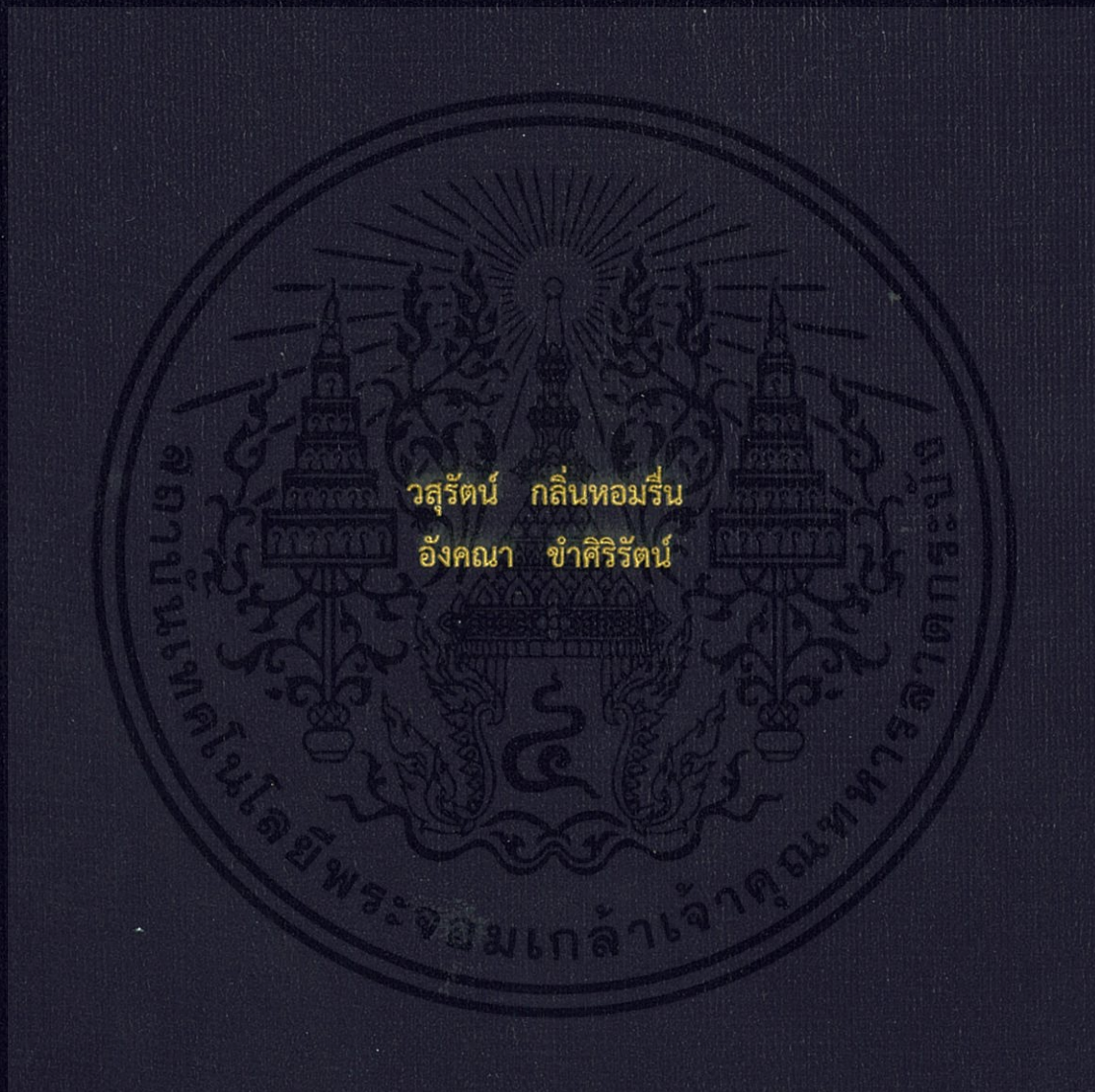


การออกแบบขั้นตอนวิธีและพัฒนาโปรแกรมเพื่อการคำนวณบนจำนวนเต็มเกาส์
DESIGNS ALGORITHM AND IMPLEMENTS FOR
COMPUTING ON GAUSSIAN INTEGER



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2557

การออกแบบขั้นตอนวิธีและพัฒนาโปรแกรมเพื่อการคำนวณบนจำนวนเต็มเกาส์

DESIGNS ALGORITHM AND IMPLEMENTS FOR
COMPUTING ON GAUSSIAN INTEGER



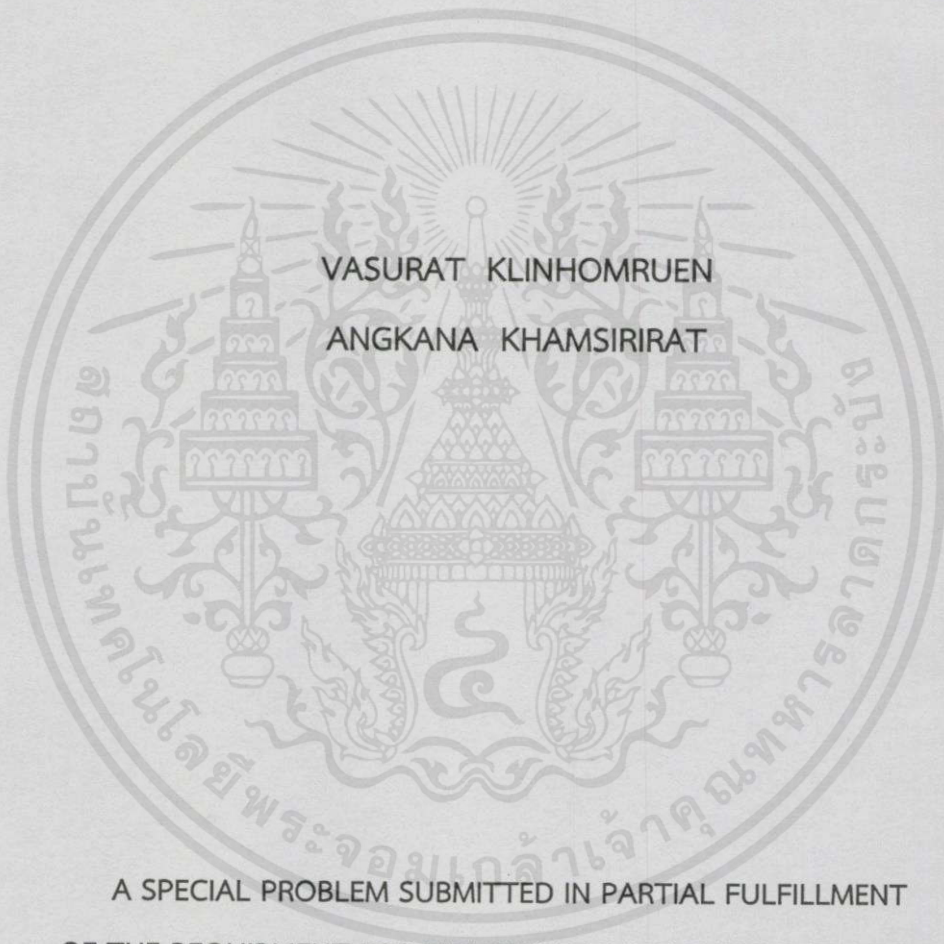
วสุรัตน์ กลิ่นหอมรีน
อังคณา ขำศิริรัตน์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานภายในของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้นำเอกสารนี้ไปใช้ประโยชน์อื่นใดโดยไม่ได้รับอนุญาตจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

DESIGNS ALGORITHM AND IMPLEMENTS FOR
COMPUTING ON GAUSSIAN INTEGER



VASURAT KLINHOMRUEN
ANGKANA KHAMSIRIRAT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2014

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานภายในของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ไม่ทำกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ

การออกแบบขั้นตอนวิธีและพัฒนาโปรแกรมเพื่อการคำนวณบน
จำนวนเต็มเกาส์

Designs Algorithm and Implements for Computing on
Gaussian Integer

ชื่อนักศึกษา

นายวสุรัตน์ กลิ่นหอมรีน 54050071
นางสาวอังคณา ขำศิริรัตน์ 54050111

ปริญญา

วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา

คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา

2557

อาจารย์ที่ปรึกษา

รองศาสตราจารย์ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

รองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้
ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ประจำปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.ภัทรารุช จันทรเสงี่ยม ประธานกรรมการ	วิเศษ วิเศษ
ดร.สิริพร แชนนำ วินเทอร์ กรรมการ	สิริพร
รศ.ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ไพโรบลย์
รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	พัชรินทร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์ อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ภายใต้งานที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ

การออกแบบขั้นตอนวิธีและพัฒนาโปรแกรมเพื่อการคำนวณบน

จำนวนเต็มเกาส์

ชื่อนักศึกษา

นายสุรัตน์ กลิ่นหอมรื่น 54050071

นางสาวอังคณา ขำศิริรัตน์ 54050111

ปริญญา

วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา

คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา

2557

อาจารย์ที่ปรึกษา

รองศาสตราจารย์ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

รองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมบนแท็บเล็ตเพื่อช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับการดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์ที่แสดงรายละเอียดขั้นตอนการดำเนินการได้แก่ การบวกการลบ การคูณ การหารลงตัว การหาตัวหารร่วมมากโดยขั้นตอนวิธียุคลิด การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ โดยขั้นตอนวิธียุคลิดแบบขยาย การมอดุโล การหาผกผัน การพิจารณาจำนวนเฉพาะเกาส์การแยกตัวประกอบของจำนวนเต็มเกาส์ การพิจารณาจำนวนเฉพาะการหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม และในโปรแกรมจะมีส่วนความรู้ได้แก่ นิยาม ทฤษฎีบท ที่เกี่ยวข้อง และ ขั้นตอนวิธีการดำเนินการ

โปรแกรมนี้พัฒนาด้วยภาษา Java โดยโปรแกรม Eclipse และคาดหวังว่าจะช่วยให้ผู้ที่ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนเต็มเกาส์ทำความเข้าใจได้เร็วขึ้นและตรวจทานคำตอบการคำนวณได้เร็วขึ้น และสามารถบันทึกประวัติการใช้งานเพื่อประกอบการประเมินการเรียนรู้

คำสำคัญ: จำนวนเต็มเกาส์ จำนวนเฉพาะ จำนวนเฉพาะเกาส์ ตัวหารร่วมมาก ผลบวกกำลังสอง 2 เทอม สมการไดโอแฟนไทน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Designs and Implements of Computation Algorithms on Gaussian Integer	
Students	Mr.Vasurat Klinhomruen	54050071
	Ms.Angkana Khamsirirat	54050111
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Academic Year	2014	
Advisor	Assoc.Prof.Praiboon Pantaragphong	
CO-advisor	Assoc.Prof.Patcharin Hemchote	

Abstract

This project is a software development on tablet. The aim of program is to compute about operation on Gaussian integers with detail step of computation. The operation are including addition, subtraction, multiplication, divisibility, greatest common divisor using Euclid algorithm, solution of Diophantine using extended Euclid algorithm, modulus, inverse modulo, Gaussian prime check, Gaussian prime factorization, prime number check, represent as sum of two squares. The program has information part such as definitions, Theorems and relate algorithm.

This program developed by Java of Eclipse. We expected that this program will help the person interested about Gaussian integers can be more understand and rapidly verify the result of computation, and program can record a history of usage for evaluate the study.

Keyword: Gaussian integer, prime number, Gaussian prime number, greatest common divisor, sum of two squares, Diophantine equation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และข้อมูลอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการออกแบบและพัฒนาโปรแกรมขั้นตอนวิธีคำนวณบนจำนวนเต็มเกาส์นั้นประสบความสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาอย่างสูงจากรองศาสตราจารย์ไพโรบลย์ พันธุ์พงษ์ และรองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ อาจารย์ที่ปรึกษาที่กรุณาให้คำแนะนำปรึกษาตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง ผู้วิจัยตระหนักถึงความตั้งใจจริงและทุ่มเทของอาจารย์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจเสมอมา จนการศึกษาในครั้งนี้ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

นายสุรัตน์ กลิ่นหอมริน

นางสาวอังคณา ขำศิริรัตน์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญรูป	ช
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับสำหรับผู้พัฒนา	1
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน	2
1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 จำนวนเต็มเกาส์	3
2.1.1 ขนาด	3
2.1.2 จำนวนหนึ่งหน่วย	4
2.1.3 ทฤษฎีการหาร	4
2.1.4 ขั้นตอนวิธียุคลิด	5
2.1.5 จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์	5
2.1.6 สมการไดโอแฟนไทน์	6
2.1.7 ขั้นตอนยุคลิดแบบขยาย	7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและดึงอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
2.1.8 การแยกตัวประกอบเพียงแบบเดียว	9
2.2 ขั้นตอนวิธีที่เกี่ยวข้อง.....	11
2.2.1 ขั้นตอนวิธียุคลิดสำหรับการหาตัวหารร่วมมาก	11
2.2.2 ขั้นตอนวิธียุคลิดแบบขยายสำหรับหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์	11
2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	12
2.3.1 โปรแกรมคำนวณจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number).....	12
2.3.2 โปรแกรม Complex Number Calculator	13
2.3.3 โปรแกรม Operation with one Complex Number	14
บทที่ 3 การออกแบบโปรแกรม	16
3.1 ส่วนติดต่อผู้ใช้	16
3.1.1 เมนูรายการหัวข้อการทำงาน	16
3.1.2 การคำนวณจำนวนเต็มเก้าส์	17
3.1.3 การหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม	17
3.1.4 ขั้นตอนวิธีการดำเนินการ.....	18
3.1.5 การตรวจสอบจำนวนเฉพาะเก้าส์	18
3.1.6 การตรวจสอบจำนวนเฉพาะ	19
3.1.7 นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	19
3.1.8 แบบทดสอบ	20
3.1.9 ประวัติการใช้โปรแกรม.....	20
3.1.10 ผู้พัฒนาโปรแกรม.....	21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
3.2 การดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์.....	21
3.3 การคำนวณหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม.....	26
บทที่ 4 การพัฒนาโปรแกรม	29
4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนา	29
4.2 การรับข้อมูล.....	29
4.3 รายละเอียดการดำเนินการ.....	30
4.4 การดำเนินการ.....	31
4.5 การดำเนินการอื่นๆ.....	37
4.6 พัฒนาแอปพลิเคชันเพื่อใช้งานบน Tablet.....	40
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ.....	51
5.1 สรุปผล.....	51
5.2 ปัญหาและอุปสรรค.....	52
5.3 ข้อเสนอแนะ.....	52
เอกสารอ้างอิง.....	53
ภาคผนวก.....	54
ภาคผนวก ก ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรม.....	55
ภาคผนวก ข คู่มือการใช้งานโปรแกรม.....	59
ภาคผนวก ค แนวทางและการประยุกต์ใช้งานเรื่องจำนวนเต็มเกาส์.....	65

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปร่าง

รูปที่	หน้า
2.1 ขั้นตอนวิธียุคลิดแบบขยาย.....	12
2.2 รับข้อมูลเพื่อคำนวณ.....	12
2.3 ผลลัพธ์เมื่อคำนวณแล้วมีข้อผิดพลาด.....	12
2.4 แสดงผลการบวก.....	13
2.5 แสดงผลการลบ.....	13
2.6 แสดงผลการคูณ.....	13
2.7 แสดงผลการยกกำลัง.....	13
2.8 Operation with Complex Number (1).....	14
2.9 Operation with Complex Number (2).....	14
2.10 Operation with Complex Number (3).....	15
3.1 หน้าแรก.....	16
3.2 เมนูรายการหัวข้อการทำงาน.....	16
3.3 Calculating Gaussian Integers.....	17
3.4 Calculating Sums Of Two Squares.....	17
3.5 Algorithm.....	18
3.6 Gaussian Prime Check.....	18
3.7 Prime Number Check.....	19
3.8 Definition's and Theorems.....	19
3.9 Quiz.....	20
3.10 History.....	20
3.11 About Us.....	21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.12 การดำเนินการ	21
3.13 ผลลัพธ์ของการดำเนินการ (Enter).....	22
3.14 เมื่อ Detail: On.....	22
3.15 เมื่อ Detail: Off.....	23
3.16 ก่อนทำการ Swap A B.....	23
3.17 เมื่อกดปุ่ม Swap A B.....	24
3.18 ก่อนทำการกดปุ่ม Clear A B.....	24
3.19 เมื่อกดปุ่ม Clear A B.....	25
3.20 ก่อนกดปุ่ม Clear.....	25
3.21 เมื่อกดปุ่ม Clear.....	26
3.22 ตัวอย่างจำนวนที่เขียนแทนผลบวกกำลังสอง 2 เทอมไม่ได้.....	26
3.23 ตัวอย่างจำนวนที่เขียนแทนผลบวกกำลังสอง 2 เทอมได้.....	27
3.24 ก่อนกดปุ่ม Clear.....	27
3.25 เมื่อกดปุ่ม Clear.....	28
4.1 ตัวอย่างการดำเนินการการบวก.....	32
4.2 ตัวอย่างการดำเนินการการลบ.....	32
4.3 ตัวอย่างการดำเนินการการคูณ.....	33
4.4 ตัวอย่างการดำเนินการการพิจารณาการหาร.....	33
4.5 ตัวอย่างการดำเนินการการหาร.....	34
4.6 ตัวอย่างการดำเนินการการหาขนาด.....	34
4.7 ตัวอย่างการดำเนินการการหาตัวหารร่วมมาก.....	35

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และตัวอย่างอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

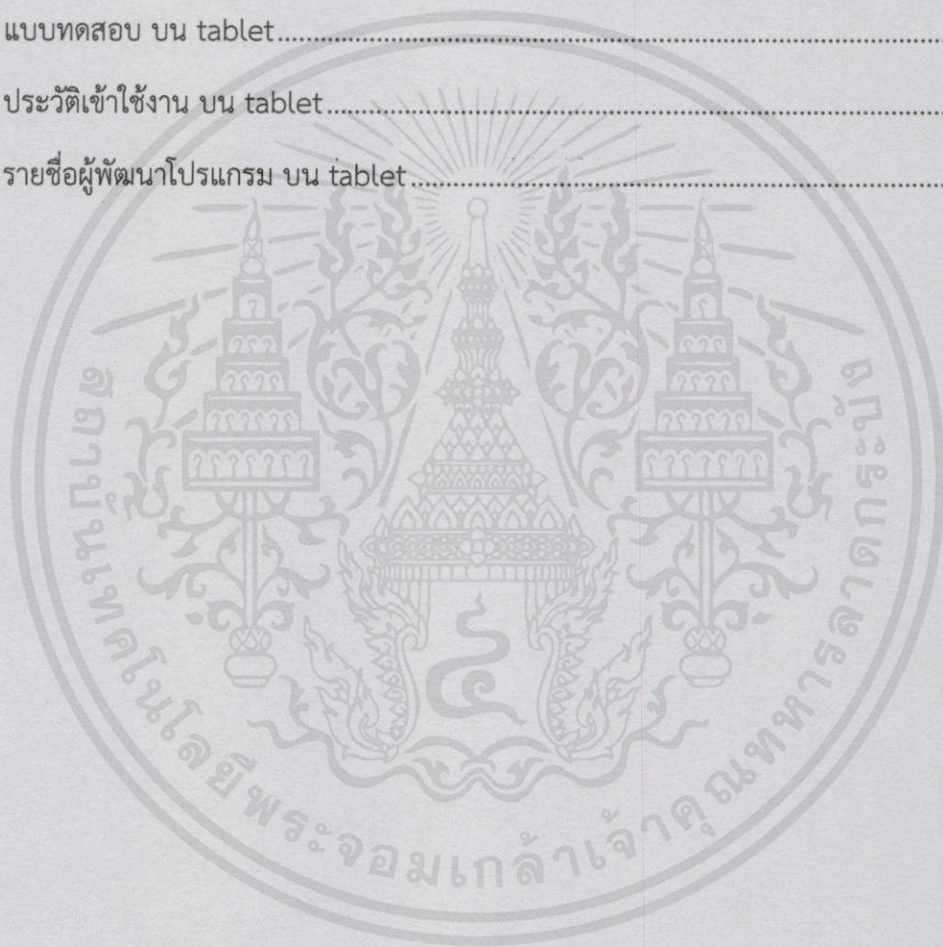
สารบัญรูปรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.8 ตัวอย่างการดำเนินการการหาสมการไดโอฟานไทน์	35
4.9 ตัวอย่างการดำเนินการการแยกตัวประกอบ	36
4.10 ตัวอย่างการดำเนินการการบวกการมอดุโล	36
4.11 ตัวอย่างการดำเนินการการยกกำลังด้วยจำนวนนับ	37
4.12 ตัวอย่างการหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม	38
4.13 ตัวอย่างการพิจารณาจำนวนเฉพาะ	39
4.14 ตัวอย่างการพิจารณาจำนวนเฉพาะเกาส์	39
4.15 หน้าแรก บน tablet	40
4.16 เมนูรายการหัวข้อการทำงาน บน tablet	41
4.17 ตัวอย่างการดำเนินการการบวกบน tablet	41
4.18 ตัวอย่างการดำเนินการการลบ บน tablet	42
4.19 ตัวอย่างการดำเนินการการคูณ บน tablet	42
4.20 ตัวอย่างการดำเนินการการพิจารณาการหาร บน tablet	43
4.21 ตัวอย่างการดำเนินการการหาร บน tablet	43
4.22 ตัวอย่างการดำเนินการการหาขนาด บน tablet	44
4.23 ตัวอย่างการดำเนินการการหาตัวหารร่วมมาก บน tablet	44
4.24 ตัวอย่างการดำเนินการการหาสมการไดโอฟานไทน์ บน tablet	45
4.25 ตัวอย่างการดำเนินการการแยกตัวประกอบ บน tablet	45
4.26 ตัวอย่างการดำเนินการการบวกการมอดุโล บน tablet	46
4.27 ตัวอย่างการดำเนินการการยกกำลังด้วยจำนวนนับ บน tablet	46
4.28 ตัวอย่างการหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม บน tablet	47

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปร่าง(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.29 ขั้นตอนการดำเนินการ บน tablet.....	47
4.30 ตัวอย่างการพิจารณาจำนวนเฉพาะเกาส์ บน tablet	48
4.31 ตัวอย่างการพิจารณาจำนวนเฉพาะ บน tablet.....	48
4.32 บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง บน tablet	49
4.33 แบบทดสอบ บน tablet.....	49
4.34 ประวัติเข้าใช้งาน บน tablet.....	50
4.35 รายชื่อผู้พัฒนาโปรแกรม บน tablet	50



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

จำนวนเต็มเกาส์เป็นจำนวนที่ประกอบด้วย 2 จำนวนเต็มใดๆในรูป $x = a + bi$ เมื่อ $i^2 = -1$ ในการดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์มีเช่นเดียวกับการดำเนินการบนจำนวนเต็ม การดำเนินการพื้นฐาน เช่น การบวก การคูณ การบวกผกผัน และการคูณผกผัน การศึกษาคุณสมบัติเกี่ยวกับจำนวนเต็มเกาส์ 2 จำนวน เช่น การหารลงตัว การพิจารณาจำนวนเฉพาะเกาส์ การแยกตัวประกอบของจำนวนเต็มเกาส์ การหาตัวหารร่วมมาก ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ การมอดุโล และการคำนวณ การยกกำลังด้วยจำนวนนับ การมอดุโล ซึ่งในจำนวนเต็มเกาส์และจำนวนเต็มจะมีความเชื่อมโยงกัน

ในวิธีการข้างต้นในวิธีทางคณิตศาสตร์มีการศึกษาแล้ว แต่ในขณะที่เรียนรู้และการหาคำตอบการตรวจสอบคำตอบจะใช้เวลาค่อนข้างมากจึงคำนวณผิดพลาดได้ง่าย

โครงการนี้จึงสนใจศึกษาวิธีการทางคณิตศาสตร์ทั้งทางทฤษฎีและศึกษาออกแบบวิธีการทางคอมพิวเตอร์ เพื่อเป็นเครื่องมือช่วยให้การคำนวณทำได้รวดเร็วและถูกต้องแม่นยำ

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

- 1) ศึกษาและทำความเข้าใจจำนวนเต็มเกาส์และการดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์
- 2) ศึกษาคุณสมบัติและการดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็มเกาส์ 2 จำนวน
- 3) ออกแบบขั้นตอนวิธีคำนวณและพัฒนาโปรแกรมเพื่อคำนวณหาผลดำเนินการ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

- 1) โปรแกรมพัฒนาบนระบบปฏิบัติการวินโดวส์แบบผู้ใช้คนเดียว (เพื่อให้สะดวกต่อการติดตั้งใช้งานไม่ต้องมีผู้ดูแลระบบ)
- 2) ค่ามากที่สุดน้อยที่สุดของจำนวนอยู่ที่ข้อจำกัดของการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับสำหรับผู้พัฒนา

- 1) ได้ศึกษาจำนวนเต็มเกาส์การดำเนินการและคุณสมบัติของการดำเนินการ
- 2) ศึกษาเรียนรู้การออกแบบขั้นตอนวิธีและการพัฒนาโปรแกรมช่วยคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเต็มเกาส์
- 3) สามารถใช้เป็นเครื่องมือช่วยคำนวณการดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็มเกาส์ ซึ่งจะช่วยให้ศึกษาเรียนรู้ทำความเข้าใจเนื้อหาได้เร็วขึ้น และใช้ตรวจทานคำตอบในการฝึกทำโจทย์
- 4) ช่วยให้ผู้ผู้ใช้ประหยัดค่าใช้จ่ายในการซื้อโปรแกรมช่วยคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

- 1) ศึกษาคุณลักษณะและการดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์
- 2) ศึกษาการดำเนินการที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มเกาส์ 2 จำนวนและคุณสมบัติที่เกี่ยวข้อง เช่น การหารลงตัว จำนวนเฉพาะเกาส์ การแยกตัวประกอบ การหาตัวหารร่วมมาก ขั้นตอนวิธีการหารการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ การมอดุโล การยกกำลังด้วยจำนวนนับ
- 3) ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับภาษาคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการเขียนโปรแกรม
- 4) ศึกษาและออกแบบรูปแบบอินพุตและรูปแบบผลลัพธ์โครงสร้างโปรแกรม
- 5) ออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm) และพัฒนาโปรแกรมพร้อมทดสอบการใช้งานโปรแกรม
- 6) รวบรวมและจัดทำรายงานโครงงานปัญหาพิเศษและเผยแพร่โปรแกรม

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

การดำเนินการ	ระยะเวลาในการดำเนินการ									
	ปี 2557					ปี 2558				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1) ศึกษาข้อมูลและเตรียมการทำปัญหาพิเศษ										
2) ศึกษาขั้นตอน และโปรแกรมที่เกี่ยวข้อง										
3) ออกแบบอินเตอร์เฟส										
4) ศึกษาและรวบรวมขั้นตอนวิธีการดำเนินการ										
5) ดำเนินการพัฒนาโปรแกรม										
6) เตรียมการนำเสนอและจัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ										
7) นำเสนอปัญหาพิเศษ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 จำนวนเต็มเกาส์

จำนวนเต็มเกาส์เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงและส่วนจินตภาพเป็นจำนวนเต็มสามารถเขียนแทนด้วย $Z[i]$ และ

$$Z[i] = \{a + bi \mid a, b \in Z\} \text{ โดยที่ } i^2 = -1$$

ตัวอย่าง 2.1 ตัวอย่างจำนวนเต็มเกาส์ $2 + 3i$, $5 + 10i$, $55 - 4i$, $34 - 43i$

2.1.1 ขนาด

สำหรับ $\alpha = a + bi$ เป็นสมาชิกของ $Z[i]$ ขนาดของ α แทนด้วย $N(\alpha)$ และ

$$N(\alpha) = \alpha \bar{\alpha} = (a + bi)(\overline{a + bi}) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

ตัวอย่าง 2.2 $N(5 + 7i) = (5 + 7i)(\overline{5 + 7i}) = (5 + 7i)(5 - 7i) = 5^2 + 7^2 = 74$ และ

$$N(5 - 7i) = (5 - 7i)(\overline{5 - 7i}) = (5 - 7i)(5 + 7i) = 5^2 + 7^2 = 74$$

ขนาดของผลคูณ α, β สามารถหาได้จากขนาดของ α, β เมื่อ $\alpha, \beta \in Z[i]$ แล้ว

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$$

ตัวอย่าง 2.3 $(4 + 5i)(1 + 2i) = (14 + 3i)$

$$N(4 + 5i) = 4^2 + 5^2 = 41$$

$$N(14 + 3i) = 14^2 + 3^2 = 205 = 41 \cdot 5$$

$$N(4 + 5i) \cdot N(1 + 2i) = 41 \cdot 5 = 205$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2 จำนวนหนึ่งหน่วย

จำนวนที่หาผกผันการคูณได้หมายถึง ผลคูณของจำนวนนั้นกับผกผันของจำนวนนั้นแล้วได้เท่ากับ 1 สำหรับจำนวนเต็มที่สามารถหาผกผันการคูณได้ จะเรียกว่าจำนวนหนึ่งหน่วยได้แก่คือ 1 และ -1 สำหรับจำนวนเต็มเกาส์ที่สามารถหาผกผันได้ จะเรียกว่าจำนวนหนึ่งหน่วย และจำนวนหนึ่งหน่วยของ $Z[i]$ ได้แก่ 1, -1, i และ $-i$

ตัวอย่าง 2.4 จำนวนที่หาผกผันได้หมายถึง ผลคูณของจำนวนนั้นกับผกผันของจำนวนนั้น เป็น 1

$$(1)(1) = 1, (-1)(-1) = 1, (-i)(i) = -(i)^2 = 1$$

2.1.3 ทฤษฎีการหาร

สำหรับ $\alpha, \beta \in Z[i]$ และ $\beta \neq 0$ มี $\gamma, \rho \in Z[i]$ ซึ่งทำให้ $\alpha = \beta\gamma + \rho$ และ $N(\rho) < N(\beta)$ สามารถเลือก ρ ซึ่ง $N(\rho) \leq (1/2)N(\beta)$

โดยที่ γ เป็นผลหารและ ρ เป็นเศษเหลือของการหาร และ ρ ถูกจำกัดด้วย β ซึ่งเป็นขนาดของตัวหาร

ตัวอย่างที่ 2.5 ให้ $\alpha = 11 + 10i$ และ $\beta = 4 + i$ จะได้ว่า $N(\beta) = 17$ และ $N(\alpha) = 221$ ต้องการเขียนให้อยู่ในรูป $\alpha = \beta\gamma + \rho$ เมื่อ $N(\rho) < 17$

$$\text{พิจารณาค่า } \gamma \text{ จาก } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{N(\beta)} = \frac{(11+10i)(4-i)}{17} = \frac{54+29i}{17}$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{54}{17} \approx 3.17 \dots \text{ และ } \frac{29}{17} \approx 1.70 \text{ เลือก } \gamma = 3 + 2i \text{ และแทนค่าหา}$$

$$\rho = \alpha - \beta\gamma = (11+10i) - (4+i)(3+2i)$$

$$\rho = (11+10i) - (10+11i) = (1-i) \text{ และ } N(\rho) = 2 < 17 = N(\beta)$$

เขียนในรูปผลหารได้ $\alpha = \beta(3+2i) + (1-i)$

$$\text{สังเกตว่า } N(\rho) = 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)N(\beta) = \frac{17}{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.4 ขั้นตอนวิธีของยุคลิด

เป็นขั้นตอนวิธีที่ประยุกต์ใช้ทฤษฎีการหารซ้ำๆ เพื่อหาตัวหารร่วมมาก

ให้ $\alpha = a_1 + b_1i$ และ $\beta = a_2 + b_2i$ โดยที่ $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

ให้ $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho$ ถ้า $\rho \neq 0$ แล้วให้ $\alpha = \beta$, $\beta = \rho$ และ ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่า $\rho = 0$

จะได้ว่า $\gcd(\alpha, \beta) = \gamma$

ตัวอย่าง 2.6 จงหาตัวหารร่วมมากของ $\alpha = 32 + 9i$ และ $\beta = 4 + 11i$

$$32 + 9i = (4 + 11i)(2 - 2i) + (2 - 5i)$$

$$4 + 11i = (2 - 5i)(-2 + i) + (3 - i)$$

$$2 - 5i = (3 - i)(1 - i) + (-i)$$

$$3 - i = (-i)(1 - 3i) + 0$$

ดังนั้น ตัวหารร่วมมากของ $32 + 9i$ และ $4 + 11i$ คือ $-i$

2.1.5 จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ให้ $\alpha = a_1 + b_1i$ และ $\beta = a_2 + b_2i$ โดยที่ $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

ให้ $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho$ ถ้า $\rho \neq 0$ แล้วให้ $\alpha = \beta$, $\beta = \rho$ และ ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่า $\rho = 0$

และถ้า $\gcd = \pm 1, \pm i$ จะเรียก α และ β ว่า จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

สำหรับจำนวนเต็มเกาส์ α และ β ซึ่งมีตัวหารร่วมมากเป็นจำนวนหนึ่งหน่วย จะเรียกว่า α และ β เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

จากตัวอย่างที่ 2.6 จะได้ตัวหารร่วมมากคือ $-i$ และเป็นจำนวนหนึ่งหน่วยดังนั้น α และ β เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ให้ α และ β เป็นจำนวนเต็มเกาส์โดยทฤษฎีการหารจะมีจำนวนเต็มเกาส์ γ_0 และ ρ_0 ที่ทำให้

$$\alpha = \beta\gamma_0 + \rho_0 \quad \text{เมื่อ } N(\rho_0) < N(\beta)$$

ทำซ้ำในทำนองเดียวกัน จะมี γ_i และ ρ_i เมื่อ $i=1$ ถึง n ที่ทำให้

$$\beta = \rho_0\gamma_1 + \rho_1$$

$$\rho_0 = \rho_1\gamma_2 + \rho_2$$

⋮

⋮

$$\rho_{n-2} = \rho_{n-1}\gamma_n + \rho_n$$

$$\rho_{n-1} = \rho_n\gamma_{n+1} + 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับบริการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีสำหรับ α และ β จะมี γ และ ρ ที่ทำให้ $\alpha = \beta\gamma + \rho$ แล้ว $\gcd(\alpha, \beta) = \gcd(\beta, \rho)$
 ดังนั้นจากทฤษฎีจำนวนเศษเหลือของจำนวนสุดท้ายที่ได้จะเป็นศูนย์

2.1.6 สมการไดโอแฟนไทน์

สมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการที่มี 2 ตัวแปร และมีสมการเดียว เช่น $5x + 7y = 1$

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนเต็ม a, b จะมีจำนวนเต็ม x, y ที่ทำให้ $ax + by = \gcd(a, b)$

ตัวอย่างที่ 2.7 การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $23x + 17y = 1$ โดยวิธีการแทนค่าย้อนกลับ
 ขั้นตอนวิธียุคลิด

$$23 = 17 \cdot 1 + 6$$

$$17 = 6 \cdot 2 + 5$$

$$6 = 5 \cdot 1 + 1$$

$$5 = 1 \cdot 1 + 0$$

จะได้ว่า $\gcd(23, 17) = 1$

หาค่า x และ y ที่ทำให้ $23x + 17y = 1$ โดยการแทนค่าย้อนกลับ

$$1 = 6 - 5 \cdot 1$$

$$= 6 - (17 - 6 \cdot 2) \cdot 1 = 3 \cdot 6 - 17 \cdot 1$$

$$= 3 \cdot (23 - 17 \cdot 1) - 17$$

$$= 3 \cdot 23 - 4 \cdot 17$$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ และ $y = -4$

สำหรับบนจำนวนเต็มเกาส์ สามารถใช้วิธีเดียวกันกับจำนวนเต็มได้ แต่จะหายากมากขึ้น
 จากตัวอย่างที่ 2.7 $\alpha = 32 + 9i$ และ $\beta = 4 + 11i$ มีตัวหารร่วมมาก คือ $-i$ ต้องหาจำนวนเต็มเกาส์
 x, y ที่ทำให้ $\alpha x + \beta y = 1$ โดยการแทนค่าย้อนกลับ

$$-i = (2 - 5i) - (3 - i)(1 - i)$$

$$-i = (2 - 5i) - (\beta - (2 - 5i)(-2 + i))(1 - i)$$

$$-i = (2 - 5i)(1 + (-2 + i)(1 - i)) - \beta(1 - i)$$

$$-i = (2 - 5i)(3i) - \beta(1 - i)$$

$$-i = (\alpha - \beta(2 - i))(3i) - \beta(1 - i)$$

$$-i = \alpha(3i) + \beta(-7 - 5i)$$

$$1 = \alpha(-3) + \beta(5 - 7i)$$

$$\therefore \alpha(3i) + \beta(-7 - 5i) = -i$$

ปรับสมการใหม่โดยการคูณ $-i$ ตลอด จะได้

$$\alpha(-3) + \beta(5 - 7i) = 1$$

จะได้ว่า $x = -3$ และ $y = 5 - 7i$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะวิธีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.7 ขั้นตอนยุคลิดแบบขยาย (Extended Euclidean Algorithm)

ขั้นตอนยุคลิดแบบขยายเป็นวิธีคำนวณที่มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยสมการเชิงเส้นไดโอแฟนไทน์ โดยจะเพิ่มการคำนวณอื่นขณะที่คำนวณหาตัวหารร่วมมากของขั้นตอนวิธียุคลิด โดยไม่ต้องแทนค่าย้อนกลับซึ่งจะสามารถใช้ในการคำนวณในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังนี้

มีจำนวนเต็ม 2 จำนวน α และ β เมื่อ $N(\alpha) > N(\beta)$ จะมีจำนวนเต็มอื่น 2 จำนวน s และ t ซึ่ง $\alpha \cdot s + \beta \cdot t = \gcd(\alpha, \beta)$
 ขณะที่คำนวณ $\gcd(\alpha, \beta)$ โดยขั้นตอนวิธียุคลิด คำนวณหา s และ t โดยคำนวณหาเศษเหลือการหารของ r และ t เป็น s
 สมการ $r_1 = q \cdot r_2 + r$, $s_1 = q \cdot s_2 + s$, $t_1 = q \cdot t_2 + t$

ให้ $r_1 = \alpha, r_2 = \beta, s_1 = 1, s_2 = 0$ และ $t_1 = 0, t_2 = 1$

ทำซ้ำ ขณะที่ $b > 0$ (ขณะที่เศษเหลือการหารมากกว่าศูนย์)

คำนวณ q เป็นผลหารของ r_1/r_2 (เป็นจำนวนเต็ม)

คำนวณ $r = r_1 - q \cdot r_2$ ปรับเปลี่ยนค่า $r_1 = r_2, r_2 = r$

คำนวณ $s = s_1 - q \cdot s_2$ ปรับเปลี่ยนค่า $s_1 = s_2, s_2 = s$

คำนวณ $t = t_1 - q \cdot t_2$ ปรับเปลี่ยนค่า $t_1 = t_2, t_2 = t$

หมายเหตุ ใช้ q เดียวกันจากการหาตัวหารร่วมมาก

ขณะที่ทำซ้ำ หา $\gcd(\alpha, \beta)$ ในแต่ละขั้นตอน จะคำนวณค่า q จาก $\alpha = q \cdot \beta + r$

นำ q ที่ใช้คำนวณหา s จากสูตร $s_1 = q \cdot s_2 + s$

นำ q ที่ใช้คำนวณหา t จากสูตร $t_1 = q \cdot t_2 + t$

$r_1 = \alpha, r_2 = \beta$ // $s_1 = 1, s_2 = 0, t_1 = 0, t_2 = 1$

While ($N(b) \neq 0$) {

$q = n/r_2$

$r = r_1 - q \cdot r_2;$

$s = s_1 - q \cdot s_2;$

$t = t_1 - q \cdot t_2;$

การรับค่า

$r_1 = r_2, r_2 = r$

$s_1 = s_2, s_2 = s$

$t_1 = t_2, t_2 = t$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะวิธีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.8 ให้ $a = 161$ และ $b = 28$ จงหา $\gcd(a, b)$ และค่า s และ t

$$\text{ที่ทำให้ } 161s + 28t = \gcd(a, b)$$

หาผลเฉลยโดยขั้นตอนวิธียุคลิด

ขั้นตอนวิธียุคลิด	แทนค่าย้อนกลับ
$161 = 5 \cdot 28 + 21$	$7 = 28 - 1 \cdot 21 = 28 - 1 \cdot (161 - 5 \cdot 28)$
$28 = 1 \cdot 21 + 7$	$= (-1) \cdot 161 + (6) \cdot 28$
$21 = 3 \cdot 7 + 0$	ฉะนั้น $(161, 28) = 7$
	ผลเฉลยของสมการคือ $s = -1$ และ $t = 6$

หาผลเฉลยโดยขั้นตอนวิธียุคลิดแบบขยาย

	$q = r_1/r_2$	$r = r_1 - q \cdot r_2$			$s = s_1 - q \cdot s_2$			$t = t_1 - q \cdot t_2$		
รอบที่	q	r_1	r_2	r	s_1	s_2	s	t_1	t_2	t
1	5	161	28	21	1	0	1	0	1	-5
2	1	28	21	7	0	1	-1	1	-5	6
3	3	21	7	0	1	-1	4	-5	6	
		7	0					6		

ฉะนั้น $\gcd(161, 28) = 7$, $s = -1$, $t = 6$ ตรวจสอบ $(-1) \cdot 161 + (6) \cdot 28 = 7$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.8 การแยกตัวประกอบเพียงแบบเดียว

จะนิยามจำนวนเต็มเกาส์ที่เป็นจำนวนประกอบจำนวนเฉพาะ และพิสูจน์การแยกตัวประกอบที่มีแบบเดียว จากทฤษฎีบทที่ว่า

เมื่อ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ถ้า $\beta | \alpha$ ใน $\mathbb{Z}[i]$ แล้ว $N(\beta) | N(\alpha) \in \mathbb{Z}[i]$ ดังนั้น $1 \leq N(\beta) \leq N(\alpha)$
เมื่อ $\alpha \neq 0$ ตัวหารอะไรของ α ที่มีขนาด 1 หรือ $N(\alpha)$

สำหรับ $\alpha \neq 0$ ตัวหารใดๆ ของ α ที่มีขนาด 1 หรือ $N(\alpha)$ คือ หนึ่งหน่วยหรือตัวคูณหนึ่งหน่วยของ α
เมื่อ $N(\alpha) > 1$ ตัวประกอบชัดของ α จะมี 8 จำนวนคือ $\pm 1, \pm i, \pm \alpha, \pm \alpha i$
และจะเรียก α ว่า จำนวนเฉพาะเกาส์ และตัวประกอบอื่นๆของ α เรียกว่า ตัวประกอบไม่ชัด

$$(7+i) = i(1-7i) \quad \text{และ } (7+i) \text{ จะมีตัวประกอบชัดคือ } i$$

$$(7+i) = (1-2i)(1+3i) \quad \text{และ } (7+i) \text{ มีตัวประกอบไม่ชัดคือ } (1-2i) \text{ และ } (1+3i)$$

$$5 = (1+2i)(1-2i) \quad \text{และ } 5 \text{ มีตัวประกอบไม่ชัดคือ } (1+2i) \text{ และ } (1-2i)$$

$$2 = (1+i)(1-i) \quad \text{และ } 2 \text{ มีตัวประกอบไม่ชัดคือ } (1+i) \text{ และ } (1-i)$$

การแยกตัวประกอบใดๆ ใน $\mathbb{Z}[i]$ จะเป็นการแยกตัวประกอบของขนาดด้วยนั้นคือ

$$\alpha = \beta \cdot \gamma \longrightarrow N(\alpha) = N(\beta) \cdot N(\gamma)$$

เราจะใช้การแยกตัวประกอบของจำนวนเต็มขนาด เพื่อหาตัวประกอบที่เป็นไปได้ของจำนวนเต็มเกาส์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.9 ให้ $\alpha = 3 + 4i$ มีขนาด $25 = 5 \cdot 5$

ถ้าตัวประกอบของ $3 + 4i$ เป็นตัวประกอบไม่ซัดต้องมีขนาด 5

รู้ว่าจำนวนเต็มเกาส์ที่มีขนาด 5 ที่ขึ้นกับพหุคูณหนึ่งหน่วยคือ $1 + 2i$ และ $1 - 2i$

ดังนั้นจึงพิจารณากรณีต่างๆที่เป็นไปได้ดังนี้

$$(1 + 2i)(1 + 2i) = (-3 + 4i)$$

$$(1 + 2i)(1 + 2i) = 5$$

$$(1 - 2i)(1 - 2i) = (-3 + 4i) = -(3 + 4i) = \alpha$$

$$\text{ดังนั้น } (3 + 4i) = -(1 - 2i)(1 - 2i) = -1(1 - 2i)^2$$

ซึ่งได้ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะของ $3 + 4i$

ตัวอย่าง 2.10 การหาตัวประกอบเป็นจำนวนเต็มเกาส์ $2319 + 1694i$

ซึ่งขนาดคือ 8247397 และมีตัวประกอบ คือ

$$8247397 = 17 \cdot 29 \cdot 16729$$

จะใช้จำนวนเต็มเกาส์ที่มีขนาด 17, 29, 16729 และพยายามคูณทั้งหมดให้ได้ $2319 + 1694i$

ตัวประกอบของจำนวนเต็มเกาส์ 17, 29 และ 16729 มาจากการแทนแต่ละจำนวนด้วยผลบวกของกำลังสอง 2 เทอม

$$17 = 1^2 + 4^2, 29 = 2^2 + 5^2, 16729 = 40^2 + 123^2$$

(กรณีสุดท้ายไม่สามารถหาโดยไม่ใช่เครื่องคำนวณ) ได้ตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะใน $Z[i]$ คือ

$$17 = (1 + 4i)(1 - 4i), 29 = (2 + 5i)(2 - 5i), 16729 = (40 + 123i)(40 - 123i)$$

(จำนวนเต็มเกาส์ในที่นี้เป็นจำนวนเฉพาะเนื่องจากขนาดเป็นจำนวนเฉพาะใน Z)

ต่อไปเลือกตัวประกอบหนึ่งจากแต่ละผลคูณและผลคูณทั้งหมดเข้าด้วยกัน(พิจารณาหลายๆกรณี)

และกรณีนี้ให้ผลเป็น $(1 + 4i)(2 + 5i)(40 + 123i) = -2319 - 1694i$

ดังนั้นตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะของ $2319 + 1694i$ คือ

$$2319 + 1694i = -(1 + 4i)(2 + 5i)(40 + 123i)$$

ซึ่งแต่ละตัวประกอบทางขวาเป็นจำนวนเฉพาะใน $Z[i]$ เพราะว่าขนาดเป็นจำนวนเฉพาะใน Z ไม่คิดเครื่องหมาย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 ขั้นตอนวิธี (Algorithm) ที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 ขั้นตอนวิธียุคลิด (Euclid Algorithm) ใช้สำหรับหาตัวหารร่วมมาก

ขั้นตอนวิธียุคลิด

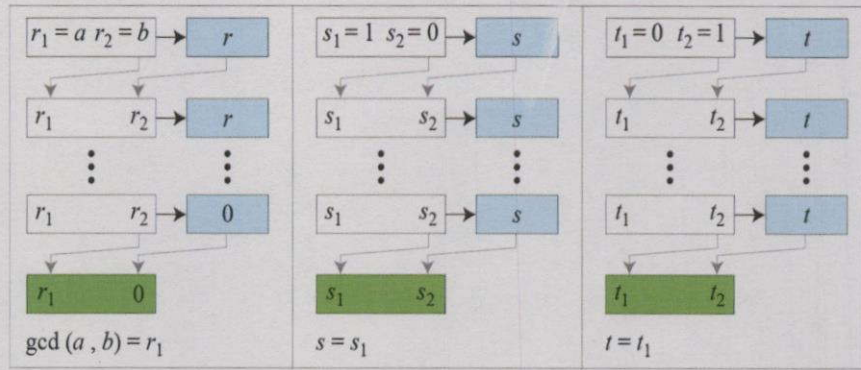
```
Int gcd(int a, int b) {
    int q, r;
    while ( b>0 ) {
        q = (int) (a/b);
        r = a-b*q;
        a = b;  b = r;
    }
    return(a);
}
```

2.2.2 ขั้นตอนวิธียุคลิดแบบขยาย (Extended Euclid Algorithm) ใช้สำหรับหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

สมการไดโอแฟนไทน์มีจำนวนเต็ม 2 จำนวน a และ b จะหาจำนวนเต็มอื่น 2 จำนวน s และ t ซึ่งทำให้ $a \cdot s + b \cdot t = \text{gcd}(a, b)$ และขั้นตอนวิธีจะได้ s, t เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

```
r1 = a; r2 = b;
s1 = 1; s2 = 0;
t1 = 0; t2 = 1;
while ( r2 > 0 ) {
    q = r1/r2;
    r = r1 - q*r2;  r1 = r2; r2 = r;
    s = s1 - q*s2; s1 = s2; s2 = s;
    t = t1 - q*t2; t1 = t2; t2 = t;
}
return r1 // gcd of a and b
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.1 ขั้นตอนวิธียุคลิดแบบขยาย

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.3.1 โปรแกรมคำนวณจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

โปรแกรมในเว็บ <http://www.kidlek.com/Complex-Number.php>

รองรับการคำนวณ เพียง การคูณ การหาร และรากที่สอง (square root) รูป 2.2 แสดงหน้าจอ
รองรับข้อมูล และ 2.3 แสดงหน้าจอที่ดำเนินการแล้วมีข้อผิดพลาด

โปรแกรมคำนวณจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

การคูณ: $(a+bi) \times (a+bi)$

a bi

a bi

ผลลัพธ์การคูณ

การหาร $(a+bi) / (a+bi)$

a bi

a bi

ผลลัพธ์การหาร

สแควร [r1 = x+yi, r2 = -x-yi]

a bi

r1

r2

โปรแกรมคำนวณจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

การคูณ: $(a+bi) \times (a+bi)$

a 2 bi 3

a 0 bi 0

ผลลัพธ์การคูณ $0 + i^*0$

การหาร $(a+bi) / (a+bi)$

a 2 bi 3

a 0 bi 0

ผลลัพธ์การหาร NaN + i*NaN

สแควร [r1 = x+yi, r2 = -x-yi]

a 0 bi 0

r1 NaN + i*0

r2 NaN + i*0

รูปที่ 2.2 รับข้อมูลเพื่อคำนวณ

รูปที่ 2.3 ผลลัพธ์เมื่อคำนวณแล้วมีข้อผิดพลาด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.2 โปรแกรม Complex Number Calculator

โปรแกรมในเว็บ <http://www.mathsisfun.com/numbers/complex-number-calculator.html>

จะรองรับการคำนวณเพียง การบวก ลบ คูณ หาร และยกกำลัง โดยจะสามารถแสดงรายละเอียดที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณดังตัวอย่าง

Complex Number Calculator v0.91

Input: $(2+3i)+(4-5i)$

Output: $6-2i$

Answer = $6 - 2i$

Interpreted Formula: $(2+(3i))+(4-(5i))$

Formula Stack:

- 1: mult.5,i
- 2: sub.4,5i
- 3: mult.3,i
- 4: add.2,3i
- 5: add.4,5i

MathsIsFun.com

รูปที่ 2.4 แสดงผลการบวก

Complex Number Calculator v0.91

Input: $(2+3i)-(4-5i)$

Output: $-2+8i$

Answer = $-2 + 8i$

Interpreted Formula: $(2+(3i))-(4-(5i))$

Formula Stack:

- 1: mult.5,i
- 2: sub.4,5i
- 3: mult.3,i
- 4: add.2,3i
- 5: sub.4,5i

MathsIsFun.com

รูปที่ 2.5 แสดงผลการลบ

Complex Number Calculator v0.91

Input: $(2+3i)(4-5i)$

Output: $23+2i$

Answer = $23 + 2i$

Interpreted Formula: $(2+(3i))(4-(5i))$

Formula Stack:

- 1: mult.5,i
- 2: sub.4,5i
- 3: mult.3,i
- 4: add.2,3i
- 5: mult.4,5i

MathsIsFun.com

รูปที่ 2.6 แสดงผลการคูณ

Complex Number Calculator v0.91

Input: $(2+3i)^2$

Output: $-5+12i$

Answer = $-5 + 12i$

Interpreted Formula: $(2+(3i))^2$

Formula Stack:

- 1: mult.3,i
- 2: add.2,3i
- 3: pow.2,2

MathsIsFun.com

รูปที่ 2.7 แสดงผลการยกกำลัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.3 โปรแกรม Operation with one complex Number

โปรแกรมในเว็บ <http://www.mathportal.org/calculators/complex-numbers-calculator/complex-unary-operations-calculator.php>

จะรองรับการคำนวณค่าสังยุค มอดุโล ผกผัน ค่าราก โพลารวม และมีคำอธิบายเป็นภาษาอังกฤษ เช่น การคำนวณหา มอดุโล ดังรูป 2.8 แสดงการคำนวณ ผกผัน ดังรูป 2.9

รูปที่ 2.8 Operation with Complex Number (1)

โดยที่มีการคำนวณเกิดขึ้นและสามารถดูรายละเอียดขั้นตอนการทำได้ด้วยเพียงแค่กดตรง Show me an explanation และกดปุ่ม compute

รูปที่ 2.9 Operation with Complex Number (2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

Result

You have entered the complex number:


$$z = 2 + 3i$$

The complex conjugate of z is:

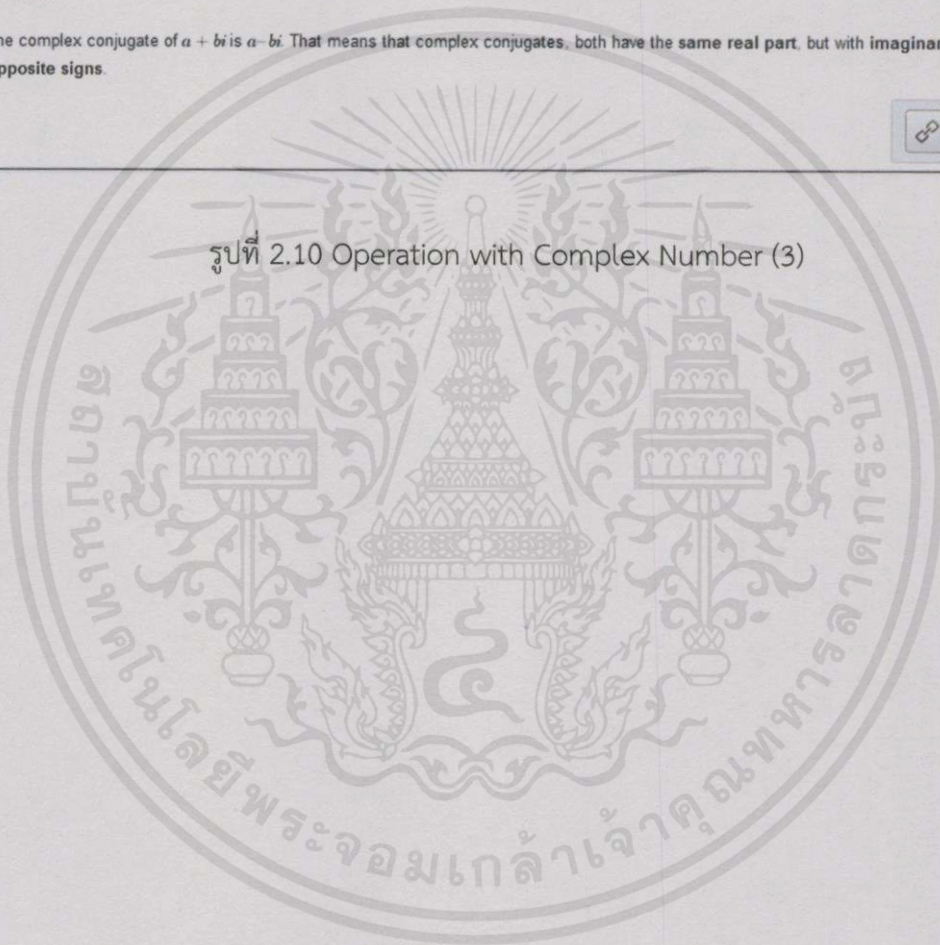
$$\bar{z} = 2 - 3i$$

Explanation

The complex conjugate of $a + bi$ is $a - bi$. That means that complex conjugates, both have the same real part, but with imaginary parts of opposite signs.

 PDF !

รูปที่ 2.10 Operation with Complex Number (3)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การออกแบบโปรแกรม

ในหัวข้อนี้จะอธิบายรายละเอียดโปรแกรมที่ผู้พัฒนาได้พัฒนาขึ้นมา จะอธิบายรายละเอียดการ
เข้าใช้งาน หน้าต่างทุกหน้าต่างที่เกิดขึ้น หน้าจอแสดงผลต่างๆ ดังต่อไปนี้

3.1 ส่วนติดต่อผู้ใช้

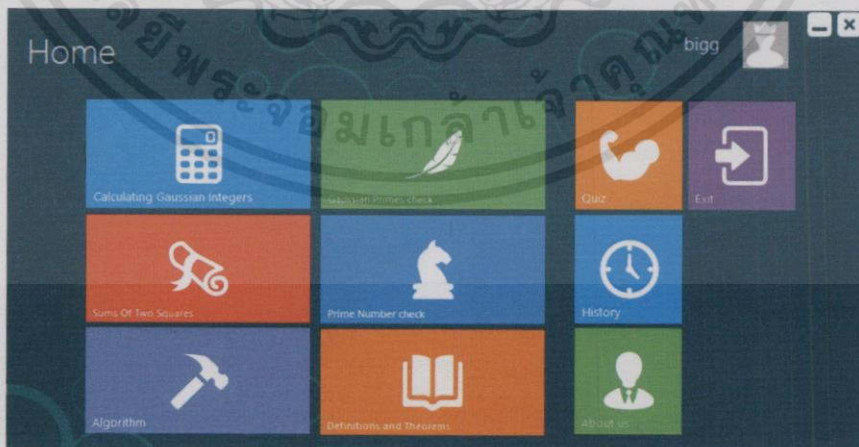
เมื่อเริ่มเข้าสู่โปรแกรมจะให้บันทึกชื่อ (sign in) เพื่อเป็นข้อมูลประวัติการใช้งาน



รูปที่ 3.1 หน้าแรก

3.1.1 เมนุรายการหัวข้อการทำงาน

เมื่อเข้าสู่ระบบแล้วจะเห็นหน้าต่างซึ่งประกอบด้วย Calculating Gaussian Integers, Sums of Two Squares, Algorithm, Gaussian Primes check, Prime Number check, Definitions and Theorems, Quiz, History, About Us และ Exit



รูปที่ 3.2 เมนุรายการหัวข้อการทำงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.2 การคำนวณจำนวนเต็มเกาส์

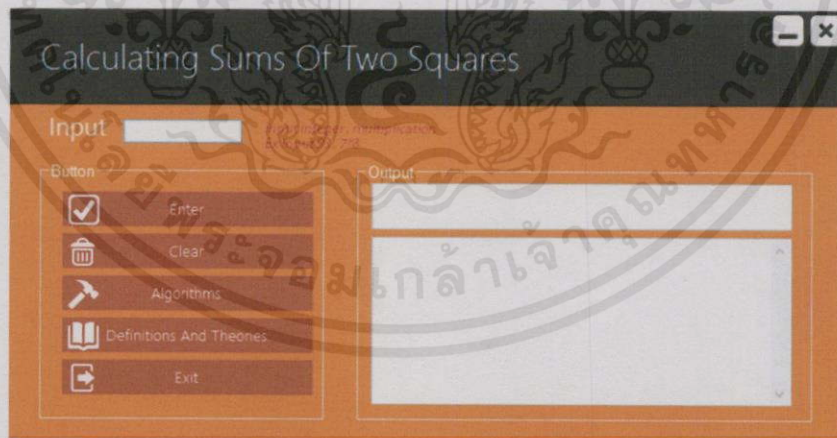
ในต่างนี่จะเป็นหน้าต่างการดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์ซึ่งมีการดำเนินการดังนี้ Addition, Subtraction, Multiplication, Divisibility, Division, Norm, gcd (Euclidean), Diophantine Equation, Factorization, modulo, Power Natural Numbers



รูปที่ 3.3 Calculating Gaussian Integers

3.1.3 การหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม

ในหน้าจอนี้เป็นการดำเนินการการหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอมของจำนวนเต็ม ในช่อง input เมื่อใส่จำนวนเต็มแล้วกด Enter ช่อง output จะบอกว่าจำนวนเต็มนั้นเขียนเป็นผลบวกกำลังสองสองเทอมได้หรือไม่ แล้วแสดงผลออกมาให้เห็น

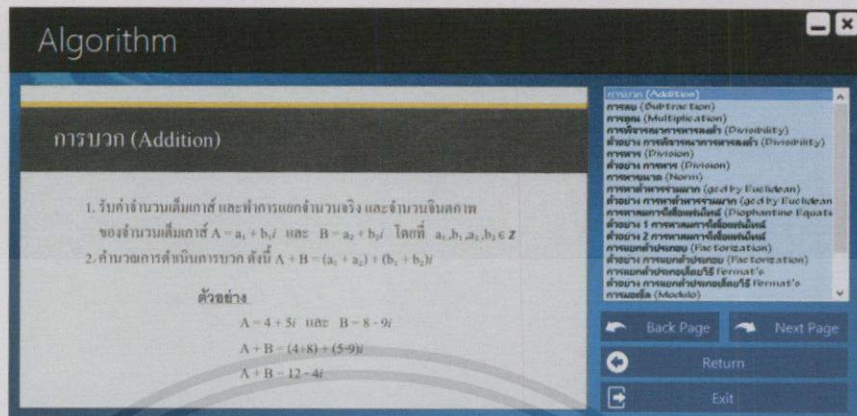


รูปที่ 3.4 Calculating Sums Of Two Squares

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.4 ขั้นตอนวิธีการดำเนินการ

ในหน้าจอนี้เป็นขั้นตอนวิธีการดำเนินการต่างๆ และตัวอย่างวิธีการดำเนินการ



รูปที่ 3.5 Algorithm

3.1.5 การตรวจสอบจำนวนเฉพาะเกาส์

ในหน้าจอนี้เป็นการตรวจสอบจำนวนเต็มเกาส์ว่าเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ โดยใส่จำนวนที่เป็นจำนวนเต็มเกาส์ลงในช่อง input แล้วในช่อง output จะพิจารณาจากขนาดของจำนวนเต็มเกาส์แล้วบอกว่าจำนวนนั้นเป็นจำนวนเฉพาะเกาส์หรือไม่

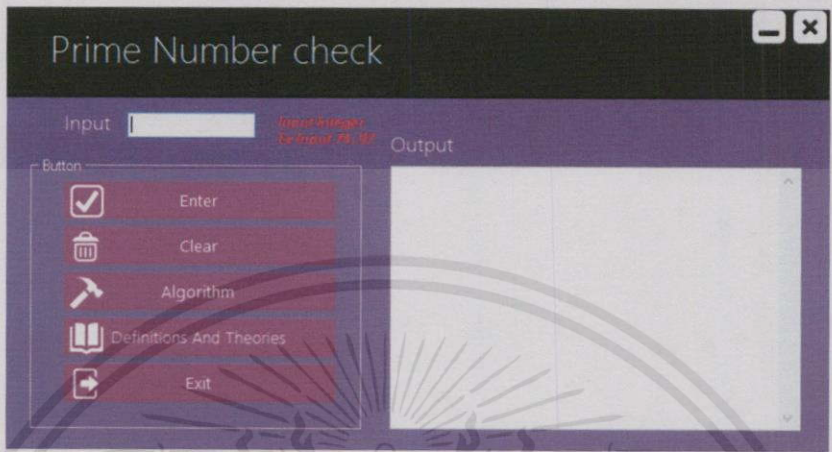


รูปที่ 3.6 Gaussian Primes check

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.6 การตรวจสอบจำนวนเฉพาะ

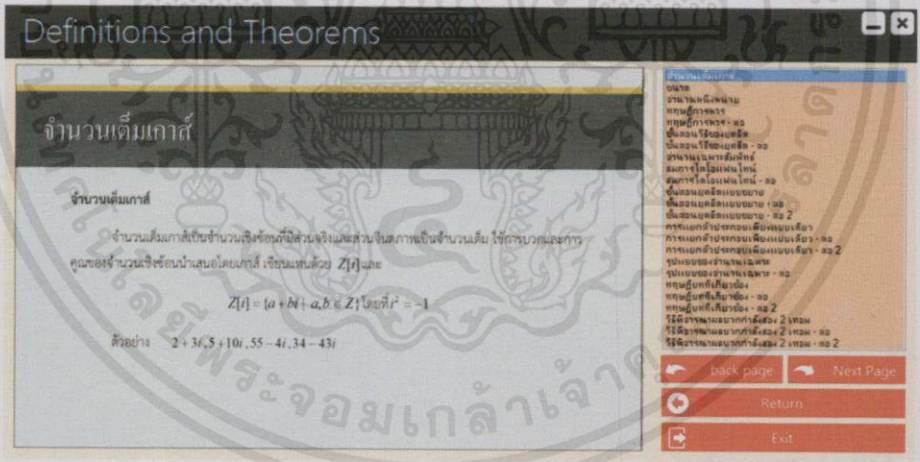
ในหน้าจอนี้จะเป็นวิธีการคำนวณการแยกตัวประกอบของจำนวนเต็ม โดยเราใส่จำนวนเต็มในช่อง input แล้วโปรแกรมจะคำนวณแล้วแสดงผลในช่อง output



รูปที่ 3.7 Prime Number check

3.1.7 นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในหน้าจอนี้จะบอกถึงนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องที่ใช้ในเรื่องจำนวนเต็มเกาส์ โดยกดเลือกชื่อเรื่องทางด้านขวามือ

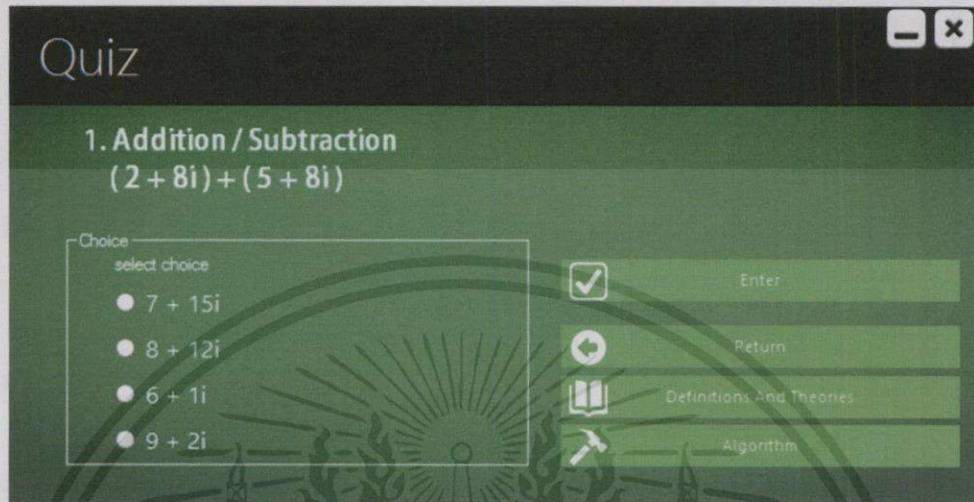


รูปที่ 3.8 Definition's and Theorems

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.8 แบบทดสอบ

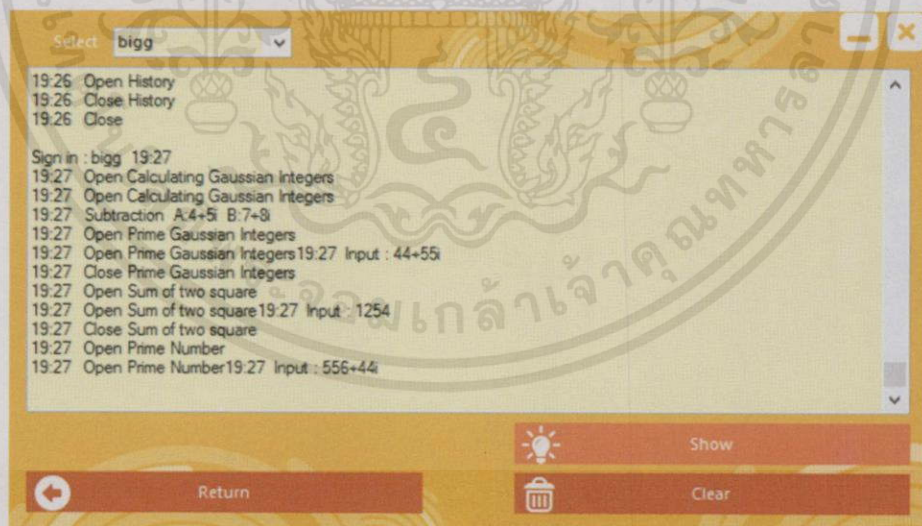
ในหน้าจอนี้จะเป็นแบบทดสอบในเรื่องจำนวนเต็มเกาส์โดยมีทั้งหมด 10 ข้อจาก 10 เรื่อง โดยแต่ละข้อถูกสุ่มออกมาจากทั้งหมด 10 ข้อ โดยที่เมื่อทำแบบทดสอบเสร็จโปรแกรมจะบอกคะแนนให้ทราบโดยทันที



รูปที่ 3.9 Quiz

3.1.9 ประวัติการใช้โปรแกรม

ในหน้าจอนี้จะเป็นการบันทึกข้อมูลผู้เข้าใช้โปรแกรมโดยสามารถเลือกที่ Select จะขึ้นชื่อผู้ที่เคยเข้าใช้งานโปรแกรมทั้งหมด และเมื่อกดปุ่ม Show จะขึ้นรายละเอียดการใช้งาน เช่น วัน ,เวลา ของผู้ใช้งาน



รูปที่ 10 History

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.10 ผู้พัฒนาโปรแกรม

ในหน้าจอนี้จะบอกรายชื่อผู้จัดทำโครงการ และอาจารย์ที่ปรึกษาของโครงการนี้



รูปที่ 3.11 About Us

3.2. การดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์

การดำเนินการจะประกอบด้วย Addition (การบวก), Subtraction (การลบ), Multiplication (การคูณ), Divisibility (การหารลงตัว), Division (การหาร), Norm (ขนาด), gcd (Euclidean) (ตัวหารร่วมมาก), Diophantine Equation (การแก้สมการไดโอแฟนไทน์), Factorization (การแยกตัวประกอบ), Modulo (การมอดุโล), Power Natural Number (การยกกำลังของจำนวนเต็มเกาส์ด้วยเลขจำนวนนับ) ดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 การดำเนินการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1) ผลลัพธ์ของการดำเนินการ (Enter)

ปุ่ม Enter เป็นปุ่มเริ่มการดำเนินการ เมื่อกดจะแสดงรายละเอียดต่างๆ ในหน้าต่าง output ดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 ผลลัพธ์ของการดำเนินการ (Enter)

2) รายละเอียดการคำนวณ

Detail เป็นปุ่มตัวเลือกให้แสดงรายละเอียดการดำเนินการ เมื่อกด Detail: on จะแสดงรายละเอียดวิธีการทำ ดังรูปที่ 3.14 และเมื่อกดปุ่มอีกครั้งให้ขึ้น Detail: off จะปิดการแสดงขั้นตอนวิธีการทำ ดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.14 เมื่อ Detail: On

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรนำไปใช้



รูปที่ 3.15 เมื่อ Detail: Off

3) การเปลี่ยนสลับค่า A และ B

ปุ่ม Swap A B เป็นการจัดการข้อมูลโดยสลับค่าของ ข้อมูล A ไปยังข้อมูล B และข้อมูล B ไปยังข้อมูล A ดังรูปที่ 3.16 และ รูป 3.17



รูปที่ 3.16 ก่อนทำการ Swap A B

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.17 เมื่อกดปุ่ม Swap A B

4) ลบพื้นที่กล่องอินพุต
 ปุ่ม Clear A B เป็นการลบข้อมูลบนกล่องรับข้อมูล A และกล่องรับข้อมูล B ดังรูปที่ 3.18
 และ 3.19



รูปที่ 3.18 ก่อนทำการกดปุ่ม Clear A B

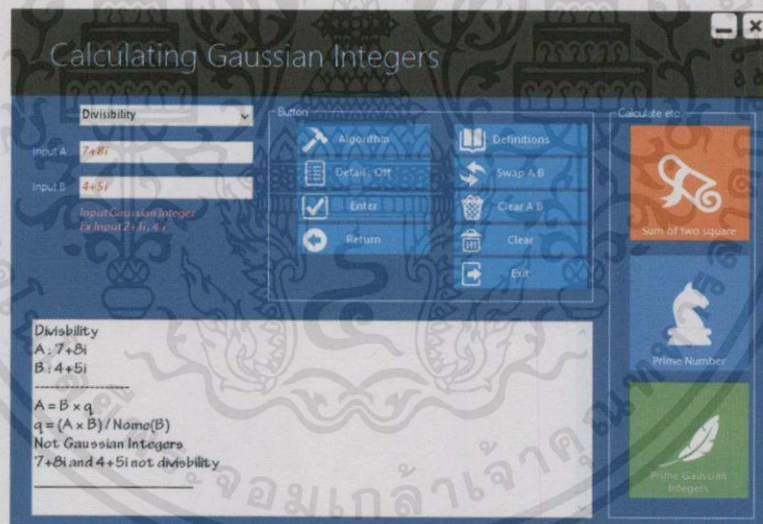
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 3.19 เมื่อกดปุ่ม Clear A B

5) ลบพื้นที่แสดงผลลัพธ์

ปุ่ม Clear เป็นการลบรายละเอียดต่างๆของการคำนวณ บนหน้าต่างแสดงผลแต่จะไม่ลบค่าของกล่องข้อมูล A และ B ดังรูปที่ 3.20 และ 3.21



รูปที่ 3.20 ก่อนกดปุ่ม Clear

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



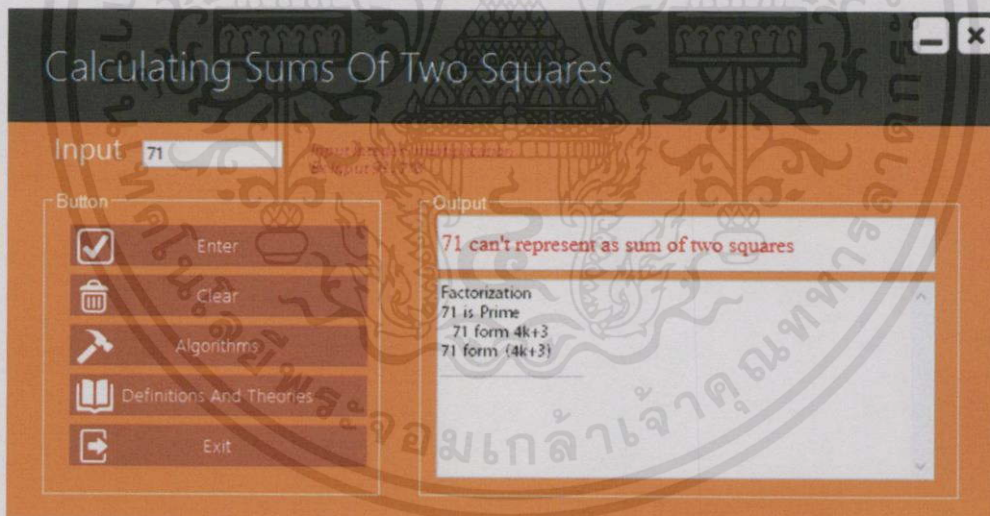
รูปที่ 3.21 เมื่อกดปุ่ม Clear

3.3 การคำนวณหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม

1) Enter

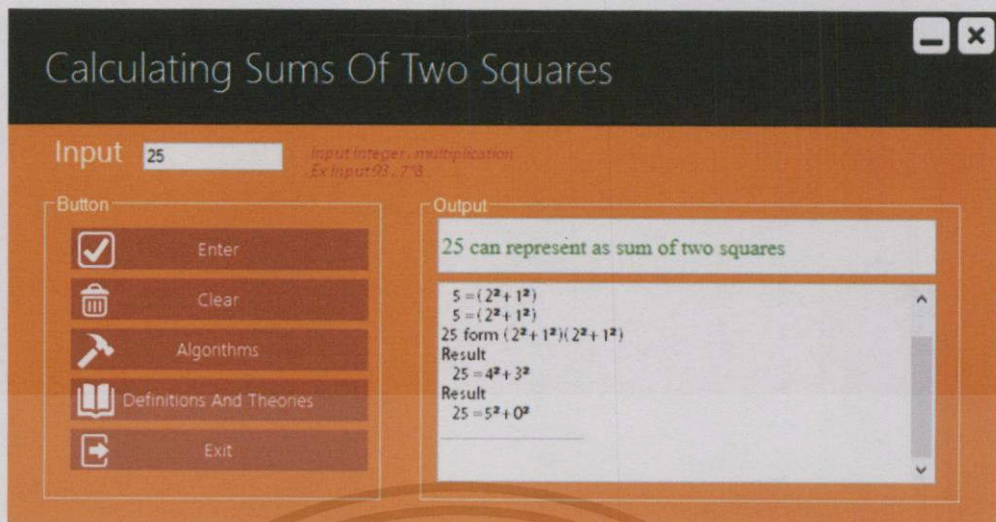
ปุ่ม Enter เป็นปุ่มเริ่มดำเนินการ เมื่อกดจะแสดงรายละเอียดต่างๆ ในหน้าต่าง output ดังรูปที่

3.22 และ 3.23



รูปที่ 3.22 ตัวอย่างจำนวนที่เขียนแทนผลบวกกำลังสอง 2 เทอมไม่ได้

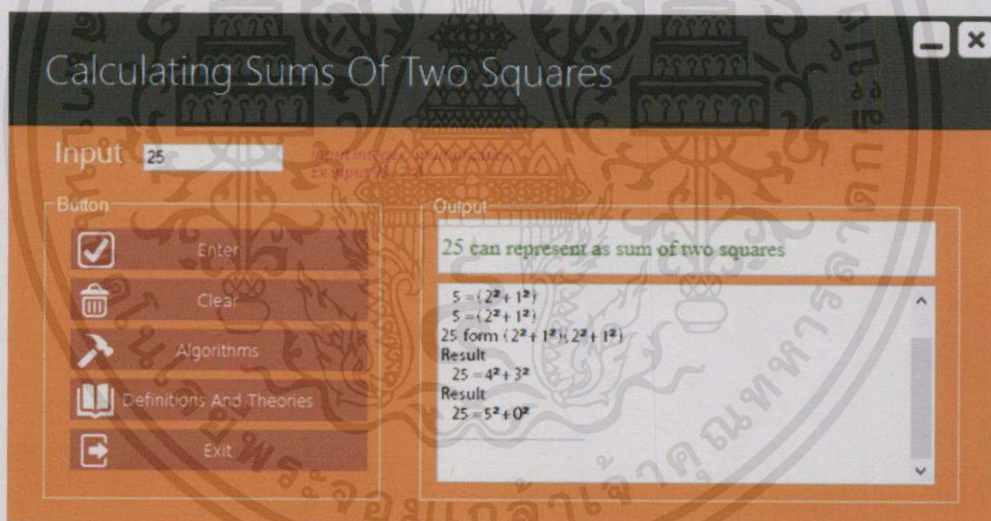
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.23 ตัวอย่างจำนวนที่เขียนแทนผลบวกกำลังสอง 2 เทอมได้

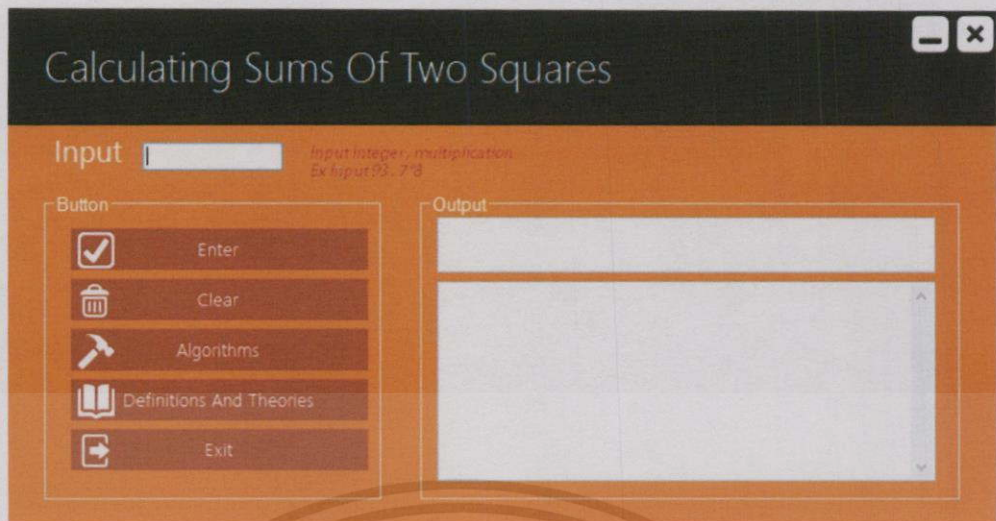
2) Clear

ปุ่ม Clear เป็นการลบพื้นที่แสดงผลลัพธ์ของการคำนวณ บนหน้าต่างแสดงผลแต่จะไม่ลบค่าของกล่องข้อมูล Input ดังรูปที่ 3.24 และ 3.25



รูปที่ 3.24 ก่อนกดปุ่ม Clear

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.25 เมื่อกดปุ่ม Clear

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การพัฒนาโปรแกรม

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนา

4.1.1 Hardware

- 1) Computer Intel Core i7-4702MQ 2.2GHz, memory 8.00 GB, Intel HD Graphics 4600
- 2) Tablet Samsung Galaxy Note 10.1 n8000
- 3) Tablet Lenovo a3300-gv

4.1.2 Software

- 1) Microsoft Visual Studio Express 2012
- 2) MATLAB
- 3) Wolfram Mathematical
- 4) Eclipse

จากเดิมพัฒนาโดยใช้โปรแกรม Microsoft Visual Studio Express 2012 ในการพัฒนาขึ้นมา เนื่องจากภาษา Visual Basic มีไวยากรณ์ของภาษาเอง และมีเครื่องมือที่ช่วยในการใช้งาน ง่ายต่อการเรียนรู้เหมาะสมสำหรับผู้เริ่มต้น อีกทั้งตัวภาษานั้นได้มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง การปรับปรุงประสิทธิภาพในด้านต่างๆ ของตัวภาษา ความเร็วในการประมวลผล และในเรื่องของความสามารถต่างๆ เช่น การติดต่อกับฐานข้อมูล การติดต่อกับเครือข่ายอินเทอร์เน็ต

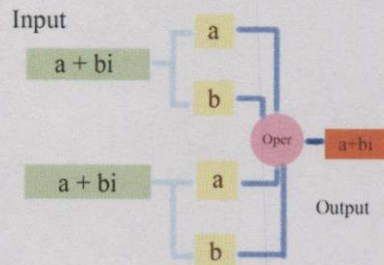
เนื่องจากผู้พัฒนาได้ลองนำโปรแกรมไปให้นักศึกษากลุ่มตัวอย่างที่มีความรู้ในเรื่องจำนวนเต็ม เกาส์ได้ลองศึกษา ข้อเสียหรือเสียงส่วนใหญ่มีความเห็นว่า ถ้าเป็นโปรแกรมสำหรับส่งเสริมการเรียนรู้ สามารถหาผลเฉลยได้ และยังมี ขั้นตอนวิธีการดำเนินการ นิยาม ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง พร้อมตัวอย่าง ก็น่าจะสามารถนำไปใช้ศึกษาห้องเรียนได้ด้วย ผู้พัฒนาจึงได้พัฒนาให้ใช้งานบน Tablet ได้ด้วย

ในขั้นตอนแรกได้พัฒนาโดยภาษา Visual Basic ซึ่งพัฒนาให้ใช้งานบนคอมพิวเตอร์ เนื่องจากภาษา Visual Basic ไม่สามารถนำไปใช้พัฒนาบน Tablet หรือ ระบบปฏิบัติการ android ได้ ผู้พัฒนาจึงได้ทำการเริ่มต้นเริ่มต้นพัฒนาขึ้นมาใหม่โดยใช้ภาษา java โดยมีโครงสร้างขั้นตอนการทำงานเดียวกันกับบนระบบปฏิบัติการ Microsoft Windows

4.2 การรับข้อมูล

การอินพุตจำนวนเต็มเกาส์ในโปรแกรมบางการดำเนินการใช้ 1 จำนวน บางการดำเนินการใช้ 2 จำนวน ซึ่งต้องอินพุตในรูป $a+bi$ ซึ่ง a และ b ต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น เมื่ออินพุตแล้วโปรแกรมจะทำงานการแยกจำนวนเต็มเกาส์ที่ส่งเข้ามาให้อยู่ในรูปของ 2 จำนวนเต็ม เพื่อนำไปคำนวณในการดำเนินการต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



การรับข้อมูลเข้าจะรับในรูปของ $a + bi$ ซึ่ง a และ b ต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้นจากนั้นจะทำการแยกเป็น a และ b โดยการค้นหาเครื่องหมาย $+$, $-$ และ i ว่าอยู่ตำแหน่งไหนบ้างแล้วทำการแบ่งว่าจำนวนไหนเป็นส่วนจำนวนเต็มและจำนวนไหนเป็นส่วนจินตภาพ (จำนวนเต็มที่อยู่หน้า i) แล้วนำไปคำนวณในการดำเนินการต่างๆ เช่น การบวก การลบ การคูณ การหารลงตัว การหาเศษเหลือจากการหาร การหาตัวหารร่วมมาก การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ การแยกตัวประกอบ การมอดุโล การยกกำลัง

4.3 รายละเอียดการดำเนินการ

ให้ $A = a_1 + b_1i$ และ $B = a_2 + b_2i$ โดยที่ a_1, a_2, b_1, b_2 เป็นจำนวนเต็มและ $i^2 = -1$ ซึ่งมีการดำเนินการพื้นฐานได้แก่

- Addition (การบวก)

$$A + B = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- Subtraction (การลบ)

$$A - B = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

- Multiplication (การคูณ)

$$A \times B = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

- Divisibility (การหารลงตัว)

$A = B \cdot q$ โดยที่ $q = (A \times \bar{B}) / \text{Norm}(B) = a_3 + b_3i$ ถ้า q เป็นจำนวนเต็มเกาส์แสดงว่า B หาร A ลงตัว

- Division (การหาร)

$A = B \cdot q$ โดยที่ $q = (A \times \bar{B}) / \text{Norm}(B) = a_3 + b_3i$ ถ้า q เป็นจำนวนเต็มเกาส์แสดงว่า B หาร A ลงตัว ถ้าหารไม่ลงตัว ให้ปิดเศษของ q และหาเศษจาก $r = A - (B \times q)$ โดยที่ $\text{Norm}(r) < \text{Norm}(B)$ จะได้ $A = B \cdot q + r$

- Norm (ขนาด)

$$\text{Norm}(A) = a^2 + b^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะวิธีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- gcd (Euclidean)(ตัวหารร่วมมาก)

$A = B \times q + r$ ถ้า $r \neq 0$ แล้วให้ $A = B$ และ $B = r$ ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่า $r = 0$ จะได้ว่า $\text{gcd} = r$ ตัวก่อนหน้า

- Diophantine Equation (สมการไดโอแฟนไทน์)

คำนวณหาค่า x, y ที่ทำให้ $Ax + By = \text{gcd}(A, B)$ โดยใช้ Extended Euclidean

Algorithm กำหนดให้ $r_1 = A, r_2 = B$ หา q และ r จาก $r_1 = r_2 \cdot q + r$

ให้ $s_1 = 1, s_2 = 0$ หา s จาก $s_1 = s_2 \cdot q + s$ และ

ให้ $t_1 = 0, t_2 = 1$ หา t จาก $t_1 = t_2 \cdot q + t$

เมื่อได้ r, s, t แล้ว ให้ $r_1 = r_2, r_2 = r, s_1 = s_2, s_2 = s, t_1 = t_2, t_2 = t$

ทำเรื่อยๆ จนกว่า $r_2 = 0$ จะได้ค่า $\text{gcd}(A, B) = r_1, x = s_1$ และ $y = t_1$

- Factorization (การแยกตัวประกอบ)

จาก $\text{Norm}(A) = a^2 + b^2$ ใช้วิธีการแจกจำนวนประกอบ โดยวิธีของ Fermat's

พิจารณาแต่ละจำนวนประกอบ

ถ้าอยู่ในรูป $4k+1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ผลบวกกำลังสองสองเทอมได้

ถ้าอยู่ในรูป $(4k+3)^n$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ผลบวกกำลังสองสองเทอมได้

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ผลบวกกำลังสองสองเทอมได้

- Modulo (การมอดุโล)

จาก $A = B \cdot q + r$ โดยที่ $q = (A \times \bar{B}) / \text{Norm}(B) = a_3 + b_3 i$ ถ้า q เป็นจำนวนเต็ม

เกาส์แสดงว่า B หาร A ลงตัว ถ้าหารไม่ลงตัว ให้บดเศษของ q และหาเศษจาก

$r = A - (B \times q)$ โดยที่ $\text{Norm}(r) < \text{Norm}(B)$ จะได้ $A \equiv r \pmod{B}$

- Power Natural Numbers (การยกกำลังด้วยเลขจำนวนนับ)

$$A = (a + bi)^n = (a + bi)(a + bi) \dots (a + bi)$$

4.4 การดำเนินการ Gaussian Integers

Addition (การบวก), Subtraction (การลบ), Multiplication (การคูณ) Divisibility (การหารลงตัว), Division (การหาร), Norm (ขนาด), gcd (Euclidean) (ตัวหารร่วมมาก), Diophantine Equation (การแก้สมการไดโอแฟนไทน์), Factorization (การแยกตัวประกอบ), Modulo (การมอดุโล), Power Natural Numbers (การยกกำลังด้วยเลขจำนวนนับ)

ให้ $A = a_1 + b_1 i$ และ $B = a_2 + b_2 i$ โดยที่ a_1, a_2, b_1, b_2 เป็นจำนวนเต็มและ $i^2 = -1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1) การดำเนินการการบวก (Addition)

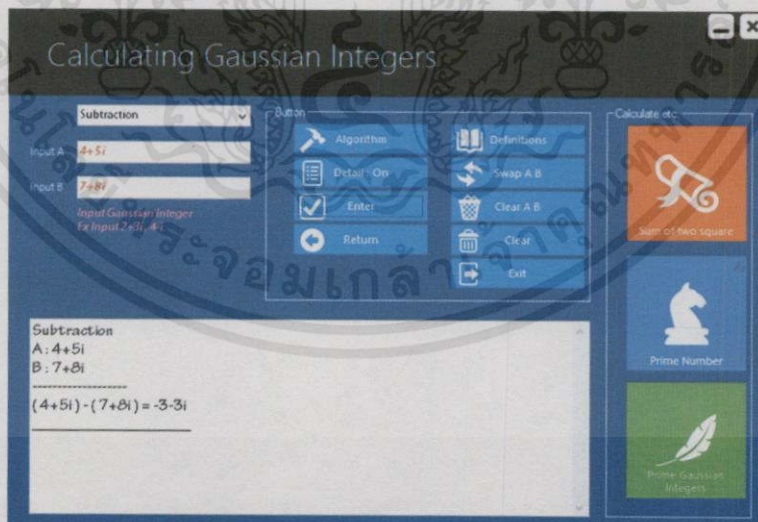
1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริง ละจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณผลบวกจาก $A+B = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$



รูปที่ 4.1 ตัวอย่างการดำเนินการการบวก

2) การดำเนินการการลบ (Subtraction)

1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณผลลบจาก $A-B = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$



รูปที่ 4.2 ตัวอย่างการดำเนินการการลบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) การดำเนินการการคูณ (Multiplication)

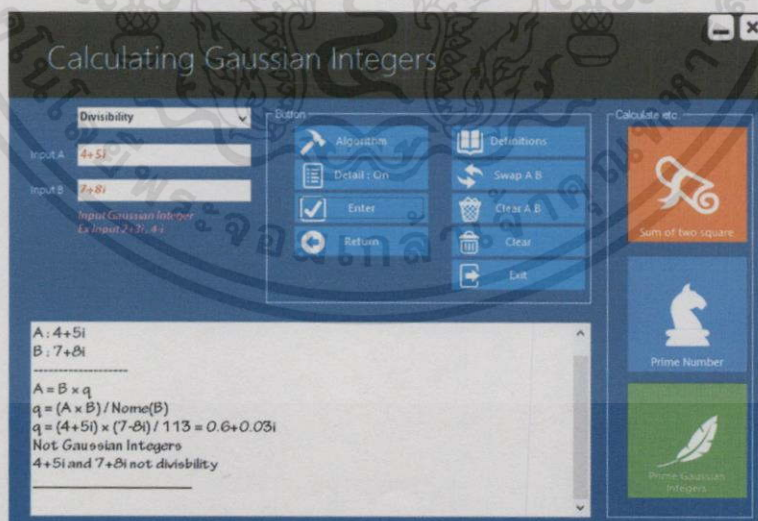
1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณผลคูณจาก $A \times B = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$



รูปที่ 4.3 ตัวอย่างการดำเนินการการคูณ

4) การดำเนินการการพิจารณาหารลงตัว (Divisibility)

1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณผลหารจาก $q = (A \times \overline{B}) / \text{Norm}(B) = a_3 + b_3i$
3. พิจารณาว่า q ถ้าเป็นจำนวนเต็มเกาส์แสดงว่า B หาร A ลงตัว

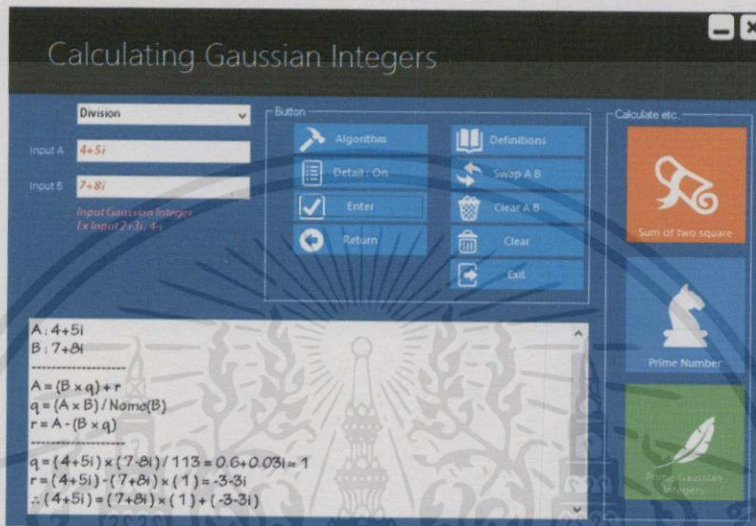


รูปที่ 4.4 ตัวอย่างการดำเนินการการพิจารณาหาร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะวิธีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5) การดำเนินการหาร (Division)

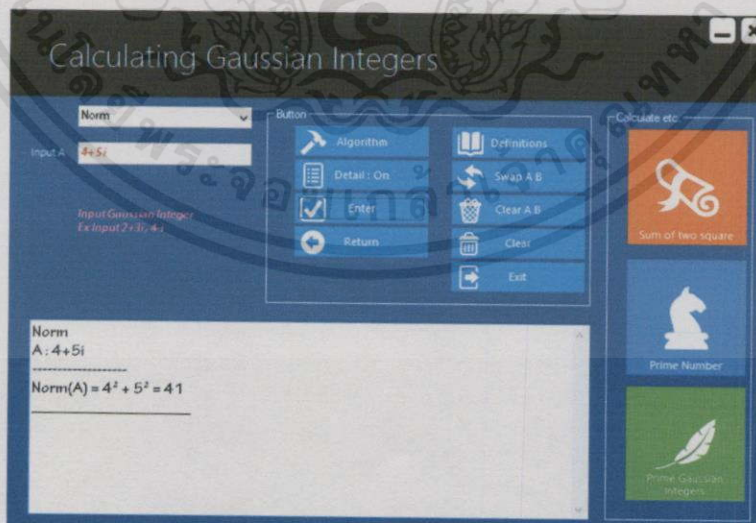
1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณผลหารจาก $q = (A \times \bar{B}) / \text{Norm}(B) = a_3 + b_3i$
3. พิจารณาว่า q ถ้าเป็นจำนวนเต็มเกาส์แสดงว่า B หาร A ลงตัว ถ้าหารไม่ลงตัวให้ทำข้อ 4
4. คำนวณหาเศษเหลือจาก $r = A - (B \times q)$



รูปที่ 4.5 ตัวอย่างการดำเนินการหาร

6) การดำเนินการหาขนาด (Norm)

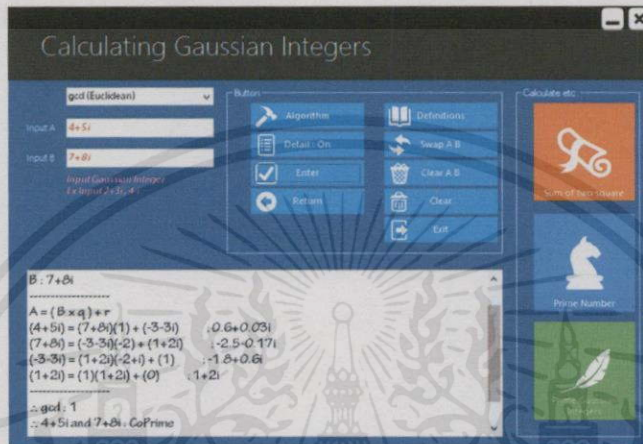
1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณหาขนาดจาก $\text{Norm}(A) = a^2 + b^2$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับรูปที่ 4.6 ตัวอย่างการดำเนินการหาขนาดให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7) การดำเนินการการหาตัวหารร่วมมาก (gcd)

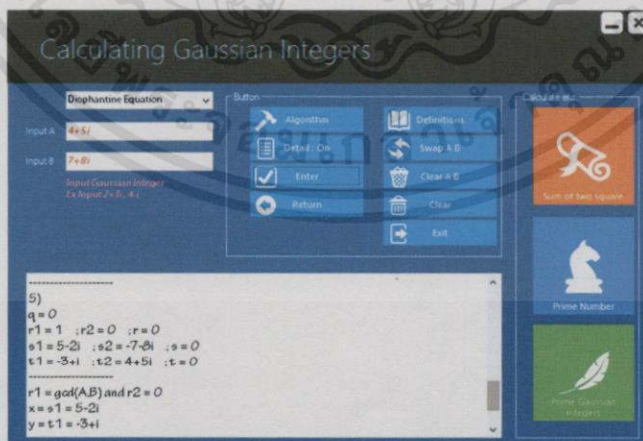
1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
 2. คำนวณผลหารและเศษเหลือจากการหารจาก $A = B \times q + r$
 3. พิจารณาว่า r ถ้า $r \neq 0$ แล้วให้ $A=B$ และ $B=r$ ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่า $r = 0$ จะได้ว่า $\gcd = r$ ตัวก่อนหน้า
- หมายเหตุ : ถ้า $\gcd = \pm 1, \pm i$ จะเรียก A และ B ว่า จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (Coprime)



รูปที่ 4.7 ตัวอย่างการดำเนินการการหาตัวหารร่วมมาก

8) การดำเนินการสมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equation)

1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. กำหนดค่าเริ่มต้น $r_1 = A, r_2 = B, s_1 = 1, s_2 = 0, t_1 = 0, t_2 = 1$
3. คำนวณหาค่า r, s, t จาก $r_1 = r_2 \cdot q + r, s_1 = s_2 \cdot q + s, t_1 = t_2 \cdot q + t$
4. พิจารณาว่า r_2 ถ้า $r_2 = 0$ จะได้ค่า $\gcd(A, B) = r_1, x = s_1$ และ $y = t_1$
ถ้า $r_2 \neq 0$ ให้ $r_1 = r_2, r_2 = r, s_1 = s_2, s_2 = s, t_1 = t_2, t_2 = t$ แล้วกลับไปทำข้อ 3 ใหม่



รูปที่ 4.8 ตัวอย่างการดำเนินการการหาสมการไดโอแฟนไทน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรนำไปใช้

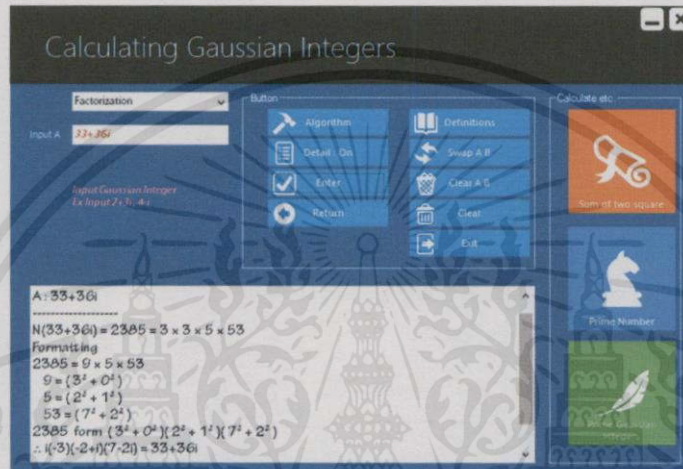
9) การดำเนินการการแยกตัวประกอบ (Factorization)

1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณหาขนาดจาก $Norm(A) = a^2 + b^2$ และแยกตัวประกอบโดยวิธีของ Fermat's
3. พิจารณาแต่ละจำนวนประกอบ

ถ้าอยู่ในรูป $4k+1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ผลบวกกำลังสองสองเทอมได้

ถ้าอยู่ในรูป $(4k+3)^n$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสองสองเทอมได้

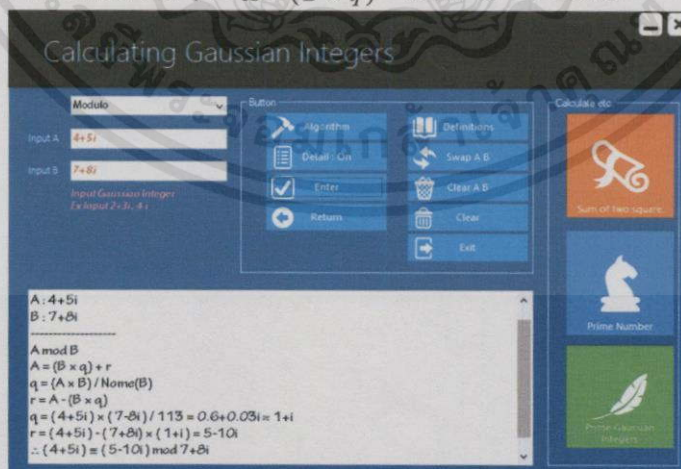
ถ้า n เป็นจำนวนคี่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ผลบวกกำลังสองสองเทอมได้



รูปที่ 4.9 ตัวอย่างการดำเนินการการแยกตัวประกอบ

10) การดำเนินการการมอดุโล (Modulo)

1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณผลหารจาก $q = (A \times \bar{B}) / Norm(B) = a_3 + b_3i$
3. พิจารณาค่า q ถ้าเป็นจำนวนเต็มเกาส์แสดงว่า B หาร A ลงตัว ถ้าหารไม่ลงตัวให้ทำข้อ 4
4. คำนวณหาเศษเหลือจาก $r = A - (B \times q)$ จะได้ $A \equiv r \pmod{B}$

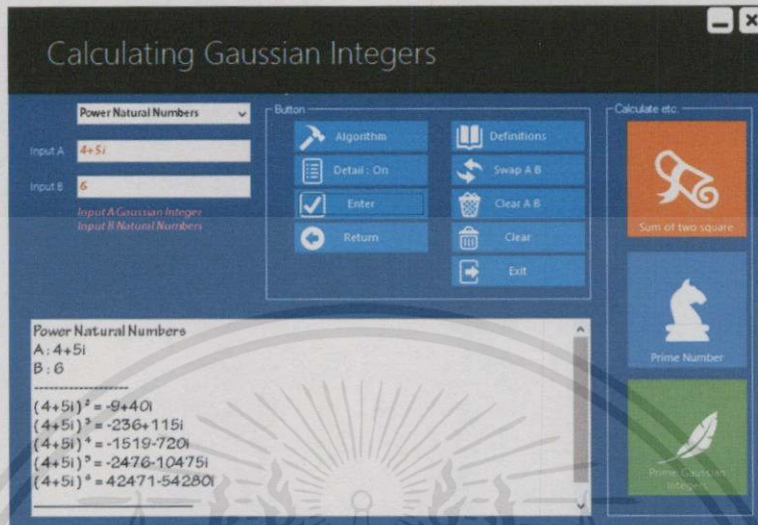


รูปที่ 4.10 ตัวอย่างการดำเนินการการบวกการมอดุโล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ หากมีข้อผิดพลาดประการใดขออภัยเป็นอย่างสูง และขอเชิญชวนให้ท่านไปใช้ประโยชน์ด้านการศึกษา
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

11) การดำเนินการการยกกำลังด้วยเลขจำนวนนับ (Power Natural Numbers)

1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ ของจำนวนเต็มเกาส์
2. คำนวณ $A = (a + bi)^n = (a + bi)(a + bi)...(a + bi)$



รูปที่ 4.11 ตัวอย่างการดำเนินการการยกกำลังด้วยจำนวนนับ

4.5 การดำเนินการอื่นๆ

1) Sums Of Two Squares

ขั้นตอนการหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม

1. รับค่าเป็นจำนวนเต็ม A
2. ทำการแยกตัวประกอบของ Norm โดยวิธี Fermat's
3. ทำการพิจารณาแต่ละตัวประกอบของ A ดังนี้

ถ้าอยู่ในรูป $4k + 1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสอง 2 เทอมได้

ถ้าอยู่ในรูป $(4k + 3)^n$

ถ้า k เป็นจำนวนคู่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ผลบวกกำลังสอง 2 เทอมได้

ถ้า k เป็นจำนวนคี่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสอง 2 เทอมได้

4. ทำการคำนวณหาค่าขอบบนและขอบล่างดังนี้

$$up = \sqrt{A} \quad \text{และปิดเศษลง}$$

$$lo = \sqrt{A/2} \quad \text{และปิดเศษขึ้น}$$

5. คำนวณ $s = \sqrt{A - lo^2}$ ที่เป็นจำนวนเต็ม

6. ถ้า s เป็นจำนวนเต็มจะได้ $A = s^2 + lo^2$

ถ้า s ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ $lo = lo + 1$ แล้วทำข้อ 5 ใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง $A = 101$

$$up = \sqrt{A} = \sqrt{101} = 10.05 \approx 10$$

$$lo = \sqrt{A/2} = \sqrt{101/2} = 7.1 \approx 7$$

คำนวณค่า $\sqrt{A - lo^2}$ ที่เป็นจำนวนเต็ม

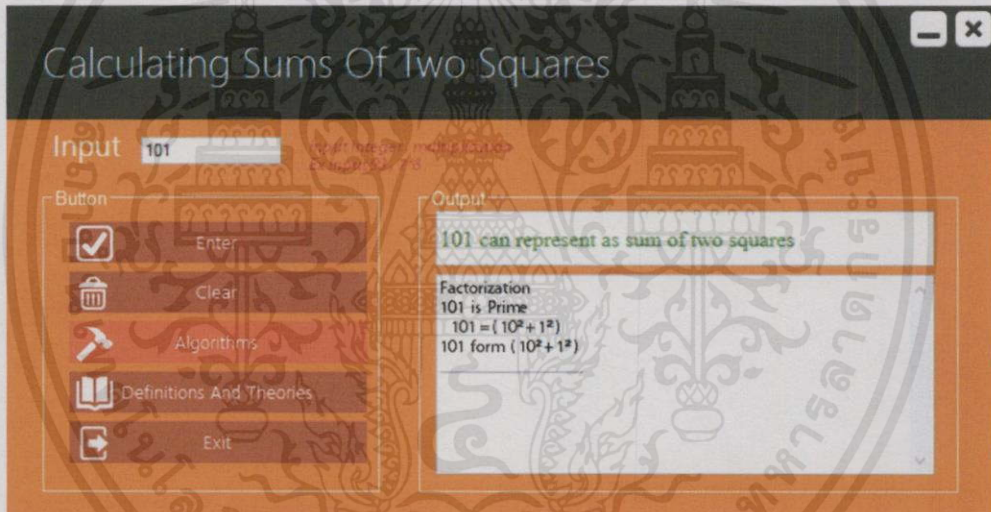
$$lo = 7; \sqrt{101 - 7^2} = \sqrt{52} = 7.2 \notin Z$$

$$lo = 8; \sqrt{101 - 8^2} = \sqrt{37} = 6.08 \notin Z$$

$$lo = 9; \sqrt{101 - 9^2} = \sqrt{20} = 4.47 \notin Z$$

$$lo = 10; \sqrt{101 - 10^2} = \sqrt{1} = 1 \in Z$$

$$\therefore A = 101 = (10^2 + 1^2)$$

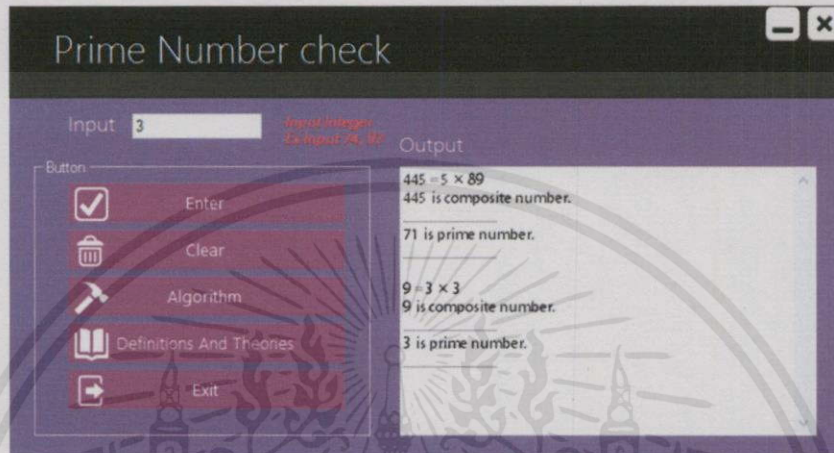


รูปที่ 4.12 ตัวอย่างการหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) Prime Number check

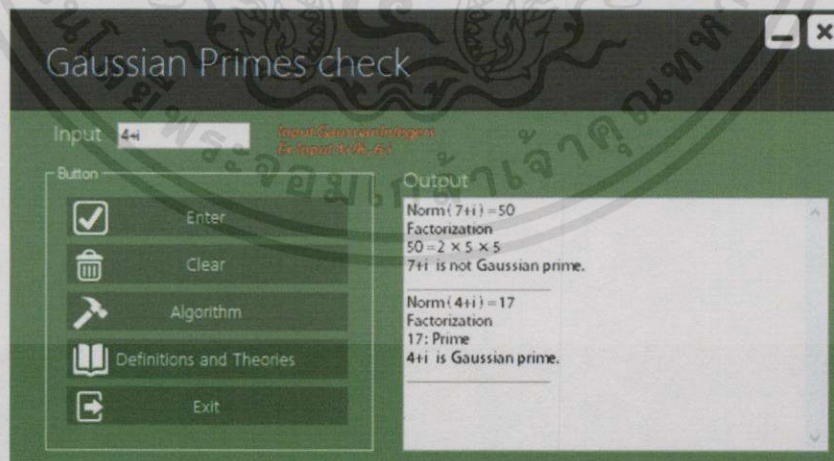
1. รับค่าจำนวนเต็ม N
2. ให้ $a = \sqrt{N}$ และปัดเศษ a ขึ้น
3. ให้ $b = \sqrt{a^2 - N}$ ถ้า b เป็นจำนวนเต็มให้ทำข้อ 4
ถ้า b ไม่ใช่จำนวนเต็มให้ $a = a + 1$ และทำข้อ 3 ใหม่
4. จะได้ $N = (a+b)(a-b)$



รูปที่ 4.13 ตัวอย่างการพิจารณาจำนวนเฉพาะ

3) Gaussian Primes check

1. รับค่าจำนวนเต็มเกาส์ พิจารณาจากขนาดของจำนวนเต็มเกาส์
2. ถ้าขนาดของจำนวนเต็มเกาส์สามารถแยกตัวประกอบได้ จำนวนเต็มเกาส์นั้นไม่ใช่จำนวนเฉพาะเกาส์ ถ้าขนาดของจำนวนเต็มเกาส์ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ จำนวนเต็มเกาส์นั้นเป็นจำนวนเฉพาะเกาส์



รูปที่ 4.14 ตัวอย่างการพิจารณาจำนวนเฉพาะเกาส์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับบริการเชิงพาณิชย์ที่กรมส่งเสริมการค้าระหว่างประเทศ กระทรวงพาณิชย์ โดยไม่หวังกำไร หากมีผู้ใดนำเอกสารนี้ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกหรือเปลี่ยนแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6 พัฒนาแอปพลิเคชันเพื่อใช้งานบน Tablet

Tablet ที่นำมาใช้ทดสอบ คือ Tablet Samsung Galaxy Note 10.1 n8000 firmware android 4.1.2 jelly bean ที่มีหน้าจอขนาด 10 นิ้ว และ Tablet Lenovo a3300-gv firmware android 4.2.2 jelly bean ที่มีขนาด 7 นิ้ว พัฒนาโดยใช้โปรแกรม Eclipse และภาษา java โดยมีโครงสร้างและขั้นตอนการทำงานเดียวกันกับที่สามารถใช้ได้บนคอมพิวเตอร์

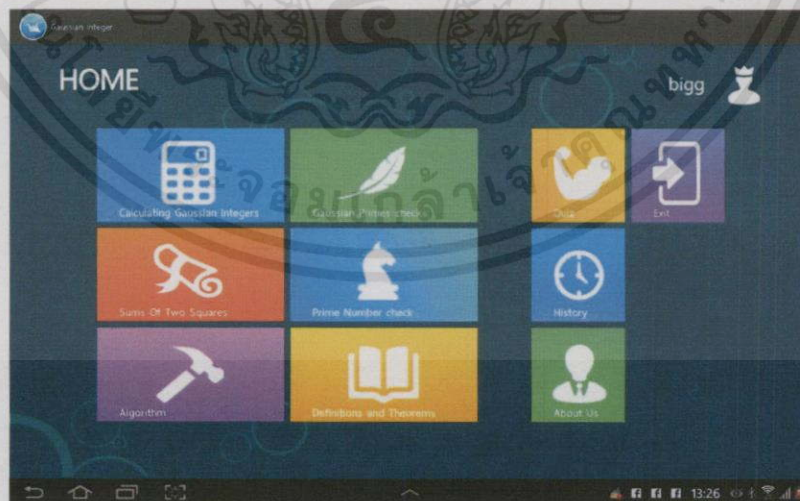
4.6.1 Interface



รูปที่ 4.15 หน้าแรก บน tablet

1) เมนูรายการหัวข้อการทำงาน

เมื่อเข้าสู่ระบบแล้วจะเห็นหน้าต่างซึ่งประกอบด้วย Calculating Gaussian Integers, Sums of Two Squares, Algorithm, Prime Gaussian check, Prime Number check, Definitions and Theorems, Quiz, History, About Us และ Exit



รูปที่ 4.16 เมนูรายการหัวข้อการทำงาน บน tablet

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษายเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) Calculating Gaussian Integers

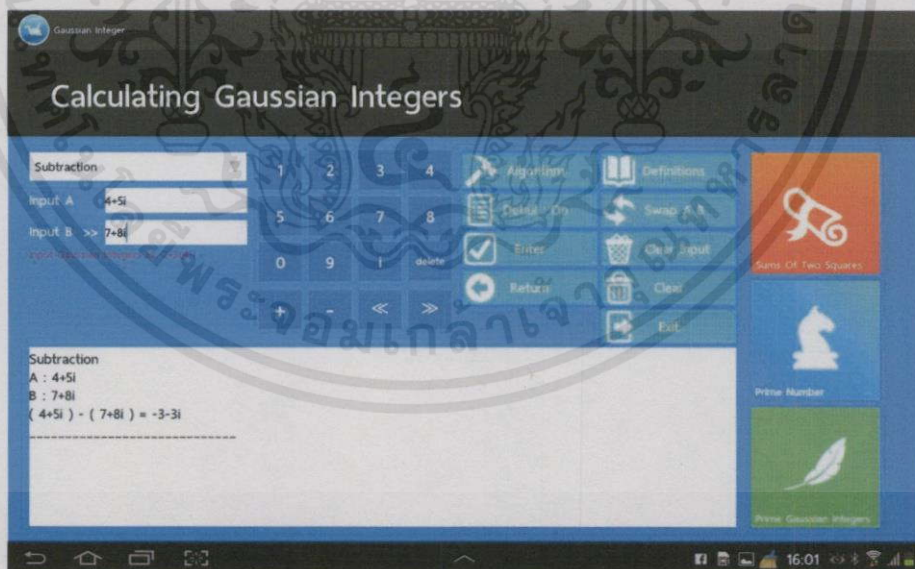
หน้าต่างการดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์ประกอบไปด้วย Addition, Subtraction, Multiplication, Divisibility, Division, Norm, gcd (Euclidean), Diophantine Equation, Factorization, modulo, Power Natural Numbers

2.1 Addition (การบวก)



รูปที่ 4.17 ตัวอย่างการดำเนินการการบวก บน tablet

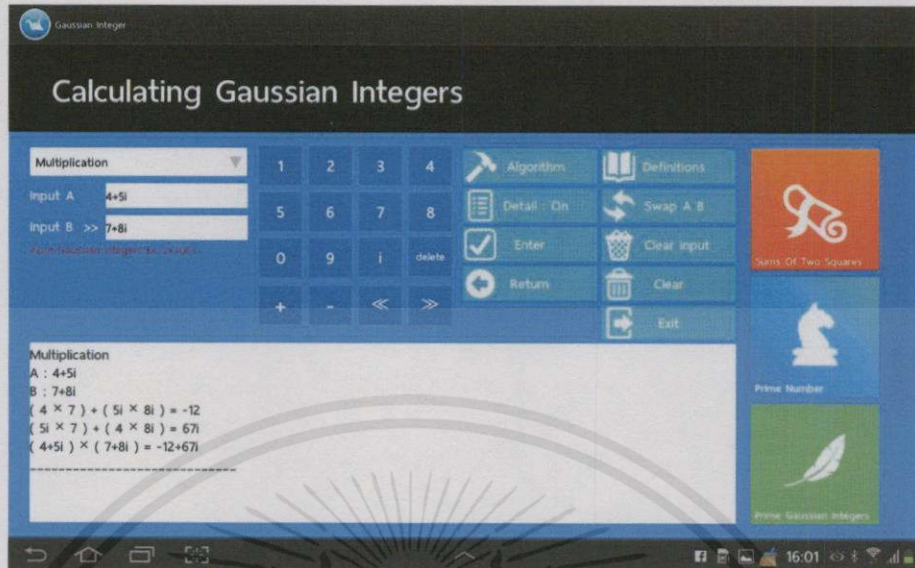
2.2 Subtraction (การลบ)



รูปที่ 4.18 ตัวอย่างการดำเนินการการลบ บน tablet

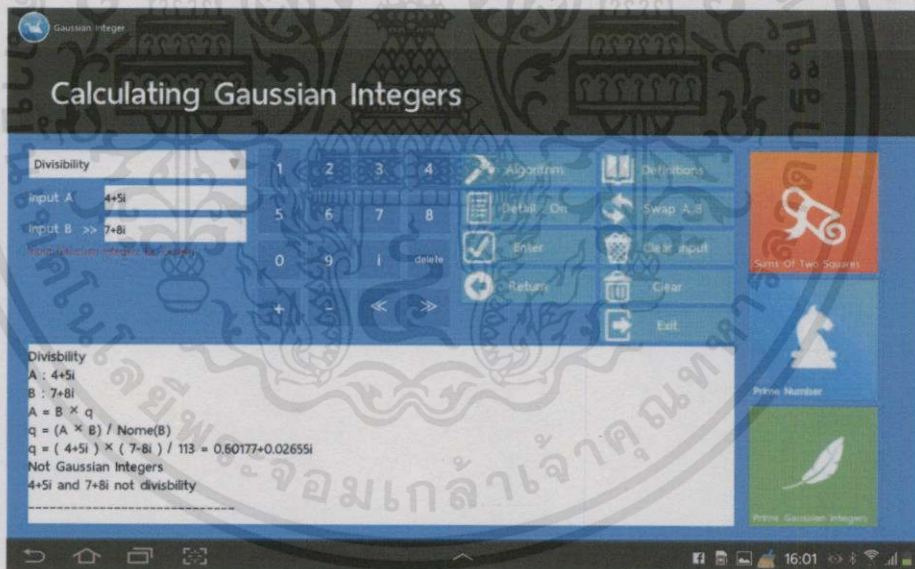
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 Multiplication (การคูณ)



รูปที่ 4.19 ตัวอย่างการดำเนินการการคูณ บน tablet

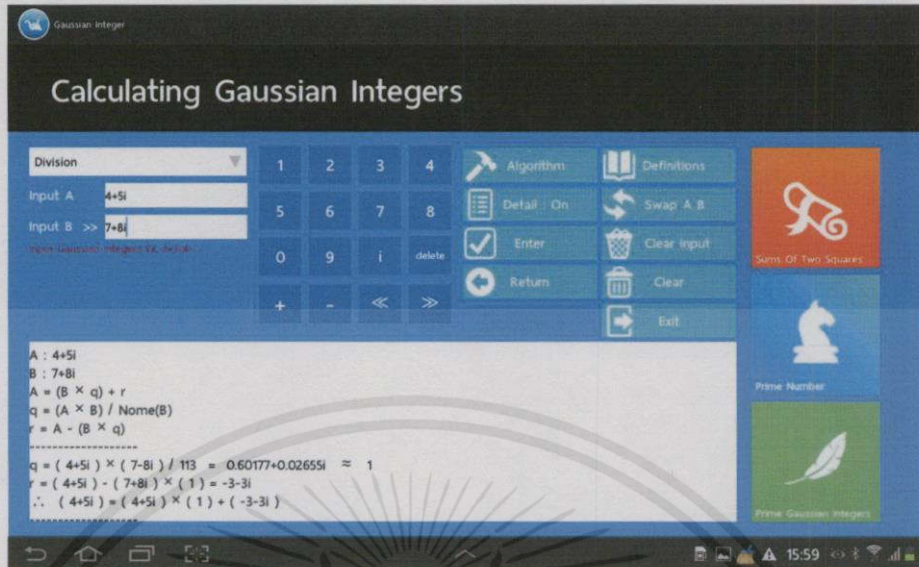
2.4 Divisibility (การพิจารณาการหารลงตัว)



รูปที่ 4.20 ตัวอย่างการดำเนินการพิจารณาการหาร บน tablet

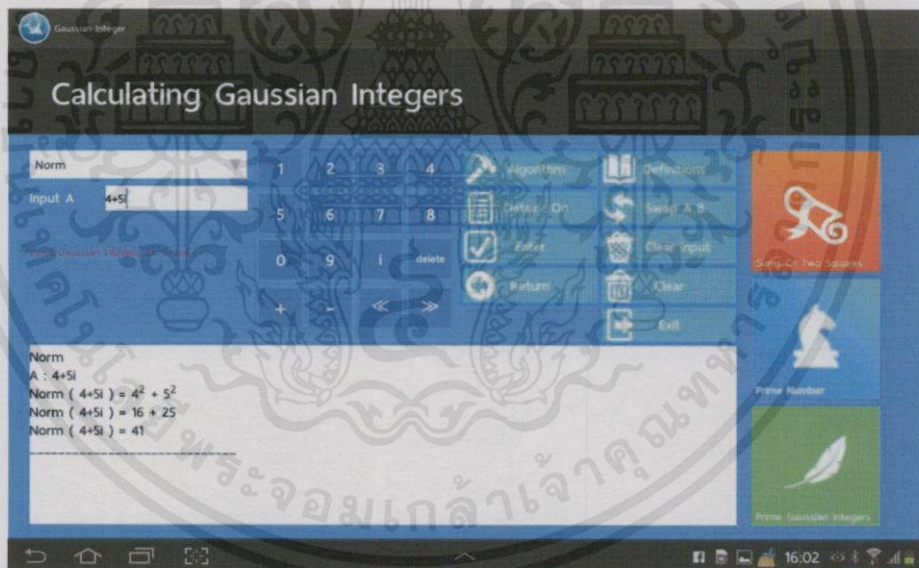
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 Division (การหาร)



รูปที่ 4.21 ตัวอย่างการดำเนินการการหาร บน tablet

2.6 Norm (ขนาด)



รูปที่ 4.22 ตัวอย่างการดำเนินการหาขนาด บน tablet

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7 gcd (By Euclidean) (ตัวหารร่วมมาก)

Calculating Gaussian Integers

gcd by Euclidean

Input A $4+5i$

Input B $7+8i$

$B : 7+8i$
 $A = (B \times q) + r$

 $(4+5i) = (7+8i) \times 1 + (-3-3i) \quad ; \quad 0.60177+0.02655i$
 $(7+8i) = (-3-3i) \times -2 + (1+2i) \quad ; \quad -2.5-0.16667i$
 $(-3-3i) = (1+2i) \times -2 + (1) \quad ; \quad -1.8+0.6i$
 $(1+2i) = (1) \times (1+2i) + (0) \quad ; \quad 1.0+2.0i$

 $\therefore \text{gcd} : 1$
 $\therefore (4+5i) \text{ and } (7+8i) \text{ is CoPrime}$

รูปที่ 4.23 ตัวอย่างการดำเนินการหาตัวหารร่วมมาก บน tablet

2.8 Diophantine Equation (การแก้สมการไดโอแฟนไทน์)

Calculating Gaussian Integers

Diophantine Equation

Input A $4+5i$

Input B $7+8i$

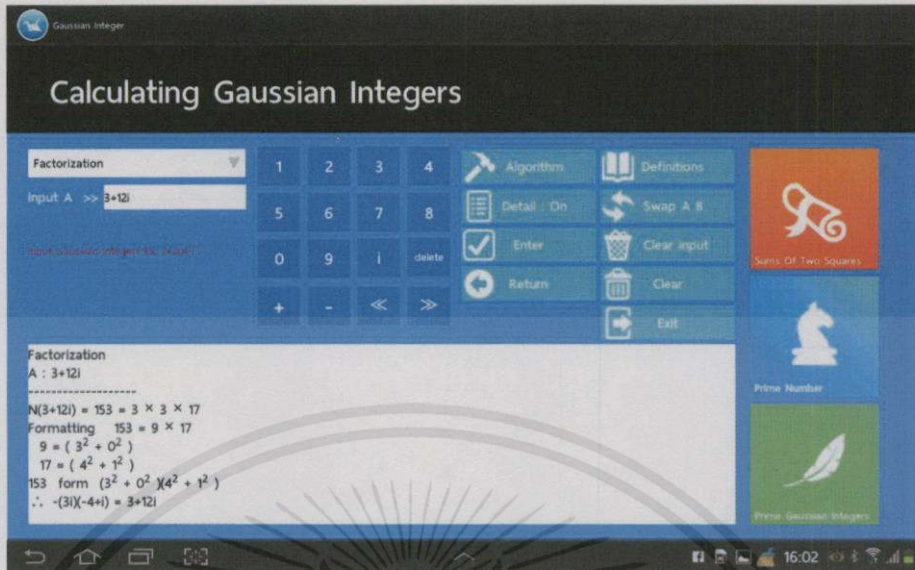
$r1 = 1 \quad ; r2 = 0 \quad ; r = 0$
 $s1 = 5-2i \quad ; s2 = -7-8i \quad ; s = 0$
 $t1 = -3+i \quad ; t2 = 4+5i \quad ; t = 0$

 $r1 = \text{gcd}(A,B) \text{ and } r2 = 0$
 $x = s1 = 5-2i$
 $y = t1 = -3+i$
 $\therefore (4+5i)x + (7+8i)y = 1$
 $\therefore (4+5i)(5-2i) + (7+8i)(-3+i) = 1$

รูปที่ 4.24 ตัวอย่างการดำเนินการหาสมการไดโอแฟนไทน์ บน tablet

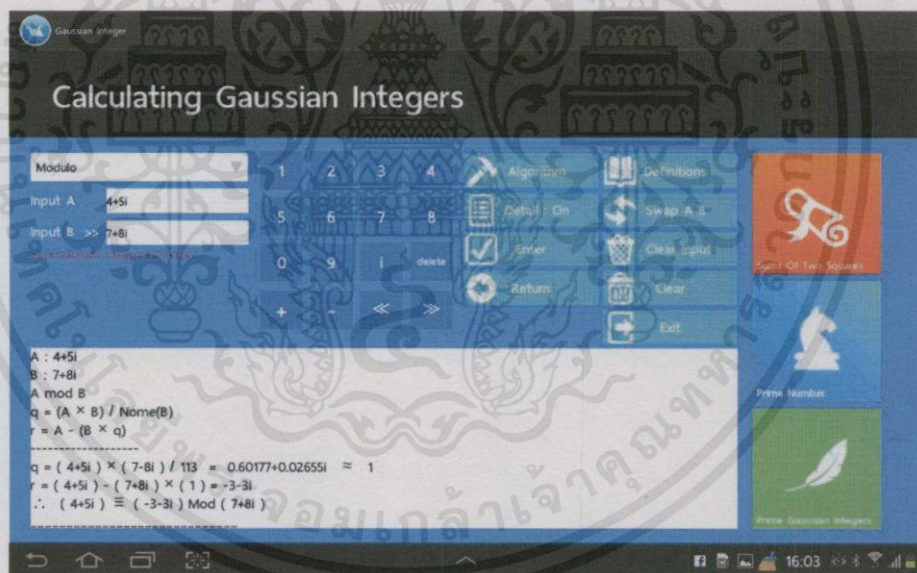
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9 Factorization (การแยกตัวประกอบ)



รูปที่ 4.25 ตัวอย่างการดำเนินการการแยกตัวประกอบ บน tablet

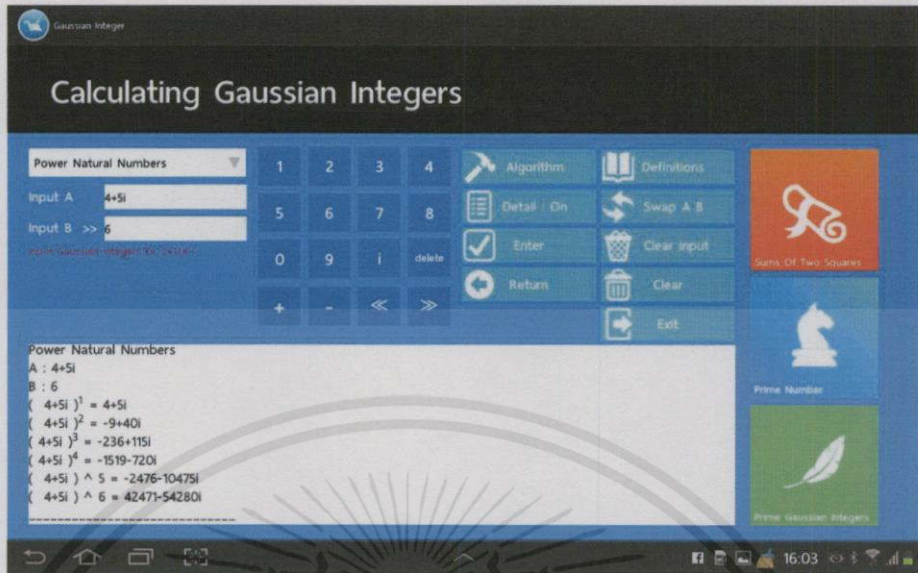
2.10 Modulo (การมอดุโล)



รูปที่ 4.26 ตัวอย่างการดำเนินการการบวกการมอดุโล บน tablet

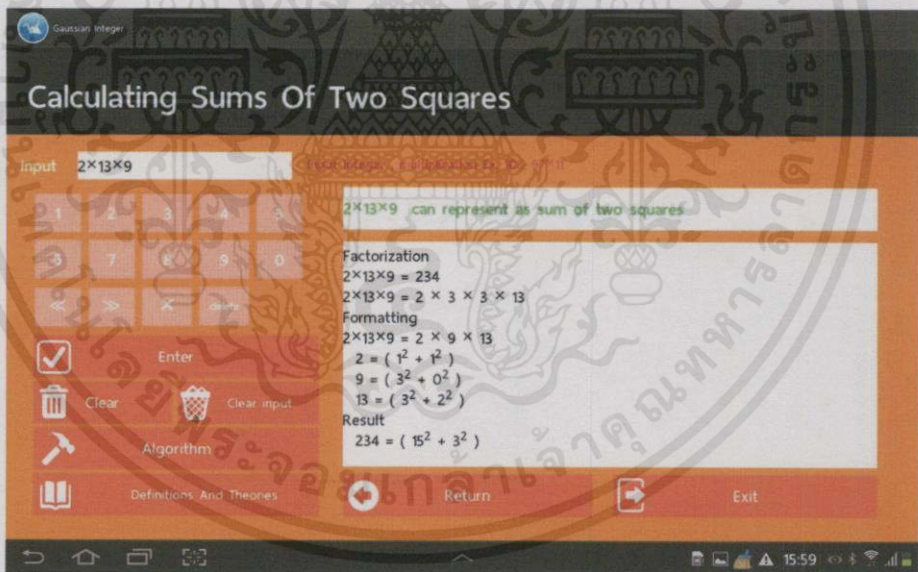
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะวิธีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.11 Power Natural Numbers (การยกกำลัง)



รูปที่ 4.27 ตัวอย่างการดำเนินการการยกกำลังด้วยจำนวนนับ บน tablet

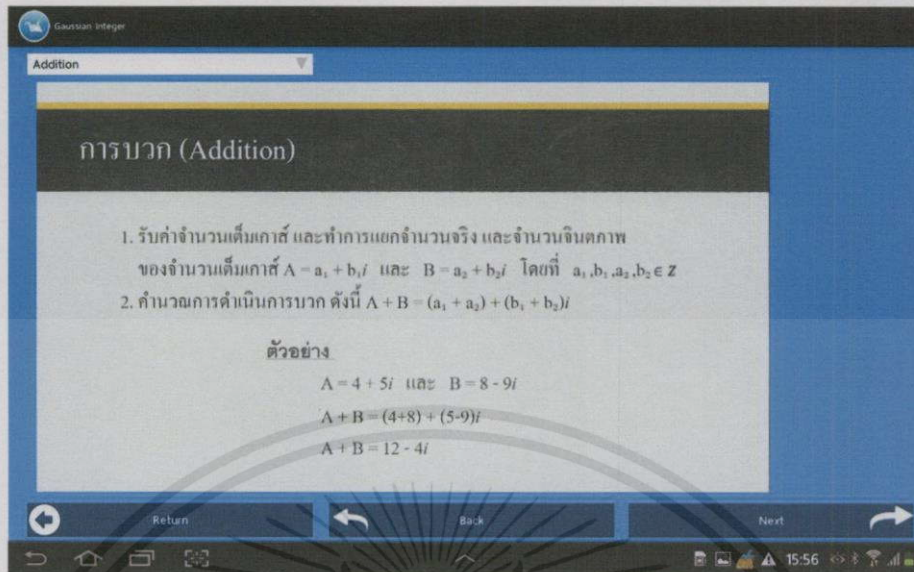
3) Calculating Sums of Two Squares (คำนวณหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม)



รูปที่ 4.28 ตัวอย่างการหาผลบวกกำลังสอง 2 เทอม บน tablet

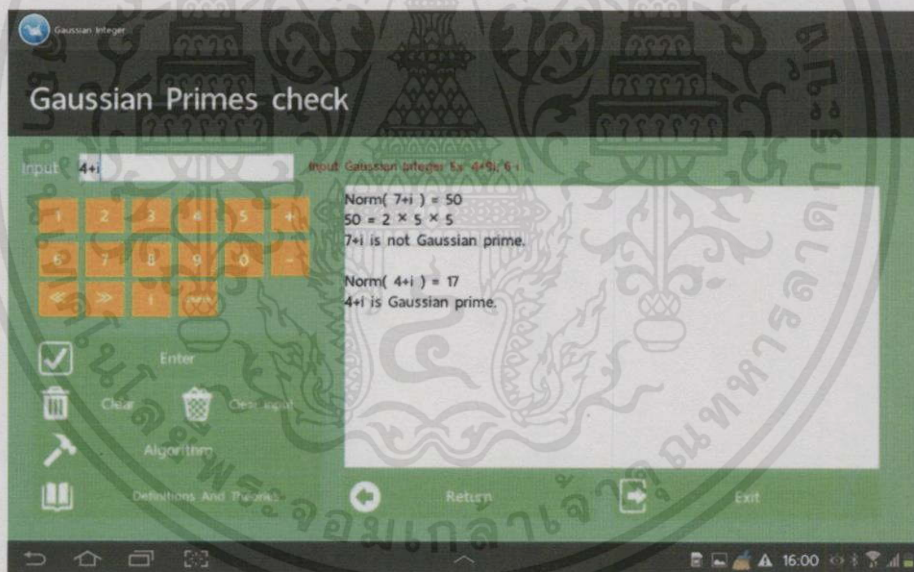
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4) Algorithm (ขั้นตอนการดำเนินการ และตัวอย่างวิธีการดำเนินการ)



รูปที่ 4.29 ขั้นตอนการดำเนินการ บน tablet

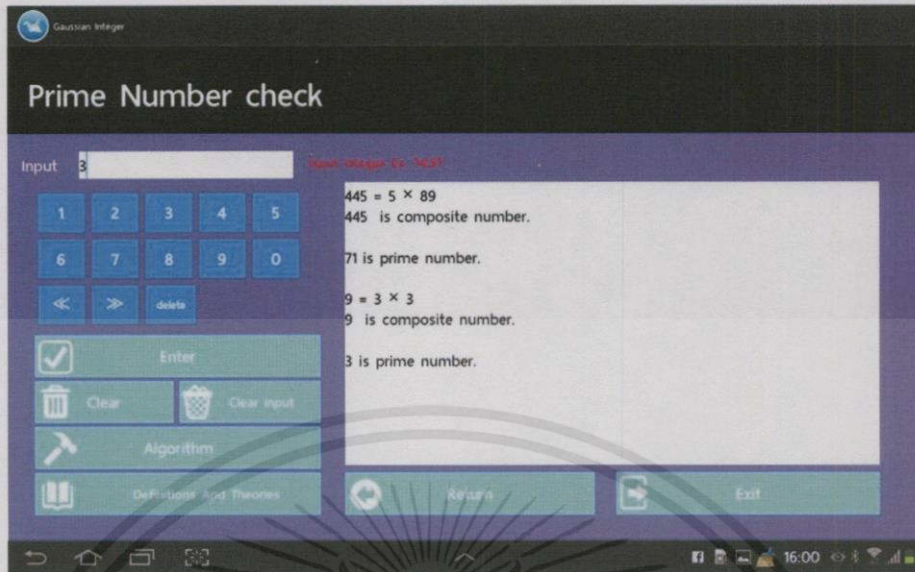
5) Gaussian Prime check (พิจารณาจำนวนเฉพาะเกาส์)



รูปที่ 4.30 พิจารณาการเป็นจำนวนเต็มเกาส์ บน tablet

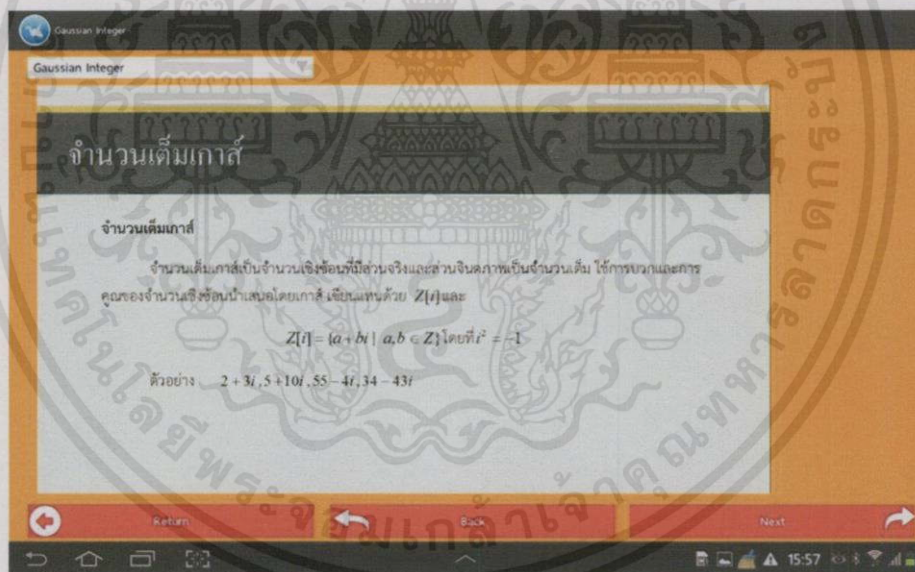
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6) Prime Number check (การพิจารณาจำนวนเฉพาะ)



รูปที่ 4.31 การพิจารณาจำนวนเฉพาะ บน tablet

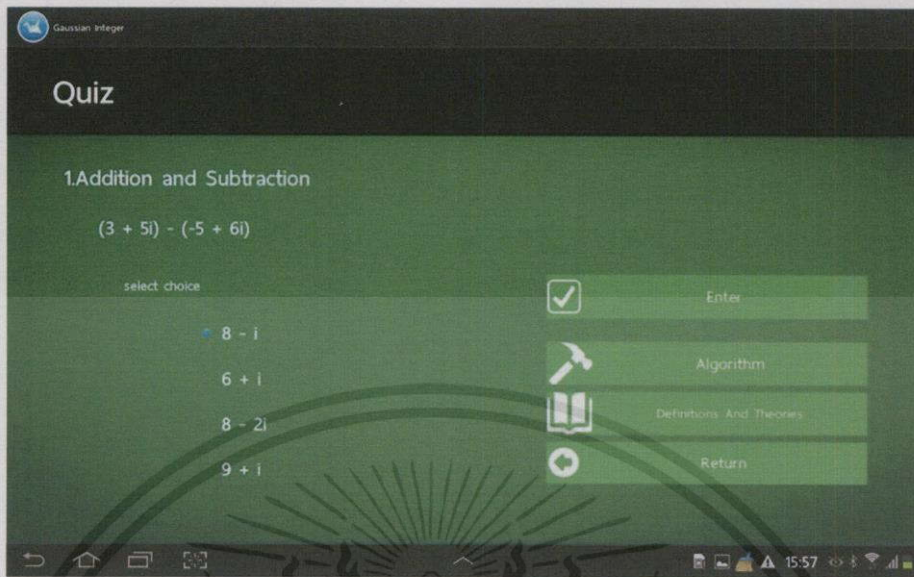
7) Definitions and Theorems (บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง)



รูปที่ 4.32 บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง บน tablet

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8) Quiz (ตัวอย่างแบบทดสอบ)



รูปที่ 4.33 แบบทดสอบ บน tablet

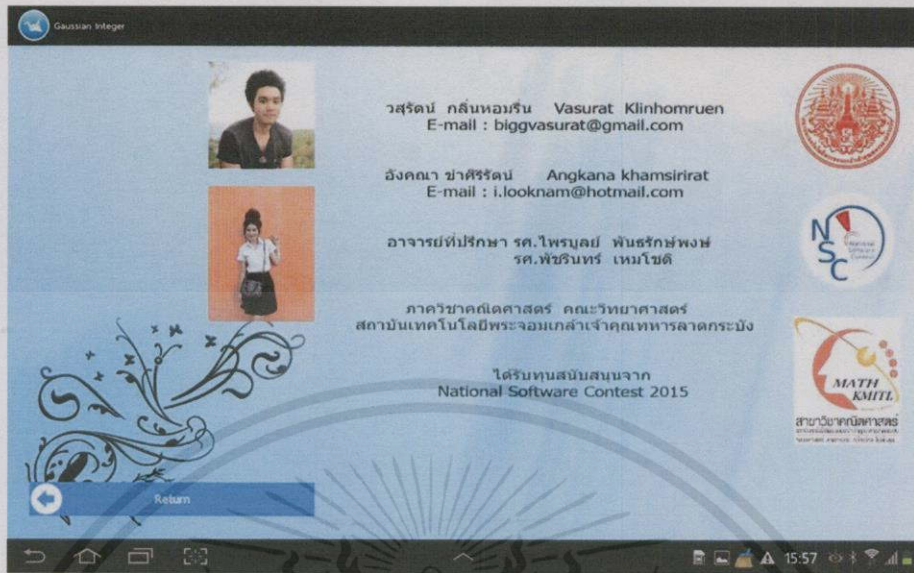
9) History (บันทึกข้อมูลผู้ใช้โปรแกรม)



รูปที่ 4.34 ประวัติการใช้งาน บน tablet

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

10) About Us (แสดงรายชื่อผู้พัฒนาและอาจารย์ที่ปรึกษา)



รูปที่ 4.35 รายชื่อผู้พัฒนาและอาจารย์ที่ปรึกษา บน tablet

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

- 1) ความสามารถของโปรแกรม
 - สามารถคำนวณการดำเนินการบนจำนวนเต็มเกาส์ 2 จำนวน ได้แก่ หาตัวหารร่วมมาก หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ และ หาจำนวนเต็มที่เขียนให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสอง 2 เทอม
 - มีส่วนของความรู้อื่นๆ ได้แก่ บทนิยาม ทฤษฎีบท ขั้นตอนวิธีการดำเนินการ และ ตัวอย่าง
 - มีการเก็บประวัติการใช้งาน สามารถเรียกดูย้อนหลังได้
 - มีการพัฒนาให้สามารถใช้งานได้บน Tablet เพื่อสะดวกต่อการใช้งาน
- 2) ผลการทดลองใช้
 - ได้นำโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ให้นักศึกษาระดับปริญญาตรี ที่เคยศึกษาเรื่องจำนวนเต็มเกาส์ โดย นักศึกษาในกลุ่มตัวอย่างได้ทดลองใช้และมีความเห็นว่า โปรแกรมสามารถใช้คำนวณได้ถูกต้องและแม่นยำ และครอบคลุมเนื้อหาที่เคยศึกษา
 - โปรแกรมนี้ในขั้นตอนแรกได้พัฒนาบนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทำงานบนระบบปฏิบัติการ Windows และเพื่อให้มีความสะดวกในการใช้งานจึงได้พัฒนาให้สามารถทำงานได้บน Tablet
- 3) ได้รับทุนสนับสนุนจากโครงการ การแข่งขันพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์แห่งประเทศไทย ครั้งที่ 17 The Seventeenth National Software Contest (NSC 2015)
- 4) นำเสนอในงานประชุมวิชาการ
 - ผู้พัฒนาได้นำโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเสนอในที่ประชุมวิชาการระดับปริญญาตรี สาขา คณิตศาสตร์ประยุกต์ (UAMC) ครั้งที่ 4 เมื่อวันที่ 25 เมษายน พุทธศักราช 2558 ในหัวข้อเรื่อง การ ออกแบบขั้นตอนวิธีและพัฒนาโปรแกรมเพื่อการคำนวณบนจำนวนเต็มเกาส์ ในกลุ่ม Modeling Computational Mathematics โดยมีการแข่งขันทั้งหมด 8 ทีม มีคณะกรรมการ ผู้ตัดสินทั้งหมด 4 มหาวิทยาลัย และได้รับ โล่รางวัลชนะเลิศจากสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 ปัญหาและอุปสรรค

1) โปรแกรมนี้จะใช้ตัวแปรในส่วนของการรับข้อมูล และในการดำเนินการต่างๆเป็นชนิด Integer ที่มีขนาด 32-bit (4-byte) หรือที่มีค่าตั้งแต่ -2,147,483,648 แต่จะไม่เกิน 2,147,483,647

2) โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นได้พัฒนาให้ใช้ได้กับ tablet เฉพาะรุ่น Samsung Galaxy Note 10.1 n8000 และ Lenovo a3300-gv ที่มีขนาด 10 นิ้ว และ 7 นิ้ว ซึ่งไม่สามารถใช้ได้กับ tablet ทุกรุ่น

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. ควรพัฒนาให้สามารถใช้งานบนระบบปฏิบัติการ Linux ,UNIX ,Mac OS
2. ควรพัฒนาแอปพลิเคชันให้สามารถใช้งานกับหน้าจอ tablet ทุกขนาด
3. ควรพัฒนาแอปพลิเคชันให้สามารถนำมาใช้บน smart phones เนื่องจากแอปพลิเคชันมีฟังก์ชันการใช้งานที่หลากหลายจำเป็นต้องใช้ขนาดของหน้าจอที่มีขนาดใหญ่
4. ควรพัฒนาแอปพลิเคชันให้สามารถงานใช้บน iOS เนื่องจากแอปพลิเคชันของเราสามารถใช้งานได้กับ tablet ที่รองรับระบบปฏิบัติการแอนดรอย
5. ควรพัฒนาให้สามารถใช้งานบน website



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] จักรชัยโสอินทร์, พงษ์ศธร จันทรียอยและณัฐนิชา วีระมงคลเลิศ. Android App Development ฉบับสมบูรณ์. นนทบุรี : บริษัทไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด, 2555
- [2] ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์ และ พัชรินทร์ เหมโชติ. ทฤษฎีจำนวน 1. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2552
- [3] ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์ และ พัชรินทร์ เหมโชติ. ทฤษฎีจำนวน 2. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดมีนเซอวิสซัพพลาย, 2557
- [4] ศุภชัย สมพานิช. คู่มือเรียนและใช้งาน Visual Basic. กรุงเทพฯ : บริษัทสวัสดีไอที จำกัด, 2556
- [5] ศุภชัย สมพานิช. Basic Android Programming. นนทบุรี : บริษัทไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด, 2555
- [6] “Advanced Encryption Standard” [ออนไลน์] แหล่งที่มา encryptionanddatasecurity.blogspot.com (20 เมษายน 2558).
- [7] “Complex Number” [ออนไลน์] แหล่งที่มา www.kidtek.com/Complex-Number.php (20 พฤศจิกายน 2557).
- [8] “Complex Number Calculator” [ออนไลน์] แหล่งที่มา www.mathsisfun.com/numbers/complex-number-calculator.html (20 พฤศจิกายน 2557).
- [9] David M. Burton. Elementary Number Theory. Seventh Edition. Singapore: McGraw – Hill, 2011.
- [10] “Fermat's factorization method” [ออนไลน์] แหล่งที่มา http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's_factorization_method (22 พฤศจิกายน 2557).
- [11] “icon” [ออนไลน์] แหล่งที่มา www.iconarchive.com (10 เมษายน 2558).
- [12] “iconset:windows-8-metro-style” [ออนไลน์] แหล่งที่มา www.iconfinder.com (10 เมษายน 2558).
- [13] “Operation with Complex Number” [ออนไลน์] แหล่งที่มา www.mathportal.org/calculators/complex-numbers-calculator/complex-unary-operations-calculator.php(20 พฤศจิกายน 2557).
- [14] “Pythagorean triple” [ออนไลน์] แหล่งที่มา http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple (21 เมษายน 2558).
- [15] “Random Small Primes” [ออนไลน์] แหล่งที่มา primes.utm.edu/lists/small/small.html (2 เมษายน 2558).
- [16] “The 10,000 smallest prime numbers” [ออนไลน์] แหล่งที่มา www.math.utah.edu/~pa/math/p10000.html (2 เมษายน 2558).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก

ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรม

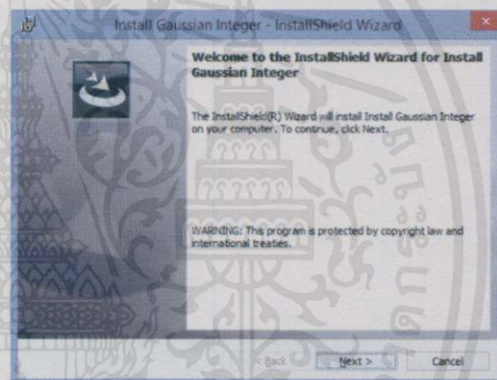
1. Open folder Install Gaussian Integer



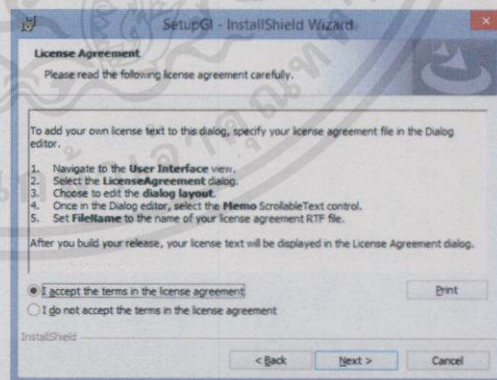
2. Double click setup.exe



3. Click Next

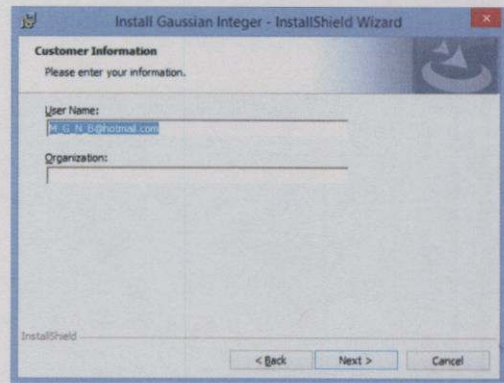


4. Click I accept the terms in the license agreement and click Next

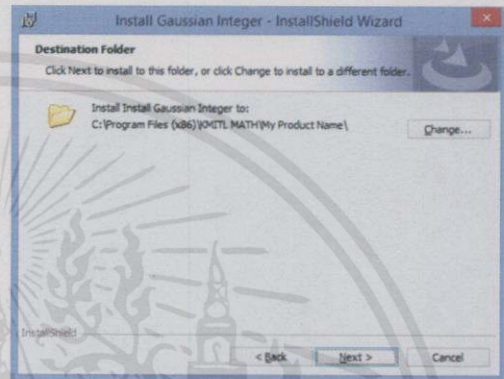


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. กรอก User Name และ Organization และกด Next



6. เลือก folder ที่จะทำการติดตั้ง และกด Next โปรแกรมจะทำการติดตั้ง



7. กด Finish เป็นอันเสร็จสิ้น การติดตั้งโปรแกรม Gaussian Integer



8. เมื่อติดตั้งโปรแกรมเสร็จสิ้น จะแสดงไอคอน Gaussian Integer ที่หน้าจอแรก (Desktop)



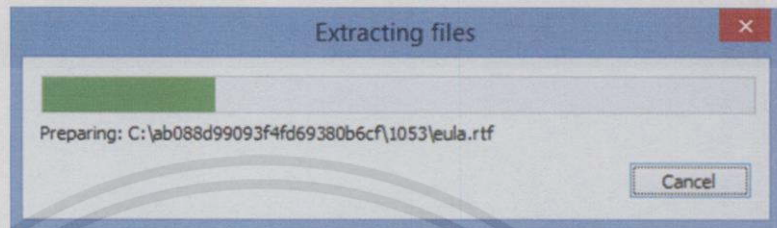
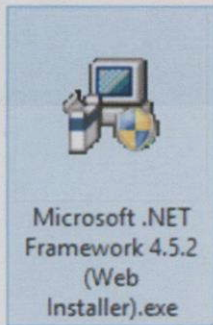
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ

ถ้าติดตั้งโปรแกรมแล้วใช้งานไม่ได้ให้ Install Microsoft .NET Framework 4.5.2 (Web Installer) และ Install Visual Basic Power Packs Setup ดังนี้

Microsoft .NET Framework 4.5.2 (Web Installer)

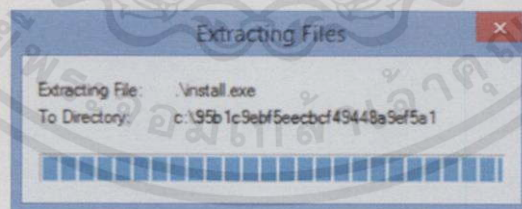
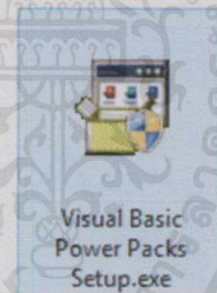
หมายเหตุ: ส่วนใหญ่เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลมีติดตั้งไว้อยู่แล้วจึงไม่จำเป็นต้องติดตั้ง



Install Visual Basic Power Packs Setup

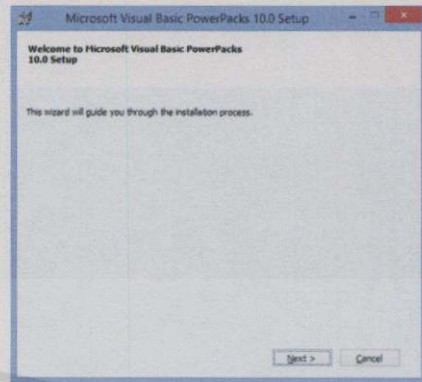


1. Double click Visual Basic Power Packs Setup.exe

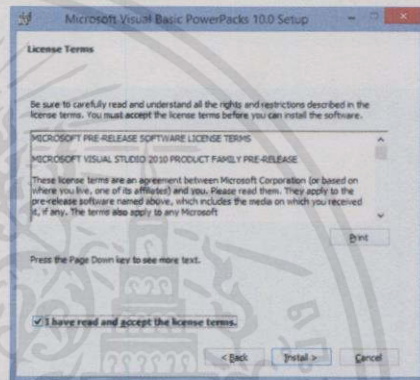


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

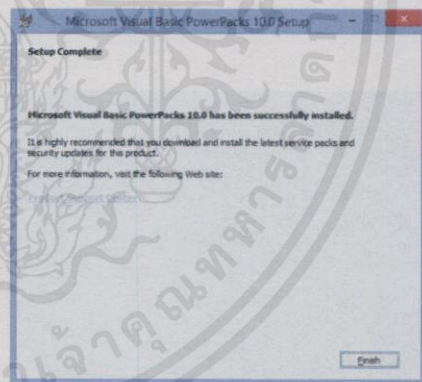
2. Click Next



3. Click I have read and accept the license terms, and click Install



4. Click Finish

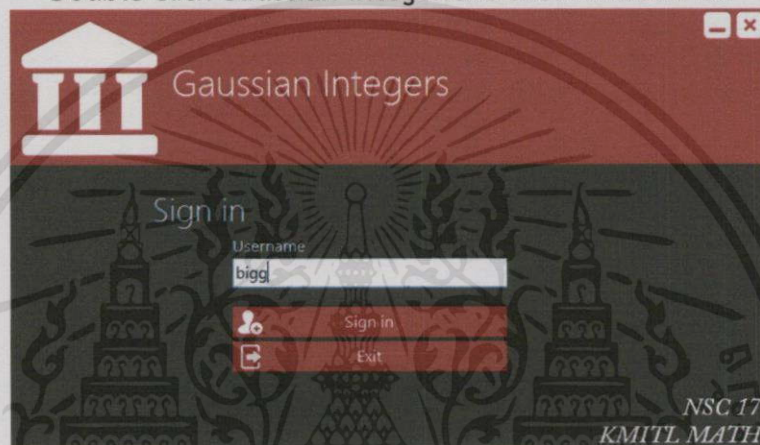


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

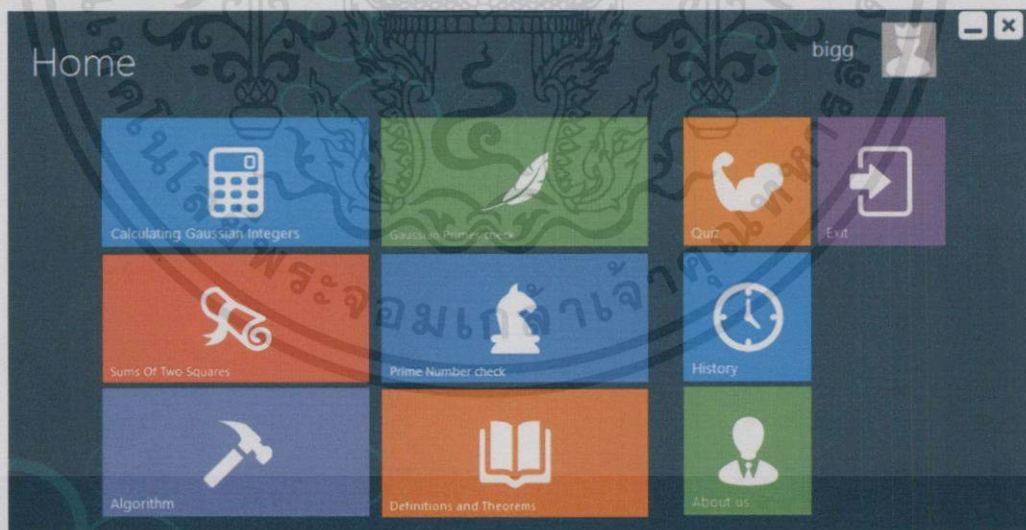
ภาคผนวก ข คู่มือการใช้งานโปรแกรม



Double click Gaussian Integer.exe เพื่อใช้งานโปรแกรม

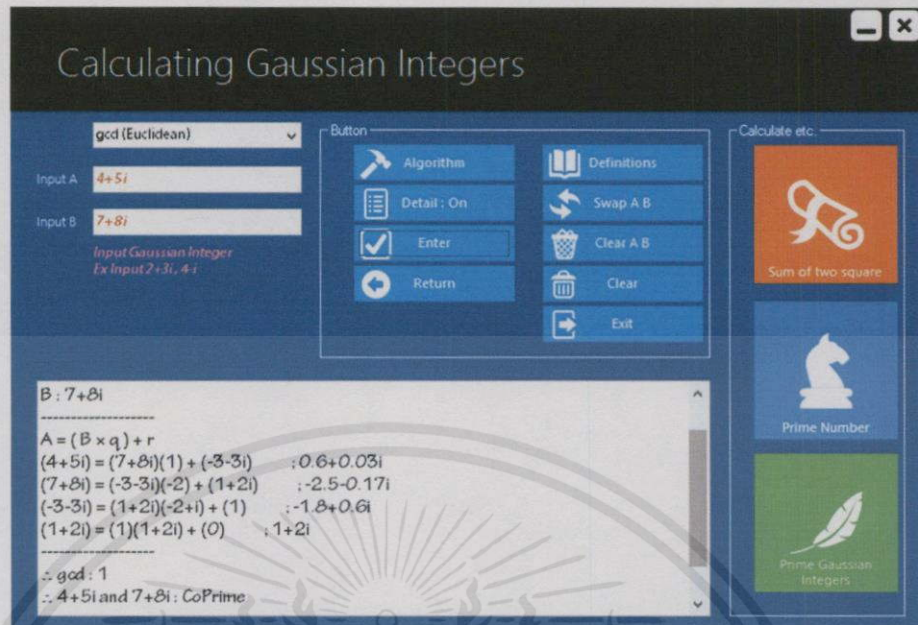


กรอก Username และกด Sign in เพื่อเข้าใช้งาน

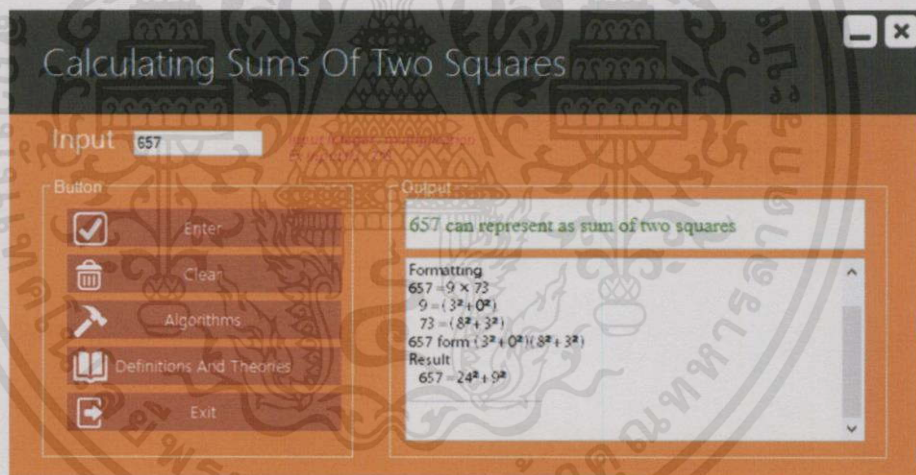


หน้า Home จะประกอบไปด้วย Calculating Gaussian Integers ,Sums of Two Squares ,Algorithm ,Gaussian Primes check ,Prime Number check ,Definitions and Theorems ,Quiz ,History ,About Us และ Exit

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

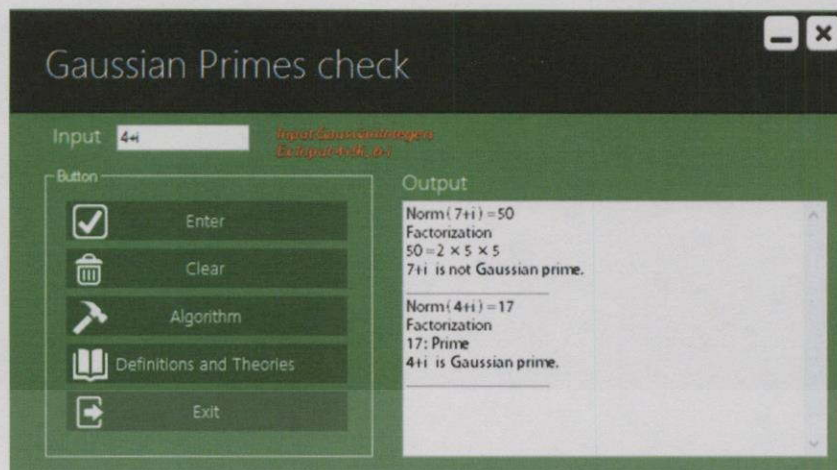


หน้า Calculating Gaussian Integers เมื่อเลือกการดำเนินการใส่จำนวนเต็มเกาส์และกด Enter โปรแกรมจะทำการแสดงขั้นตอนการคำนวณอย่างละเอียด

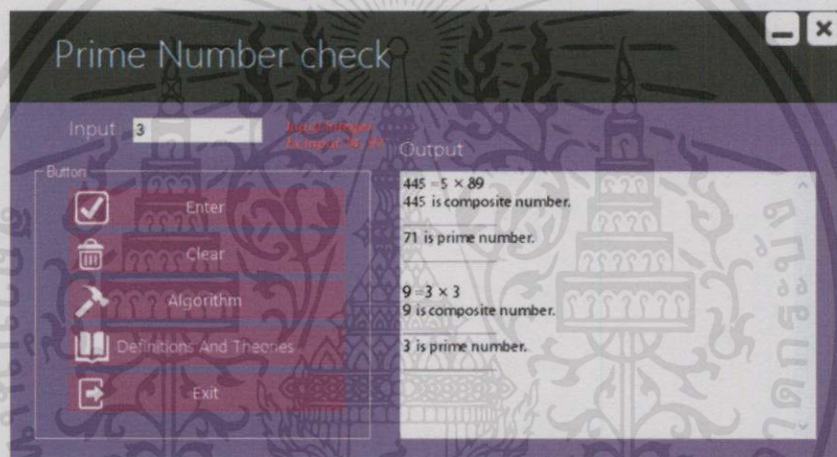


หน้า Calculating Sums Of Two Squares เมื่อป้อนจำนวนเต็มใดๆและกด Enter โปรแกรมจะทำการแยกตัวประกอบ และพิจารณาแต่ละจำนวนเฉพาะ ว่าสามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสอง 2 เทอมได้หรือไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

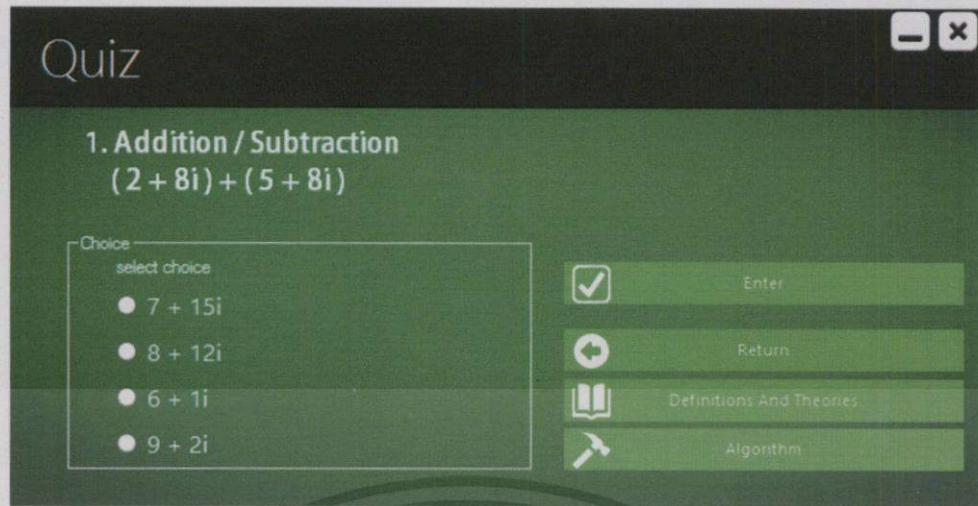


หน้า Gaussian Primes check เมื่อป้อนจำนวนเต็มเกาส์ใดๆและกด Enter โปรแกรมจะทำการคำนวณจากขนาดของจำนวนเต็มเกาส์ และพิจารณาว่าสามารถแยกตัวประกอบได้หรือไม่

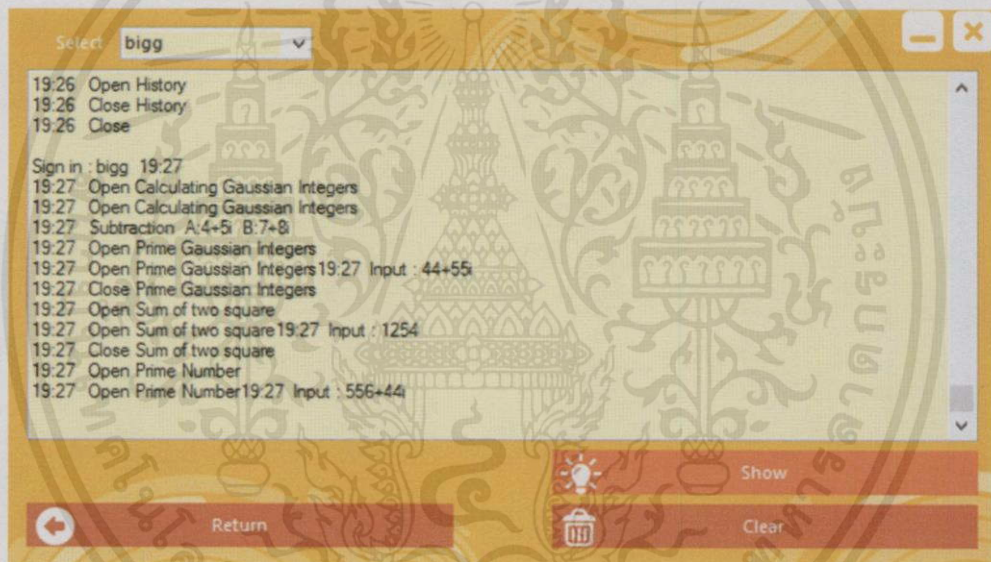


หน้า Prime Number check เมื่อป้อนจำนวนเต็มใดๆและกด Enter โปรแกรมจะทำการแสดงตัวประกอบของจำนวนเต็มนั้นๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีคำนำไปใช้



หน้า Quiz จะเป็นแบบฝึกหัดโดยจะประกอบไปด้วยเรื่องต่างๆของจำนวนเต็มเกาส์มีทั้งหมด 10 ข้อ คำถามกว่า 100 คำถามจะถูกสุ่มออกมา



หน้า History จะประกอบไปด้วยประวัติการใช้งานของ User ต่างๆ และสามารถดูประวัติของ User อื่นๆได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผู้จัดทำ

วาสุรัตน์ กลิ่นหอมชื่น Vasurat Klinhomruen
E-mail : biggyvasurat@gmail.com

อังคณา ขำศิริรัตน์ Angkana khamsirirat
E-mail : ilooknam@hotmail.com

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ไพโรจน์ หันอินทร์จรรย์
รศ.พีรจันทร์ เนินไชดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ได้รับทุนสนับสนุนจาก National Software Contest 2015

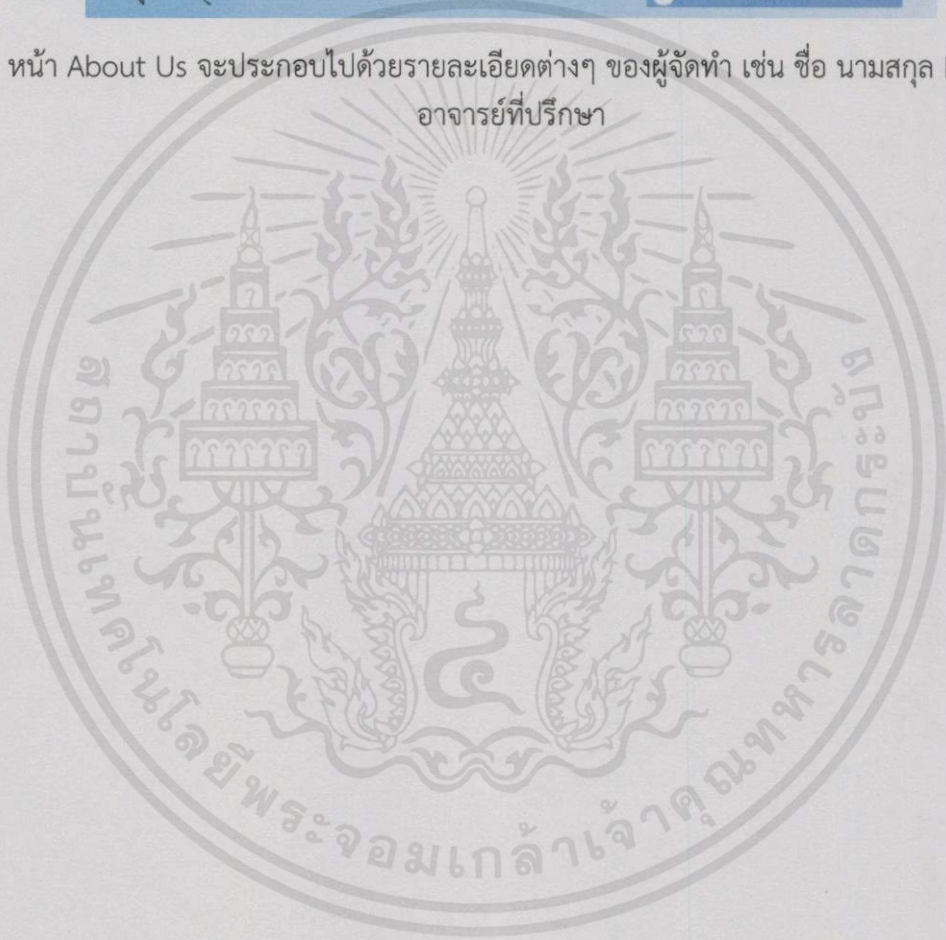
NSC National Software Contest

MATH KMUTT

สถาบันวิชาคณิตศาสตร์
Kasornburi Rajabhat Mahachulalongkornrajavidyalaya University

กลับมาชม

หน้า About Us จะประกอบไปด้วยรายละเอียดต่างๆ ของผู้จัดทำ เช่น ชื่อ นามสกุล Email อาจารย์ที่ปรึกษา



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ค

แนวทางและการประยุกต์ใช้งานเรื่องจำนวนเต็มเกาส์

1. การหาสามเหลี่ยมพีทาโกรัส

การหาสามเหลี่ยมพีทาโกรัสสามารถหาได้โดยให้ $\alpha = a + bi$ และ $a, b \neq 0, a \neq b$

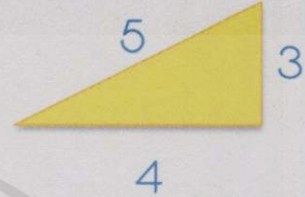
ตัวอย่าง 5.4.1 เราจะหาสามเหลี่ยมพีทาโกรัสจากจำนวนเต็มเกาส์ $1 + 2i$ สามารถหาค่า x, y, z ได้ดังนี้

$$x = |a^2 - b^2| = |2^2 - 1^2| = 3$$

$$y = |2ab| = |2 \cdot 2 \cdot 1| = 4$$

$$z = |a^2 + b^2| = |2^2 + 1^2| = 5$$

$$\therefore (x, y, z) = (3, 4, 5)$$



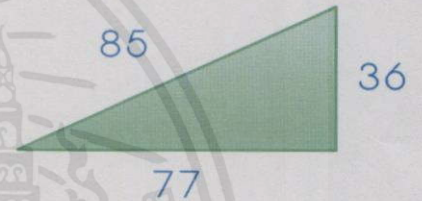
ตัวอย่าง 5.4.2 เราจะหาสามเหลี่ยมพีทาโกรัสจากจำนวนเต็มเกาส์ $7 + 11i$ สามารถหาค่า x, y, z ได้ดังนี้

$$x = |a^2 - b^2| = |7^2 - 11^2| = 72$$

$$y = |2ab| = |2 \cdot 7 \cdot 11| = 154$$

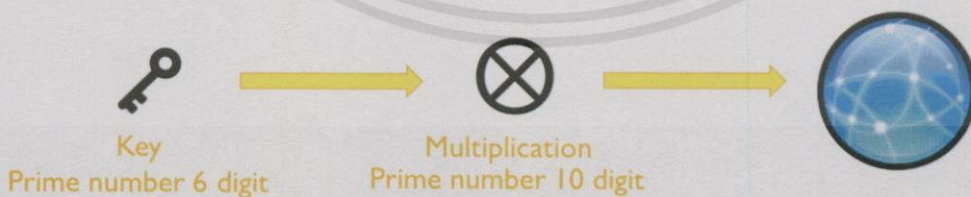
$$z = |a^2 + b^2| = |7^2 + 11^2| = 170$$

$$\therefore (x, y, z) = (72, 154, 170) = (36, 77, 85)$$



2. เข้ารหัสลับ (Cryptography)

การนำจำนวนเต็มเกาส์มาประยุกต์ใช้ในเรื่องการเข้ารหัสลับ (Cryptography) เป็นอีกเรื่องที่น่าสนใจ โดยจะยกตัวอย่างการเข้ารหัสลับโดยใช้กุญแจที่เป็นจำนวนเฉพาะขนาด 6 หลัก เมื่อใส่ไปแล้วระบบจะทำการดำเนินการต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น การบวก การลบ การคูณ การเลื่อนตำแหน่ง (Shift) การสลับตำแหน่ง (transposition) การแทนที่ (substitution) เพื่อให้กุญแจของเรามีความวุ่นวาย หรือยุ่งยากมากขึ้น ทำให้ผู้ไม่หวังดีทำการแอบเจาะเข้ารหัสได้ยากยิ่งขึ้น ใน ณ ที่นี้ การดำเนินการเป็นการคูณกับจำนวนเฉพาะขนาด 10 หลัก เมื่อสิ้นการดำเนินการจะได้ ตัวเลขขนาด 15-16 หลัก ถ้าตรงกับที่ระบบตั้งค่าไว้จะสามารถเข้าใช้งานได้



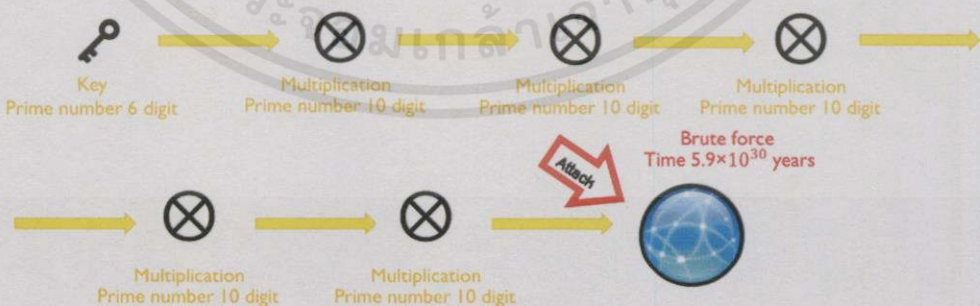
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับผู้ไม่หวังดีที่ต้องอาจจะแอบเจาะเข้าระบบ อาจสร้างโปรแกรมเพื่อสุ่มตัวเลขมาลองผิดลองถูก (Brute force) ตั้งแต่ 000000 ถึง 999999 อาจใช้เวลาเพียงไม่นาน ที่จะสุ่มเจอกุญแจที่เป็นจำนวนเฉพาะของเรา ฉะนั้นระบบของเราควรต้องมีการป้องกันที่ดีพอ ที่จะสามารถป้องกันการแอบเจาะเข้าระบบ อย่างเช่น ถ้ากรอกรหัสผิดติดต่อกัน 5 ครั้ง จะถูกระงับการใช้งาน 1 นาที ถ้าผิดมากกว่านั้นก็ถูกระงับการใช้งานนานกว่านั้น หรือ การกรอกตัวอักษรตามภาพให้ถูกต้อง จะทำให้ผู้ไม่หวังดีไม่สามารถโจมตีทางด้านนี้ได้แล้ว ผู้ไม่หวังดีจะต้องไปโจมตีในขั้นตอนสุดท้ายที่ผ่านการดำเนินการมาแล้ว ในขั้นตอนนี้ จะมีตัวเลขถึง 15-16 หลัก ถ้าผู้ไม่หวังดีจะสุ่มตัวเลขมาลองผิดลองถูก จะต้องใช้เวลาถึง 10 ชั่วโมงเลยทีเดียว (กำหนดความเร็วในการสุ่ม 1 ล้านล้านตัวเลข ต่อ 1 วินาที)



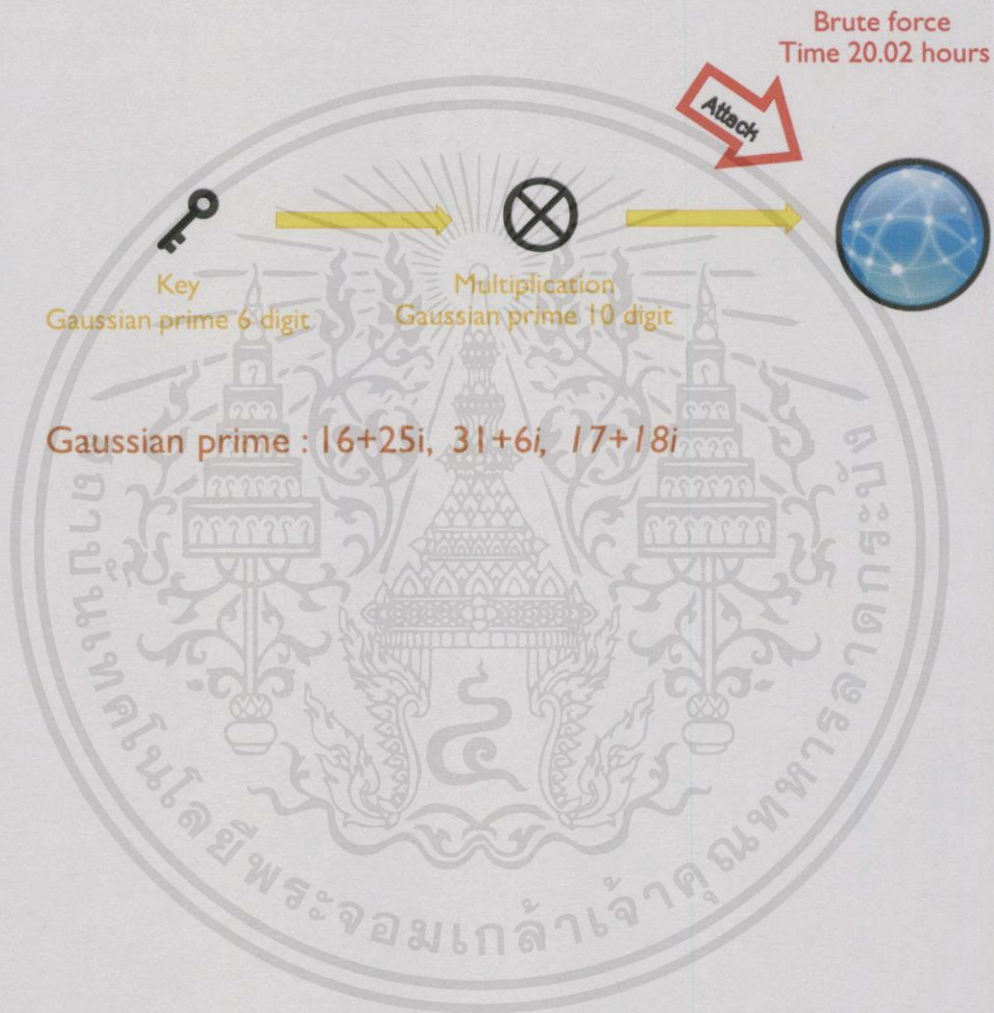
เพราะฉะนั้นผู้ไม่หวังดีจะต้องหาวิธีที่จะแอบเจาะเข้าระบบให้เร็วกว่าเดิม ถ้าเกิดว่าผู้ไม่หวังดีรู้ว่ากุญแจของเราเป็นตัวเลขที่เป็นจำนวนเฉพาะ และในขั้นตอนสุดท้ายได้ตัวเลขที่มีขนาด 16 หลัก อาจสร้างโปรแกรมที่นำเอาจำนวนเฉพาะทั้งหมด 6 หลัก มาคูณกับจำนวนเฉพาะทั้งหมด 10 หลัก เพื่อให้ได้ตัวเลขที่เป็นไปได้ แล้วนำมาสุ่มลองผิดลองถูก เพื่อลดเวลาที่ต้องไล่สุ่มตัวเลขมาลองผิดลองถูก

ทางป้องกันอีกทางหนึ่งที่เป็นไปได้คือ การเพิ่มการดำเนินการให้มากขึ้น ถ้าเกิดเราเพิ่มการดำเนินการจากเดิมเป็นการคูณกับจำนวนเฉพาะ 10 หลัก 1 ครั้งแล้ว เปลี่ยนมาเป็นการคูณกับจำนวนเฉพาะ 10 หลักที่แตกต่างกัน 5 ครั้ง เมื่อผ่านการดำเนินการแล้ว ตัวเลขที่ได้จะมีขนาดถึง 56 หลัก ถ้าผู้ไม่หวังดีต้องการที่จะสุ่มตัวเลขมาลองผิดลองถูก จะต้องใช้เวลาถึง 5.9×10^{30} ปีเลยทีเดียว



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าเกิดเราเปลี่ยนจากเดิมที่เป็นแค่จำนวนเฉพาะมาเป็นจำนวนเฉพาะเกาส์ โดยที่เราถือกุญแจที่เป็นจำนวนเฉพาะเกาส์ขนาด 6 หลัก และมีการดำเนินการเป็นการคูณกับจำนวนเฉพาะเกาส์ขนาด 10 หลัก ถ้าผู้ไม่หวังดีต้องการสุมตัวเลขมาลองผิดลองถูกจะต้องใช้เวลามากขึ้นถึงเท่าตัวเลยทีเดียว เพราะจำนวนเต็มเกาส์ประกอบไปด้วย 2 จำนวนเต็มใดๆ ในรูปของ $a+bi$ ถ้าผู้ไม่หวังดีสร้างโปรแกรมที่นำจำนวนเฉพาะเกาส์ทั้งหมดมาคูณกัน คงเป็นไปได้ถ้าผู้ไม่หวังดีไม่มีความรู้เรื่องจำนวนเต็มเกาส์ ตัวอย่างจำนวนเฉพาะเกาส์ เช่น $16+25i$, $31+6i$, $17+18i$ จะสังเกตได้ว่าจำนวนเต็ม a และ b ไม่มีทางรู้ได้เลยว่าอาจจะเป็นจำนวนเฉพาะ หรือจำนวนประกอบ จึงไม่มีทางหลีกเลี่ยงได้เลยที่จะต้องยอมเสียเวลาสุมตัวเลขเพื่อมาลองผิดลองถูก ถ้าผู้ไม่หวังดีไม่มีความรู้ในเรื่องจำนวนเต็มเกาส์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้