

ขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน  
บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล

PARALLEL TWO DIMENSIONAL CONVEX HULL ALGORITHM  
ON THE RECONFIGURABLE MESH



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2550

KMITL-2007-SC-M-002-003

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน  
บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล

PARALLEL TWO DIMENSIONAL CONVEX HULL ALGORITHM  
ON THE RECONFIGURABLE MESH



สุวารี แก้วปรารถนา

SUWAREE KAEWPRADTHANA

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 76677  
วัน,เดือน,ปี..... - 6 S.ค. 2550

.b.....  
.i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์  
บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ ซึ่งขอสงวนไว้เพื่อประโยชน์ในการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา พ.ศ. 2550

KMITL-2007-SC-M-002-098



เอกสารนี้เป็นทรัพย์สินที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ หากมีข้อสงสัย กรุณาติดต่อฝ่ายลิขสิทธิ์ และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**COPYRIGHT 2007**  
**SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**  
**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

บัณฑิตวิทยาลัย  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์      ขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล  
Parallel Two Dimensional Convex Hull Algorithm on the Reconfigurable Mesh  
ชื่อนักศึกษา      นางสาวสุวารี      แก้วปรารถนา  
รหัสประจำตัว      48067512  
ปริญญา      วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชา      วิทยาการคอมพิวเตอร์  
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์      ผศ.ดร.จิรพร      ศรีสวัสดิ์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์:		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ศรัณย์	อินทโกสุม	
ผศ.ดร.จิรพร	ศรีสวัสดิ์	
รศ.ดร.วีระ	บุญจริง	
ดร.เฉลิมศักดิ์	เลิศวงศ์เสถียร	

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ 26 ตุลาคม 2550 เวลา 16.30 น. เป็นต้นไป

สถานที่สอบ ณ อาคารจุฬารามวลัยลักษณ์ 1 ห้อง 219



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานที่... วันที่... 26... เดือน... ตุลาคม... พ.ศ. 2550...  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล
นักศึกษา	นางสาวสุวารี แก้วปรารถนา
รหัสประจำตัว	48067512
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิทยาการคอมพิวเตอร์
พ.ศ.	2550
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ. ดร. จิรพร ศรีสวัสดิ์

### บทคัดย่อ

ปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (2-D Convex Hull Problem) เป็นปัญหาหลักปัญหาหนึ่งทางด้านการคำนวณทางเรขาคณิต ซึ่งมีงานวิจัยก่อนหน้านี้หลายงานวิจัยที่นำเสนอขั้นตอนวิธีสำหรับแก้ปัญหาบนระบบประมวลผลแบบขนาน แต่ข้อเสียคือจำเป็นต้องใช้หน่วยประมวลผลเป็นจำนวนมาก บางงานวิจัยใช้จำนวนหน่วยประมวลผลมากถึงกำลังสามของข้อมูลนำเข้า ( $N^3 \times N$ ) ดังนั้นจึงมีแนวความคิดที่จะพัฒนาขั้นตอนวิธีการหาผลลัพธ์ของปัญหานี้บนระบบแบบขนาน โดยใช้จำนวนหน่วยประมวลผลน้อยลง

งานวิจัยนี้จึงได้นำขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล (Reconfigurable Mesh) ขนาด  $N \times N$  โดยใช้เวลาดังตัว ( $O(1)$ ) ที่มีผู้พัฒนาไว้แล้วมาพัฒนาต่อ ซึ่งจะใช้วิธีการหาผลลัพธ์แบบเป็นรอบการทำงาน ใช้เทคนิคแบ่งและได้ชัยชนะ (Divide and Conquer) และนำผลลัพธ์จากทุกรอบการทำงานมาผสานกัน (Merge) โดยขั้นตอนวิธีที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้เป็นวิธีทั่วไปที่ใช้จำนวนหน่วยประมวลผลน้อยลงกว่าวิธีเดิม ( $N \times \sqrt{N}$ ) และมีความซับซ้อนด้านเวลาเท่ากับ  $O(\sqrt{N})$  และเมื่อใช้จำนวนหน่วยประมวลผลเท่าวิธีเดิม ( $N \times N$ ) ก็จะมีค่าความซับซ้อนด้านเวลาเท่ากับ  $O(1)$  ด้วยเช่นกัน

<b>Thesis</b>	Parallel Two Dimensional Convex Hull Algorithm on the Reconfigurable Mesh
<b>Student</b>	Miss Suwaree Kaewpradthana
<b>Student ID.</b>	48067512
<b>Degree</b>	Master of Science
<b>Program</b>	Computer Science
<b>Year</b>	2007
<b>Thesis Advisor</b>	Asst. Prof. Dr. Jeeraporn Srisawat

## ABSTRACT

A two dimensional (2-D) Convex Hull problem is one of the most important problems of the computational geometry. Many previous studies presented algorithms for solving this problem on the parallel processing systems of size  $N \times N$  processors in  $O(1)$  time. However, the weakness of those algorithms is the requisite of a large number of processors -- some algorithms use the third power as many processors as the size of input data ( $N^2 \times N$ ). Therefore, the idea to develop and improve algorithms using less processors for solving this problem will be considerably discussed.

The purpose of this research is to improve the recently studied parallel 2-D Convex Hull algorithm solved in  $O(1)$  time on the  $N \times N$  reconfigurable mesh. In particular, this algorithm applies the Divide and Conquer technique and merging to merge all outcomes from each cycle. The desired algorithm will use less processors than the previous one ( $N \times \sqrt{N}$ ) and can be performed in  $O(\sqrt{N})$  time. In addition, if  $N \times N$  processors are used, it can be performed in  $O(1)$  time.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้มีอาจจะสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี หากมิได้รับคำแนะนำ คำชี้แจง ความรู้ และความเอาใจใส่จาก ผศ.ดร.จิรพร ศรีสวัสดิ์ ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งท่านได้สละเวลาให้กับข้าพเจ้าอย่างเต็มที่ จึงใคร่ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.วีระ บุญจริง ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม และดร.เฉลิมศักดิ์ เลิศวงศ์เสถียร คณะกรรมการสอบหัวข้อ และโครงร่างวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำตลอดจนข้อชี้แนะจนในที่สุดทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา พี่ๆ และครอบครัว ที่สนับสนุนให้ได้เรียนในระดับที่ได้ตั้งใจ และให้ความรัก ความอบอุ่น ความเข้าใจ อีกทั้งยังได้ดูแลเรื่องค่าใช้จ่ายต่างๆระหว่างศึกษาเป็นอย่างดีอีกด้วย

ขอขอบคุณ นายชัยพฤกษ์ ภักดีพรหมมา นางสาวนิภาพร ไผ่ขาว พี่ๆ และเพื่อนๆ ทุกคนที่ให้คำปรึกษา และช่วยอำนวยความสะดวกในด้านต่างๆ

และขอบคุณทุกกำลังใจจากทุกคนที่หิบบั่นให้ในยามที่เกิดปัญหาและท้อแท้

สำหรับคุณงามความดีและประโยชน์อันใดที่เกิดขึ้นจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดา มารดา อาจารย์ทุกท่านซึ่งเป็นที่เคารพรักยิ่ง ตลอดจนญาติพี่น้อง และเพื่อนๆทุกคน

สุวารี แก้วปรารธนา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	2
1.4 ขอบเขตการวิจัย.....	2
1.5 ขั้นตอนการศึกษาและการดำเนินงานวิจัย.....	3
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.1 ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	4
2.2 ปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (Two Dimensional Convex Hull Problem).....	7
2.2.1 นิยามปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ.....	7
2.2.2 การหาตำแหน่งของจุด โดยใช้เส้นตรงเป็นตำแหน่งอ้างอิง.....	9
2.3 ความรู้พื้นฐาน.....	9
2.3.1 การหาค่าสูงสุดเต็มหน้าบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	9
2.3.2 การหาคือมแพกชันบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	10
2.3.3 การเรียงลำดับข้อมูลบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	10
2.3.4 การดำเนินการทางตรรกะบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	11
2.4 ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ	
บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	11
2.4.1 ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ.....	11
2.4.2 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุด.....	14

# สารบัญ (ต่อ)

หน้า

2.4.3 ขั้นตอนวิธีที่ย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	18
2.5 ขั้นตอนวิธีการหาเส้นค้ำจุนบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล .....	19
2.5.1 ขั้นตอนวิธีการหาเส้นค้ำจุนบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล .....	19
2.5.2 ตัวอย่างการหาเส้นค้ำจุนบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	23
2.6 ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ .....	28
2.6.1 ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลขนาด $N \times N$ .....	29
2.6.2 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ โดยใช้ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุด.....	37
<b>บทที่ 3 การหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน .....</b>	<b>48</b>
3.1 ขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลขนาด $N \times \sqrt{N}$ .....	48
3.2 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลขนาด $N \times \sqrt{N}$ .....	54
<b>บทที่ 4 การวิเคราะห์ความซับซ้อนด้านเวลาของขั้นตอนวิธีที่น่าสนใจ .....</b>	<b>75</b>
4.1 ความซับซ้อนด้านเวลา .....	75
4.2 ความซับซ้อนด้านเวลาของขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล.....	75
<b>บทที่ 5 บทสรุปและแนวทางการพัฒนางานวิจัย .....</b>	<b>82</b>
5.1 บทสรุป .....	82
5.2 แนวทางการพัฒนางานวิจัย .....	82
<b>เอกสารอ้างอิง .....</b>	<b>83</b>
<b>ประวัติผู้เขียน .....</b>	<b>84</b>

# สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 แสดงลำดับของจุดในแต่ละเซต $S_i$ ตามค่า $y$ .....	15
2.2 แสดงค่า $f(j)$ ในแต่ละเซต $S_i$ .....	16
2.3 แสดงคู่อันดับ $(f(j), g(j))$ ในแต่ละเซต $S_i$ .....	17



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1	ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด $4 \times 5$ ..... 4
2.2	รูปแบบการเชื่อมต่อภายในทั้งหมด ..... 5
2.3	การปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้หน่วยประมวลผลที่อยู่ใกล้กันที่สุดติดต่อกัน ..... 6
2.4	การปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้บัสแบ่งออกเป็นบัสย่อยตามแนวตั้ง ..... 6
2.5	การปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้บัสแบ่งออกเป็นบัสย่อยตามแนวนอน ..... 6
2.6	นิยามอย่างไม่เป็นทางการของปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ ..... 7
2.7	ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมและรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย ..... 7
2.8	ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมคอนเวกซ์และรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายที่ไม่เป็นคอนเวกซ์ ..... 8
2.9	ตัวอย่างคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซตของจุดในระนาบสองมิติ ..... 8
2.10	แสดงจุด $p_1, p_2, p_3, p_4$ และเซต $S_i$ ..... 12
2.11	แสดงวิธีการหาค่า $f(j)$ ..... 13
2.12	แสดงคู่อันดับ $(f(j), g(j))$ ..... 13
2.13	แสดงค่าพิทักในระนาบสองมิติของข้อมูลนำเข้า ..... 14
2.14	แสดงจุด $p_1, p_2, p_3, p_4$ และเซต $S_i$ ..... 14
2.15	แสดงการเรียงลำดับตามค่า $y$ ในแต่ละเซต $S_i$ ..... 15
2.16	แสดงการหาค่า $f(j)$ ในแต่ละเซต $S_i$ ..... 16
2.17	แสดงค่า $f(j)$ ในแต่ละเซต $S_i$ ..... 16
2.18	แสดงคู่อันดับ $(f(j), g(j))$ ในแต่ละเซต $S_i$ ..... 17
2.19	แสดงผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ ..... 18
2.20	หน่วยประมวลผลที่ $P(i, j)$ เก็บค่า $v_j$ และหน่วยประมวลผลที่ $P(i, 1)$ เก็บค่า $u_i$ ..... 20
2.21	การส่งค่า $u_i$ และ $v_j$ จากหน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ..... 20
2.22	การเก็บค่า $u_i$ และ $v_j$ ของแต่ละหน่วยประมวลผลที่ $P(i, j)$ ..... 20
2.23	หน่วยประมวลผลที่ $P(i, j)$ ส่งค่า $v_j$ ไปยังหน่วยประมวลผลข้างเคียงในแถวเดียวกัน ..... 21
2.24	ค่า $j$ ในแต่ละแถว $i$ ที่ทำให้จุด $v_{j-1}$ และ $v_{j+1}$ อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง $u_i v_j$ ..... 22
2.25	การส่งค่า $v_j$ ไปเก็บไว้ที่ตัวแปร $z_i$ ในแต่ละแถว $i$ ..... 22
2.26	การส่งค่า $u_i$ และ $z_i$ ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ $i$ ..... 22
2.27	แสดงค่าของข้อมูลนำเข้า ..... 23
2.28	หน่วยประมวลผลแถวที่ 1 เก็บค่า $v_j$ และหน่วยประมวลผลหลักที่ 1 เก็บค่า $u_i$ ..... 24

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
2.29 การส่งค่า $v_j$ และ $u_i$ ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน และแถวเดียวกัน.....	24
2.30 แสดงการเก็บข้อมูลในแต่ละหน่วยประมวลผล .....	25
2.31 ทุกหน่วยประมวลผลส่งค่า $v_j$ ไปยังหน่วยประมวลผลข้างเคียงที่อยู่ในแถวเดียวกัน.....	25
2.32 การหาค่า $j$ ในแต่ละแถว $i$ ที่ทำให้จุด $v_{j-1}$ และ $v_{j+1}$ อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง $u_i v_j$ .....	26
2.33 ผลลัพธ์ในแต่ละแถว $i$ .....	26
2.34 การส่งค่า $v_j$ ไปเก็บไว้ที่ตัวแปร $z_i$ ในแต่ละแถว $i$ .....	27
2.35 การส่งค่า $u_i, z_i$ จากหน่วยประมวลผลที่ $P(i, i)$ ไปทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน ..	27
2.36 การเรียงหน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบว่าเป็นจริง .....	28
2.37 เส้นค้ำจุนของ $CH(S_1)$ และ $CH(S_2)$ คือเส้นตรง $FJ$ .....	28
2.38 หน่วยประมวลผลที่ $P(1, j)$ เก็บข้อมูลนำเข้า $a_j$ .....	29
2.39 ระบบย่อยขนาด $N \times \sqrt{N}$ เก็บข้อมูลนำเข้า $\sqrt{N}$ จุด.....	30
2.40 ระบบย่อย $R_{i,j}$ .....	31
2.41 ทุกหน่วยประมวลผลในแถวแรกส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน..	31
2.42 หน่วยประมวลผลในแนวเส้นทแยงมุมของแต่ละระบบย่อย $R_{i,j}$ เก็บค่า $CH(S_j)$ .....	32
2.43 หน่วยประมวลผลที่ $P(i, i)$ ส่งข้อมูลที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน ...	33
2.44 หน่วยประมวลผลที่เก็บเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย $R_{i,j}$ .....	34
2.45 การส่งผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลแถวที่ $j$ ในแต่ละระบบย่อย $R_{i,j}$ เมื่อ $i \neq j$ .....	35
2.46 การส่งผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน .....	36
2.47 ผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่เกิดจากการนำเซตผลลัพธ์แต่ละส่วนมายูเนียนกัน .....	37
2.48 หน่วยประมวลผลแถวที่ 1 เก็บข้อมูลนำเข้า $a_j$ .....	38
2.49 แต่ละระบบย่อยขนาด $16 \times 4$ เก็บข้อมูลนำเข้า 4 จุด .....	39
2.50 รูปแสดงผลลัพธ์ของแต่ละกลุ่มข้อมูลย่อยในระนาบสองมิติ .....	39
2.51 การเก็บผลลัพธ์ในแต่ละระบบย่อย.....	40
2.52 ระบบย่อยขนาด $4 \times 4$ จำนวนทั้งหมด 16 ระบบย่อย .....	41
2.53 การส่งค่าผลลัพธ์ที่ทำให้แต่ละระบบย่อย $R_{i,j}$ เก็บผลลัพธ์ $CH(S_j)$ .....	42
2.54 การส่งข้อมูลไปในแถวเดียวกันทำให้ระบบย่อย $R_{i,j}$ เก็บข้อมูล $CH(S_i)$ และ $CH(S_j)$ ....	43
2.55 เส้นค้ำจุนด้านบนและเส้นค้ำจุนด้านล่างของแต่ละคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ.....	44
2.56 แสดงหน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนที่คำนวณได้ในแต่ละระบบย่อย .....	44

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
2.57 การส่งผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนไปยังหน่วยประมวลผลแถวที่ $j$ ของแต่ละระบบย่อย.....	45
2.58 หน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน.....	46
2.59 แสดงเส้นค้ำจุนด้านบนและเส้นค้ำจุนด้านล่างของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ ( $CH(S)$ ).....	47
3.1 (a) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เก็บข้อมูลนำเข้า $a_i$ เมื่อ $1 \leq i \leq N$ (b) ระบบย่อย ขนาด $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ เก็บข้อมูลนำเข้าขนาด $\sqrt{N}$ ค่า จำนวนทั้งหมด $\sqrt{N}$ ระบบย่อย.....	49
3.2 การหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (a) คอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละระบบย่อย (b) การส่งผลลัพธ์ไปในแถวเดียวกันโดยใช้บั๊สย่อยแนวนอน.....	50
3.3 (a) การส่งค่าผลลัพธ์และการหาเส้นค้ำจุนของการทำงานรอบที่ $k$ (b) การส่งผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลที่ $P(i, x)$ โดยใช้บั๊สย่อยแนวนอน.....	51
3.4 (a) หน่วยประมวลผลที่ $P(i, x)$ ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ $x$ (b) การเซตค่าตัวแปรของหน่วยประมวลผลที่เก็บจุดที่อยู่บนเส้นค้ำจุน.....	52
3.5 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (a) การเก็บข้อมูลนำเข้า $a_i$ เมื่อ $1 \leq i \leq 16$ (b) การเก็บชุดข้อมูลย่อยในแต่ละระบบย่อย.....	55
3.6 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (a) คอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละระบบย่อย (b) การส่งผลลัพธ์ไปในแถวเดียวกันโดยใช้บั๊สย่อยแนวนอน.....	56
3.7 รอบการทำงานที่ $k = 1$ (a) ระบบย่อยที่ 1 ส่งค่าที่เก็บไว้ $CH(S_1)$ ไปยัง ทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย.....	57
3.8 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนในระนาบสองมิติของรอบการทำงานที่ $k = 1$ .....	58
3.9 รอบการทำงานที่ $k = 1$ (a) การส่งเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย (b) การส่งเส้นค้ำจุนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บั๊สย่อยแนวตั้ง.....	59
3.10 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต $S$ จากรอบการทำงานที่ $k = 1$ .....	59
3.11 รอบการทำงานที่ $k = 1$ (a) หน่วยประมวลผลเซตค่าตัวแปร Mark และ Low (b) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เซตค่าตัวแปร Mark และ Low.....	60
3.12 รอบการทำงานที่ $k = 2$ (a) ระบบย่อยที่ 2 ส่งค่าที่เก็บไว้ ( $CH(S_2)$ ) ไปยัง ทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย.....	61
3.13 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนในระนาบสองมิติของรอบการทำงานที่ $k = 2$ .....	62
3.14 รอบการทำงานที่ $k = 2$ (a) การส่งเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย (b) การส่งเส้นค้ำจุนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บั๊สย่อยแนวตั้ง.....	63

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.15 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต $S$ จากรอบการทำงานที่ $k = 2$ .....	64
3.16 รอบการทำงานที่ $k = 2$ (a) หน่วยประมวลผลเซตค่าตัวแปร Mark, Up และ Low (b) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เซตค่าตัวแปร Mark, Up และ Low .....	64
3.17 รอบการทำงานที่ $k = 3$ (a) ระบบย่อยที่ 3 ส่งค่าที่เก็บไว้ ( $CH(S_3)$ ) ไปยัง ทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย .....	66
3.18 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนในระนาบสองมิติของรอบการทำงานที่ $k = 3$ .....	66
3.19 รอบการทำงานที่ $k = 3$ (a) การส่งเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย (b) การส่งเส้นค้ำจุนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง .....	67
3.20 รอบการทำงานที่ $k = 4$ (a) ระบบย่อยที่ 4 ส่งค่าที่เก็บไว้ ( $CH(S_4)$ ) ไปยัง ทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย .....	68
3.21 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนในระนาบสองมิติของรอบการทำงานที่ $k = 4$ .....	69
3.22 รอบการทำงานที่ $k = 4$ (a) การส่งเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย (b) การส่งเส้นค้ำจุนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง .....	70
3.23 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต $S$ จากรอบการทำงานที่ $k = 4$ .....	70
3.24 รอบการทำงานที่ $k = 4$ (a) หน่วยประมวลผลเซตค่าตัวแปร Mark และ Up (b) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เซตค่าตัวแปร Mark และ Up .....	71
3.25 หน่วยประมวลผลที่มีค่า Mark = true .....	72
3.26 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต $S$ จากรอบการทำงานที่ $k=1$ ถึง $k=4$ ....	73
3.27 หน่วยประมวลผลที่เก็บค่าผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต $S$ .....	73
3.28 ผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต $S$ ในระนาบสองมิติ .....	74

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การออกแบบขั้นตอนวิธีเพื่อให้สามารถทำงานใดงานหนึ่งให้สำเร็จตามที่เรต้องการได้นั้น สามารถออกแบบได้หลายขั้นตอนวิธีด้วยกัน โดยแต่ละขั้นตอนวิธีก็มีลำดับขั้นตอนในการประมวลผลแตกต่างกันไป [3] สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละขั้นตอนวิธีที่ทำงานขึ้นเดียวกันนั้น นิยมพิจารณาอยู่สองส่วนหลักๆ คือ หน่วยความจำ(Memory) ที่ใช้ในการประมวลผลและเวลา (Time) ที่ใช้ในการประมวลผล ซึ่งถ้าขั้นตอนวิธีใดใช้หน่วยความจำและใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่า จะกล่าวได้ว่าขั้นตอนวิธีนั้นมีประสิทธิภาพดีกว่า แต่การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีที่มีการประมวลผลแบบขนานนั้น ยังมีอีกหนึ่งส่วนที่นิยมนำมาเปรียบเทียบ คือ จำนวนหน่วยประมวลผลที่ใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งถ้าขั้นตอนวิธีใดใช้หน่วยประมวลผลจำนวนมาก ในการประยุกต์ใช้ก็ต้องการระบบที่มีขนาดใหญ่เท่านั้นด้วย ซึ่งจะทำให้ต้นทุนในการสร้างระบบประมวลผลแบบขนานนั้นสูงขึ้น โดยต้นทุนที่ใช้ในการสร้างระบบประมวลผลแบบขนานนั้นจะแปรผันตรงกับจำนวนหน่วยประมวลผล และมีผลทำให้ต้นทุนในการแก้ปัญหาสูงขึ้น กล่าวคือ ต้องใช้เงินมากขึ้น

ปัญหาหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (2-D Convex Hull Problem) ของเซตของจุดในระนาบสองมิติคือการหาเซตของจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมที่เล็กที่สุดที่บรรจุจุดไว้ทุกจุด ซึ่งเป็นปัญหาหลักที่สำคัญทางด้านกรคำนวณทางเรขาคณิต (Computational Geometry) [1] [2] และเป็นปัญหาพื้นฐานที่นำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นอีกหลายด้าน เช่น ใช้ในการวางแผนหาเส้นทางเดินและการหลีกเลี่ยงการชนในวิทยาการหุ่นยนต์ (Robotic) ใช้ในการจับกลุ่มครอบคลุมบริเวณของหน่วยที่สนใจและใช้คำนวณความคล้ายของรูปแบบ ในปัญหาด้านการรู้จำแบบ (Pattern Recognition) การทำงานระยะไกล (Mobile Computing) และการประมวลผลภาพ (Image Processing) [1] [9] และที่สำคัญ ยังใช้เป็นความรู้พื้นฐานในระบบสารสนเทศทางภูมิศาสตร์ (Geographic Information System : GIS) ซึ่งเป็นระบบโปรแกรมที่สามารถนำไปใช้ในการสร้างและวิเคราะห์ข้อมูลรูปทรงสี่เหลี่ยมของวัตถุทุกอย่างบนพื้นผิวโลก เกี่ยวกับระบบแผนที่ ภาพถ่ายทางอากาศและแผนผังต่างๆ ของลักษณะภูมิประเทศทั้งที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติและมนุษย์สร้างขึ้น [12]

งานวิจัยนี้ได้นำขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน โดยใช้เวลาคงตัวบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $N \times N$  ที่มีผู้พัฒนาไว้แล้วมาปรับปรุง โดยใช้เทคนิคแบ่งและได้ชัยชนะ แบ่งข้อมูลนำเข้าให้มีการทำงานแบบเป็นรอบการทำงาน และในขั้นตอน

สุดท้ายใช้เทคนิคการผสมผสานผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละรอบการทำงาน ซึ่งทำให้ได้ขั้นตอนวิธีใหม่ที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น กล่าวคือ ขั้นตอนวิธีใหม่ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ใช้หน่วยประมวลผลจำนวนน้อยลง และส่งผลให้ต้นทุนในการแก้ปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานนี้ลดลง

## 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

วิทยานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลแบบเดิมที่มีอยู่ ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่ใช้เวลาคงตัว ( $O(1)$ ) แต่ใช้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาดใหญ่ (กำลังสองของข้อมูลนำเข้า:  $N \times N$ ) ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงปรับปรุงขั้นตอนวิธีแบบเดิมที่มีอยู่ โดยใช้เทคนิคการแบ่งและได้ชัยชนะแบ่งข้อมูลนำเข้า ให้ทำงานแบบเป็นรอบการทำงาน และใช้วิธีการผสมผสานในการผสมผลลัพธ์จากทุกรอบการทำงาน ซึ่งขั้นตอนวิธีใหม่สามารถลดขนาดของระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลที่ใช้ โดยใช้จำนวนหน่วยประมวลผลน้อยลง

## 1.3 สมมติฐานของการศึกษา

การปรับปรุงขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $N \times N$  จะทำให้ได้ขั้นตอนวิธีใหม่สำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $N \times \sqrt{N}$  ที่มีความซับซ้อนด้านเวลาเท่ากับ  $O(\sqrt{N})$  โดยจำนวนหน่วยประมวลผลที่ลดลงเท่ากับ  $N(N - \sqrt{N})$  ทั้งนี้เมื่อใช้จำนวนหน่วยประมวลผลเท่ากับวิธีเดิม ( $N \times N$ ) ขั้นตอนวิธีนี้ก็จะมีความซับซ้อนด้านเวลาคงตัว  $O(1)$

## 1.4 ขอบเขตการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้มีขอบเขตการวิจัยเพื่อทำการศึกษาและปรับปรุงขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $N \times \sqrt{N}$  เมื่อ  $N$  เป็นจำนวนของข้อมูลนำเข้า และค่ารากที่สองที่เป็นบวกของ  $N$  เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งข้อมูล

นำเข้าคือ เซตของจุดที่มีค่าพิกัดตามแนวแกนตั้งและแกนนอนไม่ซ้ำกัน และมีจำนวนจุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันอย่างมากสองจุด

## 1.5 ขั้นตอนการศึกษาและการดำเนินงานวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้มีขั้นตอนการศึกษาและการดำเนินงานวิจัย ดังนี้

- 1) ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบอนุกรมและแบบขนาน
- 2) ศึกษาขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล
- 3) ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล
- 4) ทำการตั้งสมมติฐาน โดยคาดว่า การใช้เทคนิคแบ่งและได้ชัยชนะ และใช้วิธีการผสมในขั้นตอนสุดท้าย จะทำให้ได้ขั้นตอนวิธีใหม่ที่ใช้จำนวนหน่วยประมวลผลน้อยลง
- 5) นำเสนอขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลดังที่ได้ตั้งสมมติฐาน
- 6) วิเคราะห์ความซับซ้อนด้านเวลาของขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล
- 7) สรุปผล พร้อมเสนอแนวทางการพัฒนางานวิจัย
- 8) เขียนวิทยานิพนธ์

## 1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

วิทยานิพนธ์นี้มีประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล ดังนี้

- 1) ทำให้มีขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งวิธี โดยที่ใช้จำนวนหน่วยประมวลผลน้อยกว่าวิธีอื่น
- 2) นำขั้นตอนวิธีที่ได้มาใช้เป็นแนวทางในการลดจำนวนหน่วยประมวลผล สำหรับการพัฒนาขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาอื่น
- 3) นำขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาด้านการคำนวณทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้อง
- 4) นำความรู้เกี่ยวกับระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นได้อย่างกว้างขวาง

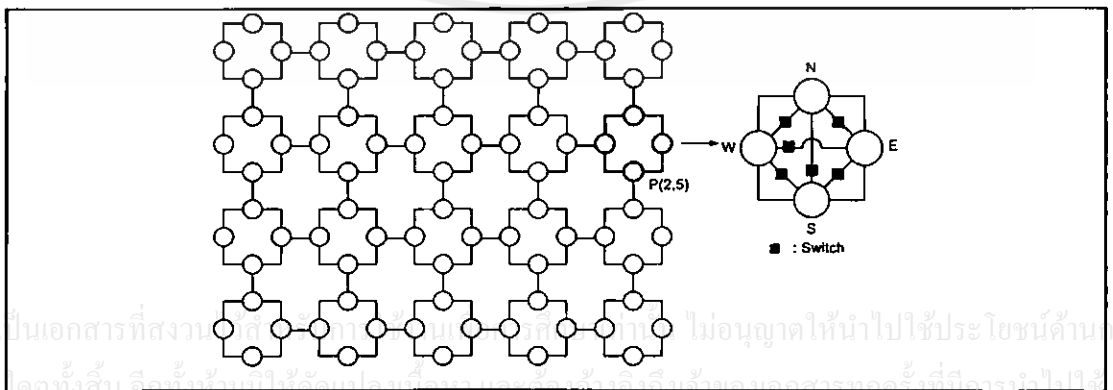
## บทที่ 2

# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงระบบประมวลผลแบบขนานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ซึ่งได้แก่ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล กล่าวถึงความรู้เบื้องต้นของปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ และทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล รวมทั้งอธิบายถึงขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่มีผู้คิดค้นไว้แล้วพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดนี้เป็นขั้นตอนวิธีที่ผู้วิจัยจะนำมาพัฒนาต่อให้สามารถใช้ได้กับระบบที่มีจำนวนหน่วยประมวลผลน้อยลง

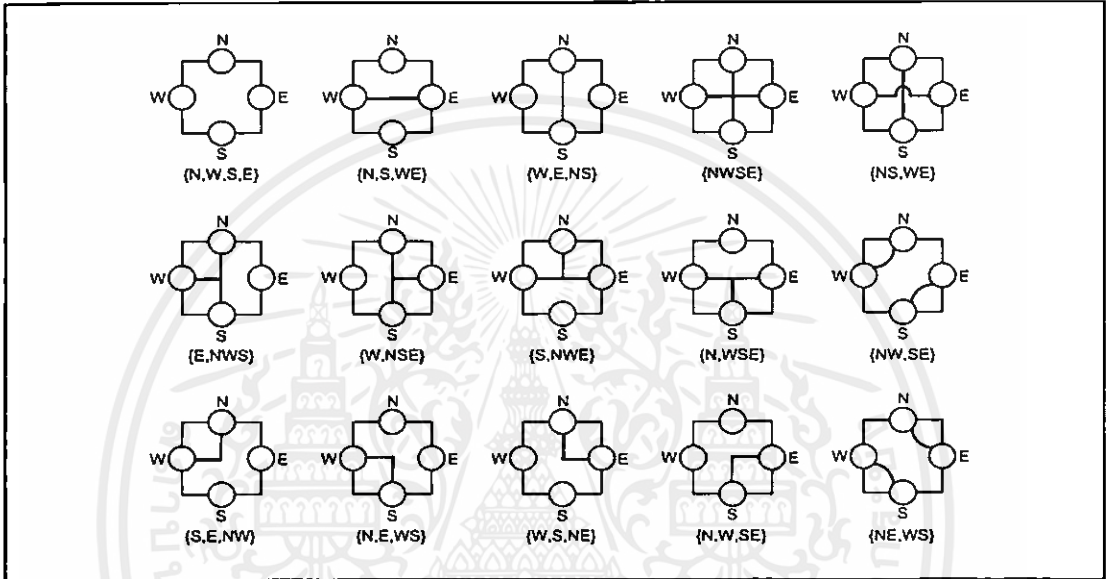
### 2.1 ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล

[4] ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $M \times N$  ประกอบไปด้วยแถวลำดับของหน่วยประมวลผลขนาด  $N$  หน่วยประมวลผลจำนวน  $M$  แถว ที่เชื่อมต่อกันเป็นเครือข่ายแบบตาข่ายสองมิติด้วยระบบบัสแบบรีคอนฟิกิวเรเบิล ซึ่งระบบบัสแบบรีคอนฟิกิวเรเบิลประกอบด้วยบัสที่อยู่ภายนอกของหน่วยประมวลผล ทำหน้าที่เชื่อมต่อหน่วยประมวลผลให้มีโครงสร้างการติดต่อกันเป็นแบบตาข่าย ซึ่งบัสภายนอกนี้จะถูกกำหนดไว้ตายตัว และส่วนการเชื่อมต่อภายในระหว่างช่องทางเข้าออก (I/O Port) ของแต่ละหน่วยประมวลผล ซึ่งสามารถปรับแต่งได้ขณะที่กำลังทำงานตามขั้นตอนวิธี โดยแต่ละหน่วยประมวลผลสามารถดำเนินการทางด้านการคำนวณและตรรกศาสตร์พื้นฐานได้ และใช้สัญลักษณ์  $P(i, j)$  แทนหน่วยประมวลผลที่อยู่บนแถวที่  $i$  หลักที่  $j$  ตัวอย่างเช่น  $P(2,5)$  แทนหน่วยประมวลผลที่อยู่บนแถวที่ 2 หลักที่ 5 ดังรูปที่ 2.1 แสดงระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $4 \times 5$



รูปที่ 2.1 ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $4 \times 5$

ในแต่ละหน่วยประมวลผลจะมีช่องทางเข้าออกอยู่ 4 ช่องทางคือ N แทนช่องทางทิศเหนือ W แทนช่องทางทิศตะวันตก S แทนช่องทางทิศใต้ และ E แทนช่องทางทิศตะวันออก ซึ่งรูปแบบการปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในระหว่างช่องทางเข้าออกมีได้ทั้งสิ้น 15 รูปแบบ ตัวอย่างเช่น {N, WSE} หมายถึง ช่องทางทิศเหนือไม่มีการเชื่อมต่อ ช่องทางทิศตะวันตกเชื่อมต่อกับช่องทางทิศใต้และทิศตะวันออก เป็นต้น ซึ่งรูปแบบการเชื่อมต่อภายในทั้งหมด 15 รูปแบบดังแสดงในรูปที่ 2.2

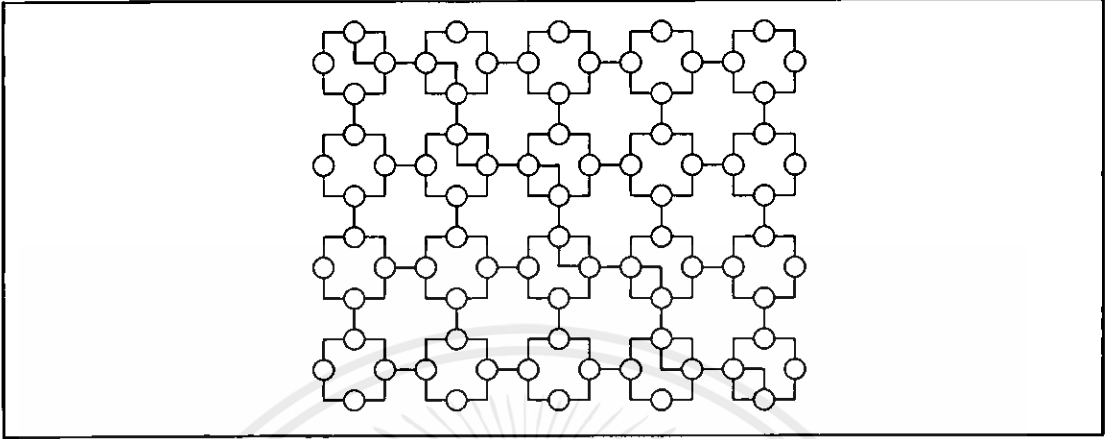


รูปที่ 2.2 รูปแบบการเชื่อมต่อภายในทั้งหมด

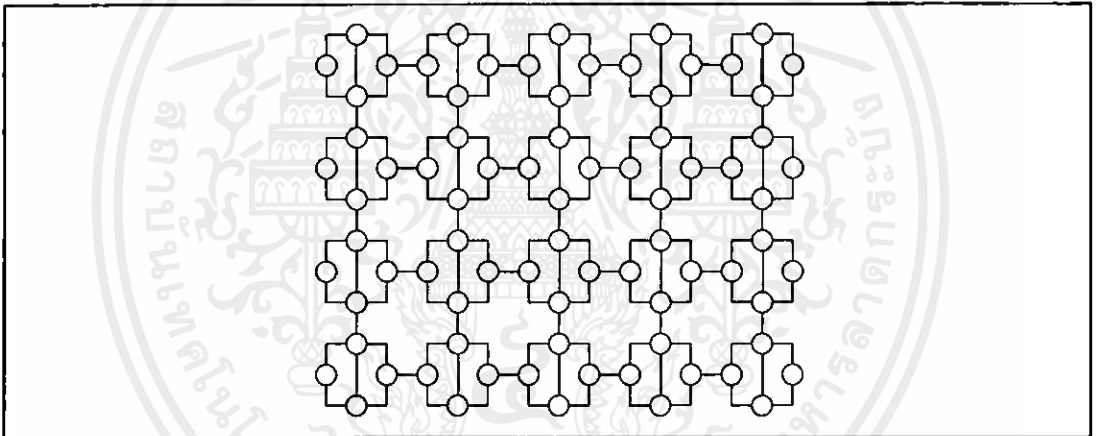
ข้อดีของระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลคือ เวลาที่ใช้ในการแพร่สัญญาณข้อมูล (Broadcasting) หรือส่งข้อมูลจากหน่วยประมวลผลหนึ่งไปยังทุกหน่วยประมวลผลที่อยู่ในแถวเดียวกันหรือไปยังทุกหน่วยประมวลผลที่อยู่ในหลักเดียวกันจะใช้เวลาคงตัว นั่นคือมีความซับซ้อนด้านเวลาเท่ากับ  $O(1)$  รวมทั้งเวลาที่ใช้ในการแพร่สัญญาณข้อมูลจากหน่วยประมวลผลหนึ่งไปยังหน่วยประมวลผลหนึ่งที่อยู่ ณ ตำแหน่งใดๆ บนเครือข่าย ก็ใช้เวลาคงตัวเช่นกัน ซึ่งเสมือนว่าเส้นผ่านศูนย์กลาง (Diameter) ของระบบมีค่าเท่ากับ 1 ดังแสดงในรูปที่ 2.3

จากรูปที่ 2.3 แสดงการปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในเพื่อทำให้หน่วยประมวลผลที่อยู่ใกล้กันที่สุดเชื่อมต่อกัน โดยให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในเป็นแบบ {W,S,NE} และหน่วยประมวลผลที่  $P(i,i+1)$  ปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในเป็นแบบ {N,E,WS} สำหรับการปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้บัสแบ่งออกเป็นบัสย่อยแนวตั้ง (Vertical Subbus) ทำได้โดยให้ทุกหน่วยประมวลผลปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในเป็นแบบ {W,E,NS} และการปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้บัสแบ่งออกเป็นบัสย่อยแนวนอน (Horizontal Subbus) ทำได้

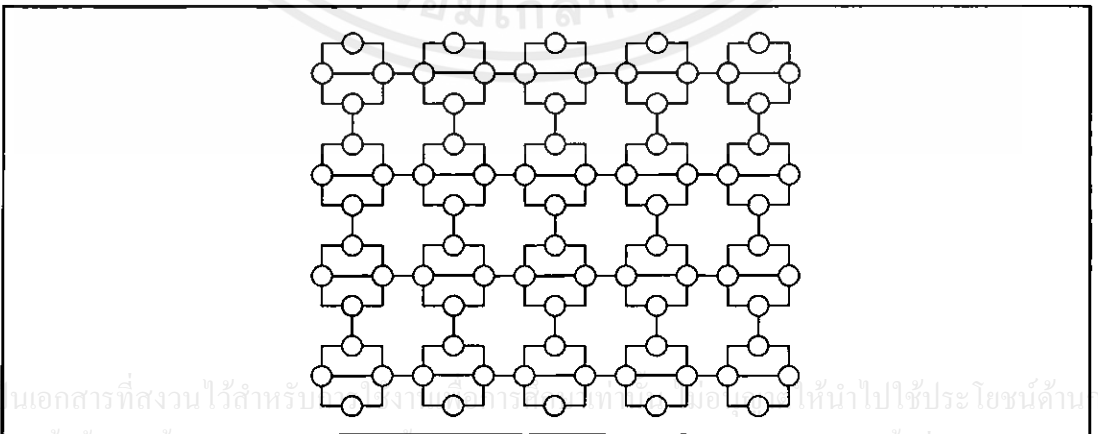
โดยให้ทุกหน่วยประมวลผลปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในเป็นแบบ {N,S,WE} ดังแสดงในรูปที่ 2.4 และ 2.5 ตามลำดับ



รูปที่ 2.3 การปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้หน่วยประมวลผลที่อยู่ไกลกันที่สุดติดต่อกัน



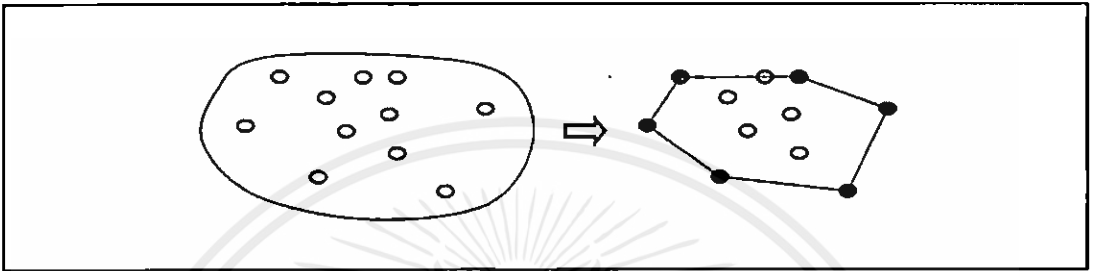
รูปที่ 2.4 การปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้บัสแบ่งออกเป็นบัสย่อยตามแนวตั้ง



รูปที่ 2.5 การปรับแต่งการเชื่อมต่อภายในที่ทำให้บัสแบ่งออกเป็นบัสย่อยตามแนวนอน

## 2.2 ปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (Two Dimensional Convex Hull Problem)

ถ้าให้  $S$  เป็นเซตจำกัดซึ่งมีสมาชิกเป็นจุดที่อยู่ในระนาบสองมิติ นิยามอย่างไม่เป็นทางการของปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของจุดที่อยู่ในระนาบสองมิติที่แสดงให้เห็นภาพได้อย่างชัดเจนก็คือ สมมติให้จุดในเซตนี้แทนจุดที่ตอกตะปูลงบนพื้นผิวสองมิติ จะได้ว่ารูปร่างของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติคือการนำแถบยางมาขึงล้อมรอบตะปูที่ตอกไว้ [2] ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 นิยามอย่างไม่เป็นทางการของปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

แม้ว่าการให้นิยามดังที่กล่าวมาจะเห็นภาพได้ชัดเจน แต่เป็นการให้นิยามที่ไม่เป็นทางการสำหรับนิยามอย่างเป็นทางการจะนิยามโดยใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ดังนี้

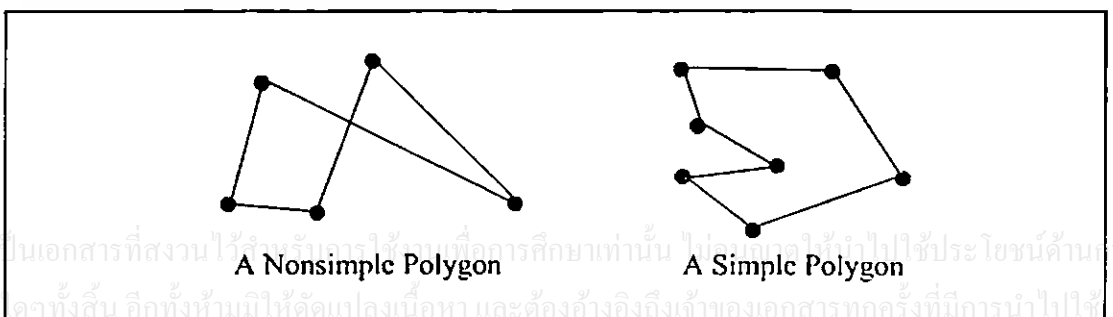
### 2.2.1 นิยามปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

นิยามคำศัพท์ [3]

รูปหลายเหลี่ยม (Polygon) คือวิถีปิด (Closed Path) ของส่วนของเส้นตรงในระนาบสองมิติ โดยเรียกส่วนของเส้นตรงนี้ว่า เส้นขอบหรือเส้นเชื่อม (Edge) ของรูปหลายเหลี่ยมและเรียกจุดอินเตอร์เซกของเส้นขอบสองเส้นที่ประชิดกันว่า จุดยอด (Vertex) ของรูปหลายเหลี่ยม

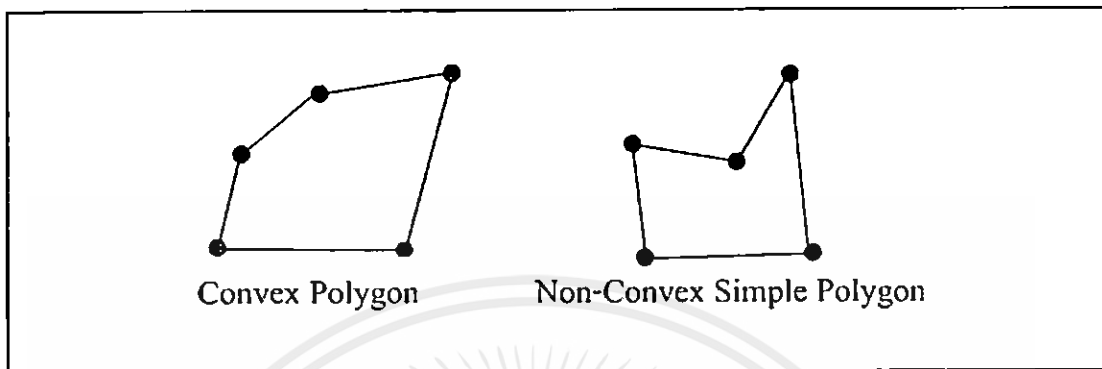
รูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย (Simple Polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมที่เส้นขอบแต่ละเส้นอินเตอร์เซกกับเส้นขอบที่ประชิดกันเพียงสองเส้นข้างเคียงเท่านั้น

ซึ่งตัวอย่างของรูปหลายเหลี่ยมและรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมและรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย

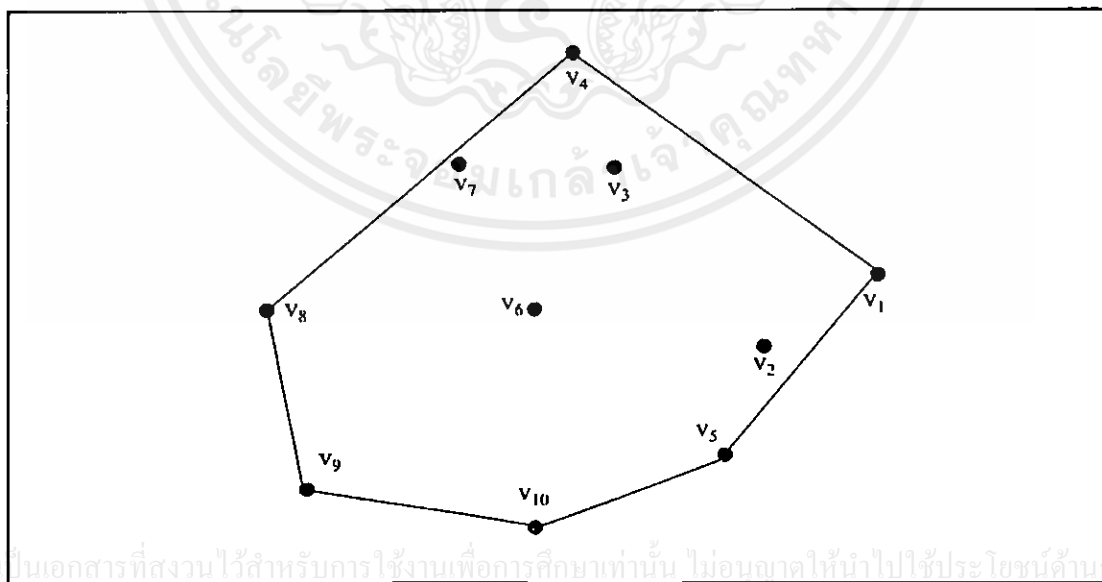
รูปหลายเหลี่ยมคอนเวกซ์ (Convex Polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายที่มีส่วนของเส้นตรงอยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยม โดยส่วนของเส้นตรงนี้เป็นส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากจุดสองจุดใดๆที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยม ดังแสดงในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ตัวอย่างรูปหลายเหลี่ยมคอนเวกซ์และรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายที่ไม่เป็นคอนเวกซ์

นิยามปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ ให้  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  เป็นเซตของจุดจำนวน  $N$  จุดในระนาบสองมิติ ซึ่งแต่ละจุดแทนด้วยค่าพิกัด  $(x, y)$  โดยที่  $x$  แทนค่าแกนนอน และ  $y$  แทนค่าแกนตั้ง คอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต  $S$  คือเซตของจุดที่อยู่ในเซต  $S$  ที่ซึ่งเป็นจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมคอนเวกซ์ที่เล็กที่สุดที่บรรจุจุดที่อยู่ภายในเซต  $S$  ไว้ทุกจุด ซึ่งแทนด้วย  $CH(S)$  [2][3]

ตัวอย่าง ให้  $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$  เป็นเซตของจุดในระนาบสองมิติ และจะได้ว่าคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต  $S$  คือ  $CH(S) = \{v_1, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}\}$  ดังแสดงในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซตของจุดในระนาบสองมิติ

## 2.2.2 การหาค่าตำแหน่งของจุดโดยใช้เส้นตรงเป็นตำแหน่งอ้างอิง

ให้  $p_1 = (x_1, y_1)$  และ  $p_2 = (x_2, y_2)$  เป็นจุดในระนาบสองมิติ จะได้  $p_1, p_2$  เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุด  $p_1$  และ  $p_2$  เป็นจุดปลาย (Endpoint) และได้สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด  $p_1, p_2$  ดังสมการที่ 2.1

$$y = mx + c \quad (2.1)$$

โดยที่ 
$$m = \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) \quad (2.2)$$

และ 
$$c = y_1 - \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) x_1 \quad (2.3)$$

ให้  $p = (a, b)$  เป็นจุดใดๆ ในระนาบสองมิติ เราจะกล่าวว่า

- จุด  $p$  อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง  $p_1, p_2$  ถ้า

$$b < ma + c \quad (2.4)$$

- และจุด  $p$  อยู่สูงกว่าเส้นตรง  $p_1, p_2$  ถ้า

$$b > ma + c \quad (2.5)$$

## 2.3 ความรู้พื้นฐาน

ความรู้พื้นฐานที่กล่าวถึงในหัวข้อนี้เป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพื้นฐานที่นำมาใช้แก้ปัญหาในขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล ซึ่งทฤษฎีเหล่านี้มีผู้พิสูจน์ไว้แล้วในงานวิจัยก่อนหน้า

### 2.3.1 การหาค่าสูงสุดเดมหน้าบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล

ปัญหาการคำนวณค่าเดมหน้า (Prefix Computation Problem) เป็นหนึ่งในเทคนิคพื้นฐานที่นำมาใช้ในการประมวลผลแบบขนาน (Parallel Processing) โดยนิยามดังนี้ ให้การดำเนินการทวิภาคที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนหมู่ (Associative Binary Operation)  $*$  และ  $x_1, x_2, \dots, x_N$  เป็นลำดับ

ของข้อมูลที่สามารถเรียงลำดับได้และอยู่ในโดเมนเดียวกัน จะได้ว่า การคำนวณค่าเดิมนั้น คือ การหาลำดับ  $a_1, a_2, \dots, a_N$  โดยที่  $a_i = x_1 * x_2 * \dots * x_i$  เมื่อ  $i = 1, 2, \dots, N$  [5] [6]

ถ้ากำหนดให้การดำเนินการทวิภาคที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนหมู่ \* คือ การหาค่าสูงสุด (Maxima) จะเรียกปัญหาการคำนวณค่าเดิมนั้นว่า การคำนวณค่าเดิมนำสูงสุด (Prefix Maxima Computation) ตัวอย่างเช่น ให้ลำดับของเลขจำนวนเต็ม 5, 8, 4, 6, 1 ลำดับของค่าเดิมนำสูงสุดคือ  $\max\{5\}, \max\{5,8\}, \max\{5,8,4\}, \max\{5,8,4,6\}, \max\{5,8,4,6,1\} = 5, 8, 8, 8, 8$  ตามลำดับ

จากงานวิจัยก่อนหน้า [9] แสดงขั้นตอนวิธีการคำนวณค่าสูงสุดเดิมนำแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

**ทฤษฎีบทที่ 1** การหาค่าสูงสุดเดิมนำของลำดับของจำนวนจริง  $N$  จำนวนที่เก็บไว้ในแถวแรกของระบบประมวลผลแบบขนานขนาด  $M \times N$  โดยที่  $M \leq N$  สามารถหาได้ภายในความซับซ้อนของเวลา  $O(\log N)$  ถ้า  $M = 1$  หรือ  $O\left(\frac{\log N}{\log M}\right)$  ถ้า  $2 \leq M \leq N$

### 2.3.2 การหาคือมแพคชันบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล

ให้  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  เป็นเซตใดๆ ที่มีสมาชิกจำนวน  $M$  สมาชิกที่ถูกทำคำหามิไว้ (Marked) ปัญหาคือมแพคชัน (Compaction Problem) คือการหาลำดับของสมาชิกในเซต  $X$  โดยที่สมาชิกตัวที่ถูกทำคำหามิจะปรากฏเป็นลำดับก่อนหน้าสมาชิกที่ไม่ได้ทำคำหามิ ตัวอย่างเช่น กำหนดให้  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  โดยสมาชิกที่ถูกทำคำหามิแทนด้วยสมาชิกที่มีการขีดเส้นใต้ ซึ่งได้แก่  $b, d, f$  และ  $h$  ลำดับคือมแพคชันของเซต  $X$  คือ  $b, d, f, h, a, c, e, g$

จากงานวิจัยก่อนหน้า [7] แสดงขั้นตอนวิธีการหาคือมแพคชันแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

**ทฤษฎีบทที่ 2** การหาคือมแพคชันของเซตที่มีสมาชิก  $N$  สมาชิก โดยที่มี  $M$  สมาชิกถูกทำคำหามิไว้ สามารถหาได้ในเวลาคงตัว ( $O(1)$ ) บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $M \times N$

### 2.3.3 การเรียงลำดับข้อมูลบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล

การเรียงลำดับข้อมูลเป็นการคำนวณขั้นพื้นฐานของปัญหาต่างๆ หลายปัญหา เช่น ปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์ ปัญหาทางด้านกรคำนวณทางวิศวกรรม เป็นต้น รวมทั้งปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ จากงานวิจัยก่อนหน้า [7] แสดงขั้นตอนวิธีการเรียงลำดับข้อมูลแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

**ทฤษฎีบทที่ 3** ลำดับใดๆ ของสมาชิกจำนวน  $N$  สมาชิกสามารถเรียงลำดับได้ในเวลาคงตัว ( $O(1)$ ) บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $N \times N$

### 2.3.4 การดำเนินการทางตรรกะบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล

การดำเนินการทางตรรกะเป็นการคำนวณขั้นพื้นฐานของปัญหาต่างๆ ในการประมวลผลแบบขนาน จากงานวิจัยก่อนหน้า [10] แสดงขั้นตอนวิธีการดำเนินการทางตรรกะแอนด์ (Logical AND) และออร์ (Logical OR) ของค่าบูลีน (Boolean value) แบบขนานบนแถวลำดับของระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

**ทฤษฎีบทที่ 4** การดำเนินการทางตรรกะแอนด์ (Logical AND) หรือออร์ (Logical OR) ของค่าบูลีน (Boolean value) จำนวน  $N$  ค่าสามารถคำนวณได้ในเวลาคงตัว ( $O(1)$ ) บนแถวลำดับของระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $N$  และผลลัพธ์ที่ได้เก็บอยู่ในหน่วยประมวลผลตัวแรกของแถวลำดับ

## 2.4 ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 1.1 ว่าปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติเป็นปัญหาที่สำคัญทางด้านการคำนวณทางเรขาคณิต ดังนั้นจึงมีหลายงานวิจัยที่นำเสนอขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติทั้งแบบอนุกรมและแบบขนาน ตัวอย่างเช่น ในปีค.ศ.1972 เกรแฮม (Graham) ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีเกรแฮมสแกน (Graham Scan Algorithm) ปีค.ศ.1973 จาวิส (Jarvis) นำเสนอขั้นตอนวิธีจาวิสมาร์ช (Jarvis March Algorithm) ปีค.ศ.1977 Preparata และ Hong ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีแบ่งและได้ชัยชนะ (Divide and Conquer Algorithm) เป็นต้น [2]

สำหรับขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุด (Sub-Optimal Algorithm) เป็นอีกขั้นตอนวิธีหนึ่งในการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ ซึ่งถ้าประมวลผลแบบอนุกรมจะมีความซับซ้อนด้านเวลาเท่ากับ  $O(N \log N)$

### 2.4.1 ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

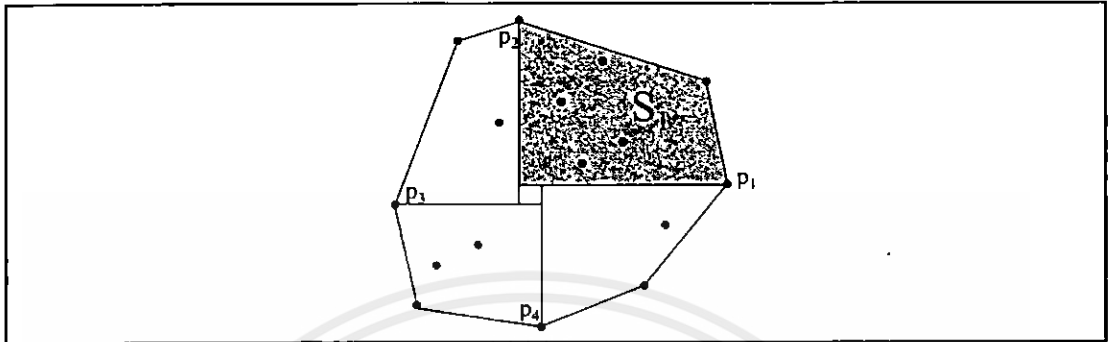
[8] [9] จากนิยามปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ ข้อมูลนำเข้าของปัญหานี้คือ เซต  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  เป็นเซตของจุดในระนาบสองมิติที่เรียงลำดับตามค่าแกนนอนจากน้อยไปหามาก โดยแต่ละจุดแทนด้วยคู่อันดับ  $(x, y)$  โดยค่า  $x$  แทนค่าแกนนอน และ  $y$  แทนค่าแกนตั้ง เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงปัญหาที่เกี่ยวข้องกับรายละเอียดปลีกย่อยและไม่ให้สูญเสียความมีนัยทั่วไป ดังนั้นสมมติให้ไม่มีจุดใดที่มีค่าแกนนอน  $(x)$  หรือค่าแกนตั้ง  $(y)$  เท่ากันและมีเพียงสองจุดเท่านั้น

ที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิตินี้มีดังนี้

**ขั้นตอนที่ 1** หาจุดปลาย (Extreme Point) ที่จุดที่อยู่ในเซต  $S$  โดยให้เป็นจุด  $p_1, p_2, p_3$  และ  $p_4$  โดยที่

- $p_1 = (x_1, y_1)$  เป็นจุดที่มีค่า  $x$  มากที่สุด  $p_2 = (x_2, y_2)$  เป็นจุดที่มีค่า  $y$  มากที่สุด
- $p_3 = (x_3, y_3)$  เป็นจุดที่มีค่า  $x$  น้อยที่สุด  $p_4 = (x_4, y_4)$  เป็นจุดที่มีค่า  $y$  น้อยที่สุด

ดังแสดงในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 แสดงจุด  $p_1, p_2, p_3, p_4$  และเซต  $S_1$

ขั้นตอนที่ 2 หาเซต  $S_1, S_2, S_3$  และ  $S_4$  ดังสมการที่ 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9 ตามลำดับ ตัวอย่างของเซต  $S_1$  ดังแสดงในรูปที่ 2.10 โดยที่  $a_i \in S$

$$S_1 = \{a_i | x_2 \leq x_i \leq x_1; y_1 \leq y_i \leq y_2\} \quad (2.6)$$

$$S_2 = \{a_i | x_3 \leq x_i \leq x_2; y_3 \leq y_i \leq y_2\} \quad (2.7)$$

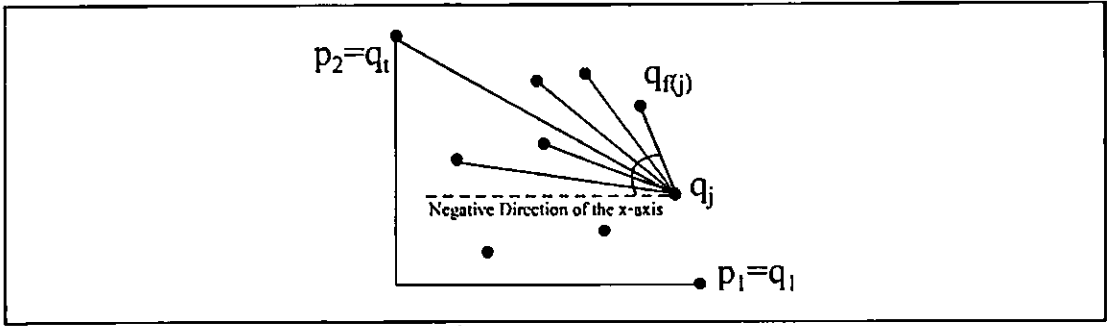
$$S_3 = \{a_i | x_3 \leq x_i \leq x_4; y_4 \leq y_i \leq y_3\} \quad (2.8)$$

$$S_4 = \{a_i | x_4 \leq x_i \leq x_1; y_4 \leq y_i \leq y_1\} \quad (2.9)$$

เพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจตั้งแต่ขั้นตอนที่ 3 จนถึงขั้นตอนที่ 6 จะแสดงขั้นตอนวิธีการทำงาน เฉพาะเซต  $S_1$  เท่านั้น ซึ่งขั้นตอนวิธีการทำงานสำหรับเซต  $S_2, S_3$  และ  $S_4$  ทำในทำนองเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 3 เรียงลำดับจุดในเซต  $S_1$  โดยเรียงตามค่าแกนตั้ง ( $y$ ) จากน้อยไปหามาก โดยให้  $L_1 = (p_1 = q_1, q_2, q_3, \dots, q_t = p_2)$  เป็นลำดับผลลัพธ์ที่ได้จากการเรียงลำดับตามค่า  $y$  จากน้อยไปหามาก

ขั้นตอนที่ 4 สำหรับทุกค่า  $j (1 \leq j < t)$  หาค่า  $f(j)$  ( $j < f(j) \leq t$ ) โดยมุมที่เกิดขึ้นระหว่างเส้นตรง  $q_j q_{f(j)}$  กับแกนอนทิศทางลบ (Negative Direction of the x-axis) เป็นมุมที่ใหญ่ที่สุด โดยวิธีการหาค่า  $f(j)$  ดังแสดงในรูปที่ 2.11

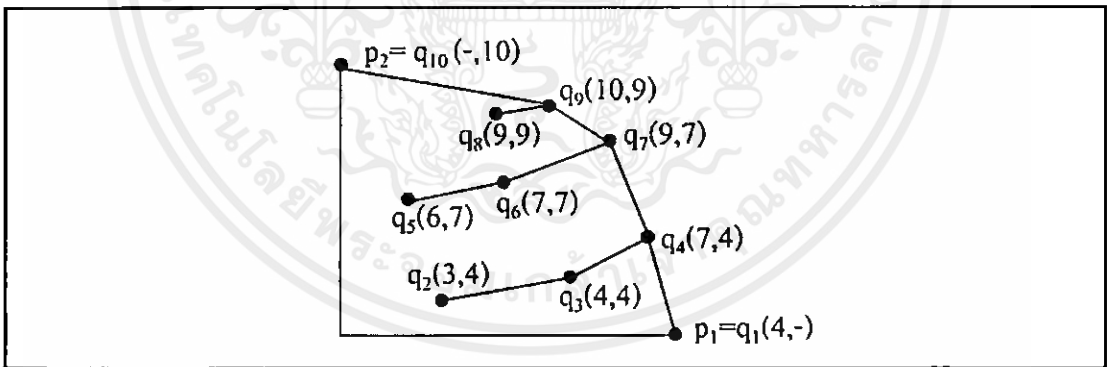
รูปที่ 2.11 แสดงวิธีการหาค่า  $f(j)$ 

ขั้นตอนที่ 5 หาค่าสูงสุดเต็มหน้าของค่า  $f(j)$  ในลำดับ  $L_1$  โดยให้ค่าสูงสุดที่ได้จากแต่ละค่า  $j$  เป็นค่า  $g(j)$  ซึ่งนิยามดังสมการที่ 2.10

$$g(j) = \max_{1 \leq t \leq j-1} \{f(t)\} \quad (2.10)$$

ตัวอย่างเช่น เมื่อ  $j=5$  จะได้ว่าค่า  $g(j) = \max \{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$  เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 กำจัดจุดที่มีค่า  $f(j) \leq g(j)$  และเลือกจุดที่เหลืออยู่ใน  $L_1$  เป็นผลลัพธ์ โดยเรียกเซตของผลลัพธ์ว่า  $H(S_1)$  ซึ่งรูปที่ 2.12 แสดงค่าของคู่อันดับ  $(f(j), g(j))$  ทำให้ได้ว่าเซตของผลลัพธ์คือ  $H(S_1) = \{q_1 = p_1, q_4, q_7, q_9, q_{10} = p_2\}$

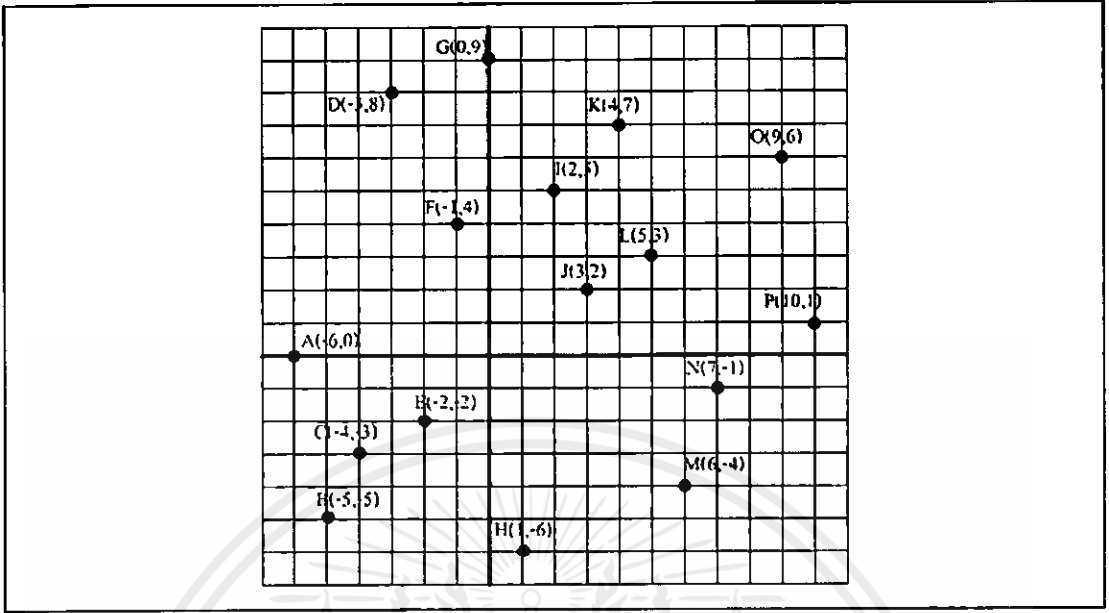
รูปที่ 2.12 แสดงคู่อันดับ  $(f(j), g(j))$ 

เมื่อทำตามขั้นตอนที่ 3 ถึงขั้นตอนที่ 6 จนครบทุกเซตตั้งแต่เซต  $S_1$  จนถึงเซต  $S_4$  จะได้ว่าคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต  $S$  จะเท่ากับการนำผลลัพธ์ในแต่ละเซตมาเขียนกันดังสมการที่ 2.11

$$CH(S) = H(S_1) \cup H(S_2) \cup H(S_3) \cup H(S_4) \quad (2.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับอาจารย์และบุคลากรในมหาวิทยาลัยเท่านั้น ไม่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

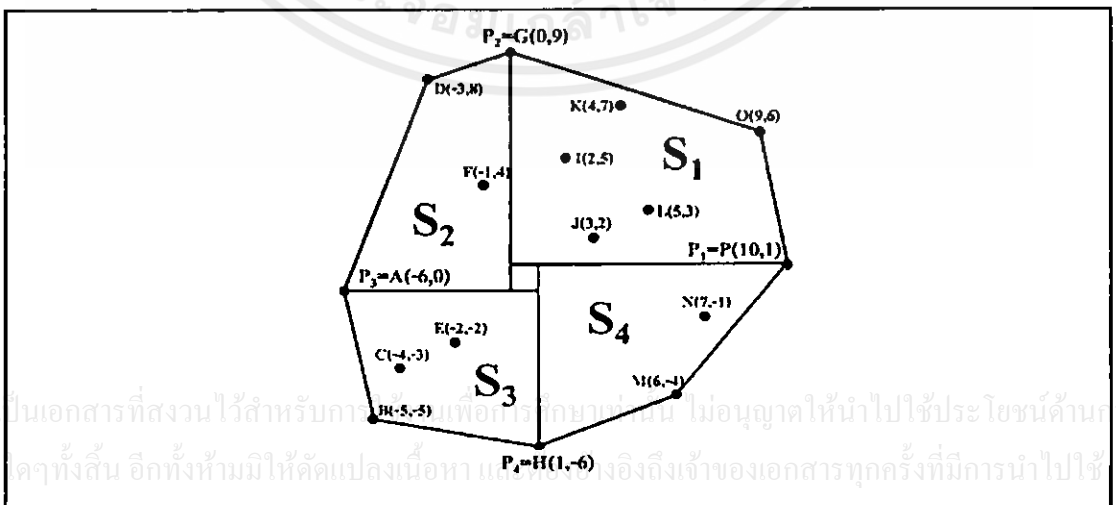
### 2.4.2 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุด



รูปที่ 2.13 แสดงค่าพิกัดในระนาบสองมิติของข้อมูลนำเข้า

สมมติให้  $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$  เป็นเซตของจุดในระนาบสองมิติที่แต่ละจุดไม่มีค่าแกนนอนหรือค่าแกนตั้งเท่ากัน และมีเพียงสองจุดเท่านั้นที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน โดยแต่ละจุดมีพิกัดดังต่อไปนี้ A(-6,0) B(-5,-5) C(-4,-3) D(-3,8) E(-2,-2) F(-1,4) G(0,9) H(1,-6) I(2,5) J(3,2) K(4,7) L(5,3) M(6,-4) N(7,-1) O(9,6) P(10,1) ดังแสดงในรูปที่ 2.13

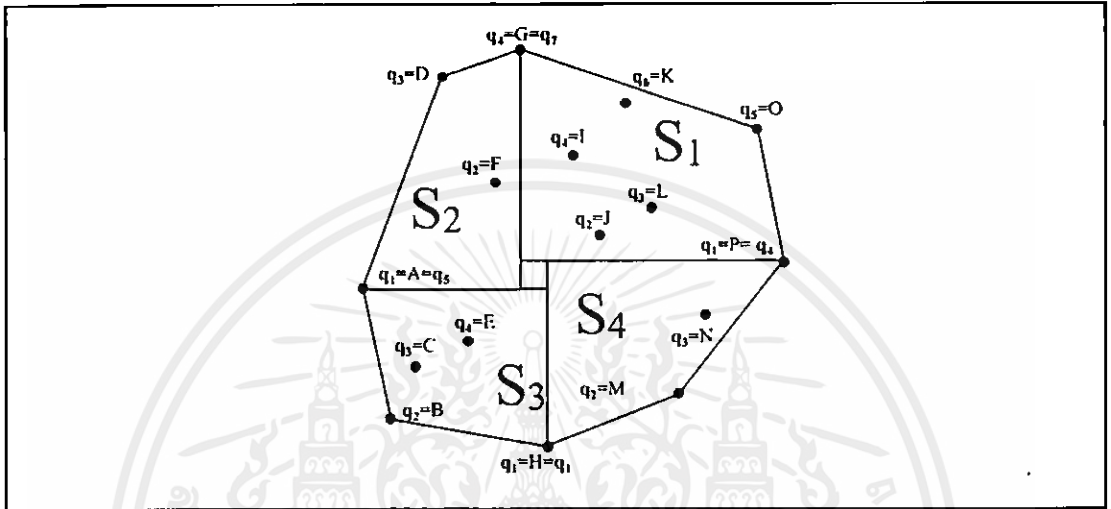
ขั้นตอนที่ 1 หาจุดปลาย (Extreme Point) สี่จุดที่อยู่ในเซต  $S$  โดยให้เป็นจุด  $p_1, p_2, p_3$  และ  $p_4$  จะได้  $p_1 = P$   $p_2 = G$   $p_3 = A$  และ  $p_4 = H$  ดังแสดงในรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 แสดงจุด  $p_1, p_2, p_3, p_4$  และเซต  $S_i$

**ขั้นตอนที่ 2** หาเซต  $S_1, S_2, S_3$  และ  $S_4$  ตามสมการที่ 2.6, 2.7, 2.8 และ 2.9 จะได้  $S_1 = \{P, J, L, I, O, K, G\}$ ,  $S_2 = \{A, F, D, G\}$ ,  $S_3 = \{H, B, C, E, A\}$  และ  $S_4 = \{H, M, N, P\}$  โดยผลลัพธ์ที่ได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.14

**ขั้นตอนที่ 3** เรียงลำดับจุดในเซต  $S_i$  โดยเรียงลำดับตามค่า  $y$  จากน้อยไปหามาก ดังแสดง ในรูปที่ 2.15 โดยจะได้ลำดับในแต่ละเซตดังตารางที่ 2.1



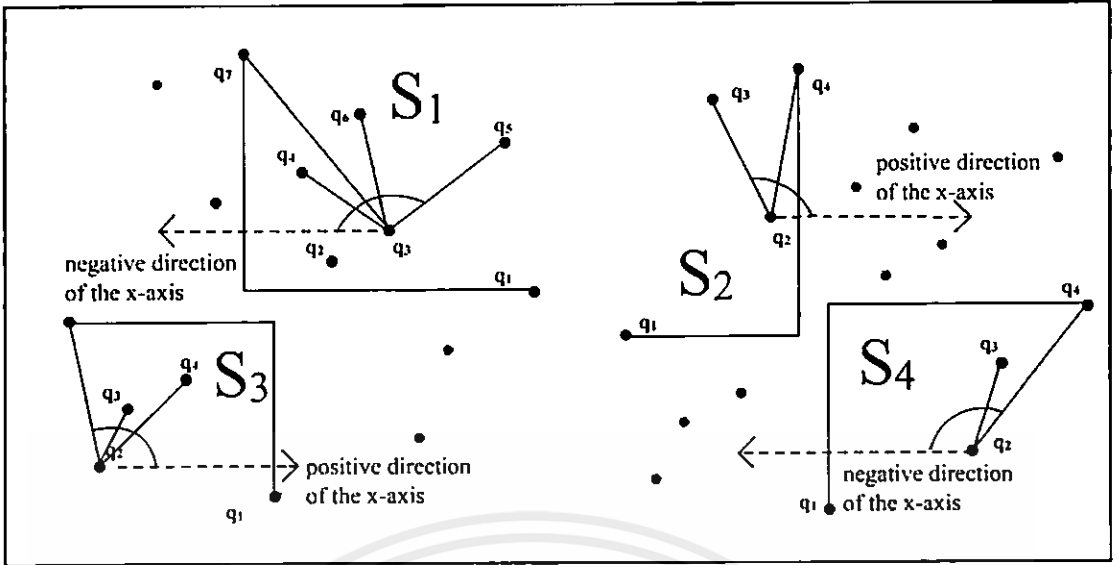
รูปที่ 2.15 แสดงการเรียงลำดับตามค่า  $y$  ในแต่ละเซต  $S_i$

ตารางที่ 2.1 แสดงลำดับของจุดในแต่ละเซต  $S_i$  ตามค่า  $y$

$S_i \backslash q_j$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$
$S_1$	$P = p_1$	J	L	I	O	K	$G = p_2$
$S_2$	$A = p_3$	F	D	$G = p_2$	-	-	-
$S_3$	$H = p_4$	B	C	E	$A = p_3$	-	-
$S_4$	$H = p_4$	M	N	$P = p_1$	-	-	-

**ขั้นตอนที่ 4** สำหรับทุกค่า  $j(1 \leq j < t)$  หากค่า  $f(j)$  ( $j < f(j) \leq t$ ) ตามหัวข้อที่ 2.4.1 ในขั้นตอนที่ 4 ซึ่งการหาค่า  $f(j)$  ในแต่ละเซต  $S_i$  ดังแสดงในรูปที่ 2.16 โดยจะได้ค่า  $f(j)$  ของแต่ละเซตดังตารางที่ 2.2 และรูปที่ 2.17

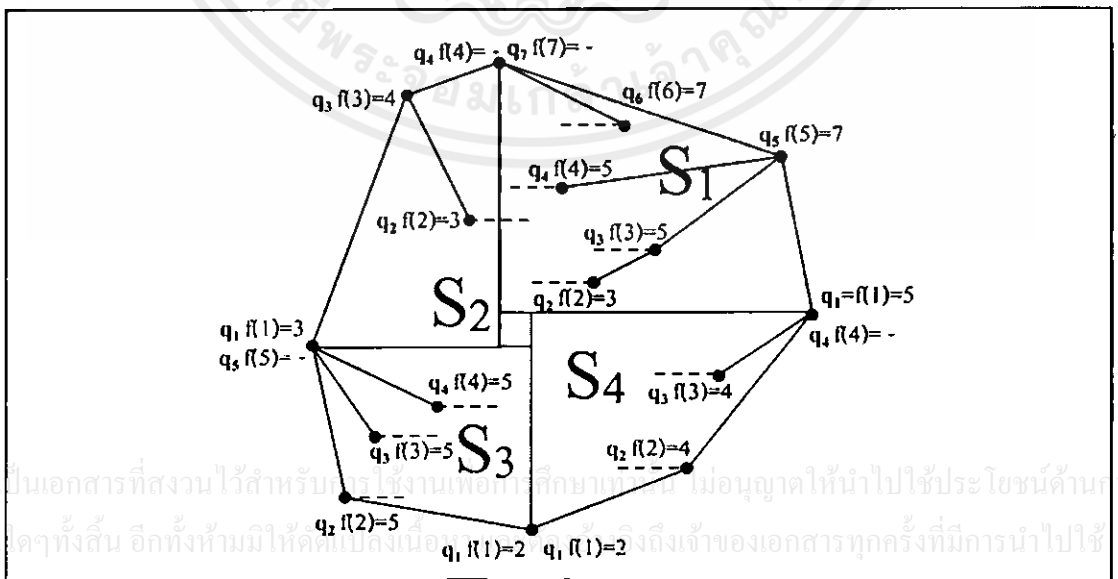
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.16 แสดงการหาค่า  $f(j)$  ในแต่ละเซต  $S_i$

ตารางที่ 2.2 แสดงค่า  $f(j)$  ในแต่ละเซต  $S_i$

$S_i \backslash q_j$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$
	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$
$S_1$	5	3	5	5	7	7	-
$S_2$	3	3	4	-	-	-	-
$S_3$	2	5	5	5	-	-	-
$S_4$	2	4	4	-	-	-	-



รูปที่ 2.17 แสดงค่า  $f(j)$  ในแต่ละเซต  $S_i$

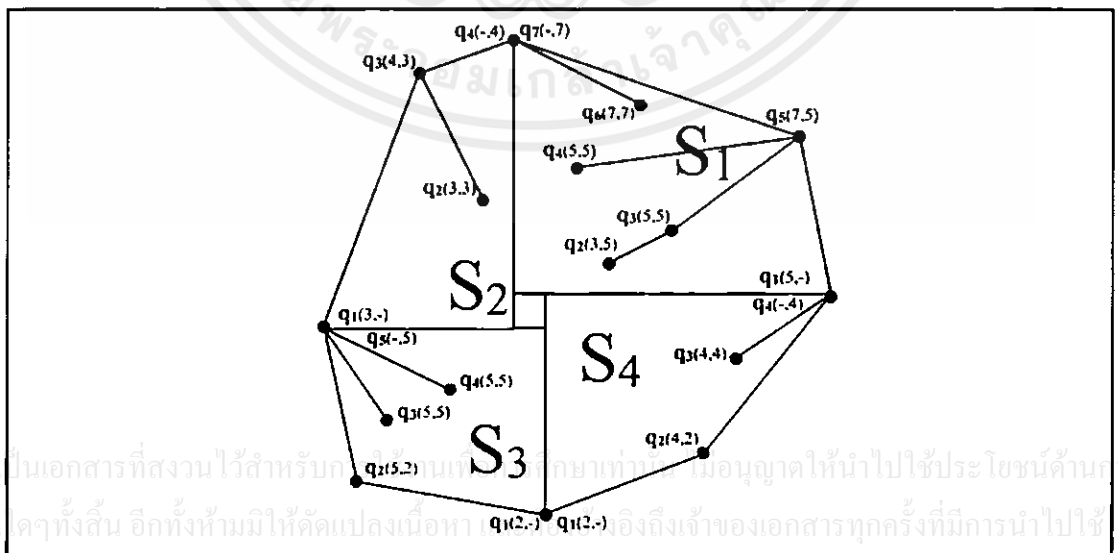
ขั้นตอนที่ 5 สำหรับทุกค่า  $j(1 < j \leq t)$  หาค่า  $g(j)$  โดยใช้สมการที่ 2.10 ตัวอย่างเช่น ในเซต  $S_1$  พิจารณาจุด  $q_5$  และ  $q_6$  จากตารางที่ 2.2 จะได้ว่า  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$  และ  $q_6$  มีค่า  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$  และ  $f(6)$  เท่ากับ 5, 3, 5, 5, 7 และ 7 ตามลำดับ ซึ่งจะได้ค่า  $g(5)$  ดังสมการที่ 2.12 และ  $g(6)$  ดังสมการที่ 2.13 ตามลำดับ และคู่อันดับของค่า  $f(j)$  และ  $g(j)$  ในแต่ละเซต  $S_i$  ดังแสดงในตารางที่ 2.3 และรูปที่ 2.18

$$g(5) = \max_{1 \leq t \leq 5-1} \{f(t)\} = \max \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \max \{5, 3, 5, 5\} = 5 \tag{2.12}$$

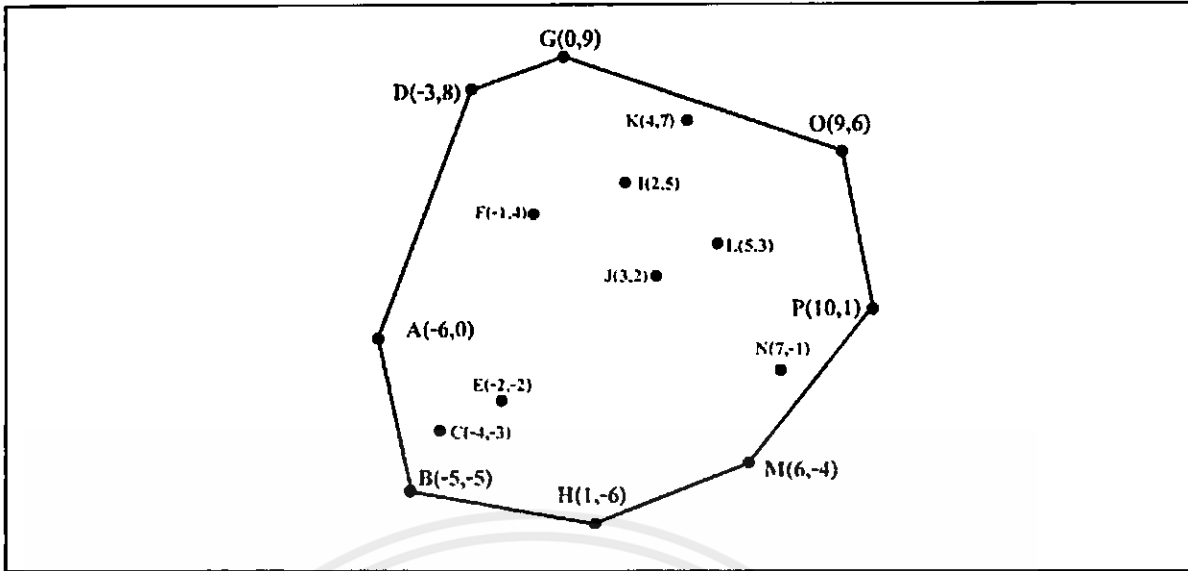
$$g(6) = \max_{1 \leq t \leq 6-1} \{f(t)\} = \max \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \max \{5, 3, 5, 5, 7\} = 7 \tag{2.13}$$

ตารางที่ 2.3 แสดงคู่อันดับ  $(f(j), g(j))$  ในแต่ละเซต  $S_i$

$q_j \backslash S_i$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$
$S_1$	(5,-)	(3,5)	(5,5)	(5,5)	(7,5)	(7,7)	(-,7)
$S_2$	(3,-)	(3,3)	(4,3)	(-,4)	-	-	-
$S_3$	(2,-)	(5,2)	(5,5)	(5,5)	(-,5)	-	-
$S_4$	(2,-)	(4,2)	(4,4)	(-,4)	-	-	-



รูปที่ 2.18 แสดงคู่อันดับ  $(f(j), g(j))$  ในแต่ละเซต  $S_i$



รูปที่ 2.19 แสดงผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

ขั้นตอนที่ 6 กำจัดจุดที่มีค่า  $f(j) \leq g(j)$  และเลือกจุดที่เหลืออยู่เป็นผลลัพธ์ ดังแสดง ในรูปที่ 2.19 โดยผลลัพธ์ที่ได้ในแต่ละเซต  $S_i$  เป็นดังนี้

- $S_1$  ได้  $H(S_1) = \{q_1, q_5, q_7\} = \{P, O, G\}$
- $S_2$  ได้  $H(S_2) = \{q_1, q_3, q_4\} = \{A, D, G\}$
- $S_3$  ได้  $H(S_3) = \{q_1, q_2, q_5\} = \{H, B, A\}$
- $S_4$  ได้  $H(S_4) = \{q_1, q_2, q_4\} = \{H, M, P\}$

จากสมการที่ 2.11 จะได้ผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต  $S$  ดังนี้

- $CH(S) = \{P, O, G\} \cup \{A, D, G\} \cup \{H, B, A\} \cup \{H, M, P\}$
- $CH(S) = \{P, O, G, D, A, B, H, M\}$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเรียงลำดับจุดแบบทวนเข็มนาฬิกาเริ่มจากจุดในเซต  $S_1$  ไปจนถึงเซต  $S_4$

#### 2.4.3 ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล

[8] [9] จากงานวิจัยก่อนหน้านี้ ได้แสดงการนำขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดในหัวข้อ 2.4.1 มาหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล โดยกำหนดให้ระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลมีขนาดเท่ากับ  $MN \times N$  และกำหนดให้ข้อมูลนำเข้าเป็นเซต

ของจุดในระนาบสองมิติจำนวน  $N$  ค่า โดยเก็บไว้ที่หน่วยประมวลผลแถวที่ 1 ซึ่งสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ไม่ว่ากรณีใดก็ตาม อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**ทฤษฎีบทที่ 5** คอนเวกซ์ฮัลของเซตของจุดในระนาบสองมิติ (คอนเวกซ์ฮัลสองมิติ) สามารถหาได้ โดยใช้ความซับซ้อนด้านเวลาเท่ากับ  $O\left(\frac{\log N}{\log M}\right)$  บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลขนาด  $MN \times N$  ซึ่ง  $2 \leq M \leq N$

และถ้าให้  $M = N$  จากทฤษฎีบทที่ 5 จะสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทที่ 6 ได้ดังนี้

**ทฤษฎีบทที่ 6** คอนเวกซ์ฮัลของเซตของจุดในระนาบสองมิติที่มีสมาชิก  $N$  สมาชิก สามารถหาได้ในเวลาคงตัว ( $O(1)$ ) บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลขนาด  $N^2 \times N$

## 2.5 ขั้นตอนวิธีการหาเส้นค้ำจุนบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล

[3] เส้นค้ำจุน (Supporting Line) หรือเส้นสัมผัส (Tangent Line) ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ คือเส้นที่ลากผ่านจุดยอด (Vertex) ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ แล้วทำให้จุดยอดทุกจุดของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติอยู่ด้านใดด้านหนึ่งของเส้นนั้น โดยอยู่ด้านเดียวกัน

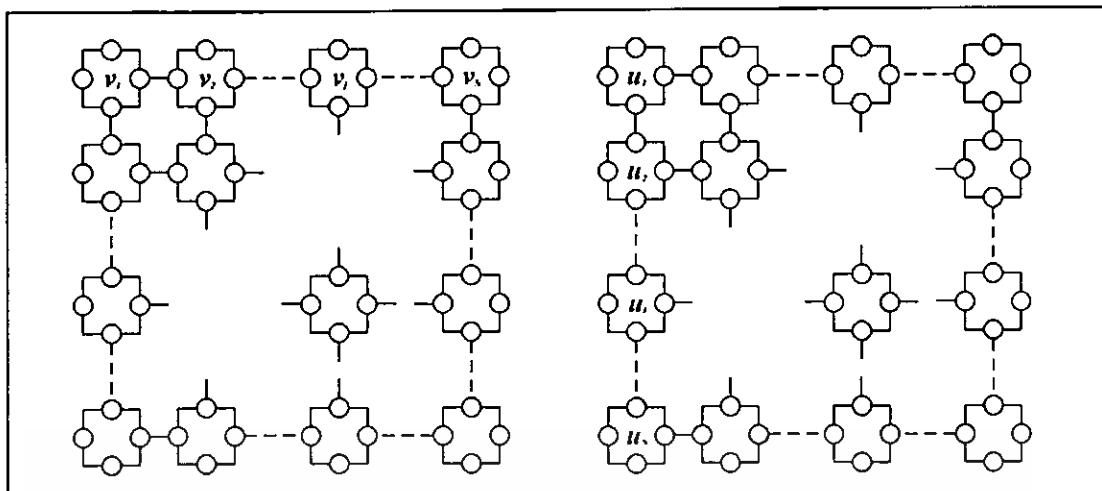
เส้นค้ำจุนหรือเส้นสัมผัสของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติสองคอนเวกซ์ฮัล คือเส้นตรงที่เกิดจากจุดยอดในเซตของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่หนึ่งและคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่สองอย่างละจุด โดยเส้นตรงที่ได้จะทำให้จุดทุกจุดในคอนเวกซ์ฮัลสองมิติทั้งสองอยู่ด้านใดด้านหนึ่งของเส้นตรงนั้น โดยอยู่ด้านเดียวกัน

โดยเส้นค้ำจุนมี 2 ประเภทคือ เส้นค้ำจุนด้านบน (Upper Supporting Line) หรือเส้นสัมผัสร่วมด้านบน (Upper Common Tangent Line) และเส้นค้ำจุนด้านล่าง (Lower Supporting Line) หรือเส้นสัมผัสร่วมด้านล่าง (Lower Common Tangent Line)

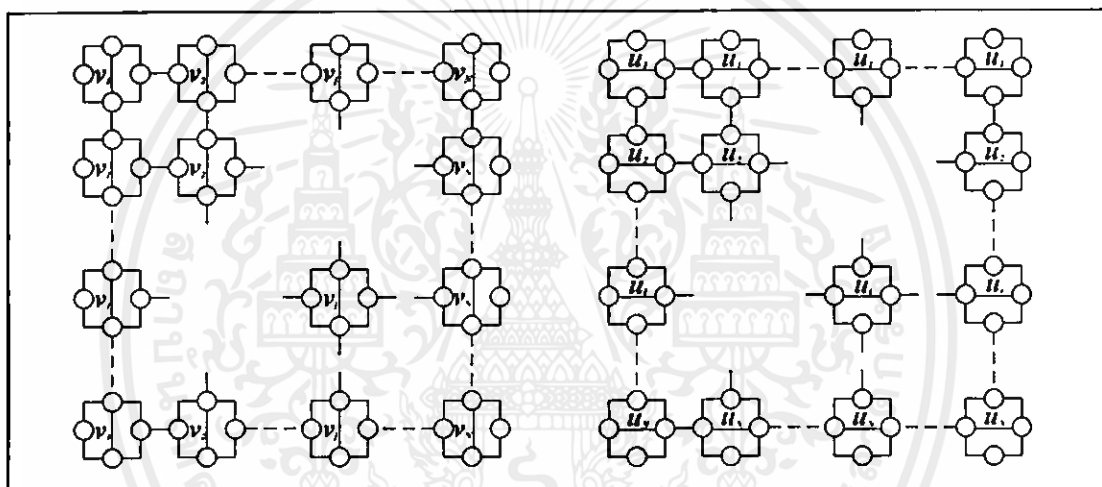
### 2.5.1 ขั้นตอนวิธีการหาเส้นค้ำจุนบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิล

สมมติให้  $CH(S_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$  และ  $CH(S_2) = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  เป็นเซตของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่มีสมาชิก  $N$  สมาชิก ซึ่งสมาชิกในแต่ละเซตเรียงลำดับจากจุดที่มีค่าแกนอน ( $x$ ) มากสุดแบบทวนเข็มนาฬิกา โดยที่ทุกสมาชิกในเซต  $CH(S_1)$  มีค่าแกนอนน้อยกว่าทุกสมาชิกในเซต  $CH(S_2)$  และกำหนดให้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลมีขนาด  $N \times N$  ขั้นตอนวิธีในการหาเส้นค้ำจุนด้านบนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติทั้งสอง บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรูเรเบิลมีดังนี้

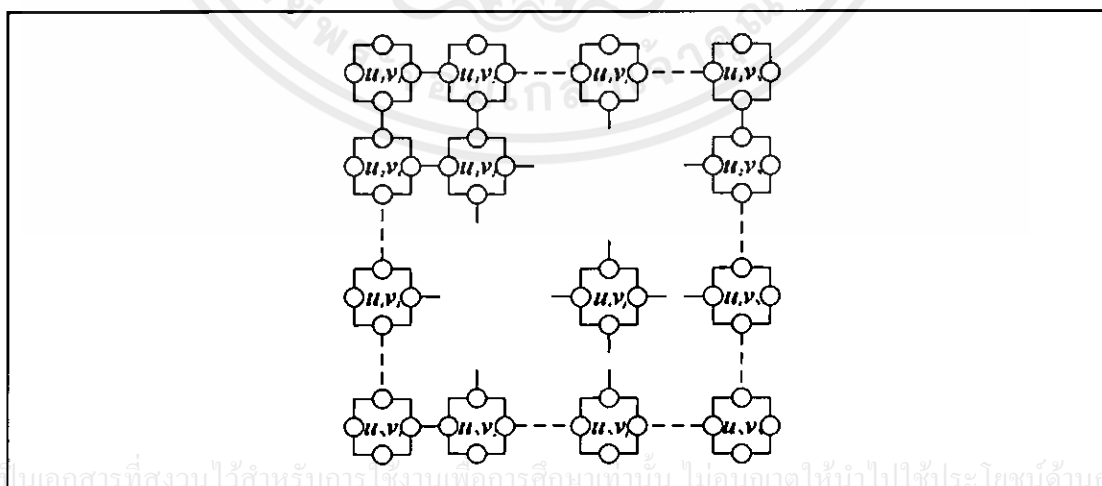
**ขั้นตอนที่ 1** ให้นำหน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(1, j)$  เก็บค่าของ  $v_j$  และให้นำหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  เก็บค่าของ  $u_i$  โดยที่  $1 \leq i, j \leq N$  ดังแสดงในรูปที่ 2.20 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.20 หน่วยประมวลผลที่  $P(1, j)$  เก็บค่า  $v_j$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  เก็บค่า  $u_i$



รูปที่ 2.21 การส่งค่า  $u_i$  และ  $v_j$  จากหน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 และหลักที่ 1



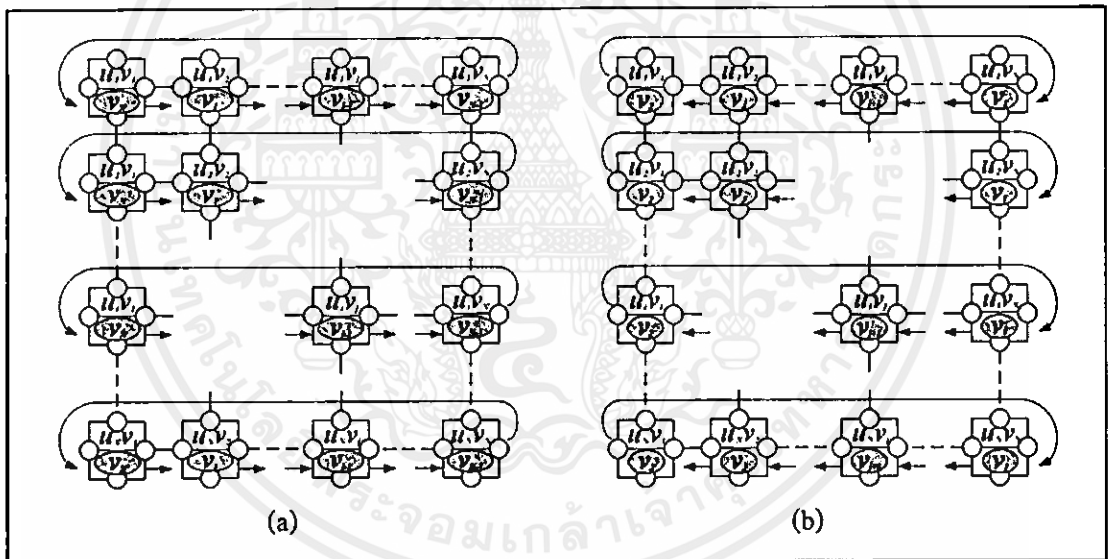
รูปที่ 2.22 การเก็บค่า  $u_i$  และ  $v_j$  ของแต่ละหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$

**ขั้นตอนที่ 2** ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(1, j)$  ส่งค่า  $v_j$  ที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง และหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  ส่งค่า  $u_i$  ที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.21 ซึ่งทำให้ได้ว่าหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  เก็บค่า  $u_i$  และ  $v_j$  ดังแสดงในรูปที่ 2.22

**ขั้นตอนที่ 3** ในแต่ละแถว  $i$  ให้หาค่า  $j$  ที่ทำให้จุด  $v_{j-1}$  และ  $v_{j+1}$  อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง  $u_i v_j$  ซึ่งในแต่ละแถวจะมีค่า  $j$  ที่เป็นไปตามเงื่อนไขนี้เพียงค่าเดียว ซึ่งขั้นตอนการหาค่า  $j$  มีดังนี้

- ขั้นที่ 1 ในแต่ละแถว  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  ส่งค่า  $v_j$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j+1)$  เมื่อ  $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N-1$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(i, N)$  ส่งค่า  $v_N$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.23 (a)

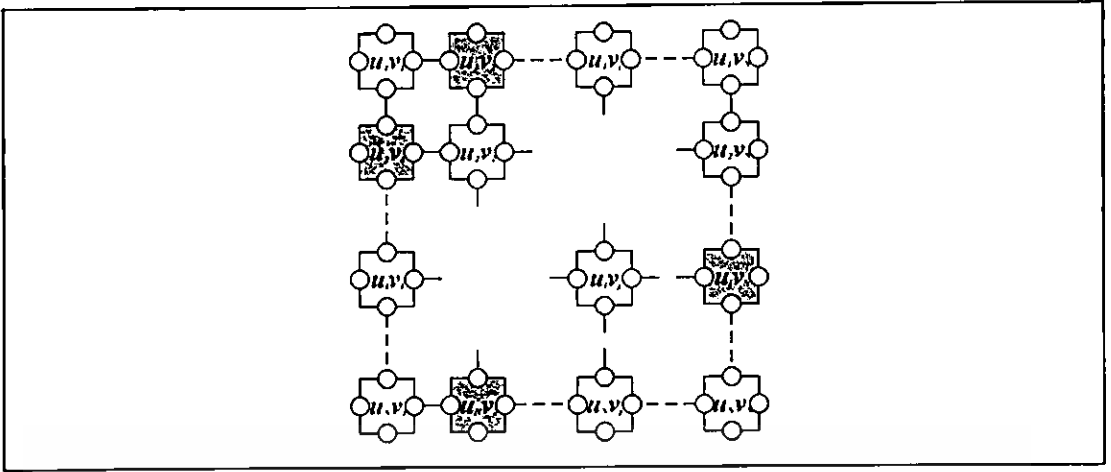
- ขั้นที่ 2 ในแต่ละแถว  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  ส่งค่า  $v_j$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j-1)$  เมื่อ  $1 \leq i \leq N, 2 \leq j \leq N$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  ส่งค่า  $v_1$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, N)$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.23 (b)



รูปที่ 2.23 หน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  ส่งค่า  $v_j$  ไปยังหน่วยประมวลผลข้างเคียงในแถวเดียวกัน

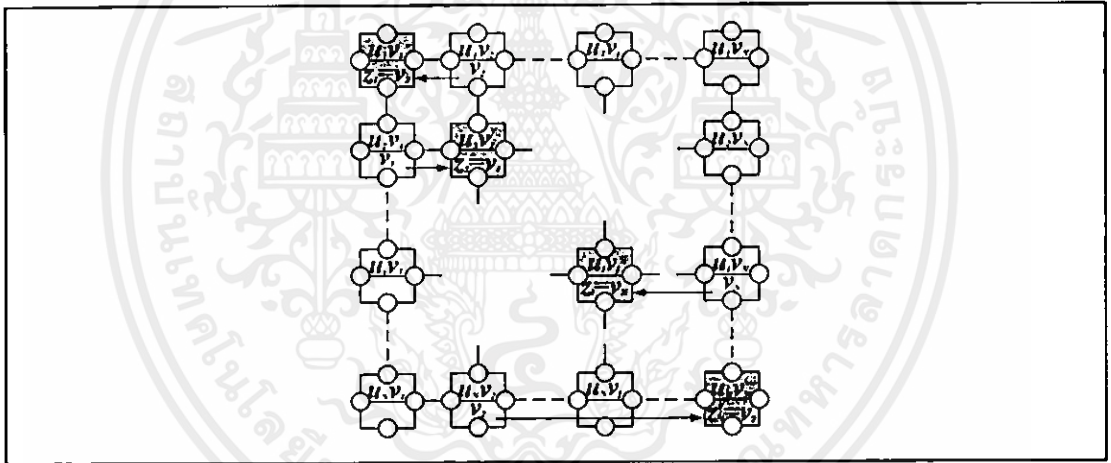
- ขั้นที่ 3 ในแต่ละแถว  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  ตรวจสอบค่า  $v_{j-1}$  และ  $v_{j+1}$  ที่ได้รับมาจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 ว่าอยู่ต่ำกว่าเส้นตรง  $u_i v_j$  ที่เก็บไว้หรือไม่ ซึ่งในแต่ละแถวจะมีหน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบเงื่อนไขนี้เป็นจริงเพียงหนึ่งหน่วยประมวลเท่านั้น โดยสมมติให้แต่ละแถว  $i$  ได้ค่า  $j$  ดังแสดงในรูปที่ 2.24 โดยแทนด้วยหน่วยประมวลผลที่ถูกแรเงา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

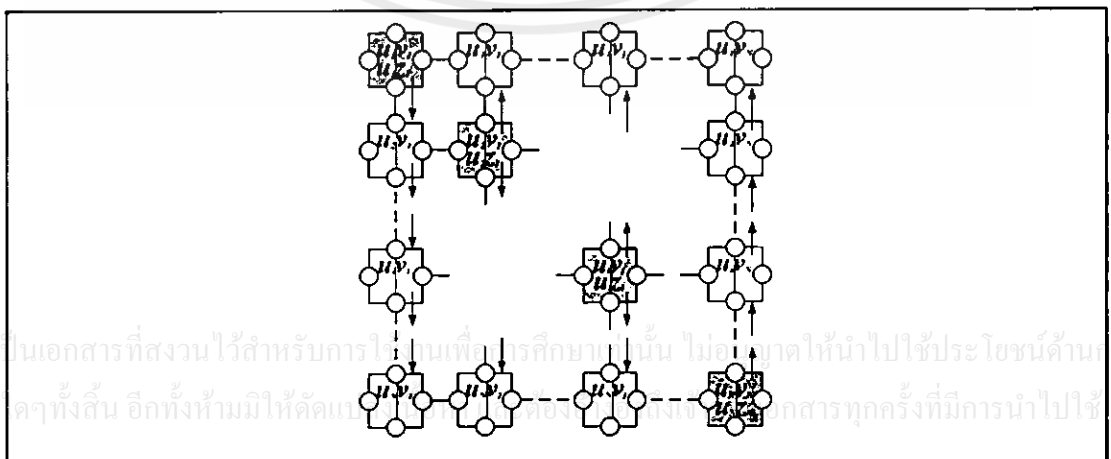


รูปที่ 2.24 ค่า  $j$  ในแต่ละแถว  $i$  ที่ทำให้จุด  $v_{j-1}$  และ  $v_{j+1}$  อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง  $u_i v_j$

ขั้นตอนที่ 4 แต่ละแถว  $i$  ให้ส่งค่า  $v_j$  ( $j$  ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3) ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  โดยเก็บไว้ในตัวแปรชื่อ  $z_i$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.25



รูปที่ 2.25 การส่งค่า  $v_j$  ไปเก็บไว้ในตัวแปร  $z_i$  ในแต่ละแถว  $i$



รูปที่ 2.26 การส่งค่า  $u_i$  และ  $z_i$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่  $i$

ขั้นตอนที่ 5 หน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ส่งค่า  $u_i$  และ  $z_i$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่  $i$  โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 2.26

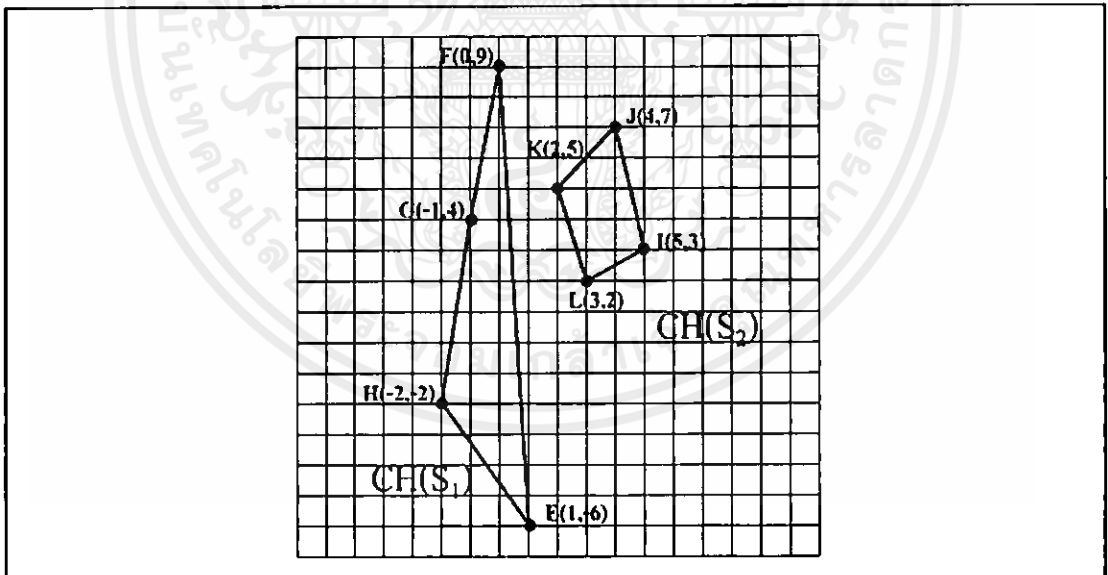
ขั้นตอนที่ 6 ในแต่ละหลัก  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i,j)$  เมื่อ  $i \neq j$  ตรวจสอบว่าค่า  $u_i$  ที่เก็บไว้ยังอยู่ได้เส้นตรง  $u_i z_i$  ที่ได้รับมาจากขั้นตอนที่ 5 หรือไม่ ซึ่งถ้าหลักใดเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริงในทุกหน่วยประมวลผลจะได้ว่าเส้นตรง  $u_i z_i$  ภายในหลักนั้นเป็นเส้นค้ำจุนด้านบนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติทั้งสอง ซึ่งเส้นค้ำจุนด้านบนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติสองคอนเวกซ์ฮัลจะมีเพียง 1 เส้นเท่านั้น ดังนั้นจะมีหน่วยประมวลผลเพียงหลักเดียวเท่านั้นที่มีเงื่อนไขเป็นจริงในทุกหน่วยประมวลผล

สำหรับขั้นตอนวิธีในการหาเส้นค้ำจุนด้านล่างทำในทำนองเดียวกัน

[8] จากขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 6 ทำให้สรุปทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 7 ให้ระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  และให้  $U$  และ  $V$  เป็นเซตของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่มีขนาดน้อยกว่าหรือเท่ากับ  $\sqrt{N}$  โดยไม่มีส่วนใดของเซตทั้งสองซ้อนทับกัน เราจะได้ว่าเส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติทั้งสองสามารถหาได้ในเวลาคงตัว ( $O(1)$ )

### 2.5.2 ตัวอย่างการหาเส้นค้ำจุนบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล

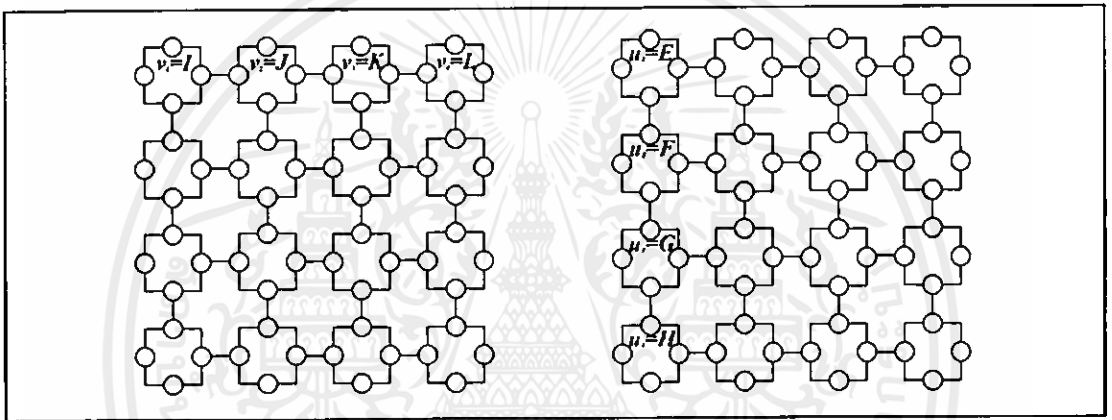


รูปที่ 2.27 แสดงค่าของข้อมูลนำเข้า

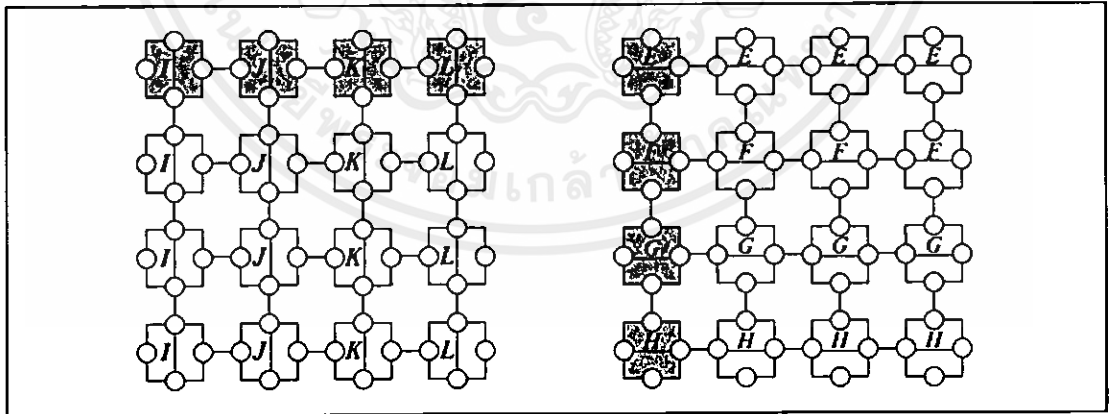
กำหนดให้  $CH(S_1) = \{E, F, G, H\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  และ  $CH(S_2) = \{I, J, K, L\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  เป็นเซตของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่มีสมาชิก 4 ตัว โดยสมาชิกแต่ละตัวมีพิกัดแกนนอนและแกนตั้งดังนี้  $E(1,-6)$   $F(0,9)$   $G(-1,4)$   $H(-2,-2)$   $I(5,3)$   $J(4,7)$   $K(2,5)$   $L(3,2)$  ซึ่งพบว่าจุดในแต่ละเซตเรียงลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกาโดยเริ่มจากจุดที่มีค่าพิกัด  $x$  มากที่สุด และค่า

พิกัด  $x$  ของทุกสมาชิกในเซต  $CH(S_1)$  มีค่าน้อยกว่าค่าพิกัด  $x$  ของทุกสมาชิกในเซต  $CH(S_2)$  ดังแสดงในรูปที่ 2.27 และกำหนดให้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลมีขนาด  $4 \times 4$  การหาเส้นลำจุนด้านบนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติทั้งสองคอนเวกซ์ฮัลบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลทำได้ดังนี้

**ขั้นตอนที่ 1** ให้หน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$ ,  $P(1,2)$ ,  $P(1,3)$  และ  $P(1,4)$  เก็บค่าของ  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  และ  $v_4$  ซึ่งได้แก่จุด  $I(5,3)$   $J(4,7)$   $K(2,5)$  และ  $L(3,2)$  ตามลำดับ และให้หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$ ,  $P(2,1)$ ,  $P(3,1)$  และ  $P(4,1)$  เก็บค่าของ  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  และ  $u_4$  ซึ่งได้แก่  $E(1,-6)$   $F(0,9)$   $G(-1,4)$  และ  $H(-2,-2)$  ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.28



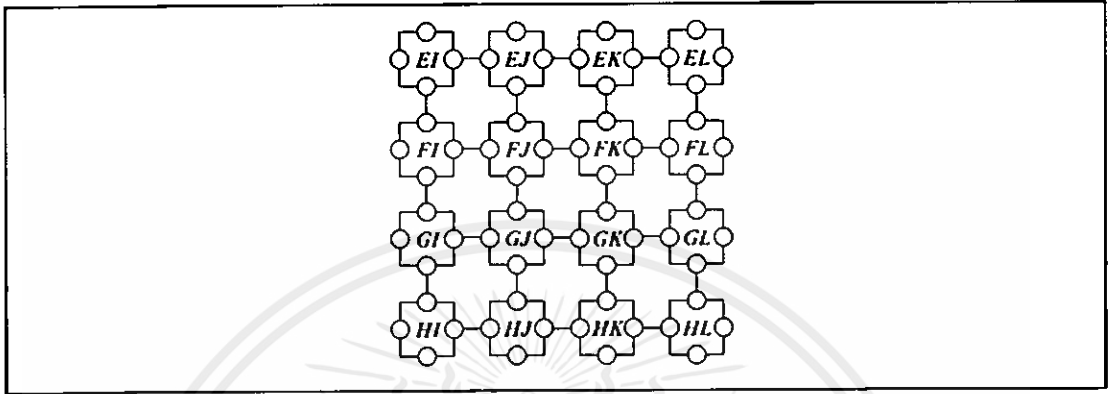
รูปที่ 2.28 หน่วยประมวลผลแถวที่ 1 เก็บค่า  $v_j$  และหน่วยประมวลผลหลักที่ 1 เก็บค่า  $u_i$



รูปที่ 2.29 การส่งค่า  $v_j$  และ  $u_i$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน และแถวเดียวกัน

**ขั้นตอนที่ 2** ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(1, j)$  ส่งค่า  $v_j$  ที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง และหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  ส่งค่า  $u_i$  ที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.29 ซึ่งทำให้

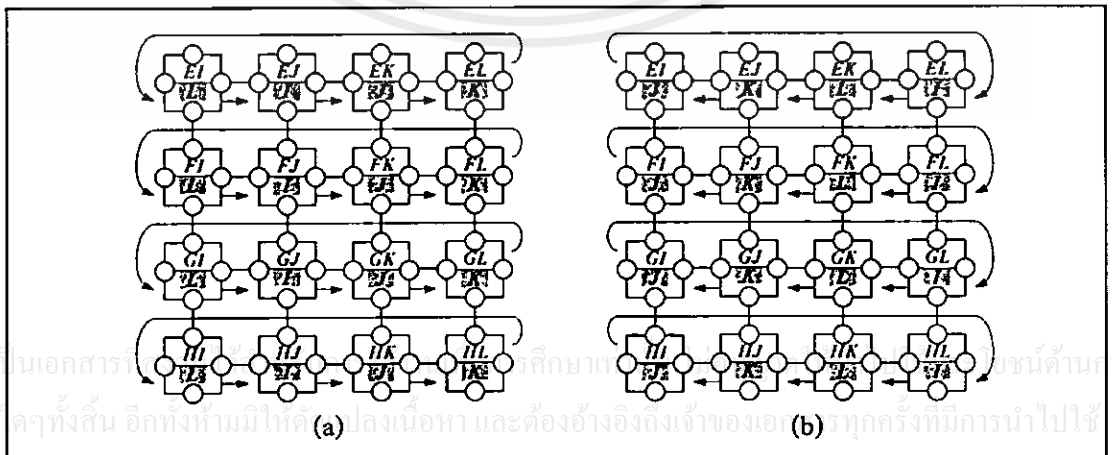
หน่วยประมวลผลหลักที่ 1 เก็บค่าจุด I หลักที่ 2 เก็บค่าจุด J หลักที่ 3 เก็บค่าจุด K และหลักที่ 4 เก็บค่าจุด L และหน่วยประมวลผลแถวที่ 1 เก็บค่าจุด E แถวที่ 2 เก็บค่าจุด F แถวที่ 3 เก็บค่าจุด G แถวที่ 4 เก็บค่าจุด H ซึ่งหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  จะเก็บค่า  $u_i$  และ  $v_j$  โดยที่  $1 \leq i, j \leq 4$  ดังแสดงในรูปที่ 2.30



รูปที่ 2.30 แสดงการเก็บข้อมูลในแต่ละหน่วยประมวลผล

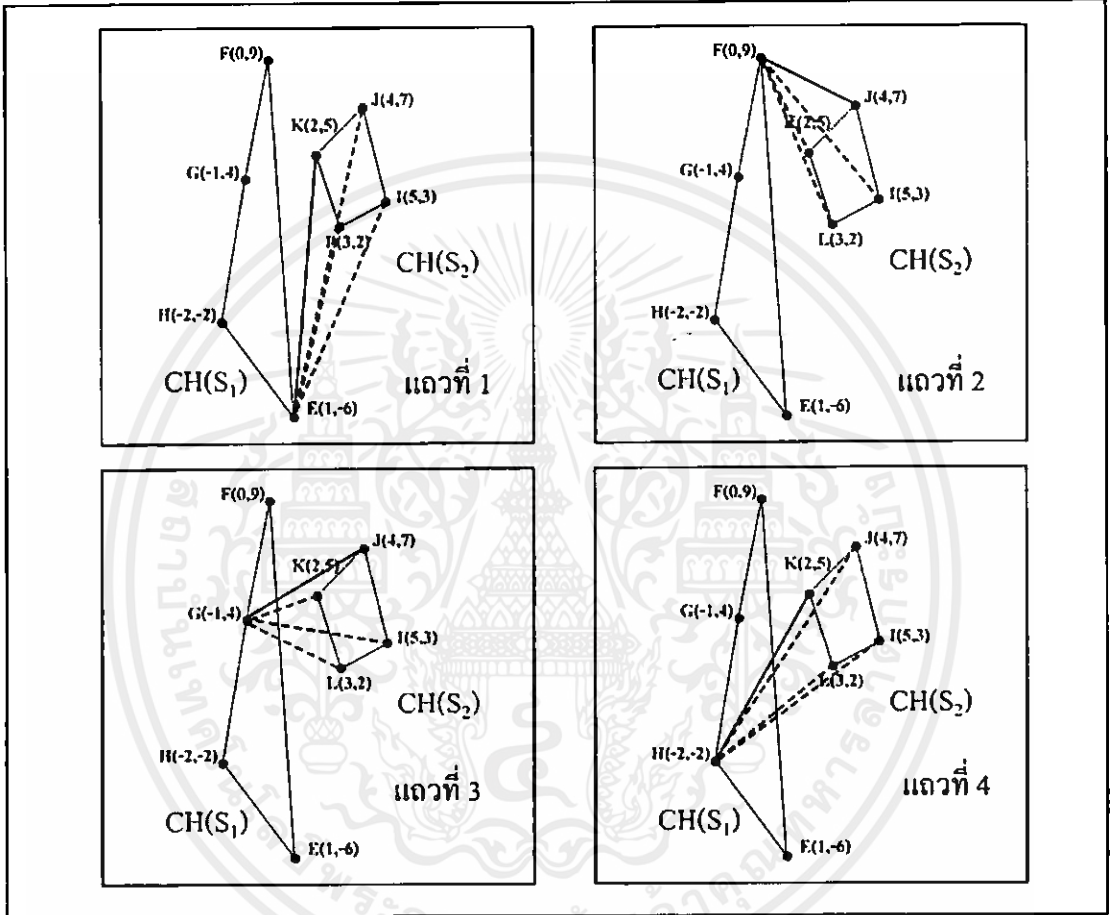
ขั้นตอนที่ 3 ในแต่ละแถว  $i$  ให้หาค่า  $j$  ที่ทำให้จุด  $v_{j-1}$  และ  $v_{j+1}$  (จุดข้างเคียง) อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง  $u_i, v_j$  ซึ่งทำได้โดย

- ขั้นที่ 1 ในแต่ละแถว  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  ส่งค่า  $v_j$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j+1)$  เมื่อ  $1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 4)$  ส่งค่า  $v_4$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.31 (a)
- ขั้นที่ 2 ในแต่ละแถว  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  ส่งค่า  $v_j$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j-1)$  เมื่อ  $1 \leq i \leq 4, 2 \leq j \leq 4$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 1)$  ส่งค่า  $v_1$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, 4)$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.31 (b)

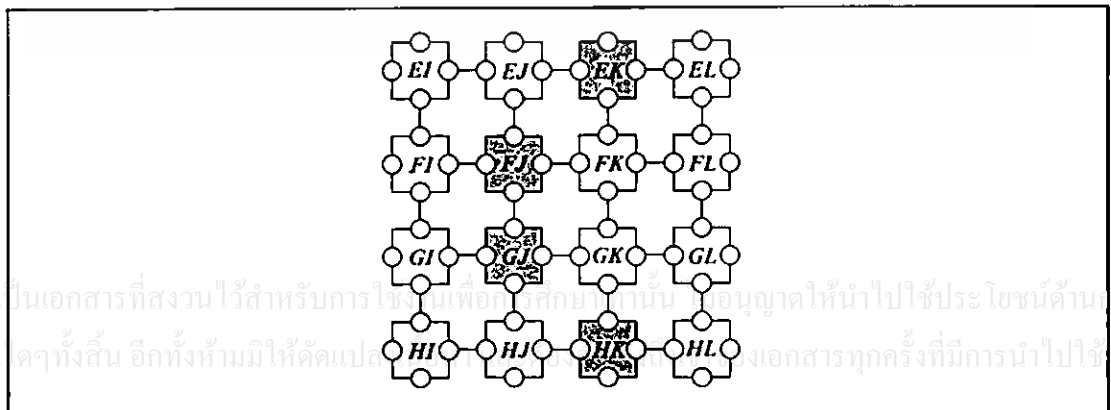


รูปที่ 2.31 ทุกหน่วยประมวลผลส่งค่า  $v_j$  ไปยังหน่วยประมวลผลข้างเคียงที่อยู่ในแถวเดียวกัน

• ขั้นที่ 3 ในแต่ละแถว  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  ตรวจสอบค่าที่ได้รับมาจากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 ว่าอยู่ต่ำกว่าเส้นตรง  $u_i v_j$  ที่เก็บไว้หรือไม่ จากรูปที่ 2.32 แสดงการหาค่า  $j$  ในแต่ละแถว โดยได้ผลลัพธ์ดังนี้ แถวที่ 1 ได้  $j=3$  ได้แก่งจุด  $v_3 = K$  แถวที่ 2 ได้  $j=2$  ได้แก่งจุด  $v_2 = J$  แถวที่ 3 ได้  $j=2$  ได้แก่งจุด  $v_2 = J$  และแถวที่ 4 ได้  $j=3$  ได้แก่งจุด  $v_3 = K$  ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เก็บอยู่ในหน่วยประมวลผลที่เราระกแสดงในรูปที่ 2.33



รูปที่ 2.32 การหาค่า  $j$  ในแต่ละแถว  $i$  ที่ทำให้จุด  $v_{j-1}$  และ  $v_{j+1}$  อยู่ต่ำกว่าเส้นตรง  $u_i v_j$



รูปที่ 2.33 ผลลัพธ์ในแต่ละแถว  $i$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการศึกษา  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกหรือเผยแพร่เอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

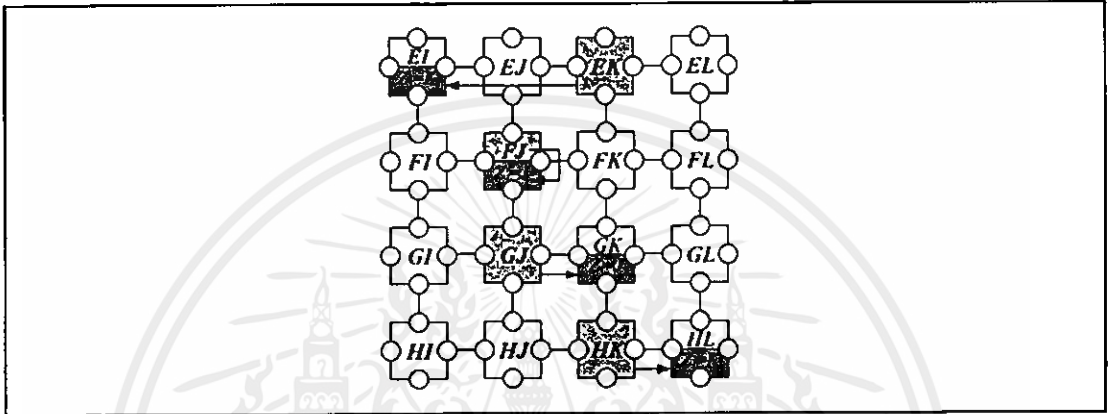
**ขั้นตอนที่ 4** ในแต่ละแถว  $i$  ให้ส่งค่า  $v_i$  ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  โดยเก็บไว้ในตัวแปรชื่อ  $z_i$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 2.34 ดังนี้

แถวที่ 1 ส่งค่า  $v_3 = K$  ไปเก็บไว้ในตัวแปร  $z_1$  ในหน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$

แถวที่ 2 ส่งค่า  $v_2 = J$  ไปเก็บไว้ในตัวแปร  $z_2$  ในหน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$

แถวที่ 3 ส่งค่า  $v_2 = J$  ไปเก็บไว้ในตัวแปร  $z_3$  ในหน่วยประมวลผลที่  $P(3,3)$

และแถวที่ 4 ส่งค่า  $v_3 = K$  ไปเก็บไว้ในตัวแปร  $z_4$  ในหน่วยประมวลผลที่  $P(4,4)$



รูปที่ 2.34 การส่งค่า  $v_i$  ไปเก็บไว้ในตัวแปร  $z_i$  ในแต่ละแถว  $i$

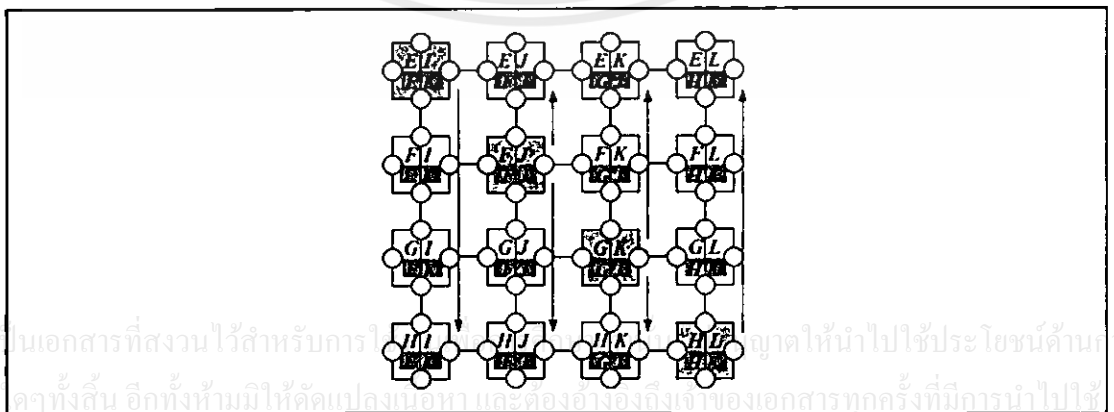
**ขั้นตอนที่ 5** ในแต่ละแถว  $i$  ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ส่งค่า  $u_i$  และ  $z_i$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่  $i$  โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 2.35 ดังนี้

หน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$  ส่งค่า  $EK$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1

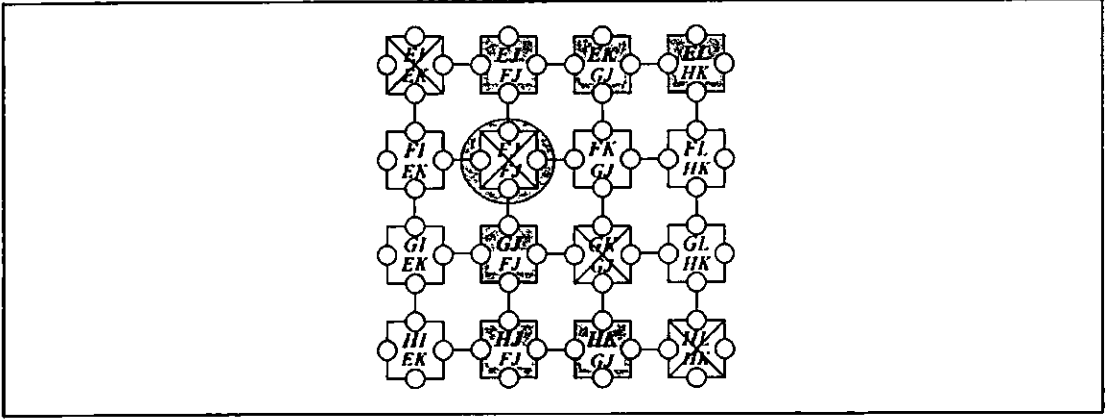
หน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$  ส่งค่า  $FJ$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 2

หน่วยประมวลผลที่  $P(3,3)$  ส่งค่า  $GJ$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 3

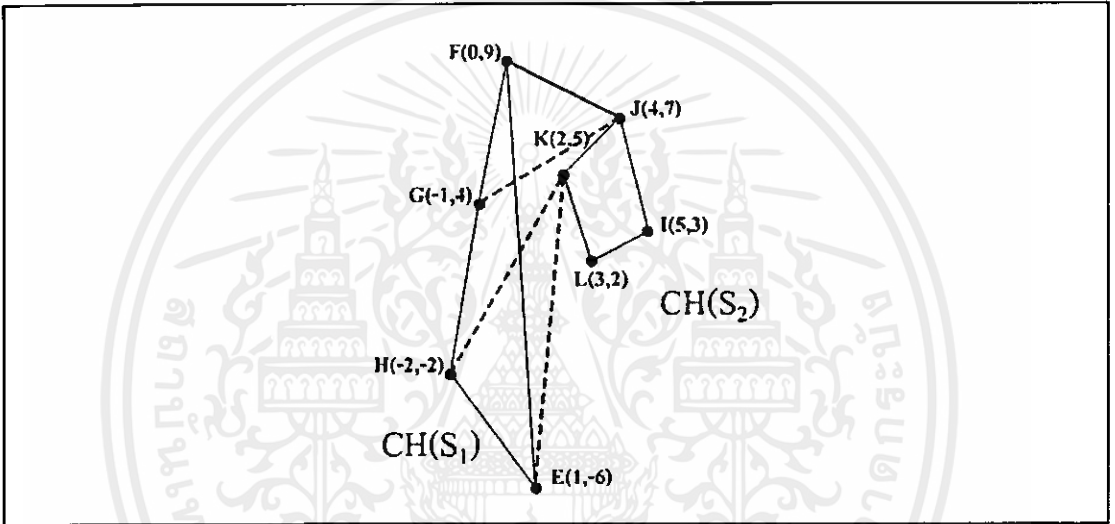
และหน่วยประมวลผลที่  $P(4,4)$  ส่งค่า  $HK$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 4



รูปที่ 2.35 การส่งค่า  $u_i, z_i$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ไปทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน



รูปที่ 2.36 การเรียงหน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบว่าเงื่อนไขเป็นจริง



รูปที่ 2.37 เส้นค่าจูนของ  $CH(S_1)$  และ  $CH(S_2)$  คือเส้นตรง FJ

ขั้นตอนที่ 6 ในแต่ละหลัก  $i$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i, j)$  เมื่อ  $i \neq j$  ตรวจสอบว่าค่า  $u_i$  ที่เก็บไว้อยู่ได้เส้นตรง  $u, z_i$  ที่ได้รับมาจากขั้นตอนที่ 5 หรือไม่ จากรูปที่ 2.36 แสดงการเรียงหน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบว่าเงื่อนไขเป็นจริง โดยจะเห็นว่าทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 2 ตรวจสอบพบเงื่อนไขเป็นจริง ทำให้ได้ว่าเส้นค่าจูนด้านบนของคอนเวกซ์ฮัล  $CH(S_1)$  และ  $CH(S_2)$  คือเส้นตรง FJ ดังแสดงในรูปที่ 2.37

## 2.6 ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

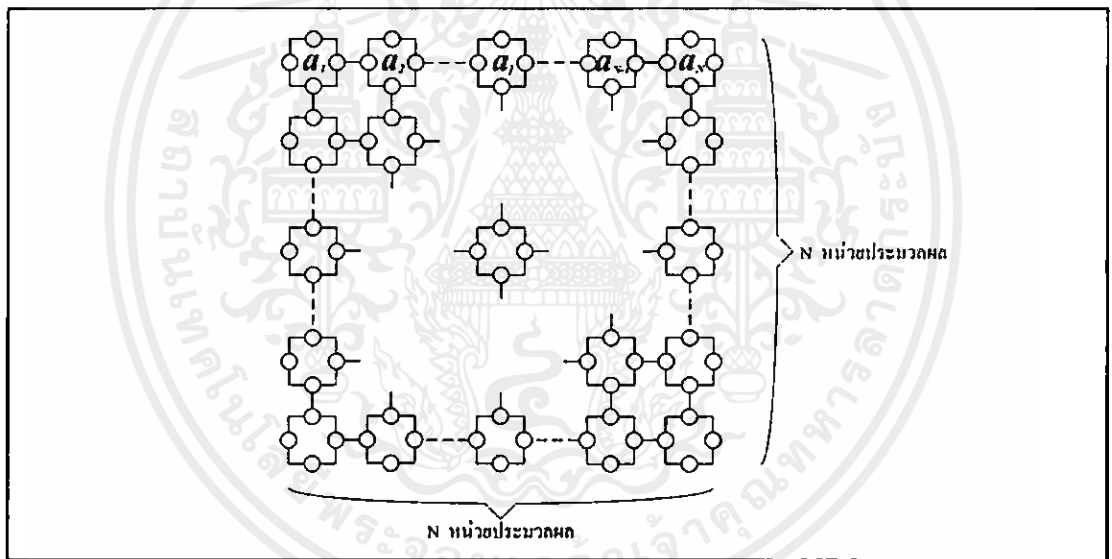
ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุด (Optimal Algorithm) สำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติเป็นขั้นตอนวิธีที่นำขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุด (Sub-Optimal Algorithm) สำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติโดยใช้เวลาคงตัวบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายกริดขนาด  $N^2 \times N$  ในหัวข้อที่ 2.4 ทฤษฎีบทที่ 6 และขั้นตอนวิธีการหาเส้นค่าจูนในหัวข้อที่ 2.5 ทฤษฎีบทที่ 7 มาประยุกต์ใช้ ทำให้ได้

ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่มีประสิทธิภาพดีขึ้น กล่าวคือขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิตินี้เป็นขั้นตอนวิธีที่สามารถหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติได้ในเวลาคงตัวโดยใช้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาดลดลง คือ  $N \times N$  ซึ่งขั้นตอนวิธีการทำงานดังแสดงในหัวข้อที่ 2.6.1

### 2.6.1 ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติบนระบบเครือข่าย

แบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $N \times N$

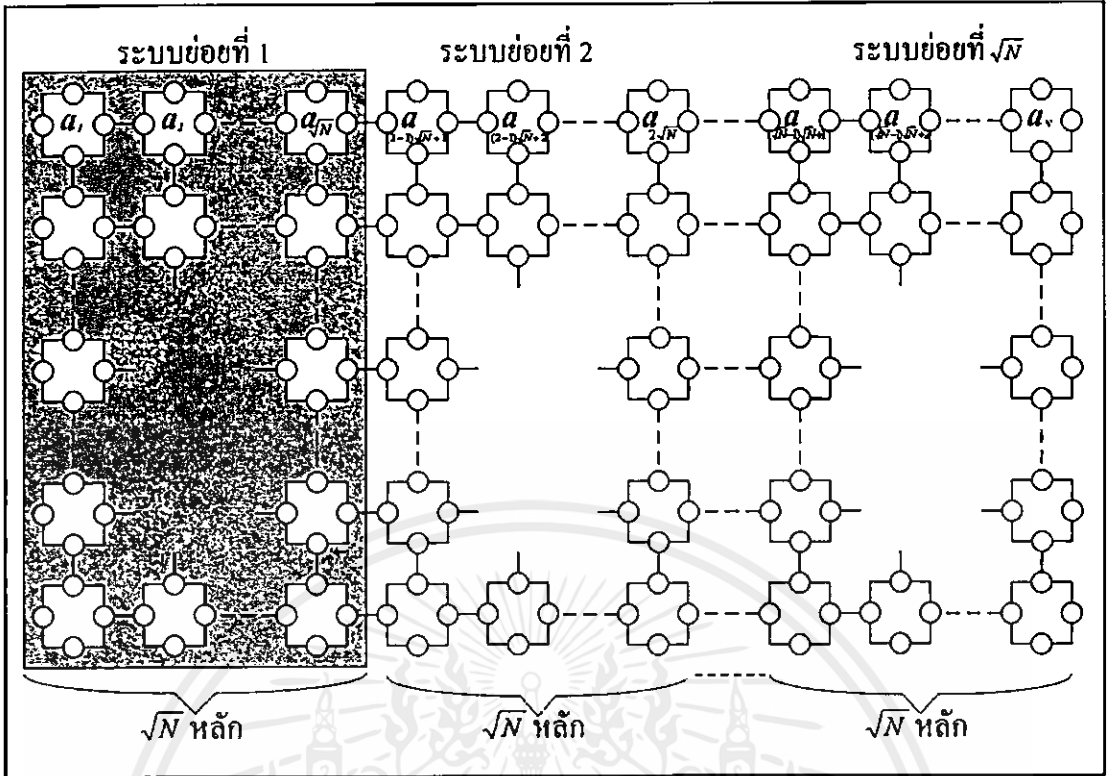
ให้เซตของข้อมูลนำเข้าคือ เซต  $S = \{a_i | 1 \leq i \leq N\}$  เป็นเซตของจุดในระนาบสองมิติที่มีจำนวน  $N$  จุด ซึ่งรายละเอียดปลีกย่อยเหมือนข้อมูลนำเข้าสำหรับขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติในหัวข้อที่ 2.4.1 และให้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลมีขนาด  $N \times N$  จะได้ว่าขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $N \times N$  มีขั้นตอนวิธีดังนี้



รูปที่ 2.38 หน่วยประมวลผลที่  $P(1, j)$  เก็บข้อมูลนำเข้า  $a_j$

ขั้นตอนที่ 1 ให้หน่วยประมวลผลในแถวแรกซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(1, j)$  เก็บข้อมูลนำเข้า  $a_j$  เมื่อ  $1 \leq j \leq N$  ดังแสดงในรูปที่ 2.38

ขั้นตอนที่ 2 แบ่งระบบเครือข่ายแบบตาข่ายขนาด  $N \times N$  เป็นระบบย่อยขนาด  $N \times \sqrt{N}$  จำนวน  $\sqrt{N}$  ระบบย่อย โดยระบบย่อยแรกประกอบด้วยหน่วยประมวลผล  $\sqrt{N}$  หลักแรก ระบบย่อยที่สองประกอบด้วยหน่วยประมวลผล  $\sqrt{N}$  หลักถัดไป จนถึงระบบย่อยที่  $\sqrt{N}$  ประกอบด้วยหน่วยประมวลผล  $\sqrt{N}$  หลักสุดท้าย ซึ่งแต่ละระบบย่อยขนาด  $N \times \sqrt{N}$  เก็บข้อมูลนำเข้า  $\sqrt{N}$  จุด ดังแสดงในรูปที่ 2.39



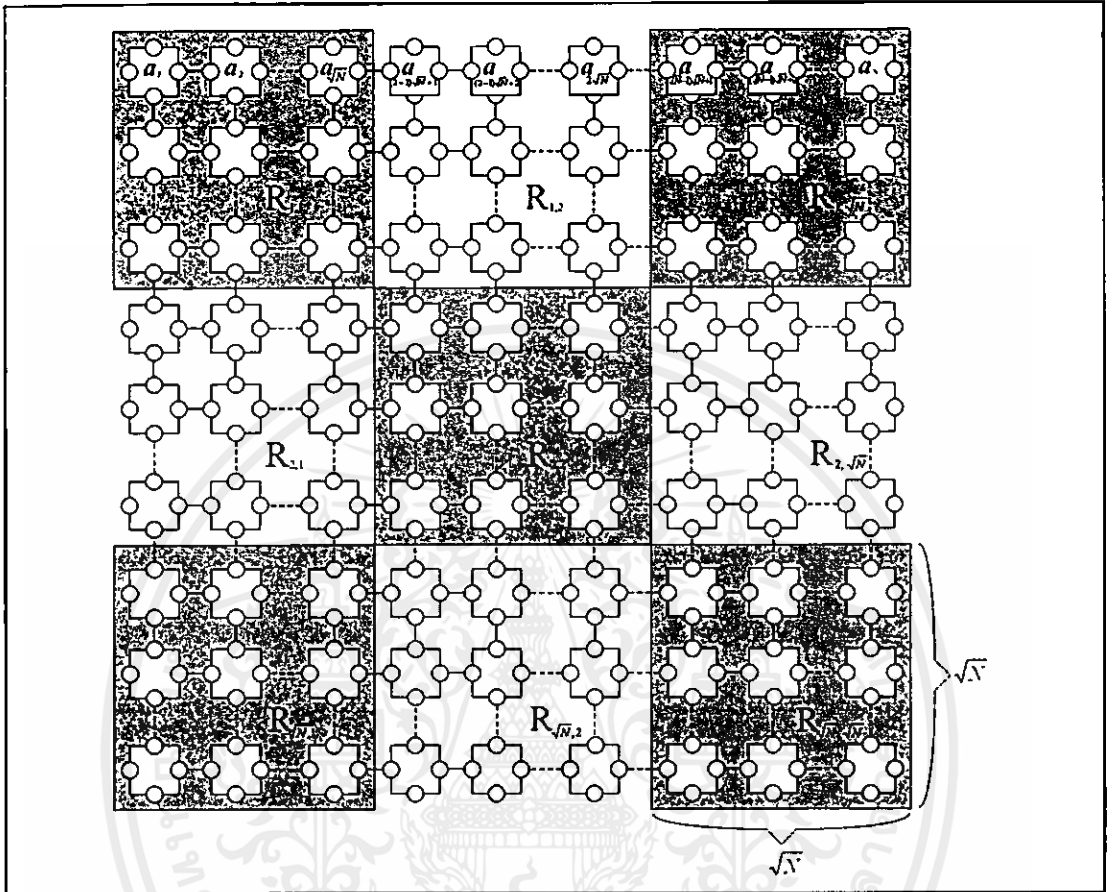
รูปที่ 2.39 ระบบย่อยขนาด  $N \times \sqrt{N}$  เก็บข้อมูลนำเข้า  $\sqrt{N}$  จุด

จากทฤษฎีบทที่ 6 จะได้ว่าแต่ละระบบย่อยสามารถหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของจุดจำนวน  $\sqrt{N}$  จุดที่เก็บไว้ในหน่วยประมวลผลแถวแรกของระบบย่อยขนาด  $\sqrt{N}^2 \times \sqrt{N}$  ได้ในเวลาคงตัว ( $O(1)$ ) โดยให้เรียกผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละระบบย่อยดังนี้ เรียกคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่ได้จากระบบย่อยที่ 1 ว่า  $CH(S_1)$  เรียกคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่ได้จากระบบย่อยที่สองว่า  $CH(S_2)$  และเรียกคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่ได้จากระบบย่อยที่  $\sqrt{N}$  ว่า  $CH(S_{\sqrt{N}})$  ตามลำดับ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละระบบย่อยจะเก็บไว้ที่หน่วยประมวลผลแถวบนสุด โดยเรียงลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกาจากจุดที่มีค่าพิกัด  $x$  มากที่สุด

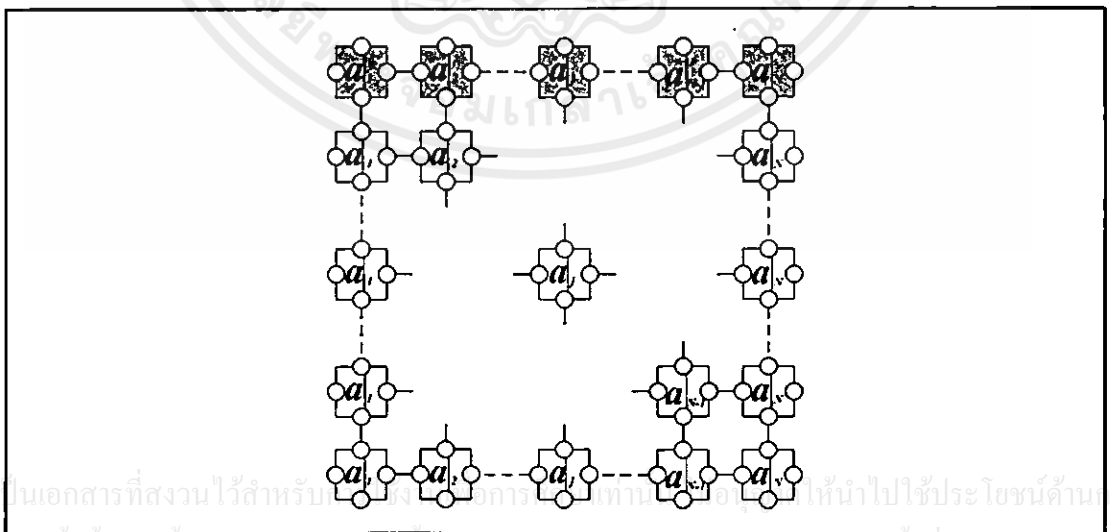
โดยไม่สูญเสียความมีนัยทั่วไป (Without loss of generality) สมมติให้ผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละระบบย่อยเป็นเซตเดียวกับเซตของข้อมูลนำเข้า นั่นคือแต่ละเซต  $CH(S_i)$  มีจำนวนสมาชิกทั้งหมด  $\sqrt{N}$  จุด เมื่อ  $1 \leq i \leq \sqrt{N}$

ขั้นตอนที่ 3 แต่ละระบบย่อยขนาด  $N \times \sqrt{N}$  ให้แบ่งเป็นระบบย่อยอีก ซึ่งระบบย่อยใหม่ที่ได้มีขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  มีจำนวนทั้งหมด  $N$  ระบบย่อย โดยให้เรียกว่า  $R_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq i, j \leq \sqrt{N}$  ซึ่งแต่ละ  $R_{i,j}$  จะประกอบด้วยหน่วยประมวลผลที่  $P(a,b)$  โดยที่  $1 + (i-1)\sqrt{N} \leq a \leq i\sqrt{N}$  และ  $1 + (j-1)\sqrt{N} \leq b \leq j\sqrt{N}$  ตัวอย่างเช่น  $R_{1,1}$  ประกอบด้วยหน่วยประมวลผลที่  $P(1,1), P(1,2), \dots, P(1, \sqrt{N}), P(2,1), \dots, P(2, \sqrt{N}), \dots, P(\sqrt{N}, 1), P(\sqrt{N}, 2), \dots, P(\sqrt{N}, \sqrt{N})$  หรือประกอบด้วยหน่วยประมวลผลที่  $P(1,1), P(1,2), P(1,3), P(1,4), P(2,1), P(2,2), P(2,3), P(2,4),$

$P(3,1), P(3,2), P(3,3), P(3,4), P(4,1), P(4,2), P(4,3), P(4,4)$  เมื่อ  $N = 16$  โดยรูปที่ 2.40 แสดงระบบย่อยขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$

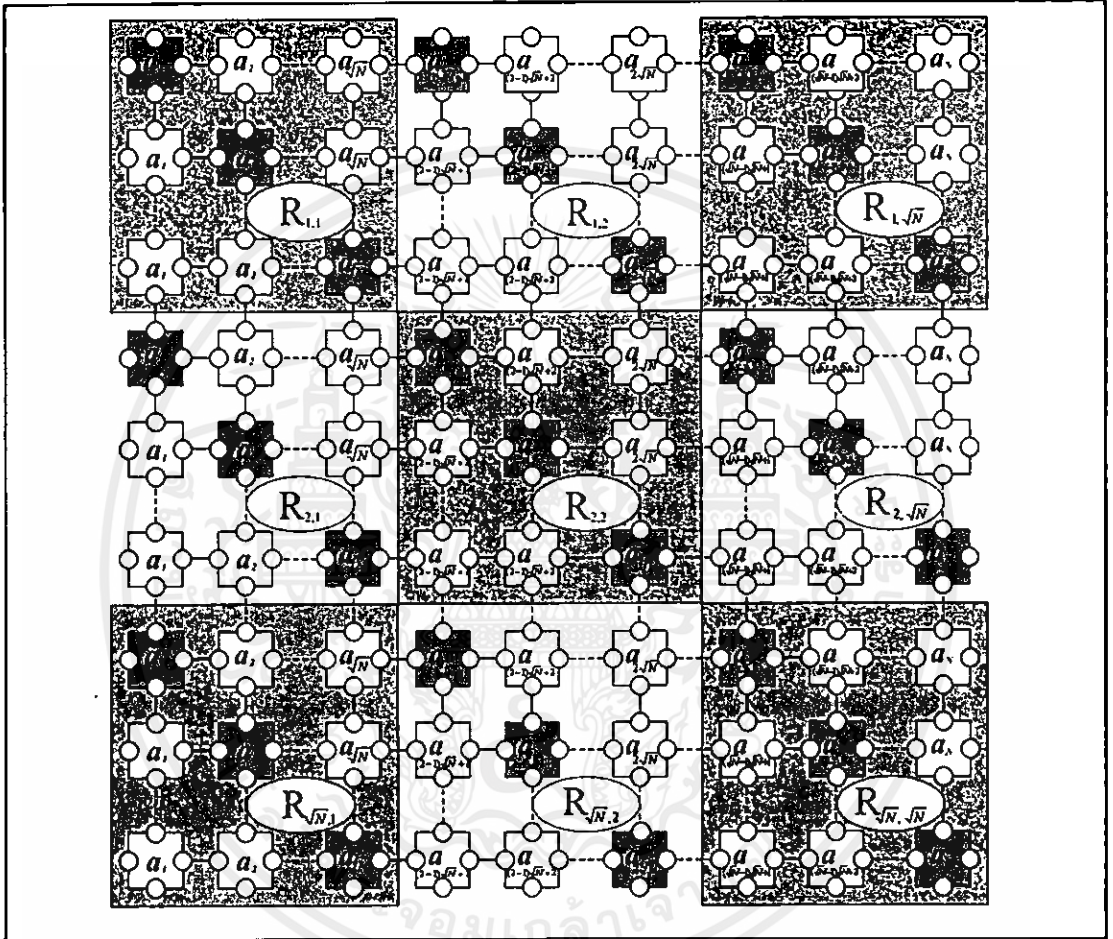


รูปที่ 2.40 ระบบย่อย  $R_{i,j}$



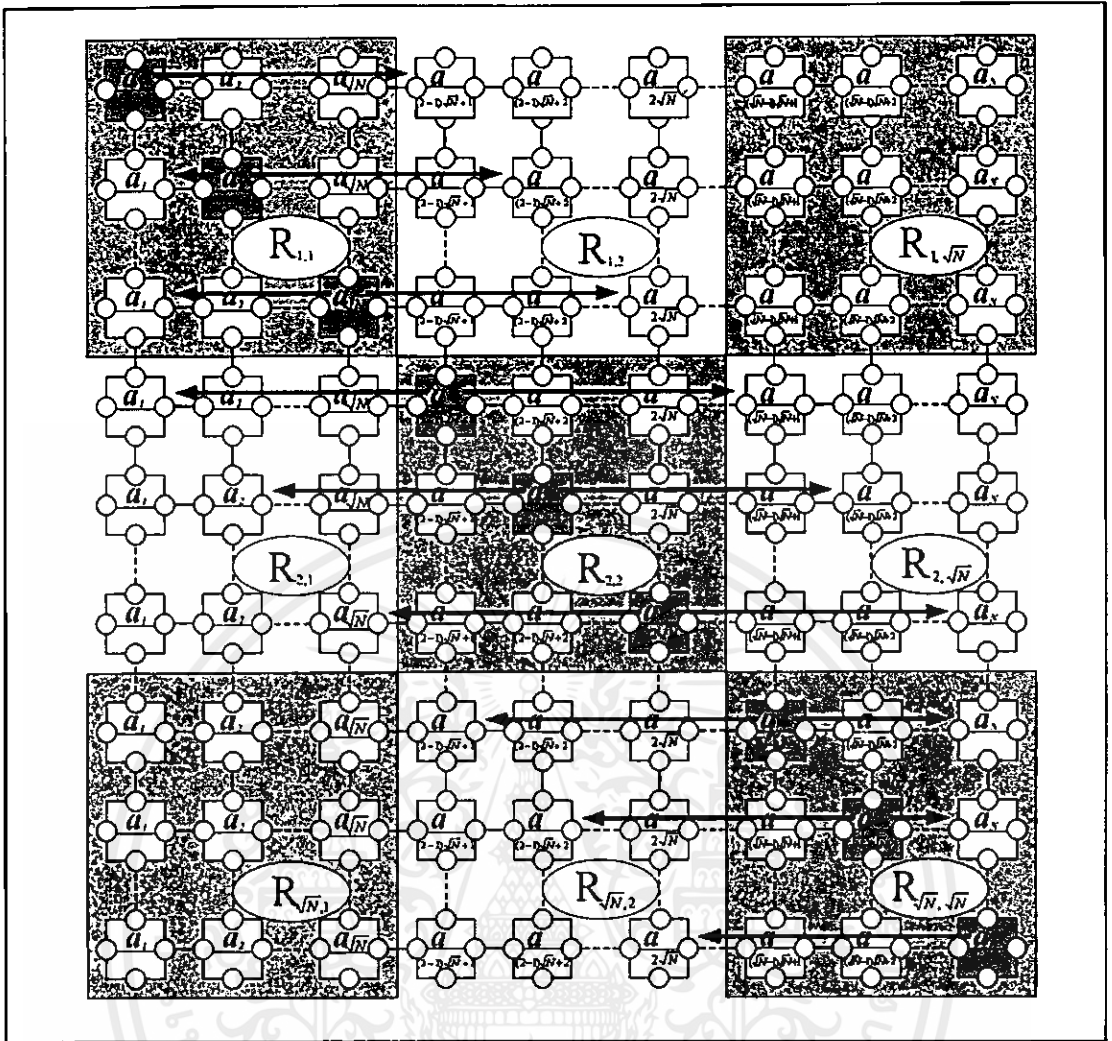
รูปที่ 2.41 ทุกหน่วยประมวลผลในแถวแรกส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 4 จากระบบเครือข่ายแบบคาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $N \times N$  ที่แถวแรก เก็บผลลัพธ์ของคอนเวกซ์อัลสอมิติของเซตย่อยๆ ซึ่งได้แก่  $CH(S_1), CH(S_2), \dots, CH(S_{\sqrt{N}})$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 ส่งค่าผลลัพธ์ดังกล่าวไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้งดังแสดงในรูปที่ 2.41 ซึ่งทำให้ได้ว่าหน่วยประมวลผลที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  จะเก็บค่า  $CH(S_j)$  ไว้ ดังแสดงในรูปที่ 2.42



รูปที่ 2.42 หน่วยประมวลผลในแนวเส้นทแยงมุมของแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  เก็บค่า  $CH(S_j)$

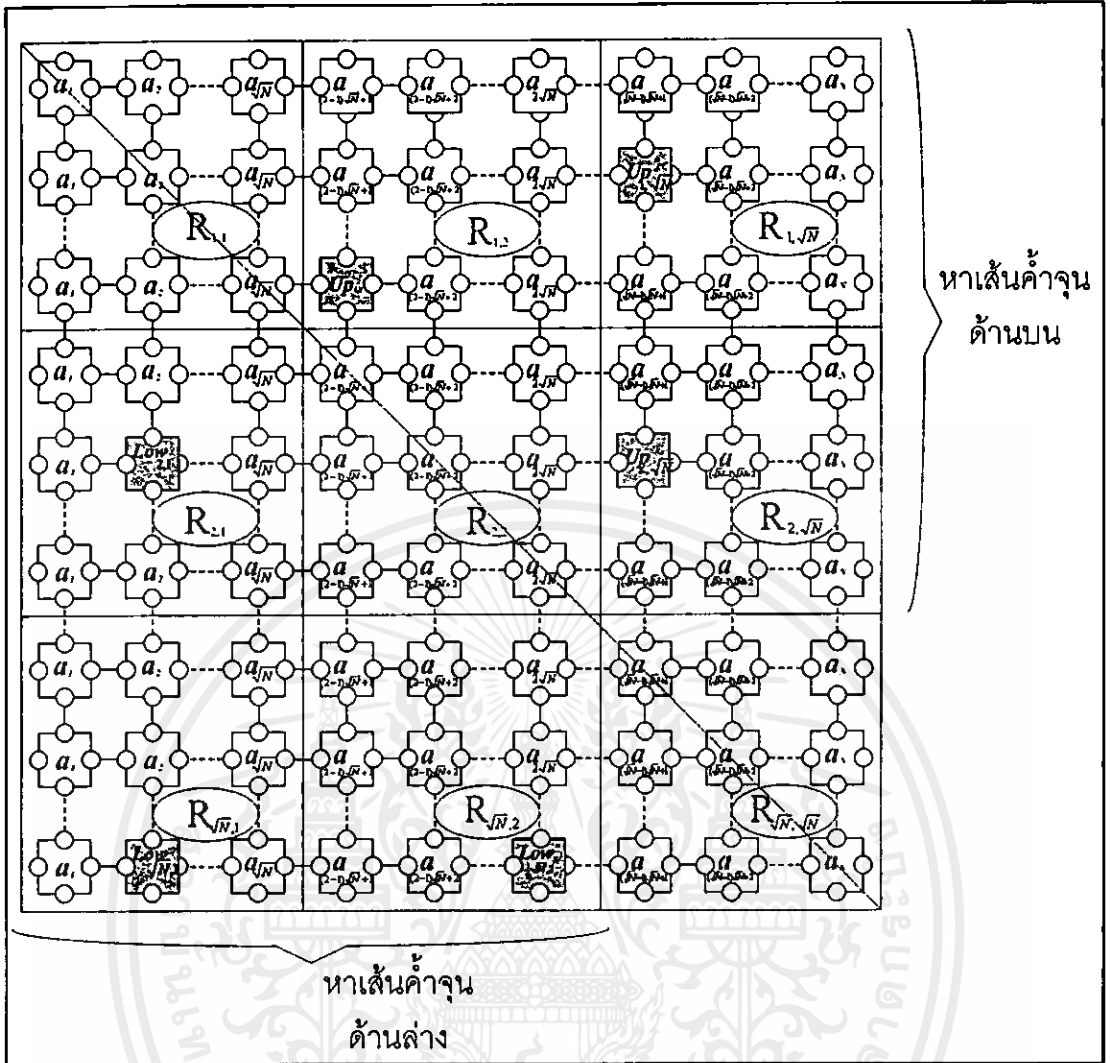
ขั้นตอนที่ 5 จากระบบเครือข่ายแบบคาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $N \times N$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ส่งค่าข้อมูลที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวนอนดังแสดงในรูปที่ 2.43 ซึ่งทำให้ได้ว่าแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  จะเก็บข้อมูล  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$  เช่น ระบบย่อย  $R_{2,1}$  เก็บข้อมูลของเซต  $CH(S_1)$  และ  $CH(S_2)$  และทำให้ทุกหน่วยประมวลผลเก็บข้อมูลไว้สองค่า เช่น หน่วยประมวลผลที่  $P(2, (2-1)\sqrt{N} + 1)$  เก็บค่าข้อมูล  $a_2$  และ  $a_{(2-1)\sqrt{N} + 1}$  เป็นต้น



รูปที่ 2.43 หน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ส่งข้อมูลที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 6 ระบบย่อย  $R_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq i < j \leq \sqrt{N}$  หาเส้นค่าจุนด้านบนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติ  $CH(S_i)$  กับคอนเวกซ์ฮิลสองมิติ  $CH(S_j)$  และให้ระบบย่อย  $R_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq j < i \leq \sqrt{N}$  หาเส้นค่าจุนด้านล่างของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติ  $CH(S_i)$  กับคอนเวกซ์ฮิลสองมิติ  $CH(S_j)$  ซึ่งจากทฤษฎีบทที่ 7 จะได้ว่าเส้นค่าจุนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติ  $CH(S_i)$  กับคอนเวกซ์ฮิลสองมิติ  $CH(S_j)$  สามารถหาได้ในเวลาคงตัวบนระบบย่อยขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  โดยให้เส้นค่าจุนด้านบนของ  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$  เก็บอยู่ในตัวแปร  $Up_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq i < j \leq \sqrt{N}$  และเส้นค่าจุนด้านล่างของ  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$  เก็บอยู่ในตัวแปร  $Low_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq j < i \leq \sqrt{N}$  โดยสมมติให้หน่วยประมวลผลที่แรงาเป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่าของเส้นค่าจุนดังกล่าว ดังแสดงในรูปที่ 2.44

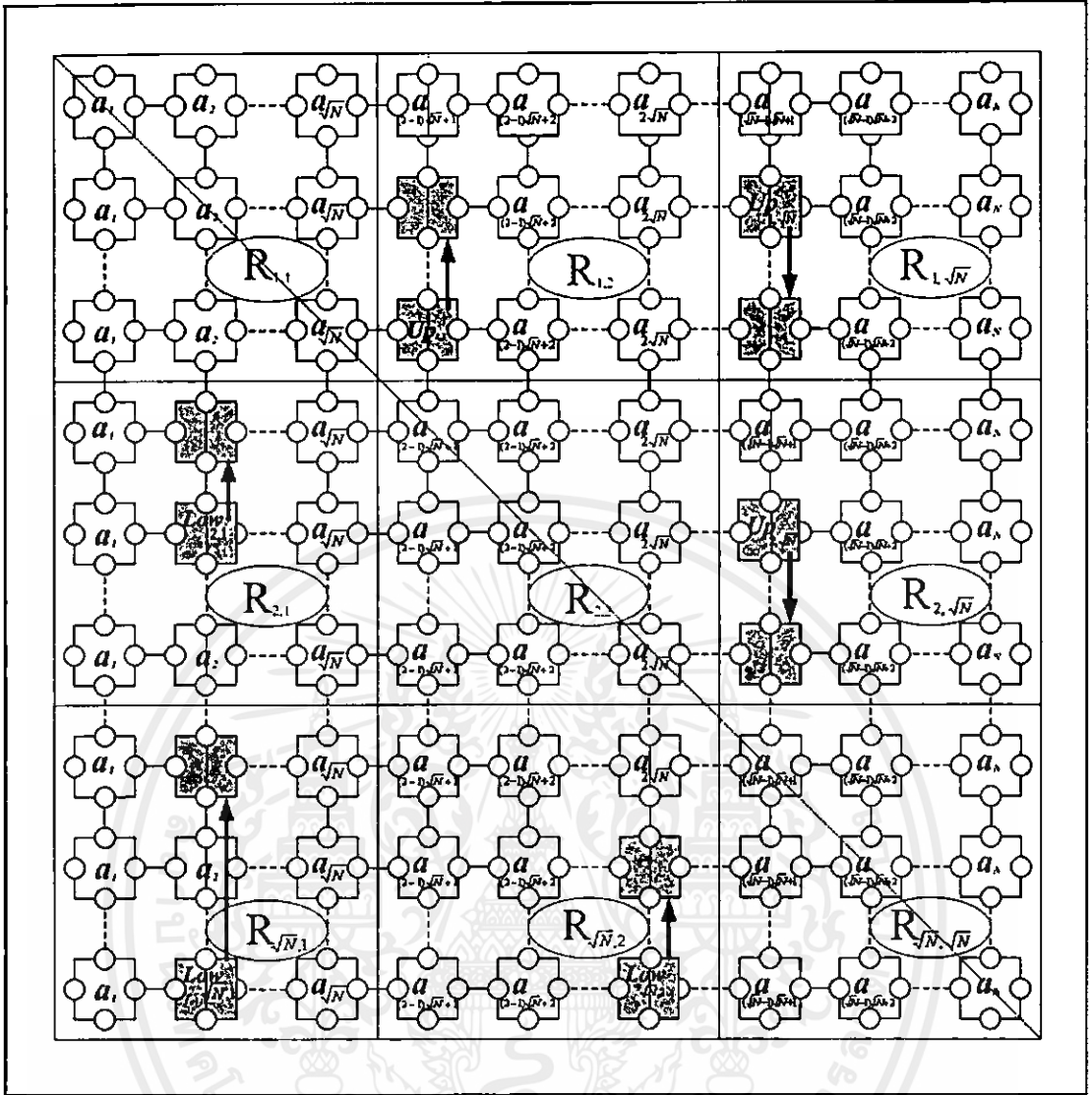
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรนำไปใช้



รูปที่ 2.44 หน่วยประมวลผลที่เก็บเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$

ขั้นตอนที่ 7 ในแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  เมื่อ  $i \neq j$  ให้หน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนที่หาได้ในขั้นตอนที่ 6 ส่งผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลในแถวที่  $j$  ของระบบย่อยนั้น โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง เช่น จากรูปที่ 2.44 ระบบย่อยที่  $R_{1,2}$  พบว่าหน่วยประมวลผลที่  $P(\sqrt{N}, (2-1)\sqrt{N}+1)$  เก็บผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนด้านบน จึงให้หน่วยประมวลผลนี้ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลในแถวที่ 2 ของระบบย่อยที่  $R_{1,2}$  ซึ่งก็คือหน่วยประมวลผลที่  $P(2, (2-1)\sqrt{N}+1)$  หรือในระบบย่อยที่  $R_{2,1}$  พบว่าหน่วยประมวลผลที่  $P((2-1)\sqrt{N}+2, 2)$  เก็บผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนด้านล่าง จึงให้หน่วยประมวลผลนี้ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 ของระบบย่อยที่  $R_{2,1}$  ซึ่งก็คือหน่วยประมวลผลที่  $P((2-1)\sqrt{N}+1, 2)$  เป็นต้น รูปที่

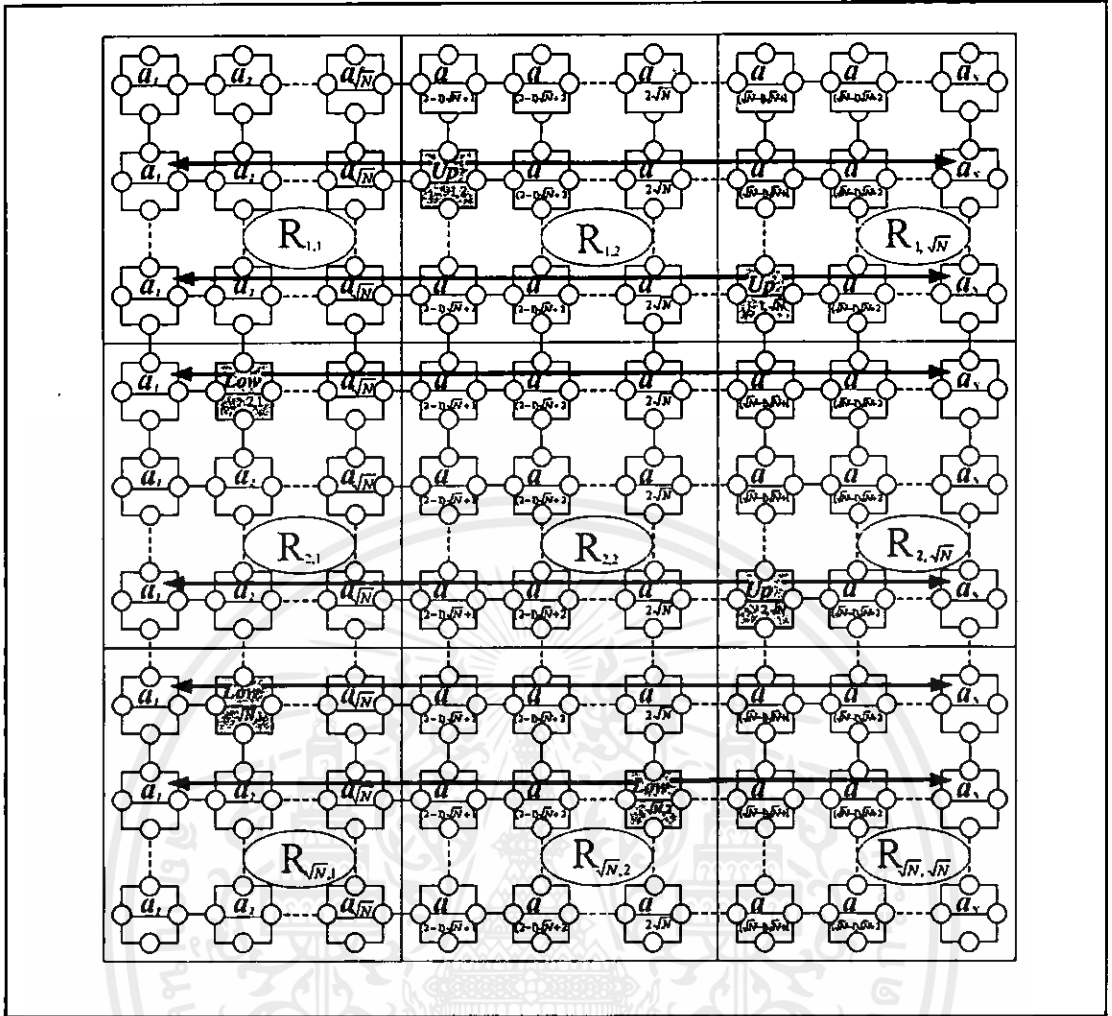
เอกสารนี้ 2.45 แสดงการส่งผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลในแถวที่  $j$  ของแต่ละระบบย่อยที่  $R_{i,j}$  เมื่อ  $i \neq j$  การคำนวณที่ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.45 การส่งผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลแถวที่  $j$  ในแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  เมื่อ  $i \neq j$

ขั้นตอนที่ 8 ให้แต่ละหน่วยประมวลผลที่รับค่าผลลัพธ์ในขั้นตอนที่ 7 ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวนอนดังแสดงในรูปที่ 2.46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



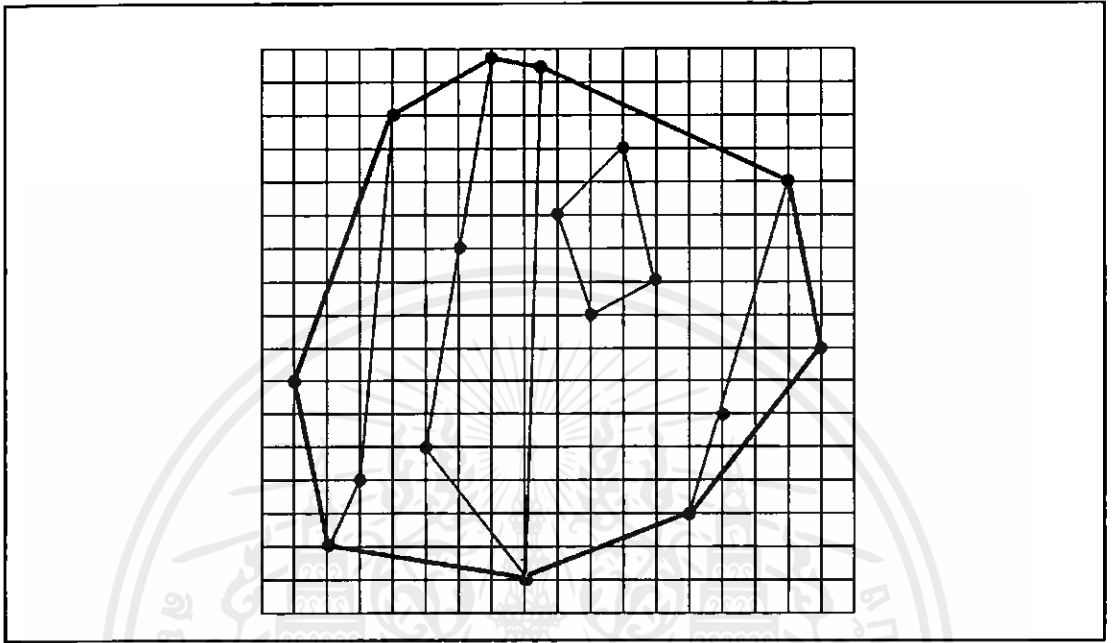
รูปที่ 2.46 การส่งผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 9 ในทุกแถวที่มีการส่งค่าผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนด้านบน ( $Up_{i,j}$ ) ให้ทุกหน่วยประมวลผลในแถวนั้นตรวจสอบว่าข้อมูลที่แต่ละหน่วยประมวลผลเก็บไว้ อยู่ต่ำกว่าหรืออยู่บนเส้นค้ำจุนด้านบนที่ส่งมาให้หรือไม่ ซึ่งถ้าแถวใดตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริงในทุกหน่วยประมวลผล ทำให้ได้ว่าเส้นค้ำจุนด้านบน ( $Up_{i,j}$ ) ที่ส่งมานั้นเป็นเส้นค้ำจุนด้านบนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิตินี้และจุดดังกล่าวก็เป็นผลลัพธ์ที่อยู่ทางด้านบนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (Upper Hull)

และในทุกแถวที่มีการส่งค่าผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนด้านล่าง ( $Low_{i,j}$ ) ให้ทุกหน่วยประมวลผลในแถวนั้นตรวจสอบว่าข้อมูลที่แต่ละหน่วยประมวลผลเก็บไว้ อยู่สูงกว่าหรืออยู่บนเส้นค้ำจุนด้านล่างที่ส่งมาให้หรือไม่ ซึ่งถ้าแถวใดตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริงในทุกหน่วยประมวลผล ทำให้ได้ว่าเส้นค้ำจุนด้านล่าง ( $Low_{i,j}$ ) ที่ส่งมาเป็นเส้นค้ำจุนด้านล่างของคอนเวกซ์ฮัลสองมิตินี้และจุดดังกล่าวก็เป็นผลลัพธ์ที่อยู่ทางด้านล่างของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (Lower Hull)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้เพื่อใช้ในการศึกษาวิจัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้มีการนำข้อมูลไปใช้ในการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเห็นได้ชัดว่าผลลัพธ์ของปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิตินี้ คือการนำเซต  $CH(S_i)$  มากำจัดจุดที่ไม่ใช่ผลลัพธ์ออก ซึ่งให้เรียกว่าเซต  $CH'(S_i)$  แล้วนำมาผลลัพธ์ที่ได้มายูเนียนกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.47



รูปที่ 2.47 ผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่เกิดจากการนำเซตผลลัพธ์แต่ละส่วนมายูเนียนกัน

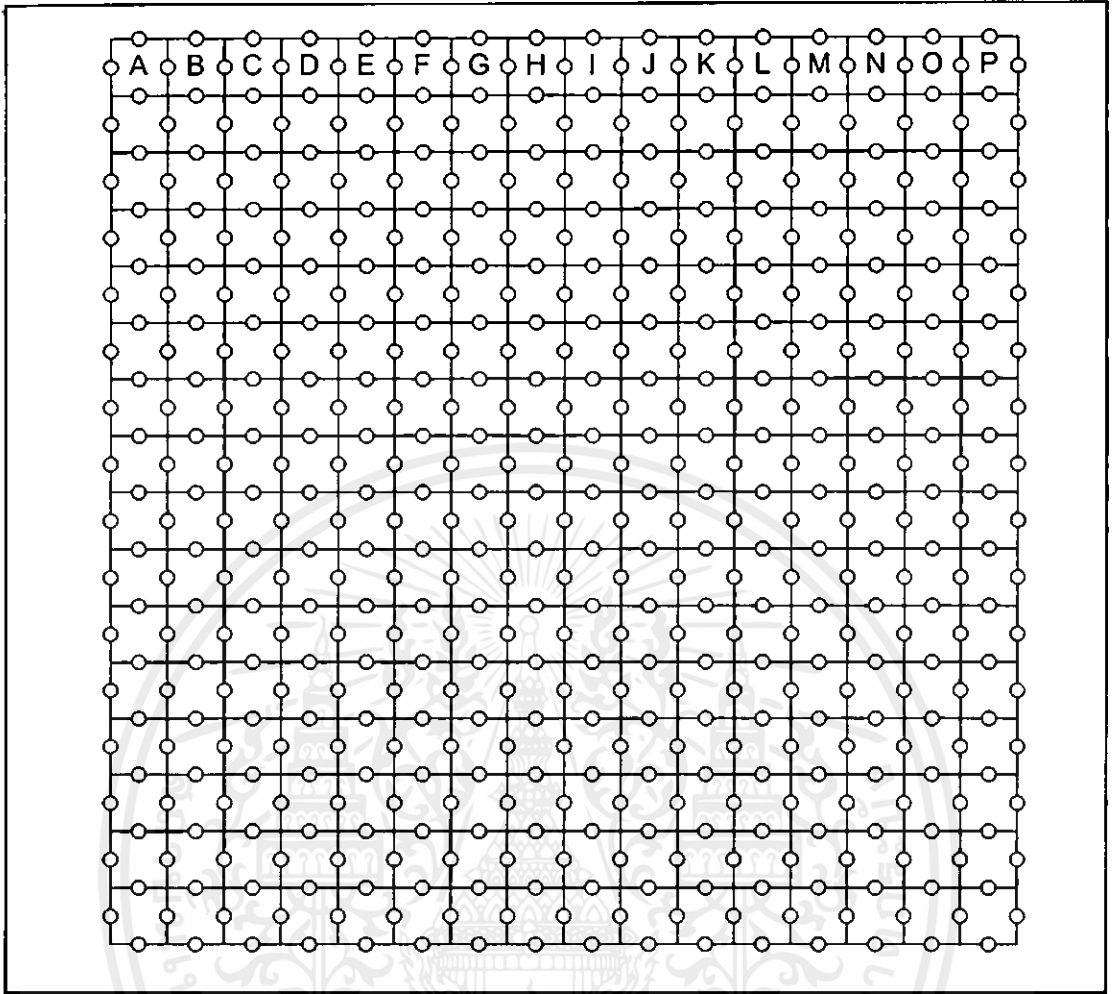
จากขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 9 สามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้ [8]

**ทฤษฎีบทที่ 8** คอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซตของจุด  $N$  จุดที่อยู่ในระนาบสองมิติ ซึ่งเก็บไว้ในหน่วยประมวลผลแรกของระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $N \times N$  โดยหนึ่งหน่วยประมวลผลเก็บ 1 จุด สามารถหาได้ในเวลาคงตัว

### 2.6.2 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุด

กำหนดให้ข้อมูลนำเข้าเป็นเซตของจุดในระนาบสองมิติจำนวน  $N$  จุด ซึ่งรายละเอียดปลีกย่อยเหมือนเซตข้อมูลนำเข้าของขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติในหัวข้อที่ 2.4.1 โดยให้เป็นเซต  $S = \{a_i | 1 \leq i \leq 16\} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$  ซึ่งแต่ละจุดมีพิกัดดังนี้  $A(-6,0)$   $B(-5,-5)$   $C(-4,-3)$   $D(-3,8)$   $E(-2,-2)$   $F(-1,4)$   $G(0,9)$   $H(1,-6)$   $I(2,5)$   $J(3,2)$   $K(4,7)$   $L(5,3)$   $M(6,-4)$   $N(7,-1)$   $O(9,6)$  และ  $P(10,1)$  ซึ่งข้อมูลชุดนี้เป็นชุดเดียวกับข้อมูลนำเข้าในหัวข้อที่ 2.4.2 ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.13 และกำหนดให้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลมีขนาด  $16 \times 16$

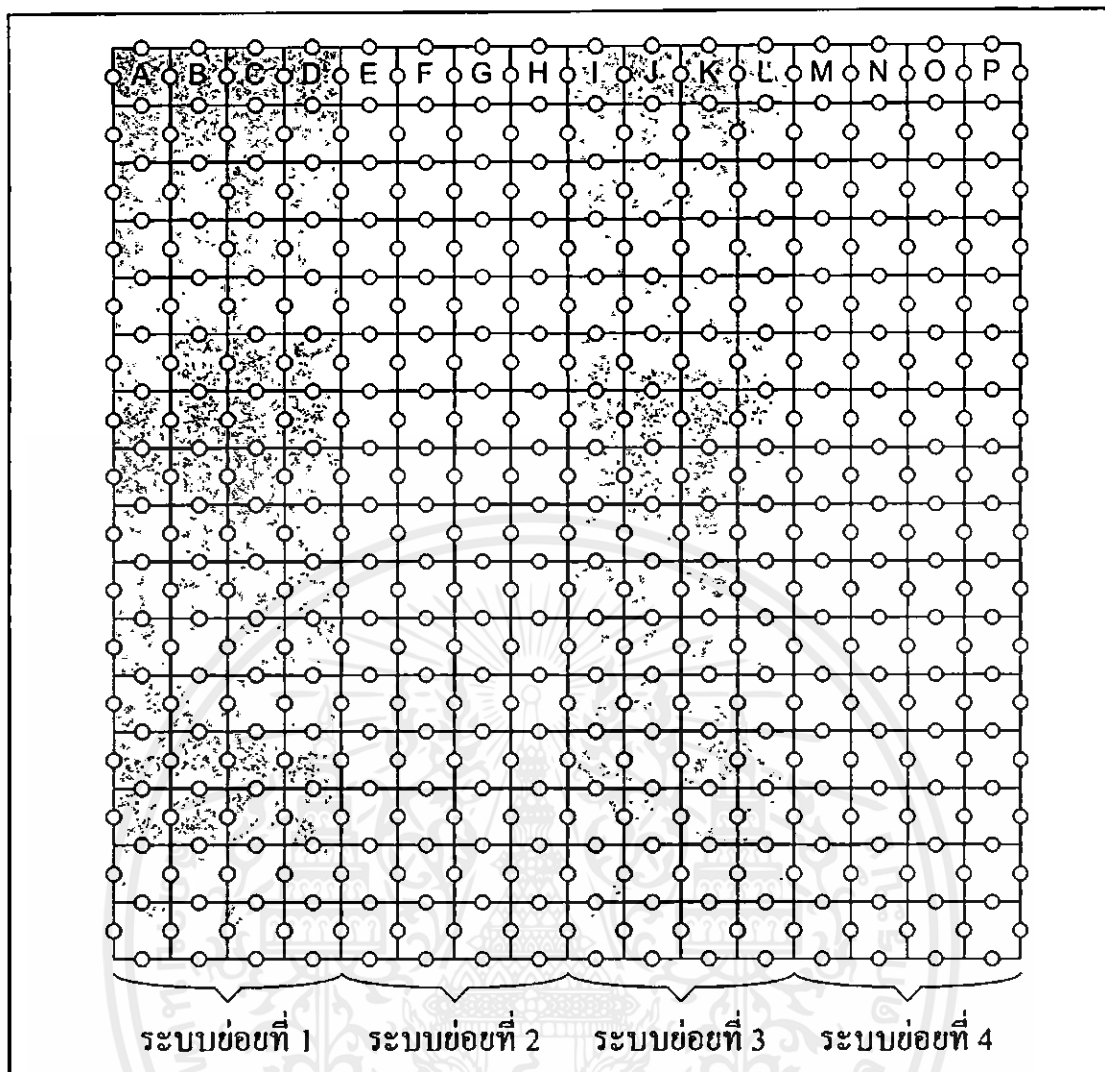
**ขั้นตอนที่ 1** ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$ ,  $P(1,2)$ , ...,  $P(1,16)$  เก็บข้อมูลนำเข้า  $a_j$  เมื่อ  $1 \leq j \leq 16$  ดังแสดงในรูปที่ 2.48



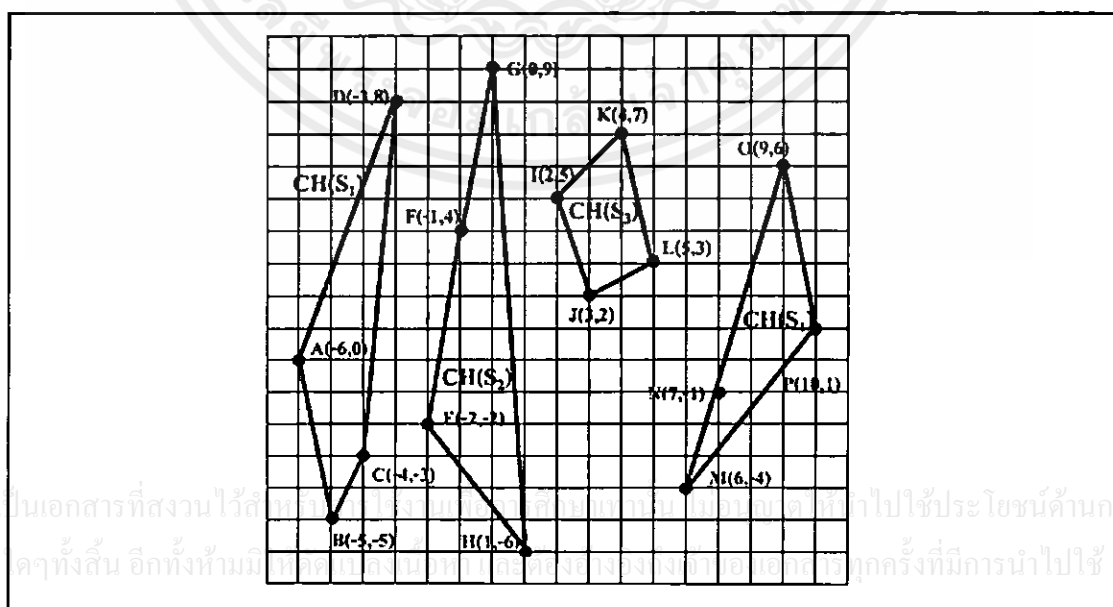
รูปที่ 2.48 หน่วยประมวลผลแถวที่ 1 เก็บข้อมูลนำเข้า  $a_j$

ขั้นตอนที่ 2 แบ่งระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $16 \times 16$  เป็นระบบย่อยขนาด  $16 \times 4$  จำนวน 4 ระบบย่อย โดยแต่ละระบบย่อยประกอบด้วยหน่วยประมวลผล 4 หลัก ทำให้ได้ว่าแต่ละระบบย่อยเก็บข้อมูลนำเข้า 4 จุด ดังแสดงในรูปที่ 2.49

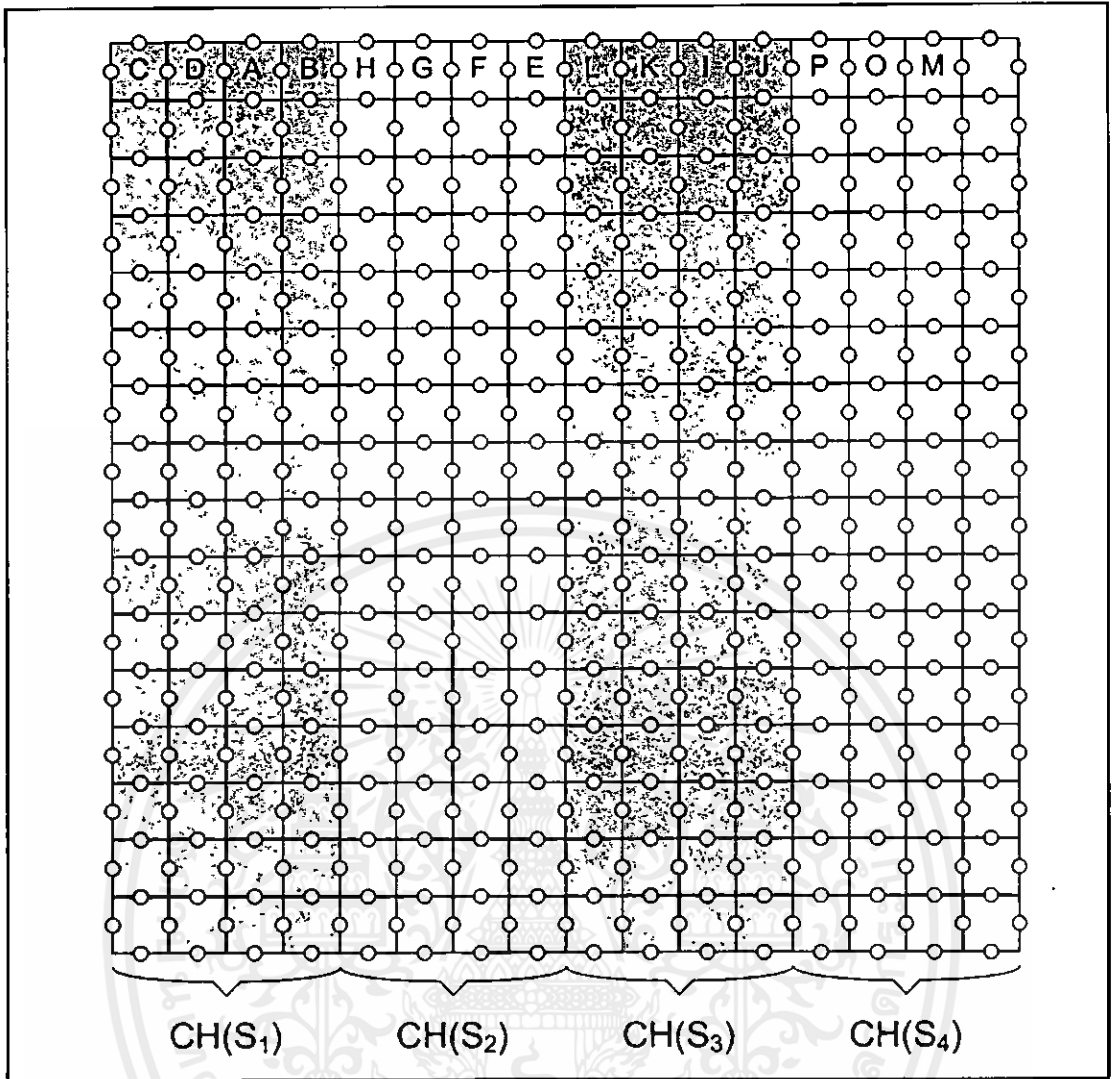
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.49 แต่ละระบบย่อยขนาด  $16 \times 4$  เก็บข้อมูลนำเข้า 4 จุด



รูปที่ 2.50 รูปแสดงผลลัพธ์ของแต่ละกลุ่มข้อมูลย่อยในระนาบสองมิติ



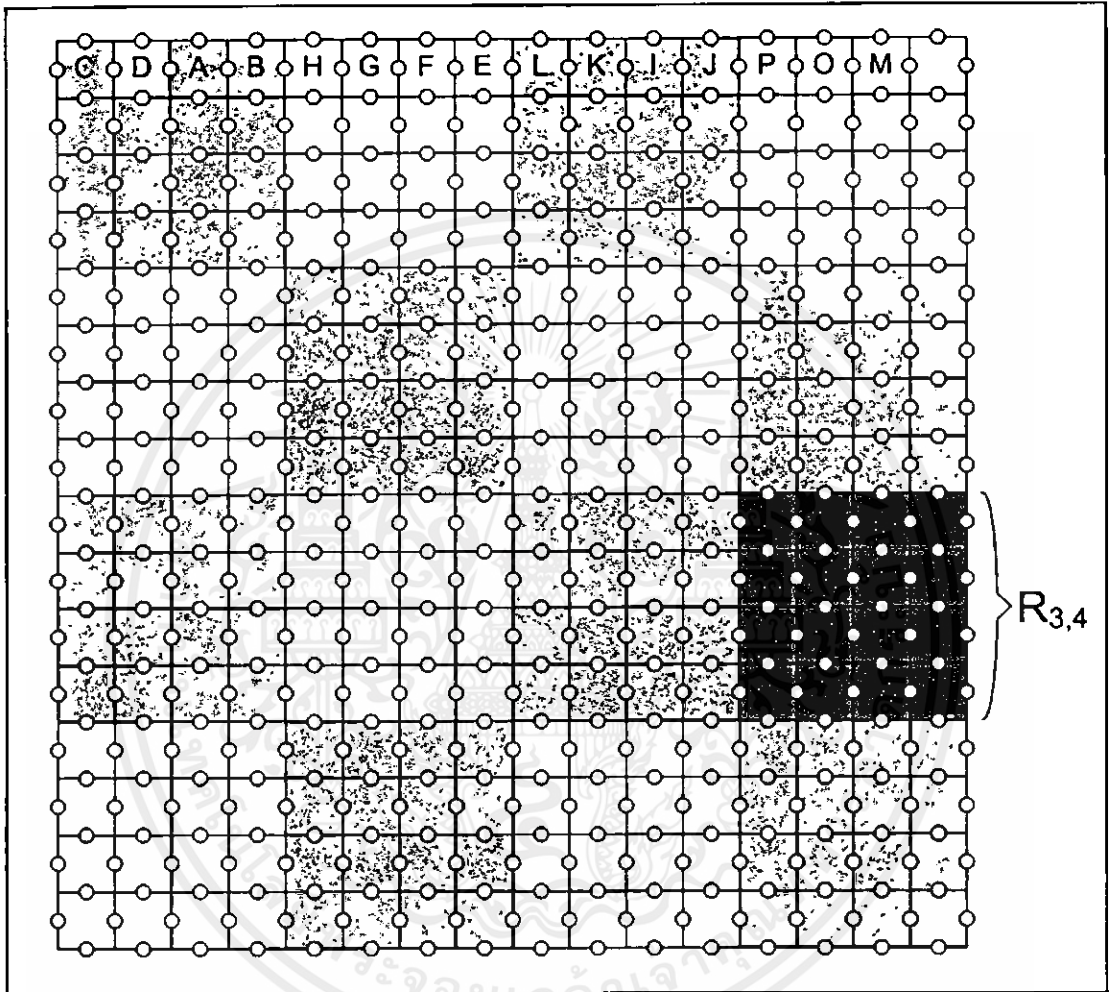
รูปที่ 2.51 การเก็บผลลัพธ์ในแต่ละระบบย่อย

จากทฤษฎีบทที่ 6 จะได้ว่าแต่ละระบบย่อยสามารถหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของจุดจำนวน 4 จุด ที่เก็บไว้ในหน่วยประมวลผลแถวแรกของระบบย่อยขนาด  $16 \times 4$  ได้ในเวลาคงตัว ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเรียงลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกาจากจุดที่มีค่าฟังก์ชัน  $x$  มากที่สุด โดยผลลัพธ์จะเก็บไว้ในหน่วยประมวลผลแถวบนสุดของแต่ละระบบย่อย และให้เรียกผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละระบบย่อยว่า  $CH(S_1)$ ,  $CH(S_2)$ ,  $CH(S_3)$  และ  $CH(S_4)$  ตามลำดับ

จากรูปที่ 2.50 แสดงผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละกลุ่มข้อมูลย่อยในระนาบสองมิติ และรูปที่ 2.51 แสดงการเก็บผลลัพธ์ในแต่ละระบบย่อย

ขั้นตอนที่ 3 แต่ละระบบย่อยขนาด  $16 \times 4$  ให้แบ่งเป็นระบบย่อยอีก ซึ่งระบบย่อยใหม่ที่ได้มีขนาด  $4 \times 4$  มีจำนวนทั้งหมด 16 ระบบย่อย โดยให้เรียกว่า  $R_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq i, j \leq 4$  ซึ่งแต่ละ  $R_{i,j}$  ประกอบด้วยหน่วยประมวลผลที่  $P(a,b)$  โดยที่  $1 + (i-1)4 \leq a \leq i(4)$  และ  $1 + (j-1)4 \leq b \leq j(4)$  ตัวอย่างเช่น  $R_{3,4}$  ประกอบด้วยหน่วยประมวลผลที่  $P(a,b)$  เมื่อ  $1 + (3-1)4 \leq a \leq 3(4)$  และ

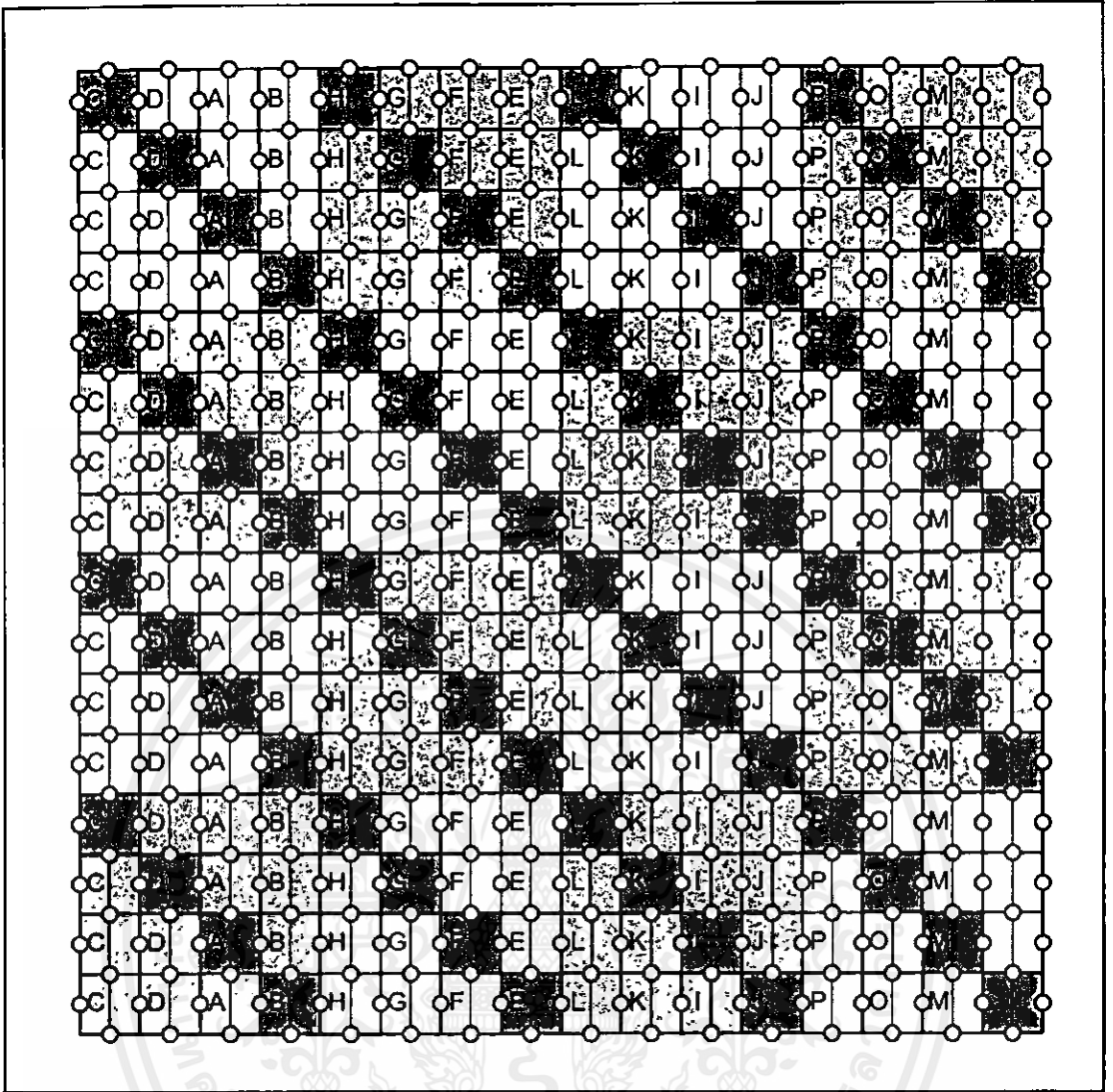
$1+(4-1)4 \leq b \leq 4(4)$  หรือ  $9 \leq a \leq 12$  และ  $13 \leq b \leq 16$  ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(9,13)$ ,  $P(9,14)$ ,  $P(9,15)$ ,  $P(9,16)$ ,  $P(10,13)$ ,  $P(10,14)$ ,  $P(10,15)$ ,  $P(10,16)$ ,  $P(11,13)$ ,  $P(11,14)$ ,  $P(11,15)$ ,  $P(11,16)$ ,  $P(12,13)$ ,  $P(12,14)$ ,  $P(12,15)$  และ  $P(12,16)$  โดยรูปที่ 2.52 แสดงระบบย่อยขนาด  $4 \times 4$  จำนวนทั้งหมด 16 ระบบย่อย



รูปที่ 2.52 ระบบย่อยขนาด  $4 \times 4$  จำนวนทั้งหมด 16 ระบบย่อย

ขั้นตอนที่ 4 จากระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $16 \times 16$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 ที่เก็บค่าผลลัพธ์ของ  $CH(S_1)$ ,  $CH(S_2)$ ,  $CH(S_3)$  และ  $CH(S_4)$  ส่งค่าผลลัพธ์ดังกล่าวไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ทำให้ได้ว่าหน่วยประมวลผลที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  จะเก็บค่า  $CH(S_j)$  ไว้ ดังแสดงในรูปที่ 2.53 ตัวอย่างเช่น ระบบย่อยที่  $R_{2,3}$  เก็บค่า  $CH(S_3)$  เป็นต้น

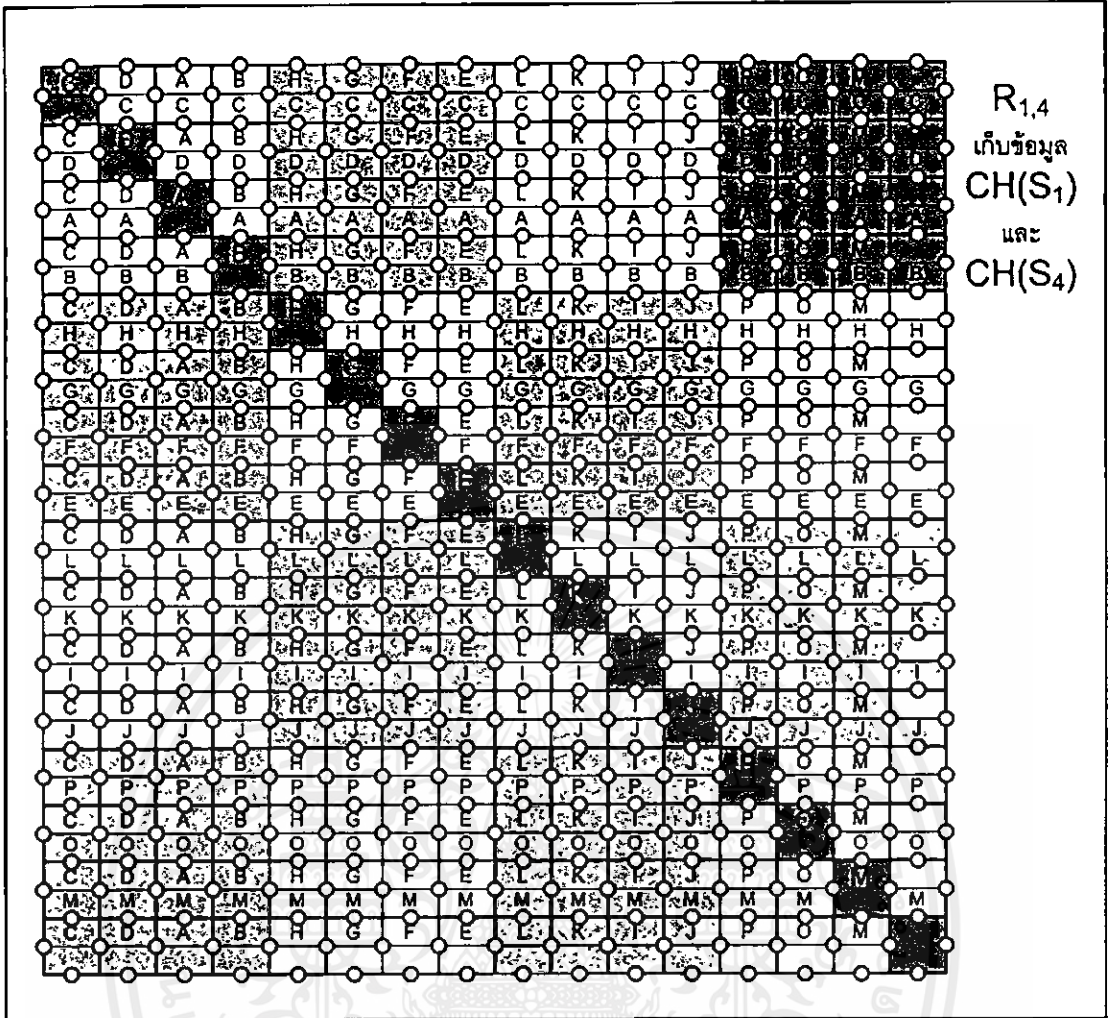
เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.53 การส่งค่าผลลัพธ์ที่ทำให้แต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  เก็บผลลัพธ์  $CH(S_j)$

ขั้นตอนที่ 5 จากระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $16 \times 16$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  เมื่อ  $1 \leq i \leq 16$  ส่งค่าข้อมูลที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวนอน เช่นหน่วยประมวลผลที่  $P(3,3)$  ส่งค่าที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวที่ 3 ซึ่งทำให้ได้ว่าแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  จะเก็บข้อมูล  $CH(S_j)$  และ  $CH(S_i)$  ไว้ เช่น ระบบย่อย  $R_{1,4}$  เก็บข้อมูลของเซต  $CH(S_1)$  และ  $CH(S_4)$  เป็นต้น ดังแสดงในรูปที่ 2.54

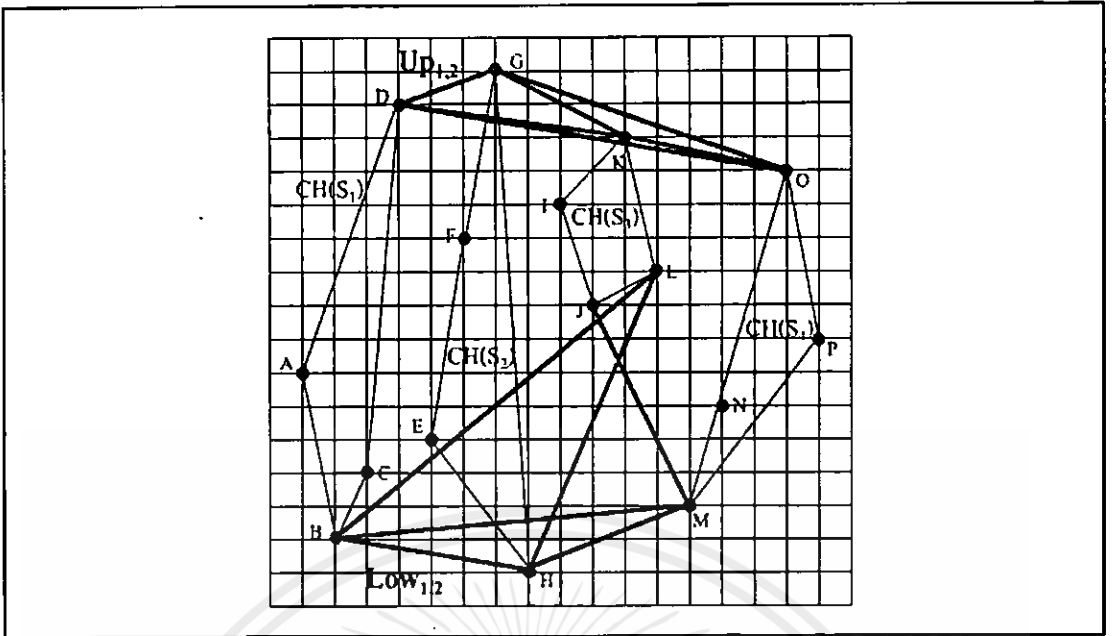
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



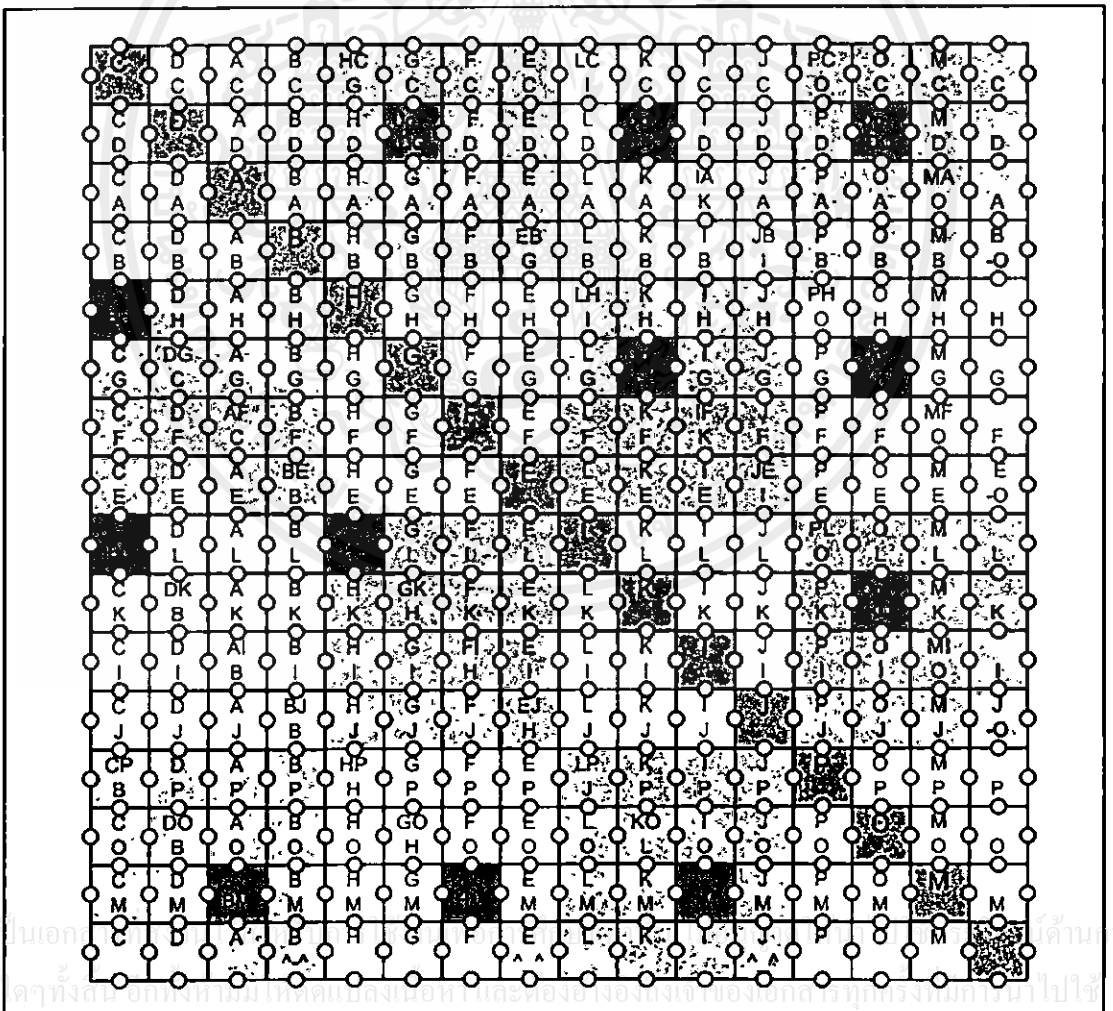
รูปที่ 2.54 การส่งข้อมูลไปในแถวเดียวกันทำให้ระบบย่อย  $R_{i,j}$  เก็บข้อมูล  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$

ขั้นตอนที่ 6 ให้ระบบย่อย  $R_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq i < j \leq 4$  ซึ่งได้แก่ระบบย่อย  $R_{1,2}$ ,  $R_{1,3}$ ,  $R_{1,4}$ ,  $R_{2,3}$ ,  $R_{2,4}$  และ  $R_{3,4}$  หาเส้นค้ำจุนด้านบนของ  $CH(S_i)$  กับ  $CH(S_j)$  ที่แต่ละระบบย่อยเก็บไว้ และให้ระบบย่อย  $R_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq j < i \leq 4$  ซึ่งได้แก่ระบบย่อย  $R_{2,1}$ ,  $R_{3,1}$ ,  $R_{3,2}$ ,  $R_{4,1}$ ,  $R_{4,2}$  และ  $R_{4,3}$  หาเส้นค้ำจุนด้านล่างของ  $CH(S_i)$  กับ  $CH(S_j)$  ที่แต่ละระบบย่อยเก็บไว้ จากทฤษฎีบทที่ 7 จะได้ว่าเส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ  $CH(S_i)$  กับคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ  $CH(S_j)$  สามารถหาได้ในเวลาคงตัวบนระบบย่อยขนาด  $4 \times 4$  โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาเส้นค้ำจุนในหัวข้อที่ 2.5 และให้เส้นค้ำจุนด้านบนของ  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$  เก็บอยู่ในตัวแปร  $Up_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq i < j \leq 4$  และเส้นค้ำจุนด้านล่างของ  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$  เก็บอยู่ในตัวแปร  $Low_{i,j}$  เมื่อ  $1 \leq j < i \leq 4$

จากรูปที่ 2.55 แสดงเส้นค้ำจุนด้านบนและเส้นค้ำจุนด้านล่างทุกเส้นของแต่ละ  $CH(S_i)$  กับ  $CH(S_j)$  และรูปที่ 2.56 แสดงหน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนที่คำนวณได้ในแต่ละระบบย่อย

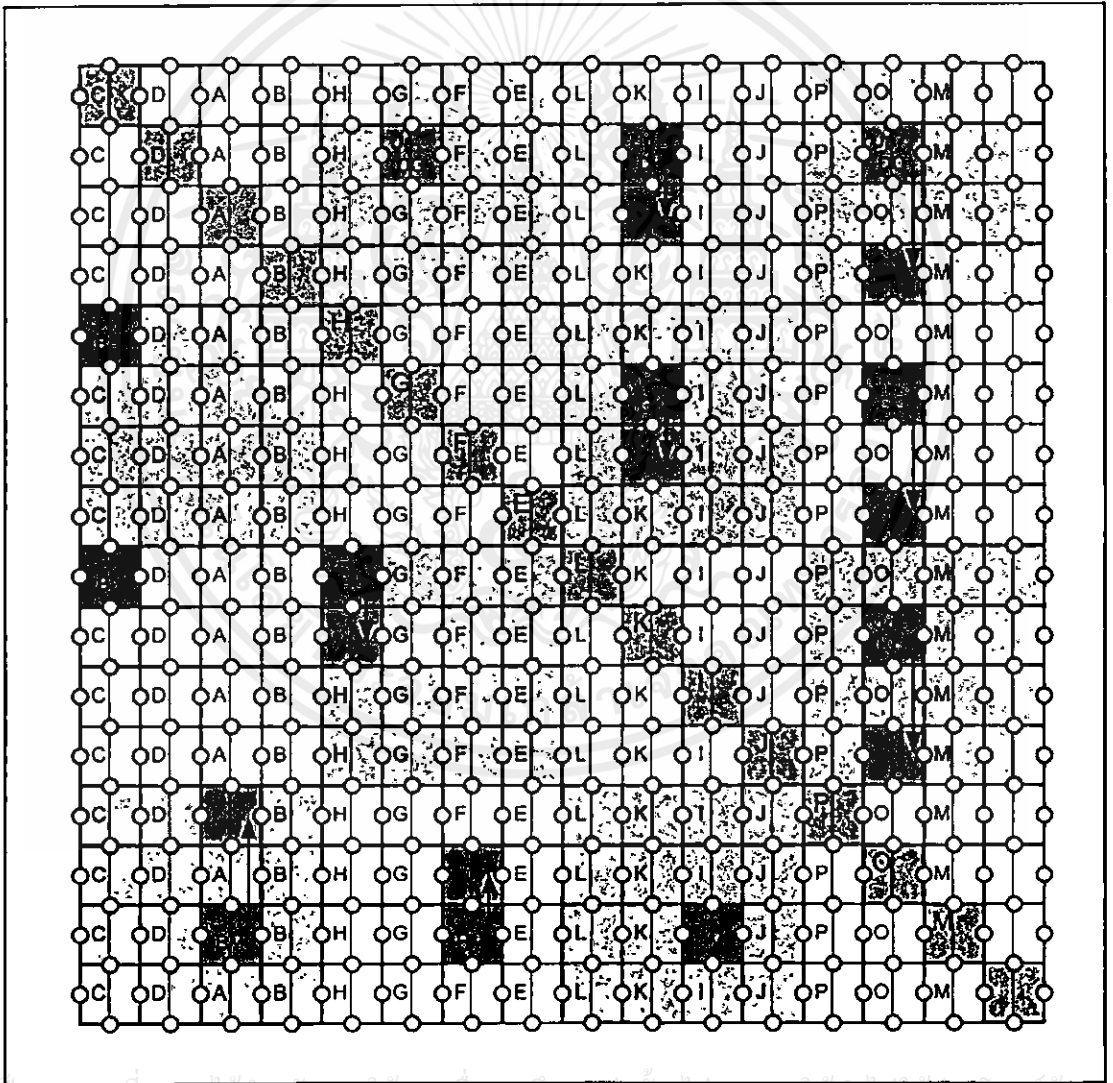


รูปที่ 2.55 เส้นคำนวณด้านบนและเส้นคำนวณด้านล่างของแต่ละคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ



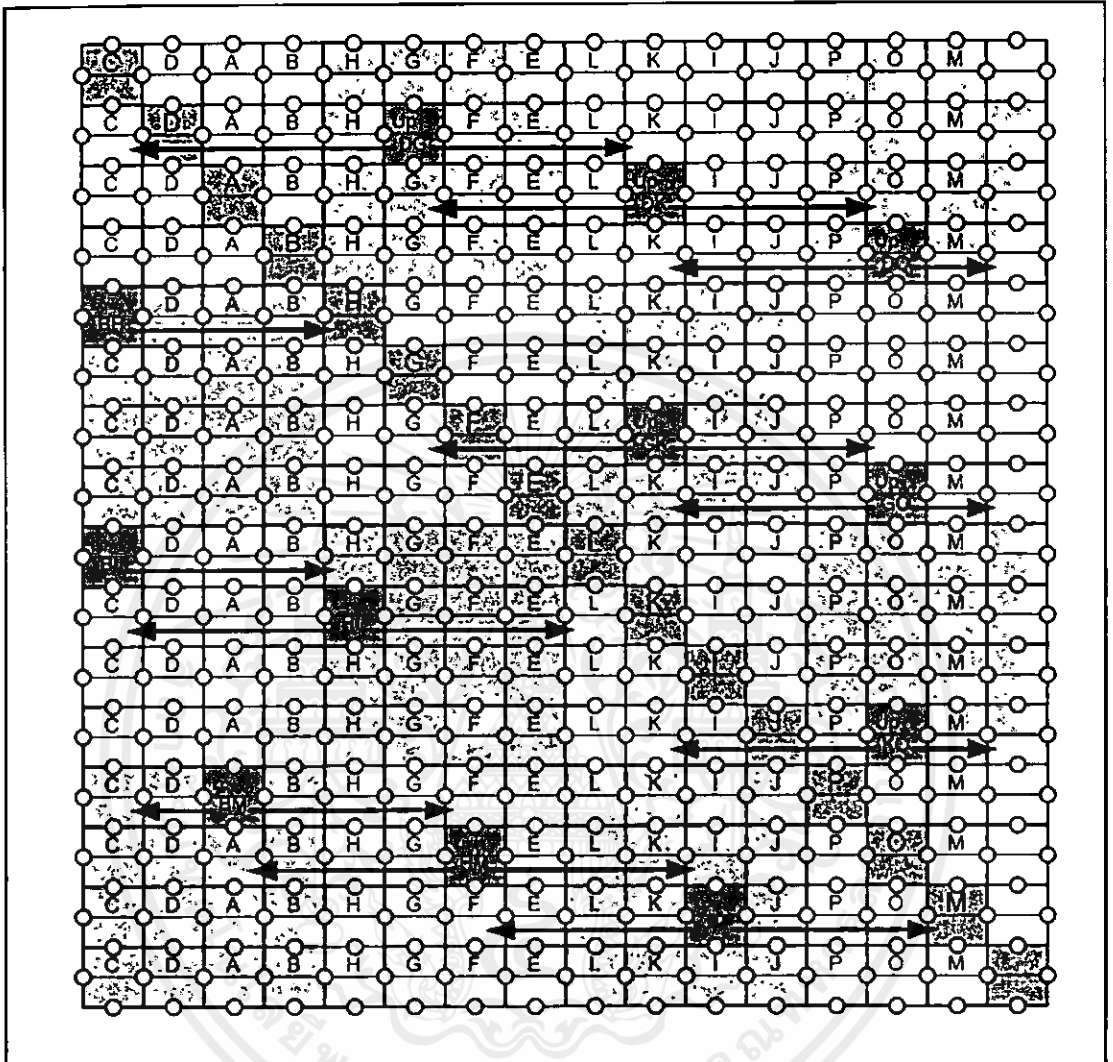
รูปที่ 2.56 แสดงหน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ของเส้นคำนวณที่คำนวณได้ในแต่ละระบบย่อย

ขั้นตอนที่ 7 ในแต่ละระบบย่อย  $R_{i,j}$  เมื่อ  $i \neq j$  ให้หน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 6 ส่งผลลัพธ์ที่ได้ไปยังหน่วยประมวลผลแถวที่  $j$  ของระบบย่อยนั้น โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง เช่น ระบบย่อยที่  $R_{1,3}$  หน่วยประมวลผลที่  $P(2,10)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ของเส้นคำนวณด้านบน จึงให้หน่วยประมวลผลที่  $P(2,10)$  ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลในแถวที่ 3 ของระบบย่อยที่  $R_{1,3}$  ซึ่งก็คือหน่วยประมวลผลที่  $P(3,10)$  หรือระบบย่อยที่  $R_{4,1}$  หน่วยประมวลผลที่  $P(15,3)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ของเส้นคำนวณด้านล่าง จึงให้หน่วยประมวลผลที่  $P(15,3)$  ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลในแถวที่ 1 ของระบบย่อยที่  $R_{4,1}$  ซึ่งก็คือหน่วยประมวลผลที่  $P(13,3)$  เป็นต้น รูปที่ 2.57 แสดงการส่งผลลัพธ์ของเส้นคำนวณไปยังหน่วยประมวลผลในแถวที่  $j$  ของแต่ละระบบย่อยที่  $R_{i,j}$  เมื่อ  $i \neq j$



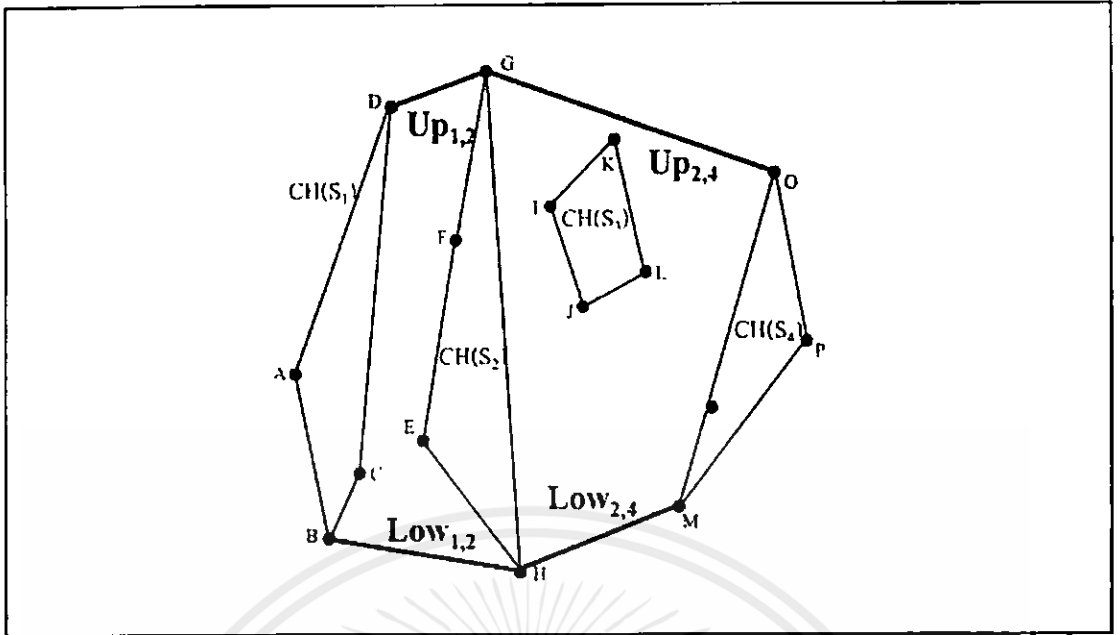
รูปที่ 2.57 การส่งผลลัพธ์ของเส้นคำนวณไปยังหน่วยประมวลผลแถวที่  $j$  ของแต่ละระบบย่อย

ขั้นตอนที่ 8 ให้แต่ละหน่วยประมวลผลที่รับค่าผลลัพธ์ในขั้นตอนที่ 7 ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวนอนดังแสดงในรูปที่ 2.58



รูปที่ 2.58 หน่วยประมวลผลที่เก็บผลลัพธ์ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 9 จากระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $16 \times 16$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในแถวที่ 2, 3, 4, 7, 8 และ 12 ตรวจสอบว่าจุดที่แต่ละหน่วยประมวลผลเก็บไว้ อยู่ต่ำกว่าหรืออยู่บนเส้นค่าจุนด้านบน ( $Up_{i,j}$ ) ที่ส่งมาหรือไม่ และให้ทุกหน่วยประมวลผลในแถวที่ 5, 9, 10, 13, 14 และ 15 ตรวจสอบว่าจุดที่แต่ละหน่วยประมวลผลเก็บไว้ อยู่สูงกว่าหรืออยู่บนเส้นค่าจุนด้านล่าง ( $Low_{i,j}$ ) ที่ส่งมาหรือไม่ จากรูปที่ 2.59 แสดงให้เห็นว่าจุดทุกจุดอยู่ต่ำกว่าหรืออยู่บนเส้นค่าจุนด้านบน  $Up_{1,2}$  และ  $Up_{2,4}$  และแสดงให้เห็นว่าจุดทุกจุดอยู่สูงกว่าหรืออยู่บนเส้นค่าจุนด้านล่าง  $Low_{1,2}$  และ  $Low_{2,4}$  ซึ่งได้ว่าทุกหน่วยประมวลผลในแถวที่ 2, 8, 5 และ 14 ตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริง



รูปที่ 2.59 แสดงเส้นคำนวณด้านบนและเส้นคำนวณด้านล่างของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (CH(S))

ผลลัพธ์ของปัญหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิตินี้ คือการนำเซต  $CH(S_i)$  มาจำกัดจุดที่ไม่ใช่ผลลัพธ์ออก ซึ่งให้เรียกว่าเซต  $CH'(S_1)$ ,  $CH'(S_2)$ ,  $CH'(S_3)$  และ  $CH'(S_4)$  ตามลำดับ แล้วนำเซตเหล่านี้มายูเนียนกันโดยที่

เซต  $CH'(S_1)$  คือเซต  $CH(S_1)$  ที่จำกัดจุด C ออก

เซต  $CH'(S_2)$  คือเซต  $CH(S_2)$  ที่จำกัดจุด E และจุด F ออก

เซต  $CH'(S_3)$  คือเซต  $CH(S_3)$  ที่จำกัดจุดออกทุกจุด

และเซต  $CH'(S_4)$  คือเซต  $CH(S_4)$  ที่ไม่จำกัดจุดใดออก

ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติดังนี้

- $CH(S) = CH'(S_1) \cup CH'(S_2) \cup CH'(S_3) \cup CH'(S_4)$
- $CH(S) = \{D, A, B\} \cup \{G, H\} \cup \{\} \cup \{P, O, M\}$
- $CH(S) = \{D, A, B, G, H, P, O, M\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

## การหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน

งานวิจัยนี้เป็นการวิจัยที่นำเสนอขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล โดยผู้วิจัยได้ศึกษาขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดที่มีผู้แนะนำเอาไว้แล้ว (กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 2.6) และนำขั้นตอนวิธีดังกล่าวมาพัฒนาต่อ ซึ่งขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดใช้จำนวนหน่วยประมวลผลเท่ากับ  $N \times N$  เมื่อผู้วิจัยนำมาพัฒนาต่อทำให้ได้ขั้นตอนวิธีใหม่ที่ใช้จำนวนหน่วยประมวลผลลดลง โดยใช้จำนวนหน่วยประมวลผลเท่ากับ  $N \times \sqrt{N}$  ซึ่งขั้นตอนวิธีใหม่ที่ได้ใช้เทคนิคแบ่งและได้ชัยชนะมาแบ่งข้อมูลนำเข้า ใช้ขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของข้อมูลย่อยแต่ละชุด และหาเส้นก้ำจุนระหว่างแต่ละเซตของผลลัพธ์ย่อยที่ได้ โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาเส้นก้ำจุนดังที่ได้แนะนำไว้ในหัวข้อที่ 2.5 โดยขั้นตอนนี้จะทำเป็นรอบการทำงาน และขั้นตอนสุดท้ายจะเป็นการนำผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละรอบการทำงานมาผสานกัน ทำให้ได้คอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซตข้อมูลนำเข้า

### 3.1 ขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด $N \times \sqrt{N}$

กำหนดให้เซตของข้อมูลนำเข้าคือ เซต  $S = \{a_i | 1 \leq i \leq N\}$  เป็นเซตของจุดในระนาบสองมิติจำนวน  $N$  จุด ซึ่งรายละเอียดปลีกย่อยเหมือนเซตข้อมูลนำเข้าของขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ ในหัวข้อที่ 2.4.1 และกำหนดให้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลมีขนาด  $N \times \sqrt{N}$  จะได้ว่าขั้นตอนวิธีในการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิตินี้ดังนี้

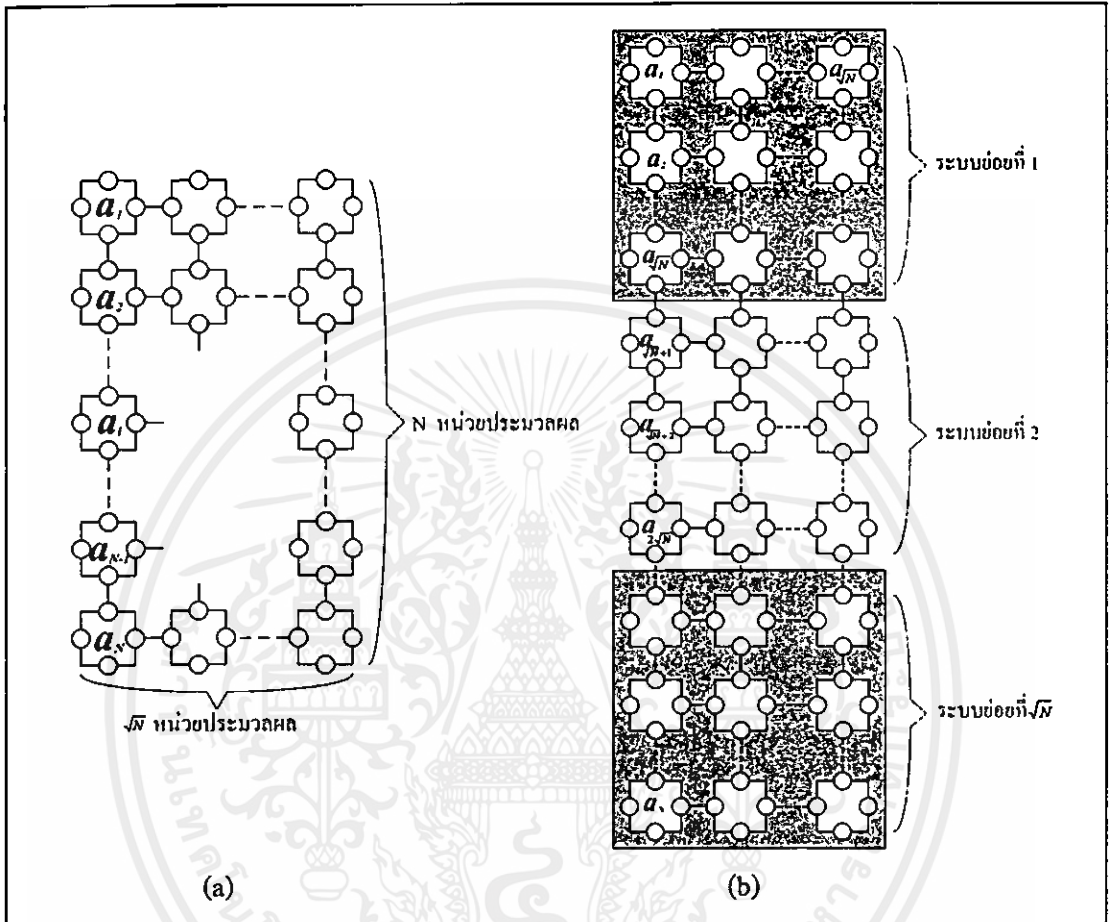
**ขั้นตอนที่ 1** การรับข้อมูลนำเข้าจำนวน  $N$  ค่า

ให้หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(i,1)$  เก็บข้อมูลนำเข้า  $a_i$  เมื่อ  $1 \leq i \leq N$  ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (a)

**ขั้นตอนที่ 2** การหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละชุดข้อมูลย่อย

**ขั้นตอนที่ 2.1** แบ่งข้อมูลนำเข้าขนาด  $N$  ค่า เป็นชุดข้อมูลย่อยขนาด  $\sqrt{N}$  ค่า จำนวนทั้งหมด  $\sqrt{N}$  ชุด โดยที่ข้อมูลย่อยชุดที่  $k$  ประกอบด้วยข้อมูล  $a_{1+(k-1)\sqrt{N}}$  ถึง  $a_{k\sqrt{N}}$  นั่นคือข้อมูลย่อยชุดที่ 1 ประกอบด้วยข้อมูล  $a_1$  ถึง  $a_{\sqrt{N}}$  ข้อมูลย่อยชุดที่ 2 ประกอบด้วยข้อมูล  $a_{\sqrt{N}+1}$  ถึง  $a_{2\sqrt{N}}$  จนถึงข้อมูลย่อยชุดที่  $\sqrt{N}$  ประกอบด้วยข้อมูล  $a_{1+(\sqrt{N}-1)\sqrt{N}}$  ถึง  $a_N$  และแบ่งระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลขนาด  $N \times \sqrt{N}$  เป็นระบบย่อยขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  จำนวนทั้งหมด  $\sqrt{N}$  ระบบย่อย โดยระบบย่อยที่ 1 ประกอบด้วย หน่วยประมวลผล  $\sqrt{N}$  แถวแรก ระบบย่อยที่ 2

ประกอบด้วยหน่วยประมวลผล  $\sqrt{N}$  แถวถัดไป จนถึงระบบย่อยที่  $\sqrt{N}$  ประกอบด้วยหน่วยประมวลผล  $\sqrt{N}$  แถวสุดท้าย ซึ่งระบบย่อยที่ 1 เก็บข้อมูลย่อยชุดที่ 1 ระบบย่อยที่ 2 เก็บข้อมูลย่อยชุดที่ 2 ไปจนถึงระบบย่อยที่  $\sqrt{N}$  เก็บข้อมูลย่อยชุดที่  $\sqrt{N}$  ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (b)

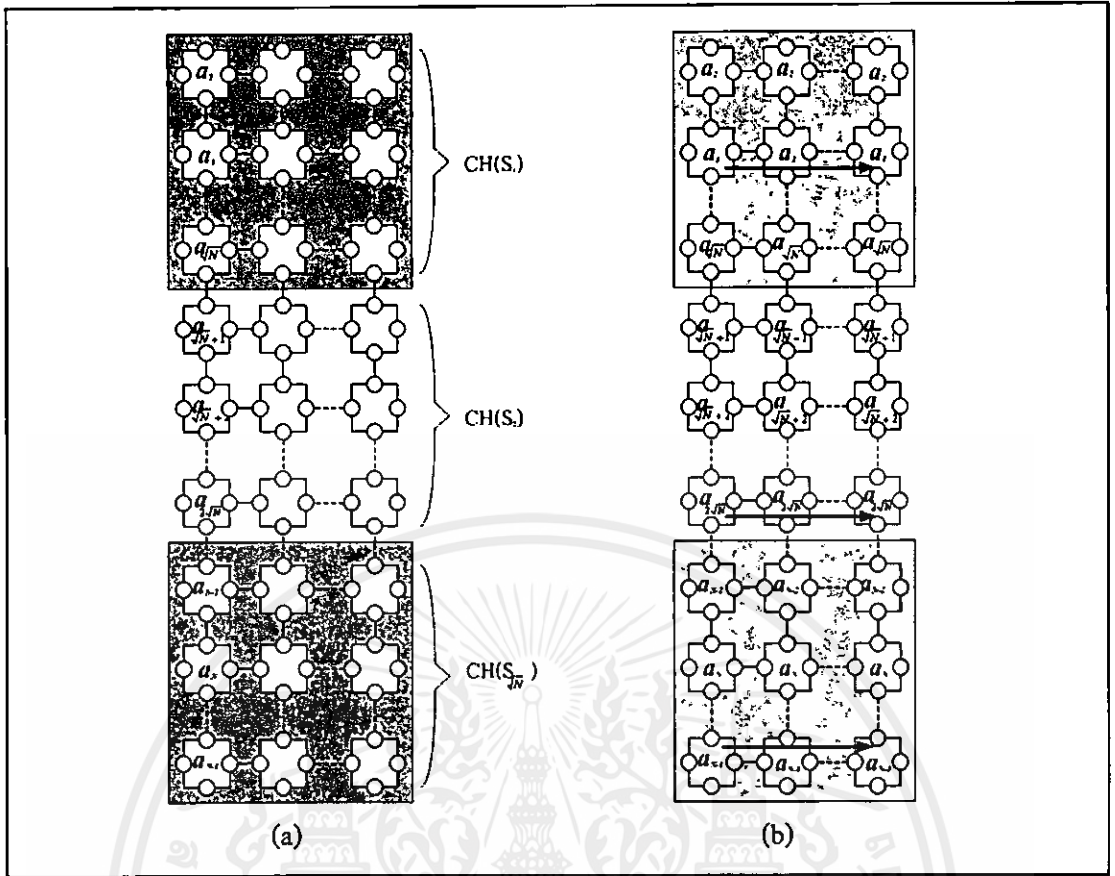


รูปที่ 3.1 (a) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เก็บข้อมูลนำเข้า  $a_i$  เมื่อ  $1 \leq i \leq N$  (b) ระบบย่อยขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  เก็บข้อมูลนำเข้าขนาด  $\sqrt{N}$  ค่า จำนวนทั้งหมด  $\sqrt{N}$  ระบบย่อย

ขั้นตอนที่ 2.2 จากทฤษฎีบทที่ 8 หัวข้อที่ 2.6.1 ได้ว่าแต่ละระบบย่อยขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  สามารถหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของข้อมูลนำเข้าขนาด  $\sqrt{N}$  ค่าที่เก็บไว้ได้ในเวลาคงตัว โดยเก็บผลลัพธ์เรียงลำดับจุดแบบทวนเข็มนาฬิกาไว้ในหน่วยประมวลผลหลักที่ 1 ของแต่ละระบบย่อย และเรียกผลลัพธ์ที่ได้จากระบบย่อยที่  $k$  ว่า  $CH(S_k)$  เมื่อ  $1 \leq k \leq \sqrt{N}$  ดังแสดงในรูปที่ 3.2 (a)

ขั้นตอนที่ 2.3 จากระบบเครือข่ายขนาด  $N \times \sqrt{N}$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ส่งค่าผลลัพธ์ที่ได้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 3.2 (b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 การหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (a) คอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละระบบย่อย  
(b) การส่งผลลัพธ์ไปในแถวเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวนอน

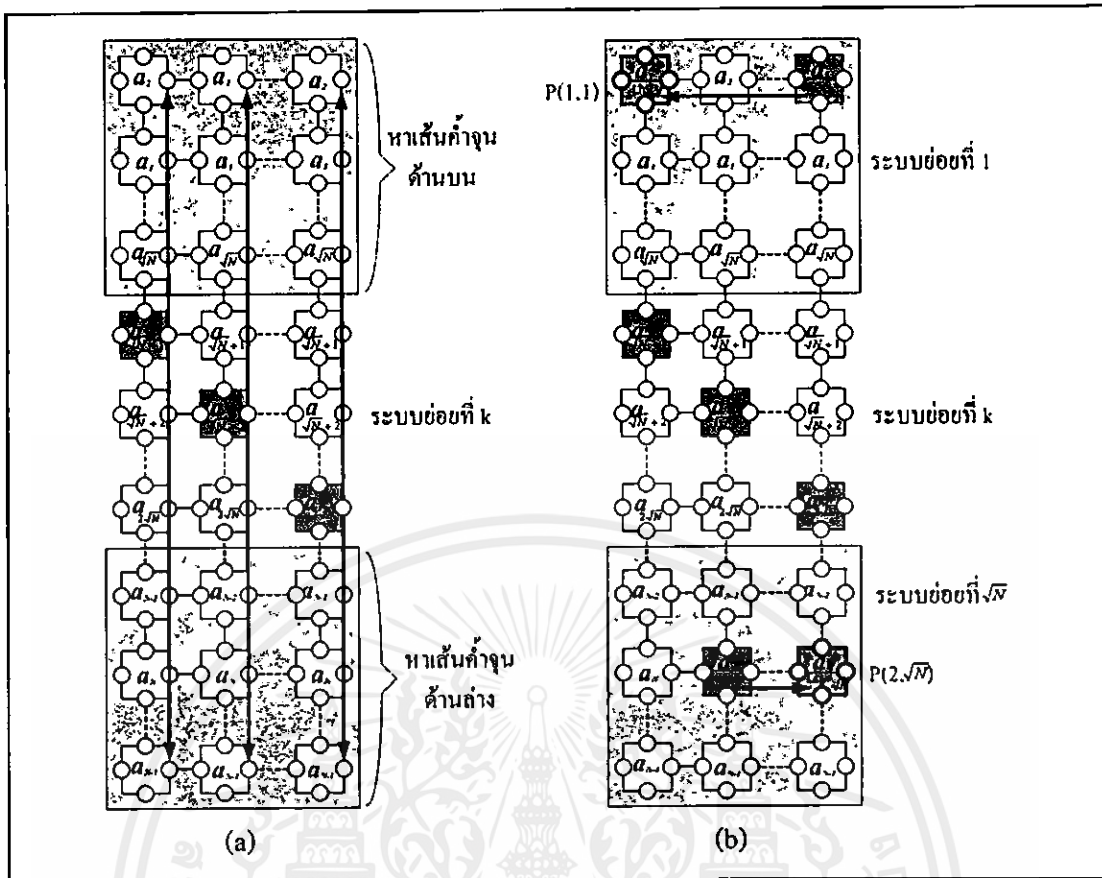
**ขั้นตอนที่ 3** การหาเส้นค้ำจุนด้านบนและเส้นค้ำจุนด้านล่างระหว่างแต่ละ  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$  เมื่อ  $1 \leq i, j \leq \sqrt{N}$  และ  $i \neq j$  ซึ่งขั้นตอนนี้จะทำการทำงาน เริ่มทำจากรอบที่  $k=1$  จนถึงรอบที่  $k=\sqrt{N}$  โดยรอบการทำงานที่  $k$  มีขั้นตอนการทำงานดังนี้

**รอบการทำงานที่  $k$**

**ขั้นตอนที่ 3.1** จากระบบเครือข่ายขนาด  $N \times \sqrt{N}$  ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i, i)$  ของระบบย่อยที่  $k$  ส่งค่า  $CH(S_k)$  ที่เก็บไว้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวดิ่ง ดังแสดงในรูปที่ 3.3 (a)

**ขั้นตอนที่ 3.2** ใช้ทฤษฎีบทที่ 7 ในหัวข้อที่ 2.5.1 หาเส้นค้ำจุนระหว่างแต่ละระบบย่อยได้ในเวลาคงตัว โดยหาเส้นค้ำจุนดังนี้

- เมื่อ  $x < k$  ให้ระบบย่อยที่  $x$  หาเส้นค้ำจุนด้านบนระหว่างคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ  $CH(S_x)$  กับ  $CH(S_k)$
- เมื่อ  $x > k$  ให้ระบบย่อยที่  $x$  หาเส้นค้ำจุนด้านล่างระหว่างคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ  $CH(S_x)$  กับ  $CH(S_k)$  ดังแสดงในรูปที่ 3.3 (a)



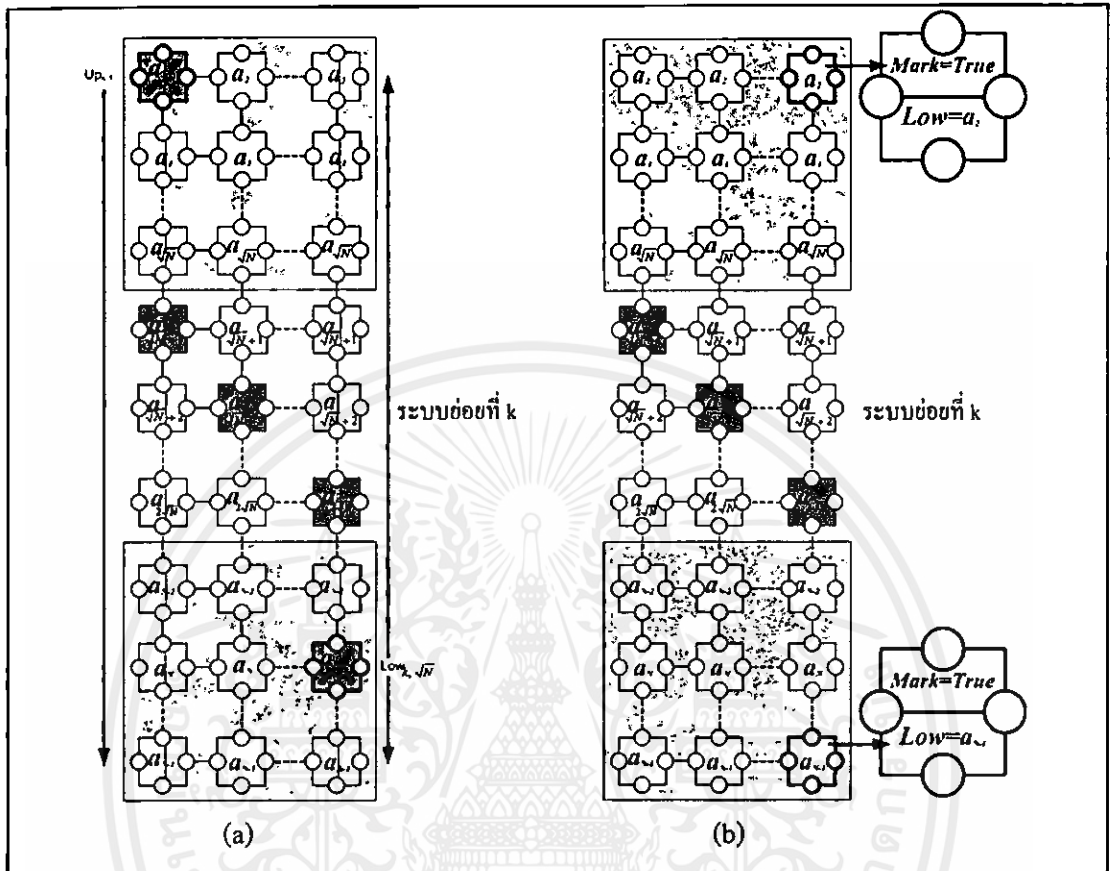
รูปที่ 3.3 (a) การส่งค่าผลลัพธ์และการหาเส้นค้ำจุนของการทำงานรอบที่  $k$   
 (b) การส่งผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, x)$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน

ขั้นตอนที่ 3.3 ในแต่ละระบบย่อย ให้ส่งผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนที่หาได้ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i, x)$  เมื่อ  $i$  เป็นแถวที่พบผลลัพธ์และ  $x$  เป็นระบบย่อย ตัวอย่างเช่น หน่วยประมวลผลที่  $P(1, \sqrt{N})$  ของระบบย่อยที่ 1 พบเส้นค้ำจุนด้านบน ให้หน่วยประมวลผลดังกล่าวส่งผลลัพธ์ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(1, 1)$  ดังแสดงในรูปที่ 3.3 (b)

ขั้นตอนที่ 3.4 จากระบบเครือข่ายขนาด  $N \times \sqrt{N}$  ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i, x)$  ส่งค่าผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (หลักที่  $x$ ) โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.4 (a)

ขั้นตอนที่ 3.5 จากระบบเครือข่ายขนาด  $N \times \sqrt{N}$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในแต่ละหลักตรวจสอบค่าที่เก็บไว้ว่าต่ำกว่าหรืออยู่บนเส้นค้ำจุนด้านบนที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ ถ้าหลักใดตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริงในทุกหน่วยประมวลผล จะได้ว่าเส้นค้ำจุนด้านบนในหลักนั้น เป็นเส้นค้ำจุนด้านบนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต  $S$  ในทำนองเดียวกัน ให้ทุกหน่วยประมวลผลในแต่ละหลักตรวจสอบค่าที่เก็บไว้ว่าสูงกว่าหรืออยู่บนเส้นค้ำจุนด้านล่างที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ ถ้าหลักใดตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริงใน

ทุกหน่วยประมวลผล จะ ได้ว่าเส้นค้ำจุนด้านล่าง ในหลักนั้น เป็นเส้นค้ำจุนด้านล่างของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต S



รูปที่ 3.4 (a) หน่วยประมวลผลที่  $P(i, x)$  ส่งค่าผลลัพธ์ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่  $x$   
 (b) การเซตค่าตัวแปรของหน่วยประมวลผลที่เก็บจุดที่อยู่บนเส้นค้ำจุน

ขั้นตอนที่ 3.6 ให้ทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ตรวจสอบพบเส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต S ตรวจสอบว่าค่าที่เก็บไว้อยู่บนเส้นค้ำจุนหรือไม่ ให้หน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบเงื่อนไขดังกล่าวเซตค่า  $Mark = true$  และเซตค่าตัวแปร  $Up$  เป็นค่าที่เก็บไว้ในกรณีที่เส้นค้ำจุนที่พบเป็นเส้นค้ำจุนด้านบน หรือเซตค่าตัวแปร  $Low$  เป็นค่าที่เก็บไว้ในกรณีที่เส้นค้ำจุนที่พบเป็นเส้นค้ำจุนด้านล่าง จากรูปที่ 3.4 (b) พบว่าหน่วยประมวลผลในหลักที่  $\sqrt{N}$  ตรวจสอบพบเส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต S และพบว่าจุดที่เก็บอยู่ในหน่วยประมวลผลที่  $P(1, \sqrt{N})$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(\sqrt{N}, \sqrt{N})$  อยู่บนเส้นค้ำจุนดังกล่าว ดังนั้นหน่วยประมวลผลเซตค่าดังแสดงในรูป

ขั้นตอนที่ 3.7 จากระบบเครือข่ายขนาด  $N \times \sqrt{N}$  ให้แถวที่ตรวจสอบพบว่ามีหน่วยประมวลผลที่มีค่า  $Mark = true$  ให้หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ของแถวนั้น เซตค่า  $Mark = true$  และเซตค่าตัวแปร  $Up$  และ  $Low$  ตามหน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบเงื่อนไข

#### ขั้นตอนที่ 4 การรวมผลลัพธ์จากทุกรอบการทำงาน

ผลลัพธ์จากทุกรอบการทำงานจะเก็บอยู่ในหน่วยประมวลผลที่มีค่า  $Mark = true$  ในหลักที่ 1

#### ขั้นตอนที่ 5 การรวมผลลัพธ์ที่เป็นจุดของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

ในแต่ละระบบย่อยที่  $x$  ให้เซตค่าตามเงื่อนไขต่อไปนี้

เมื่อ  $x = 1$  ให้  $P(a,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า Up และ  $P(b,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า Low

เมื่อ  $a < b$  ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(a+1,1)$  จนถึงหน่วยประมวลผลที่  $P(b-1,1)$  เซตค่า  $Mark = true$

เมื่อ  $a = b$  ไม่ต้องเซตค่าใดๆ

เมื่อ  $a > b$  ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(a+1,1)$  จนถึงหน่วยประมวลผลที่  $P(\sqrt{N},1)$  เซตค่า  $Mark = true$

เมื่อ  $x = \sqrt{N}$  ให้  $P(a,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า Up และ  $P(b,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า Low

เมื่อ  $a < b$  ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$  จนถึงหน่วยประมวลผลที่  $P(a-1,1)$  เซตค่า  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(b+1,1)$  จนถึงหน่วยประมวลผลที่  $P(\sqrt{N},1)$  เซตค่า  $Mark = true$

เมื่อ  $a = b$  ไม่ต้องเซตค่าใดๆ

เมื่อ  $a > b$  ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(b+1,1)$  จนถึงหน่วยประมวลผลที่  $P(a-1,1)$  เซตค่า  $Mark = true$

เมื่อ  $1 < x < \sqrt{N}$

ให้  $P(a_1,1), P(a_2,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า Up ตัวที่ 1 และตัวที่ 2 ตามลำดับ และ  $P(b_1,1), P(b_2,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า Low ตัวที่ 1 และตัวที่ 2 ตามลำดับ เมื่อ  $a_1 < a_2$  และ  $b_1 < b_2$

ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(a_1+1,1)$  จนถึงหน่วยประมวลผลที่  $P(a_2-1,1)$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(b_1+1,1)$  จนถึงหน่วยประมวลผลที่  $P(b_2-1,1)$  เซตค่า  $Mark = true$

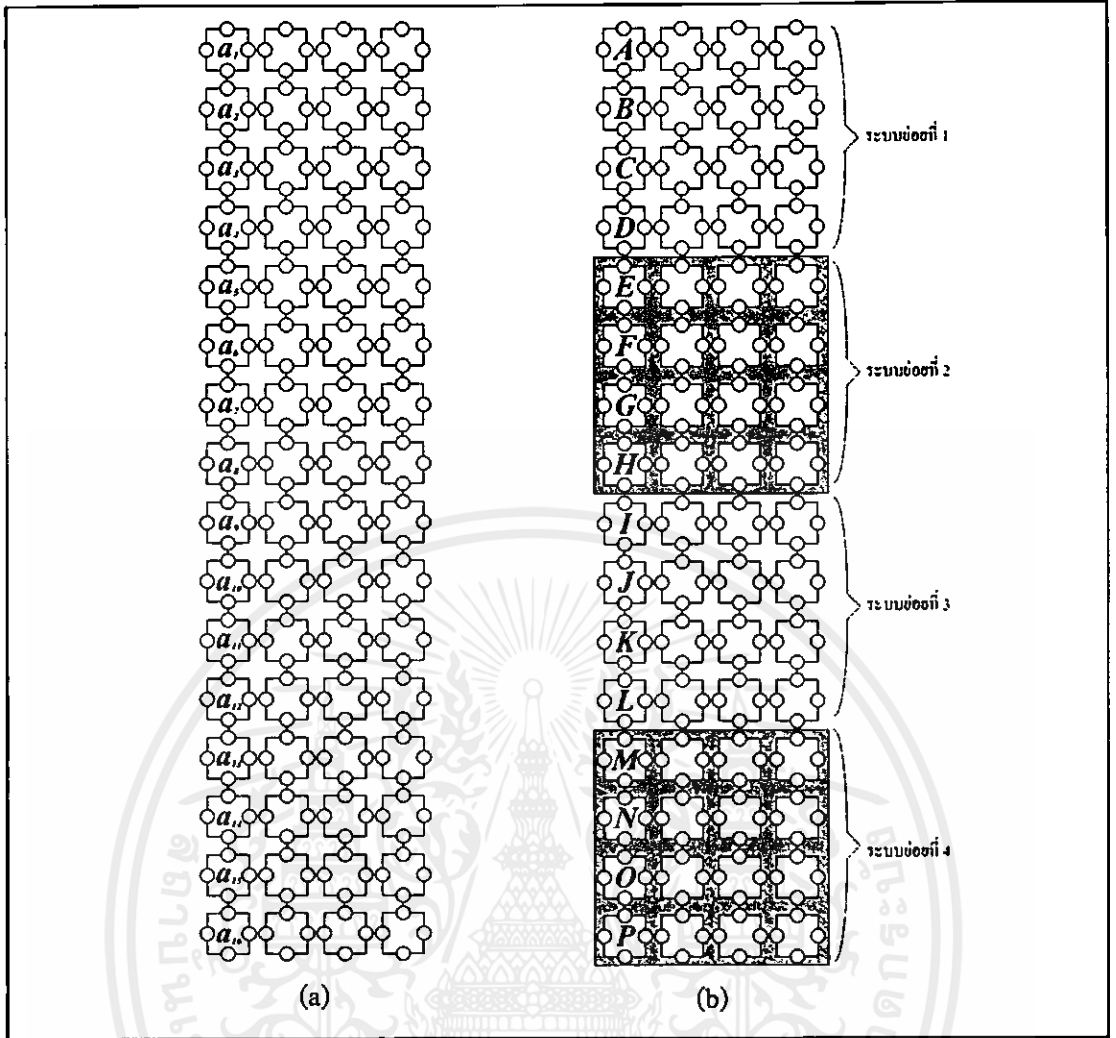
### 3.2 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่าย รีคอนฟิกรเมิลขนาด $N \times \sqrt{N}$

กำหนดให้ข้อมูลนำเข้าเป็นเซตของจุดในระนาบสองมิติจำนวน 16 จุด ซึ่งรายละเอียดปลีกย่อยเหมือนเซตข้อมูลนำเข้าของขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติในหัวข้อที่ 2.4.1 โดยให้เป็นเซต  $S = \{a_i | 1 \leq i \leq 16\} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$  ซึ่งแต่ละจุดมีพิกัดดังนี้ A(-6,0) B(-5,-5) C(-4,-3) D(-3,8) E(-2,-2) F(-1,4) G(0,9) H(1,-6) I(2,5) J(3,2) K(4,7) L(5,3) M(6,-4) N(7,-1) O(9,6) และ P(10,1) ซึ่งข้อมูลชุดนี้เป็นชุดเดียวกับข้อมูลนำเข้าในหัวข้อที่ 2.4.2 ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.13 และกำหนดให้ระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกรเมิลมีขนาด  $16 \times 4$

**ขั้นตอนที่ 1** การรับข้อมูลนำเข้าจำนวน 16 ค่า

ให้หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่ P(1,1) เก็บข้อมูลนำเข้า  $a_i$  เมื่อ  $1 \leq i \leq 16$  ดังแสดงในรูปที่ 3.5 (a)

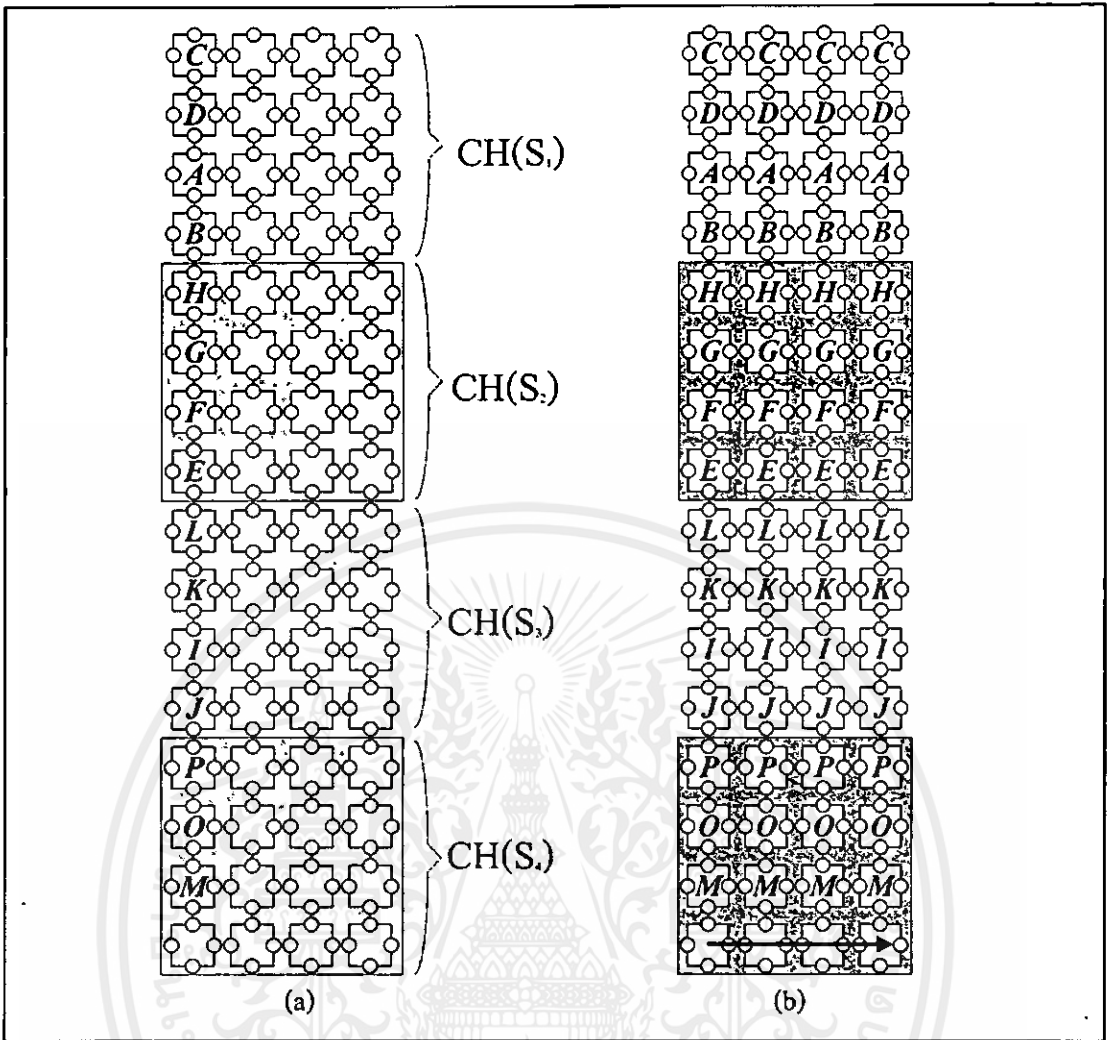




รูปที่ 3.5 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ (a) การเก็บข้อมูลนำเข้า  $a_i$  เมื่อ  $1 \leq i \leq 16$   
(b) การเก็บจุดข้อมูลย่อยในแต่ละระบบย่อย

### ขั้นตอนที่ 2 การหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละจุดข้อมูลย่อย

ขั้นตอนที่ 2.1) แบ่งข้อมูลนำเข้าขนาด 16 ค่า เป็นจุดข้อมูลย่อยขนาด 4 ค่า จำนวนทั้งหมด 4 จุด โดยที่ข้อมูลย่อยชุดที่ 1 ประกอบด้วยข้อมูล  $a_1$  ถึง  $a_4$  ข้อมูลย่อยชุดที่ 2 ประกอบด้วยข้อมูล  $a_5$  ถึง  $a_8$  ข้อมูลย่อยชุดที่ 3 ประกอบด้วยข้อมูล  $a_9$  ถึง  $a_{12}$  และข้อมูลย่อยชุดที่ 4 ประกอบด้วยข้อมูล  $a_{13}$  ถึง  $a_{16}$  ตามลำดับ และแบ่งระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $16 \times 4$  เป็นระบบย่อยขนาด  $4 \times 4$  จำนวนทั้งหมด 4 ระบบย่อย โดยระบบย่อยที่ 1 ประกอบด้วยหน่วยประมวลผลแถวที่ 1 ถึง 4 ระบบย่อยที่ 2 ประกอบด้วยหน่วยประมวลผลแถวที่ 5 ถึง 8 ระบบย่อยที่ 3 ประกอบด้วยหน่วยประมวลผลแถวที่ 9 ถึง 12 และระบบย่อยที่ 4 ประกอบด้วยหน่วยประมวลผลแถวที่ 13 ถึง 16 ตามลำดับ โดยที่ระบบย่อยที่ 1 เก็บข้อมูลย่อยชุดที่ 1 ระบบย่อยที่ 2 เก็บข้อมูลย่อยชุดที่ 2 ระบบย่อยที่ 3 เก็บข้อมูลย่อยชุดที่ 3 และระบบย่อยที่ 4 เก็บข้อมูลย่อยชุดที่ 4 ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3.5 (b)



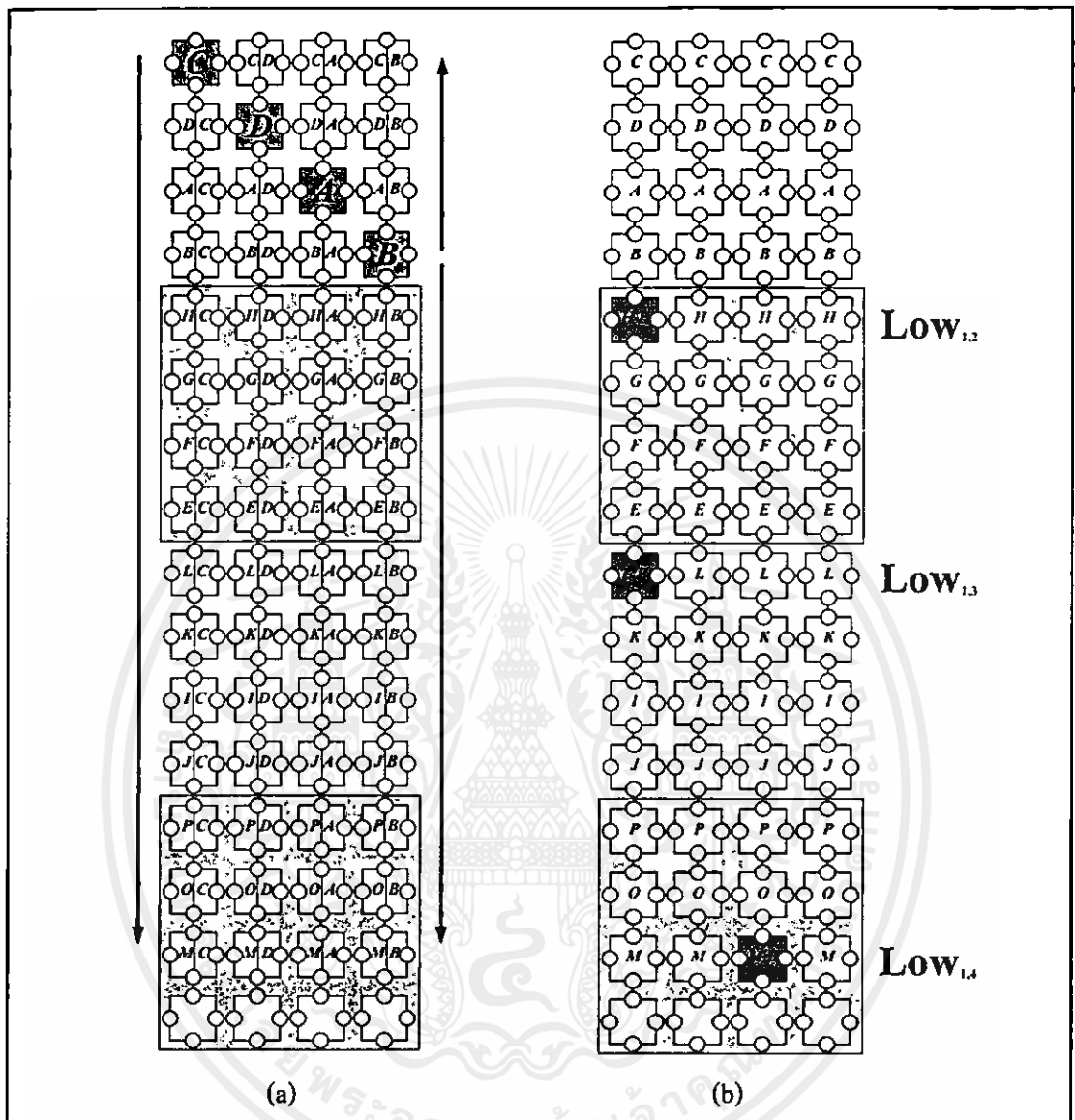
รูปที่ 3.6 ตัวอย่างการหาคอนเวกซ์ฮิลสองมิติ (a) คอนเวกซ์ฮิลสองมิติของแต่ละระบบย่อย (b) การส่งผลลัพธ์ไปในแถวเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวนอน

ขั้นตอนที่ 2.2) แต่ละระบบย่อยขนาด  $4 \times 4$  เก็บข้อมูลนำเข้าขนาด 4 ค่า จากทฤษฎีบทที่ 8 ในหัวข้อที่ 2.6.1 ได้ว่าแต่ละระบบย่อยขนาด  $4 \times 4$  สามารถหาคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของชุดข้อมูลที่เก็บไว้ได้ในเวลาคงตัว โดยเรียกผลลัพธ์ที่ได้จากระบบย่อยที่ 1 ระบบย่อยที่ 2 ระบบย่อยที่ 3 และระบบย่อยที่ 4 ว่า  $CH(S_1)$ ,  $CH(S_2)$ ,  $CH(S_3)$  และ  $CH(S_4)$  ตามลำดับ ผลลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 3.6 (a) และผลลัพธ์ในระนาบสองมิติ ดังแสดงในรูปที่ 2.50 จากหัวข้อที่ 2.6.2

ขั้นตอนที่ 2.3) จากระบบขนาด  $16 \times 4$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ส่งค่าผลลัพธ์ที่ได้ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 3.6 (b)

ขั้นตอนที่ 3 การหาเส้นค้ำจุนด้านบนและเส้นค้ำจุนด้านล่างระหว่างแต่ละ  $CH(S_i)$  และ  $CH(S_j)$  เมื่อ  $1 \leq i, j \leq 4$  และ  $i \neq j$  ซึ่งขั้นตอนนี้จะทำเป็นรอบการทำงาน เริ่มทำจากรอบที่  $k=1$  จนถึงรอบที่  $k=4$  โดยแต่ละรอบการทำงานมีขั้นตอนดังนี้

รอบการทำงานที่  $k=1$



รูปที่ 3.7 รอบการทำงานที่  $k=1$  (a) ระบบย่อยที่ 1 ส่งค่าที่เก็บไว้  $CH(S_1)$  ไปยัง  
ทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นค่าจูนในแต่ละระบบย่อย

ขั้นตอนที่ 3.1) ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ของระบบย่อยที่ 1 ส่งค่าที่เก็บไว้  $CH(S_1)$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.7 (a)

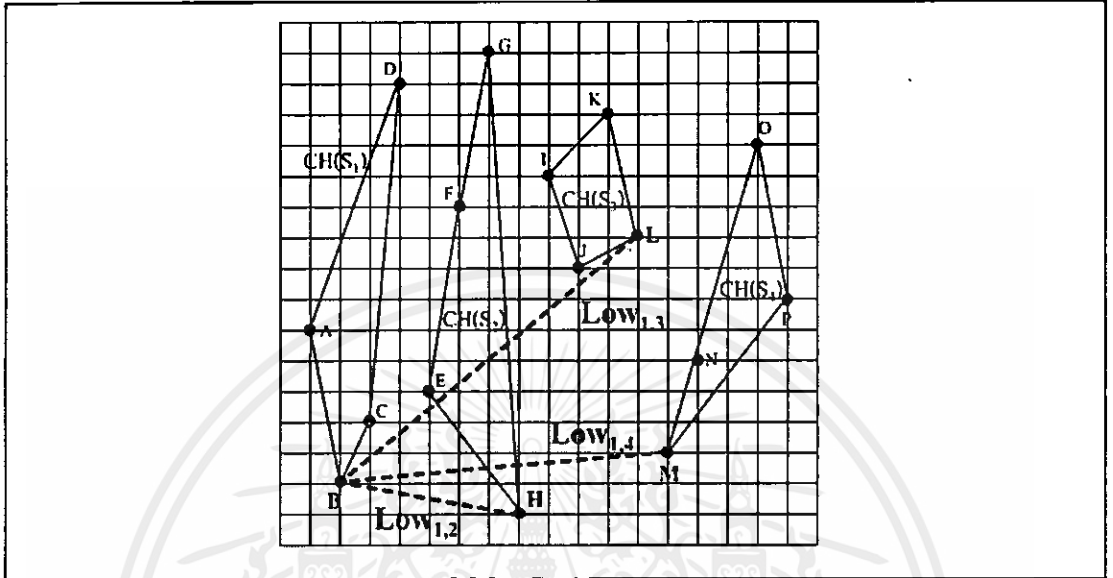
ขั้นตอนที่ 3.2) เมื่อ  $k=1$

ให้ระบบย่อยที่ 2 หาเส้นค่าจูนด้านล่างของ  $CH(S_1)$  กับ  $CH(S_2)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Low_{1,2}$

ให้ระบบย่อยที่ 3 หาเส้นค่าจูนด้านล่างของ  $CH(S_1)$  กับ  $CH(S_3)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Low_{1,3}$

ให้ระบบย่อยที่ 4 หาเส้นค่าจูนด้านล่างของ  $CH(S_1)$  กับ  $CH(S_4)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Low_{1,4}$

จากทฤษฎีบทที่ 7 ในหัวข้อที่ 2.5.1 จะได้ว่า การหาเส้นค้ำจุนในระบบย่อยที่ 2, 3 และ 4 สามารถหาได้ในเวลาคงตัว ซึ่งผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย ดังแสดงในรูปที่ 3.7 (b) และผลลัพธ์ในระนาบสองมิติดังแสดงในรูปที่ 3.8

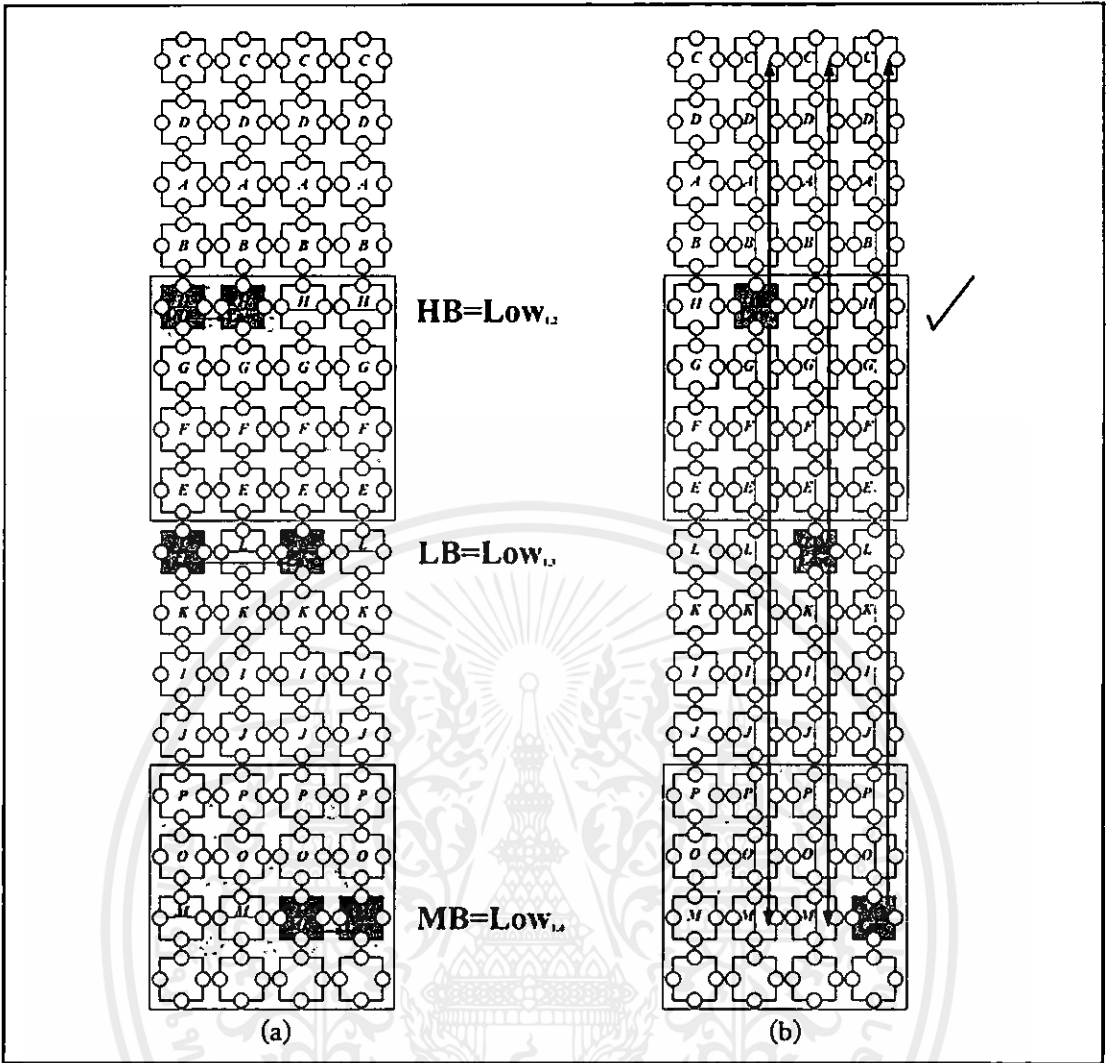


รูปที่ 3.8 ผลลัพธ์เส้นค้ำจุนในระนาบสองมิติของรอบการทำงานที่  $k = 1$

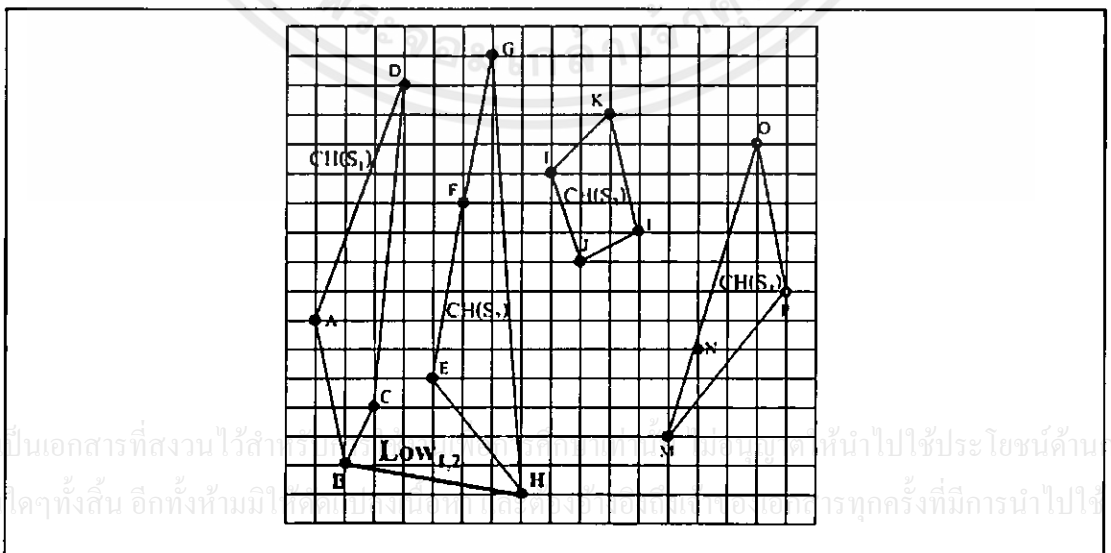
ขั้นตอนที่ 3.3) ระบบย่อยที่ 2 ส่งค่าผลลัพธ์  $Low_{1,2}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(1,2)$  ระบบย่อยที่ 3 ส่งค่าผลลัพธ์  $Low_{1,3}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(1,3)$  และระบบย่อยที่ 4 ส่งค่าผลลัพธ์  $Low_{1,4}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(3,3)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(3,4)$  โดยใช้บัสย่อยแวนอน ดังแสดงในรูปที่ 3.9 (a)

ขั้นตอนที่ 3.4) ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(1,2)$  ของระบบย่อยที่ 2 หน่วยประมวลผลที่  $P(1,3)$  ของระบบย่อยที่ 3 และหน่วยประมวลผลที่  $P(3,4)$  ของระบบย่อยที่ 4 ส่งค่า  $Low_{1,2}$ ,  $Low_{1,3}$  และ  $Low_{1,4}$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแวนอนดัง ดังแสดงในรูปที่ 3.9 (b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

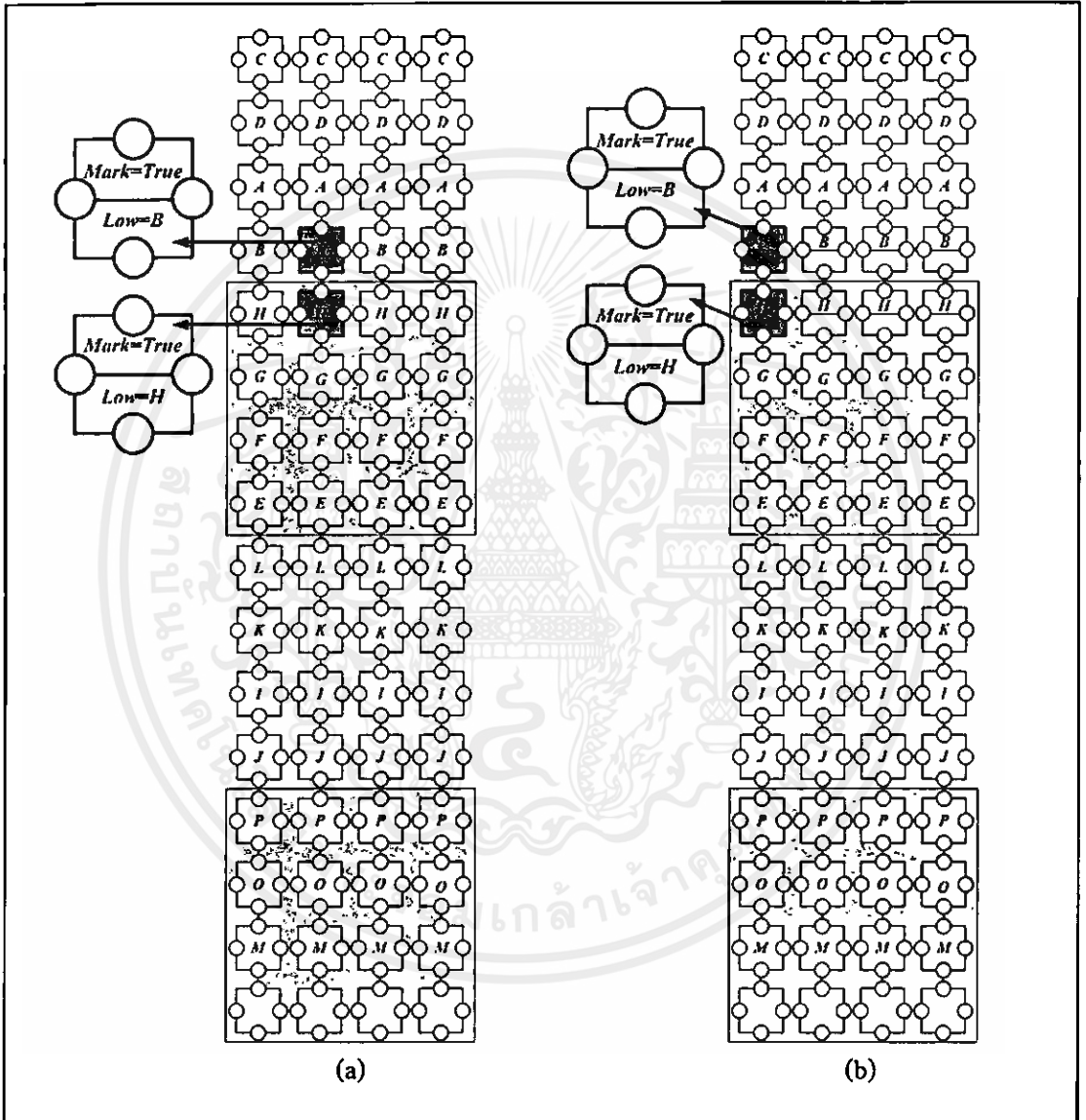


รูปที่ 3.9 รอบการทำงานที่  $k = 1$  (a) การส่งเส้นค่าเงินในแต่ละระบบย่อย (b) การส่งเส้นค่าเงินไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง



รูปที่ 3.10 ผลลัพธ์เส้นค่าเงินของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต S จากรอบการทำงานที่  $k = 1$

ขั้นตอนที่ 3.5) จากระบบเครือข่ายแบบคาข่ายรีคอนที่กิวเรเปิดขนาด  $16 \times 4$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 2, 3 และ 4 ตรวจสอบค่าที่เก็บไว้ที่สูงกว่าหรืออยู่บนเส้นค้ำจุนด้านล่าง  $Low_{1,2}$ ,  $Low_{1,3}$  และ  $Low_{1,4}$  ที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ ซึ่งได้ว่าทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 2 ตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริง ดังนั้นเส้นค้ำจุน  $Low_{1,2} = HB$  เป็นเส้นค้ำจุนด้านล่างของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต S ดังแสดงในรูปที่ 3.10

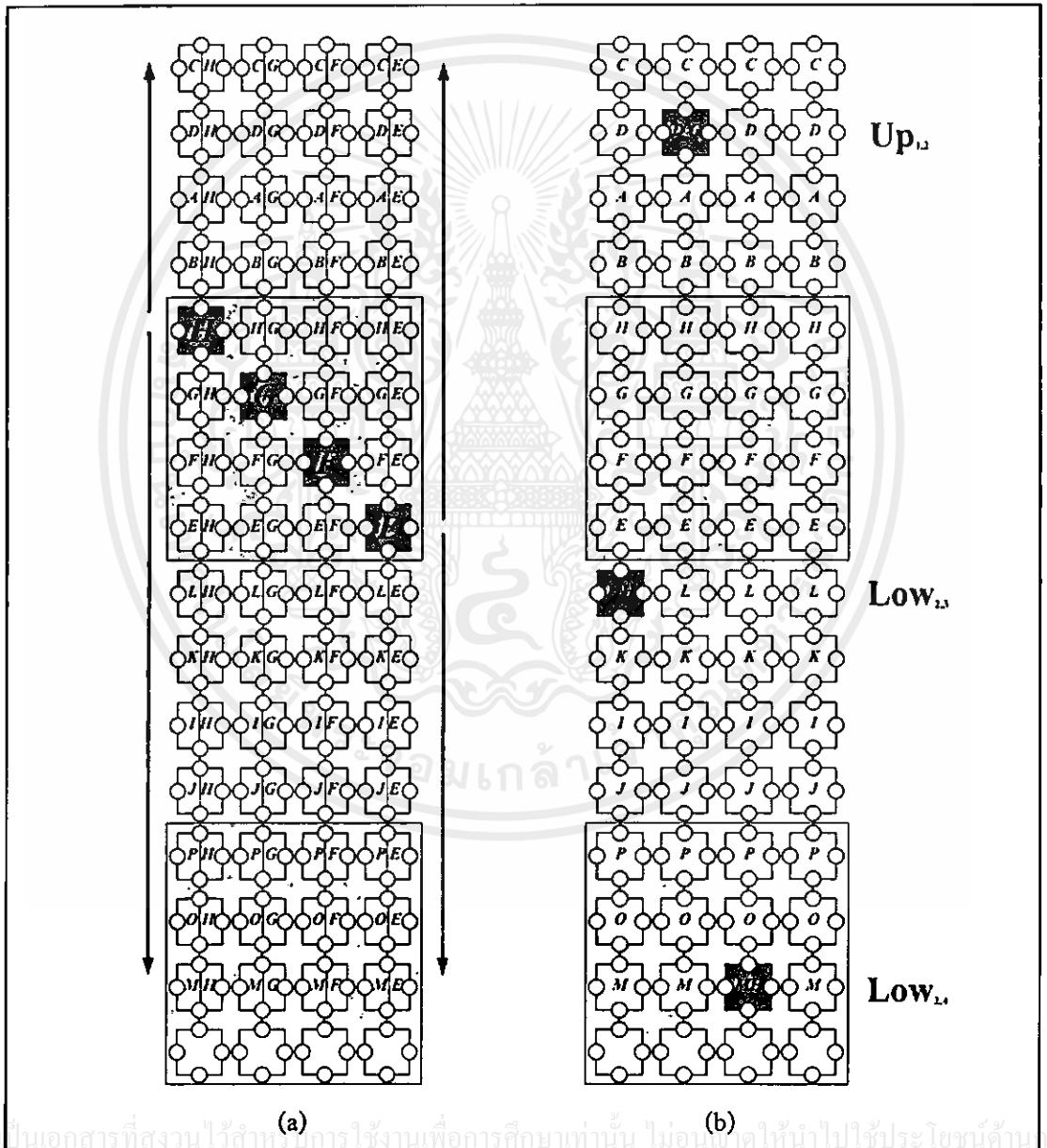


รูปที่ 3.11 รอบการทำงานที่  $k = 1$  (a) หน่วยประมวลผลเซตค่าตัวแปร Mark และ Low  
(b) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เซตค่าตัวแปร Mark และ Low

ขั้นตอนที่ 3.6) จากขั้นตอนที่ 3.5 หน่วยประมวลผลที่ P(4,2) และ P(5,2) ในหลักที่ 2 ตรวจสอบพบว่าค่าที่เก็บไว้อยู่บนเส้นค้ำจุนด้านล่าง HB ให้หน่วยประมวลผลที่ P(4,2) เซตค่า

ตัวแปร  $Low = B$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(5,2)$  เซตค่าตัวแปร  $Low = H$  และ  $Mark = true$  ดังแสดงในรูปที่ 3.11 (a)

ขั้นตอนที่ 3.7 ในแต่ละแถว ตรวจสอบพบว่าแถวที่ 4 และแถวที่ 5 มีหน่วยประมวลผลที่มีค่า  $Mark = true$  ให้หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ของแถวนั้น ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(4,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Low = B$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(5,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Low = H$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลอื่นๆในแถวนั้นเซตค่า  $Mark = false$  ดังแสดงในรูปที่ 3.11 (b)



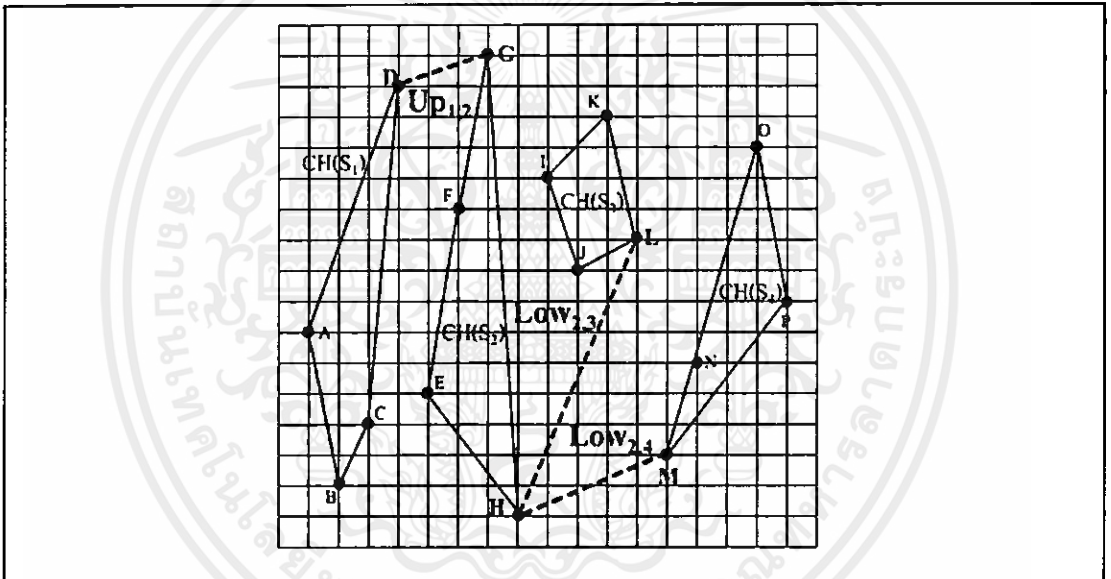
รูปที่ 3.12 รอบการทำงานที่  $k = 2$  (a) ระบบย่อยที่ 2 ส่งค่าที่เก็บไว้ ( $CH(S_2)$ ) ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นกำกับในแต่ละระบบย่อย

รอบการทำงานที่  $k = 2$

ขั้นตอนที่ 3.1) ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i,1)$  ของระบบย่อยที่ 2 ส่งค่าที่เก็บไว้  $CH(S_2)$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.12 (a)

ขั้นตอนที่ 3.2) เมื่อ  $k = 2$

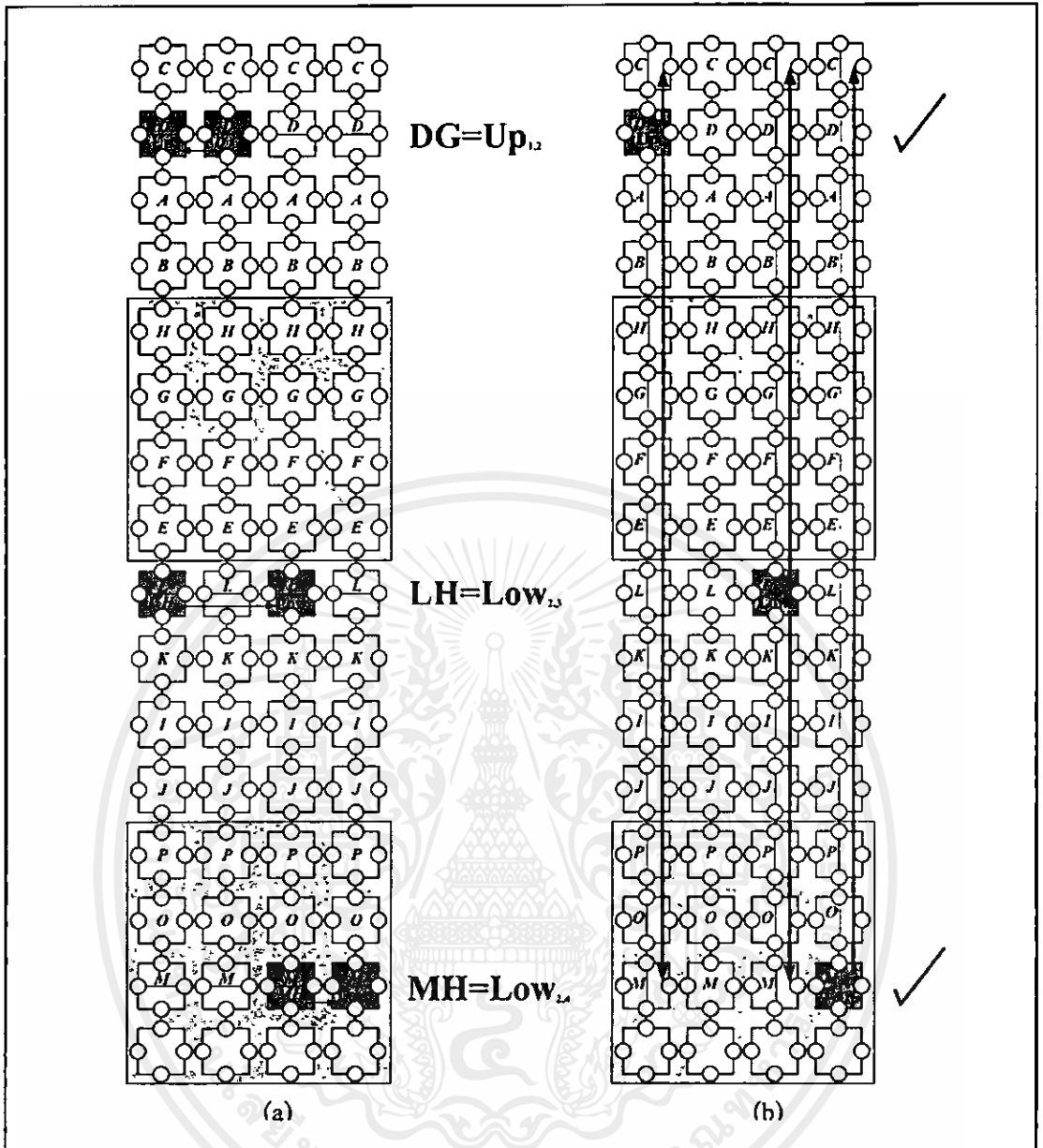
ให้ระบบย่อยที่ 1 หาเส้นค่าจุนด้านบนของ  $CH(S_2)$  กับ  $CH(S_1)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Up_{1,2}$   
 ให้ระบบย่อยที่ 3 หาเส้นค่าจุนด้านล่างของ  $CH(S_2)$  กับ  $CH(S_3)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Low_{2,3}$   
 ให้ระบบย่อยที่ 4 หาเส้นค่าจุนด้านล่างของ  $CH(S_2)$  กับ  $CH(S_4)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Low_{2,4}$   
 จากทฤษฎีบทที่ 7 ในหัวข้อที่ 2.5.1 จะได้ว่า การหาเส้นค่าจุนในระบบย่อยที่ 1, 3 และ 4 สามารถหาได้ในเวลาคงตัว และผลลัพธ์ของเส้นค่าจุนในแต่ละระบบย่อย ดังแสดงในรูปที่ 3.12 (b) และผลลัพธ์ในระนาบสองมิติดังแสดงในรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 ผลลัพธ์เส้นค่าจุนในระนาบสองมิติของรอบการทำงานที่  $k = 2$

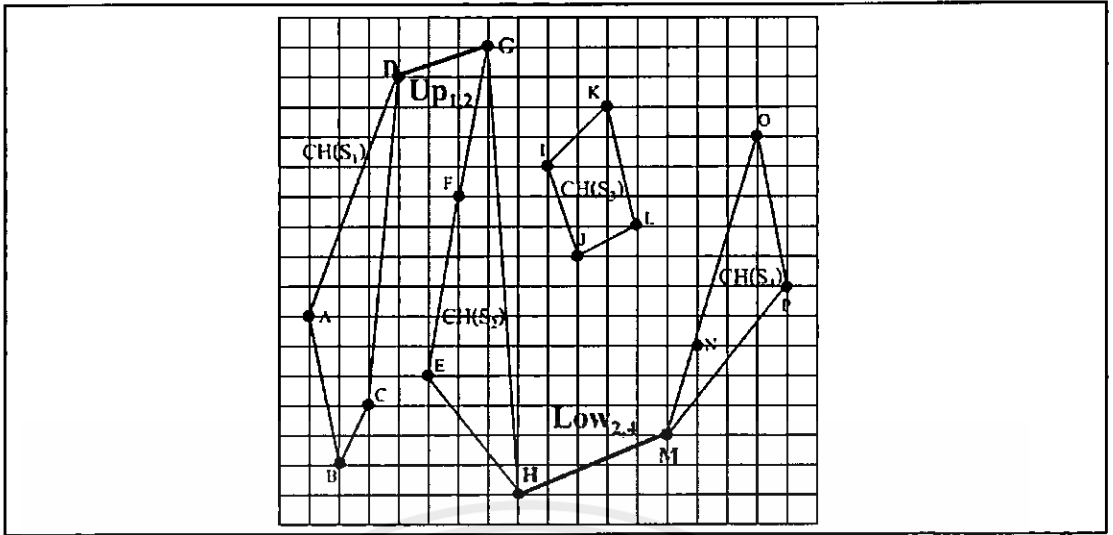
ขั้นตอนที่ 3.3) ระบบย่อยที่ 1 ส่งค่าผลลัพธ์  $Up_{1,2}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  ระบบย่อยที่ 3 ส่งค่าผลลัพธ์  $Low_{2,3}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(1,3)$  และระบบย่อยที่ 4 ส่งค่าผลลัพธ์  $Low_{2,4}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(3,3)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(3,4)$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 3.14 (a)

ขั้นตอนที่ 3.4) ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  ของระบบย่อยที่ 1 หน่วยประมวลผลที่  $P(1,3)$  ของระบบย่อยที่ 3 และหน่วยประมวลผลที่  $P(3,4)$  ของระบบย่อยที่ 4 ส่งค่า  $Up_{1,2}$ ,  $Low_{2,3}$  และ  $Low_{2,4}$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.14 (b)

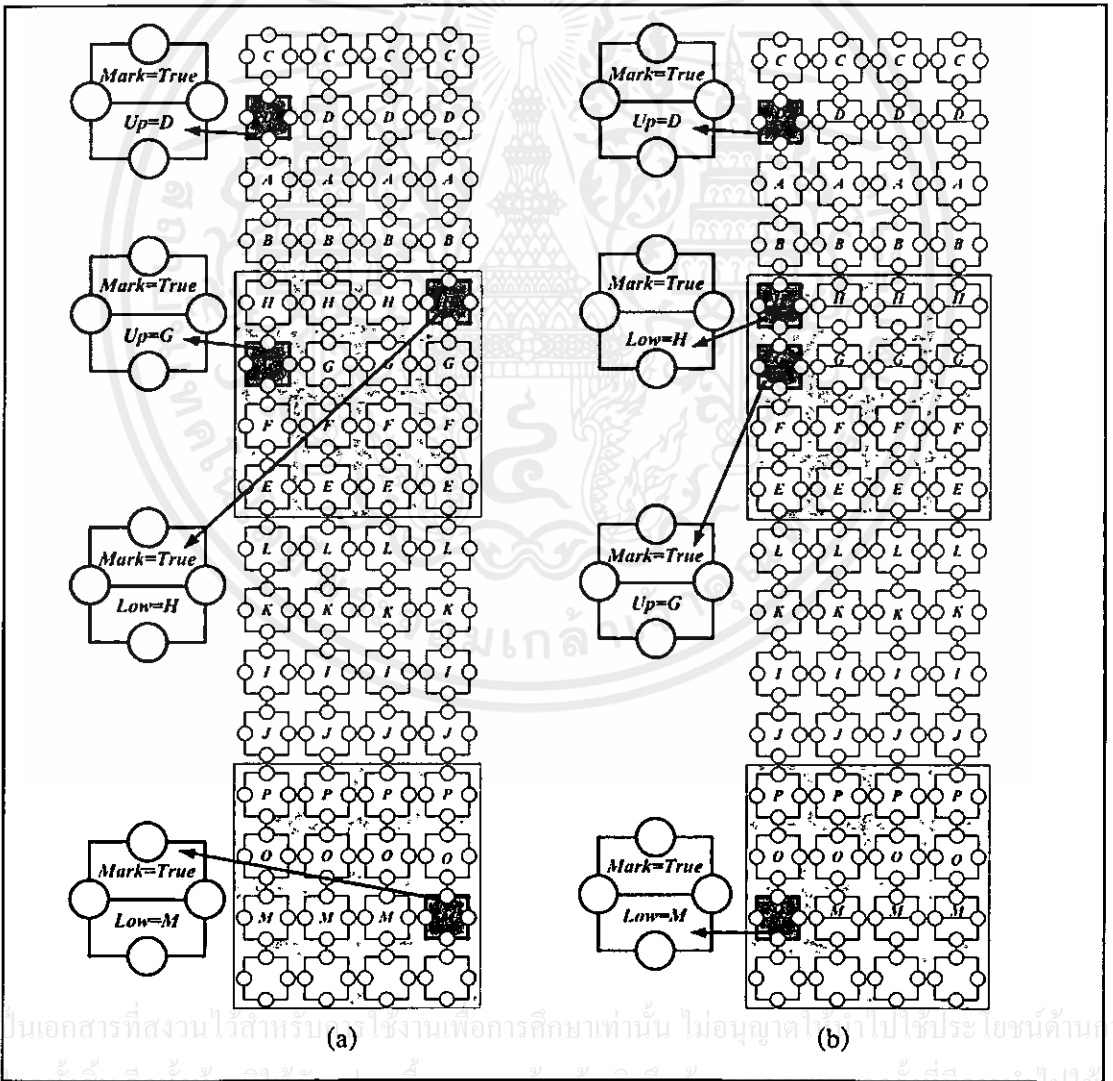


รูปที่ 3.14 รอบการทำงานที่  $k = 2$  (a) การส่งเส้นค่าจูนในแต่ละระบบย่อย  
(b) การส่งเส้นค่าจูนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง

ขั้นตอนที่ 3.5) จากระบบเครือข่ายขนาด  $16 \times 4$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ตรวจสอบค่าที่เก็บไว้ว่าต่ำกว่าหรืออยู่บนเส้นค่าจูนด้านบน  $Up_{1,2}$  ที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ และทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 3 และ 4 ตรวจสอบค่าที่เก็บไว้ว่าสูงกว่าหรืออยู่บนเส้นค่าจูนด้านล่าง  $Low_{2,3}$  และ  $Low_{2,4}$  ที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ พบว่าทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 และหลักที่ 4 ตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริง ดังนั้นเส้นค่าจูน  $Up_{1,2} = DG$  เป็นเส้นค่าจูนด้านบนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต  $S$  และเส้นค่าจูน  $Low_{2,4} = MH$  เป็นเส้นค่าจูนด้านล่างของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต  $S$  ดังแสดงในรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 ผลลัพธ์เส้นค่าจูนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต S จากการทำงานที่  $k = 2$



รูปที่ 3.16 รอบการทำงานที่  $k = 2$  (a) หน่วยประมวลผลเซตค่าตัวแปร Mark, Up และ Low  
(b) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เซตค่าตัวแปร Mark, Up และ Low

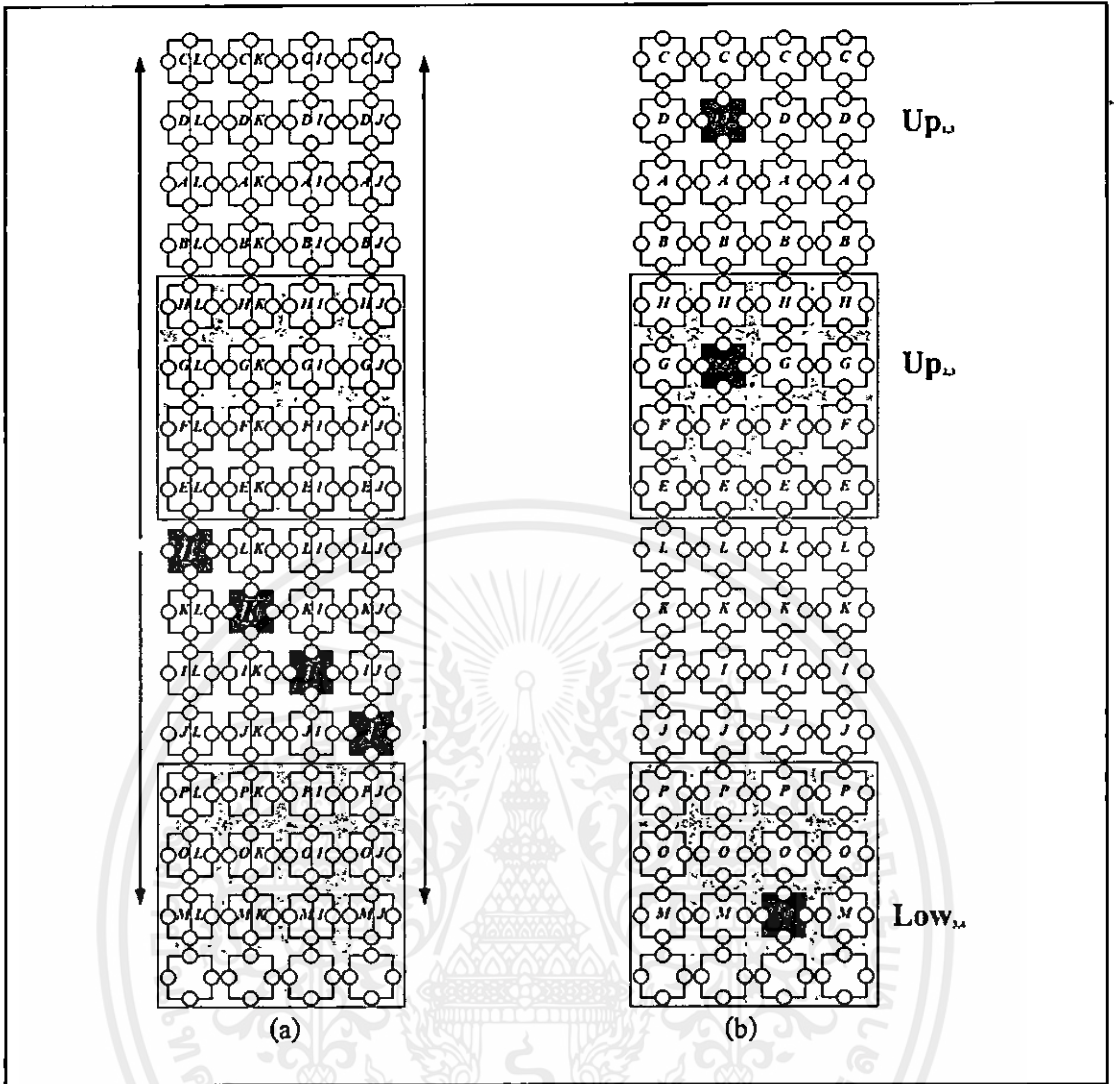
ขั้นตอนที่ 3.6 จากขั้นตอนที่ 3.5 หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  และ  $P(6,1)$  ในหลักที่ 1 ตรวจสอบพบว่าค่าที่เก็บไว้อยู่บนเส้นค่าจุนด้านบน DG หน่วยประมวลผลที่  $P(5,4)$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(15,4)$  ในหลักที่ 4 ตรวจสอบพบว่าค่าที่เก็บไว้อยู่บนเส้นค่าจุนด้านล่าง MH ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Up = D$  และ  $Mark = true$  หน่วยประมวลผลที่  $P(6,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Up = G$  และ  $Mark = true$  หน่วยประมวลผลที่  $P(5,4)$  เซตค่าตัวแปร  $Low = H$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(15,4)$  เซตค่าตัวแปร  $Low = M$  และ  $Mark = true$  ดังแสดงในรูปที่ 3.16 (a)

ขั้นตอนที่ 3.7 ในแต่ละแถว ตรวจสอบพบว่าแถวที่ 2, แถวที่ 5, แถวที่ 6 และแถวที่ 15 มีหน่วยประมวลผลที่มีค่า  $Mark = true$  ให้หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ของแถวนั้น ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Up = D$  และ  $Mark = true$  หน่วยประมวลผลที่  $P(5,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Low = H$  และ  $Mark = true$  หน่วยประมวลผลที่  $P(6,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Up = G$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(15,1)$  เซตค่า  $Low = M$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลอื่นๆในแถวนั้นเซตค่า  $Mark = false$  ดังแสดงในรูปที่ 3.16 (b)

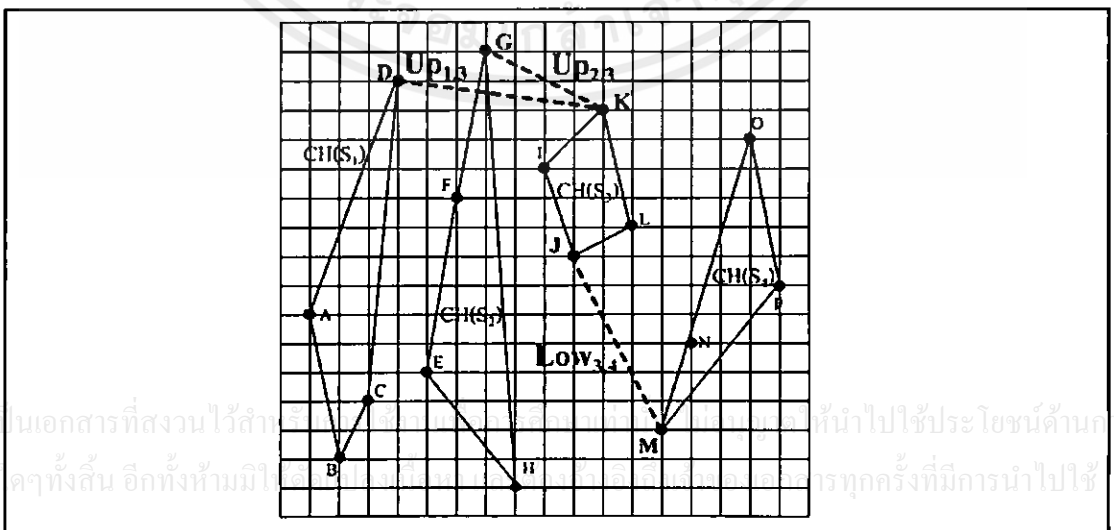
รอบการทำงานที่  $k = 3$

ขั้นตอนที่ 3.1 ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ของระบบย่อยที่ 3 ส่งค่าที่เก็บไว้ ( $CH(S_3)$ ) ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.17 (a)

ขั้นตอนที่ 3.2 เมื่อ  $k = 3$   
 ให้ระบบย่อยที่ 1 หาเส้นค่าจุนด้านบนของ  $CH(S_3)$  กับ  $CH(S_1)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Up_{1,3}$   
 ให้ระบบย่อยที่ 2 หาเส้นค่าจุนด้านบนของ  $CH(S_3)$  กับ  $CH(S_2)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Up_{2,3}$   
 ให้ระบบย่อยที่ 4 หาเส้นค่าจุนด้านล่างของ  $CH(S_3)$  กับ  $CH(S_4)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Low_{3,4}$   
 จากทฤษฎีบทที่ 7 ในหัวข้อที่ 2.5.1 จะได้ว่า การหาเส้นค่าจุนในระบบย่อยที่ 1, 2 และ 4 สามารถหาได้ในเวลาคงตัว และผลลัพธ์ของเส้นค่าจุนในแต่ละระบบย่อย ดังแสดงในรูปที่ 3.17 (b) และผลลัพธ์ในระนาบสองมิติดังแสดงในรูปที่ 3.18



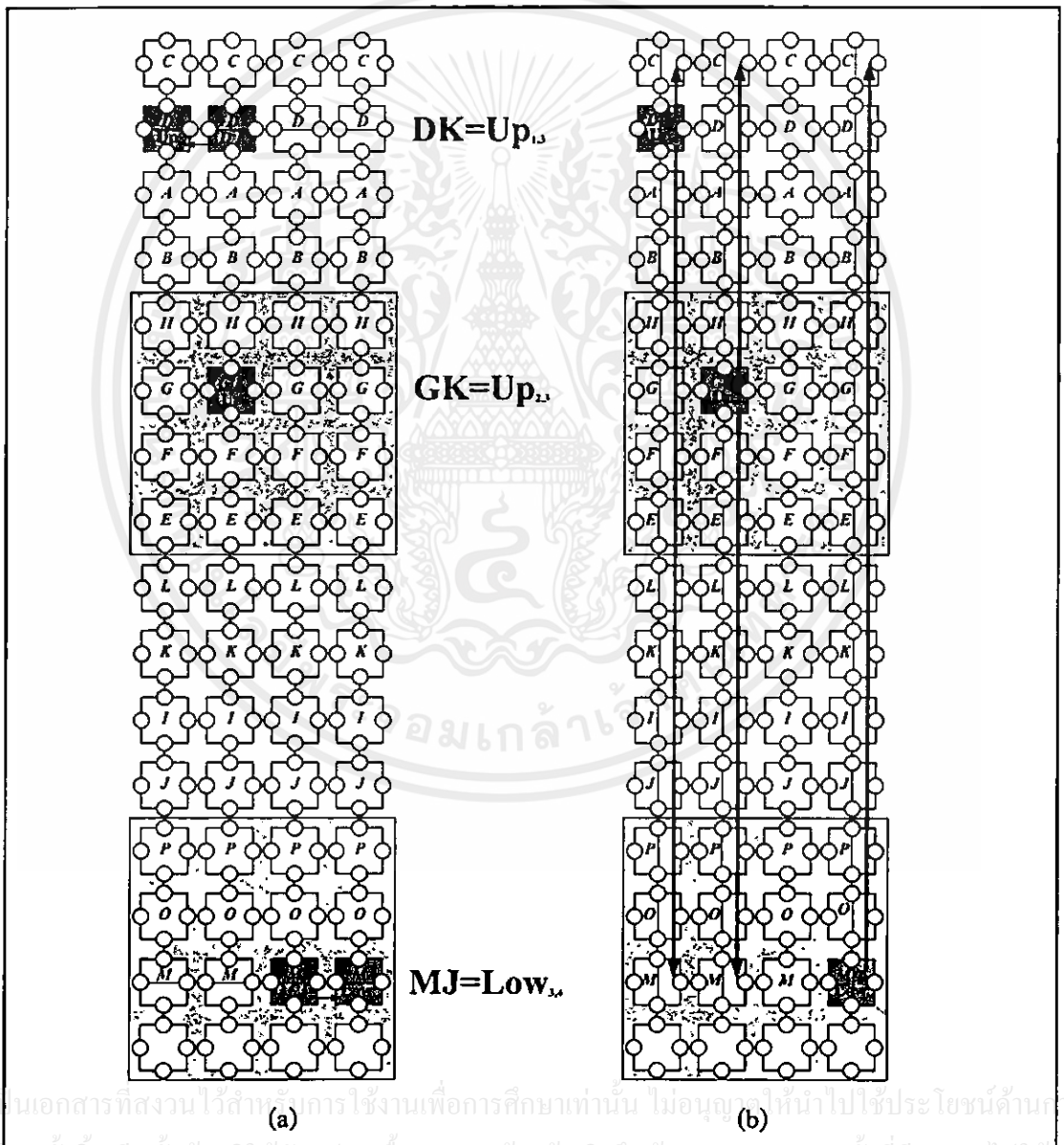
รูปที่ 3.17 รอบการทำงานที่  $k = 3$  (a) ระบบย่อยที่ 3 ส่งค่าที่เก็บไว้ ( $CH(S_3)$ ) ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นค่าเงินในแต่ละระบบย่อย



รูปที่ 3.18 ผลลัพธ์เส้นค่าเงินในระนาบสองมิติของรอบการทำงานที่  $k = 3$

ขั้นตอนที่ 3.3) ระบบย่อยที่ 1 ส่งค่าผลลัพธ์  $Up_{1,3}$  จากหน่วยประมวลผลที่ P(2,2) ไปยังหน่วยประมวลผลที่ P(2,1) ระบบย่อยที่ 2 ส่งค่าผลลัพธ์  $Up_{2,3}$  จากหน่วยประมวลผลที่ P(2,2) ไปยังหน่วยประมวลผลที่ P(2,2) และระบบย่อยที่ 4 ส่งค่าผลลัพธ์  $Low_{3,4}$  จากหน่วยประมวลผลที่ P(3,3) ไปยังหน่วยประมวลผลที่ P(3,4) โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 3.19 (a)

ขั้นตอนที่ 3.4) ให้นำหน่วยประมวลผลที่ P(2,1) ของระบบย่อยที่ 1 หน่วยประมวลผลที่ P(2,2) ของระบบย่อยที่ 2 และหน่วยประมวลผลที่ P(3,4) ของระบบย่อยที่ 4 ส่งค่า  $Up_{1,3}$ ,  $Up_{2,3}$  และ  $Low_{3,4}$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.19 (b)

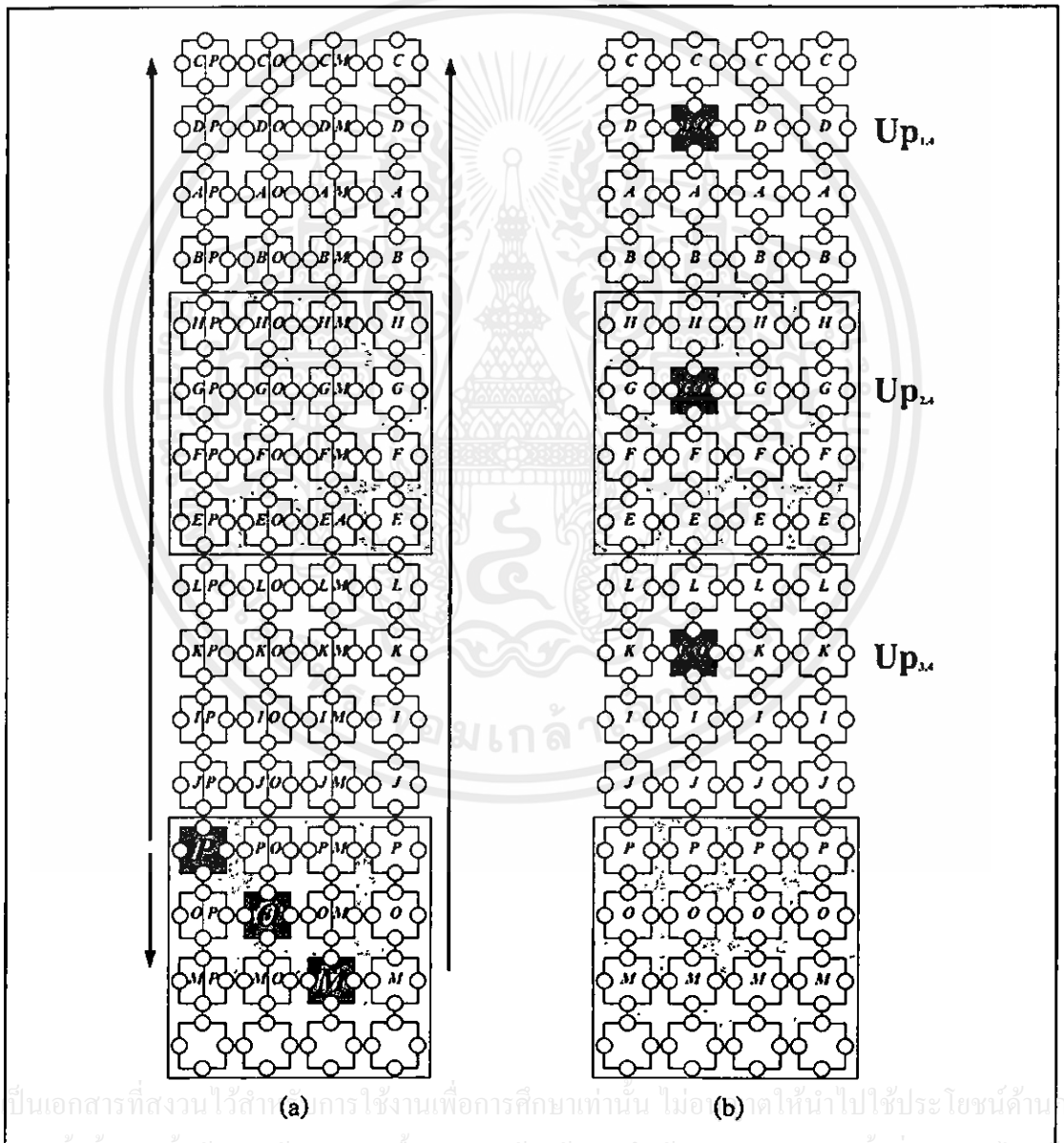


รูปที่ 3.19 รอบการทำงานที่  $k = 3$  (a) การส่งเส้นค่าจนในแต่ละระบบย่อย

(b) การส่งเส้นค่าจนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกันโดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง

ขั้นตอนที่ 3.5) จากระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $16 \times 4$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ตรวจสอบดูว่าค่าที่เก็บไว้ยู่ต่ำกว่าหรืออยู่บนเส้นค้ำจุนด้านบน  $Up_{1,3}$ ,  $Up_{2,3}$  ที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ และทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 4 ตรวจสอบดูว่าค่าที่เก็บไว้ยู่สูงกว่าหรืออยู่บนเส้นค้ำจุนด้านล่าง  $Low_{3,4}$  ที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ ซึ่งได้ว่าไม่มีหลักใดที่ตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขเป็นจริง ดังนั้นรอบการทำงานนี้ไม่พบเส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต S

ขั้นตอนที่ 3.6) จากขั้นตอนที่ 3.5 เนื่องจากรอบการทำงานนี้ไม่พบเส้นค้ำจุนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต S ส่งผลให้ไม่มีค่าใดให้พิจารณา ดังนั้นจึงข้ามขั้นตอนที่ 3.6 และ 3.7



รูปที่ 3.20 รอบการทำงานที่  $k = 4$  (a) ระบบย่อยที่ 4 ส่งค่าที่เก็บไว้ ( $CH(S_4)$ ) ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน (b) ผลลัพธ์ของเส้นค้ำจุนในแต่ละระบบย่อย

รอบการทำงานที่  $k = 4$

ขั้นตอนที่ 3.1) ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ของระบบย่อยที่ 4 ส่งค่าที่เก็บไว้  $CH(S_4)$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.20 (a)

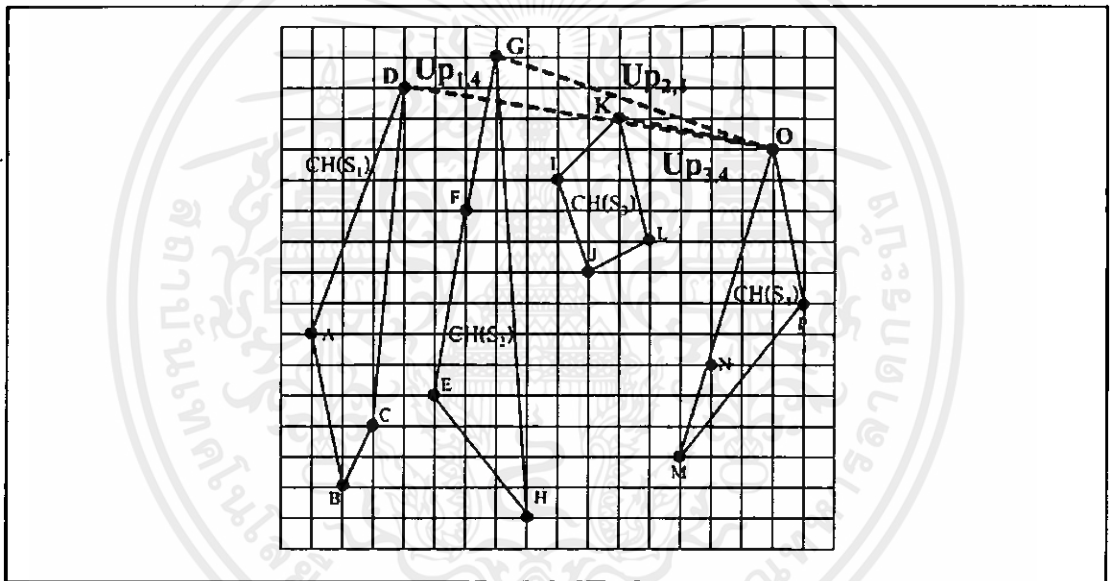
ขั้นตอนที่ 3.2) เมื่อ  $k = 4$

ให้ระบบย่อยที่ 1 หาเส้นค่าจุนด้านบนของ  $CH(S_4)$  กับ  $CH(S_1)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Up_{1,4}$

ให้ระบบย่อยที่ 2 หาเส้นค่าจุนด้านบนของ  $CH(S_4)$  กับ  $CH(S_2)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Up_{2,4}$

ให้ระบบย่อยที่ 3 หาเส้นค่าจุนด้านบนของ  $CH(S_4)$  กับ  $CH(S_3)$  เก็บผลลัพธ์ไว้ในตัวแปร  $Up_{3,4}$

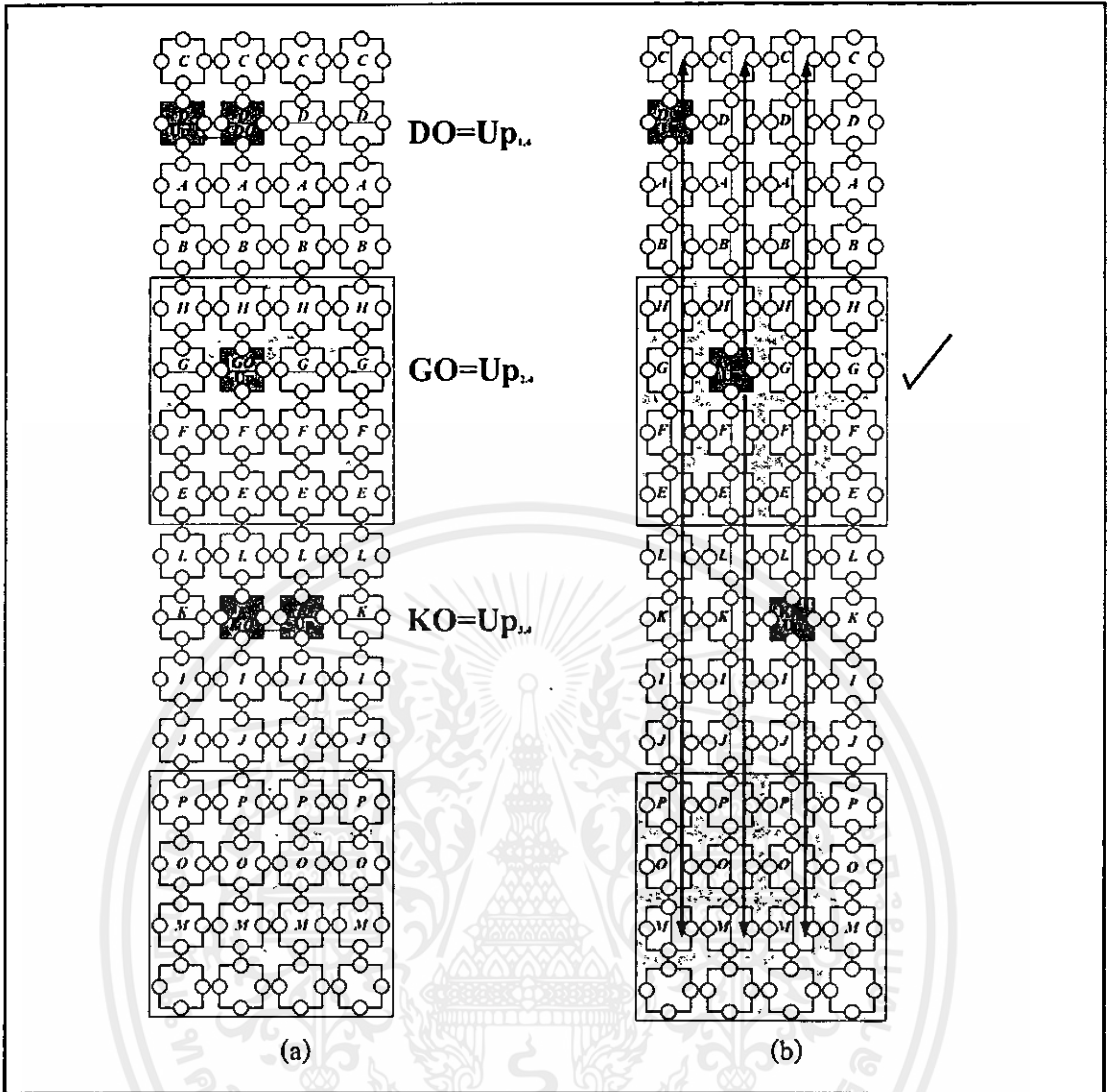
จากทฤษฎีบทที่ 7 ในหัวข้อที่ 2.5.1 จะได้ว่า การหาเส้นค่าจุนในระบบย่อยที่ 1, 2 และ 3 สามารถหาได้ในเวลาคงตัว และผลลัพธ์ของเส้นค่าจุนในแต่ละระบบย่อย ดังแสดงในรูปที่ 3.20 (b) และผลลัพธ์ในระบบสองมิติดังแสดงในรูปที่ 3.21



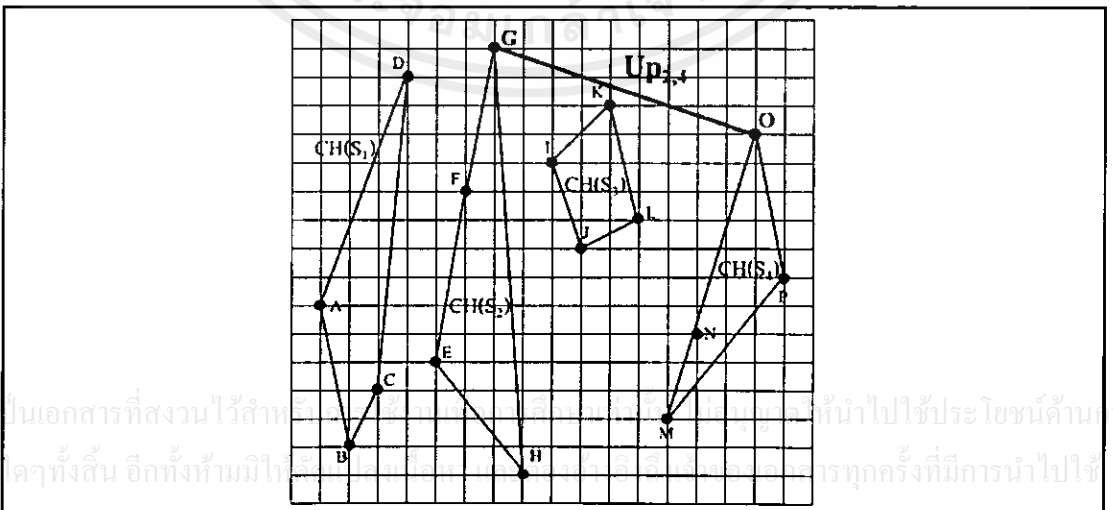
รูปที่ 3.21 ผลลัพธ์เส้นค่าจุนในระบบสองมิติของรอบการทำงานที่  $k = 4$

ขั้นตอนที่ 3.3) ระบบย่อยที่ 1 ส่งค่าผลลัพธ์  $Up_{1,4}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  ระบบย่อยที่ 2 ส่งค่าผลลัพธ์  $Up_{2,4}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$  และระบบย่อยที่ 3 ส่งค่าผลลัพธ์  $Up_{3,4}$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(2,3)$  โดยใช้บัสย่อยแนวนอน ดังแสดงในรูปที่ 3.22 (a)

ขั้นตอนที่ 3.4) ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  ของระบบย่อยที่ 1 หน่วยประมวลผลที่  $P(2,2)$  ของระบบย่อยที่ 2 และหน่วยประมวลผลที่  $P(2,3)$  ของระบบย่อยที่ 3 ส่งค่า  $Up_{1,4}$ ,  $Up_{2,4}$  และ  $Up_{3,4}$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.22 (b)

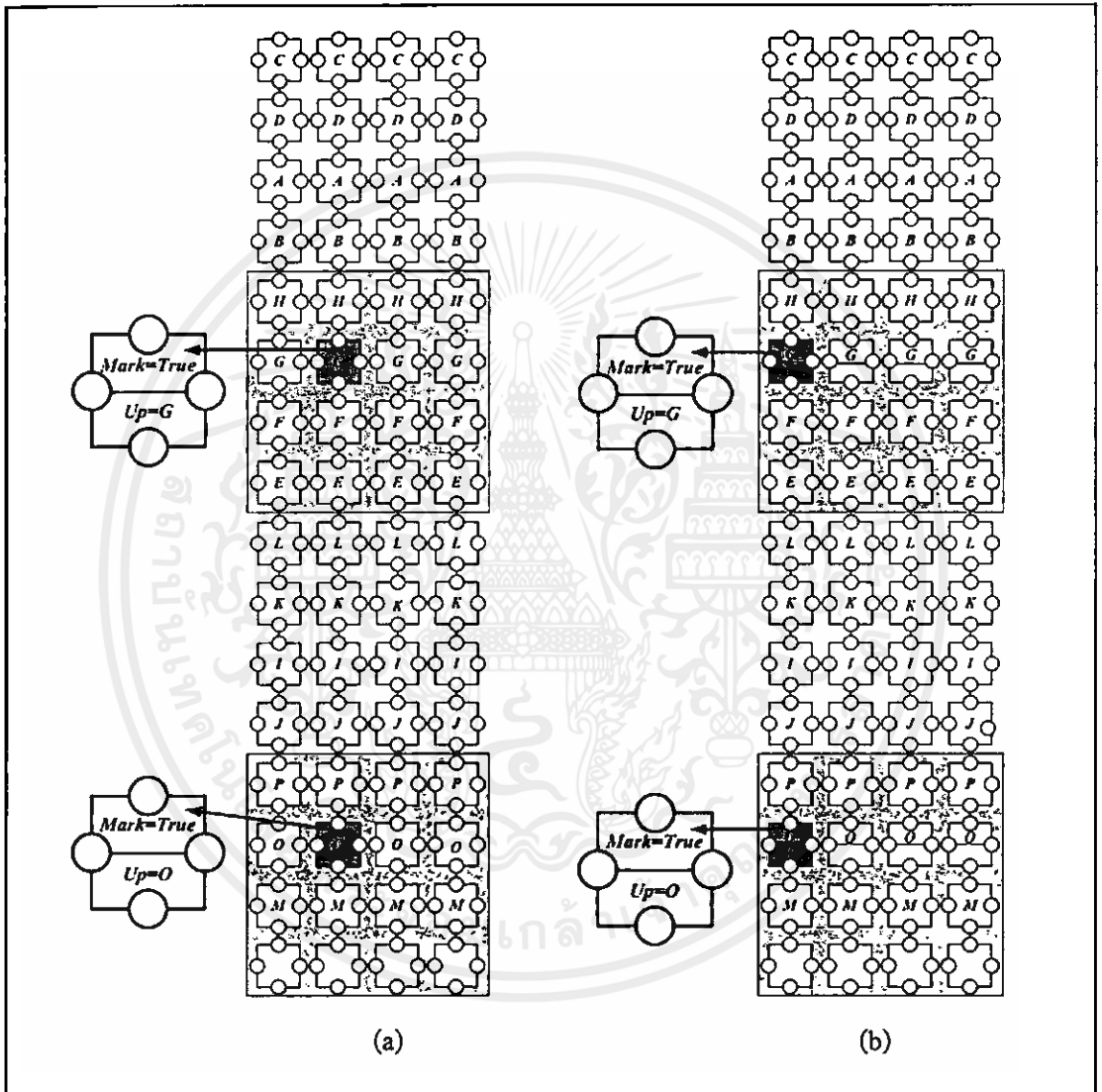


รูปที่ 3.22 รอบการทำงานที่  $k = 4$  (a) การส่งเส้นคำจุนในแต่ละระบบย่อย (b) การส่งเส้นคำจุนไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน โดยใช้บัสย่อยแนวตั้ง



รูปที่ 3.23 ผลลัพธ์เส้นคำจุนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต S จากรอบการทำงานที่  $k = 4$

ขั้นตอนที่ 3.5) จากระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลขนาด  $16 \times 4$  ให้ทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1, 2 และ 3 ตรวจสอบค่าที่เก็บไว้ว่าต่ำกว่าหรืออยู่บนเส้นค่าจูนด้านบน  $Up_{1,4}$ ,  $Up_{2,4}$  และ  $Up_{3,4}$  ที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ ซึ่งได้ว่าทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 2 ตรวจสอบได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริง ดังนั้นเส้นค่าจูน  $Up_{2,4} = GO$  เป็นเส้นค่าจูนด้านบนของคอนเวกซ์ฮิลสองมิติของเซต S ดังแสดงในรูปที่ 3.23

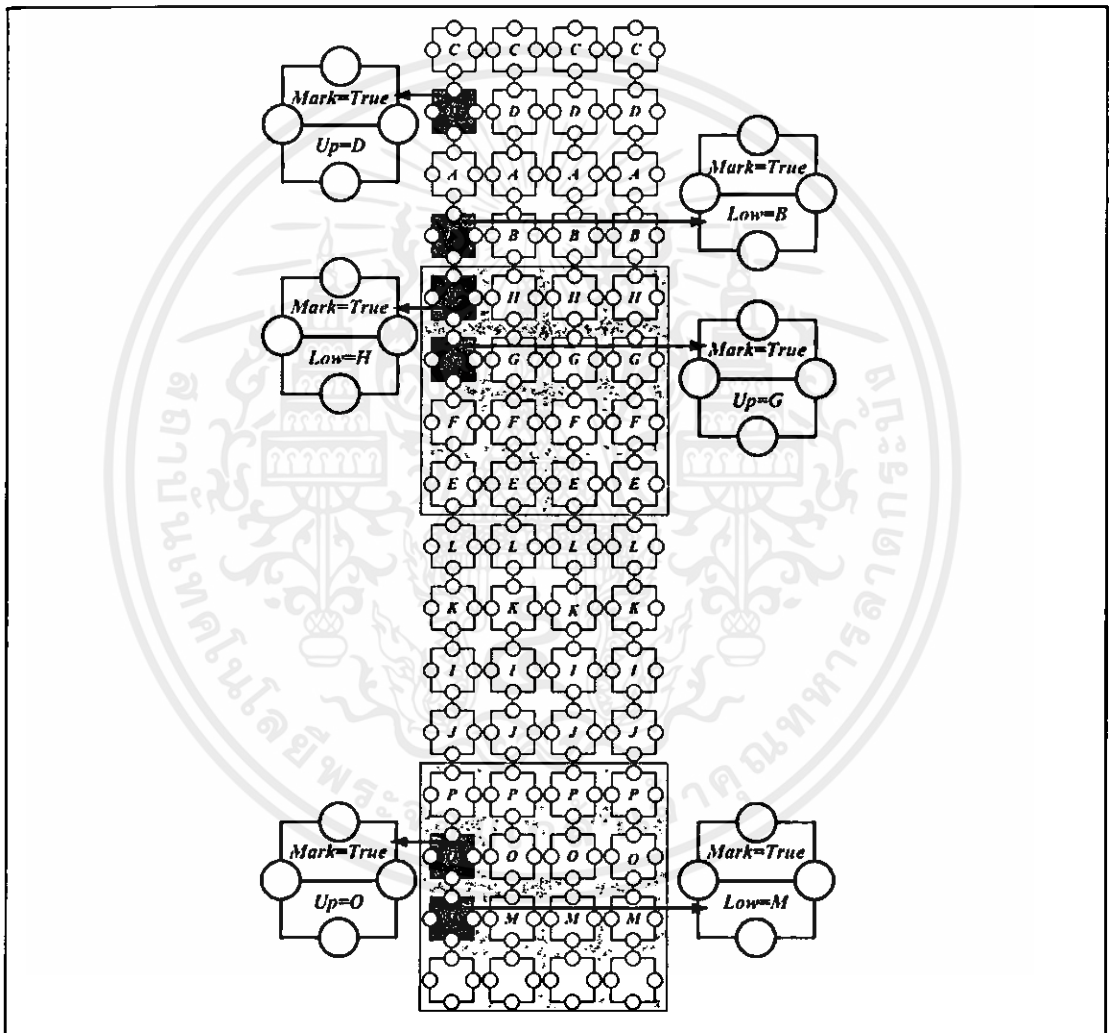


รูปที่ 3.24 รอบการทำงานที่  $k = 4$  (a) หน่วยประมวลผลเซตค่าตัวแปร Mark และ Up  
(b) หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 เซตค่าตัวแปร Mark และ Up

ขั้นตอนที่ 3.6) จากขั้นตอนที่ 3.5 หน่วยประมวลผลที่  $P(6,2)$  และ  $P(14,2)$  ในหลักที่ 2 ตรวจสอบพบว่าค่าที่เก็บไว้อยู่บนเส้นค่าจูนด้านบน GO ให้หน่วยประมวลผลที่  $P(6,2)$  เซตค่าตัวแปร

แปร  $Up = G$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(14,2)$  เซตค่าตัวแปร  $Up = O$  และ  $Mark = true$  ดังแสดงในรูปที่ 3.24 (a)

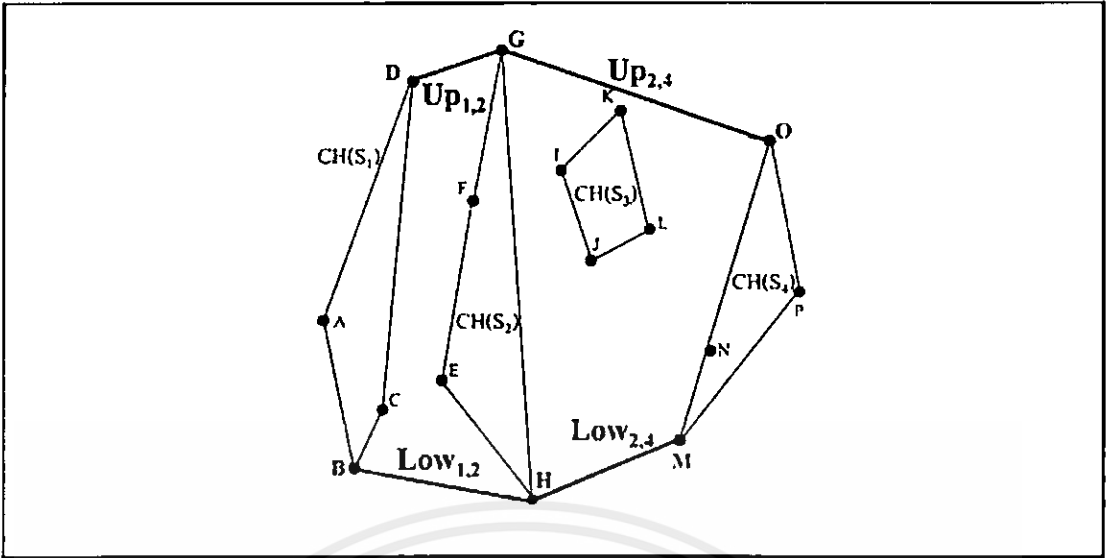
ขั้นตอนที่ 3.7 ในแต่ละแถว ตรวจสอบพบว่าแถวที่ 6 และแถวที่ 14 มีหน่วยประมวลผลที่มีค่า  $Mark = true$  ให้หน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ของแถวนั้น ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(6,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Up = G$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(14,1)$  เซตค่าตัวแปร  $Up = O$  และ  $Mark = true$  และหน่วยประมวลผลอื่นๆในแถวนั้นเซตค่า  $Mark = false$  ดังแสดงในรูปที่ 3.24 (b)



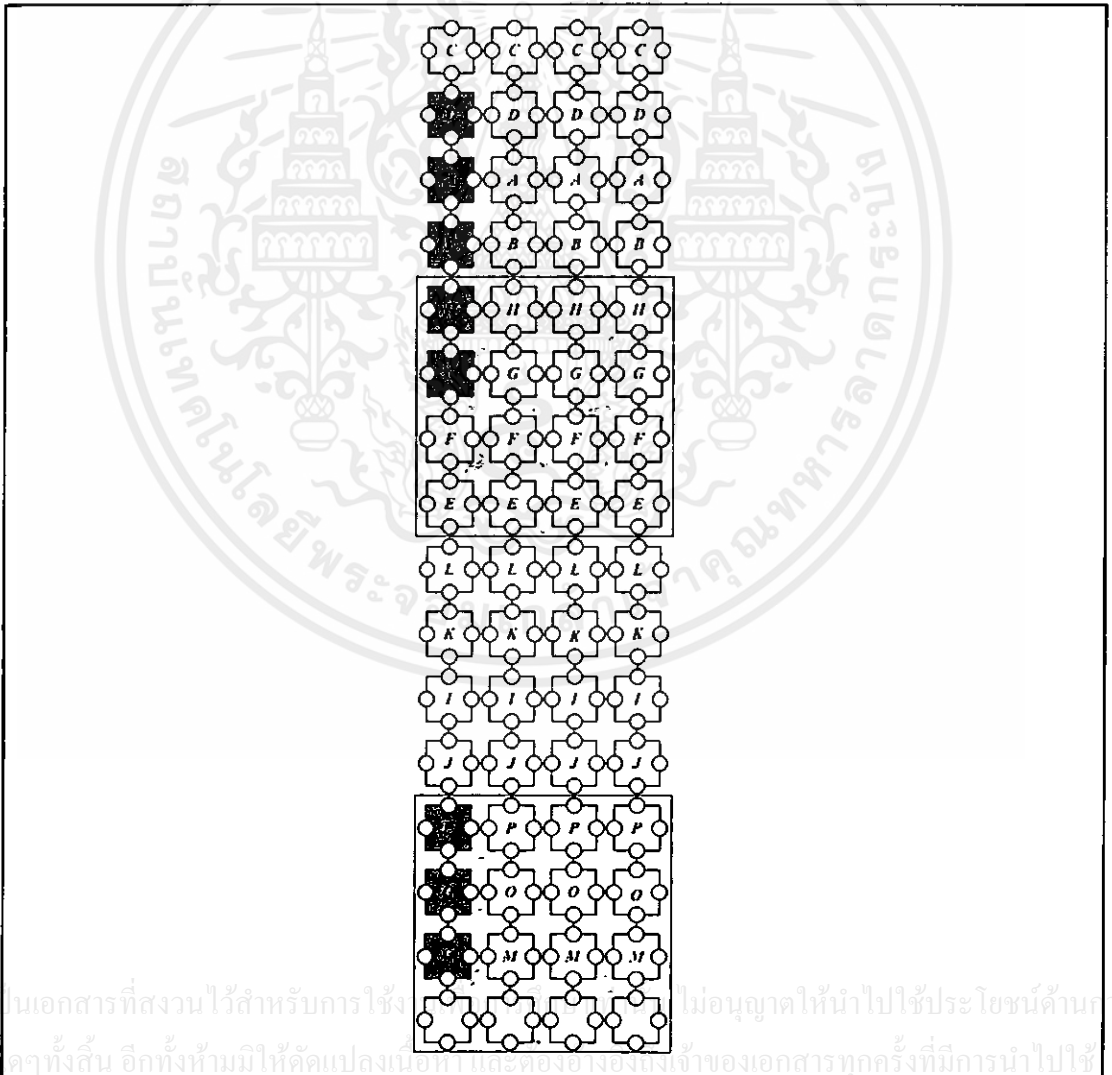
รูปที่ 3.25 หน่วยประมวลผลที่มีค่า  $Mark = true$

ขั้นตอนที่ 4 การรวมผลลัพธ์จากรอบการทำงานที่  $k=1$  ถึง  $k=4$

จากรอบการทำงานที่  $k=1$  ถึง  $k=4$  ได้ว่าหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ซึ่งได้แก่หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$ ,  $P(4,1)$ ,  $P(5,1)$ ,  $P(6,1)$ ,  $P(14,1)$  และ  $P(15,1)$  มีค่า  $Mark = true$  ดังแสดงในรูปที่ 3.25 และผลลัพธ์ในระนาบสองมิติดังแสดงในรูปที่ 3.26



รูปที่ 3.26 ผลลัพธ์เส้นค่าจูนของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต S จากรอบการทำงานที่  $k=1$  ถึง  $k=4$



รูปที่ 3.27 หน่วยประมวลผลที่เก็บค่าผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต S

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้... ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้าน...  
 ไม่ว่าจะพิมพ์ซ้ำหรือดัดแปลงเป็น... ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### ขั้นตอนที่ 5 การรวมผลลัพธ์ที่เป็นจุดของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

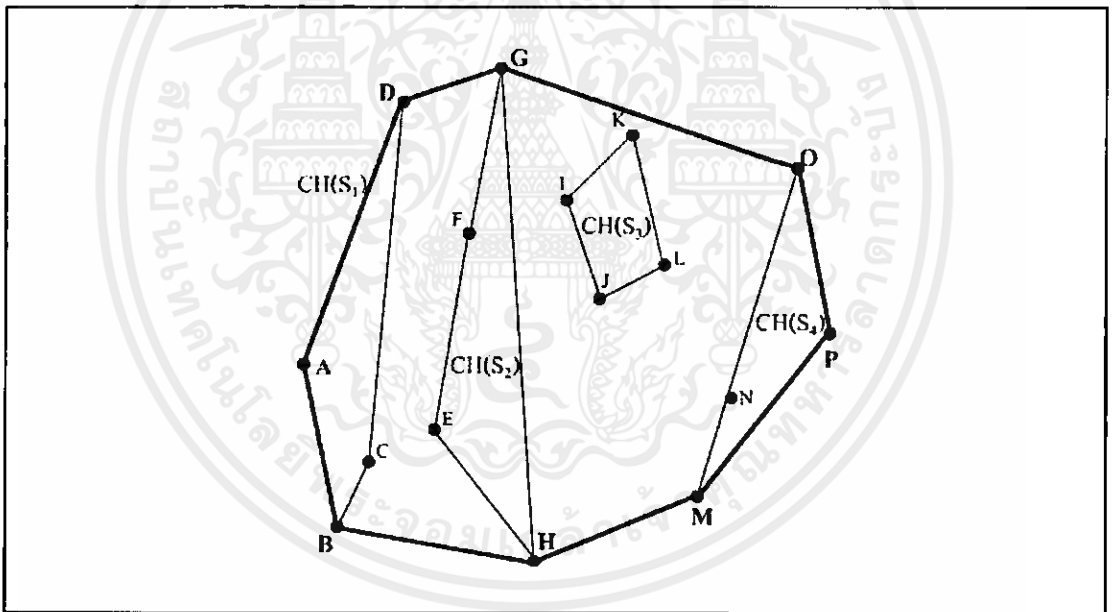
ระบบย่อยที่ 1 หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  เก็บค่า  $Up$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(4,1)$  เก็บค่า  $Low$  ได้ว่า  $a = 2$  และ  $b = 4$  ดังนั้นหน่วยประมวลผลที่  $P(3,1)$  เซตค่า  $Mark = true$

ระบบย่อยที่ 2 เนื่องจากมีหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า  $Up$  เพียงหนึ่งหน่วยประมวลผล และหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า  $Low$  เพียงหนึ่งหน่วยประมวลผล ดังนั้นไม่มีหน่วยประมวลผลใดที่ต้องเซตค่า  $Mark$

ระบบย่อยที่ 3 เนื่องจากไม่มีหน่วยประมวลผลที่มีค่า  $Mark = true$  อยู่ในระบบย่อยนี้ ดังนั้นไม่มีหน่วยประมวลผลที่ต้องเซตค่า  $Mark$

ระบบย่อยที่ 4 หน่วยประมวลผลที่  $P(2,1)$  เก็บค่า  $Up$  และหน่วยประมวลผลที่  $P(3,1)$  เก็บค่า  $Low$  ได้ว่า  $a = 2$  และ  $b = 3$  ดังนั้นหน่วยประมวลผลที่  $P(1,1)$  เซตค่า  $Mark = true$

หน่วยประมวลผลที่เก็บค่าผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต  $S$  ดังแสดงในรูปที่ 3.27 และรูปที่ 3.28 แสดงรูปคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต  $S$  ในระนาบสองมิติ



รูปที่ 3.28 ผลลัพธ์ของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของเซต  $S$  ในระนาบสองมิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

# การวิเคราะห์ความซับซ้อนด้านเวลาของขั้นตอนวิธีที่นำเสนอ

ในงานวิจัยเรื่องการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการไว้ในบทที่ 3 สำหรับเนื้อหาในบทที่ 4 นี้จะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนแรกเป็นการกล่าวถึงฟังก์ชันที่ใช้ในการวิเคราะห์ความซับซ้อนด้านเวลา และส่วนที่สองเป็นการวิเคราะห์ความซับซ้อนด้านเวลาของขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่ได้นำเสนอไว้ในบทที่ 3 โดยเนื้อหามีรายละเอียดดังนี้

### 4.1 ความซับซ้อนด้านเวลา

ในทางทฤษฎี เราจะนิยามความซับซ้อนด้านเวลา (Time Complexity) สำหรับขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาปัญหาหนึ่งว่าเป็นจำนวนขั้นตอนที่ใช้ในการแก้ตัวอย่างปัญหานั้น ในรูปของฟังก์ชันของขนาดของข้อมูลนำเข้า เช่น ปัญหาที่มีขนาดของข้อมูลนำเข้าเป็น  $N$  ถ้าเราสามารถแก้ตัวอย่างปัญหานี้ได้ภายใน  $4N^2 + 2N + 12$  ขั้นตอน เราสามารถพูดได้ว่าขั้นตอนวิธีนี้มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $4N^2 + 2N + 12$

แต่โดยทั่วไปแล้วเราจะให้ความสนใจฟังก์ชันที่บอกว่าเวลาที่ใส่จะเพิ่มเป็นเท่าใดหากขนาดของข้อมูลนำเข้าเพิ่มขึ้น ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูปแบบของขอบบน หรือที่เรียกว่าสัญลักษณ์โอตัวใหญ่ (Big-O Notation) โดยสัญลักษณ์โอตัวใหญ่จะเป็นตัวบ่งชี้ว่าขั้นตอนวิธีนั้นจะใช้เวลามากที่สุดไม่เกินเท่าใด หรือเป็นตัวกำหนดขอบเขตบนของเวลาที่ใช่ของขั้นตอนวิธีนั่นเอง โดยสัญลักษณ์โอตัวใหญ่นิยามดังนี้

$$f(x) = O(g(x)) \text{ ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่บวกสองค่า } c \text{ และ } x_0 \text{ ที่ } 0 \leq f(x) \leq cg(x)$$

สำหรับทุกค่า  $x \geq x_0$  เมื่อ  $f(x)$  และ  $g(x)$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  [11]

ถ้า  $f(N) = 4N^2 + 2N + 12$  เราได้ว่า  $f(N) = O(N^2)$  เนื่องจากมีค่า  $c = 8$  และ  $x_0 = 3$  ที่ทำให้เงื่อนไขของสัญลักษณ์โอตัวใหญ่เป็นจริง

### 4.2 ความซับซ้อนด้านเวลาของขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนาน

#### บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

การวิเคราะห์ความซับซ้อนด้านเวลาของแต่ละขั้นตอนวิธีแบบขนาน เวลาที่วิเคราะห์จะแบ่งเป็นเวลาที่ใช้ในการติดต่อสื่อสาร  $\alpha$  (Communication Time) และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ  $\beta$  (Computation Time) โดยกำหนดให้เวลา 1 ชั้นในการติดต่อสื่อสารเท่ากับเวลา 1 ชั้นในการคำนวณ

และถ้าการส่งข้อมูลระหว่างหน่วยประมวลผลทำแบบขนาน จะได้ว่าความซับซ้อนด้านเวลาจะเท่ากับ 1 ชั้นในการติดต่อสื่อสาร เนื่องจากการส่งข้อมูลระหว่างหน่วยประมวลผลที่อยู่ ณ ตำแหน่งใดๆ บนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิลจะใช้เวลาคงตัว คือ 1 ชั้นในการติดต่อสื่อสาร

**ขั้นตอนที่ 1** การรับข้อมูลนำเข้าจำนวน  $N$  ค่า

(การติดต่อสื่อสาร) การรับข้อมูลนำเข้าจำนวน  $N$  ค่า เป็นการส่งค่าแบบขนาน มีการส่งข้อมูลทั้งหมด 1 ครั้ง คือการส่งข้อมูลนำเข้มายังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 1 ดังแสดงในสมการที่ 4.1

$$\alpha = 1 \quad (4.1)$$

จากสมการที่ 4.1 สามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนที่ 1 มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$

**ขั้นตอนที่ 2** การหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละชุดข้อมูลย่อย

**ขั้นตอนที่ 2.1** (การคำนวณ) มีการคำนวณทั้งหมด 2 ครั้งคือ การแบ่งข้อมูลนำเข้าขนาด  $N$  ค่า เป็นชุดข้อมูลย่อยขนาด  $\sqrt{N}$  ค่า เป็นการคำนวณหาค่า  $k = (i) \operatorname{div}(\sqrt{N}) + 1$  เมื่อ  $k$  เป็นเลขแสดงลำดับชุดข้อมูล และ  $i$  เป็นเลขแสดงแถวของหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ซึ่งเก็บข้อมูลนำเข้า และการแบ่งระบบเครือข่ายเป็นระบบย่อย เป็นการคำนวณหาค่า  $k = (i) \operatorname{div}(\sqrt{N}) + 1$  เมื่อ  $i$  เป็นเลขแสดงแถวของทุกหน่วยประมวลผล ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 2.1 ดังแสดงในสมการที่ 4.2

$$\beta = 2 \quad (4.2)$$

**ขั้นตอนที่ 2.2** (การคำนวณ) จากทฤษฎีบทที่ 8 หัวข้อที่ 2.6.1 ได้ว่าแต่ละระบบย่อยขนาด  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  สามารถหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของข้อมูลนำเข้าขนาด  $\sqrt{N}$  ค่าที่เก็บไว้ได้ในเวลาคงตัว ดังนั้นความซับซ้อนด้านเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 2.2 เป็น  $O(1)$

**ขั้นตอนที่ 2.3** (การติดต่อสื่อสาร) มีการส่งข้อมูลทั้งหมด 1 ครั้งคือ การส่งข้อมูลจากทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1 ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในแถวเดียวกัน ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 2.3 ดังแสดงในสมการที่ 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และดัดแปลงอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\alpha = 1 \quad (4.3)$$

จากขั้นตอนที่ 2.1 และ 2.3 เราจะได้ความซับซ้อนด้านเวลาทั้งหมดเป็น  $\tau$  ดังแสดงในสมการที่ 4.4

$$\begin{aligned}\tau &= \beta + \alpha \\ &= 2 + 1\end{aligned}\quad (4.4)$$

จากสมการที่ 4.4 และความซับซ้อนด้านเวลาในขั้นตอนที่ 2.2 สามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนที่ 2 มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$

**ขั้นตอนที่ 3** การหาเส้นทางด้านบนและเส้นทางด้านล่างระหว่างแต่ละ  $CH(S_i)$

ขั้นตอนที่ 3.1 (การติดต่อสื่อสาร) มีการส่งข้อมูลแบบขนานทั้งหมด 1 ครั้งคือ การส่งข้อมูลจากหน่วยประมวลผลที่  $P(i,i)$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 3.1 ดังแสดงในสมการที่ 4.5

$$\alpha_1 = 1 \quad (4.5)$$

ขั้นตอนที่ 3.2 (การคำนวณ) ใช้ทฤษฎีบทที่ 7 ในหัวข้อที่ 2.5.1 หาเส้นทางระหว่างแต่ละระบบย่อยได้ในเวลาดังตัว ดังนั้นความซับซ้อนด้านเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 3.2 เป็น  $O(1)$

ขั้นตอนที่ 3.3 (การติดต่อสื่อสาร) มีการส่งข้อมูลแบบขนานทั้งหมด 1 ครั้งคือ การส่งผลลัพธ์ของเส้นทางที่หาได้ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(i,x)$  ในทุกระบบย่อย ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 3.3 ดังแสดงในสมการที่ 4.6

$$\alpha_2 = 1 \quad (4.6)$$

ขั้นตอนที่ 3.4 (การติดต่อสื่อสาร) มีการส่งข้อมูลแบบขนานทั้งหมด 1 ครั้งคือ การส่งผลลัพธ์ของเส้นทางจากหน่วยประมวลผลที่  $P(i,x)$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักเดียวกัน ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 3.4 ดังแสดงในสมการที่ 4.7

$$\alpha_3 = 1 \quad (4.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ขั้นตอนที่ 3.5 (การคำนวณ) มีการคำนวณทั้งหมด 2 ครั้ง คือ การคำนวณครั้งที่ 1 ทุกหน่วยประมวลผลในแต่ละหลักคำนวณว่าค่าที่เก็บไว้มีค่าต่ำกว่า (สูงกว่า) หรืออยู่บนเส้นทางด้าน

ด้านบน (ด้านล่าง) ที่ส่งมาจากขั้นตอนที่ 3.4 หรือไม่ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการในหัวข้อที่ 2.2.2 ในบทที่ 2 และเวลาที่ใช้ในการคำนวณดังแสดงในสมการที่ 4.8

$$\beta_1 = 2 \quad (4.8)$$

และการคำนวณว่าหลักใดที่เงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริงในทุกหน่วยประมวลผล ซึ่งคำนวณโดยใช้การดำเนินการทางตรรกะแอนด์ (Logical AND Operation) จากทฤษฎีบทที่ 4 ในหัวข้อที่ 2.3.4 จะได้ว่า การดำเนินการดังกล่าวสามารถคำนวณได้ในเวลาคงตัว ดังนั้นความซับซ้อนด้านเวลาในการคำนวณครั้งที่ 2 ในขั้นตอนที่ 3.5 เป็น  $O(1)$

ขั้นตอนที่ 3.6 (การคำนวณ) มีการคำนวณทั้งหมด 3 ครั้ง คือ การคำนวณครั้งที่ 1 ในหลักที่ตรวจสอบพบเส้นค้ำจุน ทุกหน่วยประมวลผลในหลักนั้นคำนวณว่าค่าที่เก็บไว้อยู่บนเส้นค้ำจุนหรือไม่ โดยใช้สมการในหัวข้อที่ 2.2.2 ในบทที่ 2 การคำนวณครั้งที่ 2 หน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบเงื่อนไขดังกล่าวเซตค่า Mark = true การคำนวณครั้งที่ 3 หน่วยประมวลผลที่ตรวจสอบพบเงื่อนไขดังกล่าวเซตค่าตัวแปร Up (Low) เป็นค่าที่เก็บไว้ในกรณีที่เส้นค้ำจุนที่พบเป็นเส้นค้ำจุนด้านบน (ล่าง) ดังนั้นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 3.6 ดังแสดงในสมการที่ 4.9

$$\beta_2 = 3 \quad (4.9)$$

ขั้นตอนที่ 3.7 (การคำนวณ) ในแต่ละแถว มีการคำนวณทั้งหมด 3 ครั้ง คือ มีการดำเนินการทางตรรกะออร์ (Logical OR Operation) ค่า Mark = true การดำเนินการออร์ค่า Up และการดำเนินการออร์ค่า Low จากทฤษฎีบทที่ 4 ในหัวข้อที่ 2.3.4 จะได้ว่า การดำเนินการดังกล่าวสามารถคำนวณได้ในเวลาคงตัว ดังนั้นความซับซ้อนด้านเวลาในการคำนวณในขั้นตอนที่ 3.7 เป็น  $O(1)$

(การติดต่อสื่อสาร) และมีการติดต่อสื่อสารทั้งหมด 3 ครั้ง คือ การส่งค่า Mark = true การส่งค่า Up และการส่งค่า Low ไปยังหน่วยประมวลผลหลักที่ 1 ในแต่ละแถวที่ดำเนินการออร์แล้วได้ค่าผลลัพธ์เป็นจริง โดยเวลาที่ใช้ในการติดต่อสื่อสารสำหรับขั้นตอนที่ 3.7 ดังแสดงในสมการที่ 4.10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการ  $\alpha_4 = 3$  เท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ (4.10) การคำนวณว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากขั้นตอนที่ 3.1 ถึงขั้นตอนที่ 3.7 จะได้ความซับซ้อนด้านเวลาทั้งหมดเป็น  $\tau$  ดังแสดงในสมการที่ 4.11

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_4 \\ &= 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 11\end{aligned}\quad (4.11)$$

จากสมการที่ 4.11 ความซับซ้อนด้านเวลาที่ใช้ในขั้นตอนที่ 3.2 ความซับซ้อนด้านเวลาในการคำนวณครั้งที่ 2 ในขั้นตอนที่ 3.5 และความซับซ้อนด้านเวลาในการคำนวณในขั้นตอนที่ 3.7 สามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนที่ 3 มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$

**ขั้นตอนที่ 4** การรวมผลลัพธ์จากทุกรอบการทำงาน

เป็นขั้นตอนที่แสดงให้เห็นผลลัพธ์ที่ได้จากทุกรอบการทำงาน ดังนั้นไม่มีการคำนวณและไม่มีการติดต่อสื่อสาร

**ขั้นตอนที่ 5** การรวมผลลัพธ์ที่เป็นจุดของคอนเวกซ์ฮัลสองมิติ

ในแต่ละระบบย่อยที่  $x$  มีความซับซ้อนด้านเวลาดังนี้

- เมื่อ  $x = 1$  มีการคำนวณทั้งหมด 3 ครั้งและมีการติดต่อสื่อสารทั้งหมด 2 ครั้ง ดังนี้
  - การคำนวณครั้งที่ 1 เป็นการเซตค่าให้กับหน่วยประมวลผลที่  $P(a,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า  $Up$  และ  $P(b,1)$  เป็นหน่วยประมวลผลที่เก็บค่า  $Low$
  - การติดต่อสื่อสารครั้งที่ 1 ให้ส่งค่า  $a$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(a,1)$  ไปยังหน่วยประมวลผลที่  $P(b,1)$
  - การคำนวณครั้งที่ 2 เปรียบเทียบค่า  $a$  กับค่า  $b$
  - การติดต่อสื่อสารครั้งที่ 2 ส่งผลการเปรียบเทียบค่าไปยังทุกหน่วยประมวลผล
  - การคำนวณครั้งที่ 3 ทุกหน่วยประมวลผลคำนวณว่าต้องเซตค่า  $Mark = true$  หรือไม่ โดยเวลาที่ใช้ในการคำนวณและเวลาที่ใช้ในการติดต่อสื่อสาร ดังแสดงในสมการที่ 4.12 และ 4.13 ตามลำดับ

$$\beta = 3 \quad (4.12)$$

$$\alpha = 2 \quad (4.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีจุดประสงค์เพื่อเผยแพร่ความรู้ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ จากสมการที่ 4.12 และ 4.13 สามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนที่ 5 ในระบบย่อยที่ 1 มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$

การติดต่อสื่อสารครั้งที่ 4 ส่งค่า  $b_2$  จากหน่วยประมวลผลที่  $P(b_2,1)$  ไปยังทุกหน่วยประมวลผลในหลักที่ 1

การคำนวณครั้งที่ 4 ให้ทุกหน่วยประมวลผลที่  $P(x,1)$  เปรียบเทียบว่าค่า  $b_1 < x < b_2$  หรือไม่

การคำนวณครั้งที่ 5 ให้หน่วยประมวลผลที่เปรียบเทียบเป็นจริงเซตค่า  $Mark = true$

โดยเวลาที่ใช้ในการคำนวณและเวลาที่ใช้ในการติดต่อสื่อสาร ดังแสดงในสมการที่ 4.16 และ 4.17 ตามลำดับ

$$\beta = 5 \quad (4.16)$$

$$\alpha = 4 \quad (4.17)$$

จากสมการที่ 4.16 และ 4.17 สามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนที่ 5 ในระบบย่อยที่  $x$  เมื่อ  $1 < x < \sqrt{N}$  มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$

เนื่องจากการทำงานในทุกระบบย่อยของขั้นตอนที่ 5 มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$  ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนที่ 5 มีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$

ในการทำงานตามขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิล โดยมีข้อมูลนำเข้าจำนวน  $N$  ค่าจะมีการทำงานดังนี้

1. มีการทำงานตามขั้นตอนที่ 1 จำนวน 1 รอบการทำงาน ดังนั้นมีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$
2. มีการทำงานตามขั้นตอนที่ 2 จำนวน 1 รอบการทำงาน ดังนั้นมีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$
3. มีการทำงานตามขั้นตอนที่ 3 จำนวน  $\sqrt{N}$  รอบการทำงาน ดังนั้นมีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(\sqrt{N})$
4. มีการทำงานตามขั้นตอนที่ 4 จำนวน 1 รอบการทำงาน เป็นขั้นตอนที่แสดงให้เห็นผลลัพธ์ที่ได้จากทุกรอบการทำงาน ไม่มีการคำนวณและไม่มีการติดต่อสื่อสาร
5. มีการทำงานตามขั้นตอนที่ 5 จำนวน 1 รอบการทำงาน ดังนั้นมีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(1)$

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกูเรเบิลมีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(\sqrt{N})$

## บทที่ 5

# บทสรุปและแนวทางการพัฒนางานวิจัย

เนื้อหาในบทนี้เป็นบทสรุปของงานวิจัย โดยสรุปว่าในงานวิจัยนี้มีการพัฒนาปรับปรุงขั้นตอนวิธี ทำให้ได้ขั้นตอนวิธีใหม่ที่ดีกว่าเดิมในส่วนตัว และเสนอแนวทางในการพัฒนางานวิจัย

### 5.1 บทสรุป

จากการศึกษาขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติที่นำเสนออยู่ในงานวิจัยของ Olariu S., Schwing J.L. และ Zhang J เรื่อง Time-Optimal Convex Hull Algorithms on Enganced Meshes ในปี ค.ศ. 1993 พบว่าขั้นตอนวิธีดังกล่าวเป็นขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิล ที่มีการใช้เทคนิคการแบ่งข้อมูลนำเข้าเป็นชุดข้อมูลย่อย และใช้ขั้นตอนวิธีย่อยที่เหมาะสมที่สุดสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติในการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติของแต่ละชุดข้อมูลย่อย และใช้ขั้นตอนวิธีการหาเส้นค้ำจุนบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิลในการหาเส้นค้ำจุนของแต่ละเซตผลลัพธ์ โดยขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดนี้ใช้ระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิลขนาด  $N \times N$  ที่มีความซับซ้อนด้านเวลาคงตัว  $O(1)$

ผู้วิจัยจึงได้นำขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมที่สุดดังกล่าวมาพัฒนาต่อ โดยมุ่งเน้นที่จะทำให้ขั้นตอนวิธีใหม่ที่ได้สามารถทำงานได้โดยใช้ระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิลที่มีขนาดเล็กน้อยกว่าขั้นตอนวิธีเดิม ซึ่งทำให้ได้ขั้นตอนวิธีใหม่คือ ขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิล ดังที่ได้นำเสนอไว้ในบทที่ 3 โดยขั้นตอนวิธีใหม่ที่ได้ใช้ระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิลขนาด  $N \times \sqrt{N}$  และในบทที่ 4 จะเป็นการวิเคราะห์ความซับซ้อนด้านเวลาของขั้นตอนวิธีใหม่ที่ได้ โดยแสดงให้เห็นว่าขั้นตอนวิธีใหม่ที่ได้นำเสนอในบทที่ 3 นั้นมีความซับซ้อนด้านเวลาเป็น  $O(\sqrt{N})$

### 5.2 แนวทางการพัฒนางานวิจัย

- ออกแบบขั้นตอนวิธีการหาคอนเวกซ์ฮัลสองมิติแบบขนานบนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิลที่มีความซับซ้อนด้านเวลาน้อยกว่า  $O(\sqrt{N})$
- นำเสนอขั้นตอนวิธีสำหรับหาคอนเวกซ์ฮัลในมิติใดๆ บนระบบเครือข่ายแบบดาข่ายรีคอนฟิวเรเบิล

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Barber C. Bradford, Dobkin David P. and Huhdanpaa Hannu. "The Quickhull Algorithm for Convex Hulls" **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, vol.22, no.4, December 1996. pp.469-483.
- [2] Chadnoy R. V. and Skvortsov A. V. "Convex Hull Algorithms Review" **Proc. Science and Technology, Russian-Korean**, July 2004. Pp.112-115.
- [3] Jaja Joseph. **An Introduction to Parallel Algorithms**. New York : Addison-Wesley. 1992.
- [4] Jang J.-W., Park H. and Prasanna V.K. "A Fast Algorithm for Computing a Histogram on Reconfigurable Mesh" **IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence**, vol.17, no.2, February 1995. Pp.97-106.
- [5] Ladner Richard E. and Fischer Michael J. "Parallel Prefix Computation" **Journal of the Association for Computing Machinery.**, vol.27, no.4, October 1980. pp. 831-838.
- [6] Lakshmiraragan S., Dhall Sudarshan K. **Analysis and Design of Parallel Algorithms : Arithmetic and Matrix Problems**. Singapore : McGraw-Hill. 1990.
- [7] Lin R., Olariu S., Schwing J. L. and Zhang J. "Sorting in  $O(1)$  time on an  $n \times n$  Reconfigurable mesh" **Parallel Computing: From Theory to Sound Practice, Proc. EWPC'92, Plenary Address, IOS Press**, 1992, 16-27.
- [8] Olariu S., Schwing J.L. and Zhang J. "Time-Optimal Convex Hull Algorithms on Enganged Meshes" **BIT Numerical Mathematics**, vol.33, no.3, September 1993. pp.396-410.
- [9] Olariu Stephan, Schwing James L. and Zhang Jingyuan. "Fundamental Data Movement Algorithms for Reconfigurable Meshes" **Proc. International Phoenix Conference on Computers and Communications, Scottsdale, Arizona**, 1992, 472-479.
- [10] R. Miller, V.K. Prasanna Kumar, D. I. Reisis, and Q. F. Stout, "Data Movement Operations and Application on Reconfigurable VLSI Arrays." **Proc. International Conference on Parallel Processing**, vol.1, 1988. pp. 205-208.
- [11] ชัยพฤกษ์ กักดีพรหมมา. "การเรียงลำดับข้อมูลแบบขนานด้วยวิธีผสมบนระบบเครือข่ายแบบตาข่ายรีคอนฟิกิวเรเบิล." วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2550.
- [12] นันทนา พรทวีปตานนท์. "ระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ (Geographic Information System : GIS)" [Online]. เข้าถึงได้จาก : <http://www.geocities.com/nuntanap/info/gisinfo.htm>. 2544.

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – สกุล	นางสาวสุวารี แก้วปรารณา
วัน เดือน ปีเกิด	22 มิถุนายน 2526
ที่อยู่	89 หมู่ 10 ตำบลบ้านแพ้ว อำเภอบ้านแพ้ว จังหวัดสมุทรสาคร 74120
ประวัติการศึกษา	2548 จบการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้