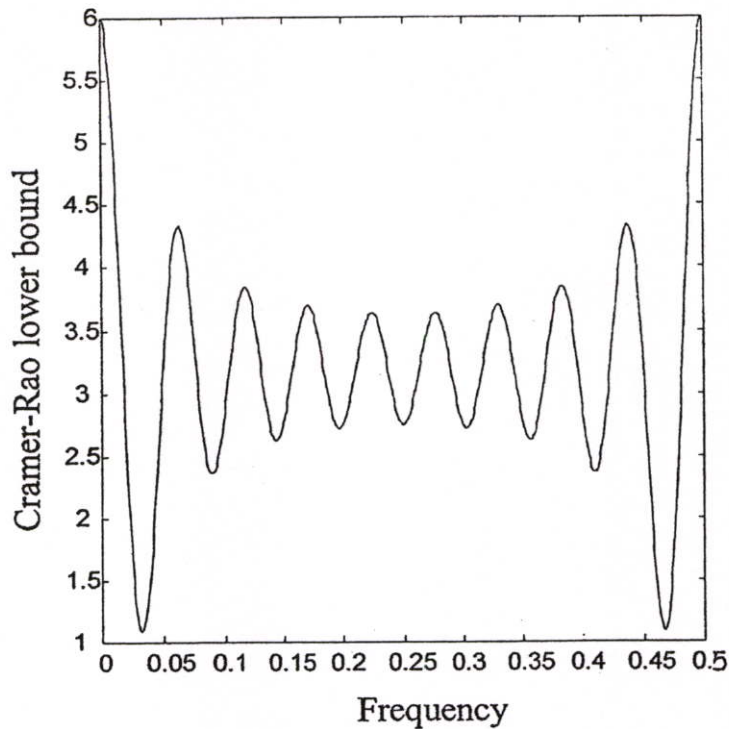
ทำการหาค่าอนุพันธ์  $\frac{\partial}{\partial f_0}$  โดยสมมติว่าทราบค่า  $A$  และ  $\phi$  จะได้

$$\frac{\partial S[n; f_0]}{\partial f_0} = -2\pi n \sin(2\pi f_0 n + \phi) \quad (4.31)$$

หรือได้ CRLB เป็น

$$v\{\hat{f}_0\} \geq \frac{\sigma^2}{A^2 \sum_{n=0}^{N-1} [2\pi n \sin(2\pi f_0 n + \phi)]^2} \quad (4.32)$$

หากพล็อตกราฟ  $\text{var}\{\hat{f}_0\}$  เทียบกับ  $f$  จะได้ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 Cramer-Rao lower bound สำหรับการประมาณความถี่สัญญาณไซน์

จากรูปที่ 4.11 จะเห็นว่า  $\text{var}\{\hat{f}_0\}$  จะมากที่สุดที่บริเวณความถี่ประมาณศูนย์ (DC) และที่ความถี่ Nyquist ส่วนที่ความถี่อื่น ๆ ค่า  $\text{var}\{\hat{f}_0\}$  จะมีค่าสูง ๆ ต่ำ ๆ สลับกัน จะเห็นว่าประโยชน์ของ CRLB คือ CRLB บอกถึงตำแหน่งที่ควรจะทำ การประมาณความถี่  $f_0$  ตลอดย่านความถี่  $0 < f < 1/2$

ตัวประมาณค่าแบบ MVUE เป็น optimum estimator การนำตัวประมาณค่านี้มาใช้ จำเป็นต้องทราบ Pdf ของข้อมูลที่วัดได้ก่อน ส่วน BLUE เป็น optimum estimator แบบเชิงเส้น ที่ไม่จำเป็นต้องทราบ Pdf แต่ต้องใช้  $1^{\text{st}}$  และ  $2^{\text{nd}}$  moments เพื่อการประมาณค่า ส่วนตัวประมาณค่าแบบ least square (LSE) ไม่จำเป็นต้องทราบข้อมูลทางสถิติใด ๆ ของข้อมูลที่วัดได้เลย ใช้แค่ signal model ที่กำหนดขึ้นมาเพื่อหาตัวประมาณค่าเท่านั้น ข้อเสียของ LSE คือ ไม่มีคุณสมบัติเป็น optimum estimator ดังเช่น MVUE และ BLUE ในทางปฏิบัติ เป็นการยากที่จะทราบทั้ง Pdf,  $1^{\text{st}}$  และ  $2^{\text{nd}}$  moments ของข้อมูลที่วัดได้ ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงนิยมใช้ตัวประมาณแบบ LSE ซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไป

#### 4.6 ตัวประมาณค่าแบบ Least square

กำหนด data model ของ  $x[n]$  เป็นดังสมการ คือ

$$x[n] = \theta S[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

เมื่อ  $\theta$  คือตัวแปรที่ต้องการประมาณ และ  $S[n]$  เป็นสัญญาณแบบ deterministic เช่น  $1, n$  หรือ  $\sin(2\pi fn)$  ซึ่งถูกส่งมาจาก signal model สังเกตว่า ในสมการของ data model,  $x[n]$  จะไม่มีส่วนประกอบของสัญญาณรบกวน  $w[n]$  เลย ดังนั้น model สำหรับใช้หาตัวประมาณ จึงใช้ในการประมาณค่าตัวแปรเท่านั้น

ข้อดัดสนที่ใช้ในการประมาณค่าของตัวแปรคือ ค่าผิดพลาด (Error) ระหว่าง data model,  $x[n]$  และ signal model,  $s[n]$

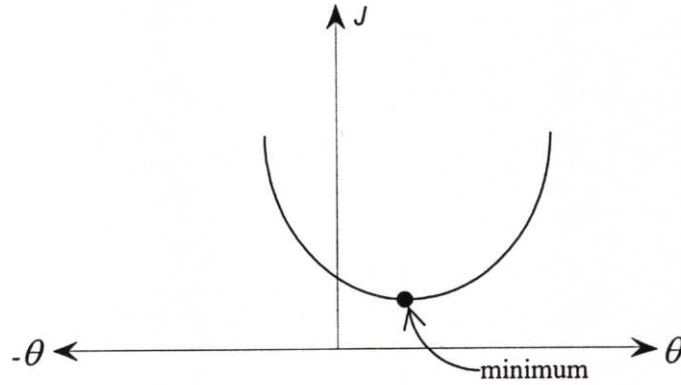
การหาตัวประมาณค่าแบบ LS จะใช้การ minimization ของ cost function,  $J$  โดยที่

$$J = \sum_{n=0}^{N-1} e^2[n] \quad (4.34)$$

และค่า minimum ของ  $J$  คือ  $\theta$  ทำให้ค่าอนุพันธ์ของ  $J$  เทียบกับ  $\theta$  มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

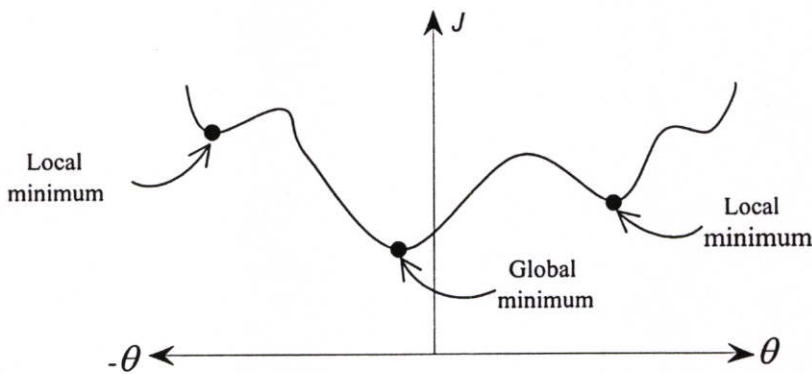
$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \quad (4.35)$$

ถ้าให้ error function เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้นจะได้ว่า  $\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2}$  เป็นค่าบวกอย่างเดียว ดังนั้นจุดที่  $\theta$  ทำให้  $\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$  จะเป็นจุดต่ำสุดเพียงจุดเดียว ดังแสดงในรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 Cost function ที่เป็นเชิงเส้นกับ  $\theta$

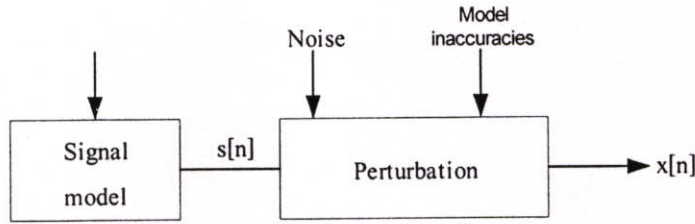
แต่ถ้า error function,  $e[n]$  ไม่เป็นเชิงเส้น เช่น  $e[n] = x[n] - \cos(2\pi n\theta)$  แล้วจะได้จุดต่ำสุดหลายจุด ดังแสดงในรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 Cost function ที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับ  $\theta$

ซึ่งขั้นตอนการประมาณจะยุ่งยากมากขึ้น ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะตัวประมาณแบบเชิงเส้นเท่านั้น

จาก data model,  $x[n]$  ซึ่งสัมพันธ์กับ signal model,  $s[n]$  จะมีแผนภาพบล็อกแสดงดังรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $x[n]$  กับ  $s[n]$

$s[n]$  คือสัญญาณแบบ deterministic ได้มาจาก signal model ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ  $\theta$  ส่วน  $x[n]$  หรือ observed data นั้นคือ  $s[n]$  ที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวน และความไม่สมบูรณ์ของ signal model การเลือก LSE ก็คือการหาค่า  $s[n]$  ที่ใกล้เคียงกับ  $x[n]$  มากที่สุด โดยข้อตัดสินใจที่ใช้คือ ลดค่ากำลังสองของ error function ให้เหลือน้อยที่สุด ค่าผลรวมของ error function ยกกำลังสองนั้นคือ  $J(\theta)$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2 \quad (4.36)$$

และจะได้  $\hat{\theta}$  เมื่อ  $\hat{\theta}$  นั้นทำให้  $\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}$  สังเกตว่า ในการหา LSE นั้นไม่จำเป็นต้องทราบข้อมูลทางสถิติของข้อมูลที่วัดได้เลย

#### 4.7 Sequential least square

จากที่ผ่านมา จะทำการหา LSE จากข้อมูลที่เป็น  $N$  sample ในบางกรณี (ส่วนใหญ่) จะได้ข้อมูลมาจาก sample ซึ่งถูกเก็บมาทีละ sample และต้องการหา LSE ในทันทีทันใด ซึ่งวิธีหา LSE จากข้อมูลที่เก็บไว้แล้ว จำนวน samples เรียกว่า Sequential least square estimator ส่วนวิธีหา LSE จากข้อมูลที่เก็บไว้แล้วจำนวน  $N$  samples เรียกว่า Block-based LSE ตัวอย่างเช่น ต้องการประมาณค่าระดับ DC ในสัญญาณ  $x[n]$  โดยที่

$$x[n] = A + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.37)$$

หรือเขียนในรูป matrix

$$\underline{X} = \underline{A} + \underline{W} \quad (4.38)$$

และจัดอยู่ในรูป

$$\underline{X} = \underline{S} + \underline{W} \quad (4.39)$$

โดยที่

$$\underline{S} = \underline{H}\theta \quad (4.40)$$

เมื่อ

$\theta$  = พารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ =  $\underline{A}$

$\underline{H}$  = observation matrix =  $\underline{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^t$ , (length  $N$ )

$t$  = transpose จะได้ LSE คือ

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{LS} &= (\underline{H}'\underline{H})^{-1} \underline{H}'\underline{X} \\ &= (\underline{1}'\underline{1})^{-1} \underline{1}'\underline{x} = \frac{\underline{1}'\underline{X}}{\underline{1}'\underline{1}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \end{aligned} \quad (4.41)$$

$\hat{\theta}'_{LS}$  เป็นตัวประมาณของ DC สำหรับ  $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$  ซึ่งเรียกว่าเป็น LSE ของเวลาล่าสุด หรือปัจจุบัน ซึ่งเขียนแทนด้วย  $\hat{A}[N-1]$  ดังนั้น

$$\hat{A}[N-1] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (4.42)$$

หากมีข้อมูลใหม่เข้ามาหรือเรียกว่าเป็น  $x[n]$  จะได้ LSE ขณะที่เวลา  $N$  เป็น

$$\begin{aligned}
\hat{A}[N] &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x[n] \\
&= \frac{1}{N+1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x[n] + x[N] \right) \\
&= \frac{N}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{1}{N+1} x[N] \\
&= \frac{N}{N+1} \hat{A}[N-1] + \frac{1}{N+1} x[N] \quad (4.43)
\end{aligned}$$

$\hat{A}[N]$  นั้นที่แท้แล้วคือ ผลรวมของค่าประมาณเดิม  $\hat{A}[N-1]$  และค่าที่วัดได้ใหม่ล่าสุด หากแยก factor ออกมา จะได้

$$\begin{aligned}
\hat{A}[N] &= \frac{(N+1)}{(N+1)} \hat{A}[N-1] - \frac{1}{N+1} \hat{A}[N-1] + \frac{1}{N+1} x[n] \\
&= \hat{A}[N-1] + \frac{1}{N+1} (x[N] - \hat{A}[N-1]) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบของ

$$New\ Estimate = Old\ Estimate + Gain(Error) \quad (4.45)$$

หากค่า Sum square error ( $J$ ) ที่มีค่าน้อยที่สุดจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
J_{\min}(N) &= J_{\min}(N-1) + J_{\min}[error] \\
&= J_{\min}(N-1) + \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (x[N] - \hat{A}[N-1])^2 \quad (4.46)
\end{aligned}$$

หากวิเคราะห์แล้วจะเห็นว่า สมการ  $J_{\min}(N)$  ที่ได้ นี้ น่าจะมีความถูกต้อง เนื่องจาก  $J_{\min}(N)$  ซึ่งเป็นค่า LSE ของข้อมูล  $N+1$  ค่า ควรจะต้องมากกว่า  $J_{\min}(N-1)$  เสมอ ย้อนกลับไปดูสมการ  $\hat{A}[N]$  พบว่า เทอม  $\frac{1}{N+1}$  นั้น มีชื่อเรียกว่าเป็น gain ซึ่ง gain นี้ จะเป็นตัวบอกถึงความน่าเชื่อถือของค่าที่วัดได้ใหม่  $x[n]$  ที่ได้มาว่าควรจะใช้คำนวณหา LSE หรือไม่

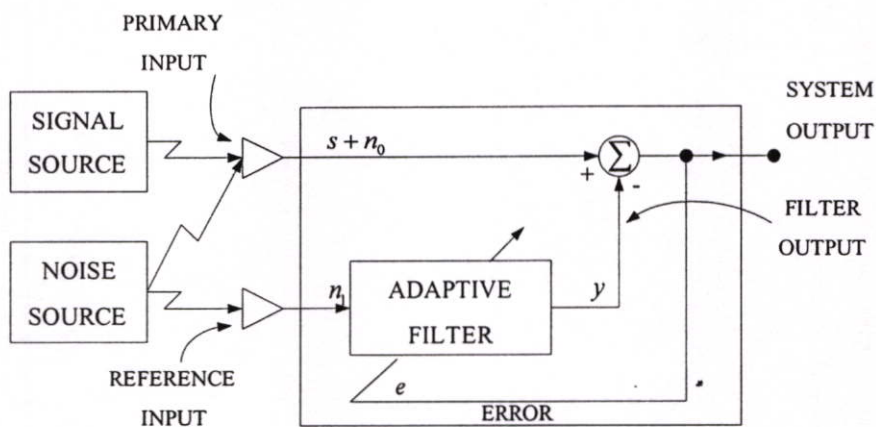
## 4.8 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีเกี่ยวกับการประมาณค่าตัวแปรที่พบในระบบประมวลผลสัญญาณต่าง ๆ เช่น ระบบเรดาร์ ระบบโซนาร์ สัญญาณเสียง สัญญาณภาพทางการแพทย์ และระบบควบคุม เป็นต้น ตัวประมาณค่าที่ดีจะต้องมีคุณสมบัติที่ดีสองประการคือ เป็น unbiased และ มีความแปรปรวน หรือ variance ต่ำ ตัวประมาณค่านั้นจะถูกเรียกว่า minimum variance unbiased estimator (MVUE) แต่ตัวประมาณค่านี้ จะต้องทราบ Pdf ของข้อมูลที่วัดได้ จึงสามารถคำนวณค่าประมาณออกมาได้ ในกรณีที่ไมทราบ Pdf แต่ทราบ  $1^{\text{st}}$  และ  $2^{\text{nd}}$  moment ของสัญญาณที่วัดได้จะสามารถใช้ตัวประมาณค่าแบบ best linear unbiased estimator (BLUE) แทนได้ และสุดท้าย ถ้าไม่ทราบอะไรเลย จะต้องใช้ตัวประมาณค่าแบบ least square (LS) ซึ่งต้องการเพียงแค่ signal model เท่านั้น อย่างไรก็ตาม ตัวประมาณค่าแบบ LS นี้ จะไม่สามารถเรียกเป็น optimum estimator เหมือนอย่าง MVUE และ BLUE ได้ ข้อตัดสินใจที่ใช้หาค่าตัวแปรสำหรับ LS คือ การพิจารณาค่าผิดพลาดระหว่าง signal model,  $s[n]$  กับ observation data,  $x[n]$  ยกกำลังสองที่น้อยที่สุด ซึ่ง  $s[n]$  นี้จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่จะประมาณ ตัวแปรที่ทำให้ค่าความผิดพลาดระหว่างสัญญาณทั้งสองยกกำลังสองน้อยที่สุด คือคำตอบของการประมาณนั้นๆ ส่วนข้อตัดสินใจอย่างหนึ่งที่ใช้คือ least mean square (LMS) วิธีนี้จะตัดสินใจที่ค่าผิดพลาดเฉลี่ยยกกำลังสองน้อยที่สุด จากการศึกษาพบว่า พื้นผิวค่าผิดพลาดของฟังก์ชันค่าผิดพลาด (Error function) ที่เป็นเชิงเส้นกับตัวแปรนั้นจะมีลักษณะเป็นรูปชาม การค้นหาจุดต่ำสุด (Global minimum) ของพื้นผิวนี้อาจใช้หลักการของ steepest descent approach คือ เป็น Negative gradient ของ cost function เทียบกับตัวแปร และให้เท่ากับศูนย์ วิธีการพิสูจน์ว่าเป็นจุดต่ำสุดหรือไม่นั้น จะดูที่อนุพันธ์อันดับสองของ cost function เทียบกับตัวแปร หากผลออกมาเป็น positive definite ค่า negative gradient ก็เป็นจุดต่ำสุด

## บทที่ 5

### ตัวกรองอะแดปทีฟ IIR แบบนอตช์อันดับสอง

Widrow [1] ได้นำเสนอแนวความคิดในการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบอะแดปทีฟ แสดงได้ดังรูปที่ 5.1 และได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับระบบการประมวลสัญญาณดิจิทัล และระบบสื่อสารอย่างกว้างขวาง เช่น adaptive equalization, echo cancellation, noise reduction, speech analysis and synthesis เป็นต้น ตัวกรองแบบอะแดปทีฟมีข้อดีที่สามารถปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองได้ ทำให้ไม่จำเป็นต้องทราบคุณสมบัติของสัญญาณก่อน (Primary knowledge) ทั้งสัญญาณที่ต้องการประมาณ และสัญญาณรบกวน หรือต้องการเพียงเล็กน้อยเท่านั้น



รูปที่ 5.1 แนวความคิดในการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบอะแดปทีฟ

การประมาณค่าสัญญาณไซน์คลื่นเดี่ยวที่ปนอยู่ในสัญญาณรบกวนนั้น สามารถทำได้โดยการป้อนสัญญาณดังกล่าว ผ่านตัวกรองความถี่ ซึ่งตัวกรองความถี่จะทำการลดทอนสัญญาณรบกวนให้มีขนาดต่ำลง และยอมให้สัญญาณที่ต้องการผ่านออกไปโดยไม่มีคามผิดเพี้ยน วิธีการหนึ่งที่น่าสนใจสำหรับ การตรวจวัดความถี่คลื่น ไซน์ความถี่เดี่ยว คือใช้ตัวกรองความถี่อะแดปทีฟแบบนอตช์ IIR อันดับสอง (Second order adaptive IIR notch filter, ANF)

ในการสร้างตัวกรองโดยทั่วไปแล้ว จำเป็นต้องทราบค่าคุณลักษณะของสัญญาณล่วงหน้า (Prior information) ซึ่งเป็นข้อมูลทางสถิติของสัญญาณนั้น ๆ ตัวกรองนั้นจะเหมาะสมที่สุดเมื่อคุณลักษณะของสัญญาณอินพุตตรงกันกับข้อมูลของคุณลักษณะที่ได้ใช้ทำการออกแบบ แต่ถ้าไม่ทราบถึงข้อมูลของคุณลักษณะทั้งหมดของสัญญาณที่ต้องการ หรือมีการเปลี่ยนแปลง ตัวกรองนั้นๆ จะไม่ถูกเรียกว่าเป็นตัวกรองที่เหมาะสมที่สุดอีกต่อไป วิธีการเพื่อแก้ไขโดยตรงเรียกว่า “estimate and plug” คือการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ทางสถิติของสัญญาณนั้น ๆ และทำการป้อนผลนั้นกลับเข้าไป แต่วิธีนี้เมื่อนำไปใช้จริงจะ

มีข้อเสียที่ต้องการความละเอียดเกินไป และยังราคาแพงอีกด้วย ดังนั้นจึงอาจใช้ตัวกรองแบบอะแดปทีฟ (Adaptive filter) ซึ่งเป็นตัวกรองที่สามารถปรับตัวเองด้วยวิธีการป้อนกลับได้ ทำให้สามารถปรับตัวเองให้เข้ากับสภาพของสัญญาณที่ไม่สามารถทราบล่วงหน้าได้ กระบวนการปรับตัว หรืออัลกอริทึม (Algorithm) จะเริ่มทำงานจากค่าตั้งต้น (Initial condition) ในสัญญาณที่มีลักษณะเป็น stationary กระบวนการของอัลกอริทึมจะลู่เข้า (Converge) สู่มูลค่าที่เหมาะสมที่สุด ส่วนในสัญญาณที่มีลักษณะแบบ nonstationary อัลกอริทึมจะสามารถทำหน้าที่ติดตาม (Tracking) สัญญาณในสัญญาณอินพุตที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาได้

สิ่งที่สำคัญของตัวกรองแบบอะแดปทีฟคือ อัลกอริทึมที่ใช้ปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง ดังนั้น อัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพที่ดี ควรมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ [2]

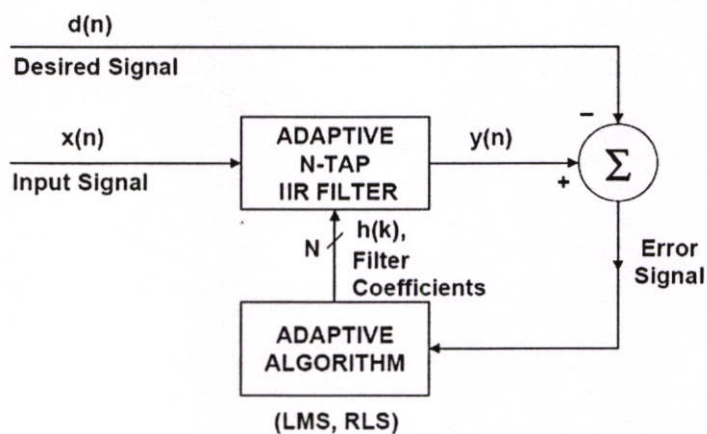
- อัตราการลู่เข้า (Rate of convergence) จะบอกถึงจำนวนของกระบวนการที่ต้องการของอัลกอริทึม ในการตอบสนองต่อสัญญาณ และลู่เข้าสู่ค่าที่เหมาะสมที่สุด อัตราการลู่เข้าที่เร็วจะทำให้อัลกอริทึมลู่เข้าอย่างรวดเร็วในสภาวะที่สัญญาณที่ไม่ทราบค่ามีลักษณะแบบ stationary
- Misadjustment ความผิดพลาดเมื่อค่าประมาณที่ได้จากอัลกอริทึมเบี่ยงเบนจากค่าที่เหมาะสมที่สุดของตัวกรอง คำนวณจากค่า mean-square error โดยวิธีการของการหาค่าเฉลี่ยทั้งหมดเชิงสถิติ
- การติดตาม (Tracking) เมื่ออัลกอริทึมของการกรองแบบอะแดปทีฟทำงานในสภาวะที่สัญญาณมีลักษณะแบบ nonstationary อัลกอริทึมต้องสามารถติดตามค่าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลานั้นได้ คุณสมบัติของการติดตามของอัลกอริทึมที่ดีได้แก่ 1) อัตราการลู่เข้า และ 2) การกระเพื่อมของสัมประสิทธิ์ที่สถานะอยู่ตัว (Steady-state fluctuation) ของอัลกอริทึม
- Robustness อัลกอริทึมควรมีความทนทานต่อการรบกวนเล็กน้อย (เช่นการรบกวนจากพลังงานเล็กลงซึ่งอาจเกิดขึ้นจากภายใน หรือภายนอกตู้ตัวกรอง) และควรมีผลเพียงเล็กน้อยต่อการทำงานของอัลกอริทึม
- Computational requirements ได้แก่ 1) จำนวนของการคูณ การหาร การบวก และการลบที่เกิดขึ้นต่อหนึ่งกระบวนการทำซ้ำของอัลกอริทึม 2) ขนาดของหน่วยความจำ (Memory) ที่ใช้สำหรับเก็บข้อมูลและโปรแกรม และ 3) ทรัพยากรที่ต้องใช้ในการวางวิธีการของอัลกอริทึม
- โครงสร้าง (Structure) ของอัลกอริทึม รวมถึงโครงสร้างของการนำข้อมูลเข้าสู่อัลกอริทึม ซึ่งเป็นการกำหนดวิธีการในการสร้างฮาร์ดแวร์ เช่นอัลกอริทึมที่มีโครงสร้างเป็นมอดูล (Module) มีความคล้ายคลึงกัน (Parallelism) และทำงานพร้อมกัน (Concurrency) จะเหมาะสำหรับสร้างด้วย VLSI (Very large-scale integration)
- คุณสมบัติทางระบบตัวเลข (Numerical properties) เมื่ออัลกอริทึมกระทำการทางระบบตัวเลข สัญญาณรบกวนที่เกิดจากการควอนไทซ์ (Quantization errors) ของการแปลงสัญญาณอินพุตแบบ แอนะล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล จะมีผลต่อการคำนวณตัวเลขทางดิจิทัล คุณสมบัติทางตัวเลขนี้ยังสามารถแยกออกเป็น Numerical stability ซึ่งเป็นคุณสมบัติของอัลกอริทึมของการกรอง

แบบอะแดปทีฟ และ Numerical accuracy คือจำนวนของบิตซึ่งใช้สำหรับข้อมูลและสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง

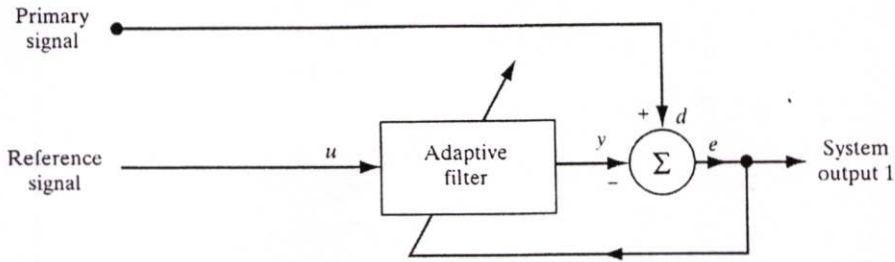
ตัวกรองความถี่ดิจิทัลแบบปรับตัวได้ (Adaptive digital filter) ได้เข้ามามีบทบาทเป็นอย่างมากในงานประมวลผลสัญญาณดิจิทัล เช่น ระบบสื่อสาร ระบบควบคุม เรดาร์ โซนาร์ และเครื่องมือทางการแพทย์ ทั้งนี้เพราะความสามารถในการปรับเปลี่ยนคุณลักษณะของระบบให้สอดคล้องกับสัญญาณที่เข้ามาได้ด้วยตัวเอง ซึ่งจะสามารถทำงานกับสัญญาณที่มีลักษณะเป็น nonstationary ซึ่งเป็นสัญญาณที่เกิดขึ้นจริงในทางปฏิบัติ ตัวกรองความถี่แบบอะแดปทีฟนั้นมีสองชนิด คือ ตัวกรองอะแดปทีฟแบบ FIR (Finite Impulse Response) และ แบบ IIR (Infinite Impulse Response) ตัวกรองแบบอะแดปทีฟ IIR ได้ถูกนำมาใช้งานต่าง ๆ แทนตัวกรองอะแดปทีฟแบบ FIR มากขึ้น โดยเฉพาะงานที่เมื่อใช้ตัวกรองแบบ FIR ต้องใช้จำนวนอันดับสูง ๆ โดยไม่จำเป็น เมื่อเปลี่ยนมาใช้ตัวกรองแบบ IIR แล้วจะสามารถลดอันดับลงได้ โดยที่สมรรถนะยังคงเดิม อย่างไรก็ตาม ตัวกรองความถี่ อะแดปทีฟแบบ IIR โครงสร้างแบบโดยตรง (Direct form) จะมีข้อเสียในเรื่อง Finite-precision effect และการวิเคราะห์หาเสถียรภาพของตัวกรอง (Complexity of stability monitoring) จึงทำให้มีการค้นหาโครงสร้างใหม่ๆ เช่น โครงสร้างแบบแลตทิซ (Lattice) ซึ่งเป็นโครงสร้างที่มีลักษณะแบบไขว้ ซึ่งสามารถลดความยุ่งยากในการคำนวณลงได้

## 5.1 โครงสร้างของตัวกรองความถี่อะแดปทีฟแบบ IIR อันดับสอง

รูปที่ 5.2 แสดงส่วนประกอบ โครงสร้างทั่วไปของตัวกรองความถี่อะแดปทีฟ เป้าหมายคือการกรองสัญญาณอินพุต  $x(n)$  ด้วยตัวกรองแบบอะแดปทีฟเพื่อให้สัญญาณนั้นเข้ากันกับสัญญาณที่ต้องการ  $d(n)$  (Desired signal) จากนั้นสัญญาณ  $d(n)$  จะถูกนำไปลบกับสัญญาณที่ได้จากตัวกรอง  $y(n)$  เพื่อสร้างสัญญาณผิดพลาด  $e(n)$  (Error) และสัญญาณผิดพลาดนี้ใช้เพื่อควบคุมการทำงานของอัลกอริทึมที่ใช้สำหรับปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง เพื่อลดค่าผิดพลาดนั้นให้ต่ำที่สุด



รูปที่ 5.2 ส่วนประกอบของตัวกรองความถี่อะแดปทีฟแบบ IIR



รูปที่ 5.3 การประยุกต์ใช้งานเพื่อทำการกำจัดสัญญาณรบกวน

ตัวอย่างการนำไปประยุกต์ใช้งานแสดงได้ดังรูปที่ 5.3 เป็นการกำจัดสัญญาณรบกวน (Interference cancellation) เมื่อ  $d(n)$  คือสัญญาณหลักของระบบ  $u(n)$  คืออินพุตของระบบที่เป็นสัญญาณอ้างอิง ซึ่งโดยทั่วไปจะถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวน วัตถุประสงค์ของอัลกอริทึมคือ พยายามทำให้ค่า  $y(n)$  มีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณรบกวนที่สุ่มเพื่อทำให้ค่า  $e(n)$  มีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณ  $d(n)$  ที่สุ่ม

### 5.1.1 โครงสร้างแบบโดยตรง

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองดิจิทัล IIR แบบนอกรีตอันดับสองในโครงสร้างแบบโดยตรงสามารถแสดงได้ดังนี้

$$H_d(z) = \frac{1 + a(n)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \rho a(n)z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (5.1)$$

เมื่อ  $\rho$  คือค่าคงที่ที่มีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \rho < 1$  ใช้สำหรับกำหนดค่า Q-factor ของวงจรกรองความถี่ และ  $a(n)$  คือสัมประสิทธิ์แปรค่าของตัวกรอง ซึ่งจะถูกระบุค่าโดยอะแดปทีฟอัลกอริทึมที่มีค่าอยู่ระหว่าง  $-2 \leq a(n) \leq 2$  เพื่อกำจัดสัญญาณไซน์ที่มีความถี่  $\omega_0$  และสามารถหาค่า  $\omega_0$  และค่า Q-factor ของวงจรกรองความถี่ได้ตามสมการที่ (5.2) และ (5.4) ตามลำดับ

$$a = -2 \cos(\omega_0) \quad (5.2)$$

$$BW = \pi(1 - \rho) \quad (5.3)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\pi(1 - \rho)} \quad (5.4)$$

จากสมการของฟังก์ชันถ่ายโอนในโครงสร้างแบบโดยตรง สามารถแสดงสมการของเอาต์พุตของตัวกรองได้โดยทำการแปลง z กลับ (Inverse z-transform) ดังนี้

$$y_d(n) = x(n) + a(n) \cdot x(n-1) + x(n-2) - a(n) \cdot \rho \cdot y(n-1) - \rho^2 \cdot y(n-2) \quad (5.5)$$

โดยให้  $d = \text{direct}$  และสามารถหาสมการสัญญาณเกรเดียนต์ของตัวกรองโครงสร้างรูปแบบโดยตรงได้จาก  $\frac{\partial y(n)}{\partial a(n)}$  ดังนั้นจะได้

$$g_d(n) = x(n-1) - \rho y(n-1) \quad (5.6)$$

### 5.1.2 โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ [5]

ตัวกรองอะแดปทีฟ IIR แบบนอตช์โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ (Adaptive lattice notch filter) [5] เป็นโครงสร้างซึ่งลดความยุ่งยากทางโครงสร้างทำให้ตัวกรองอะแดปทีฟมีลักษณะการลู่เข้าที่ดีขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับโครงสร้างรูปแบบโดยตรง ฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับวงจรถองแบบนอตช์อันดับสองในรูปแบบแลตทิซแสดงได้คือ

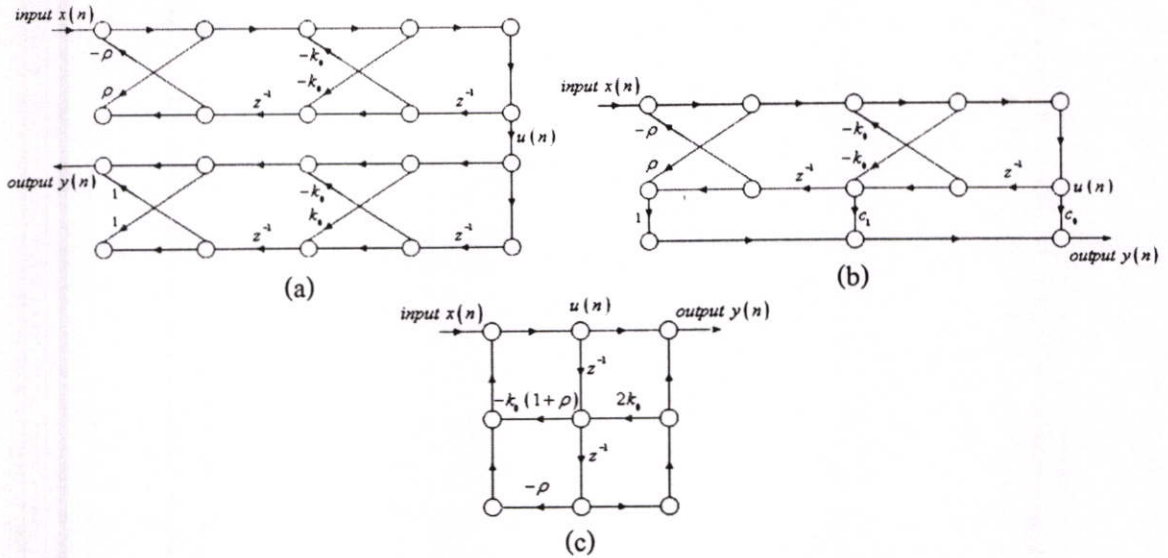
$$H_l(z) = \frac{1 + 2k(n)z^{-1} + z^{-2}}{1 + k(n)(1 + \rho)z^{-1} + \rho z^{-2}} \quad (5.7)$$

เมื่อ  $k(n)$  คือสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง ซึ่งจะถูกระมาณค่าโดยอัลกอริทึมการเข้าสู่ค่า  $-\cos(\omega_0)$  เพื่อกำจัดสัญญาณไซน์ความถี่  $\omega_0$  และให้ 1 แทน lattice ในรูปที่ 5.4 (a) แสดงโครงสร้างตัวกรองแบบ cascading all-pole และ all-zero ของ ANF สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอื่นได้ดังรูปที่ 5.3 (b) เมื่อ

$$c_1 = k_0(1 - \alpha) \quad (5.8a)$$

$$c_0 = (1 - k_0^2)(1 - \alpha) \quad (5.8b)$$

โครงสร้างของตัวกรองในรูปที่ 5.4 (b) นั้น ต้องใช้จำนวนการคูณมากกว่าโครงสร้างในรูปที่ 5.4 (a) แต่มีข้อดีตรงที่สามารถลดจำนวนขั้นลงไปได้ จากนั้นในรูปที่ 5.4 (c) เป็น โครงสร้างที่เรียกว่า Normalized lattice ซึ่งสามารถลดความยุ่งยากในการคำนวณลงได้อีก



รูปที่ 5.4 ตัวกรองอะแดปทีฟแบบนอคซ์ที่มีโครงสร้างแบบแลตทิซ

และจะได้สมการของเอาต์พุตจากฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรองที่มีโครงสร้างแบบแลตทิซคือ

$$y_l(n) = u(n) + 2 \cdot k(n) \cdot u(n-1) + u(n-2) \quad (5.9)$$

โดยที่

$$u(n) = x(n) - k(n) \cdot (1 + \rho) \cdot u(n-1) - \rho \cdot u(n-2) \quad (5.10)$$

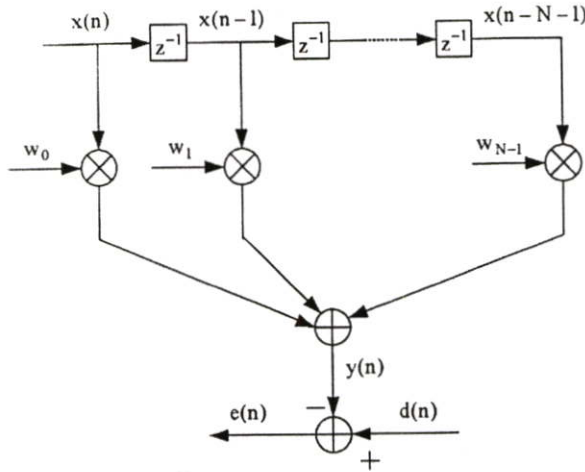
สัญญาณเกรเดียนต์ของตัวกรอง โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ สามารถหาได้จาก  $\frac{\partial y(n)}{\partial k(n)}$  จะได้

$$g_l(n) = (1 - \rho)u(n-1) \quad (5.11)$$

## 5.2 วิธี Steepest Descent (Method of steepest descent) [6]

ทฤษฎีของ steepest descent เป็นพื้นฐานของการปรับตัวบนพื้นฐานของเกรเดียนต์ (Gradient-based adaptation) ซึ่งจะทำให้การติดตามสัญญาณเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงทางเวลาได้โดยไม่ต้องใช้สมการที่ยุ่งยาก วิธี steepest descent ใช้การทำซ้ำ หรือวิธีการปรับตัวเองในการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองทีละเล็กละน้อย ในทิศทางที่ลดค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มากที่สุด โดยการปรับค่านำหนักต่างให้ cost function  $J(w)$  เป็นฟังก์ชันแบบ continuously differentiable ของค่าต่างน้ำหนักที่ไม่ทราบค่า  $w$  ต้องการหาค่าที่เหมาะสม  $w_0$  ตามเงื่อนไข

$$J(w_0) \leq J(w) \quad (5.12)$$



รูปที่ 5.5 วงจรกรองแบบทรานสเวอร์ส

จากรูปที่ 5.5 อินพุตของวงจรกรองคือ  $x(n)$  ผลตอบสนองที่ต้องการคือ  $d(n)$  ซึ่งสมมติเป็นลำดับค่าจริง ค่าสัมประสิทธิ์วงจรกรอง  $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$  สมมติให้เป็นค่าจริง ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ตามลำดับดังนี้

$$w = [w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_{N-1}]^T \quad (5.13)$$

และ

$$x(n) = [x(n) \quad x(n-1) \quad \dots \quad x(n-N+1)]^T \quad (5.14)$$

จะได้เอาต์พุตของวงจรกรองเป็น

$$y(n) = w^T x(n) = x^T(n) w \quad (5.15)$$

สัญญาณผิดพลาด  $e(n)$  คือผลต่างระหว่างคำตอบที่ต้องการ  $d(n)$  และเอาต์พุตของวงจรกรอง  $y(n)$

$$e(n) = d(n) - w^T x(n) = d(n) - x^T(n) w \quad (5.16)$$

โดยมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็น

$$\xi = E|e^2(n)| \quad (5.17)$$

จากสมการที่ (5.16) เมื่อยกกำลังสองจะได้

$$e^2(n) = d^2(n) - 2\mathbf{w}^T \mathbf{x}(n)d(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w} \quad (5.18)$$

หาค่าคาดหวังของสมการที่ (5.18) ได้ดังนี้

$$\xi = E|e^2(n)| = E|d^2(n)| - 2\mathbf{w}^T E[\mathbf{x}(n)d(n)] - \mathbf{w}^T E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w} \quad (5.19)$$

นิยามให้เวกเตอร์  $\mathbf{p}$  คือสหสัมพันธ์ข้ามระหว่างผลตอบสนองที่ต้องการ  $d(n)$  ซึ่งเป็นสเกลาร์กับเวกเตอร์อินพุตของวงจรรอง  $\mathbf{x}(n)$

$$\mathbf{p} = E[\mathbf{x}(n)d(n)] = [p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{N-1}]^T \quad (5.20)$$

และนิยามให้เมตริกซ์อัตโนมัติของอินพุตเป็น

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)] = \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} & \dots & r_{0,N-1} \\ r_{1,0} & r_{1,1} & \dots & r_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{N-1,0} & r_{N-1,1} & \dots & r_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

จากค่า  $\mathbf{p}$  และ  $\mathbf{R}$  ที่นิยามไว้นี้ สามารถเขียนสมการของค่ากำลังสองเฉลี่ยในสมการที่ (5.19) ได้ดังนี้

$$\xi = E|e^2(n)| = E|d^2(n)| - 2\mathbf{w}^T \mathbf{p} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (5.22)$$

จากสมการนี้ทำให้ได้ฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งมีรูปร่างเป็นพื้นผิวพาราโบล่าหงาย การปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเพื่อให้ได้ค่าความผิดพลาดต่ำที่สุด ก็คือ การวิ่งวนไปตามพื้นผิวนี้นั้นจนถึงจุดที่ต่ำที่สุด ซึ่งสามารถทำได้โดยการหาค่าเกรเดียนต์  $\nabla$  ของฟังก์ชันจุดประสงค์นี้

$$\nabla \xi = \left[ \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial w_0} \quad \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial w_1} \quad \dots \quad \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial w_n} \right] = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w} \quad (5.23)$$

เมื่อให้  $\nabla \xi = 0$  จะได้เวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่เหมาะสม  $\mathbf{w}_0$  ซึ่งเรียกว่า “Wiener weight vector”

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (5.24)$$

ตามวิธี steepest descent ไม่รหาค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวกรองใหม่ได้ดังนี้

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_n \xi \quad (5.25)$$

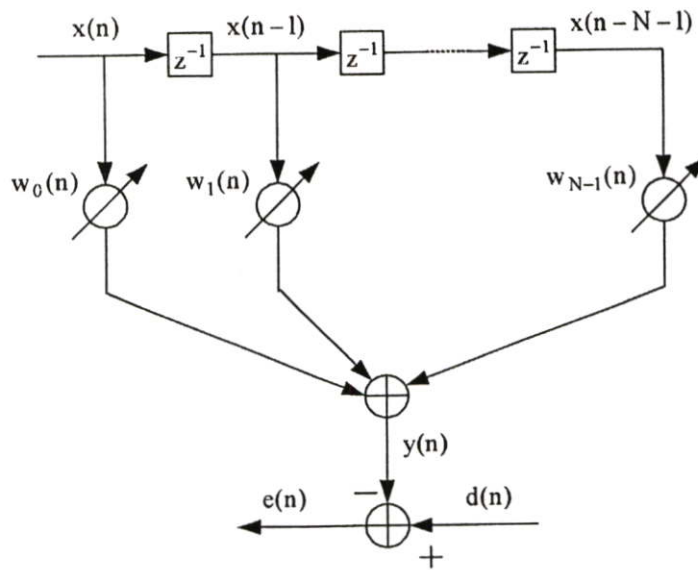
โดย  $\mathbf{w}(n)$  เป็นเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวกรอง ที่การทำซ้ำครั้งที่  $n$   
 $\mu$  เป็นค่าก้าวกระโดด  
 $\nabla_n \xi$  เป็นเวกเตอร์ของค่าเกรเดียนต์ของ  $\nabla \xi$  ที่  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(n)$

### 5.3 อัลกอริทึมแบบ LMS (Least-mean-square algorithm)

อัลกอริทึมแบบ LMS นี้จัดอยู่ในตระกูลของอัลกอริทึมแบบ stochastic gradient อัลกอริทึมแบบ LMS นี้เป็นอัลกอริทึมที่ง่าย ไม่ต้องการฟังก์ชันที่ยุ่งยาก หรือการกระทำทางเมตริก ดังนั้น อัลกอริทึมนี้จึงเป็นอัลกอริทึมมาตรฐานที่ใช้ทั่วไปอัลกอริทึมหนึ่ง ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \text{เวกเตอร์} \\ \text{สัมประสิทธิ์ของวงจ} \\ \text{กรองที่ปรับค่าแล้ว} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{เวกเตอร์} \\ \text{สัมประสิทธิ์ของ} \\ \text{วงจรงกรองเดิม} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ค่าช่วงก้าว} \\ \text{สำหรับ} \\ \text{การประมาณค่า} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{เวกเตอร์} \\ \text{สัญญาณอินพุต} \\ \text{ของวงจรงกรอง} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ค่าผิดพลาด} \\ \text{จากการ} \\ \text{ประมาณ} \end{bmatrix}$$

อัลกอริทึมแบบ LMS จะใช้ข้อมูลที่มีอยู่สำหรับการประมาณค่าเกรเดียนต์ที่ขณะเวลาใด ๆ ของวิธี steepest descent ระเบียบวิธี LMS จะใช้ค่าผลคูณของเวกเตอร์สัญญาณกับค่าความผิดพลาดเป็นค่าประมาณของเกรเดียนต์เวกเตอร์จริง



รูปที่ 5.6 ตัวกรองแบบปรับตัวได้แบบทรานเวอร์ส  $N$  แท็ป

จากรูปที่ 5.6 แสดงตัวกรองแบบปรับตัวได้แบบทรานเวอร์ส  $N$  แท็ป อินพุตของตัวกรอง คือ  $x(n)$  ผลตอบที่ต้องการคือ  $d(n)$  และจะได้เอาต์พุตของตัวกรองเป็น

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i) \quad (5.26)$$

สัญญาณผิดพลาด  $e(n)$  คือผลต่างระหว่างคำตอบที่ต้องการ  $d(n)$  และเอาต์พุตของตัวกรอง  $y(n)$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (5.27)$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองหรือค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง  $w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)$  สามารถปรับเปลี่ยนได้ โดยเวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรถอง  $w(n)$  คือ

$$w(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T \quad (5.28)$$

อะแดปทีฟอัลกอริทึมโดยทั่วไปมีจุดประสงค์เพื่อปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองให้ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยมีค่าต่ำที่สุด เมื่อให้อินพุตของตัวกรอง  $x(n)$  และผลตอบที่ต้องการ  $d(n)$  เป็น statistically stationary คือมีค่าไม่ขึ้นกับเวลาและให้ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองมีค่าคงที่ค่าหนึ่ง อัลกอริทึมแบบ LMS เป็นวิธีการในทางปฏิบัติในการหาค่าประมาณใกล้เคียงของผลเฉลยของสมการดัง

กล่าวในเวลาจริง (Real time) โดยไม่ต้องคำนวณฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Correlation function) และไม่ต้องหาเมตริกซ์ผกผัน สามารถปรับค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวกรองได้ดังนี้

$$w(n+1) = w(n) - \mu \nabla e^2(n) \quad (5.29)$$

โดย  $\mu$  คือค่าก้าวกระโดด (Step size) และ  $\nabla$  เป็นการกระทำของเกรเดียนต์นิยามโดย

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial w_0} \quad \frac{\partial}{\partial w_1} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial w_{-1}} \right]^T \quad (5.30)$$

ที่ตำแหน่ง  $i$  ของเวกเตอร์เกรเดียนต์  $\nabla e^2(n)$

$$\frac{\partial e^2(n)}{\partial w_i} = 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial w_i} \quad (5.31)$$

แทนสมการ (5.26) ในสมการ (5.31) และเนื่องจาก  $d(n)$  ไม่ได้ขึ้นกับ  $w_i$  จะได้

$$\frac{\partial e^2(n)}{\partial w_i} = -2e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial w_i} \quad (5.32)$$

แทน  $y(n)$  จากสมการ (5.26) จะได้

$$\frac{\partial e^2(n)}{\partial w_i} = -2e(n)x(n-i) \quad (5.33)$$

จากสมการที่ (5.30) และ (5.33) จะได้

$$\nabla e^2(n) = -2e(n)x(n) \quad (5.34)$$

เมื่อ  $x(n) = [x(n) \quad x(n-1) \quad \dots \quad x(n-N+1)]^T$  แทนสมการ (5.34) ในสมการ (5.29)

$$w(n+1) = w(n) + 2\mu e(n)x(n) \quad (5.35)$$

ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า อัลกอริทึม LMS ประกอบด้วยกระบวนการพื้นฐาน 2 กระบวนการ ดังนี้

1. กระบวนการกรอง (Filtering process)

- คำนวณผลตอบของตัวกรองแบบทรานเวอร์สได้

เอาต์พุตของตัวกรอง :

$$y(n) = w^T(n)x(n) \quad (5.36)$$

- คำนวณหาค่าผิดพลาดในการประมาณได้

ค่าผิดพลาดในการประมาณ :

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (5.37)$$

2. กระบวนการปรับค่าสัมประสิทธิ์ (Adaptive process)

ทำการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองอย่างอัตโนมัติตามค่าผิดพลาดในการประมาณที่หาได้จากกระบวนการกรอง ดังสมการ

$$w(n+1) = w(n) + 2\mu e(n)x(n) \quad (5.38)$$

ค่าเกรเดียนต์เวกเตอร์  $\nabla \xi$  ในวิธีของ steepest descent สามารถประมาณได้ด้วย  $e(n)x(n)$  หรือกล่าวได้ว่า expectation operator ได้ถูกนำออกไปจากสมการในวิธี steepest descent ซึ่งการประมาณเกรเดียนต์เวกเตอร์โดยการละ expectation operator นี้ทำให้เกิดผลตามมา คือ ในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองแต่ละครั้งจะได้รับผลจากสัญญาณรบกวนแบบเกรเดียนต์ (Gradient noise) ดังนั้นการคำนวณโดยอัลกอริทึม LMS จะมีการเคลื่อนไหวอย่างสุ่มรอบ ๆ ค่าต่ำสุดของพื้นผิวความผิดพลาด (Error surface) หรือลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยแทนที่จะลู่เข้าสู่จุดต่ำสุดอย่างแท้จริง

เนื่องจากอัลกอริทึม LMS ใช้กระบวนการป้อนกลับในการทำงาน ดังนั้นจึงต้องคำนึงถึงเสถียรภาพของระบบด้วย ซึ่งเกณฑ์ที่จะทำให้เกิดเสถียรภาพนี้คือ

$$\xi(n) \rightarrow \xi(\infty) \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty \quad (5.39)$$

เมื่อ  $\xi(n)$  คือ ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยของอัลกอริทึม LMS ที่เวลา  $n$  และค่าที่สภาวะอยู่ตัวของอัลกอริทึม LMS  $\xi(\infty)$  เป็นค่าคงที่ ค่าเฉลี่ยกำลังสองจะลู่เข้าที่สภาวะอยู่ตัวเมื่อเป็นไปตามเกณฑ์นี้ สำหรับอัลกอริทึม LMS นั้น ค่าก้าวกระโดด  $\mu$  ที่เหมาะสมซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขเกี่ยวกับโครงสร้างไอ

แกน (Eigen structure) ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ของอินพุตจะทำให้ค่าเฉลี่ยกำลังสองถ่วงน้ำหนักตามเกณฑ์ดังกล่าวได้

ความแตกต่างระหว่างค่าที่สภาวะอยู่ตัว  $\xi(\infty)$  และค่าต่ำที่สุด  $\xi_{\min}$  ที่ได้จากผลเฉลี่ยของ Wiener เรียกว่า excess mean-squared error หรือ  $\xi_{ex}(\infty)$  ความแตกต่างนี้แสดงถึงสิ่งที่จะต้องสูญเสียไปในกระบวนการปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองโดยใช้อัลกอริทึม LMS แทนที่จะใช้วิธี steepest descent

Misadjustment คือ อัตราส่วนระหว่าง  $\xi(\infty)$  กับ  $\xi_{\min}$  เป็นค่าที่แสดงว่าผลตอบที่สถานะอยู่ตัวของอัลกอริทึม LMS อยู่ห่างจากผลเฉลี่ยของ Wiener มากน้อยแค่ไหน และสามารถกำหนดค่า misadjustment นี้ให้มีค่าน้อยตามต้องการได้ โดยขึ้นอยู่กับค่าก้าวกระโดดที่ใช้ในอัลกอริทึม LMS สำหรับค่าก้าวกระโดดต่ำ ๆ นั้น กระบวนการปรับจะดำเนินไปค่อนข้างช้า และผลจากสัญญาณรบกวนแบบเกรเดียนต์ของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองถูกกรองออกไปมาก ซึ่งจะส่งผลในการลด misadjustment ด้วย แต่ถ้าใช้ค่าก้าวกระโดดสูง ๆ กระบวนการนี้จะเร็วขึ้น แต่ค่า misadjustment ก็จะมีสูงขึ้นเช่นเดียวกัน ดังนั้นการใช้อัลกอริทึม LMS ต้องให้ความสนใจกับค่าก้าวกระโดดเป็นอย่างมากเพราะค่าก้าวกระโดดที่ใช้ในอัลกอริทึม LMS นี้จะมีค่าคงที่ตลอดกระบวนการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง ด้วยเหตุนี้จึงมีผู้พัฒนาวิธีการใหม่ๆ ให้มีการปรับค่าก้าวกระโดดนี้ในขณะที่กระบวนการกำลังดำเนินการ เพื่อให้ผลตอบของตัวกรองใช้เวลาเข้าสู่ค่าที่ถูกต้องเร็วขึ้น และมีความถูกต้องมากขึ้นด้วย

## 5.4 อัลกอริทึมที่น่าสนใจ

สำหรับอะแดปทีฟอัลกอริทึมที่น่าสนใจ ซึ่งเป็นอัลกอริทึมแบบ Memoryless Nonlinear Gradient (MNG) [7] ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่ปรับปรุงมาจากอัลกอริทึมแบบ Plain Gradient (PG) โดยปรับปรุงในส่วนของสัญญาณเกรเดียนต์ให้เป็นฟังก์ชันของสัญญาณเกรเดียนต์ให้เหมาะสมที่สุด โดยกำหนดให้ลดค่าความแปรปรวนให้น้อยที่สุด และมีรูปแบบของสมการสำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองดังนี้ คือ

$$a(n+1) = a(n) - \mu \cdot y(n) \cdot \frac{g(n)}{1 + \mu \cdot g^2(n)} \quad (5.40)$$

$$a(n+1) = a(n) - \mu \cdot y(n) \cdot \frac{g(n)}{1 + \varepsilon \cdot g^2(n)} \quad , \varepsilon \geq \mu \quad (5.41)$$

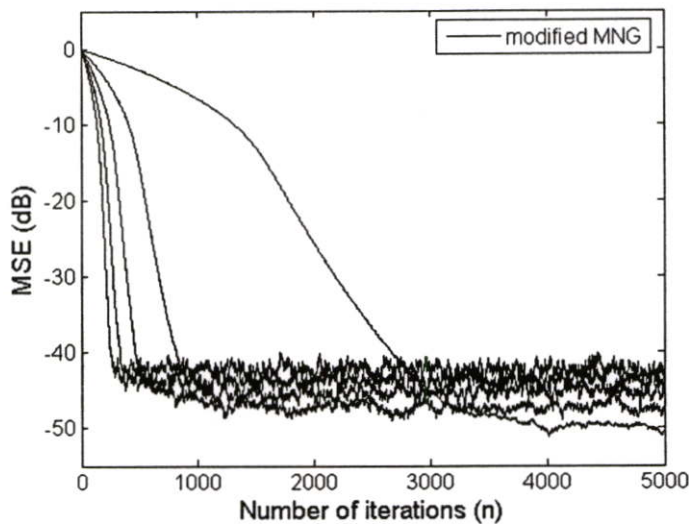
เมื่อ  $a(n)$  คือค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง  $y(n)$  คือสัญญาณเอาต์พุตของตัวกรอง  $g(n)$  คือค่าเกรเดียนต์  $\mu$  คือ ค่าก้าวกระโดด และ  $\varepsilon$  คือพารามิเตอร์ที่เป็นค่าอิสระ เมื่อ  $\varepsilon \geq \mu$  สมการที่ (5.40) จะให้ความเร็วในการเข้าสู่ที่เท่ากับอัลกอริทึมแบบ PG แต่จะให้ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ที่ต่ำกว่า และในสมการที่ (5.41) ความเร็วและค่าความแปรปรวนจะขึ้นอยู่กับค่าการกำหนดค่าของพารามิเตอร์

$\varepsilon$  ยิ่งมีค่ามาก ยิ่งทำให้ค่าความแปรปรวนต่ำ อย่างไรก็ตาม อัลกอริทึมแบบ MNG นี้ มีความซับซ้อนในการคำนวณกว่าอัลกอริทึมแบบ PG เล็กน้อย

อะแดปทีฟอัลกอริทึมแบบ Modified-MNG [8] เป็นอัลกอริทึมที่ปรับปรุงมาจากอัลกอริทึมแบบ MNG ซึ่งทำให้อัลกอริทึมมีความเร็วในการลู่เข้าเพิ่มขึ้นมากและยังลดความยุ่งยากในการคำนวณ ซึ่งสมการสำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึมนี้ แสดงได้ดังสมการที่ (5.30)

$$a(n+1) = a(n) - \mu \cdot y(n) \cdot \operatorname{sgn} \left[ \frac{g(n)}{1 + g(n)} \right] \quad (5.42)$$

เมื่อค่าก้าวกระโดด  $\mu$  มีผลต่อความเร็วในการลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริงของอะแดปทีฟอัลกอริทึม นอกจากนั้นแล้ว ค่าก้าวกระโดดยังมีผลต่อความละเอียดในการคำนวณค่า ยิ่งค่าก้าวกระโดดมีค่าสูง ความเร็วในการลู่เข้าของอัลกอริทึมก็ยิ่งเร็ว แต่ในขณะเดียวกัน ความละเอียดในการคำนวณค่าก็ลดลง ทำให้มีความผิดพลาดสูงขึ้น เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดต่ำ จะทำให้ความละเอียดในการคำนวณค่าเพิ่มขึ้น และมีค่าความผิดพลาดต่ำลง แต่ความเร็วในการลู่เข้าก็จะช้าตามไปด้วย รูปที่ 5.4 แสดงค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึมแบบ Modified MNG เมื่อ กำหนดให้ค่าก้าวกระโดดมีค่าต่าง ๆ กัน



รูปที่ 5.7 แสดงค่า MSE ของอัลกอริทึมแบบ Modified MNG เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดมีค่าต่าง ๆ กัน

## 5.5 อะแดปทีฟอัลกอริทึมที่ใช้ในการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนออะแดปทีฟอัลกอริทึมที่ทำการดัดแปลงจากอัลกอริทึมแบบ Modified-MNG คือ อัลกอริทึมแบบ VSS (Variable step-size algorithm), NRVSS (Noise-robust variable step-size algorithm) และ VNB (Variable notch bandwidth algorithm) โดยจะนำมาเปรียบเทียบกันในทุกๆ โครง

สร้างรูปแบบโดยตรง และแลตทิซ อะแดปทีฟอัลกอริทึมแต่ละแบบต่างก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับงานที่จะนำไปใช้งาน อย่างไรก็ตามข้อพิจารณาในการใช้อัลกอริทึมได้กล่าวไว้ข้างต้นแล้ว

### 5.5.1 อัลกอริทึมแบบ VSS (Variable step-size algorithm) [38]

ความพยายามในการปรับค่าก้าวกระโดด ในขณะที่มีการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง เพื่อลดสัญญาณรบกวนแบบเกรเดียนต์ (Gradient noise) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อใช้อัลกอริทึมบนพื้นฐานของเกรเดียนต์ (Gradient-based algorithm) จึงมีผู้ทำการพัฒนาอัลกอริทึมแบบปรับค่าก้าวกระโดด หรือ VSS (Variable step-size algorithm) ขึ้น [9-15] อัลกอริทึมที่น่าสนใจ คือการนำเอา auto-correlation ระหว่าง  $y(n)y(n-1)$  เพื่อควบคุมการปรับค่าก้าวกระโดดของอัลกอริทึม ซึ่งนอกจากจะเพิ่มความเร็วในการปรับตัวของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองและลดสัญญาณรบกวนแบบเกรเดียนต์ลงได้ ทำให้ค่า steady-state mean-square error (MSE) ต่ำลงมากแล้ว ยังสามารถทนทาน (Robustness) ต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ได้ดีอีกด้วย

#### 5.5.1.1 โครงสร้างแบบโดยตรง

สมการของการปรับตัวซึ่งใช้สำหรับปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง ในสมการที่ (5.42) ซึ่งจะเปลี่ยนจากค่าก้าวกระโดดแบบคงที่  $\mu$  ให้เป็นค่าก้าวกระโดดแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา  $\mu_d(n)$  สำหรับตัวกรองโครงสร้างแบบโดยตรง ดังนั้นจะได้สมการสำหรับการปรับตัวใหม่ ดังนี้

$$a(n+1) = a(n) - \mu_d(n) \cdot y_d(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_d(n)}{1 + g_d(n)}\right) \quad (5.43)$$

ให้  $a(n)$  เป็นสัมประสิทธิ์ปรับตัวของโครงสร้างแบบโดยตรง  $y_d(n)$  คือเอาต์พุตของตัวกรอง แสดงได้ดังสมการที่ (5.5) และ  $g_d(n)$  คือสมการค่าเกรเดียนต์ของตัวกรองโครงสร้างแบบโดยตรงดังสมการที่ (5.6) เทคนิค Variable step-size ที่นำเสนอใน [9] ใช้ auto-correlation ของสัญญาณเอาต์พุตสำหรับการปรับค่าก้าวกระโดด โดยค่าประมาณของเวลาเฉลี่ยของ auto-correlation ระหว่าง  $y_d(n)y_d(n-1)$  คือ

$$\varphi_d(n) = \beta_d \cdot \varphi_d(n-1) + (1 - \beta_d) \cdot y_d(n) \cdot y_d(n-1) \quad (5.44)$$

เมื่อ  $\beta_d$  คือค่าคงที่ที่เรียกว่า Exponential weighting ซึ่งเป็นค่าที่คอยควบคุมการปรับเปลี่ยนของค่าก้าวกระโดด มีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \beta_d < 1$

ในการปรับตัวช่วงแรก ค่าประมาณของ  $\varphi^2(n)$  จะสูง และทำให้ค่าก้าวกระโดดสูงด้วย และเมื่อการปรับสัมประสิทธิ์เข้าใกล้ค่าที่แท้จริง ค่าของ  $\varphi^2(n)$  จะเข้าใกล้ศูนย์ ทำให้ค่าก้าวกระโดดต่ำลง สมการสำหรับการปรับค่าก้าวกระโดดของ VSS คือ

$$\mu_d(n+1) = \alpha_d \cdot \mu_d(n) + \gamma_d \cdot \varphi_d^2(n) \quad (5.45)$$

เมื่อ  $\alpha_d$  คือตัวแปรที่เป็นค่าคงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 เพื่อการประมาณค่าที่ดีควรมีค่าเข้าใกล้ 1 และ  $\gamma_d$  คือ ค่าคงที่มีค่าน้อยและมีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \gamma < 1$

### 5.5.1.2 โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ

สมการสำหรับปรับสัมประสิทธิ์ของโครงสร้างรูปแบบแลตทิซของอัลกอริทึม VSS แสดงได้ดังนี้

$$k(n+1) = k(n) - \mu_l(n) \cdot y_l(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_l(n)}{1 + g_l(n)}\right) \quad (5.46)$$

ให้  $k(n)$  เป็นสัมประสิทธิ์ของโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ  $y_l(n)$  คือเอาต์พุตของตัวกรองที่มีโครงสร้างรูปแบบแลตทิซแสดงดังสมการที่ (5.9)  $u(n)$  คือสัญญาณในสมการที่ (5.10) และสมการสัญญาณกรเดียนต์สำหรับโครงสร้างรูปแบบแลตทิซแสดงได้ดังสมการที่ (5.11) และค่าประมาณของเวลาเฉลี่ยของ  $y_l(n)y_l(n-1)$  คือ

$$\varphi_l(n) = \beta_l \cdot \varphi_l(n-1) + (1 - \beta_l) \cdot y_l(n) \cdot y_l(n-1) \quad (5.47)$$

สมการสำหรับการปรับค่าก้าวกระโดดของ VSS คือ

$$\mu_l(n+1) = \alpha_l \cdot \mu_l(n) + \gamma_l \cdot \varphi_l^2(n) \quad (5.48)$$

### 5.5.2 อัลกอริทึมแบบ NRVSS (Noise-robust variable step-size) [39]

ใน [16] เป็นเทคนิคการปรับค่าก้าวกระโดดโดยเพิ่มการปรับตัวแปรอัตโนมัติขึ้นอีกหนึ่งขั้นของตัวกรองที่มีโครงสร้างแบบแลตทิซ โดยเปลี่ยนตัวแปรที่ใช้ควบคุมการปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดด  $\alpha$  ให้เป็นตัวแปรแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา  $\alpha(n)$  โดยใช้ความสัมพันธ์ของสัญญาณผิดพลาดระหว่างอินพุตและเอาต์พุต ซึ่งมีผลทำให้อัลกอริทึมสามารถทนทานต่อสัญญาณรบกวนที่มีแอมพลิจูดสูงได้ดีขึ้น

### 5.5.2.1 โครงสร้างรูปแบบโดยตรง

สมการของการปรับตัวซึ่งใช้สำหรับปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่มีโครงสร้างรูปแบบโดยตรงของอัลกอริทึมแบบ NRVSS แสดงได้ดังสมการที่ (5.49) ดังนี้

$$a(n+1) = a(n) - \mu_d(n) \cdot y_d(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_d(n)}{1 + g_d(n)}\right) \quad (5.49)$$

ให้  $a(n)$  เป็นสัมประสิทธิ์ปรับตัวของโครงสร้างรูปแบบโดยตรง และค่าประมาณของเวลาเฉลี่ยของ  $y_d(n)y_d(n-1)$  คือ

$$\varphi_d(n) = \beta_d \cdot \varphi_d(n-1) + (1 - \beta_d) \cdot y_d(n) \cdot y_d(n-1) \quad (5.50)$$

เมื่อ  $\beta_d$  คือค่าคงที่ที่เรียกว่า exponential weighting ซึ่งเป็นค่าที่คอยควบคุมการปรับเปลี่ยนของค่าก้าวกระโดด มีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \beta_d < 1$

สมการสำหรับการปรับค่าก้าวกระโดดของอัลกอริทึม VSS คือ

$$\mu_d(n+1) = \alpha_d(n) \cdot \mu_d(n) + \gamma_d \cdot \varphi_d^2(n) \quad (5.51)$$

เมื่อ  $\gamma_d$  คือ ค่าคงที่ที่มีค่าน้อยและมีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \gamma_d \ll 1$  และ  $\alpha_d(n)$  คือตัวแปรที่ใช้ควบคุมสมการสำหรับปรับค่าก้าวกระโดด โดยเปลี่ยนจากค่าคงที่ ให้เป็นตัวแปรที่เปลี่ยนตามเวลา และสมการสำหรับปรับค่านี้คือ

$$\alpha_d(n) = \varepsilon_d \cdot \alpha_d(n-1) + (1 - \varepsilon_d) \cdot e_d(n) \cdot e_d(n-1) \quad (5.52)$$

โดยที่

$$e_d(n) = x(n) - y_d(n) \quad (5.53)$$

เมื่อ  $\varepsilon_d$  เป็นค่าคงที่ที่มีค่าระหว่าง  $0 < \varepsilon_d < 1$

### 5.5.2.2 โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ

สมการของการปรับตัวซึ่งใช้สำหรับปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่มีโครงสร้างรูปแบบแลตทิซของอัลกอริทึมแบบ NRVS แสดงได้ดังสมการที่ (5.54) ดังนี้

$$k(n+1) = k(n) - \mu_l(n) \cdot y_l(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_l(n)}{1 + g_l(n)}\right) \quad (5.54)$$

ให้  $k(n)$  เป็นสัมประสิทธิ์ปรับตัวของโครงสร้างรูปแบบโดยตรง และค่าประมาณของเวลาเฉลี่ยของ  $y_l(n) y_l(n-1)$  คือ

$$\varphi_l(n) = \beta_l \cdot \varphi_l(n-1) + (1 - \beta_l) \cdot y_l(n) \cdot y_l(n-1) \quad (5.55)$$

เมื่อ  $\beta_l$  คือค่าคงที่ที่เรียกว่า exponential weighting ซึ่งเป็นค่าที่คอยควบคุมการปรับเปลี่ยนของค่าก้าวกระโดด มีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \beta_l < 1$

สมการสำหรับการปรับค่าก้าวกระโดดของอัลกอริทึม NRVS คือ

$$\mu_l(n+1) = \alpha_l(n) \cdot \mu_l(n) + \gamma_l \cdot \varphi_l^2(n) \quad (5.56)$$

เมื่อ  $\gamma_l$  คือ ค่าคงที่ที่มีค่าน้อยและมีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \gamma_l \ll 1$  และ  $\alpha_l(n)$  คือตัวแปรที่ใช้ควบคุมสมการสำหรับปรับค่าก้าวกระโดด โดยเปลี่ยนจากค่าคงที่ ให้เป็นตัวแปรที่เปลี่ยนตามเวลา และสมการสำหรับปรับค่านี้อคือ

$$\alpha_l(n) = \varepsilon_l \cdot \alpha_l(n-1) + (1 - \varepsilon_l) \cdot e_l(n) \cdot e_l(n-1) \quad (5.57)$$

โดยที่

$$e_l(n) = x(n) - y_l(n) \quad (5.58)$$

เมื่อ  $\varepsilon_l$  เป็นค่าคงที่ที่มีค่าระหว่าง  $0 < \varepsilon_l < 1$

### 5.5.3 อัลกอริทึมแบบ VNB (Variable notch bandwidth)

อัลกอริทึมแบบ variable notch bandwidth (VNB) เป็นอัลกอริทึมที่ใช้การปรับเปลี่ยนความกว้างแถบความถี่หยุดของวงจรกรอง โดยเปลี่ยนตัวแปร  $\rho$  ให้เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของอัลกอริทึมจะเปลี่ยนจากสมการที่ (5.1) จาก  $\rho$  เป็น  $\rho(n)$  ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับอัลกอริทึมแบบ VNB

$$H_d(z) = \frac{1 + a(n)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \rho(n)a(n)z^{-1} + \rho(n)^2 z^{-2}} \quad (5.59)$$

และจะได้สมการเอาต์พุตของตัวกรองเป็น

$$y_d(n) = x(n) + a(n) \cdot x(n-1) + x(n-2) - a(n) \cdot \rho(n) \cdot y(n-1) - \rho(n)^2 \cdot y(n-2) \quad (5.60)$$

และเกรเดียนต์ของตัวกรอง

$$g_d(n) = x(n-1) - \rho(n)y(n-1) \quad (5.61)$$

และในทำนองเดียวกัน สำหรับตัวกรองโครงสร้างแลตทิซที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ (5.7) เปลี่ยน  $\rho$  ให้เป็นตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา  $\rho(n)$  จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับตัวกรองโครงสร้างแบบแลตทิซใหม่คือ

$$H_l = \frac{1 + 2k(n)z^{-1} + z^{-2}}{1 + k(n)(1 + \rho(n))z^{-1} + \rho(n)z^{-2}} \quad (5.62)$$

และจะได้สมการเอาต์พุตของตัวกรองใหม่คือ

$$y_l(n) = u(n) + 2 \cdot k(n) \cdot u(n-1) + u(n-2) \quad (5.63)$$

โดยที่

$$u(n) = x(n) - k(n) \cdot (1 + \rho(n)) \cdot u(n-1) - \rho(n) \cdot u(n-2) \quad (5.64)$$

และสมการเกรเดียนต์แสดงได้ดังนี้

$$g_l(n) = (1 - \rho(n))u(n-1) \quad (5.65)$$

### 5.5.3.1 โครงสร้างรูปแบบโดยตรง

สมการสำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่มีโครงสร้างรูปแบบโดยตรง แสดงได้ดังสมการที่ (5.59)

$$a(n+1) = a(n) - \mu_d(n) \cdot y_d(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_d(n)}{1 + g_d(n)}\right) \quad (5.66)$$

สมการค่าประมาณของเวลาเฉลี่ยของ  $y_d(n)y_d(n-1)$  คือ

$$\varphi_d(n) = \beta \cdot \varphi_d(n-1) + (1 - \beta) \cdot y_d(n) \cdot y_d(n-1) \quad (5.67)$$

สมการสำหรับปรับค่าก้าวกระโดดคือ

$$\mu_d(n+1) = \alpha(n) \cdot \mu_d(n) + \gamma \cdot \varphi_d^2(n) \quad (5.68)$$

สมการสำหรับปรับค่าตัวแปร  $\alpha(n)$  ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาคือ

$$\alpha(n) = \varepsilon \cdot \alpha(n-1) + (1 - \varepsilon) \cdot e(n) \cdot e(n-1) \quad (5.69)$$

และ

$$e(n) = x(n) - y(n) \quad (5.70)$$

และเกรเดียนต์ของตัวกรองโครงสร้างรูปแบบโดยตรง เมื่อ  $\rho(n)$  เปลี่ยนแปลงตามเวลาคือ

$$g_{d\rho}(n) = a(n)y(n-1) - \rho(n)y(n-2) \quad (5.71)$$

สมการที่ใช้ควบคุมตัวแปร  $\rho(n)$  คือ

$$\rho(n+1) = \rho(n) - \mu(n)e(n)\operatorname{sgn}[g_{d\rho}(n)] \quad (5.72).$$

### 5.5.3.2 โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ

สำหรับโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ สมการสำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองแสดงได้ดังสมการที่ (5.13)

$$k(n+1) = k(n) - \mu_l(n) \cdot y_l(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_l(n)}{1+g_l(n)}\right) \quad (5.73)$$

เมื่อ  $g_l(n)$  คือสมการของสัญญาณเกรเดียนต์ที่ได้จากตัวกรองโครงสร้างแลตทิซ และสมการสำหรับปรับค่าก้าวกระโดดแสดงได้ดังสมการที่ (5.14)

$$\mu_d(n+1) = \alpha(n) \cdot \mu_d(n) + \gamma \cdot \varphi_d^2(n) \quad (5.74)$$

โดยที่สมการค่าประมาณของ auto-correlation ของ  $y(n)y(n-1)$  แสดงได้ดังสมการที่ (5.15)

$$\varphi_d(n) = \beta \cdot \varphi_d(n-1) + (1-\beta) \cdot y_d(n) \cdot y_d(n-1) \quad (5.75)$$

สมการสำหรับปรับตัวแปร  $\alpha(n)$  ซึ่งถูกปรับโดย auto-correlation ของ  $e(n)e(n-1)$  แสดงได้ดังสมการ

$$\alpha(n) = \varepsilon \cdot \alpha(n-1) + (1-\varepsilon) \cdot e(n) \cdot e(n-1) \quad (5.76)$$

โดยที่

$$e(n) = x(n) - y(n) \quad (5.77)$$

และเกรเดียนต์ของตัวกรองเมื่อ  $\rho$  เปลี่ยนแปลงตามเวลา

$$g_{l\rho} = \nabla_{\rho} y_l(n) \quad (5.78)$$

$$g_{l\rho} = -(k(n)u(n-1) + u(n-2)) \quad (5.79)$$

และ

$$\rho(n+1) = \rho(n) - \mu(n)e(n) \operatorname{sgn}[g_{l\rho}(n)] \quad (5.80)$$

## 5.6 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงตัวกรองแบบอะแดปทีฟ IIR แบบนอตซ์อันดับสอง ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ โดยเริ่มจากแนวความคิดของการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบอะแดปทีฟ พื้นฐานของตัวกรองแบบอะแดปทีฟ คือการนำเอาสัญญาณผิดพลาดของตัวกรองมาใช้เพื่อปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเพื่อให้สัมพันธ์กับสภาพของสัญญาณ สิ่งที่สำคัญของตัวกรองแบบอะแดปทีฟคืออัลกอริทึมในการปรับตัว คุณสมบัติของอะแดปทีฟอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพคือสามารถปรับตัวได้เร็ว และถูกต้อง สามารถติดตามสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงได้ มีความทนทานต่อการรบกวน มีความซับซ้อนในการคำนวณรวมถึงโครงสร้างของอัลกอริทึมน้อย โครงสร้างที่น่าสนใจของตัวกรองแบบอะแดปทีฟคือโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ ที่สามารถลดจำนวนของการคำนวณไปได้ ทำให้การทำงานและการควบคุมประสิทธิภาพของอัลกอริทึมง่ายขึ้น วิธีของการปรับตัวของตัวกรองสามารถแบ่งออกได้เป็นสองแบบคือ Stochastic gradient approach และ Least-squares estimation โดยที่วิธี gradient-based โดยใช้พื้นฐานของ steepest descent จะเป็นวิธีที่ง่าย ไม่ต้องใช้สมการที่ยุ่งยาก ใช้วิธีการปรับสัมประสิทธิ์โดยการใช้ cost function ของสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง ตัวอย่างของอัลกอริทึมที่อยู่ในตระกูลของ gradient-based คืออัลกอริทึมแบบ LMS ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่ง่ายและให้ประสิทธิภาพที่น่าพอใจ ส่วนอัลกอริทึมแบบ MNG เป็นอัลกอริทึมที่ปรับปรุงมาจากอัลกอริทึมแบบ PG ซึ่งสามารถลดความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ไปได้ อัลกอริทึมที่น่าเสนอในวิทยานิพนธ์เป็นการนำเอาอัลกอริทึมที่ปรับปรุงมาจากอัลกอริทึมแบบ MNG เรียกว่าอัลกอริทึมแบบ Modified MNG ซึ่งให้ความเร็วในการปรับตัวเร็วกว่าอัลกอริทึมแบบเดิม โดยนำเอาอัลกอริทึมแบบ VSS เป็นวิธีการปรับค่าก้าวกระโดดที่เป็นตัวแปรสำคัญของการปรับตัว โดยที่เทคนิคนี้ใช้ค่าก้าวกระโดดที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา สามารถลดสัญญาณรบกวน ทำให้ค่า variance และ MSE ลดลง นอกจากนั้นแล้วยังสามารถปรับปรุงการปรับค่าก้าวนี้ได้อีกโดยปรับตัวแปรซึ่งใช้ถ่วงน้ำหนักของสมการการปรับตัวเรียกว่าอัลกอริทึมแบบ NRVS อัลกอริทึมนี้ให้ความทนทานต่อการรบกวนของสัญญาณรบกวนได้ดี อัลกอริทึมสุดท้ายคือ VNB ซึ่งเป็นการปรับตัวแปรซึ่งควบคุมความกว้างของแถบความถี่หุคของตัวกรองไปพร้อมกับการปรับค่าก้าวกระโดด ทำให้การปรับสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึมเร็วขึ้น แล้วยังเพิ่มความถูกต้องของสัมประสิทธิ์อีกด้วย

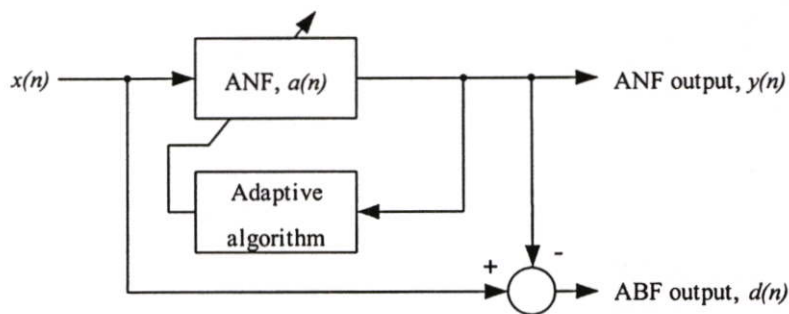
## บทที่ 6

### ผลการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึง ผลการทำงานของอะแดปทีฟอัลกอริทึม ที่ได้นำเสนอไว้ในบทที่ 5 โดยเปรียบเทียบการทำงานกับอัลกอริทึมแบบ Modified MNG [8] ทดสอบการทำงานโดยการจำลองการทำงาน (Simulation) ด้วยโปรแกรม MATLAB อัลกอริทึมที่คิดควรมีประสิทธิภาพคือ สามารถปรับตัวเพื่อหาคำตอบของสัมประสิทธิ์ได้อย่างรวดเร็ว และมีความถูกต้อง นอกจากนั้นแล้วยังควรทนทานต่อสัญญาณรบกวนได้ดีอีกด้วย

#### 6.1 การประมาณสัญญาณไซน์คลื่นเดียวในสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน

หัวข้อนี้ เป็นการประยุกต์ใช้งาน ANF สำหรับการประมาณค่าสัญญาณไซน์ที่ไม่ทราบความถี่ในสัญญาณรบกวนสองชนิด คือ สัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน (White Gaussian noise, WGN) และสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ (Impulse noise) โดยจะทำการเปรียบเทียบผลการทำงานของอะแดปทีฟอัลกอริทึมแต่ละแบบในโครงสร้าง 2 แบบ คือ โครงสร้างแบบโดยตรง และโครงสร้างแบบแลตทิซ โดยใช้เงื่อนไขในการทดสอบให้เหมือนกัน ซึ่งจะทำให้สามารถเปรียบเทียบสมรรถนะของอะแดปทีฟอัลกอริทึมแต่ละแบบได้อย่างชัดเจน แผนภาพบล็อกสำหรับการประมาณค่าความถี่ แสดงได้ดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 แผนภาพบล็อกสำหรับการประมาณค่าสัญญาณไซน์ในสัญญาณรบกวนโดยใช้ ANF

จากรูปที่ 6.1  $x(n)$  คือสัญญาณอินพุต ประกอบด้วยสัญญาณไซน์ความถี่เดียว และสัญญาณรบกวนสามารถกำหนดได้ตามสมการ

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi) + v(n) \quad (6.1)$$

เมื่อ  $A$  แทนขนาดของสัญญาณไซน์

$\omega_0$  เป็นความถี่ดิจิทัลที่ไม่ทราบค่า มีค่าอยู่ในช่วง  $[0, \pi]$

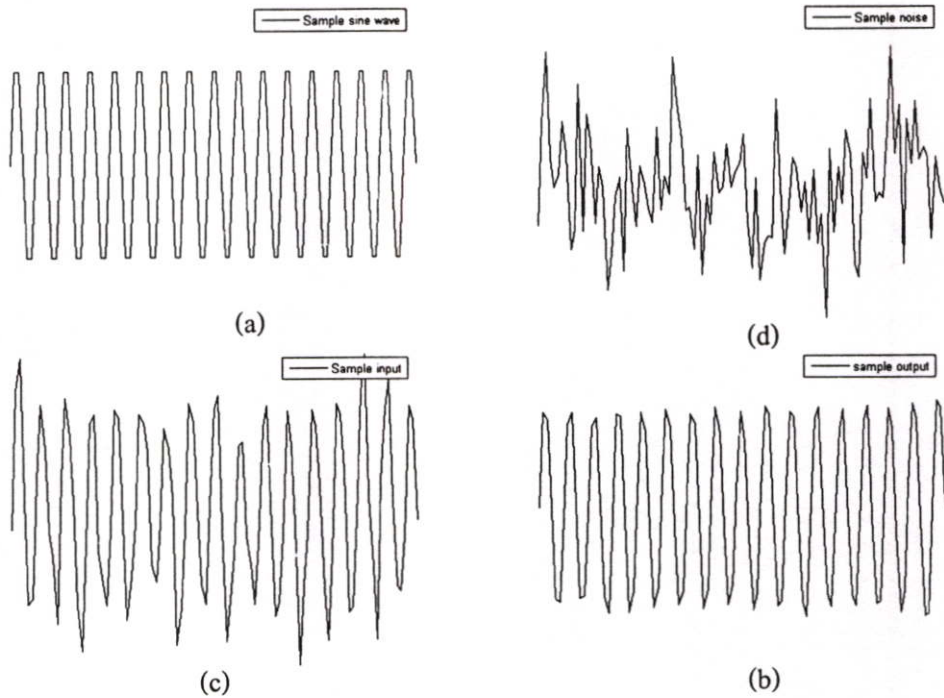
$\phi$  แทนเฟสของสัญญาณมีค่าอยู่ในช่วง  $[0, 2\pi]$

$v(n)$  คือสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน หรือแบบอิมพัลส์

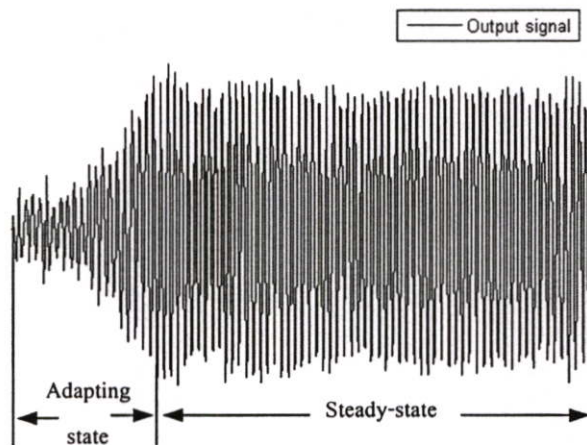
$y(n)$  เป็นสัญญาณเอาต์พุตของ ANF ซึ่งหลังจากถูกรับแล้ว  $y(n) \approx v(n)$  ความถี่ที่ประมาณได้จะคู่ได้จากสัมประสิทธิ์  $a(n)$  และ  $k(n)$  ของตัวกรอง ซึ่งสัมประสิทธิ์ของตัวกรองควรจะลู่เข้าสู่ค่า  $-2\cos(\omega_0)$  และ  $-\cos(\omega_0)$  ตามลำดับ

$d(n)$  เป็นสัญญาณเอาต์พุตของ Band-pass filter, BPF ถ้าทำการประมาณได้อย่างสมบูรณ์ จะได้  $d(n) \approx A\sin(\omega_0 n + \theta)$

ลักษณะของสัญญาณต่าง ๆ ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ ที่ใช้ในการจำลองผลการประมาณค่าความถี่สัญญาณไซน์แสดงได้ดังรูปที่ 6.2 ในรูป (a) เป็นลักษณะของสัญญาณไซน์ที่มีความถี่เท่ากับ  $\pi/3$  เรเดียน และมีขนาดของสัญญาณเท่ากับหนึ่งหน่วย ( $A=1$ ) ในรูป (b) เป็นลักษณะของสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน (Gaussian noise, WGN) ที่มี  $SNR = 10$  dB ในรูป (c) สัญญาณไซน์ที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนที่ใช้เป็นอินพุตของระบบ และ (d) สัญญาณเอาต์พุตซึ่งเป็นสัญญาณไซน์ที่ถูกประมาณแล้วจากการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึม ความสมบูรณ์ของสัญญาณที่ถูกประมาณแล้วจะขึ้นอยู่กับคุณภาพของการประมาณค่าของอัลกอริทึม โดยที่รูปที่ 6.3 แสดงลักษณะของสัญญาณเอาต์พุตขณะที่เกิดการปรับตัวของอัลกอริทึม จากรูปที่ได้จะเห็นว่าการทำงานของระบบจะมีช่วงการทำงานที่สำคัญสองช่วง คือ ช่วงปรับตัวของอัลกอริทึม (Adapting-state) สัญญาณในช่วงแรกจะเป็นสัญญาณไซน์ที่ปนอยู่ในสัญญาณรบกวน และอัลกอริทึมจะทำการปรับตัวเพื่อปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองให้เข้าใกล้ค่าที่แท้จริง ช่วงนี้ค่าของสัมประสิทธิ์ควรจะปรับตัวอย่างรวดเร็ว เพื่อเข้าใกล้ค่าที่แท้จริงของสัมประสิทธิ์เร็วที่สุด และช่วงที่การประมาณค่าของอัลกอริทึมเข้าใกล้ค่าที่แท้จริงของสัมประสิทธิ์ (Steady-state) ช่วงนี้ เมื่อการปรับตัวของอัลกอริทึมช้าลงแสดงว่าสัมประสิทธิ์ได้เข้าใกล้ค่าที่แท้จริงแล้ว การเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์ควรจะน้อยที่สุดเพื่อลดความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์



รูปที่ 6.2 (a) ลักษณะของสัญญาณไซน์ (b) สัญญาณรบกวน (c) สัญญาณอินพุตที่ใช้สำหรับจำลองการทำงานและ (d) สัญญาณเอาต์พุตที่เป็นสัญญาณไซน์ที่ถูกประมาณแล้ว



รูปที่ 6.3 ลักษณะของสัญญาณเอาต์พุตขณะเกิดการปรับตัวของอัลกอริทึม

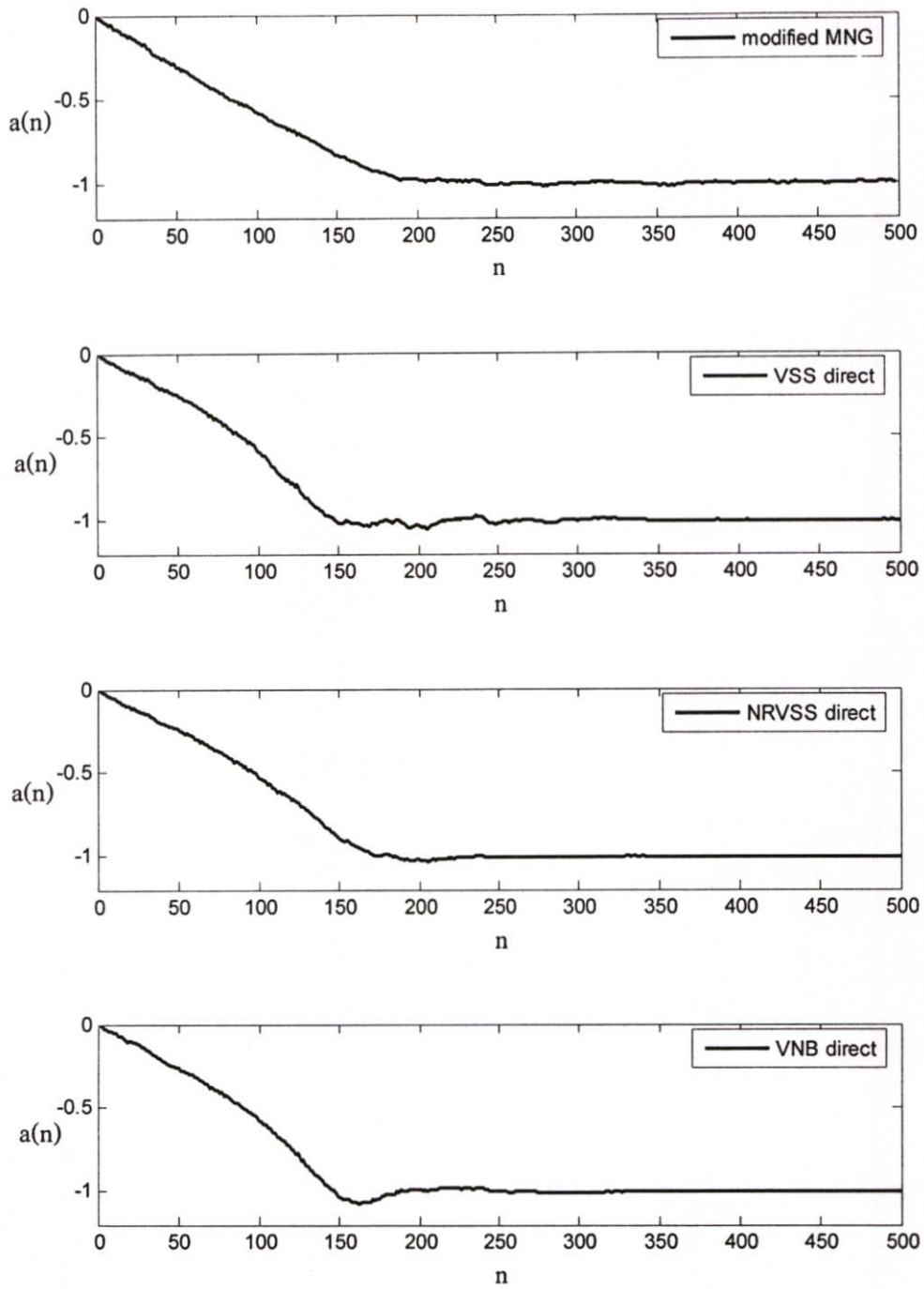
กำหนดตัวแปรสำหรับจำลองการทำงานของอัลกอริทึมทั้งหมดดังนี้คือ ความถี่ของสัญญาณไซน์เท่ากับ  $\omega_0 = \pi/3$  เรเดียน ขนาดของสัญญาณไซน์ได้กำหนดให้เท่ากับหนึ่งหน่วย ( $A = 1$ ) และถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีอัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (Signal-to-noise ratio) หรือ  $SNR = 10$  dB สำหรับโครงสร้างรูปแบบโดยตรง เมื่อกำหนดให้ความถี่ของสัญญาณไซน์  $\omega_0 = \pi/3$  เรเดียน สัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $a(n)$ ” จะถูกรู้ค่า

$-2\cos(\omega_0) = -1$  ซึ่งเป็นคำตอบที่แท้จริง และกำหนดตัวแปรสำหรับจำลองการทำงานของอัลกอริทึมดังนี้  $\alpha = 0.98$  ค่า  $\alpha$  เริ่มต้นสำหรับอัลกอริทึมแบบ NRVSS  $\alpha(0) = 0.98$ ,  $\rho = 0.9$ , ค่า  $\rho$  เริ่มต้นสำหรับอัลกอริทึมแบบ VNB  $\rho(0) = 0.7$ ,  $\beta = 0.99$ ,  $\gamma = 0.01$ , และ  $\varepsilon = 0.0001$  โดยที่ให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้น  $\mu(0)$  มีค่าที่แตกต่างกันเพื่อหาค่าก้าวกระโดดที่เหมาะสม ถ้าค่าก้าวกระโดดมีค่าน้อย การปรับตัวของสัมประสิทธิ์จะช้า แต่ถ้าค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นมีค่ามาก จะทำให้การลู่เข้าของสัมประสิทธิ์ที่ถูกประมาณเร็วขึ้น แต่ก็เกิดการแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ในช่วงแรก แต่จะไม่เกิดการแปรปรวนขึ้น เมื่อสัมประสิทธิ์ลู่เข้าสู่ค่าที่เหมาะสมแล้ว เมื่อกำหนดค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นมากเกินไป ก็จะทำให้อัลกอริทึมทำงานอย่างไม่มีเสถียรภาพ แต่อย่างไรก็ตามค่า  $\mu(0)$  ที่เหมาะสมสำหรับตัวกรอง อะแดปทีฟแบบ IIR นั้น ยังไม่มีข้อสรุปที่แน่นอน ดังนั้นการกำหนดค่า  $\mu(0)$  จึงเป็นการลองผิดลองถูกเพื่อหาค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นที่ใกล้เคียงค่าที่เหมาะสมที่สุด เพื่อให้ลักษณะการลู่เข้าของสัมประสิทธิ์มีลักษณะเรียบที่สุด และขอบเขตของค่าก้าวกระโดดนั้นก็ขึ้นอยู่กับแต่ละอัลกอริทึมแตกต่างกันไปตามลักษณะของการทำงาน

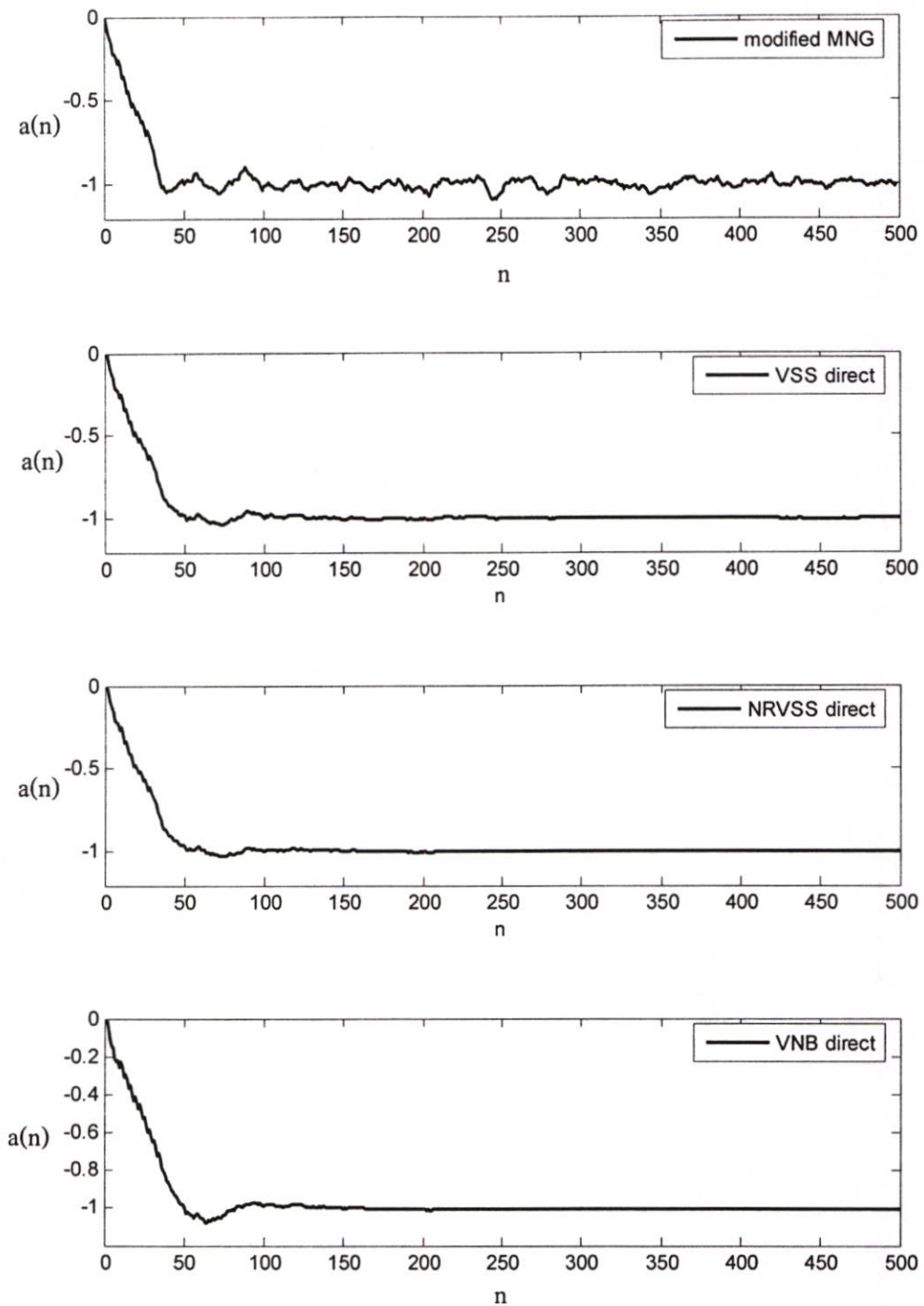
สำหรับโครงสร้างแบบแลตทิส เมื่อกำหนดให้  $\omega_0 = \pi/3$  เรเดียน แล้ว สัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $k(n)$ ” จะลู่เข้าสู่ค่า  $-\cos(\omega_0) = 0.5$  ซึ่งเป็นคำตอบที่แท้จริง กำหนดตัวแปรสำหรับจำลองการทำงานของอัลกอริทึมดังนี้  $\rho = 0.9$ ,  $\rho(0) = 0.7$ ,  $\alpha = 0.98$ ,  $\alpha(0) = 0.98$ ,  $\gamma = 0.01$ , และ  $\varepsilon = 0.0001$  ในการจำลองการทำงานจะใช้การจำลองทำงานเช่นเดียวกันกับโครงสร้างแบบโดยตรง โดยให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้น  $\mu(0)$  มีค่าที่แตกต่างกันเช่นเดียวกับโครงสร้างแบบโดยตรง เพื่อหาค่าก้าวกระโดดที่เหมาะสม ในรูป 6.5 (a)  $\mu(0) = 0.01$ , (b)  $\mu(0) = 0.05$ , และ (c)  $\mu(0) = 0.1$

รูปที่ 6.4 แสดงค่าประมาณสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง เมื่อตัวกรองใช้โครงสร้างแบบโดยตรง เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้น  $\mu(0) = 0.01$  รูปที่ 6.5 กำหนดให้  $\mu(0) = 0.05$  และ รูปที่ 6.6 กำหนดให้  $\mu(0) = 0.1$  ตามลำดับ

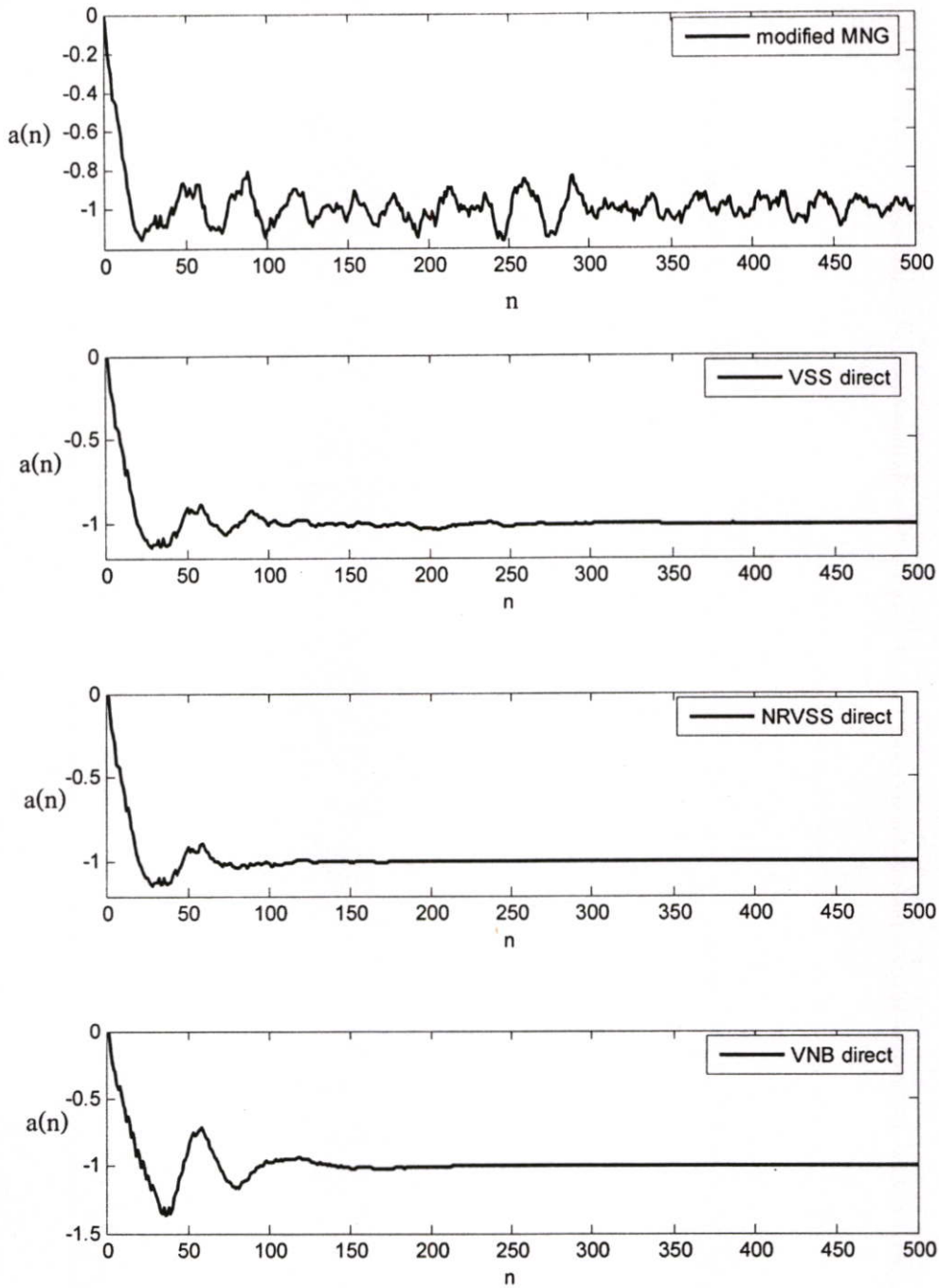
จากรูปที่ 6.4 จะเห็นว่าเมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นมีค่าน้อย อัลกอริทึมแบบ Modified MNG [8] จะปรับสัมประสิทธิ์ได้ช้ากว่าอัลกอริทึมอื่น และยังเกิดความแปรปรวนขึ้น เมื่ออัลกอริทึมเข้าสู่ช่วงสถานะอยู่ตัวแล้ว ส่วนอัลกอริทึมแบบ VSS มีการปรับตัวเร็วกว่าอัลกอริทึมแบบ Modified MNG ลักษณะของช่วงสถานะอยู่ตัวในช่วงแรก จะยังเกิดความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์อยู่เล็กน้อย แต่เมื่อเข้าสู่ช่วงสถานะอยู่ตัวแล้ว จะไม่เกิดความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์อีก และอัลกอริทึมแบบ NRVSS จะมีการปรับตัวที่ใกล้เคียงกับอัลกอริทึมแบบ VSS แต่จะเกิดความแปรปรวนในช่วงที่เข้าสู่สถานะอยู่ตัวของอัลกอริทึมน้อยกว่า สุดท้ายคืออัลกอริทึมแบบ VNB จะเห็นได้ว่าการปรับตัวเร็วกว่าอัลกอริทึมทั้งหมด และในช่วงที่สัมประสิทธิ์ปรับตัวเข้าสู่ค่าที่เหมาะสมแล้ว จะเกิดความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์น้อย



รูปที่ 6.4 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$

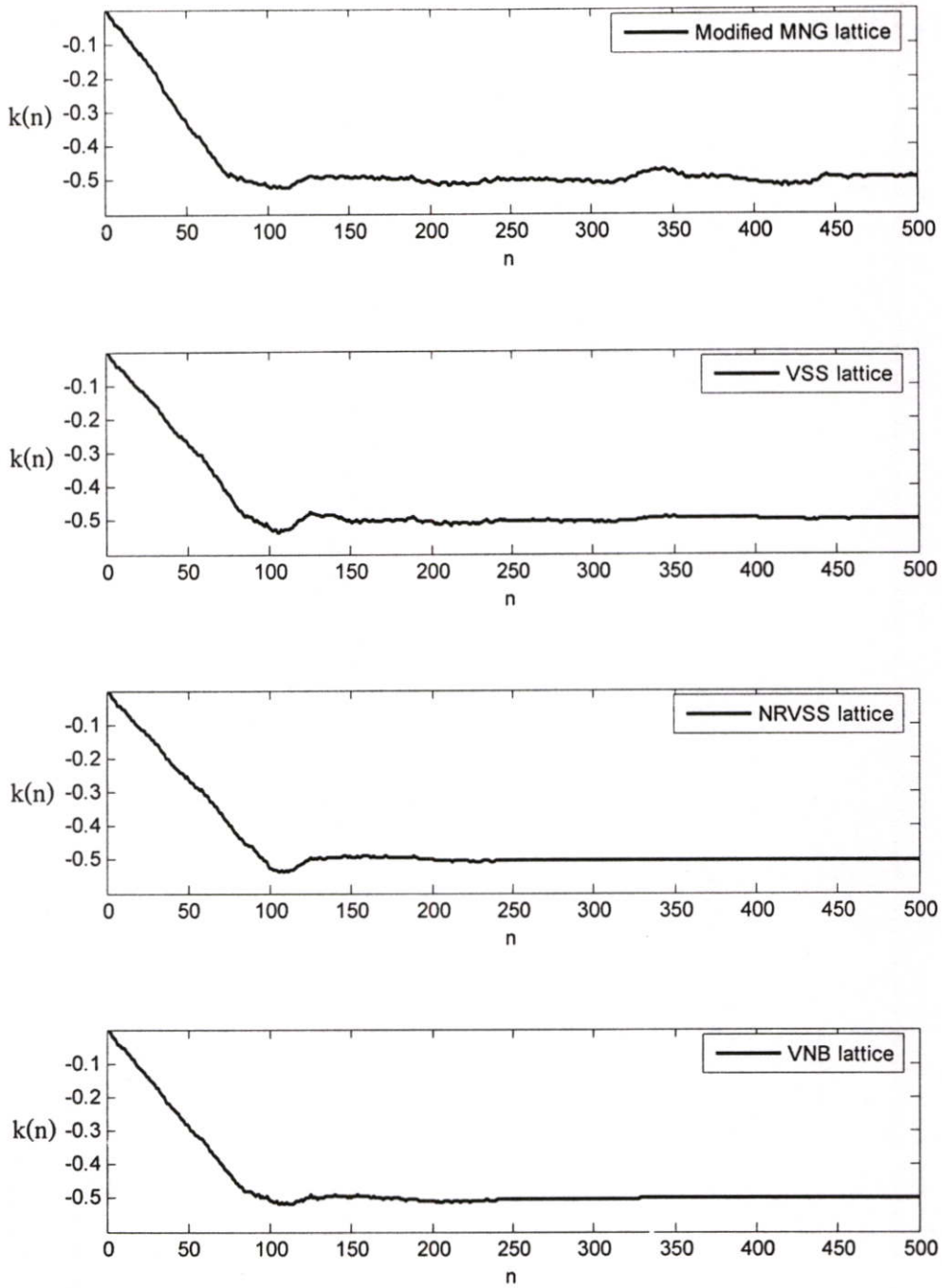


รูปที่ 6.5 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง " $a(n)$ " เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.05$

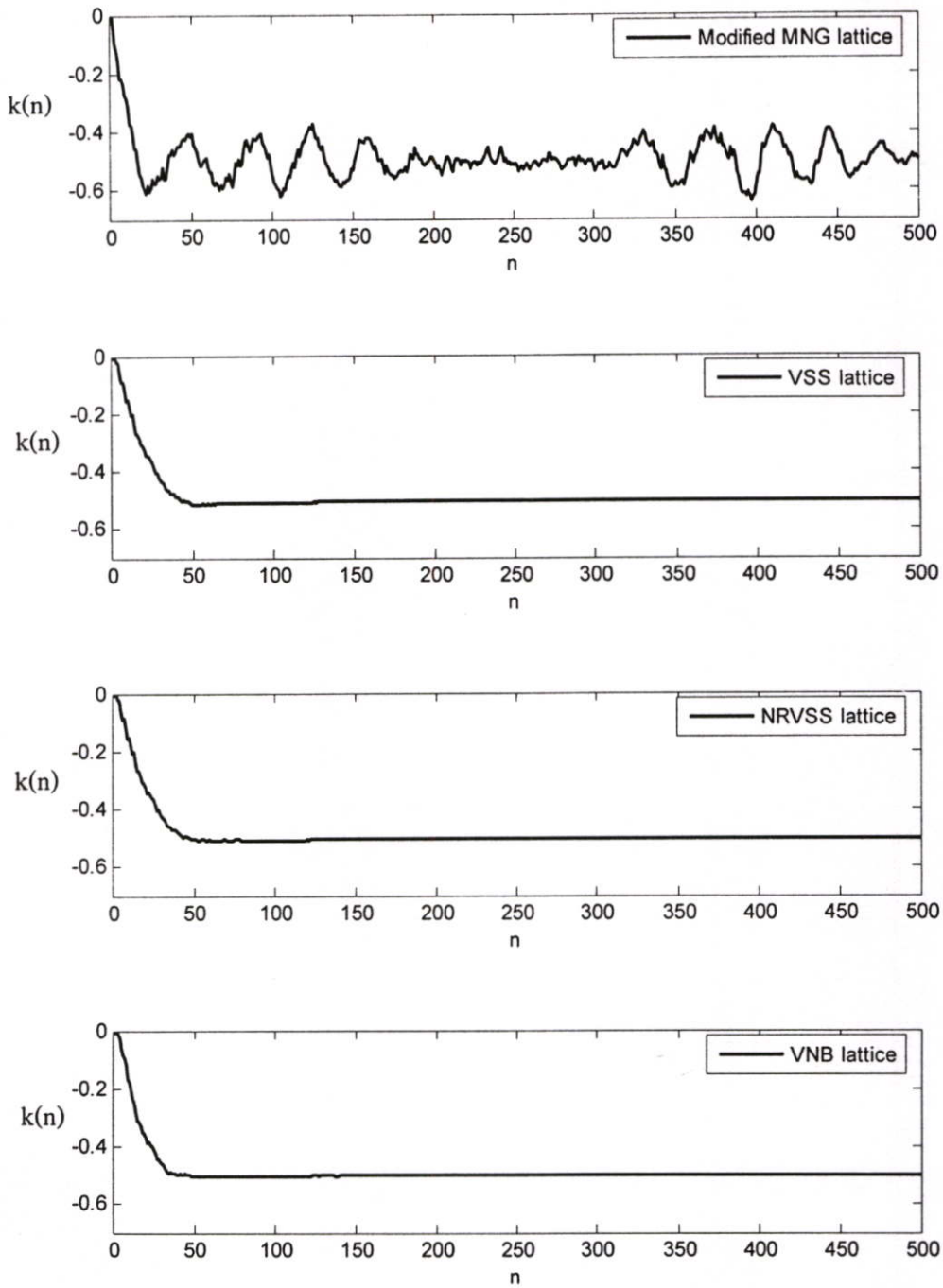


รูปที่ 6.6 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.1$

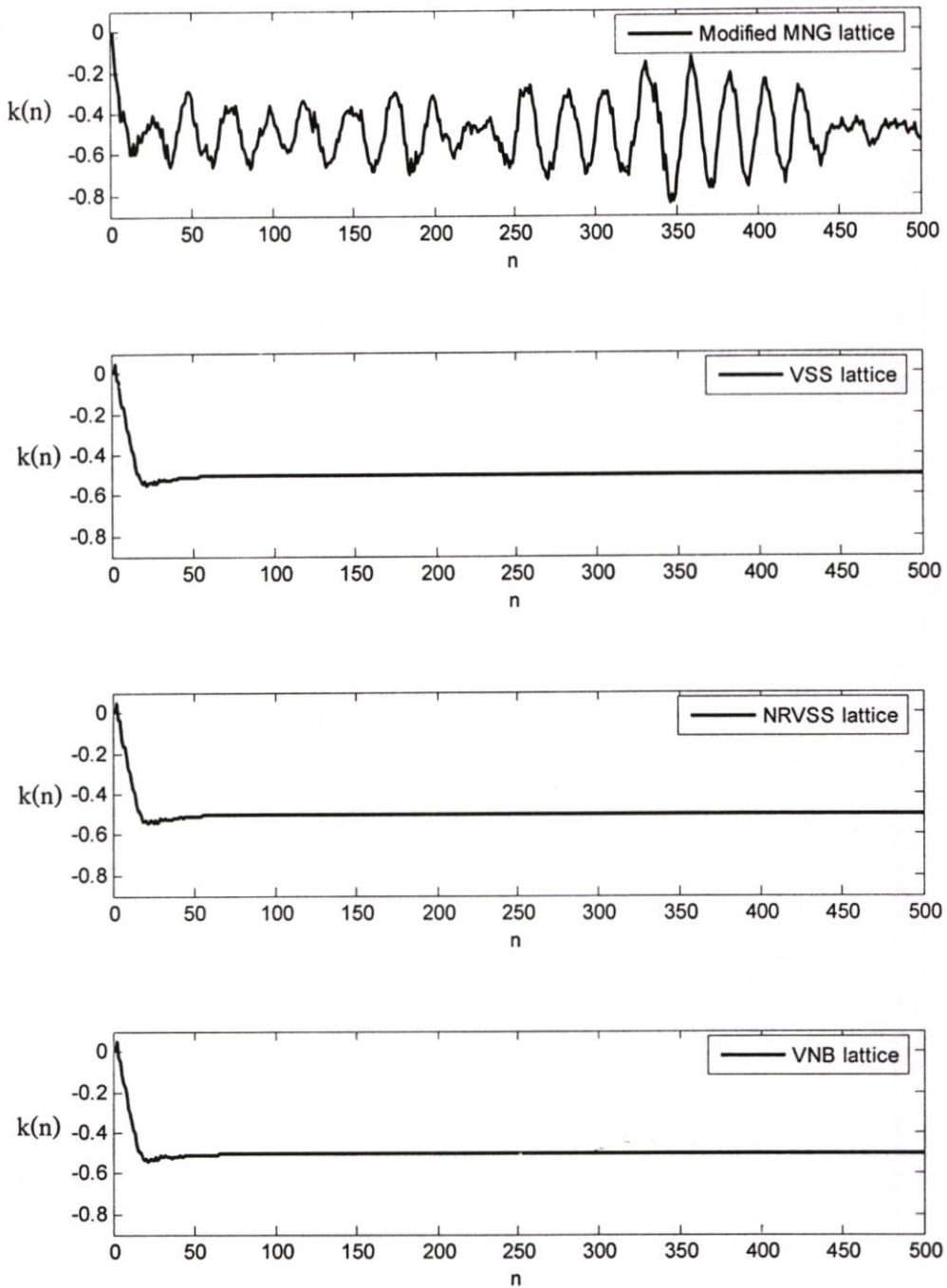
จากรูปที่ 6.5 และ 6.6 เมื่อปรับค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นเพิ่มขึ้น อัลกอริทึมทั้งหมดสามารถปรับสัมประสิทธิ์ได้เร็วขึ้น แต่อัลกอริทึมแบบ Modified MNG จะเกิดความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เพิ่มขึ้นเมื่อเข้าสู่สถานะอยู่ตัว เนื่องจากค่าก้าวกระโดดยังมีผลต่อการปรับตัวของอัลกอริทึมอีก ในขณะที่อัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดจะมีความแปรปรวนเฉพาะช่วงแรกที่สัมประสิทธิ์เข้าสู่ค่าที่เหมาะสมเท่านั้น



รูปที่ 6.7 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$



รูปที่ 6.8 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.05$



รูปที่ 6.9 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.1$

จากรูปที่ 6.7, 6.8 และ 6.9 เป็นการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบแลตทิซ เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นต่างกัน เช่นเดียวกันเมื่อใช้อัลกอริทึมกับตัวกรองที่มีโครงสร้างแบบโดยตรง เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นมีค่าน้อย การปรับตัวของอัลกอริทึมจะช้า แต่มีลักษณะเรียบ ในขณะที่อัลกอริทึมแบบ Modified MNG จะมีความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ตลอดการทำงาน อัลกอริทึมที่ใช้การปรับค่าก้าวกระโดดจะมีความแปรปรวนเพียงช่วง

แรกของการปรับตัวเท่านั้น อัลกอริทึมแบบ VSS จะมีความแปรปรวนเล็กน้อยเมื่ออยู่ในสถานะอยู่ตัว ในขณะที่อัลกอริทึมแบบ NRVS จะมีส่วนของความแปรปรวนน้อยกว่า แต่ความเร็วในการปรับตัวจะใกล้เคียงกัน อัลกอริทึมแบบ VNB จะปรับตัวเร็วกว่า และยังมีความแปรปรวนน้อยกว่า ทั้งสองอัลกอริทึม แต่เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเพิ่มขึ้นดังรูปที่ 6.8 และ 6.9 จะเห็นได้ว่า อัลกอริทึมแบบ Modified MNG มีความแปรปรวนมากตลอดเวลา อัลกอริทึมแบบปรับค่าก้าวกระโดดจะมีความแปรปรวนเช่นกัน แต่เกิดเฉพาะในช่วงที่อัลกอริทึมกำลังจะเข้าสู่สถานะอยู่ตัว เมื่อกำหนดค่าก้าวกระโดดมากจนถึงจุดหนึ่ง อัลกอริทึมจะเกิดความไม่เสถียร

## 6.2 ความถูกต้องของคำตอบ (Misadjustment)

หนึ่งในคุณสมบัติของตัวกรองอะแดปทีฟที่มีประสิทธิภาพคือความถูกต้องของคำตอบ (Misadjustment) สามารถสังเกตได้จากค่า Mean-square error หรือ MSE ซึ่งคำนวณโดยการหาค่าเฉลี่ยทั้งชุดเชิงสถิติของตัวกรองอะแดปทีฟ คือการใช้วิธี Monte Carlo simulation เพื่อหาค่า variance และ bias อย่างประมาณของสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง ทำได้โดยกำหนดจำนวนความยาวของข้อมูลของแต่ละอัลกอริทึมมีค่า  $N = 3000$  ทำการทดลองซ้ำเป็นจำนวน  $M = 100$  ครั้ง จากนั้นจะนำค่าที่ได้ในแต่ละครั้ง มาหาค่าเฉลี่ยทั้งชุดเชิงสถิติ (Ensemble average) สำหรับพารามิเตอร์อื่น ๆ จะเหมือนกับการทดลองในหัวข้อที่ผ่านมา แต่จะทำการปรับเปลี่ยนค่า SNR ตั้งแต่  $-2$  dB จนถึง  $20$  dB

สำหรับสมการค่า Mean ค่า Variance ค่า Bias และค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองโครงสร้างแบบโดยตรง “ $a(n)$ ” กำหนดได้ ตามลำดับดังนี้ คือ

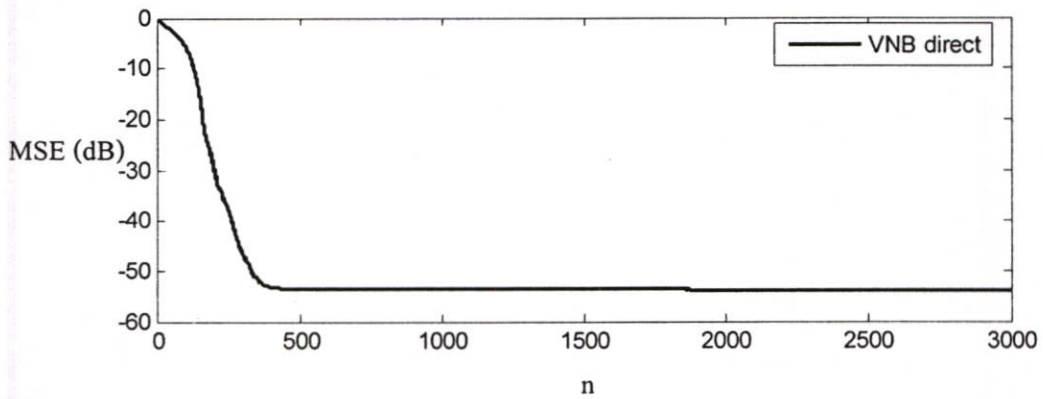
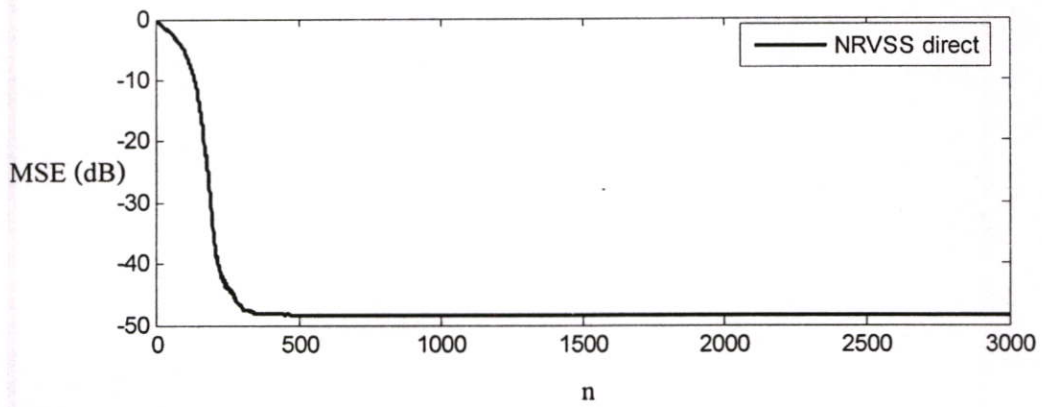
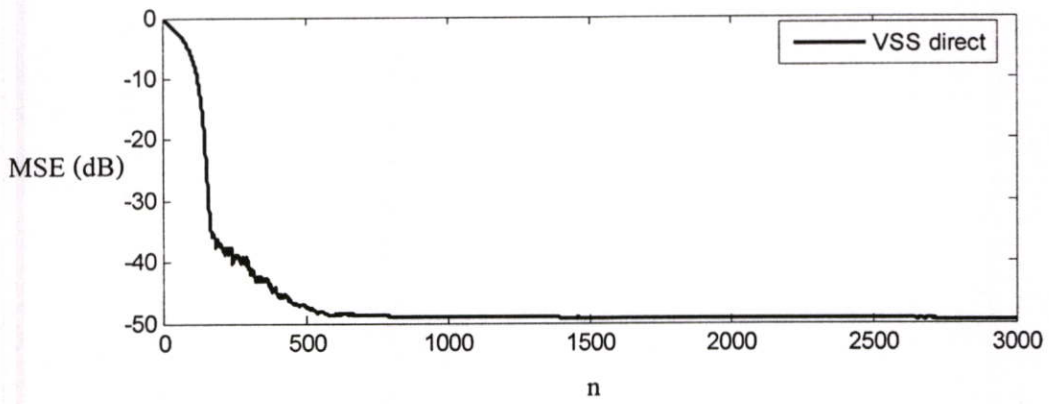
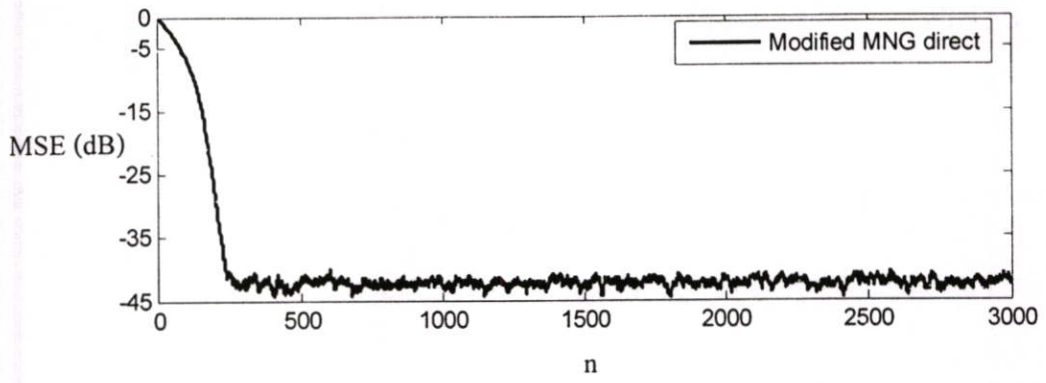
$$E\{a\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i(n) \quad ; n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6.2)$$

$$\text{var}(a) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (a_i(n) - E\{a\})^2 \quad ; n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6.3)$$

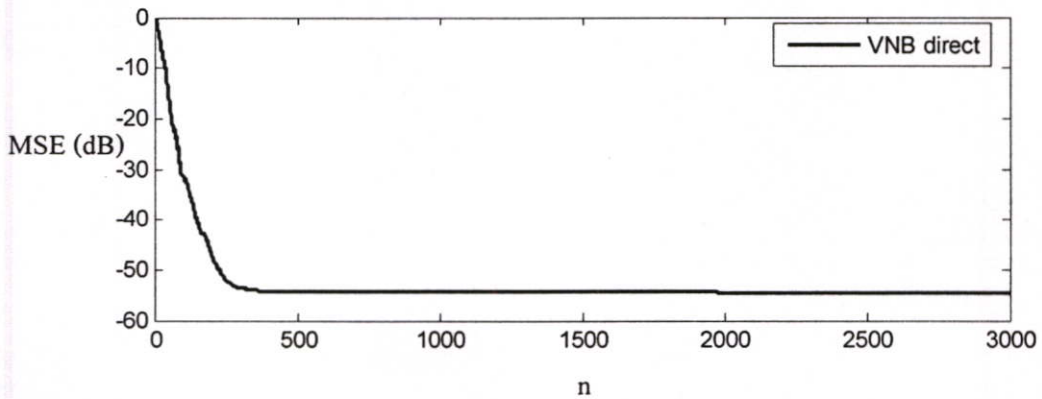
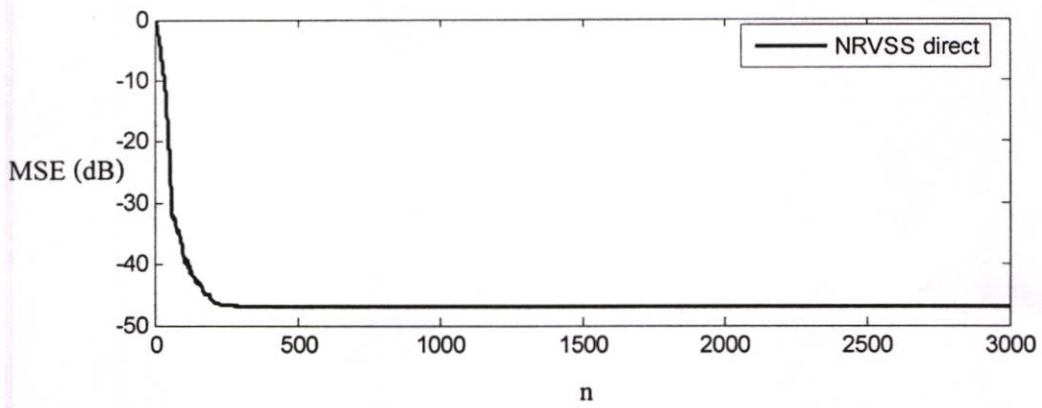
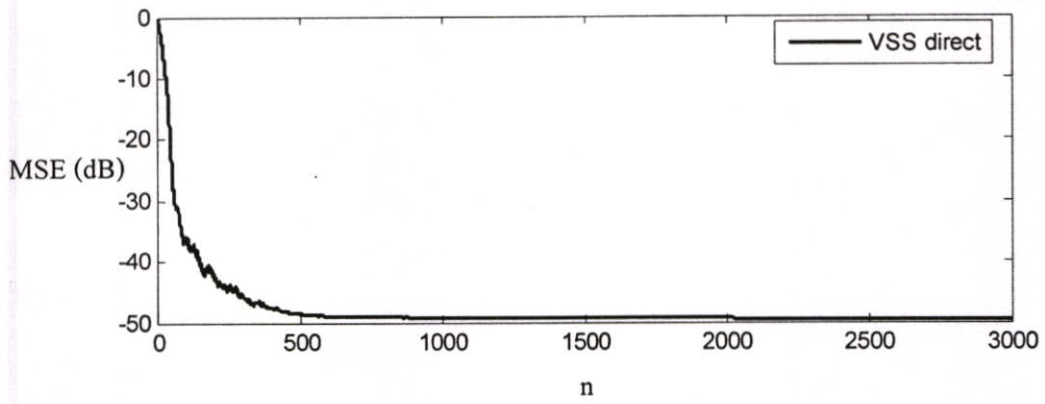
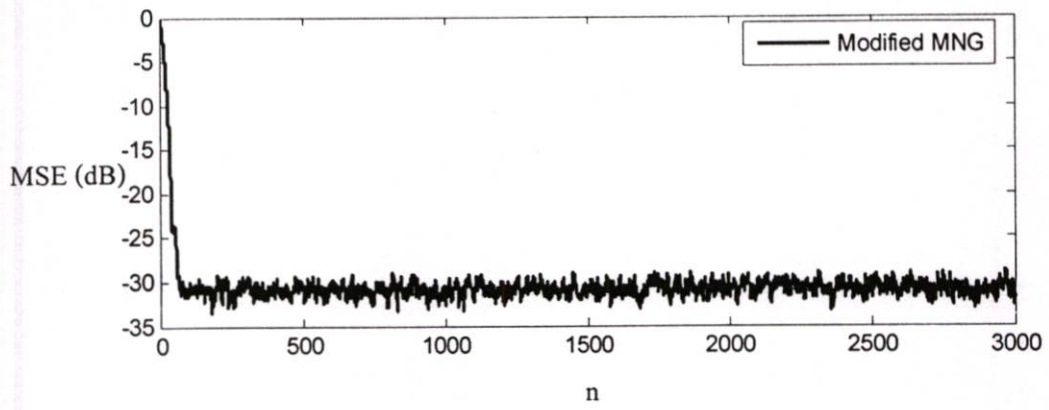
$$\text{bias}(a) = a_0 - E\{a\} \quad (6.4)$$

$$MSE = \text{var}(a) + \text{bias}^2(a) \quad (6.5)$$

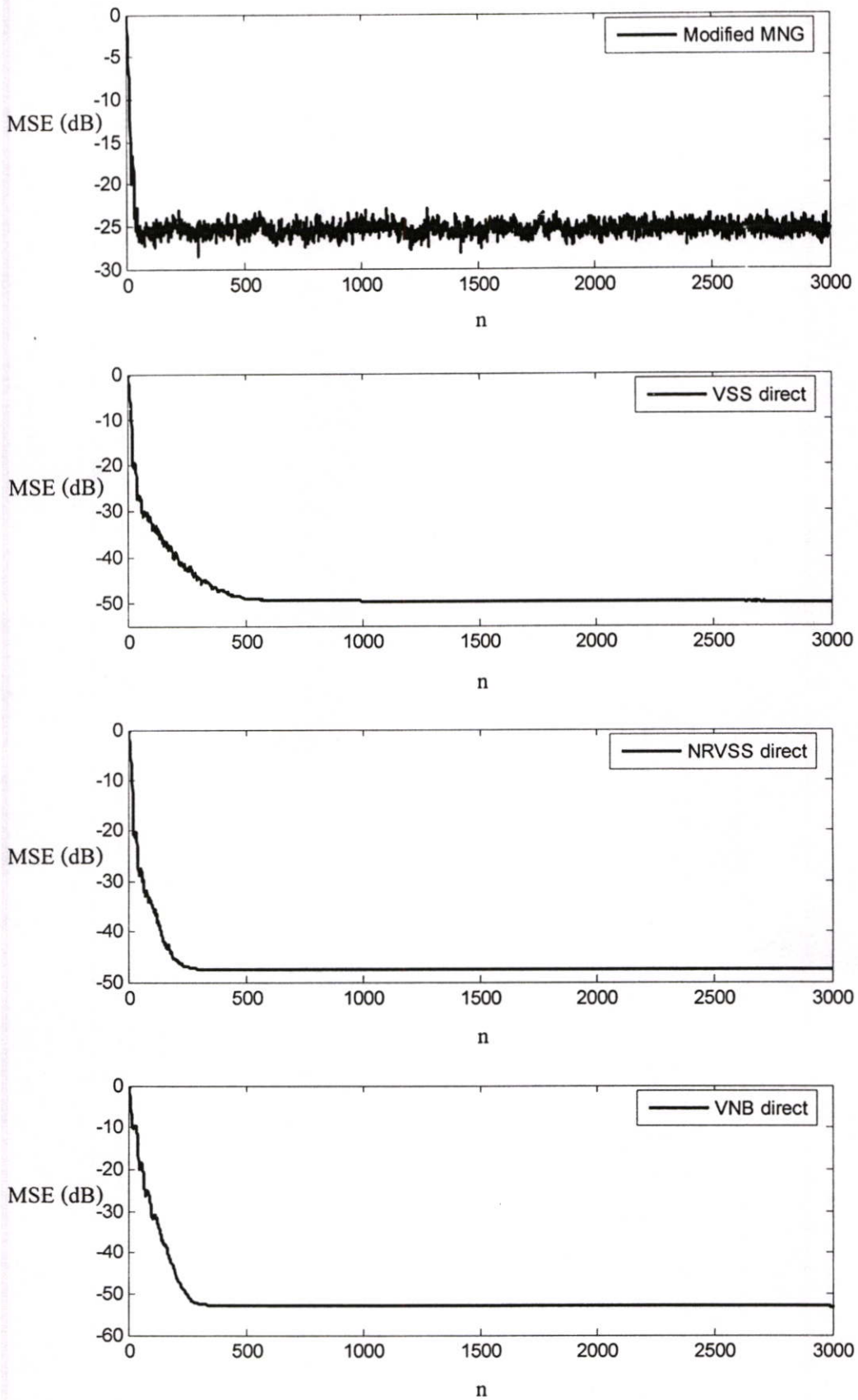
โดยที่  $a_0$  คือสัมประสิทธิ์ที่แท้จริงของตัวกรองโครงสร้างแบบโดยตรง



รูปที่ 6.10 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ " $a(n)$ " เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$



รูปที่ 6.11 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ " $a(n)$ " เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.05$



รูปที่ 6.12 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.1$

จากรูปที่ 6.10 ถึง รูปที่ 6.12 เป็นรูปการเปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นมีค่าต่างกัน เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดของอัลกอริทึมแบบ Modified MNG น้อย ๆ การปรับตัวของสัมประสิทธิ์จะช้า แต่มีความถูกต้องมากกว่าการกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเพิ่มขึ้น ซึ่งจะทำให้การปรับตัวที่เร็วแต่มีความถูกต้องต่ำ ส่วนอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดจะให้ค่า MSE ที่คงที่เมื่ออัลกอริทึมเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้ว และให้ค่า MSE ที่ใกล้เคียงกันแม้ว่าจะเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดเริ่มต้น ซึ่งการเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นจะมีผลเฉพาะลักษณะของการลู่เข้าว่าจะเร็วมากน้อยเพียงใด โดยอัลกอริทึมแบบ VSS จะมีลักษณะของการลู่เข้าในขณะอัลกอริทึมเข้าสู่สถานะอยู่ตัวที่ไม่เรียบเท่ากับอัลกอริทึมแบบ NRVS ซึ่งมีลักษณะของการลู่เข้าที่ดีกว่า แต่ทั้งสองอัลกอริทึมให้ค่า MSE ที่ใกล้เคียงกัน ส่วนอัลกอริทึมแบบ VNB นั้นจะให้ค่า MSE ที่ต่ำที่สุด

และสมการสำหรับโครงสร้างแบบแลตทิส เปลี่ยน “ $a(n)$ ” เป็น “ $k(n)$ ” ดังนั้นจะได้สมการดังนี้

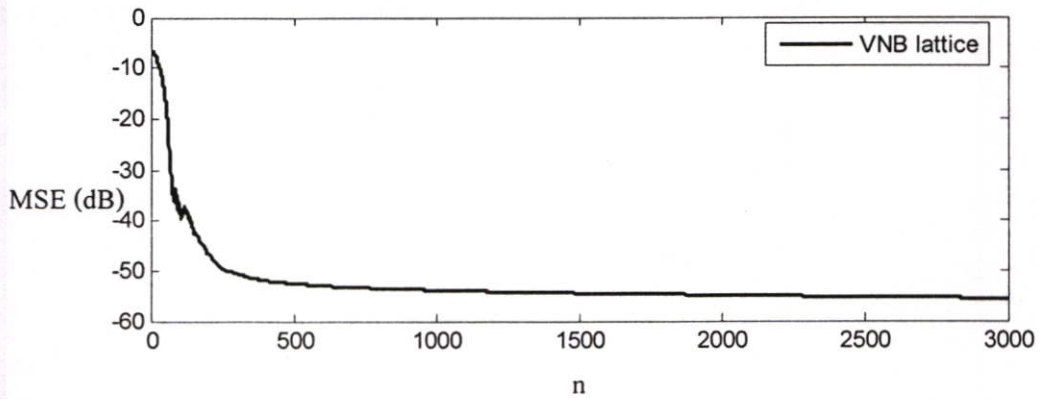
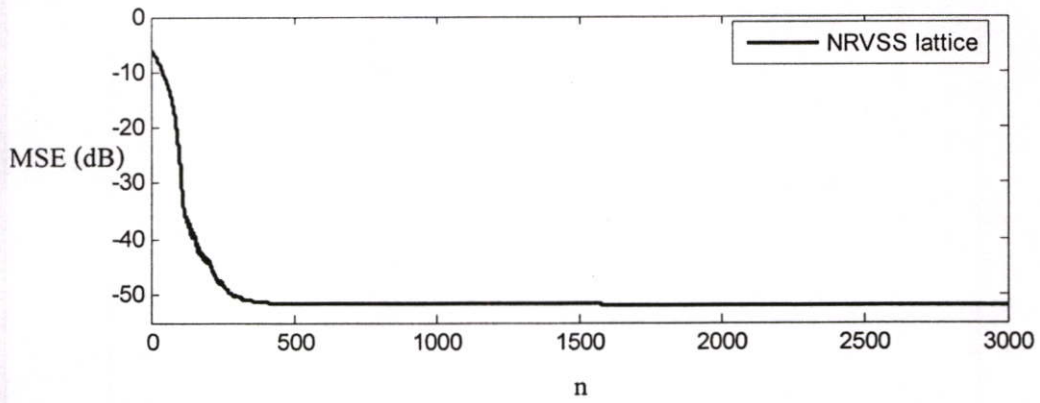
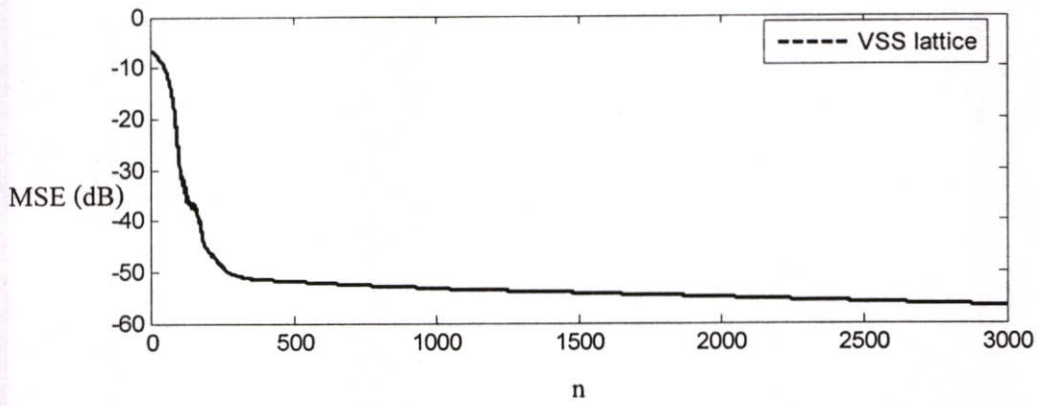
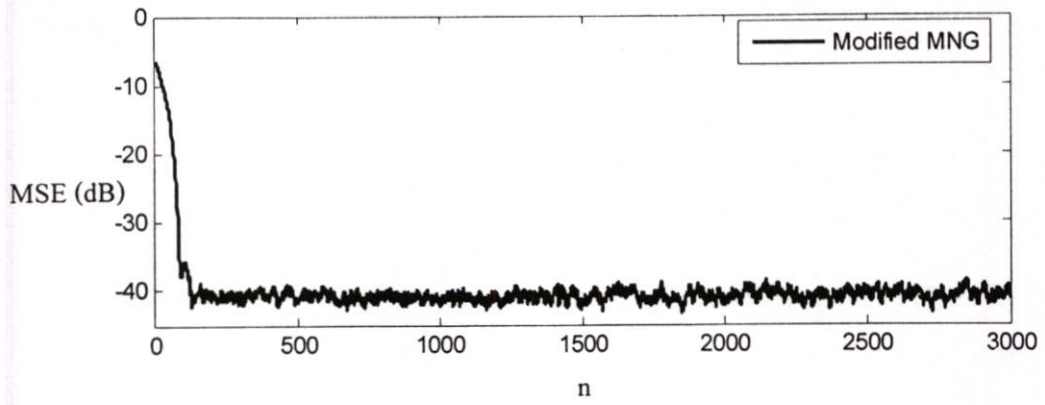
$$E\{k\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M k_i(n) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6.6)$$

$$\text{var}(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (k_i(n) - E\{a\})^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6.7)$$

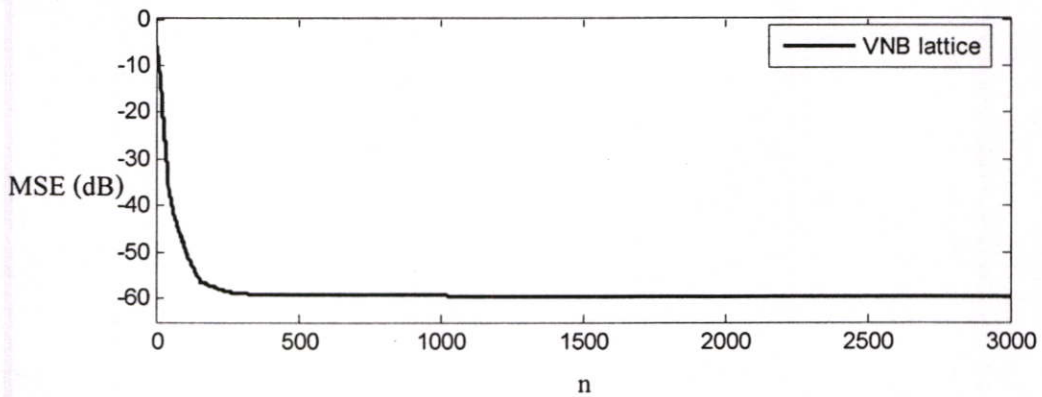
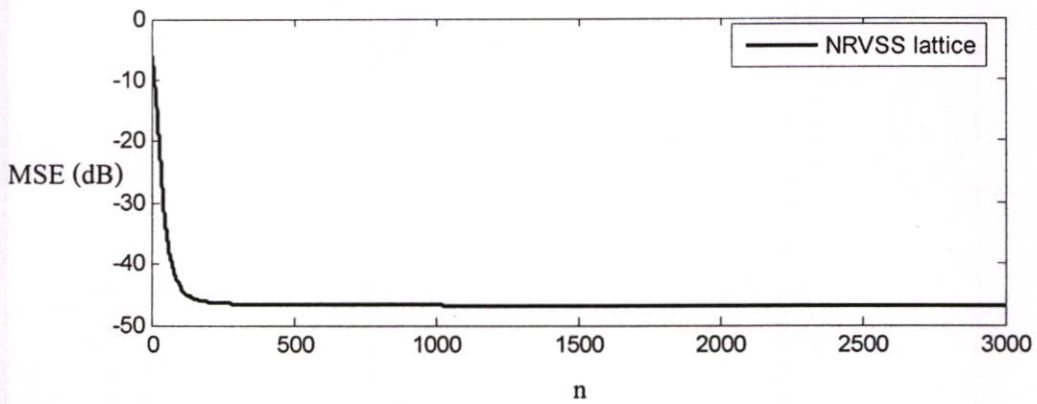
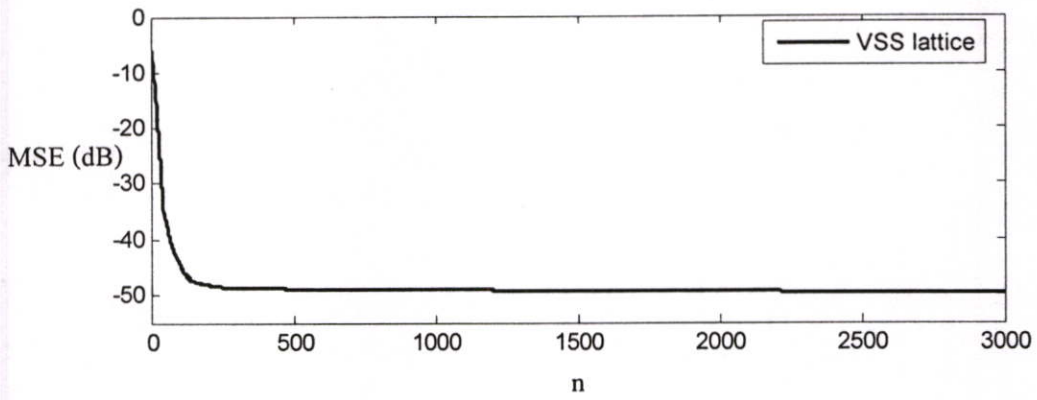
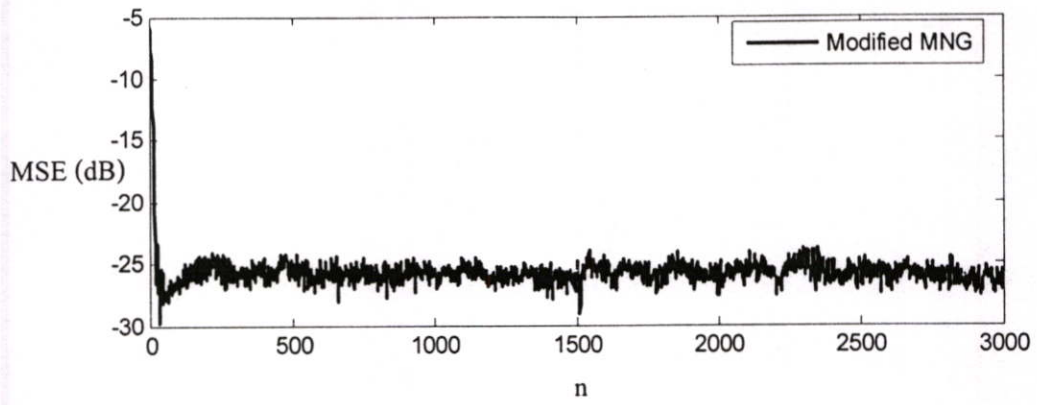
$$\text{bias}(k) = k_0 - E\{k\} \quad (6.8)$$

$$\text{MSE} = \text{var}(k) + \text{bias}^2(k) \quad (6.9)$$

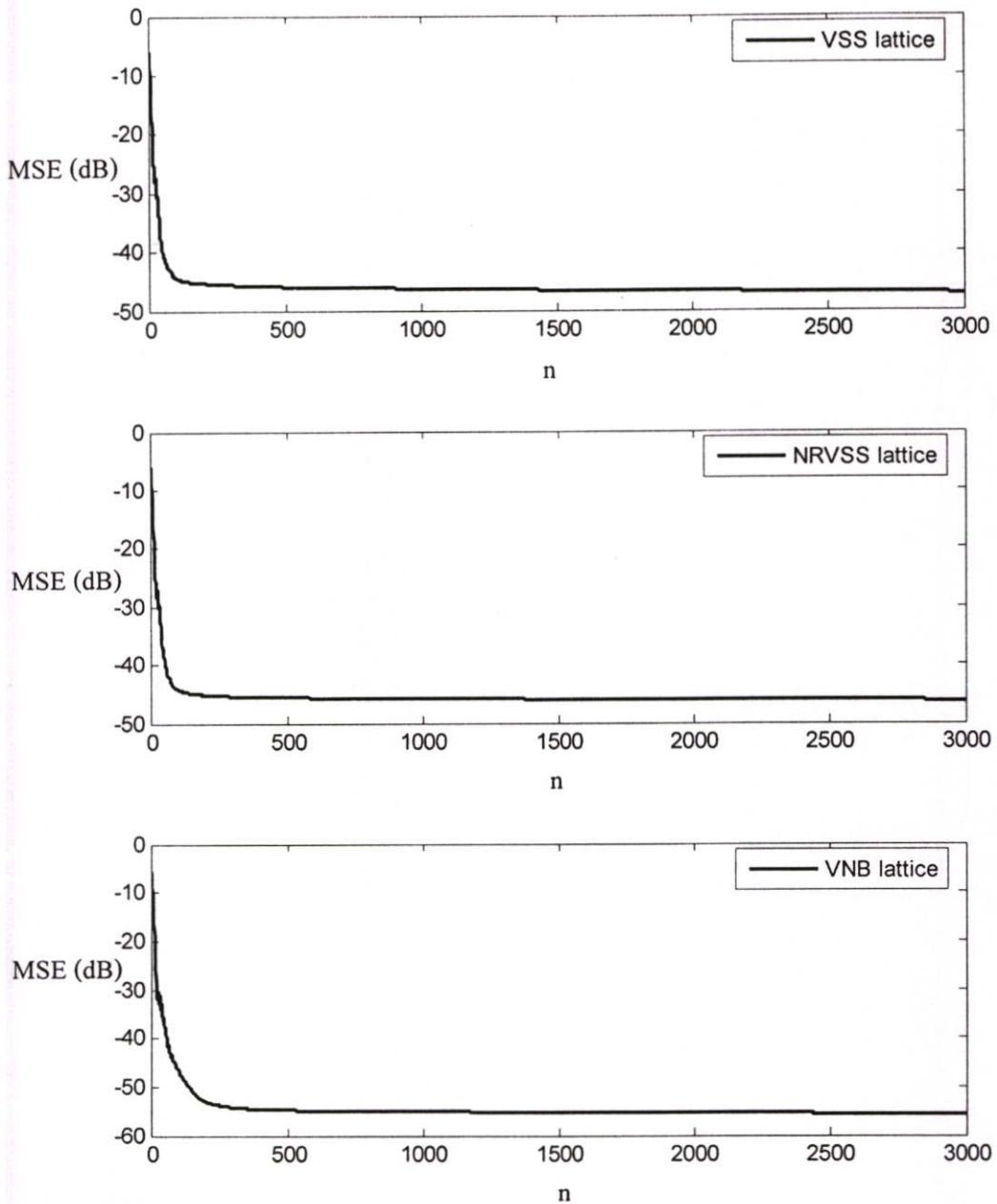
จากรูปที่ 6.13 ถึงรูปที่ 6.15 เป็นการเปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นให้มีค่าต่างกัน อัลกอริทึมแบบ Modified MNG ให้ความถูกต้องของสัมประสิทธิ์ขึ้นอยู่กับค่าก้าวกระโดดนั้น เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดมีค่าต่ำ อัลกอริทึมจะปรับตัวได้ช้า แต่จะให้ค่า MSE ที่น้อย และลักษณะของความแปรปรวนเมื่ออัลกอริทึมเข้าสู่สถานะอยู่ตัวจะมีความแปรปรวนน้อย เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดมากขึ้น อัลกอริทึมจะทำงานได้เร็วขึ้น แต่ก็ให้ค่า MSE ที่สูงขึ้นเช่นเดียวกัน แต่เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดด  $\mu = 0.1$  ดังในรูปที่ 6.15 พบว่าอัลกอริทึมเกิดความไม่เสถียร ไม่สามารถปรับตัวเข้าสู่ค่าสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสมได้ ส่วนอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดตามเวลานั้นพบว่าสามารถทำงานได้ดีโดยที่อัลกอริทึมแบบ VNB จะให้ค่า MSE ที่ต่ำที่สุดในทุกการกำหนดค่าก้าวกระโดด



รูปที่ 6.13 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$

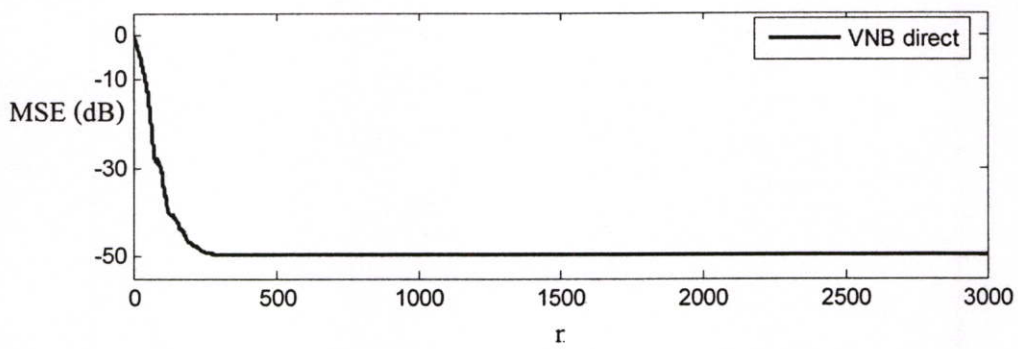
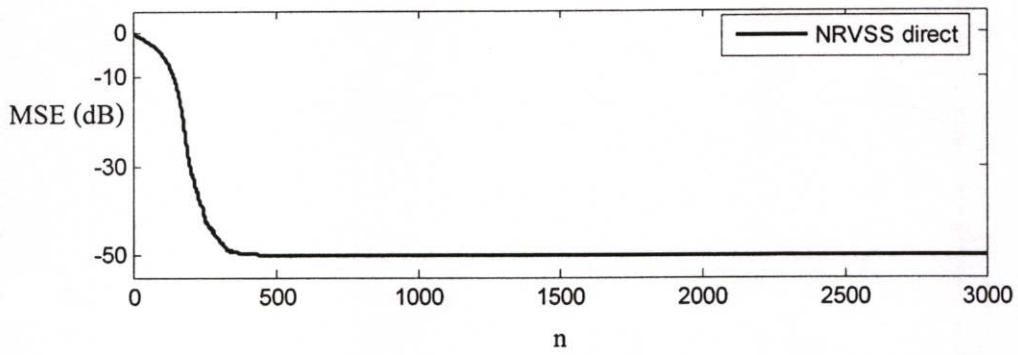
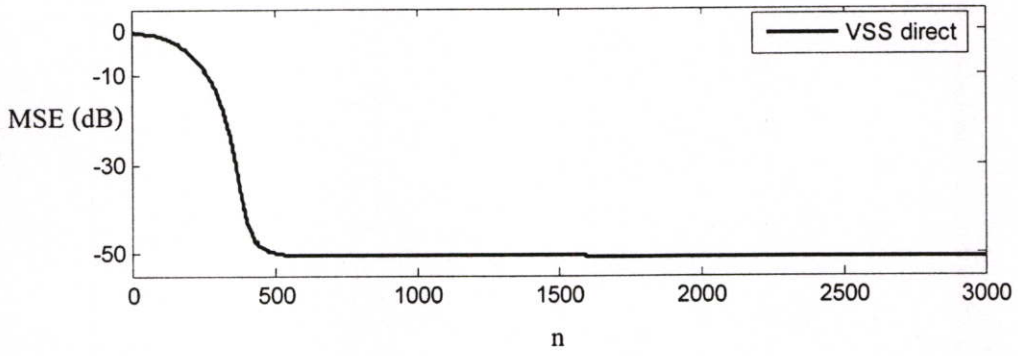
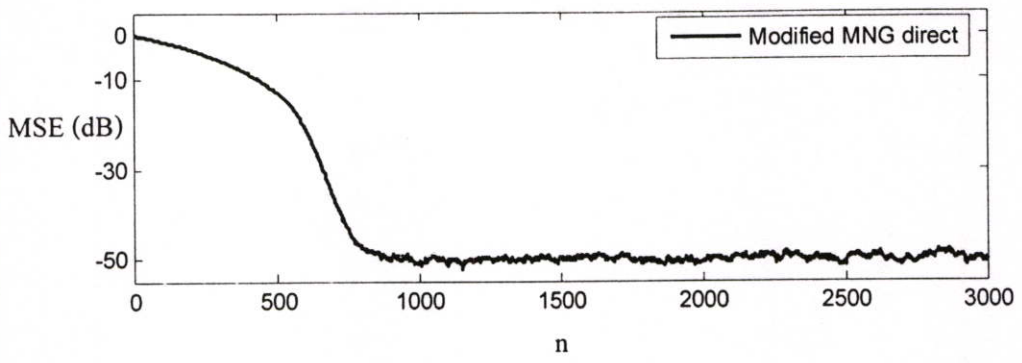


รูปที่ 6.14 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.05$

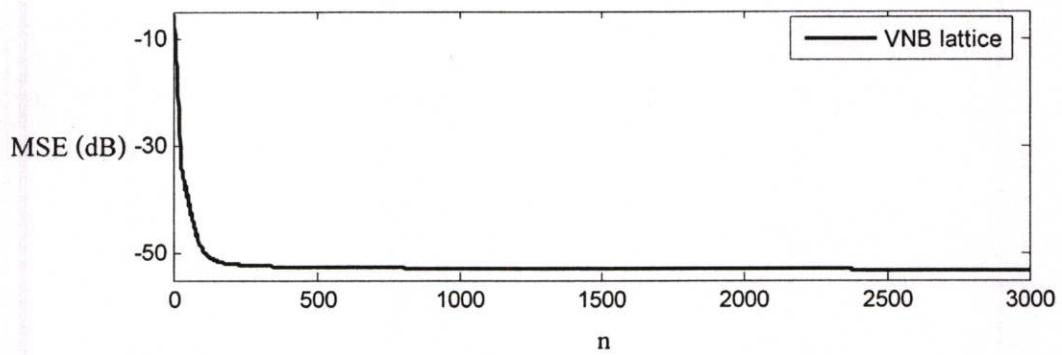
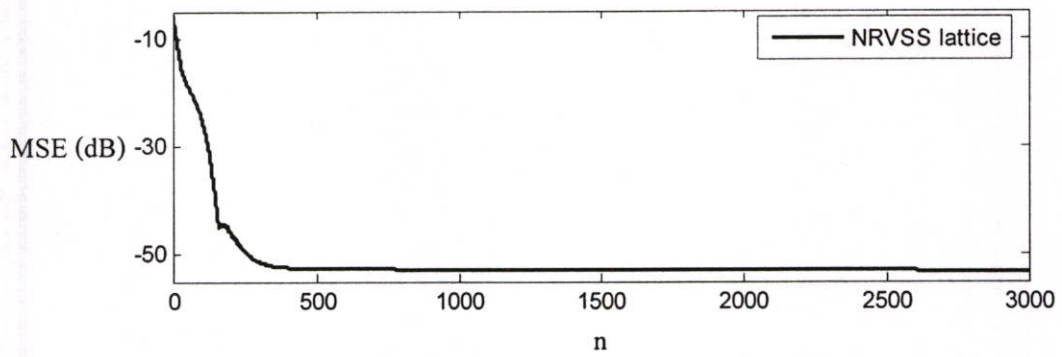
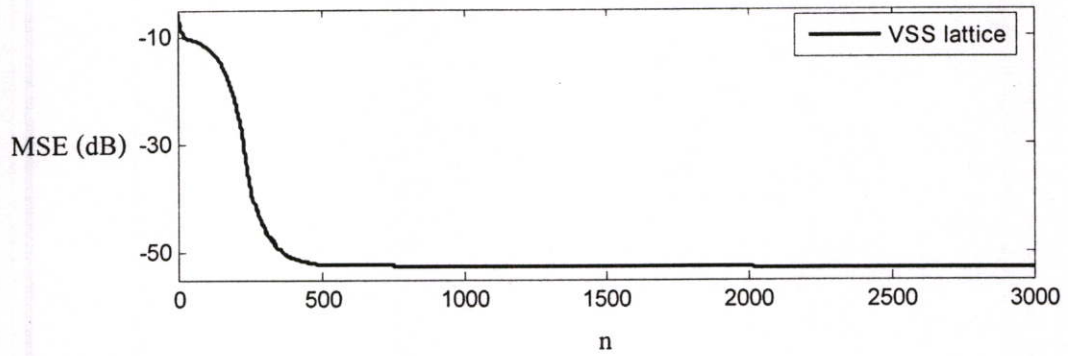
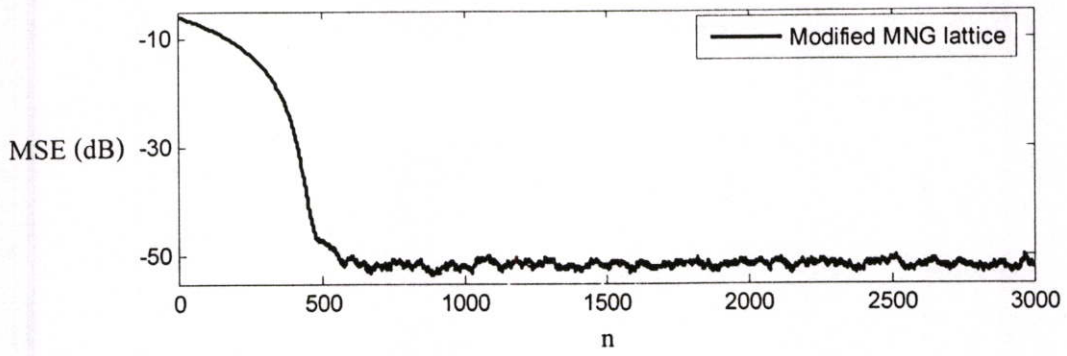


รูปที่ 6.15 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ " $k(n)$ " เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.1$

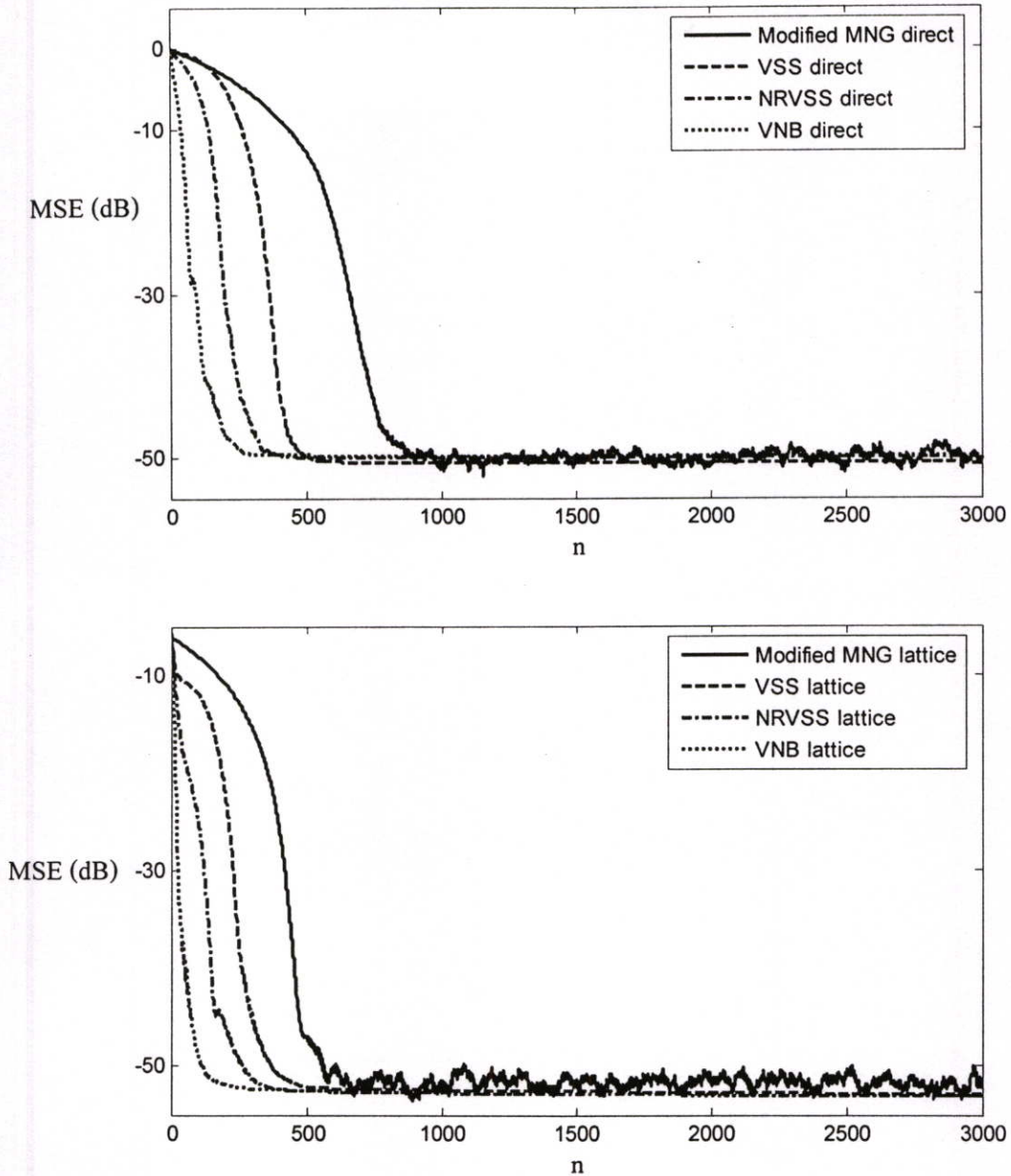
ในรูปที่ 6.16 เป็นรูปเปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าของสัมประสิทธิ์เมื่อกำหนดให้ MSE มีค่าใกล้เคียงกันของตัวกรองที่มีโครงสร้างแบบ โดยตรง และในรูปที่ 6.17 เป็นตัวกรองที่มีโครงสร้างแบบแลตทิซ จะเห็นได้ชัดว่าอัตราการลู่เข้าของสัมประสิทธิ์ของอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดด ทำได้เร็วกว่าอัลกอริทึมแบบ Modified MNG และอัลกอริทึมแบบ VNB ก็เป็นอัลกอริทึมที่มีการปรับตัวเข้าสู่สถานะอยู่ตัวที่เรียบและเร็วที่สุด



รูปที่ 6.16 เปรียบเทียบความเร็วในการปรับตัวของ “ $a(n)$ ” เมื่อให้ MSE มีค่าใกล้เคียงกัน

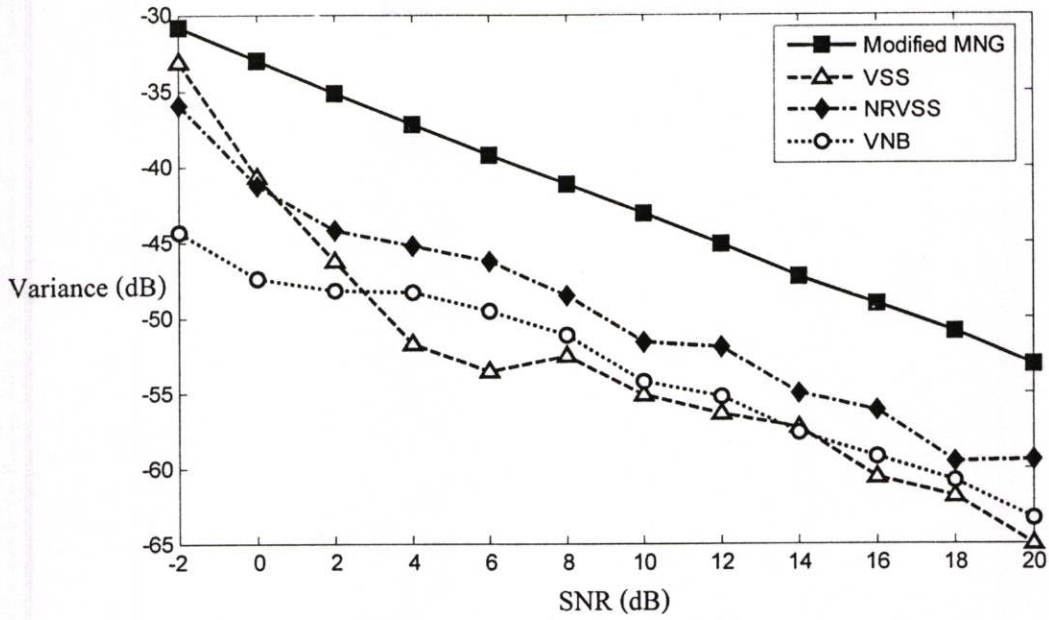


รูปที่ 6.17 เปรียบเทียบความเร็วในการปรับตัวของ “ $k(n)$ ” เมื่อให้ MSE มีค่าใกล้เคียงกัน

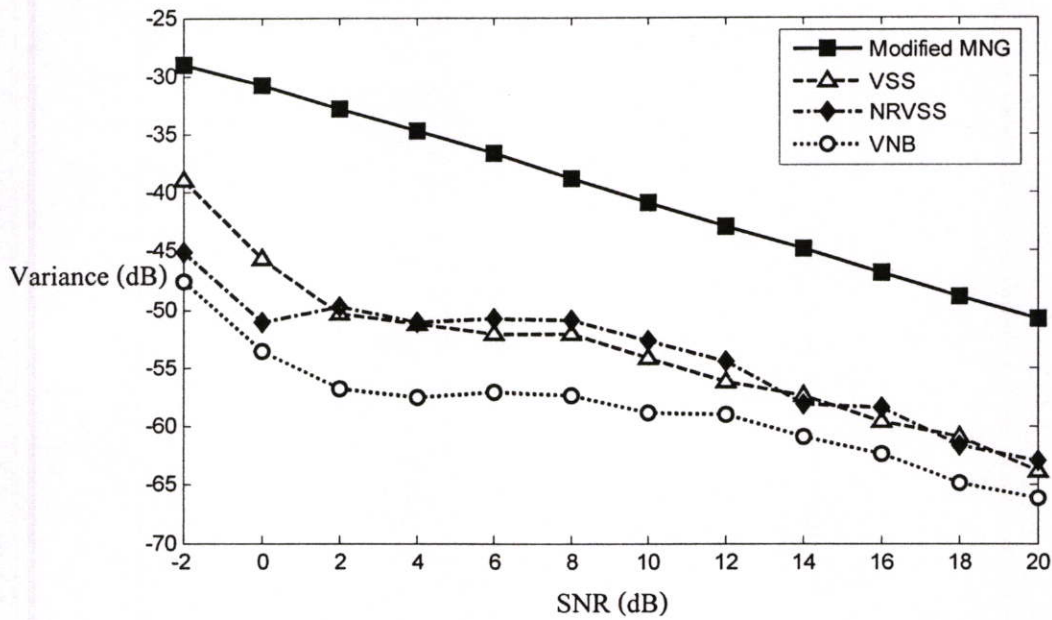


รูปที่ 6.18 เปรียบเทียบความเร็วในการปรับตัวของตัวกรองโครงสร้างแบบ โดยตรงและแลตทิซ

เมื่อเปรียบเทียบความเร็วในการปรับตัวของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองซึ่งใช้โครงสร้างแบบ โดยตรงและแบบแลตทิซ จะเห็นว่าอัลกอริทึมแบบ VNB มีความเร็วในการปรับสัมประสิทธิ์มากที่สุด จากนั้นจึงเป็นอัลกอริทึมแบบ NRVSS อัลกอริทึมแบบ VSS และอัลกอริทึมแบบ Modified MNG ตามลำดับ และอัลกอริทึมที่ใช้กับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบแลตทิซ จะปรับตัวเร็วกว่าตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบโดยตรง

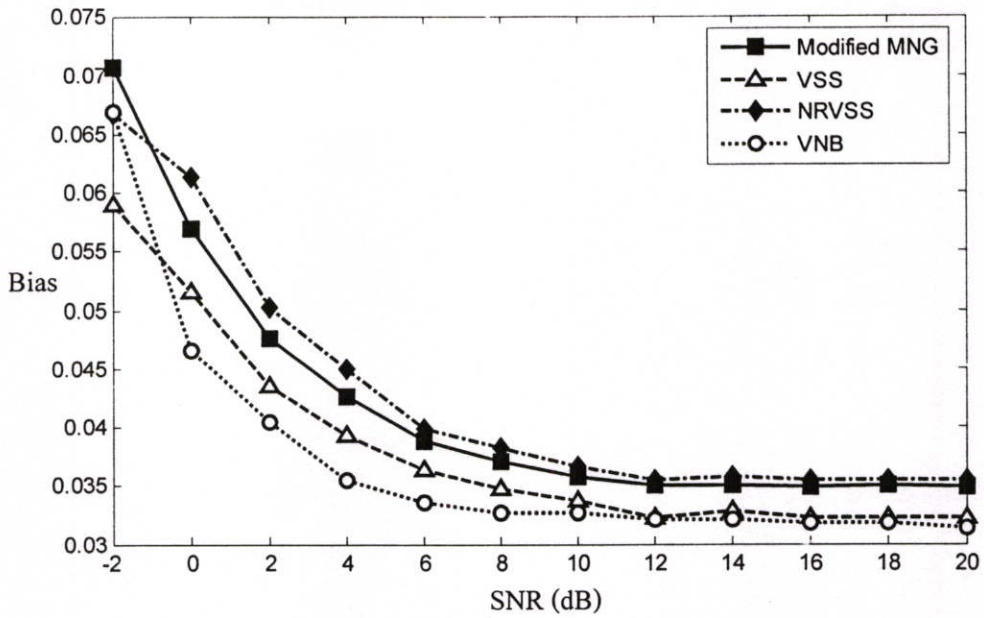


รูปที่ 6.19 เปรียบเทียบค่า variance ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$

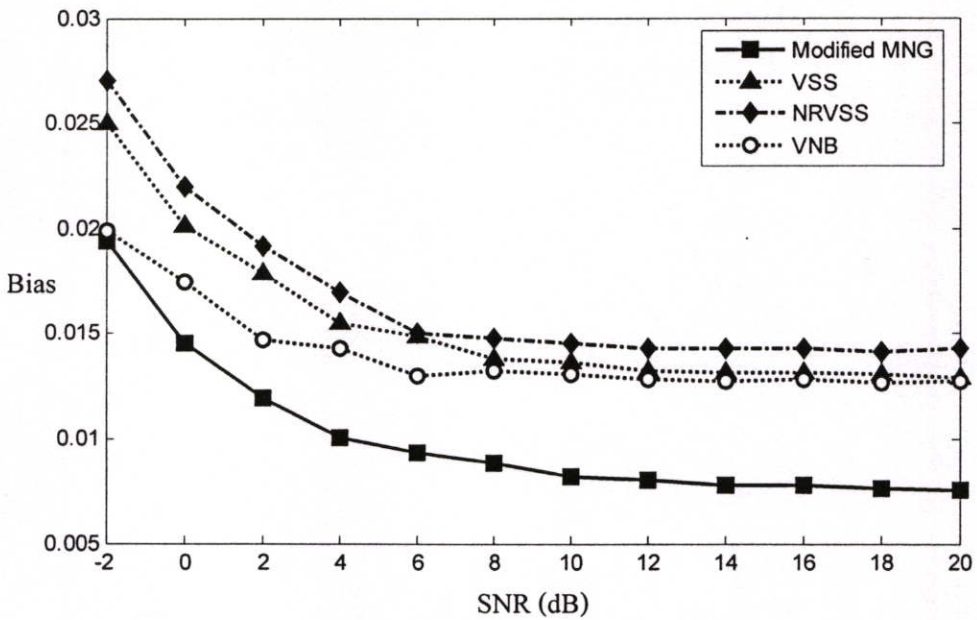


รูปที่ 6.20 เปรียบเทียบค่า variance ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$

จากรูปที่ 6.19 และ 6.20 เป็นการเปรียบเทียบค่า variance ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” และ “ $k(n)$ ” ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้ค่าก้าวกระโดดเริ่มต้น  $\mu(0) = 0.01$  จะเห็นได้ว่าอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดจะมีค่า variance ที่ต่ำกว่า และจะมีลักษณะเป็นไม่เชิงเส้น

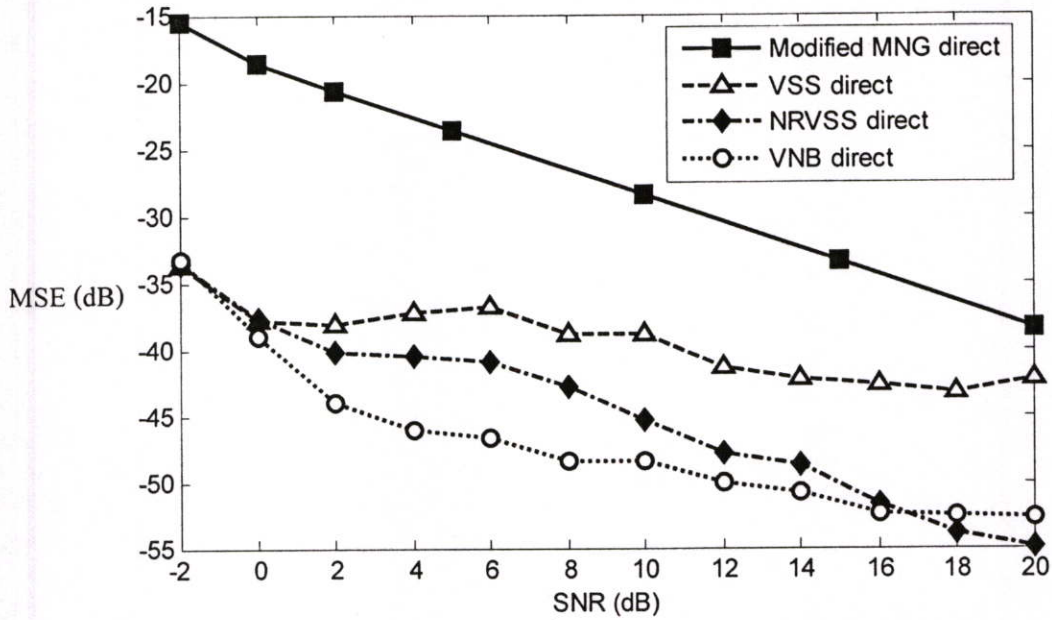


รูปที่ 6.21 เปรียบเทียบค่า bias ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$

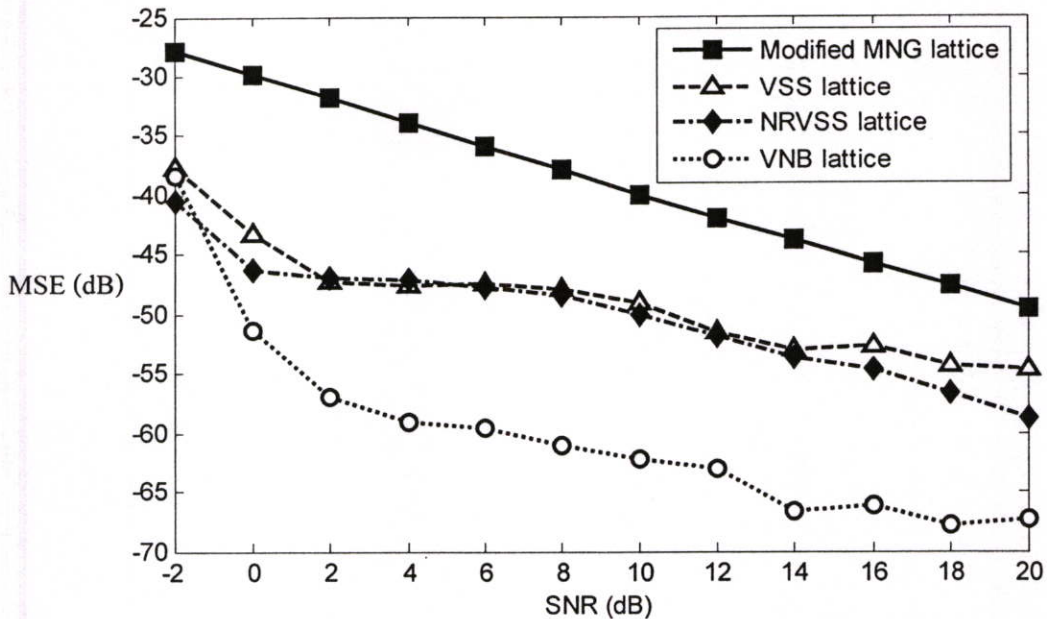


รูปที่ 6.22 เปรียบเทียบค่า bias ของสัมประสิทธิ์ “ $k(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$

รูปที่ 6.21 และรูปที่ 6.22 เป็นการเปรียบเทียบค่า bias ของสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง จะเห็นได้ว่าค่า bias ที่เกิดจากอัลกอริทึมทั้ง 4 แบบจะมีค่าใกล้เคียงกัน แต่เมื่อใช้กับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบโดยตรงจะให้ค่า bias ที่สูงกว่าเมื่อใช้กับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบแลตทิซ



รูปที่ 6.23 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$



รูปที่ 6.24 เปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” เมื่อกำหนดให้  $\mu(0) = 0.01$

รูปที่ 6.23 และรูปที่ 6.24 เป็นรูปเปรียบเทียบค่า MSE ของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบโดยตรงและแบบแลตทิซตามลำดับ โดยกำหนดให้ค่า SNR ของสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนมีค่าตั้งแต่  $-2$  dB ถึง  $20$  dB จากรูปจะเห็นได้ว่าอัลกอริทึมแบบ VNB ให้ประสิทธิภาพในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองแบบเกาส์เซียนได้ดีที่สุดทั้งในกรณีที่ค่า SNR มีค่าต่ำและสูง

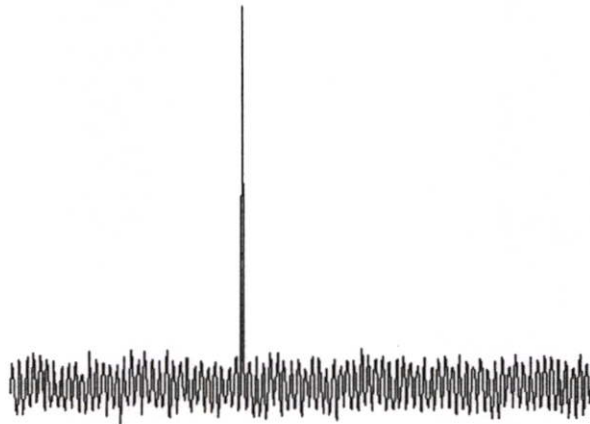
### 6.3 การประมาณสัญญาณไซน์คลื่นเดียวในสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์

สัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ (Impulse noise) เป็นสัญญาณรบกวนที่มีขนาดสูง เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้น ๆ เช่น ฟ้าผ่า ลักษณะของคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (Electrocardiogram, ECG) เป็นต้น ซึ่งสัญญาณรบกวนนี้ จะมีผลกระทบต่อการทำงานของอะแดปทีฟอัลกอริทึมด้วย

สัญญาณอินพุตกำหนดได้ดังนี้

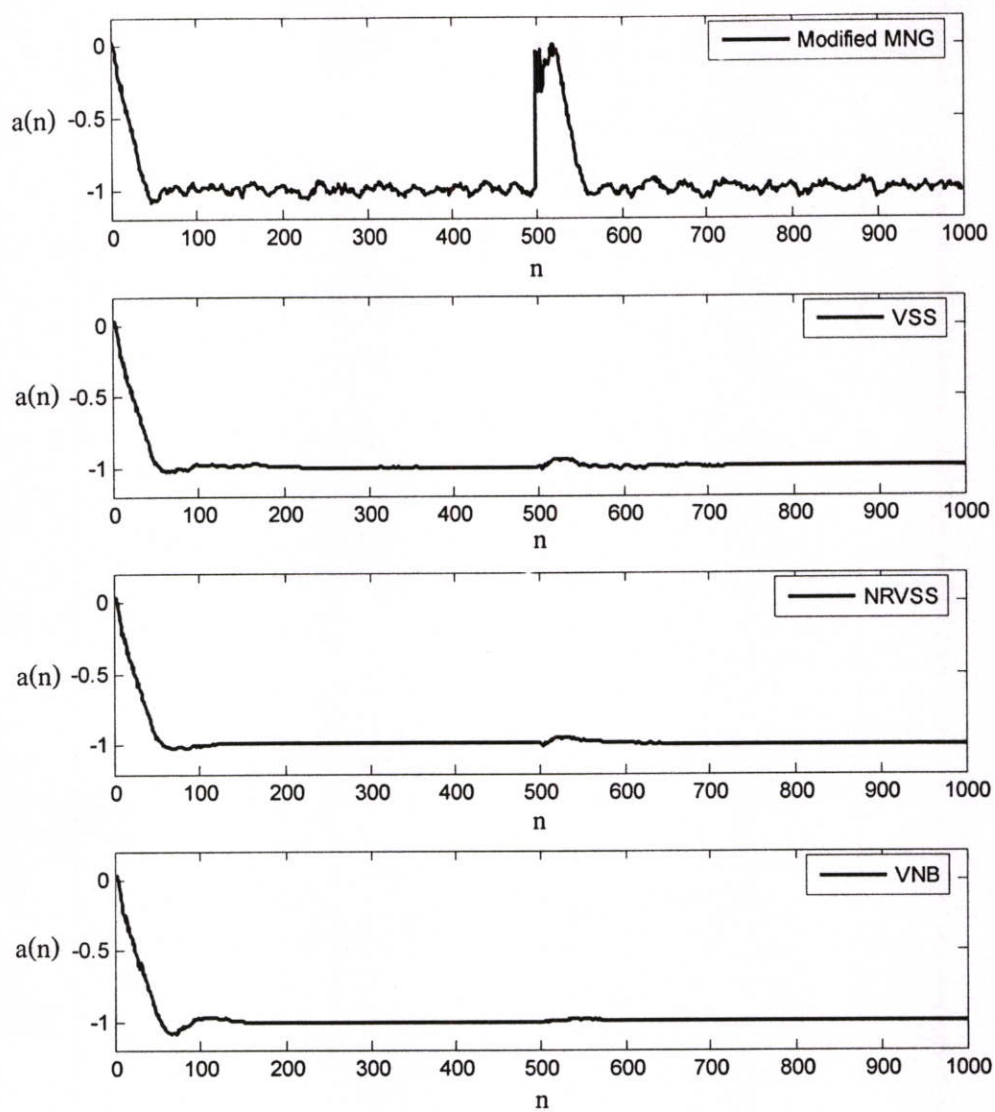
$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi) + B \delta(n - 500) \quad (6.10)$$

โดยที่  $B$  เป็นขนาดของสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ และ  $\delta(\bullet)$  เป็น unit sample function และการทดลองจะใช้พารามิเตอร์เช่นเดียวกับหัวข้อที่ 6.2

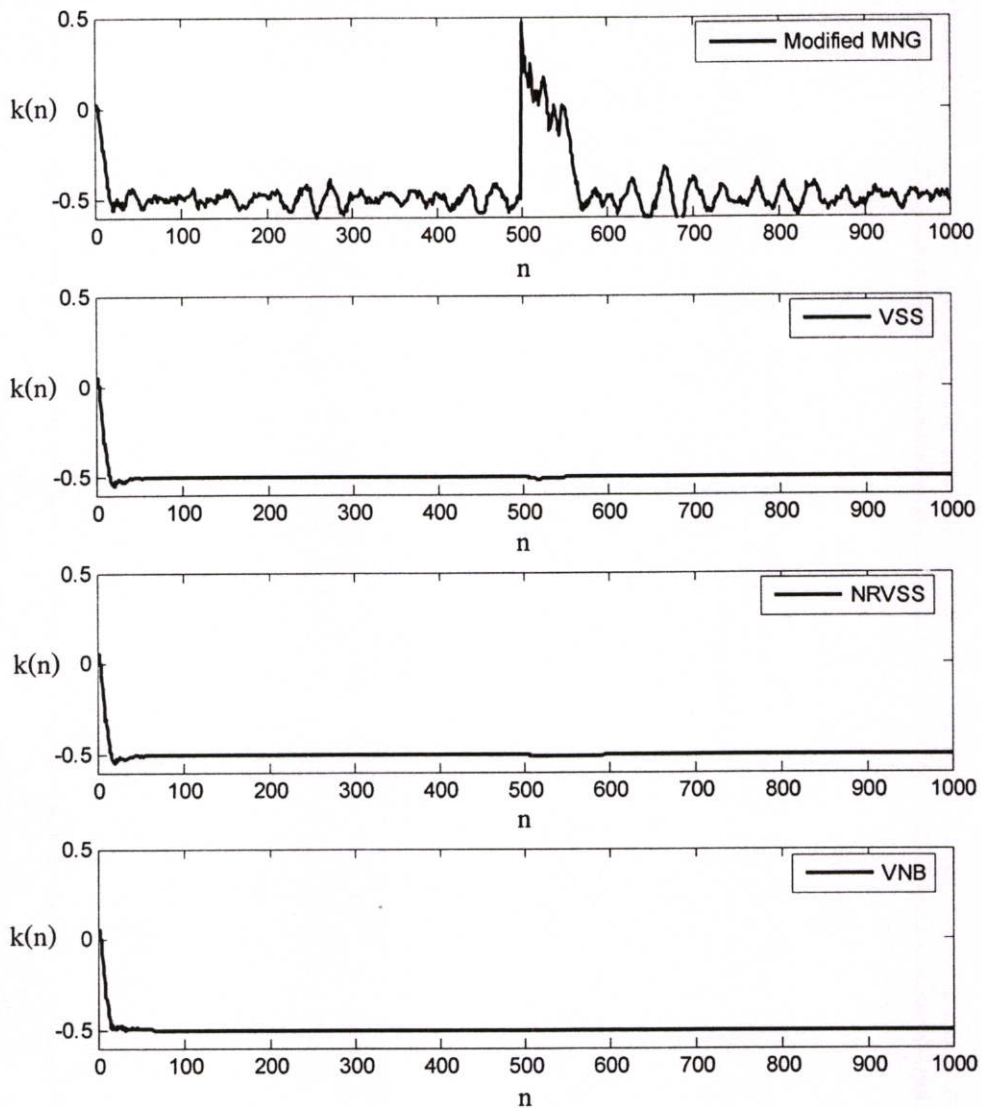


รูปที่ 6.25 ลักษณะของสัญญาณอินพุตที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน  $SNR = 10$  dB และสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์  $20\delta(n-500)$

ในการทดลองหัวข้อนี้ กำหนดให้สัญญาณ ไซน์ความถี่เดี่ยวถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มี  $SNR = 10$  dB และมีสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์  $20\delta(n-500)$  ตัวกรองโครงสร้างแบบโดยตรงจะกำหนดตัวแปรสำหรับจำลองการทำงานของอัลกอริทึมทั้ง 3 แบบดังนี้คือ  $\mu(0) = 0.07$ ,  $\alpha = 0.99$ ,  $\alpha(0) = 0.98$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $\rho(0) = 0.7$ ,  $\beta = 0.99$ ,  $\gamma = 0.01$  และ  $\varepsilon = 0.000001$  และตัวกรองโครงสร้างแบบแลตทิซ กำหนดตัวแปรดังนี้คือ  $\mu(0) = 0.07$ ,  $\alpha = 0.95$ ,  $\alpha(0) = 0.95$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $\rho(0) = 0.7$ ,  $\beta = 0.99$ ,  $\gamma = 0.01$  และ  $\varepsilon = 0.000001$



รูปที่ 6.26 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์เมื่อสัญญาณรบกวนเป็นแบบเกาส์เซียน และอิมพัลส์ เมื่อตัวกรองใช้โครงสร้างแบบโดยตรง

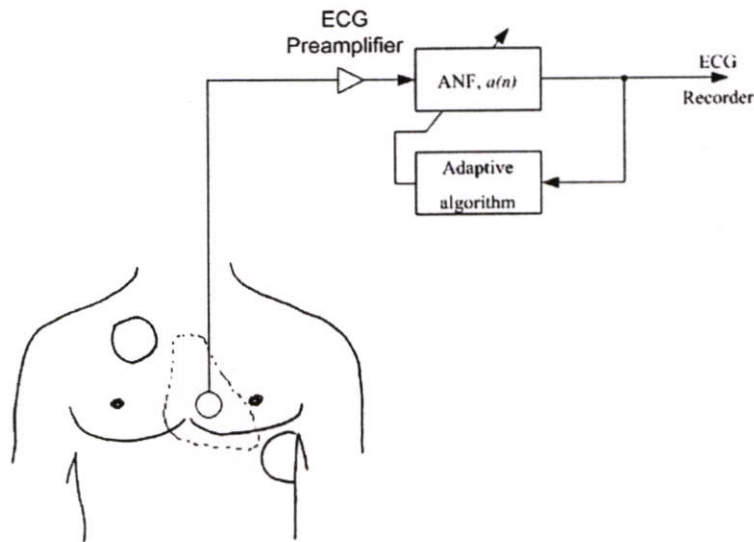


รูปที่ 6.27 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์เมื่อสัญญาณรบกวนเป็นแบบเกาส์เซียน และอิมพัลส์ เมื่อตัวกรองใช้โครงสร้างแบบแลตทิซ

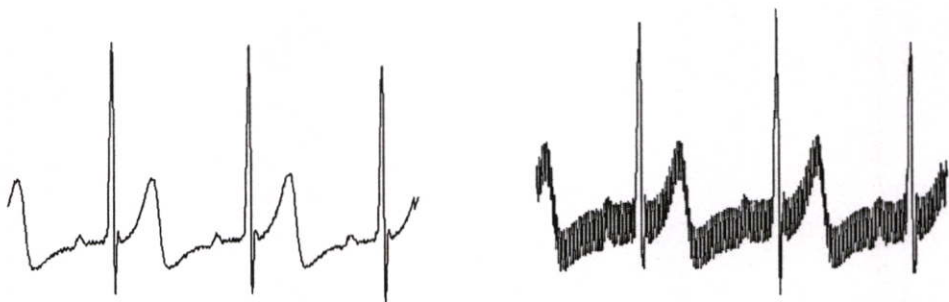
จากรูปที่ 6.26 และ รูปที่ 6.27 แสดงค่าประมาณสัมประสิทธิ์ “ $a(n)$ ” และ “ $k(n)$ ” ของตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบ โดยตรง และตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบแลตทิซตามลำดับ เมื่อมีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน  $SNR = 10$  dB และสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์  $20\delta(n-500)$  จะเห็นได้ว่าอัลกอริทึมแบบปรับเปลี่ยนค่าก้าวกระโดดสามารถทนทานต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ได้ดีกว่าอัลกอริทึมแบบ Modified MNG โดยที่อัลกอริทึมสำหรับตัวกรองที่มีโครงสร้างแบบแลตทิซจะสามารถทนทานต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ได้ดีกว่าอัลกอริทึมสำหรับตัวกรองโครงสร้างแบบโดยตรง

#### 6.4 การประยุกต์ใช้งาน ANF สำหรับกำจัดสัญญาณรบกวน 50 Hz ออกจากสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (ECG)

ในหัวข้อนี้กล่าวถึง การประยุกต์ใช้งาน ANF สำหรับกำจัดสัญญาณรบกวน 50 Hz จากสายส่งแรงดันไฟฟ้า 220 โวลต์ เหนียวนำเข้าสู่สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (ECG: electrocardiogram) ขณะที่แพทย์กำลังบันทึก ทำให้สัญญาณมีความผิดเพี้ยนไป อาจทำให้ได้ข้อมูลที่ผิดพลาด ซึ่งหลักการกำจัดสัญญาณรบกวนความถี่ 50 Hz นี้ มีหลักการตามรูปที่ 6.28



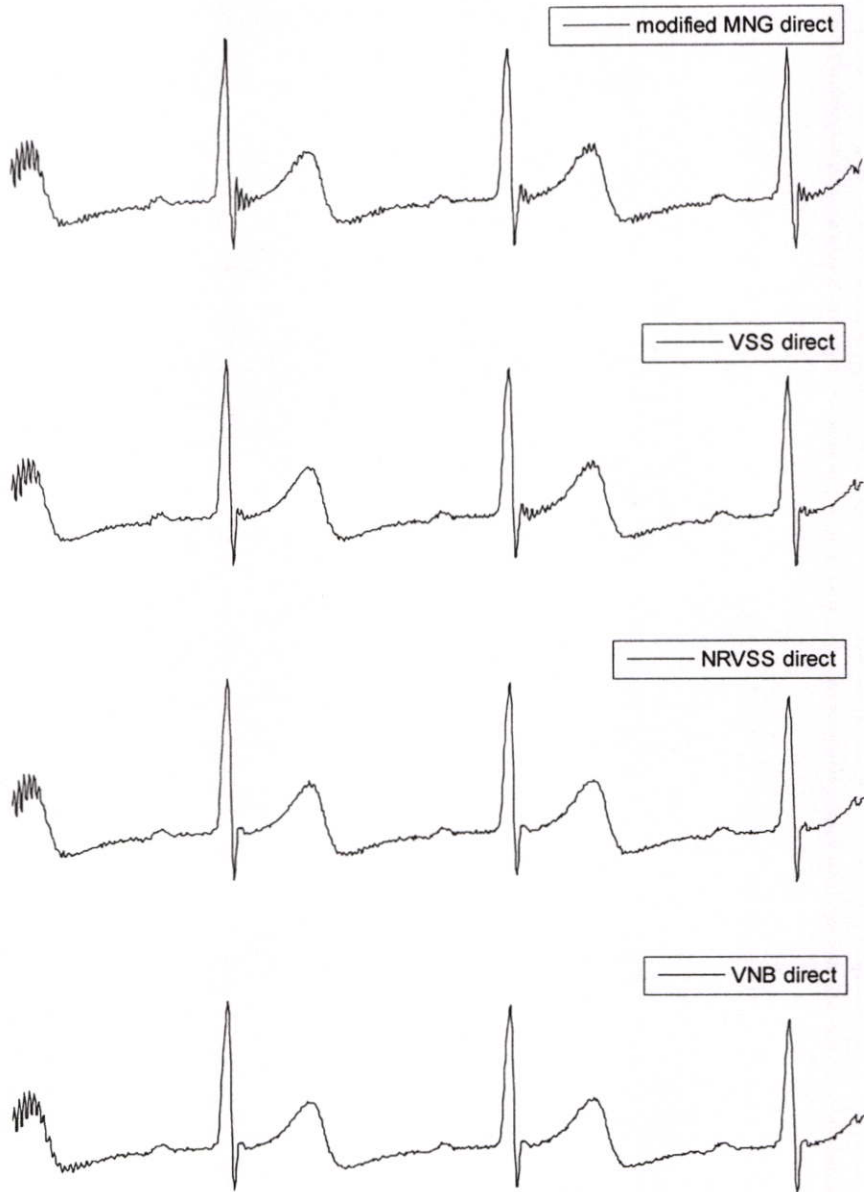
รูปที่ 6.28 การกำจัดสัญญาณรบกวน 50 Hz ออกจากคลื่น ECG โดยใช้ ANF



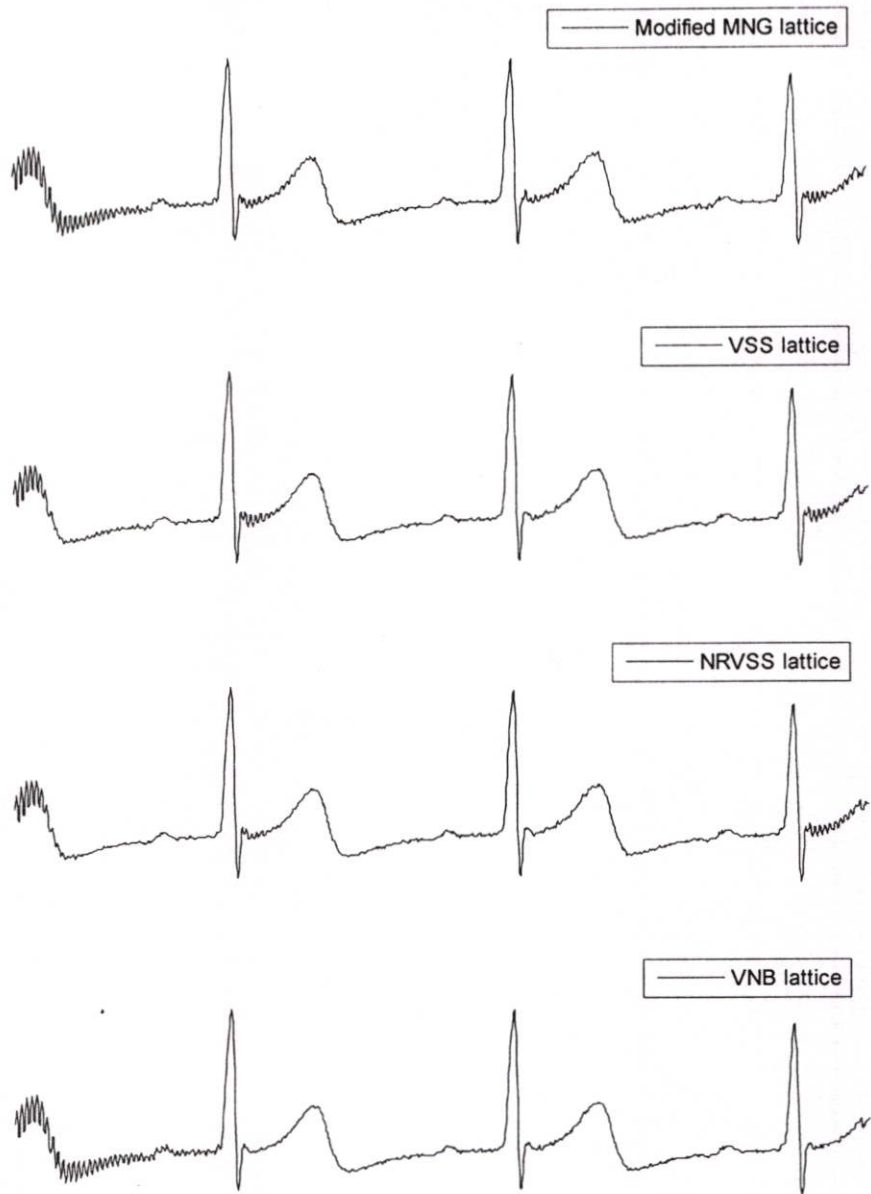
รูปที่ 6.29 ลักษณะของสัญญาณไฟฟ้าหัวใจ (ECG: electrocardiogram) และสัญญาณไฟฟ้าหัวใจเมื่อถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวน 50 Hz

สเปกตรัมของสัญญาณ ECG จะอยู่ในช่วง  $[0, 100 \text{ Hz}]$  การใช้ ANF เพื่อกำจัดสัญญาณรบกวนความถี่ 50 Hz จะทำให้สเปกตรัมความถี่ 50 Hz ของ ECG ถูกกรองทิ้งด้วย เพื่อลดความผิดเพี้ยนที่

อาจจะเกิดขึ้น ในการใช้งานจะกำหนดให้แบนด์วิดท์ของ ANF แคบเท่าที่จะทำได้ ทั้งนี้เพื่อให้ สัญญาณมีความผิดเพี้ยนน้อยที่สุด



รูปที่ 6.30 ผลการจำลองการกำจัดสัญญาณ 50 Hz จากคลื่นไฟฟ้าหัวใจของ อัลกอริทึมที่ทำงานกับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างรูปแบบโดยตรง



รูปที่ 6.31 ผลการจำลองการกำจัดสัญญาณไซน์คลื่นความถี่ 50 Hz ออกจากคลื่นไฟฟ้าหัวใจของ อัลกอริทึมที่ทำงานกับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างรูปแบบแลตทิซ

จากรูปที่ 6.30 และรูปที่ 6.31 จะเห็นว่าอัลกอริทึมแบบปรับค่าก้าวกระโดดสามารถกำจัดสัญญาณชาน์นออกจากสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจได้ดีกว่าอัลกอริทึมแบบ Modified MNG โดยที่แต่ละอัลกอริทึมได้ถูกกำหนดตัวแปรให้สามารถกำจัดสัญญาณไซน์ได้ใกล้เคียงกัน โดยจะมีจุดต่างที่อัลกอริทึมแบบ VSS และ NRVSS ไม่สามารถกำจัดสัญญาณไซน์ให้หมดไปตลอดการทำงานได้ จะเห็นได้ว่าอัลกอริทึมแบบ VNB สามารถกำจัดสัญญาณไซน์ได้ดีกว่า

## 6.5 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอผลการทดสอบอัลกอริทึมสำหรับตัวกรอง ANF แบบ IIR อันดับสอง ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ทั้ง โครงสร้างแบบ โดยตรง และแลตทิซ ด้วยการจำลองการทำงานบนโปรแกรม MATLAB โดยเริ่มจากการจำลองการทำงานการประมาณค่าสัญญาณไซน์ที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน จากผลการทดลองพบว่าอัลกอริทึมแบบ VNB เป็นอัลกอริทึมที่สามารถทำงานได้ดีมีประสิทธิภาพที่สุด กล่าวคือ สามารถปรับสัมประสิทธิ์เข้าสู่ค่าที่ต้องการได้เร็ว มีความผิดพลาดที่ต่ำ ค่าความแปรปรวนต่ำ และยังมีค่า bias ที่น้อยด้วย แต่เมื่ออัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนมีค่าต่ำลง ถ้ามีการกำหนดค่าเริ่มต้นของค่าก้าวกระโดดที่ไม่เหมาะสมแล้ว อัลกอริทึมแบบ VNB นี้อาจทำงานได้ด้อยกว่าอัลกอริทึมแบบอื่น แต่โดยรวมแล้ว อัลกอริทึมแบบ VNB สามารถทำงานได้ดีที่สุดเมื่อใช้สำหรับประมาณค่าสัญญาณไซน์คลื่นเดี่ยวที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียน ต่อมาเป็นการจำลองการทำงาน โดยการใช้อัลกอริทึมเพื่อประมาณค่าสัญญาณไซน์ในสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนและสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ พบว่าอัลกอริทึมแบบ VNB สำหรับ โครงสร้างแบบแลตทิซ เกิดความแปรปรวนน้อยที่สุด สามารถทนทานต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ที่มีค่าสูงได้ จากนั้นเป็นการจำลองการทำงานเมื่อนำเอาตัวกรองประยุกต์ใช้เพื่อกำจัดสัญญาณไซน์ที่รบกวนสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจอยู่ จากผลการทดลองพบว่าอัลกอริทึมแบบ VNB สำหรับ โครงสร้างรูปแบบ โดยตรงสามารถกำจัดคลื่นไซน์ได้ดีที่สุด

พิจารณาทั้งจากความเร็วในการกำจัดและ ลักษณะของสัญญาณโดยรวม ดังนั้นการพิจารณาในการเลือกนำอัลกอริทึม ไปใช้งานที่สำคัญ คือความเร็วในการปรับตัว และความถูกต้องของสัมประสิทธิ์ที่ถูกปรับตัว

## สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนออัลกอริทึมใหม่สำหรับตัวกรองความถี่อะแดปทีฟ IIR แบบนอตช์อันดับสอง สามแบบคือ อัลกอริทึมแบบ Variable step-size modified MNG (VSS) อัลกอริทึมแบบ Noise-robust variable step-size modified MNG (NRVSS) และอัลกอริทึมแบบ Variable notch bandwidth modified MNG (VNB) โดยอัลกอริทึมแบบ VSS นั้นเป็นการนำเอาเทคนิคการปรับค่าก้าวกระโดดมาใช้กับอัลกอริทึมที่สนใจ คืออัลกอริทึมแบบ Modified MNG [8] เพื่อลดความแปรปรวน (Variance) ที่เกิดจากสัญญาณรบกวนแบบเกรเดียนต์ (Gradient noise) ส่งผลให้ค่า MSE (Mean-square error) ซึ่งเป็นตัวบ่งบอกความผิดพลาดของคำตอบลดลง นอกจากนั้นการใช้ auto-correlation ระหว่าง  $y(n) \cdot y(n-1)$  ของสัญญาณเอาต์พุต ยังทำให้อัลกอริทึมทนทานต่อสัญญาณรบกวนเพิ่มขึ้น และยังทนทานต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์อีกด้วย ส่วนอัลกอริทึมแบบ NRVSS นั้นเป็นการปรับปรุงอัลกอริทึมแบบ VSS เพื่อลดความแปรปรวนซึ่งเกิดจากการปรับตัวแปรที่ใช้ควบคุมการปรับค่าก้าวกระโดด ซึ่งมีผลทำให้ช่วงแรกของการปรับค่าสัมประสิทธิ์นั้นลู่เข้าเร็วหรือช้า ถ้ากำหนดให้ตัวแปรนี้มาก อัลกอริทึมจะปรับตัวเร็ว แต่จะเกิดความแปรปรวนในช่วงที่กำลังจะเข้าสู่สถานะอยู่ตัว แต่ถ้ากำหนดให้ตัวแปรนี้มีค่าน้อย ลักษณะการลู่เข้าของอัลกอริทึมจะเรียบ แต่ช้า ดังนั้นจึงเปลี่ยนให้ตัวแปรนั้นเปลี่ยนแปลงตามเวลา เพื่อปรับให้อัลกอริทึมทำงานเร็วขึ้น แต่สามารถลดความแปรปรวนในช่วงที่กำลังจะเข้าสู่สถานะอยู่ตัวได้ และอัลกอริทึมแบบ VNB เป็นการนำเอาอัลกอริทึมก่อนหน้าคือ อัลกอริทึมแบบ NRVSS มาปรับเปลี่ยนความกว้างของแถบความถี่หยุดของตัวกรองเพื่อให้อัลกอริทึมทำงานได้เร็วขึ้น และเพิ่มความถูกต้องของข้อมูล ซึ่งแถบความถี่หยุดนี้ถูกควบคุมด้วยตัวแปร  $\rho$  ดังนั้นจึงเปลี่ยนให้ตัวแปร  $\rho$  นี้เปลี่ยนค่าตามเวลา โดยที่เมื่ออยู่ในช่วงแรกของการปรับตัว ตัวแปร  $\rho$  นี้จะมีค่าต่ำเพื่อให้อัลกอริทึมสามารถปรับตัวได้เร็วขึ้น และเมื่ออัลกอริทึมเข้าสู่ค่าที่เหมาะสม ตัวแปร  $\rho$  นี้จะเพิ่มค่าขึ้น เพื่อลดค่าความผิดพลาด MSE นอกจากนั้น อัลกอริทึมแบบ VNB จึงสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ กล่าวคือ สามารถปรับสัมประสิทธิ์ของตัวกรองได้เร็ว ลดความแปรปรวนซึ่งเกิดจากสัญญาณรบกวนแบบเกรเดียนต์ลงได้ มีค่าความเบี่ยงเบนที่ต่ำ และทนทานต่อสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์

สำหรับ โครงสร้างของตัวกรองนั้น ก็มีผลต่อประสิทธิภาพการทำงานของตัวกรองแบบอะแดปทีฟ โครงสร้างรูปแบบโดยตรง เป็นโครงสร้างพื้นฐานที่ให้ผลที่น่าสนใจ เนื่องจากไม่มีความซับซ้อนมากนัก และโครงสร้างรูปแบบแลตทิซ ซึ่งเป็นโครงสร้างที่สามารถลดความยุ่งยากทางคำนวณไปได้เล็กน้อย ซึ่งส่งผลให้ตัวกรองนั้น สามารถปรับตัวได้เร็วขึ้น จึงได้นำเอาอัลกอริทึม

ที่นำเสนอ นั้น มาใช้ทั้งตัวกรองที่ใช้โครงสร้างรูปแบบ โดยตรง และตัวกรองที่ใช้โครงสร้างรูปแบบ แลตทิซ โดยมีการปรับสมการเล็กน้อย

จากผลการทดลอง โดยใช้โปรแกรม MATLAB เพื่อจำลองการทำงานของอัลกอริทึมที่นำเสนอ เปรียบเทียบกับอัลกอริทึมเดิม [8] กับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างทั้งสองแบบ ภายใต้สัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนและแบบอิมพัลส์ พบว่าอัลกอริทึมแบบ VSS สามารถเพิ่มความเร็วในการลู่เข้า ลดความแปรปรวนลง และลดความผิดพลาดของสัมประสิทธิ์ลงได้ อัลกอริทึมแบบ NRVS จะให้ความแปรปรวนและความถูกต้องของสัมประสิทธิ์ใกล้เคียงกับอัลกอริทึมแบบ VSS แต่จะให้ความเร็วในการลู่เข้าที่ต่ำกว่า ส่วนอัลกอริทึมแบบ VNB ให้การลู่เข้าที่เร็วที่สุด มีความแปรปรวนและความผิดพลาดของสัมประสิทธิ์ที่น้อยที่สุด เมื่อเปรียบเทียบการทำงานตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบ โดยตรงและแบบแลตทิซ พบว่าการลู่เข้าของสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบแลตทิซสามารถทำได้เร็วกว่า และความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์มีค่าน้อยกว่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบ โดยตรง แต่อย่างไรก็ตามจากผลการจำลองการทำงานของตัวกรองทำงานร่วมกับอัลกอริทึมที่นำเสนอ โดยใช้โครงสร้างของตัวกรองแบบ โดยตรงและแบบแลตทิซ ในวิทยานิพนธ์นี้ แสดงให้เห็นว่าตัวกรองทำงานได้ดีภายใต้สัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนและสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ แต่การกำหนดค่าก้าวกระโดดเริ่มต้นที่มากเกินไปของอัลกอริทึมที่ใช้กับตัวกรองที่ใช้โครงสร้างแบบแลตทิซ อาจทำให้เกิดความไม่เสถียรขึ้นได้

เนื่องจากทฤษฎีเกี่ยวกับตัวกรองอะแดปทีฟแบบ IIR มีลักษณะการทำงานเป็นแบบ nonlinear ดังนั้นการทำนายพฤติกรรมของตัวกรองจึงยาก ต้องอาศัยแนวทางทางคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์และทดสอบคุณสมบัติของตัวกรองอะแดปทีฟแบบ IIR ดังนั้นการวิเคราะห์ตัวกรองชนิดนี้จึงต้องใช้คอมพิวเตอร์เพื่อจำลองการทำงานเช่นเดียวกับอัลกอริทึมที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้

## บรรณานุกรม

- [1] B. Widrow et al. "**Adaptive noise canceling: Principles and applications,**" Proc. IEEE, vol. 63, Dec. 1975. pp. 1692-1716.
- [2] S. Haykin 2002, **Adaptive Filter Theory**. 2<sup>nd</sup> ed. New Jersey : Prentice-Hall
- [3] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, and John R. Buck, **Discrete-Time Signal Processing**. New Jersey : Prentice-Hall. 1998.
- [4] Carey J. Gibson and Simon Haygin, "**Learning characteristics of adaptive lattice filtering algorithm,**" IEEE Trans. On Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.ASSP-28, No.6, Dec. 1980.
- [5] N. I. Cho and S. U. Lee, "**On the adaptive lattice notch filter for the detection of sinusoids,**" IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol.40, No.7, pp.405-416, July 1993.
- [6] N. I. Cho and S. U. Lee, "**Adaptive line enhancement by using an IIR lattice notch filter,**" IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, No.4, pp.585-589, April 1989.
- [7] Y. Xiao, Y. Tadakoro, and Y. Kobayashi, "**A new memoryless nonlinear gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter and its performance analysis,**" IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol.45, No. 4, April 1998.
- [8] P. Tupchai, C. Benjangkaprasert, O. Sangaroon, and K. Janchitrapongvej, "**A new algorithm of adaptive IIR notch filter for the detection of sinusoids,**" Proc. in IEEE Asia-Pacific Conference on Circuits and Systems (APCCAS 2002), pp.505 – 508, Oct. 2002.
- [9] T. Abounars, and K. Mayyas, "**A robust variable step-size LMS-Type algorithm: analysis and simulations,**" IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.45, No. 3, Mar. 1997.
- [10] R. H. Kwong and E. W. Johnson, "**A variable step-size LMS algorithm,**" IEEE Trans. On Signal Processing, Vol.40, pp.4633-1642, July 1992.
- [11] V. J. Mathew and Z. Xie, "**A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step-size,**" IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.41, pp.2075-2087, June 1993.
- [12] R. Harris, D. Chabries, F. Bishop, "**A variable step-size (VSS) algorithm,**" IEEE Trans Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.ASSP-34, pp.499-510, June 1986.

- [13] T. J. Shan and T. Kailath, "Adaptive algorithm with an automatic gain control feature." IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.35, pp.122-127, Jan. 1998.
- [14] J. Soo and K. K. Pang, "A multi step size (MSS) frequency domain adaptive filter," IEEE Trans. Signal Processing, Vol.39, pp. 115-121, Jan. 1991.
- [15] J. B. Evan, P.Xue, and B. Liu, "Analysis and implementation of variable step size adaptive algorithm," IEEE Trans. Signal Processing, Vol.41, pp. 2517-2535, Aug. 1993.
- [16] C. Benjangkprasert, S. Teerasakworakul, and K. Janchitrapongvej, "The noise-robust variable step-size algorithm for lattice form adaptive IIR notch filter," Proc. in IC-SEC 2002, pp. 316-319, Dec. 2002.
- [17] Monson H. Hayes. **Statistical Digital Signal Processing and Modeling**. Canada : John Wiley & Sons. 1996.
- [18] S. M. Kay. **Fundamentals of Statistical Signal Processing Estimation Theory**. Prentice-Hall. 1993.
- [19] R. Punalard, P. Chumchu, C. Benjangkprasert, N. Anantrasirichai, O. Sangaroon, K. Jenjerapongvej, "The reduction of gradient noise in gradient-based algorithm by using variable step-size technique," Proc. in IEEE APCCAS 2000, pp.415-418, Dec. 2000.
- [20] D. V. Bhaskar Rao and S. Y. Kung, "Adaptive notch filtering for the retrieval of sinusoids in noise," IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.32, No.4, pp.791-802, Aug. 1984.
- [21] P. A. Regalia, "An improved lattice-based adaptive IIR notch filter," IEEE trans. On Signal Processing, Vol. 39, No. 9, Sept. 1991.
- [22] S. K. Mitra. **Digital Signal Processing A Computer-Based Approach**. McGraw-Hill international edition. 1998.
- [23] R. Punalard, C. Benjangkprasert, N. Anantrasirichai, and K. Janchitrapongvej, "A robust variable step-size LMS-like algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter for frequency detection," Proc. in IEEE SPAWC '01, pp. 232-234, Mar. 2001.

- [24] C. Benjangkprasert, S. Phuvasitkul, W. Limwong, and K. Janchitrapongvej, **"Fast convergence algorithm for adaptive IIR notch filter using combination of genetic search and variable step-size algorithm,"** Proc. in IEEE Intelligent Transportation Systems, pp.948-952, Oct. 2003.
- [25] R. Punchalard, **"A fast convergence and robust algorithm for adaptive IIR notch filter,"** Proc. in ICONIP2001, pp.449-452, Nov. 2001.
- [26] John. R. Treichler, C. Richard Johnson, Michael G. Larimore, **Theory and Design of Adaptive Filters.** New York : John Wiley & Sons. 1987.
- [27] Andrew P. Sage and James L. Melsa, **Estimation Theory with Applications to Communication and Control.** New York : McGraw-Hill. 1971.
- [28] J. M. Memdel, **Lesson in Digital Estimation Theory.** New Jersey : Prentice-hall. 1986.
- [29] C. Benjangkprasert, S. Teerasakworakul, and K. Janchitrapongvej, **"Implementation of variable step-size algorithm for lattice form structure for echo cancellation,"** Proc. in IEEE APCCAS '02, Vol. 1, pp. 291-294, Oct. 2002.
- [30] C. Benjangkprasert, S. Jorphochaudom, S. Phuvasitkul, N. Anantrasirichai, **"A new gradient-based algorithm using variable step-size technique and its application,"** Proc. in IEEE APCCAS '02 , Vol. 1, pp.309-312, Oct. 2002.
- [31] Phillip A. Regalia, **"Stable and efficient lattice algorithms for adaptive IIR filtering,"** IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.40, pp.375-388, Feb. 1992.
- [32] Rachu Punchalard, **"On adaptive IIR lattice notch filter using a robust variable step-size for the detection of sinusoid,"** Proc. in IEEE ICCS 2002, Vol.2, pp.800-804, Nov. 2002.
- [33] Yegui Xiao, Y. Kobayashi, Y. Tadokoro, **"A novel memoryless nonlinear gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter,"** IEEE Conference on Neural Network 1996, Vol.4, pp.1865-1870, June 1996.
- [34] Yegui Xiao, Naoko Tani, **"Statistical properties of a memoryless nonlinear gradient algorithm for an adaptive constrained IIR notch filter,"** IEEE International Symposium on ISCAS 2001, pp.809-812, vol. 2. May 2001.
- [35] Yegui Xiao, K. Shida, **"New gradient-based algorithms for adaptive IIR notch filters,"** IEEE ICSP '98, Vol.1, pp. 453 - 456, Oct. 1998.

- [36] Yegui Xiao, Liying Ma, K. Khorasani, A. Ikuta, **“Statistical performance of the memoryless nonlinear gradient algorithm for the constrained adaptive IIR notch filter,”** IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. 52, pp. 1691-1702, Aug.2005.
- [37] R. Punalard and W. Lertvasana, **“Convergence speed improvement for a variable step-size algorithm by using variable notch bandwidth technique,”** Proc. of IEEE International neural networks and signal processing 2003, pp. 788-792, Dec. 2003.
- [38] P. Wattanaluk, J. Nakasuwan , C. Benjangkprasert, O. Sangaroon, K. Janchitrapongvej, **“Variable step-size modified MNG algorithm for adaptive IIR notch filter for detection of sinusoids,”** Proc. of IEEE International symposium on intelligent signal processing and communication systems (ISPACS 2005), pp. 245-248, Dec. 2005.
- [39] P. Wattanaluk, C. Benjangkprasert, O. Sangaroon, K. Janchitrapongvej, **“New variable step-Size algorithm for lattice form structure adaptive IIR filter,”** Proc. of Electronics, computer, telecommunications, and information technology association conference (ECTI-CON 2006), pp.14-17, May 2006.

## ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

## ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

- [1] P. Wattanaluk, J. Nakasuwan, C. Benjangkprasert, O. Sangaroon, and K. Janchitrapongvej, **“Variable step-size modified MNG algorithm for adaptive IIR notch filter for detection of sinusoids,”** Proc. of IEEE 2005 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS2005), pp.245-248, Dec. 2005.
- [2] P. Wattanaluk, C. Benjangkprasert, O. Sangaroon, K. Janchitrapongvej, **“New variable step-size algorithm for lattice form structure adaptive IIR notch filter,”** Proc. of Electronics, computer, telecommunications, and information technology association conference (ECTI-CON 2006), pp.14-17, May 2006.

2005  
INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON  
INTELLIGENT SIGNAL PROCESSING  
AND COMMUNICATION SYSTEMS

HONG KONG

PROCEEDINGS

Organized by

- The Chinese University of Hong Kong

Co-organized by

- IEEE Hong Kong Chapter of Signal Processing

Sponsored by

- United College, The Chinese University of Hong Kong

Co-sponsored by

- IEEE Hong Kong Section
- IEEE Hong Kong Joint Chapter on Circuits & Systems and Communications

## VARIABLE STEP-SIZE MODIFIED MNG ALGORITHM FOR ADAPTIVE IIR NOTCH FILTER FOR DETECTION OF SINUSOIDS

P. Wattanaluk\*, J. Nakasuwan\*\*, C. Benjangkprasert\*, O. Sangaroon\*, K. Janchitrapongvej\*

\* Research Center for communications and information Technology (ReCCIT), and  
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering,  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand.  
Email: parvati\_ka@hotmail.com, kbchawal@kmitl.ac.th

\*\* Department of Electronic and Telecommunication Engineering, Faculty of Engineering,  
Rajamangala University of Technology Thanyaburi, Pathumtanee, Thailand  
Email: jintanan@rmut.ac.th

**Abstract** - In this paper proposes an addition of a variable step-size modified memoryless nonlinear gradient (MNG) algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter for detection of sinusoids in noise environment. The structure of the adaptive IIR notch filter is based on direct form structure and lattice form structure. The objective of variable step-size (VSS) algorithm is to optimize the filter coefficient. The computer simulation results are shown that the proposed algorithm provides fast convergence speed, low mean square error, low variance of filter coefficients and high impulsive noise robustness.

### 1. INTRODUCTION

Adaptive IIR notch filters (ANF) are very useful in many signal processing applications such as communications, active noise control, radar, sonar, and biomedical engineering. They can be used to detect a narrowband signal in noise by estimating a few coefficients compared with the FIR notch filters and have less complexity.

There are many types of algorithm for adaptive IIR notch filter developed in the literature [1]-[5]. For adaptive algorithm analysis, the best adaptive algorithm requires fast convergence speed, low variance, unbiased and low steady-state mean square error (MSE) in both low and high signal to noise ratio (SNR) situation. In this paper, we are interested two adaptive algorithms. The first one is the new memoryless nonlinear gradient algorithm (MNG) [1]. This algorithm works well but the performance of convergence speed is low, when the algorithm is far from the optimum. The second one is the modified MNG algorithm [3] that is the modified version of the MNG algorithm and the FCR algorithm [2].

The variable step-size technique is the method of reducing the gradient noise [4]. Lattice structure is modular that is very useful to vary filter and easily to

consider its stabilization [5]. In this paper, a variable step-size algorithm for a second order adaptive IIR notch filter based on direct form structure and lattice form structure is proposed. The proposed algorithm provides fast convergence and the estimated parameters variance with high accuracy and robust to impulse noise. The simulations are tested by using the computer programs shows that the proposed algorithm is consistent.

### 2. THE PREVIOUS ALGORITHMS AND THE PROPOSED ALGORITHM

The transfer function of an adaptive IIR notch filter with direct form structure from input  $x(n)$  to notch output  $y(n)$  is expressed as

$$H_d(z) = \frac{1 + a(n)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \rho a(n)z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (1)$$

where  $a(n)$  is the filter coefficient, which should converge to  $-2 \cos(\omega_0)$  to reject an unknown frequency of single sinusoid signal whose frequency  $\omega_0$ ,  $\rho$  is the pole construction factor should be close but less than unity to ensure the stability of the filter. The larger pole radius  $\rho$  is, the narrower the bandwidth of the IIR notch filter.

The transfer function of adaptive IIR notch filter with lattice form structure shown in [5] is expressed as

$$H_l(z) = \frac{1 + 2k(n)z^{-1} + z^{-2}}{1 + k(n)(1 + \rho)z^{-1} + \rho z^{-2}} \quad (2)$$

where subscripts  $d$  and  $l$  denote the *direct* and *lattice* structures, respectively.  $k(n)$  is the lattice notch

parameter, which convert to  $-\cos \omega_0$ . To reduce the computational complexity, the transfer function in Eq. (2) is realized in the direct form II [5].

Assume that the input signal is a single sinusoid disturbed by Gaussian noise  $v(n)$  with zero mean and variance  $\sigma_v^2$  that can be defined as

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \theta) + v(n) \quad (3)$$

where  $A$  is amplitude of sinusoid,  $n$  is time index, and  $\theta$  is the initial phase which is uniformly distributed between 0 and  $\pi$ . The output signal of Eq. (1) and Eq.(2) can be expressed in time domain as Eq.(4) and Eq.(5), respectively

$$y_d(n) = x(n) + a \cdot x(n-1) + x(n-2) - a \cdot \rho \cdot y(n-1) - \rho^2 \cdot y(n-2) \quad (4)$$

and

$$y_l(n) = u(n) + 2 \cdot k(n) \cdot u(n-1) + u(n-2) \quad (5)$$

where

$$u(n) = x(n) - k(n) \cdot (1 + \rho) \cdot u(n-1) - \rho \cdot u(n-2) \quad (6)$$

The gradient signal is given by

$$g_d(n) = x(n-1) - \rho \cdot y_d(n-1) \quad (7)$$

and

$$g_l(n) = (1 - \rho) \cdot u(n) \quad (8)$$

The equation for update the filter coefficient of the previous memoryless nonlinear gradient (MNG) algorithm [2] can be expressed as

$$a(n+1) = a(n) - \mu \cdot y(n) \cdot \frac{g(n)}{1 + \varepsilon \cdot g^2(n)} \quad (9)$$

where  $\mu$  is a positive fixed step-size parameter,  $\varepsilon$  is a user parameter and is chosen to achieve better performance. The proper selection of  $\varepsilon$  can produce considerable improvement in both convergence rate and estimation variance.

Next, we describe the modified MNG algorithm that was proposed in ref. [3]. The modified MNG algorithm used to update the filter coefficient is shown as follows

$$a(n+1) = a(n) - \mu \cdot y(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g(n)}{1 + g(n)}\right) \quad (10)$$

where  $\mu$  is a positive fixed step-size parameter.

This paper, we have proposed the variable step-size (VSS) algorithm to adjust the step-size parameter using an estimate of the power of the autocorrelation of output signal of ANF to control step-size update. The notch parameter update recursion is changed in Eq. (10), a variable  $\mu(n)$  instead of a fixed  $\mu$ . Therefore

$$a(n+1) = a(n) - \mu_d(n) \cdot y_d(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_d(n)}{1 + g_d(n)}\right) \quad (11)$$

and

$$k(n+1) = k(n) - \mu_l(n) \cdot y_l(n) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{g_l(n)}{1 + g_l(n)}\right) \quad (12)$$

where  $\mu_d(n)$  and  $\mu_l(n)$  is a variable step-size parameter for direct form structure and lattice form structure, respectively.

The variable step-size update equation for each structure of the filter coefficient is given by:

$$\mu_d(n+1) = \alpha \cdot \mu_d(n) + \gamma \cdot \varphi_d^2(n) \quad (13)$$

and

$$\mu_l(n+1) = \alpha \cdot \mu_l(n) + \gamma \cdot \varphi_l^2(n) \quad (14)$$

where  $\alpha$  is positive constant, the range of values for  $\alpha$  between 0 and 1, for the quality of the estimation should be close to unity and  $\gamma$  is small positive constant. Thus, the adaptation step-size is adjusted using the power of the instantaneous output signal.

If the notch parameter of update recursion is large when the algorithm is far from the optimum that give the fast convergence speed in the initial and decreasing as approach the optimum that give low MSE. To approach this objective is ensure large  $\mu(n)$  step-size parameter when the algorithm is far from the optimum and  $\mu(n)$  decreasing as approach the optimum. The variable step-size algorithm achieves the objective by using an estimate of the power of the autocorrelation of output signal of the ANF to control step-size update. The estimate of the control signal is a time average signal that describe as follows:

$$\varphi_d(n) = \beta \cdot \varphi_d(n-1) + (1 - \beta) \cdot y_d(n) \cdot y_d(n-1) \quad (15)$$

and

$$\varphi_i(n) = \beta \cdot \varphi_i(n-1) + (1-\beta) \cdot y_i(n) \cdot y_i(n-1) \quad (16)$$

where  $\beta$  is positive constant, the range of values for  $\beta$  between 0 and 1. This constant is called an exponential weighting parameter that governs the averaging time constant, i.e., the quality of the estimation.

In the early stages of adaptation, the estimate value of the control signal power  $\varphi^2(n)$  is large, resulting in a large  $\mu(n)$ . As we approach the optimum, the output signal approach zero, that the control signal also approach zero too, resulting in a smaller step-size parameter. This provides the fast convergence due to large initial  $\mu(n)$  while ensuring low steady-state MSE due to the small final  $\mu(n)$ .

### 3. THE SIMULATION RESULTS

In this section, the proposed algorithm is used to estimate a single sinusoid signal in noise. The performance of the proposed algorithm is compared with the MNG [1] algorithm and the modified MNG [3] algorithm.

In the simulations, the input sinusoid of Eq. (3) has unit magnitude ( $A=1$ ) and is corrupted by the white Gaussian noise ( $v(n)$ ) with  $SNR = 10$  dB. In this case, other parameters chosen are  $\omega_0 = \pi/3$ ,  $a(n) = -2 \cos(\omega_0)$ ,  $k(n) = -\cos(\omega_0)$ ,  $a(0) = 0$ ,  $k(0) = 0$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $\beta = 0.95$ ,  $\alpha = 0.98$ ,  $\gamma = 0.001$  and  $\varepsilon = 0.01$ .

Fig. 1 shows the estimated filter coefficient “ $a(n)$ ” and “ $k(n)$ ” results derived from the MNG algorithm (Eq. (9)) and the modified MNG algorithm (Eq. (10)), the proposed algorithm in direct form (Eq. (11)) and the proposed algorithm in lattice form (Eq. (12)) in Gaussian noise environment. It can be seen that, in the same environment  $SNR = 10$  dB. The proposed algorithm gives the fastest convergence speed and the gradient noise in the notch parameter is lower than the previous algorithms, resulting in the low variance of the filter coefficient.

In Fig. 2 shows an estimated steady-state MSE results derived from the MNG, the modified MNG and the proposed algorithms. It is shown that the proposed algorithm yield significantly MSE improvement over other algorithms.

And Fig. 3 shows the algorithms are adjusted to have the same steady-state MSE's. We found that the proposed

algorithm has higher convergence speed than the previous modified MNG[3] algorithm.

Fig. 4 shows the estimated filter coefficient  $a(n)$  and  $k(n)$  of the algorithms in Gaussian white noise and with impulse noise  $20\delta(n)$  at  $n = 1500$ . It can be seen that the proposed algorithm in both forms can work very well in high impulse noise environment.

### 4. CONCLUSIONS

In this paper, the new variable step-size modified MNG algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter is presented. From the simulation result, it is shown that the proposed technique can increase the convergence speed, gives low MSE of filter parameter and high impulsive noise robustness.

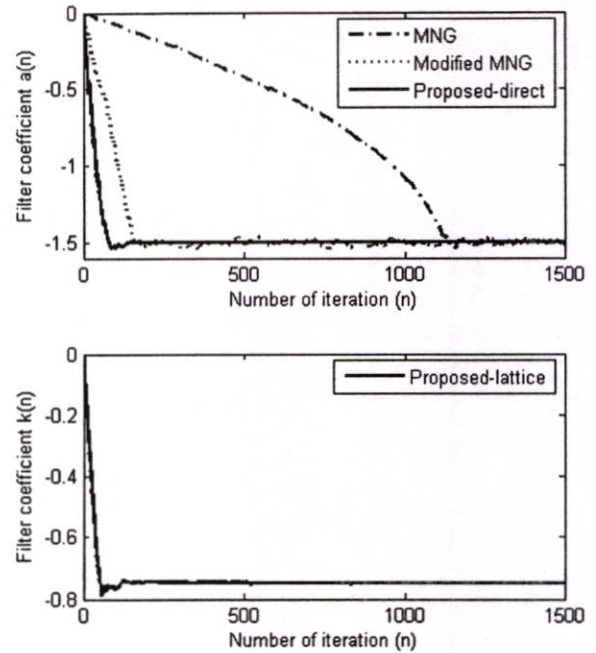


Fig. 1. The estimated filter coefficient  $a(n)$  and  $k(n)$  of the algorithms in Gaussian noise environment  $SNR = 10$  dB. When the step-size parameters are  $\mu = 0.07$ ,  $\mu_d(0) = 0.07$ ,  $\mu_l(0) = 0.035$ .

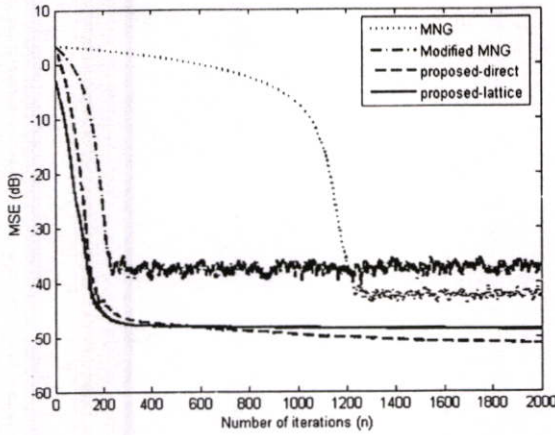


Fig. 2. Comparison of MSE's of the algorithms with the parameters  $N = 2000$ ,  $SNR = 10$  dB,  $\rho = 0.9$ ,  $\mu = 0.07$ ,  $\mu_d(0) = 0.07$ ,  $\mu_l(0) = 0.035$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 0.95$ ,  $\gamma = 0.061$ , and 100 computer runs.

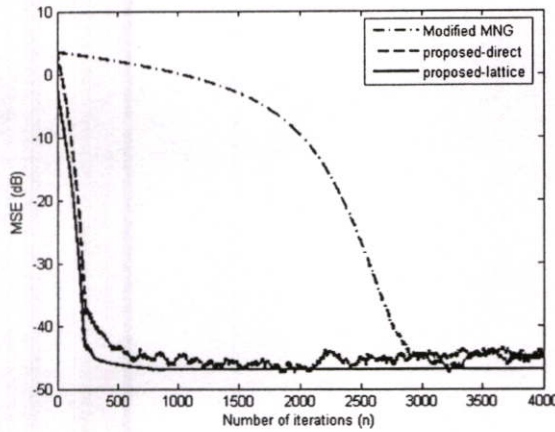


Fig. 3. Comparison of convergence rates of the algorithms with the same MSE's ( $SNR = 5$  dB,  $N = 4000$ ,  $\mu = 0.002$  for Eq. (10),  $\mu_d(0) = 0.07$  for Eq. (11),  $\mu_l(0) = 0.03$  for Eq. (12), and 100 computer runs.).

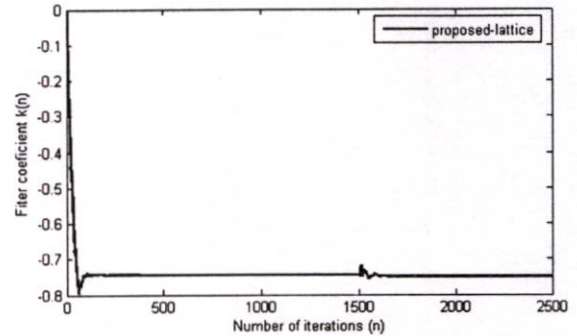
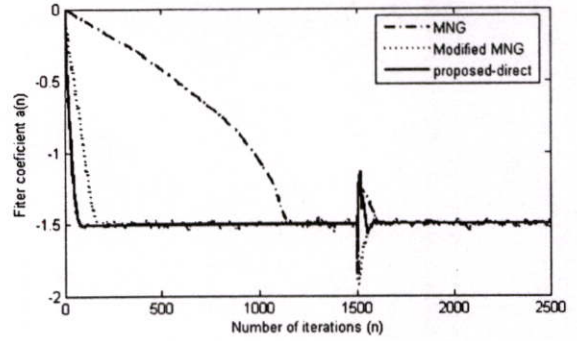


Fig. 4. Shows the estimated filter coefficient  $a(n)$  and  $k(n)$  of the algorithms in Gaussian noise ( $SNR=10$  dB) and impulse noise environments ( $20\delta(n-1500)$ ).

## REFERENCES

- [1] Y. Xiao, Y. Tadokoro, and Y. Kobayashi, "A new memoryless nonlinear gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter and its performance analysis," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 45, no.4, pp.462-472, April 1998.
- [2] C. Benjangkprasert and P. Tupchai, R. Puchalard, O. Sangaroon and K. Janchirapongvej, "A fast convergence and robust algorithm for adaptive IIR notch filter," *Proc. in ICONIP*, pp.449-452, Nov. 2001.
- [3] P. Tupchai and C. Benjangkprasert, O. Sangaroon and K. Janchirapongvej, "A new algorithm of adaptive IIR notch filter for the detection of sinusoids," *Proc. in IEEE APCCAS*, pp.505-508, Oct. 2002.
- [4] K. Mayyas and T. Aboulnasr, "A Robust Variable Step Size LMS-Type Algorithm: Analysis and Simulations," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no. 3, pp.631-639, March 1997.
- [5] N. I. Cho, "On the adaptive Lattice IIR notch filter for the Detection of sinusoidal," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.40, no.7, pp. 405-416, July 1993.

ภาคผนวก ข.

## ประวัติผู้เขียน

นางสาวปารวี วัฒนลักษณะ เกิดเมื่อวันที่ 24 พฤษภาคม 2524 ที่จังหวัดลำพูน สำเร็จการศึกษา  
ระดับปริญญาตรีจาก คณะวิศวกรรมศาสตร์ ศูนย์กลางสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล ภาควิชา  
วิศวกรรมไฟฟ้า สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า-โทรคมนาคม ปีการศึกษา 2546 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตร  
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมสารสนเทศ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
เจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปีการศึกษา 2547