

ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อราเนโรสปอรา
A STUDY FOR MATHEMATICAL MODEL OF NEUROSPORA
OCCURRENCE



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อราเนิวโรสปอรา
A STUDY FOR MATHEMATICAL MODEL OF NEUROSPORA
OCCURRENCE



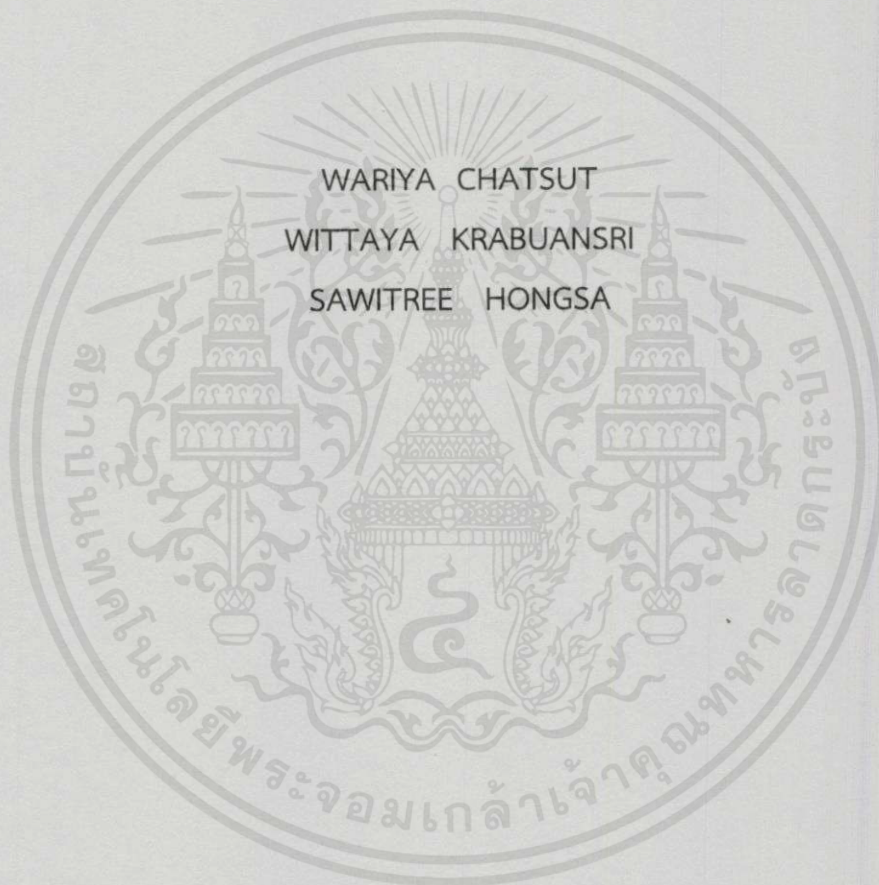
ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในห้องสมุดของวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกหรือเผยแพร่ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ปีการศึกษา 2557

A STUDY FOR MATHEMATICAL MODEL OF NEUROSPORA
OCCURRENCE



WARIYA CHATSUT
WITTAYA KRABUANSRI
SAWITREE HONGSA

A SPECIAL PROBLEM COOPERATIVE EDUCATION SUBMITTED IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF
SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2014


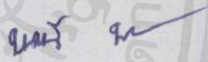

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์และห้ามมิให้คัดลอกหรือเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรา*Neurospora*
 A Study for Mathematical Model of *Neurospora* Occurrence

ชื่อนักศึกษา นางสาววริยา ชาติสุทธิ 54050070
 นายวิทยา กระบวนศรี 54050074
 นางสาวสาวิตรี หงษา 54050092

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
 ภาควิชา คณิตศาสตร์
 อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้
 ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์
 ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.ดร.สิริพร แอนนำ วินเทอร์ ประธานกรรมการ	
รศ.ดร.พันธ์ณี พงศ์สัมพันธ์ กรรมการ	
ผศ.ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อราไวรัสสปอร์รา
ชื่อนักศึกษา	นางสาววริยา ชาติสุทธิ 54050070 นายวิทยา กระบวนศรี 54050074 นางสาวสาวิตรี หงษา 54050092
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กาญจนา คำนิงกิจ

บทคัดย่อ

การศึกษาและทำความเข้าใจแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อราไวรัสสปอร์ราที่มีปัจจัยของแสงด้วย โดยในที่นี้ต้องทราบถึงวิธีการคำนวณหาจุดสมดุล ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้เกิดสถานะเสถียร และสถานะวงจำกัด โดยรวมถึงการใช้หลักการของรูธ-ฮอร์วิท ซึ่งแสดงผลลัพธ์ยืนยันด้วยการใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพร้อมแสดงการนำเสนอด้วยกราฟ และนอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใหม่ โดยการใช้วิธีรุงคุตตาของเพชเชอร์เบิร์ก (รุงคุตตาอันดับ 6) เพื่อแสดงผลเปรียบเทียบกับผลการแสดงผลเดิมด้วย

คำสำคัญ : แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ วิธีรุงคุตตาของเพชเชอร์เบิร์ก สถานะวงจำกัด สถานะเสถียร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	A Study for Mathematical Model of Neurospora Occurrence	
Students	Miss Wariya Chatsut	54050070
	Mr.Wittaya Krabuansri	54050074
	Miss Sawitree Hongsa	54050092
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Academic Year	2014	
Advisor	Asst.Dr.Kanchana Kumnungkit	

Abstract

Mathematical model of Neurospora occurrence with light effect is studied. There are composed of finding equilibrium points, suitable parameters for stable and limit cycle condition cases. It consists of Routh-Hurwitz criteria and presented by numerical methods with several graphs. Moreover, we developed a new computer program with Runge-Kutta-Fehlberg's method (RK6) for showing the results that can compare with the old research results.

Keywords: limit cycle, Mathematical model, Runge-Kutta-Fehlberg's method, stable

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำคู่มือการทำปัญหาพิเศษนี้ คณะผู้จัดทำขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษาและกรรมการปัญหาพิเศษซึ่งประกอบด้วย ผศ.ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ รศ.ดร.พนธ์นิ พงศ์สัมพันธ์ และ อ.ดร.สิริพร แชนน่า วินเทอร์ ที่ได้เสียสละเวลาให้คำแนะนำในการปรับปรุงปัญหาพิเศษนี้ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำขอขอบคุณนาย วงศ์วิศรุต เชื่องสตุ่ง และนายศรารุช สุวรรณอัทธ์ ที่ได้ให้คำปรึกษาและความรู้เกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรนิเวศโรสปอร์รา ขอขอบคุณ นายอำพล ดวงแป้น ที่ให้ความรู้ทางด้านระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับปัญหาพิเศษฉบับนี้ ขอขอบคุณนายกิตติกาญจน์ จาไม้ ที่ให้คำปรึกษาทางด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่สาขาคณิตศาสตร์ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ รวมทั้งรุ่นพี่รุ่นน้องและเพื่อนๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือต่างๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

นางสาววริยา ชาตีสุทธิ 54050070
นายวิทยา กระบวนศรี 54050074
นางสาวสาวิตรี หงษา 54050092

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญรูปภาพ.....	ฉ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ.....	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา.....	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....	2
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
2.1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	3
2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์.....	4
2.1.2.1 การแบ่งประเภทสมการเชิงอนุพันธ์.....	4
2.1.3 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.....	7
2.1.4 วิธีแยกตัวแปร.....	8
2.1.5 ภาพแสดงสถานะจุดสมดุล.....	10
2.1.6 ลักษณะของกราฟ Limit cycle และ Stable.....	12
2.1.7 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองและสัมประสิทธิ์ค่าคงที่.....	13
2.1.8 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ และสัมประสิทธิ์ค่าคงที่.....	15
2.1.9 หลักการของรูธ-เฮอริวิตซ์(Routh-Hurwitz criteria).....	17
2.1.10 เชื้อราชนิด Neurospora.....	21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

บทที่ 3 วิธีการดำเนินงาน.....	23
3.1 ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรเชื้อราในโรงสโปรร่า	20
โดยมีปัจจัยการมีแสงและไม่มีแสง	
3.1.1 บทนำ.....	24
3.1.2 วิธีทำแบบจำลอง.....	24
3.1.2.1 แบบจำลองเกี่ยวกับคณิตศาสตร์.....	24
3.1.2.2 การวิเคราะห์แบบจำลอง.....	26
3.1.3 ค่าพารามิเตอร์และแบบจำลองการวิเคราะห์เชิงตัวเลข	38
3.1.3.1 ค่าพารามิเตอร์ เมื่อความเข้มข้นของแสงแตกต่างกัน	38
3.1.3.2 แบบจำลองการวิเคราะห์เชิงตัวเลข.....	40
3.2 การหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์.....	42
ด้วยรุงเงคุดตาของเฟลชเบิร์ก	
3.2.1 การหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์.....	42
3.2.2 การหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์	42
ด้วยรุงเงคุดตาของเฟลชเบิร์ก	
3.2.3 แผนภาพการทำงานของวิธีรุงเงคุดตาของเฟลชเบิร์ก.....	42
บทที่ 4 ผลการดำเนินงานปัญหาพิเศษ.....	45
4.1 การเปรียบเทียบผลลัพธ์.....	46
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ	110
5.1สรุปผลการวิจัย.....	110
5.2 ข้อเสนอแนะ	110
เอกสารอ้างอิง.....	111
ภาคผนวก.....	113
ภาคผนวก ก ตารางค่าความเข้มแสง.....	114
ภาคผนวก ข อธิบาย ณ จุดสมมูล (0, 0, 0, 0)	116

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ

ภาพที่	หน้า
รูปที่ 2.1 ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์.....	3
รูปที่ 2.2 กราฟผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ เป็น Stable.....	10
รูปที่ 2.3 กราฟผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ เป็น Asymptotically Stable.....	10
รูปที่ 2.4 กราฟผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ เป็น Unstable.....	10
รูปที่ 2.5 Direction Field ของสมการเชิงอนุพันธ์.....	11
รูปที่ 2.6 กราฟที่มีลักษณะเป็น limit cycle.....	12
รูปที่ 2.7 กราฟที่มีลักษณะเป็น Stable.....	12
รูปที่ 3.1 แผนภาพการทำงานของนิวโรสปอร์รา (Neurospora).....	24
รูปที่ 3.2 กรณีของสถานะวงจำกัด frqmRNA และ ค่าโปรตีนFRQ ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมง กับค่าความเข้มแสง 1000 lux.	40
รูปที่ 3.3 กรณีของสถานะวงจำกัด ระหว่าง frqmRNA และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 2 มิติ และระหว่าง frqmRNA และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 3 มิติ กับค่าความเข้มแสง 1000 lux.	40
รูปที่ 3.4 กรณีของสถานะเสถียร frqmRNA และ ค่าโปรตีนFRQ ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมง..... กับค่าความเข้มแสง 1000 lux.	41
รูปที่ 3.5 กรณีของสถานะเสถียร ระหว่าง frqmRNA และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 2 มิติ..... และระหว่าง frqmRNA และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 3 มิติ กับค่าความเข้มแสง 1000 lux.	41
รูปที่ 4.1 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	46
รูปที่ 4.2 จากวิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	46
รูปที่ 4.3 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	47
รูปที่ 4.4 จากวิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	47
รูปที่ 4.5 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	48
รูปที่ 4.6 จากวิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	48
รูปที่ 4.7 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	49
รูปที่ 4.8 จากวิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	49
รูปที่ 4.9 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	50
รูปที่ 4.10 จากวิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	50
รูปที่ 4.11 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	51
รูปที่ 4.12 จากวิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	51

รูปที่ 4.13 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	52
รูปที่ 4.14 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	52
รูปที่ 4.15 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	53
รูปที่ 4.16 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	53
รูปที่ 4.17 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	54
รูปที่ 4.18 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	54
รูปที่ 4.19 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	55
รูปที่ 4.20 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	55
รูปที่ 4.21 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	56
รูปที่ 4.22 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	56
รูปที่ 4.23 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	57
รูปที่ 4.24 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	57
รูปที่ 4.25 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	58
รูปที่ 4.26 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	58
รูปที่ 4.27 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	59
รูปที่ 4.28 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	59
รูปที่ 4.29 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	60
รูปที่ 4.30 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	60
รูปที่ 4.31 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	61
รูปที่ 4.32 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	61
รูปที่ 4.33 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	62
รูปที่ 4.34 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	62
รูปที่ 4.35 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	63
รูปที่ 4.36 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	63
รูปที่ 4.37 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	64
รูปที่ 4.38 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	64
รูปที่ 4.39 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	65
รูปที่ 4.40 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	65
รูปที่ 4.41 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	66
รูปที่ 4.42 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	66
รูปที่ 4.43 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	67
รูปที่ 4.44 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	67
รูปที่ 4.45 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	68

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏวชิราวุฒวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
 ไม่ว่าจะพิมพ์ซ้ำ หรือสงวนลิขสิทธิ์ไว้ก็ตาม และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.46 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N	68
รูปที่ 4.47 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	69
รูปที่ 4.48 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	69
รูปที่ 4.49 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	70
รูปที่ 4.50 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	70
รูปที่ 4.51 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	71
รูปที่ 4.52 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	71
รูปที่ 4.53 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	72
รูปที่ 4.54 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	72
รูปที่ 4.55 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	73
รูปที่ 4.56 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	73
รูปที่ 4.57 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	74
รูปที่ 4.58 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	74
รูปที่ 4.59 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	75
รูปที่ 4.60 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	75
รูปที่ 4.61 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N	76
รูปที่ 4.62 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N	76
รูปที่ 4.63 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	77
รูปที่ 4.64 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	77
รูปที่ 4.65 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	78
รูปที่ 4.66 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	78
รูปที่ 4.67 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	79
รูปที่ 4.68 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	79
รูปที่ 4.69 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	80
รูปที่ 4.70 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	80
รูปที่ 4.71 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	81
รูปที่ 4.72 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	81
รูปที่ 4.73 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	82
รูปที่ 4.74 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	82
รูปที่ 4.75 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	83
รูปที่ 4.76 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	83
รูปที่ 4.77 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N	84
รูปที่ 4.78 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N	84

เอกสารนี้เป็นเอกสารต้นฉบับที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนของนักศึกษาในชั้นเรียน โดยผู้จัดทำไม่ได้รับประโยชน์จากการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกหรือเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสารหรือองค์กรต้นฉบับ

รูปที่ 4.79 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	85
รูปที่ 4.80 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	85
รูปที่ 4.81 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	86
รูปที่ 4.82 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	86
รูปที่ 4.83 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	87
รูปที่ 4.84 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	87
รูปที่ 4.85 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	88
รูปที่ 4.86 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	88
รูปที่ 4.87 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	89
รูปที่ 4.88 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	89
รูปที่ 4.89 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	90
รูปที่ 4.90 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	90
รูปที่ 4.91 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	91
รูปที่ 4.92 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	91
รูปที่ 4.93 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	92
รูปที่ 4.94 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	92
รูปที่ 4.95 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	93
รูปที่ 4.96 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ F_C และ F_N	93
รูปที่ 4.97 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	94
รูปที่ 4.98 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	94
รูปที่ 4.99 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	95
รูปที่ 4.100 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	95
รูปที่ 4.101 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	96
รูปที่ 4.102 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	96
รูปที่ 4.103 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	97
รูปที่ 4.104 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	97
รูปที่ 4.105 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	98
รูปที่ 4.106 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_C	98
รูปที่ 4.107 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	99
รูปที่ 4.108 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_S	99
รูปที่ 4.109 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	100
รูปที่ 4.110 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_N	100

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะมิให้ทางอื่น อีกทงห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.111 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	101
รูปที่ 4.112 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	101
รูปที่ 4.113 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	102
รูปที่ 4.114 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M	102
รูปที่ 4.115 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	103
รูปที่ 4.116 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_C	103
รูปที่ 4.117 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	104
รูปที่ 4.118 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_S	104
รูปที่ 4.119 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	105
รูปที่ 4.120 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N	105
รูปที่ 4.121 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	106
รูปที่ 4.122 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C	106
รูปที่ 4.123 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	107
รูปที่ 4.124 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_S	107
รูปที่ 4.125 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N	108
รูปที่ 4.126 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N	108
รูปที่ 4.127 จากงานวิจัยเดิม [5] แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	109
รูปที่ 4.128 จากวิธีรุงงคุดตาอันดับ 6 แสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N	109

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึง ที่มาและ ความสำคัญของปัญหาพิเศษ วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ ข้อจำกัดและขอบเขตของปัญหาพิเศษ ขั้นตอนการดำเนินงานและประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

การเรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์ของคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ต้องมีการทำโครงการปัญหาพิเศษโดยบูรณาการวิชาเรียนต่างๆ หรือศึกษางานวิจัยที่ได้ทำมาแล้วและปรับปรุงบางอย่างเกี่ยวกับงานวิจัยนั้นให้ดีขึ้นได้ ณ ที่นี้ได้สนใจศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรา และเพื่อการบูรณาการวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข คอมพิวเตอร์ โปรแกรม เพื่อช่วยแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และการเขียนโปรแกรม ทำให้นอกจากจะศึกษาวัฏจักรและปัจจัยการเกิดของเชื้อรา แล้วคาดว่าสามารถทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้วิธีอื่นที่แตกต่างจากงานที่ศึกษานี้แล้วนำมาเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ

- 1.2.1 สามารถเข้าใจสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเกิดเชื้อรา
- 1.2.2 สามารถทราบถึงระยะการเกิดของเชื้อรา วัฏจักรและปัจจัยการเกิดของเชื้อรา
- 1.2.3 สามารถหาผลเฉลยโดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข และใช้การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เองเพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ด้วยการสร้างกราฟการเกิดของเชื้อราในสภาวะต่างๆ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1.3.1 ศึกษาและเข้าใจสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรา โดยทราบถึงวัฏจักร ระยะการเกิดของเชื้อรา และการวิเคราะห์พร้อมการคำนวณจากงานวิจัย

1.3.2 ศึกษาหาผลเฉลย โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข และเลือกรูปแบบหรือวิธีที่จะใช้ในการคำนวณกับงานการศึกษาโครงการปัญหาพิเศษนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสาร 1.3.3 สามารถทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้วิธีอื่นที่ต่างจากงานที่ศึกษา เพื่อคำนวณ และดำเนินการคำนวณนำผลลัพธ์ที่ได้มาแสดงผลด้วยกราฟเพื่อเปรียบเทียบผลกับงานวิจัยเดิม ทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้ความรู้จากการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรา และสามารถใช่วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยการเขียนโปรแกรมขึ้นเองเพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้

1.4.2 แบบจำลองนี้อาจจะเป็นประโยชน์กับผู้สนใจและสามารถนำไปพัฒนาต่อให้ดียิ่งขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาค้นคว้า รวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับการเกิดของเชื้อราและปัจจัยในการเกิดเชื้อรา

1.5.2 ศึกษาสมการทางคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรา

1.5.3 ศึกษาการคำนวณและวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัย โดยเฉพาะเรื่องของการใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

1.5.4 ตรวจสอบการคำนวณ และแสดงผลของงานวิจัยเดิม

1.5.5 พิจารณาเลือกวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขหรือการคำนวณที่แตกต่างจากงานวิจัย (RK6)

1.5.6 เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้ข้อ 5 กับ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรา

1.5.7 ตรวจสอบผล

1.5.8 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยเดิมและงานที่ทำใหม่

1.5.9 จัดทำรูปเล่มคู่มือการทำปัญหาพิเศษ

ต่อไปจะกล่าวถึงบทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 ความเข้าใจในงานวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของรัฐจักรเชื้อรานิวโรสปอร์รา บทที่ 4 การเปรียบเทียบผลการวิจัยเดิมกับผลการวิจัยใหม่โดยวิธีรุงงคุดตาของเฟลเบอร์ก และบทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

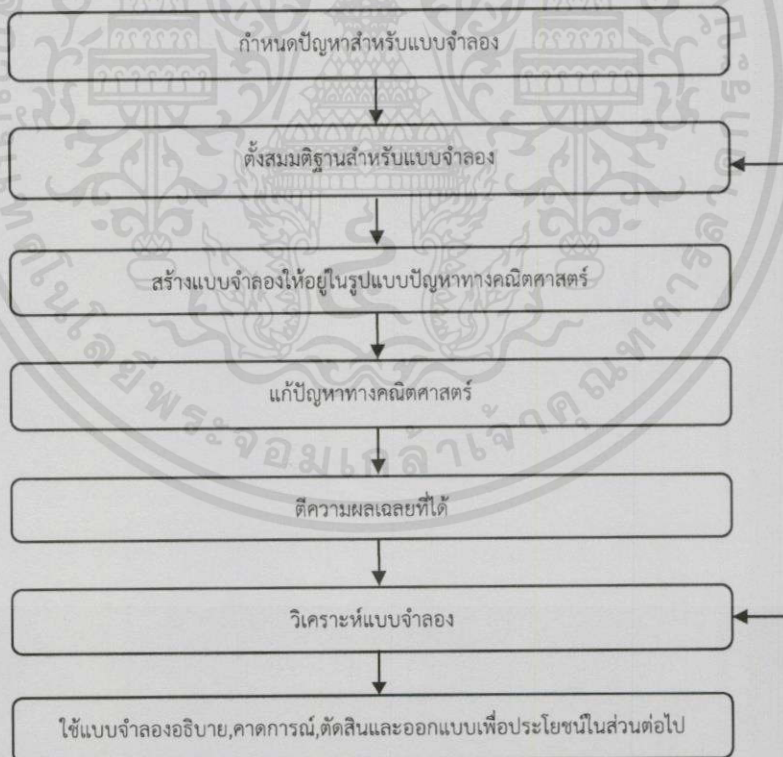
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีต่างๆที่เกี่ยวข้อง เช่น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ การแบ่งประเภทและการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่างๆ ลักษณะของจุดสมดุล หลักการของรูทเฮอริวิตซ์ และลักษณะกราฟแบบ Limit cycle และแบบ Stable

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า แบบจำลอง (Model) เป็นการแปลงปัญหาที่เกิดขึ้นจริงให้อยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์เพื่อง่ายต่อการวิเคราะห์ วิจัย เป็นสิ่งที่ถูกใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน ทั้งทางด้านฟิสิกส์ ชีววิทยา สังคมศาสตร์ จิตวิทยา เคมี เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับรูปที่ 2.1 ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ ห้หน้าไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation)

สมการเชิงอนุพันธ์นอกจากจะพบในสาขาคณิตศาสตร์โดยตรงแล้วยังพบได้ในสาขาวิชาอื่นๆอีก เช่น ชีววิทยา ฟิสิกส์ เคมี และสาขาวิชาทางวิศวกรรมศาสตร์ ในการศึกษาเริ่มแรกจะต้องเข้าใจในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ก่อน

บทนิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปรตาม 1 ตัวหรือมากกว่าเทียบกับ ตัวแปรอิสระ หนึ่งตัวหรือมากกว่า

เช่น

$$\frac{dx(t)}{dt} = \cos(x(t))$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial x(t,u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(t,u)}{\partial u^2}$$

2.1.2.1 การแบ่งประเภทสมการเชิงอนุพันธ์ (Classification of Differential Equations)

การแบ่งสมการเชิงอนุพันธ์จะพิจารณาจาก 3 หัวข้อดังนี้

2.1.2.1.1 การแบ่งสมการเชิงอนุพันธ์แบ่งตามชนิด (Classification by Type)

- สมการเชิงอนุพันธ์แบบสามัญ
(Ordinary Differential Equation; ODE)
- สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation; PDE)

2.1.2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งตามอันดับหรือระดับชั้น

(Classification by Order or Degree)

2.1.2.1.3 สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งเป็นสมการเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้น

(Classification as by Linear or Nonlinear)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรเวศน์บุรีรัมย์ ขอสงวนสิทธิ์ในเนื้อหาและข้อมูลทั้งหมดไว้ใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2.1.1. สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งตามชนิด (Classification by Type)

บทนิยาม 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของ

ตัวแปรตาม 1 ตัว หรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรอิสระเพียง 1 ตัวเท่านั้น และใช้เครื่องหมาย

$$\text{อนุพันธ์} \quad \frac{d(\text{ตัวแปรตาม})}{d(\text{ตัวแปรอิสระ})}$$

$$\text{เช่น } \frac{dy}{dx} = y + x ; \frac{dx}{dx} + t^2 x = \sin t$$

บทนิยาม 2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยของ

ตัวแปรตาม 1 ตัวหรือมากกว่าเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวและใช้เครื่องหมาย

$$\text{อนุพันธ์} \quad \frac{\partial(\text{ตัวแปรตาม})}{\partial(\text{ตัวแปรอิสระ})}$$

$$\text{เช่น } \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2.1.2.1.2. สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งตามอันดับหรือระดับชั้น

(Classification by Order or Degree)

บทนิยาม 2.4 อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ ODE หรือ PDE คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ของ

ตัวแปรที่ปรากฏอยู่ในสมการ

$$\text{เช่น } \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{x}{y+1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่... ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง... ไม่นอนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า... ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.5 สมการเชิงอนุพันธ์ ODE หรือ PDE คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการที่เป็นจำนวนเต็มบวก

สมการเชิงอนุพันธ์	อันดับ(Order)	ระดับชั้น(Degree)
$x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} - xy \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 + 3 = 0$	3	4
$\left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + y = 9$	3	3

2.1.2.1.3. สมการเชิงอนุพันธ์แบ่งตามสมการเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้น

(Classification as by Linear or Nonlinear)

บทนิยาม 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equation)

-ทุกๆตัวแปรตามและทุกๆอนุพันธ์ของตัวแปรตามที่ปรากฏในสมการที่มีเลขชี้กำลังเท่ากับ 1 เท่านั้น

-ไม่มีพจน์(Term)ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามที่ปรากฏในสมการ

-ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัย(Transcendental function)เช่น ตรีโกณมิติและลอการิทึมของตัวแปร

ตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการและสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นสามารถ

เขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x) \text{ เมื่อ } a_0 \neq 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.7 สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ใช่สมการเชิงเส้น เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

(Nonlinear Differential Equation)

ตัวอย่าง 1. สมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นสมการเชิงเส้น (Linear)

$$- 3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$- y'' - 3y' + 2y = 0$$

2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้น (Nonlinear)

$$- 3y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^3 y}{dx^3} + 7y = e^{2x}$$

$$- \cos x + \sin y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$- 4xy \frac{dy}{dx} - \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 = 2y$$

2.1.3 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทนิยาม 2.8 ผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = f(t, x)$ เป็นฟังก์ชัน u บนนิยามช่วง I

โดยที่ $u'(t) = f(t, u(t))$ สำหรับทุกๆ จำนวน t ใน I

ในรูปทั่วไป u เป็นผลเฉลยของ $\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{(n-1)}}$

ถ้า u นิยามบนช่วง I และ $u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$ สำหรับทุกๆ t บน I

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.4 วิธีแยกตัวแปร (Separation of Variables)

ถ้าฟังก์ชัน f ในสมการอนุพันธ์ $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ เป็นผลคูณของฟังก์ชันของ t และฟังก์ชันของ x ดังนั้นสมการอนุพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

ขั้นแรกจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt$$

โดยตัวแปรทั้งสองจะถูกแยกออกจากกันโดยตัวแปร x จะอยู่ทางฝั่งซ้ายและตัวแปร t จะอยู่ทางฝั่งขวา ทำการปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใดๆ ซึ่งผลที่ได้จากสมการข้างต้น คือ

$$H(x) = G(t) + c$$

เป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$

โดยที่ H และ G เป็นผลที่ได้จากการปริพันธ์ $\frac{1}{h}$ และ g ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$ สำหรับ y

วิธีทำ แยกตัวประกอบเป็น $f(x, y) = \frac{y^2}{x} = \frac{1}{x} \cdot y^2$

จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์

$$\frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{x} dx$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้างได้

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

หรือ $-\frac{1}{y} = \ln|x| + C$

ฉะนั้น $y = -\frac{1}{\ln|x| + C}$

เพราะว่า สมการที่จัดใหม่หารด้วย y^2 การคำนวณจะสมมติว่า $y \neq 0$ พึงกัั้น $y = 0$ เป็นผลเฉลย

แต่ไม่ใช่ได้มาจากการเลือกค่าคงตัว C ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$ คือ

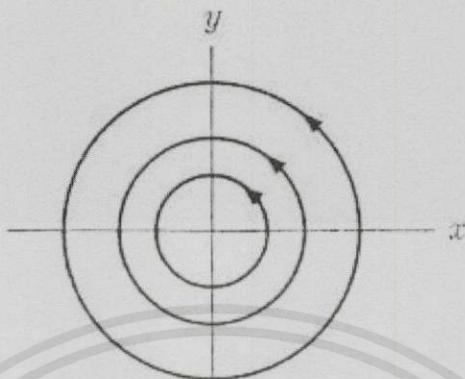
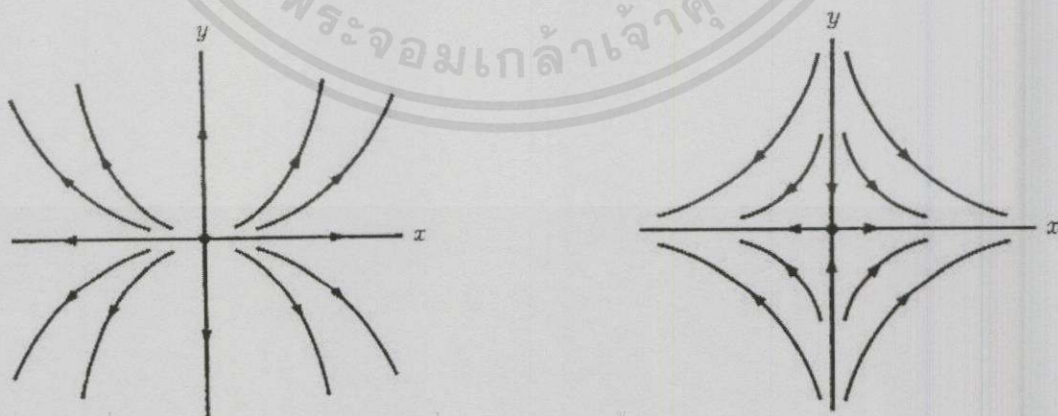
$y = -\frac{1}{\ln|x| + C}$ หรือ $y = 0$

และ $y = 0$ ในกรณีนี้เรียกว่าเป็นผลเฉลยเอกฐาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.5 ภาพแสดงสถานะจุดสมดุลและตัวอย่าง

2.1.5.1

รูปที่ 2.2 กราฟผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ $x=0$ เป็น Stableรูปที่ 2.3 กราฟผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ $x=0$ เป็น Asymptotically Stable

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น รูปที่ 2.4 กราฟผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ $x=0$ เป็น Unstable

2.1.5.2 ตัวอย่างการคำนวณหาจุดสมดุล

ตัวอย่าง $\frac{dx}{dt} = x^2 - x - 2$

วิธีทำ หาจุดสมดุลได้จาก $\frac{dx}{dt} = 0$ นั่นคือ

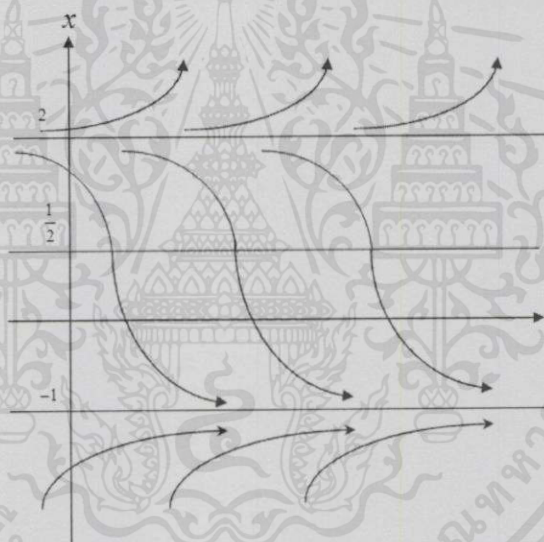
$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

พิจารณาค่าความชัน เมื่อ $x < -1$ ความชันมีค่าเป็นบวก

เมื่อ $-1 < x < 2$ ความชันมีค่าเป็นลบ

เมื่อ $x > 2$ ความชันมีค่าเป็นบวก



รูปที่ 2.5 Direction Field ของสมการเชิงอนุพันธ์

พิจารณาความเว้า

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2xx' - x'$$

$$= (2x-1)x'$$

$$= (2x-1)(x-2)(x-1) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะวิธีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 $x = \frac{1}{2}, 2, -1$

จาก phase plane จะเห็นว่าที่ equilibrium point

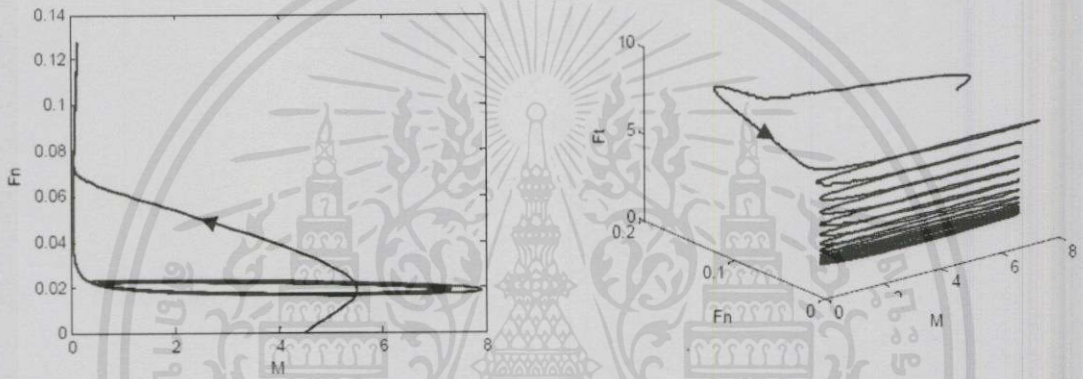
$x = 2$ เป็น Unstable

$x = -1$ เป็น Asymptotically Stable

2.1.6 ลักษณะของกราฟ Limit cycle และ Stable

Limit cycle เป็นพฤติกรรมของกราฟรอบจุดสมดุล กราฟจะมีลักษณะวนรอบจุดสมดุล

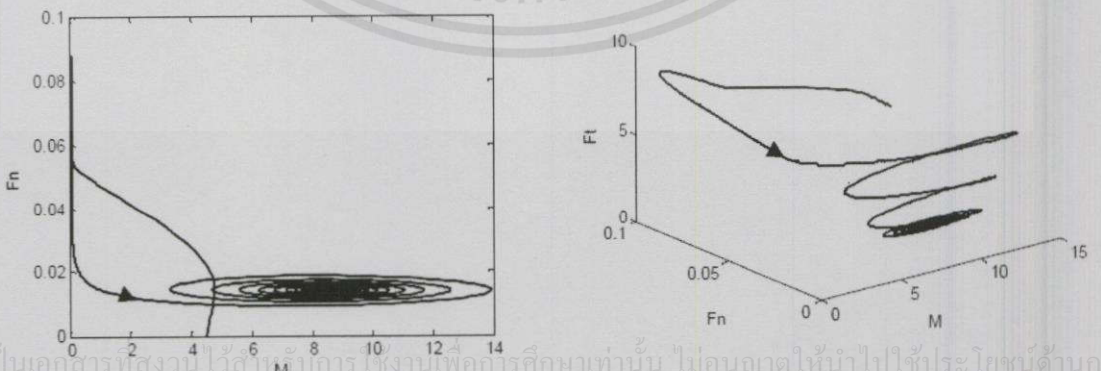
ตัวอย่าง กราฟแบบ limit cycle



รูปที่ 2.6 กราฟที่มีลักษณะเป็น limit cycle

Stable เป็นพฤติกรรมของกราฟรอบจุดสมดุล กราฟจะมีลักษณะลู่เข้าสู่จุดสมดุล

ตัวอย่าง กราฟแบบ Stable



รูปที่ 2.7 กราฟที่มีลักษณะเป็น Stable

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอก รูปที่ 2.7 เอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.7 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองและสัมประสิทธิ์ค่าคงที่

สมมติให้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองอยู่ในรูปแบบ

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = bt \quad (2.7.1)$$

โดยที่ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่

$$\text{ถ้า } b(t) = 0 \text{ จะได้ } x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \quad (2.7.2)$$

เป็นสมการเอกพันธ์

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้าสมการลักษณะเฉพาะมีค่ารากที่แตกต่างกัน λ_1, λ_2 ผลเฉลยของสมการ (2.7.2) คือ

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

ถ้าสมการลักษณะเฉพาะมีรากที่ซ้ำกัน λ แล้ว ผลเฉลยคือ

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ใดๆ

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า α_1 และ α_2 เป็นจำนวนจริงและสมการลักษณะเฉพาะมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

$\lambda = \alpha + i\beta$ และ $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ แล้ว ผลเฉลยของสมการ (2.7.2) คือ

$$x = (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x''+2x'+1 = t^2+1$ (1)

วิธีทำ หา $X_H(t)$ จาก $x''+2x'+1 = 0$

สมการช่วยคือ $r^2+2r+1 = 0$

$$r = -1, -1$$

นั่นคือ $X_H(t) = (c_1t+c_2)e^{-t}$

หา $X_N(t)$ เนื่องจาก $f(t) = t^2+1$ ไม่มีพจน์ใดซ้ำกับพจน์ใน $X_H(t)$

ดังนั้น $X_N(t) = At^2+Bt+C$ (2)

ได้ $X'_N(t) = 2At+C$

$$X''_N(t) = 2A$$

แทนค่า $X''_N(t)$, $X'_N(t)$ และ $X_N(t)$ ลงในสมการ (1) เราได้

$$2A+2(2At+B)+(At^2+Bt+C) = t^2+1$$

จัดเทอมใหม่ได้ $At^2+(4A+B)t+(2A+2B+C) = t^2+1$

เทียบสัมประสิทธิ์ $A = 1$

$$4A+B = 0 \quad \text{ได้} \quad B = -4$$

$$2A+2B+C = 1 \quad \text{ได้} \quad C = 7$$

แทนค่า A , B และ C ลงในสมการ (2) เราได้

$$X_N(t) = t^2-4t+7$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการที่กำหนด คือ

$$\begin{aligned} X(t) &= X_H(t)+X_N(t) \\ &= (c_1t+c_2)e^{-t}+t^2-4t+7 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.8 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ และสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ; กรณีของค่าลักษณะเฉพาะอย่างง่าย

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ การแก้ปัญหของ

$$x' = Ax$$

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า A สามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ทแยงมุมโดย $A = SAS^{-1}$ แล้วสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{du}{dt} = Au$$

มีผลเฉลยคือ
$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x_n = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} c,$$

เมื่อคอลัมน์ของ S คือ eigenvectors x_i ของ A และค่าคงที่ c_i หาได้จาก $c = S^{-1}u_0$

ตัวอย่าง ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$x_1' = 5x_1 - x_2$$

$$x_2' = 3x_1 + x_2$$

ให้
$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น
$$u' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Au$$

เนื่องจาก $u' = Au \quad \rightarrow \quad u(t) = e^{At}u_0$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หา eigenvalue จาก

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(1-\lambda)+3 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ &= (\lambda-4)(\lambda-2) = 0 \\ \therefore \lambda &= 2, 4 \end{aligned}$$

หา eigenvector ที่สอดคล้องกับ $\lambda_1 = 2$

$$(A-2I)v_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} v_1 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

หา eigenvector ที่สอดคล้องกับ $\lambda_2 = 4$

$$(A-4I)v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} v_2 = 0 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x_1(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \\ x_2(t) &= 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.9 หลักการของรูธเฮอริวิตซ์(Routh-Hurwitz criteria)

จากสมการลักษณะเฉพาะ $\lambda^j + a_1\lambda^{j-1} + a_2\lambda^{j-2} + \dots + a_j = 0$ สามารถกำหนดเมทริกซ์ j

เมทริกซ์ ดังนี้

$$H_1 = [a_1],$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots$$

$$H_i = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & a_{2i-3} & a_{2i-3} & \dots & a_1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_j \end{bmatrix}$$

เมื่อ (L, m) เป็นตำแหน่งในเมทริกซ์ H_i คือ

$$a_{2L-m} \quad \text{สำหรับ } 0 < 2L - m < j$$

$$1 \quad \text{สำหรับ } 2L = m$$

$$0 \quad \text{สำหรับ } 2L < m \text{ หรือ } 2L > j + m$$

สำหรับให้ทุกๆ ค่าลักษณะเฉพาะมีค่าจริงที่เป็นลบ นั้นหมายความว่าจุดสมดุล \tilde{X} จะเป็น Stable ก็ต่อเมื่อ ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของทุกๆ เมทริกซ์ Hurwitz มีค่าเป็นบวก

$$\det H_i > 0 \quad \text{สำหรับ } i = 1, 2, 3, \dots, j$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูทเฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz) criteria สำหรับ $j = 3$

จะแสดงเพียงเงื่อนไขของรูทเฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz criteria) สำหรับ $j = 3$ นั่นคือ $\det H_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2$ และ 3

$$H_1 = [a_1], \quad \text{Det}H_1 = a_1,$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{Det}H_2 = a_1 a_2 - a_3,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots \quad \text{Det}H_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5 - a_1^2 a_4 - a_3^2$$

เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ a_4 และ a_5 ในสมการพหุนามลักษณะเฉพาะลำดับที่ 3 มีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้น

$$\text{Det}H_1 = a_1,$$

$$\text{Det}H_2 = a_1 a_2 - a_3,$$

$$\text{Det}H_3 = a_3 (a_1 a_2 - a_3),$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่สอดคล้องกับ $\det H_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2$ และ 3 คือ

$$1) a_1 > 0$$

$$2) a_3 > 0$$

$$3) a_1 a_2 > a_3$$

$$\text{Det}H_1 =$$

$$a_1,$$

$$\text{Det}H_2 =$$

$$a_1 a_2 - a_3,$$

$$\text{Det}H_3 =$$

$$a_3 (a_1 a_2 - a_3),$$

เพิ่มเติม

➤ เงื่อนไขข้อ 1) เป็นเงื่อนไขที่ได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่าง \det ของ H_1 และ H_2

➤ เงื่อนไขข้อ 2) เป็นเงื่อนไขที่ได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่าง \det ของ H_2 และ H_3

➤ เงื่อนไขข้อสุดท้ายได้มาจาก \det ของ H_3 การที่ผลคูณของสองพจน์คูณกันแล้วต้องมากกว่า 0 ในการคำนวณค่า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ทั้งสองพจน์ต้องมากกว่า 0 ด้วย จึงได้เงื่อนไขดังกล่าวมา ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูธเฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz) criteria สำหรับ $j = 4$

จะแสดงเงื่อนไขของรูธเฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz criteria) สำหรับ $j = 4$ นั่นคือ $\det H_i > 0$

สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ 4

$$H_1 = [a_1], \quad \text{Det}H_1 = a_1,$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{Det}H_2 = a_1 a_2 - a_3,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots \quad \text{Det}H_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5 - a_1^2 a_4 - a_3^2$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}H_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_5 + 2a_1 a_4 a_5 + a_1^2 a_2 a_6 + a_3 a_7 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 - a_5^2 - a_1 a_3 a_6 - a_1 a_2 a_7$$

เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ a_5, a_6 และ a_7 ในสมการพหุนามลักษณะเฉพาะลำดับที่ 4 มีค่าเท่ากับ 0

ดังนั้น

$$\text{Det}H_1 = a_1,$$

$$\text{Det}H_2 = a_1 a_2 - a_3,$$

$$\text{Det}H_3 = a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4,$$

$$\text{Det}H_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 = a_3 a_4 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4^2 = a_4 (a_3 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4)$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่สอดคล้องกับ $\det H_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ 4 คือ

$$1) a_1 > 0$$

$$2) a_3 > 0$$

$$3) a_4 \geq 0$$

$$4) a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{Det}H_1 &= (a_1) \\
 \text{Det}H_2 &= (a_1 a_2 - a_3) \\
 \text{Det}H_3 &= (a_3 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4) \\
 \text{Det}H_4 &= (a_4 (a_3 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4))
 \end{aligned}$$

เพิ่มเติม

- เงื่อนไขข้อ 1) เป็นเงื่อนไขที่ได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่าง \det ของ H_1 และ H_2
- เงื่อนไขข้อ 2) เป็นเงื่อนไขที่ได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่าง \det ของ H_2 และ H_3
- เงื่อนไขข้อ 3) เป็นเงื่อนไขที่ได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่าง \det ของ H_3 และ H_4
- เงื่อนไขข้อสุดท้ายได้มาจาก \det ของ H_4 การที่ผลคูณของสองพจน์คูณกันแล้วต้องมากกว่า 0 ซึ่งทั้งสองพจน์ต้องมากกว่า 0 ด้วย จึงได้เงื่อนไขดังกล่าวมา

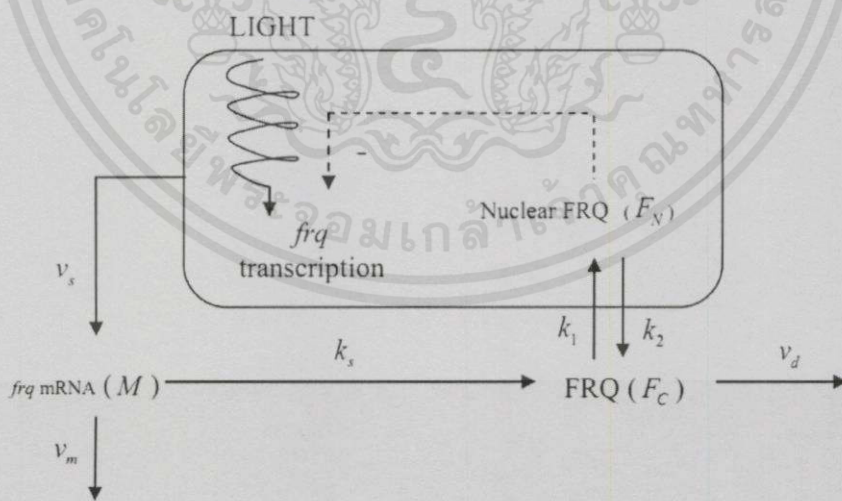
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.10 เชื้อรานิวโรสปอร์รา (Neurospora)

ราหรือเชื้อรา คือ จุลินทรีย์ในกลุ่มฟังไจ (fungi) ราเจริญได้ในภาวะที่มีอากาศเท่านั้น จึงพบการเจริญของราบริเวณผิวหน้าของอาหาร ราเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้อาหารเน่าเสีย แต่ในอุตสาหกรรมอาหารก็นำมาใช้ประโยชน์เพื่อการหมัก เช่น ซีอิ๊ว

นิวโรสปอร์ราเป็นราที่อยู่ในกลุ่มแอสโคไมซีส (Ascomycetes) พบได้ทั่วไปในสิ่งแวดล้อมเจริญได้ดีบนวัสดุจากพืช จึงมักพบปนเปื้อนและก่อปัญหาให้ทั้งแก่เกษตรกรผู้เพาะปลูกในภาคการเกษตรและโรงงานอุตสาหกรรมที่ใช้วัตถุดิบการเกษตร เช่น อ้อย ข้าว ข้าวโพด นิวโรสปอร์ราสร้างสัสมซึ่งเป็นกลุ่มแคโรทีนอยด์ในโคนินเดีย ประกอบด้วยยีน 11,000 ยีน มักจะเกิดขึ้นที่ขนมปังจึงเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ราขนมปังนิวโรสปอร์รา เป็นเชื้อราสายพันธุ์ต้นแบบที่ดีในการศึกษาการทำงานของยีน ซึ่งมีรูปแบบกลไกในการทำงานของแต่ละยีนที่ใกล้เคียงกับในพืชหรือในสัตว์ชั้นสูงมากกว่าสิ่งมีชีวิตต้นแบบอื่นๆ เช่น ยีสต์ *Saccharomyces cerevisiae* เป็นต้น และยังสามารถทำการวิเคราะห์ทางพันธุกรรมได้ง่ายอีกด้วย ปัจจุบันมีหลายงานการวิจัยที่ศึกษาการทำงานของยีนในเชื้อราชนิดนี้ โดยสร้างสายพันธุ์ที่ตัดยีนที่ต้องการศึกษาออก และศึกษาผลกระทบที่เกิดขึ้น นอกจากนี้มีการผลิตเอนไซม์ที่มีประโยชน์ในด้านอุตสาหกรรม เช่น เอนไซม์อินเวอร์เตส (invertase) เซลลูเลส (cellulases) โปรตีเอส (proteases)

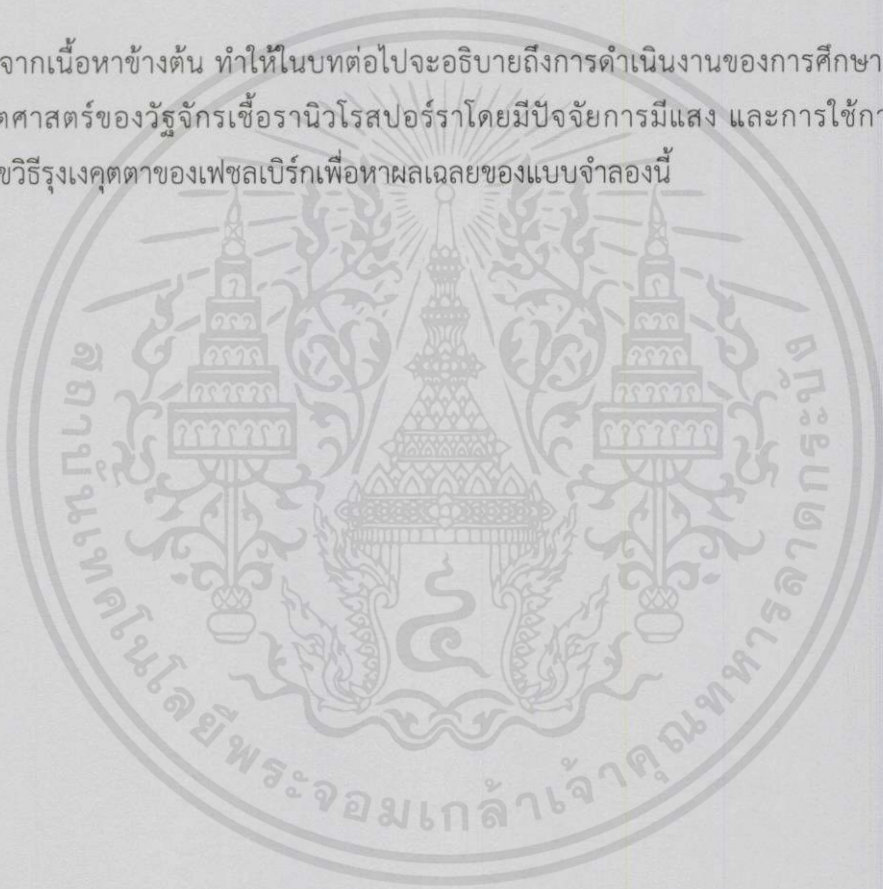
2.1.10.1 วงจรของนิวโรสปอร์รา



เอกสารนี้เป็นเอกสารการทำงานของเซลล์เชื้อรา นิวโรสปอร์ราจะมีกลไกการทำงานเป็นวัฏจักร เริ่มจากการเกิดโปรตีนที่อยู่ภายในนิวเคลียส $FRQ(F_N)$ จากอัตราการแพร่กระจายเข้า (k_1) และออก (k_2) และ

โปรตีนที่อยู่ภายใน FRQ จะถูกส่งต่อไปยังกระบวนการถ่ายทอดลักษณะซึ่งมีแสงเป็นปัจจัยหนึ่งในกระบวนการนี้ โดยถูกแปรพันธูกรรมจากอัตราเร็ว v_s ได้เป็นอะมิโนโปรตีน $frq mRNA(M)$ และในกระบวนการนี้มีการย่อยสลายด้วยอัตราเร็วสูงสุด v_m ขั้นตอนต่อไปนี้เป็นอะมิโนโปรตีน $frq mRNA$ ถูกส่งไปยังกระบวนการสังเคราะห์ด้วยอัตราเร็ว k_s ได้เป็นโปรตีน FRQ ที่อยู่นอกนิวเคลียส (F_c) และในกระบวนการมีการย่อยสลายด้วยอัตราเร็วสูงสุด v_d ซึ่งจะได้โปรตีน FRQ ที่เกิดภายนอกเซลล์อีกด้วย ขั้นตอนต่อไปคือ โปรตีน FRQ ที่อยู่นอกเซลล์จะถูกส่งไปยังภายในเซลล์ และการทำงานของเซลล์จะกระทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนเกิดเป็นวงจร

จากเนื้อหาข้างต้น ทำให้ในบทต่อไปจะอธิบายถึงการดำเนินงานของการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรเข็มนาฬิกาของยีสโดยมีปัจจัยการมีแสง และการใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขวิธีรุงเงคุดตาของเฟลลเบิร์กเพื่อหาผลเฉลยของแบบจำลองนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีการดำเนินการ

ในบทนี้คือวิธีการดำเนินงานซึ่งจะอธิบายถึงการศึกษางานวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรเชื้อรา*นีวโรสปอร์รา*โดยมีปัจจัยการมีแสง และศึกษาวิธีการหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พร้อมทั้งแผนภาพการทำงานของวิธีรุงเกตุตาของเฟลเบิร์ก (Runge-Kutta-Fehlberg's)

3.1 ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรเชื้อรา*นีวโรสปอร์รา*ที่มีปัจจัยการมีแสง

จากการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรเชื้อรา*นีวโรสปอร์รา*โดยมีปัจจัยการมีแสงเป็นงานวิจัยของ กาญจนา คำนิงกิจ และนิพนธ์ วงศ์วิเศษศิริกุล [14]. โดยในที่นี้จะอธิบายรายละเอียดของงานวิจัยซึ่งมีหัวข้อดังนี้

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรชีวิตของเชื้อรา*นีวโรสปอร์รา* ซึ่งระบบการเกิดเชื้อราเป็นวัฏจักรที่เกิดในลักษณะเป็นคาบๆและเป็นกลไกที่เกิดขึ้นจริง โดยที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้มีลักษณะเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรจากปัจจัยต่างๆ ของการเกิดขึ้นของเชื้อรา*นีวโรสปอร์รา*รวมถึงปัจจัยการมีแสง ในระบบนี้ใช้การวิเคราะห์แบบไบเฟอร์เคชันเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เพื่อให้ได้สภาวะที่ต้องการ ซึ่งตรวจสอบด้วยการพิจารณาการจำลองผลลัพธ์จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งในที่นี้พิจารณา 2 สภาวะ คือ สภาวะเสถียรและสภาวะวงลิมิต

คำสำคัญ

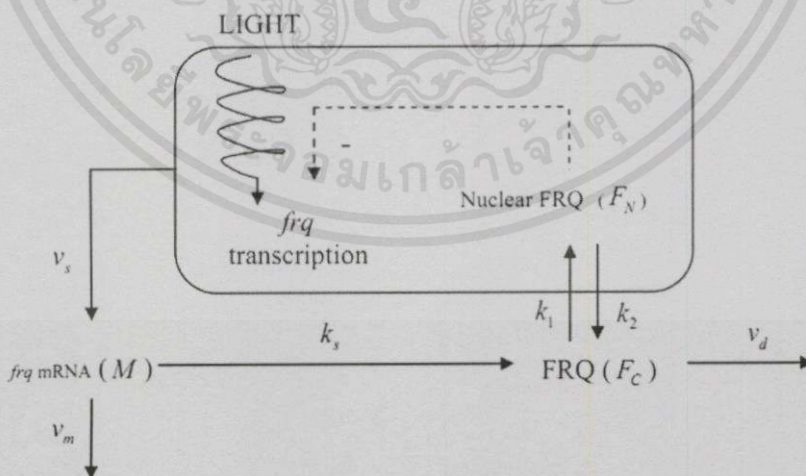
วัฏจักรชีวิตของ*นีวโรสปอร์รา* (Neurospora Blorhythy) การวิเคราะห์แบบไบเฟอร์เคชัน (Bifucation Analysis) สภาวะวงลิมิต (Limit Cycle) สภาวะเสถียร (Stable)

3.1.1 บทนำ

ในระยะหลังๆ นี้ ความน่าสนใจของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสิ่งมีชีวิตแพร่หลายเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะเกี่ยวกับเรื่องของวงจรหรือวัฏจักรของสิ่งมีชีวิต สำหรับวงจรการมืดและการสว่าง หรือวงจรการหลับและการตื่นของสิ่งมีชีวิตใดๆ ไม่ว่าจะเป็นสัตว์มีกระดูกสันหลังหรือแม้แต่เชื้อรา *Neurospora crassa* ก็ตามจะมีเรื่องของเมลาโทนินเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ซึ่งระดับของเมลาโทนินจะขึ้นอยู่กับปัจจัยการมีแสง ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้มีการนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัฏจักรชีวิตของเชื้อรา *Neurospora crassa* มาปรับปรุงใหม่และใช้ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์อธิบายเงื่อนไขที่เกิดขึ้นที่มีลักษณะเป็นคาบๆ โดยที่ในตัวแบบเดิม Goodwin [12]. ได้อธิบายถึงการแกว่งหรือการมีลักษณะเป็นคาบๆ นี้เกิดจากวงจรการย้อนกลับ(เป็นลบ) negative feedback loop (ซึ่งวงจรย้อนกลับคือวงจรที่มีการผลิตเพิ่มขึ้นมากๆ จนถึงจุดๆหนึ่ง เมื่อมีการผลิตมากเกินไปจนขอบเขตจะมีการส่งสัญญาณให้มีการผลิตค่อยๆลดลง) เป้าหมายของงานวิจัยฉบับนี้คือ การพิจารณาด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ของการเกิดขึ้นของเชื้อราที่ประกอบด้วยปัจจัยต่างๆซึ่งเป็นตัวแปรทางเคมี และรวมถึงการมีแสงด้วย

3.1.2 วิธีทำแบบจำลอง

3.1.2.1 แบบจำลองเกี่ยวกับคณิตศาสตร์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกรูปที่ 3.1 แผนภาพการทำงานของนิวโรสปอร์รา (*Neurospora*) ทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

v_d	แทน อัตราสูงสุดในการสลายตัวของโปรตีน หน่วย $\mu M / h$
K_d	แทน ค่าคงที่ Michaelis ซึ่งสัมพันธ์กับการย่อยสลายตัวของ $frq mRNA$ หน่วย M
F_N	แทน ปริมาณโปรตีน FRQ ที่อยู่ในนิวเคลียส หน่วย μM
v_{dN}	แทน อัตราสูงสุดในการย่อยสลายตัวของนิวเคลียส FRQ หน่วย $\mu M / h$
K_{dN}	แทน ค่าคงที่ Michaelis ซึ่งสัมพันธ์กับการย่อยสลายตัวของ $frq mRNA$ หน่วย M
T	แทน เวลา หน่วย ชั่วโมง (h)

เพิ่มเติม FRQ คือ การประมาณความถี่ของโปรตีนที่เป็นตัวถ่ายทอดลักษณะ (frq transcription จะได้สารพันธุกรรมในรูป $mRNA$) เมื่อได้รับพลังงานจากแสง ออกมาถูกแปลรหัสพันธุกรรมจาก v_s เป็น $frq mRNA$ ซึ่งเป็นอะมิโนโปรตีนที่ไปต่อกันเป็นสารพันธุกรรมก็คือกลับไปเป็นสารพันธุกรรมในเยื่อหุ้มนิวเคลียส FRQ อีกครั้ง

3.1.2.2 การวิเคราะห์แบบจำลอง

จากระบบสมการ (3.1) ถึง (3.4) พบว่ามีจุดสมดุลสองจุดคือ $(0, 0, 0, 0)$ และ $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ และเนื่องจากจุดสมดุล $(0, 0, 0, 0)$ เป็นจุดที่วงจรการเกิดเชื้อราไวรัสสปอร์ราไม่มีการเจริญเติบโต (อธิบายไว้ในภาคผนวก ค) ดังนั้น ในที่นี้พิจารณาเพียงจุด $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$

$$\text{จาก } \frac{dM}{dt} = v_s \frac{K_I^n}{K_I^n + F_N^n} - v_m \frac{M}{K_m + M} + L \quad (3.1)$$

$$\frac{dF_C}{dt} = k_s M - k_1 F_C + k_2 F_N - k F_C \quad (3.2)$$

$$\frac{dF_S}{dt} = k F_C - v_d \frac{F_S}{K_d + F_S} \quad (3.3)$$

$$\frac{dF_N}{dt} = k_1 F_C - k_2 F_N - v_{dN} \frac{F_N}{K_{dN} + F_N} \quad (3.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

$$\frac{dM}{dt} = g_1(M, F_C, F_S, F_N) \quad (3.5)$$

$$\frac{dF_C}{dt} = g_2(M, F_C, F_S, F_N) \quad (3.6)$$

$$\frac{dF_S}{dt} = g_3(M, F_C, F_S, F_N) \quad (3.7)$$

$$\frac{dF_N}{dt} = g_4(M, F_C, F_S, F_N) \quad (3.8)$$

ซึ่งหาจุดสมดุลจาก

$$g_1(M, F_C, F_S, F_N) = 0 \quad (3.9)$$

$$g_2(M, F_C, F_S, F_N) = 0 \quad (3.10)$$

$$g_3(M, F_C, F_S, F_N) = 0 \quad (3.11)$$

$$g_4(M, F_C, F_S, F_N) = 0 \quad (3.12)$$

สมมติให้ $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ เป็นจุดสมดุล (Equilibrium Point)

$$v_s \frac{K_i^n}{K_i^n + F_{N_0}^n} - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0} + L = 0 \quad (3.13)$$

$$k_s M_0 - k_1 F_{C_0} + k_2 F_{N_0} - k F_{C_0} = 0 \quad (3.14)$$

$$k F_{C_0} - v_d \frac{F_{S_0}}{K_d + F_{S_0}} = 0 \quad (3.15)$$

$$k_1 F_{C_0} - k_2 F_{N_0} - v_{dN} \frac{F_{N_0}}{K_{dN} + F_{N_0}} = 0 \quad (3.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาจากสมการที่ (3.13) นั้นคือ

$$v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0} + L = 0$$

$$v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} = \left(v_m \frac{M_0}{K_m + M_0} - L \right)$$

$$K_l^n + F_{N_0}^n = v_s \frac{K_l^n}{v_m \frac{M_0}{K_m + M_0} - L}$$

ดังนั้น

$$F_{N_0}^n = \left[K_l^n \left(-1 - \frac{v_s}{L - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0}} \right) \right] \quad (3.17)$$

พิจารณาจากสมการที่ (3.14) นั้นคือ

$$k_s M_0 - k_1 F_{C_0} + k_2 F_{N_0} - k F_{C_0} = 0$$

$$(-k_1 - k) F_{C_0} = -k_s M_0 - k_2 F_{N_0}$$

$$F_{C_0} = \frac{k_s M_0 + k_2 F_{N_0}}{k_1 + k} \quad (3.18)$$

พิจารณาสมการที่ (3.15) นั้นคือ

$$k F_{C_0} - v_d \frac{F_{S_0}}{K_d + F_{S_0}} = 0$$

$$\frac{F_{S_0}}{K_d + F_{S_0}} = \frac{k F_{C_0}}{v_d} \quad (3.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าสมการที่ (3.18) ในสมการที่ (3.19)

$$F_{S_0} = \frac{kK_d \left[k_s M_0 + k_2 \left(\left(-K_l^n - \frac{K_l^n v_s}{L - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0}} \right) \right) \right]}{(k+k_1) - v_d + \frac{k \left[k_s M_0 + k_2 \left(\left(-K_l^n - \frac{K_l^n v_s}{L - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0}} \right) \right) \right]}{(k+k_1)}} \quad (3.20)$$

จากสมการที่ (3.13)

$$v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0} + L = 0$$

$$v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} + L = v_m \frac{M_0}{K_m + M_0}$$

$$v_s K_m \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} + LK_m + v_s M_0 \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} + LM_0 = v_m M_0$$

$$v_s M_0 \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} + LM_0 - v_m M_0 = -v_s K_m \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} - LK_m$$

$$\left[v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} + L - v_m \right] M_0 = -v_s K_m \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} - LK_m$$

$$M_0 = \frac{-v_s K_m \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} - LK_m}{v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} + L - v_m}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$M_0 = \frac{-v_s K_m K_l^n - L K_m (K_l^n + F_{N_0}^n)}{v_s K_l^n + L(K_l^n + F_{N_0}^n) - v_m (K_l^n + F_{N_0}^n)}$$

$$M_0 = \frac{-v_s K_m K_l^n - L K_m K_l^n - L K_m F_{N_0}^n}{v_s K_l^n + L K_l^n + L F_{N_0}^n - v_m K_l^n + v_m F_{N_0}^n}$$

$$M_0 = -\frac{K_m (L F_{N_0}^n + K_l^n (L + v_s))}{F_{N_0}^n (L - v_m) + K_l^n (L - v_m + v_s)}$$

$$M_0 = -\frac{K_m (L F_{N_0}^n + K_l^n (L + v_s))}{F_{N_0}^n (L - v_m) + K_l^n (L - v_m + v_s)} \quad (3.21)$$

นั่นคือ $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ เป็นจุดสมดุล (Equilibrium Point)

โดยที่ $F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}$ และ M_0 มีค่าเท่ากับสมการ (3.18), (3.20), (3.17) และ (3.21)

ส่วนที่เราสนใจคือจุดเสถียร $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ การแก้ปัญหาโดยใช้การวิเคราะห์แบบไบเฟอร์เคชัน เราสามารถประยุกต์ใช้ระบบเชิงเส้นมาหาจุดเสถียร โดยพิจารณาว่าเป็นสถานะเสถียรและวงลิมิต

จากสมการ (3.1), (3.2), (3.3) และ (3.4) พิจารณาช่วงของจุดเสถียรที่ทำให้เป็นสถานะเสถียร เนื่องจาก $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ คือจุดเสถียร ดังนั้น $g_i(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$; $i = 1, 2, 3, 4$

จากสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เชิงเส้น จะได้ว่า

$$\frac{dM}{dt} = g_1(M, F_C, F_S, F_N)$$

$$\frac{dF_C}{dt} = g_2(M, F_C, F_S, F_N)$$

$$\frac{dF_S}{dt} = g_3(M, F_C, F_S, F_N)$$

$$\frac{dF_N}{dt} = g_4(M, F_C, F_S, F_N)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และให้ $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ เป็นจุดสมดุล นั่นคือ

$$g_1(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$g_2(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$g_3(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$g_4(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

เนื่องจากมีผลเฉลยที่เข้าใกล้จุด $M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}$ เราจะแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เชิงเส้น โดยกำหนดตัวแปรใหม่ คือ

$$m = M - M_0 \quad (3.22)$$

$$f_C = F_C - F_{C_0} \quad (3.23)$$

$$f_S = F_S - F_{S_0} \quad (3.24)$$

$$f_N = F_N - F_{N_0} \quad (3.25)$$

ซึ่งเป็นการคลาดเคลื่อนจากจุดสมดุลไปยังจุดกำเนิด ถ้า M, F_C, F_S และ F_N ใกล้จุดสมดุล $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ แล้ว m, f_C, f_S และ f_N ใกล้ 0 ดังนั้น

$$M = m + M_0 \quad (3.26)$$

$$F_C = f_C + F_{C_0} \quad (3.27)$$

$$F_S = f_S + F_{S_0} \quad (3.28)$$

$$F_N = f_N + F_{N_0} \quad (3.29)$$

โดยที่ M_0, F_{C_0}, F_{S_0} และ F_{N_0} เป็นค่าคงที่

ซึ่งสามารถเขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปของ m, f_C, f_S และ f_N นั่นคือ

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(M - M_0)}{dt} = \frac{dM}{dt} = g_1(M, F_C, F_S, F_N)$$

$$= g_1(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}\frac{df_C}{dt} &= \frac{d(F_C - F_{C_0})}{dt} = \frac{dF_C}{dt} = g_2(M, F_C, F_S, F_N) \\ &= g_2(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{df_S}{dt} &= \frac{d(F_S - F_{S_0})}{dt} = \frac{dF_S}{dt} = g_3(M, F_C, F_S, F_N) \\ &= g_3(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{df_N}{dt} &= \frac{d(F_N - F_{N_0})}{dt} = \frac{dF_N}{dt} = g_4(M, F_C, F_S, F_N) \\ &= g_4(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N)\end{aligned}$$

$$\frac{dm}{dt} = g_1(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \quad (3.30)$$

$$\frac{df_C}{dt} = g_2(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \quad (3.31)$$

$$\frac{df_S}{dt} = g_3(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \quad (3.32)$$

$$\frac{df_N}{dt} = g_4(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \quad (3.33)$$

กระจายด้านขวาของระบบสมการโดยใช้การประมาณค่าด้วยอนุกรมเทเลอร์

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= g_1(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_1}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_1}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \\ &\quad \frac{\partial g_1}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_1}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{df_C}{dt} &= g_2(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_2}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_2}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \\ &\quad \frac{\partial g_2}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_2}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
 ไม่ว่าการณีใดๆ ทั้งสิ้นที่ผู้พิมพ์หรือผู้จำหน่ายให้ข้อมูลแก่บุคคลอื่นโดยไม่ได้รับอนุญาตจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

$$\frac{df_S}{dt} = g_3(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_3}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_3}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \frac{\partial g_3}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_3}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h)$$

$$\begin{aligned} \frac{df_N}{dt} &= g_4(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_4}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_4}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \\ &\quad \frac{\partial g_4}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_4}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h) \end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก

$$\begin{aligned} g_1(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) &= g_2(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = g_3(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = \\ &= g_4(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ระบบสมการที่เขียนในรูปของเมทริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{df_C}{dt} \\ \frac{df_S}{dt} \\ \frac{df_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_3}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_4}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ f_C \\ f_S \\ f_N \end{pmatrix} + O(h)$$

โดยที่เมทริกซ์ขนาด 4×4 ของอนุพันธ์ย่อยของพจน์นี้เรียกว่าจาโคเบียนเมทริกซ์ (Jacobian Matrix) ของระบบสมการที่จุด $M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}$

ดังนั้น Linearized System ที่จุดสมดุล $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ จะได้

$$\begin{pmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{df_C}{dt} \\ \frac{df_S}{dt} \\ \frac{df_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_3}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_4}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ f_C \\ f_S \\ f_N \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาจากสมการ

$$g_1(M, F_C, F_S, F_N) = v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_N^n} - v_m \frac{M}{K_m + M} + L$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = -v_m \frac{K_m}{(K_m + M_0)^2}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = -v_s \frac{K_l^n n F_{N_0}^{n-1}}{(K_l^n + F_{N_0}^n)^2}$$

จากสมการ

$$g_2(M, F_C, F_S, F_N) = k_s M - k_1 F_C + k_2 F_N - k F_C$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = k_s$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = -(k_1 + k)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = k_2$$

จากสมการ

$$g_3(M, F_C, F_S, F_N) = k F_C - v_d \frac{F_S}{K_d + F_S}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = k$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = -v_d \frac{K_d}{(K_d + F_{S_0})^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอก $\frac{\partial g_3}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$ ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ

$$g_4(M, F_C, F_S, F_N) = k_1 F_C - k_2 F_N - v_{dN} \frac{F_N}{K_{dN} + F_N}$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = k_1$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = -k_2 - v_{dN} \frac{K_{dN}}{(K_{dN} + F_{N_0})^2}$$

แทนค่าลงในเมทริกซ์ (3.34) จะได้

$$\begin{pmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{df_C}{dt} \\ \frac{df_S}{dt} \\ \frac{df_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_m \frac{K_m}{(K_m + M_0)^2} & 0 & 0 & -v_s \frac{K_l^n n F_{N_0}^{n-1}}{(K_l^n + F_{N_0}^n)^2} \\ k_s & -(k_1 + k) & 0 & k_2 \\ 0 & k & -v_d \frac{K_d}{(K_d + F_{S_0})^2} & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_2 - v_{dN} \frac{K_{dN}}{(K_{dN} + F_{N_0})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ f_C \\ f_S \\ f_N \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

กำหนดให้

$$A' = \frac{K_l^n n F_{N_0}^{n-1}}{(K_l^n + F_{N_0}^n)^2}$$

$$B' = \frac{K_m}{(K_m + M_0)^2}$$

$$C' = \frac{K_d}{(K_d + F_{S_0})^2}$$

$$D' = \frac{K_{dN}}{(K_{dN} + F_{N_0})^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (3.35) จะได้

$$J = \begin{pmatrix} -v_m B' & 0 & 0 & -v_s A' \\ k_s & -(k_1 + k) & 0 & k_2 \\ 0 & k & -v_d C' & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_2 - v_{dN} D' \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

กำหนดให้ $\det(J - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -v_m B' - \lambda & 0 & 0 & -v_s A' \\ k_s & -(k_1 + k) - \lambda & 0 & k_2 \\ 0 & k & -v_d C' - \lambda & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_2 - v_{dN} D' - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

จะได้ $\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$

โดยที่

$$a_1 = k + k_1 + k_2 + C' v_d + D' v_{dN} + B' v_m \quad (3.39)$$

$$a_2 = -D' k_1 v_{dN} + B' k_1 v_m + B' k_2 v_m - B' D' v_{dN} v_m + C' v_d (k_1 + k_2 - D' v_{dN} + B' v_m) + k(k_2 + C' v_d - D' v_{dN} + B' v_m) \quad (3.40)$$

$$a_3 = -B' v_m (-k k_2 + D' k v_{dN} + D' k_1 v_{dN}) + C' v_d (B' v_m (k_1 + k_2) - D' v_{dN} (k_1 + B' v_m)) + k(k_2 - D' v_{dN} + B' v_m) \quad (3.41)$$

$$a_4 = C' v_d (-B' v_m (-k k_2 + D' k v_{dN} + D' k_1 v_{dN})) + A' k_1 k_2 v_s \quad (3.42)$$

การหาสถานะเสถียรของจุดสมดุล สามารถทำได้โดยการใช้หลักการรูทเฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz) ซึ่งไม่จำเป็นต้องแก้สมการหาค่าลักษณะเฉพาะ

จากสมการลักษณะเฉพาะ $\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$ ใช้เกณฑ์ของรูทเฮอริวิตซ์ (Routh-Hurwitz) จะได้เงื่อนไขดังนี้

$$1) a_1 > 0$$

$$2) a_3 > 0$$

$$3) a_4 \geq 0$$

$$4) a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ a_1 a_2 a_3 และ a_4 คือสมการ (3.39) (3.40) (3.41) และ (3.42) ตามลำดับ

ถ้าค่าพารามิเตอร์เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าว จะได้ว่าจุดสมดุลที่ได้จะมีลักษณะเป็น
Asymptotically Stable

3.1.3 ค่าพารามิเตอร์และแบบจำลองการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

3.1.3.1 ค่าพารามิเตอร์ เมื่อความเข้มของแสงแตกต่างกัน

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนิวโรสปอร์รา ในกรณีที่มีแสงเป็นตัวกระตุ้น

$$\frac{dM}{dt} = v_s \frac{K_I^n}{K_I^n + F_N^n} - v_m \frac{M}{K_m + M} + L \quad (3.1)$$

$$\frac{dF_C}{dt} = k_s M - k_1 F_C + k_2 F_N - k F_C \quad (3.2)$$

$$\frac{dF_S}{dt} = k F_C - v_d \frac{F_S}{K_d + F_S} \quad (3.3)$$

$$\frac{dF_N}{dt} = k_1 F_C - k_2 F_N - v_{dN} \frac{F_N}{K_{dN} + F_N} \quad (3.4)$$

โดยที่พิจารณาค่าความเข้มแสง (L) ทั้งหมด 4 ค่าคือ

1. กรณีที่ $L = 0.002$

ก. กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 5.5, v_m = 1.0, v_d = 3.0, v_{dN} = 1.7, k_s = 0.7, k = 0.4, k_1 = 0.8, k_2 = 0.05,$$

$$K_m = 0.2, K_I = 0.8, K_d = 1.2, K_{dN} = 0.2, n = 4, L = 0.002$$

จะได้จุดสมดุลคือ

$$(M, F_C, F_S, F_N) = (3.16032, 1.89301, 0.40514, 1.18785)$$

ข. กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 4.5, v_m = 0.5, v_d = 3.0, v_{dN} = 1.7, k_s = 0.7, k = 0.4, k_1 = 1.8, k_2 = 0.5,$$

$$K_m = 2.0, K_I = 0.8, K_d = 1.2, K_{dN} = 1.2, n = 4, L = 0.002$$

จะได้จุดสมดุลคือ

$$(M, F_C, F_S, F_N) = (1.96913, 0.997289, 0.184038, 1.63128)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ (M, F_C, F_S, F_N) = (1.96913, 0.997289, 0.184038, 1.63128) ระบุชื่อหน่วยงาน
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. กรณีที่ $L=1$

ก. กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 4.0, v_m = 2.0, v_d = 4.0, v_{dN} = 2.2, k_s = 0.9, k = 0.6, k_1 = 0.7, k_2 = 0.25, \\ K_m = 0.3, K_l = 0.8, K_d = 1.4, K_{dN} = 0.4, n = 5, L = 1$$

จะได้จุดสมดุลคือ

$$(M, F_C, F_S, F_N) = (3.79256, 2.87819, 1.06361, 1.31337)$$

ข. กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 4.0, v_m = 2.0, v_d = 4.0, v_{dN} = 2.2, k_s = 0.9, k = 0.6, k_1 = 1.7, k_2 = 1.25, \\ K_m = 0.3, K_l = 0.8, K_d = 1.4, K_{dN} = 0.4, n = 5, L = 1$$

จะได้จุดสมดุลคือ

$$(M, F_C, F_S, F_N) = (2.91103, 1.71046, 0.483161, 1.05131)$$

3. กรณีที่ $L=400$

ก. กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 95.0, v_m = 470.0, v_d = 65.0, v_{dN} = 4.5, k_s = 5.0, k = 6.6, k_1 = 5.5, k_2 = 1.1, \\ K_m = 0.04, K_l = 0.6, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.1, n = 4, L = 400$$

จะได้จุดสมดุลคือ

$$(M, F_C, F_S, F_N) = (1.80224, 0.792509, 0.0875122, 0.525576)$$

ข. กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 95.0, v_m = 470.0, v_d = 35.0, v_{dN} = 1.5, k_s = 5.0, k = 6.6, k_1 = 1.5, k_2 = 0.1, \\ K_m = 0.04, K_l = 0.6, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.1, n = 4, L = 400$$

จะได้จุดสมดุลคือ

$$(M, F_C, F_S, F_N) = (1.41521, 0.880271, 0.199032, 0.541681)$$

4. กรณีที่ $L=1000$

ก. กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 250.0, v_m = 1200.0, v_d = 150.0, v_{dN} = 6.5, k_s = 5.5, k = 3.5, k_1 = 6.0, k_2 = 1.0, \\ K_m = 0.04, K_l = 0.4, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.05, n = 4, L = 1000$$

จะได้จุดสมดุลคือ

$$(M, F_C, F_S, F_N) = (1.65897, 0.995047, 0.0237696, 0.328634)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข. กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์คือ

$$v_s = 250.0, v_m = 1100.0, v_d = 150.0, v_{dN} = 6.5, k_s = 5.5, k = 3.5, k_1 = 1.0, k_2 = 1.0,$$

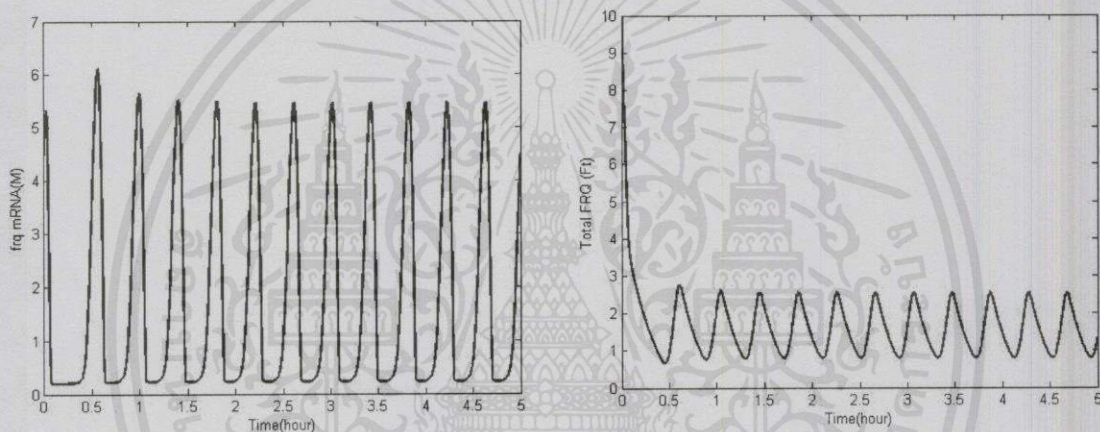
$$K_m = 0.04, K_l = 0.4, K_d = 1.0, K_{dN} = 1.5, n = 4, L = 1000$$

จะได้จุดสมดุลคือ

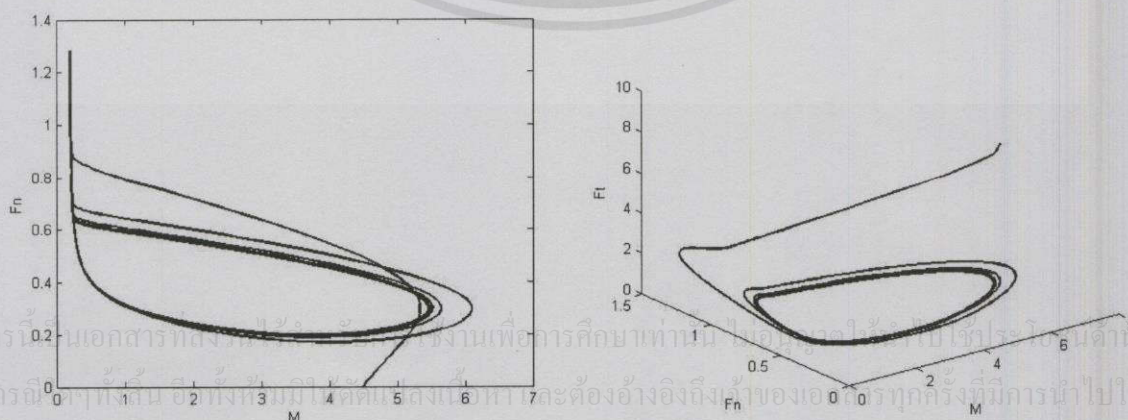
$$(M, F_C, F_S, F_N) = (1.64031, 2.11531, 0.0519199, 0.497184)$$

3.1.3.2 แบบจำลองการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

สามารถตรวจค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดโดยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยใช้วิธีรุ่งเงคุดตาอันดับ 4 และจะได้กราฟดังต่อไปนี้

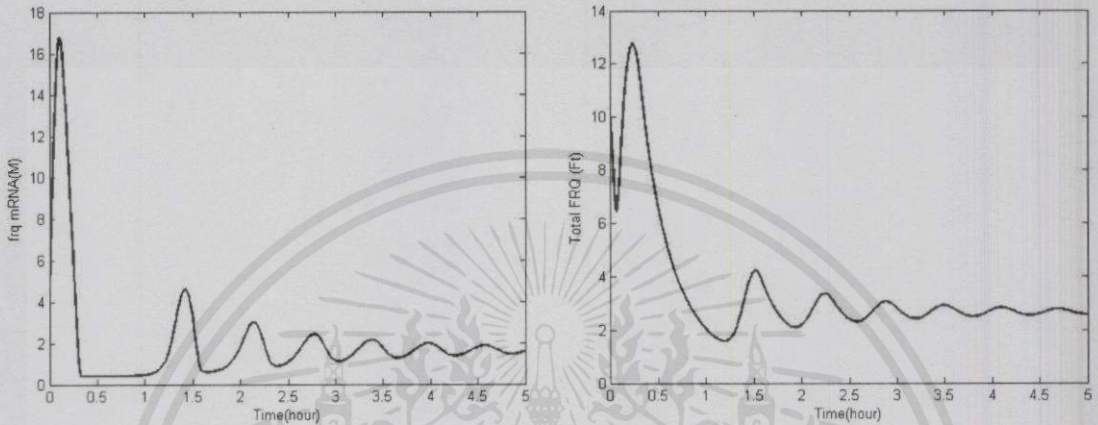


รูปที่ 3.2 กรณีของสถานะวงลิมิต $freq mRNA$ และ ค่าโปรตีน FRQ ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมง กับค่าความเข้มแสง 1000 lux.

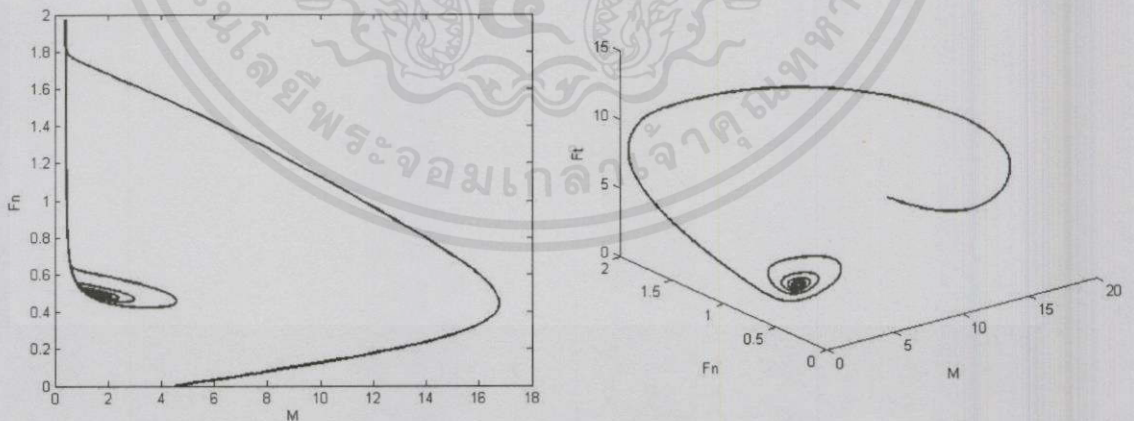


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ขอสงวนสิทธิ์ในสิ่งที่ปรากฏ ไม่สามารถรับผิดชอบต่อการใช้งานใดๆ ที่เกิดขึ้นจากการนำเอกสารนี้ไปใช้

รูปที่ 3.3 กรณีสถานะวงลิมิต ระหว่าง $fqmRNA$ และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 2 มิติ และ ระหว่าง $fqmRNA$ และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 3 มิติ กับค่าความเข้มแสง 1000 lux.



รูปที่ 3.4 กรณีสถานะเสถียร $fqmRNA$ และ ค่าโปรตีน FRQ ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมง กับค่าความเข้มแสง 1000 lux.



เอกสารนี้เป็นรูปที่ 3.5 กรณีสถานะเสถียร ระหว่าง $fqmRNA$ และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 2 มิติ และ มีด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้ง ระหว่าง $fqmRNA$ และ FRQ นิวเคลียส ในแบบ 3 มิติ กับค่าความเข้มแสง 1000 lux. นำไปใช้

3.2 การหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย รุงเงคุดตาของเฟลเบิร์ก (Runge-Kutta-Fehlberg's)

3.2.1 การหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นั้นได้มีการนำไปใช้กันอย่างแพร่หลาย เช่น สาขาด้านฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ การแพทย์และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น เพราะวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขนี้สามารถนำไปใช้ได้จริงในการแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์

3.2.2 การหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยรุงเงคุดตาของเฟลเบิร์ก (Runge-Kutta-Fehlberg's)

ในปัญหาพิเศษนี้ ได้มีความสนใจในวิธีรุงเงคุดตาของเฟลเบิร์ก ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีหนึ่งที่มีเป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางและเหมาะสมโดยเฉพาะกรณีที่คำนวณปัญหาชั้นสูงหรือปัญหาที่ซับซ้อน วิธีรุงเงคุดตาของเฟลเบิร์กนี้สามารถใช้ได้กับสมการอันดับต่างๆ โดยวิธีจะเปลี่ยนรูปไปตามระบบสมการอันดับแรก ในที่นี้จะพูดถึงวิธีแก้ปัญหของระบบสมการ 2 ตัวแปร

ให้ระบบสมการคือ

$$x' = f(x, y, t)$$

$$y' = g(x, y, t)$$

ให้จุดเริ่มต้นคือ (x_0, y_0, t_0) และช่วงความกว้าง h

วิธีรุงเงคุดตาของเฟลเบิร์กมีการหาค่าที่ใกล้เคียง x และ y โดยแต่ละขั้นตอนคือ

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(2375k_1 + 11264k_3 + 10985k_4 - 4104k_5)}{20520}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(2375r_1 + 11264r_3 + 10985r_4 - 4104r_5)}{20520}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษา 20520 นั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$k_1 = hf(x_n, y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{k_1}{4}, y_n + \frac{r_1}{4}, t_n + \frac{h}{4}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{(3k_1 + 9k_2)}{32}, y_n + \frac{(3r_1 + 9r_2)}{32}, t_n + \frac{3h}{8}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{(192k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)}{2197}, y_n + \frac{(192r_1 - 7200r_2 + 7296r_3)}{2197}, t_n + \frac{12h}{13}\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + \frac{(834k_1 - 32832k_2 + 29440k_3 - 845k_4)}{4104},$$

$$y_n + \frac{(834r_1 - 32832r_2 + 29440r_3 - 845r_4)}{4104}, t_n + h\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{(-6080k_1 + 41040k_2 - 28352k_3 + 9295k_4 - 5643k_5)}{20520},$$

$$y_n + \frac{(-6080r_1 + 41040r_2 - 28352r_3 + 9295r_4 - 5643r_5)}{20520}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

และค่าความคลาดเคลื่อนของขั้นตอนคือ

$$E_x = \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50}$$

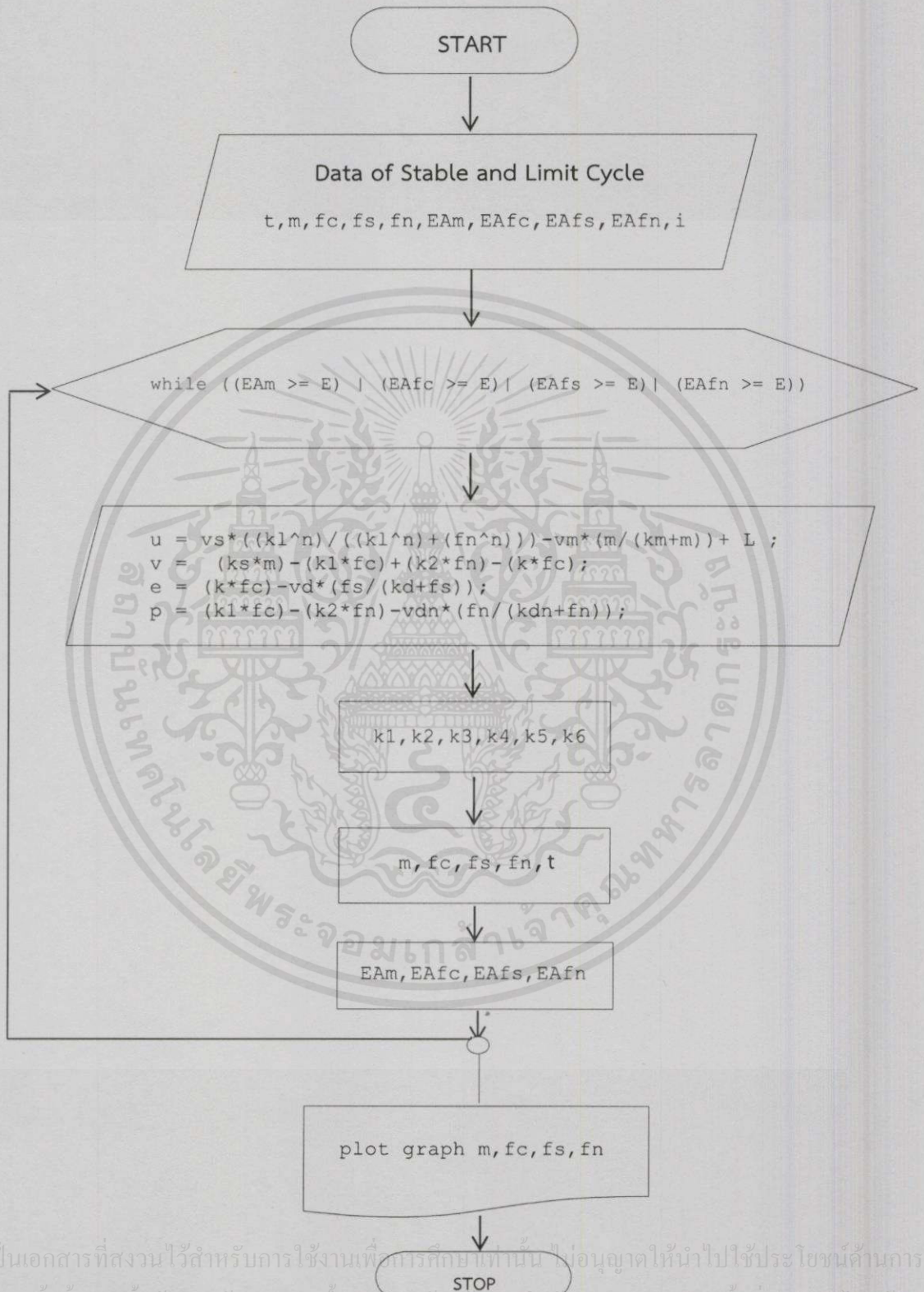
r_1, \dots, r_6 และค่าความคลาดเคลื่อนของค่า y สามารถประเมินค่าได้จากสมการก่อนหน้า (k_1, \dots, k_6)

และค่าความคลาดเคลื่อนของค่า x โดยการแทนฟังก์ชัน f กับฟังก์ชัน g

รูเงคุดตาของเฟลด์เบิร์กสามารถประยุกต์ใช้โดยตรงกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ N สมการ
อันดับที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3 แผนภาพการทำงานของวิธีรุงเงคุดตาของเฟลเบิร์ก (Runge-Kutta-Fehlberg's)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
ในบทต่อไปจะเป็นผลการดำเนินงานปัญหาพิเศษ

ผลการดำเนินงานปัญหาพิเศษ

ในบทนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบกราฟระหว่างการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยวิธีรุงकुตดาอันดับ 4 และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยวิธีรุงकुตดาอันดับ 6 ของตัวแปรในแบบจำลองวัฏจักรของเชื้อรานิวโรสปอร์รา

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนิวโรสปอร์รา ในกรณีที่มีแสงเป็นตัวกระตุ้นสามารถจำลองเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ 4 สมการดังนี้

$$\frac{dM}{dt} = v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_N^n} - v_m \frac{M}{K_m + M} + L \quad (4.1)$$

$$\frac{dF_C}{dt} = k_s M - k_1 F_C + k_2 F_N - k F_C \quad (4.2)$$

$$\frac{dF_S}{dt} = k F_C - v_d \frac{F_S}{K_a + F_S} \quad (4.3)$$

$$\frac{dF_N}{dt} = k_1 F_C - k_2 F_N - v_{dN} \frac{F_N}{K_{dN} + F_N} \quad (4.4)$$

ในส่วนของการตรวจสอบค่าพารามิเตอร์ด้วยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีรุงकुตดาอันดับ 6 ด้วยการเขียนโปรแกรมขึ้นใหม่ทั้งหมด สามารถแสดงผลโดยพิจารณาค่าความเข้มแสง (L) ทั้งหมด 4 ค่า คือ $L = 0.002$, $L = 1$, $L = 400$, $L = 1000$ และเพื่อเป็นการเปรียบเทียบกับ การแสดงผลลัพธ์จากงานวิจัยเดิม จึงแสดงรูปเปรียบเทียบที่ได้จากงานปัญหาพิเศษนี้กับงานวิจัยเดิมไว้ให้เห็นเด่นชัดดังต่อไปนี้

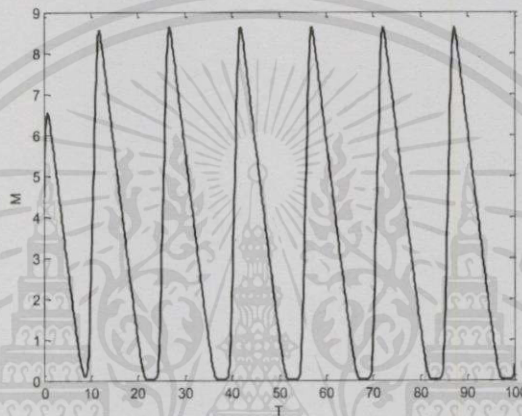
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1 การเปรียบเทียบผลลัพธ์

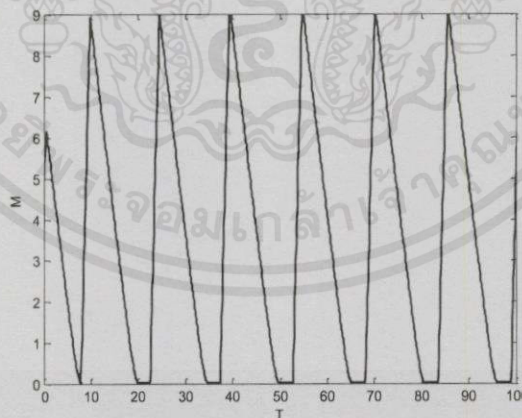
การตรวจสอบค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขรณรงค์ตามอันดับ 4 และรณรงค์ตามอันดับ 6 จากผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (4.1) – (4.4)

กรณีที่ $L = 0.002$ กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 5.5, v_m = 1.0, v_d = 3.0, v_{dN} = 1.7, k_s = 0.7, k = 0.4, k_1 = 0.8, k_2 = 0.05, \\ K_m = 0.2, K_l = 0.8, K_d = 1.2, K_{dN} = 0.2, n = 4, L = 0.002$$

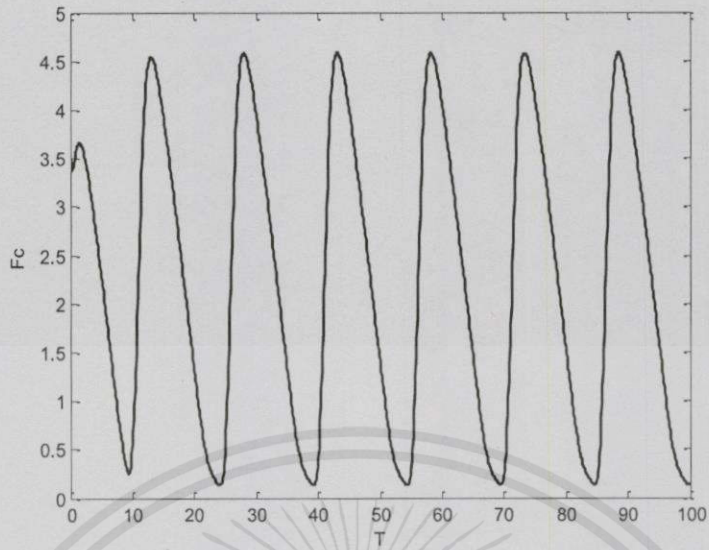


รูปที่ 4.1 จากงานวิจัยเดิม [5]

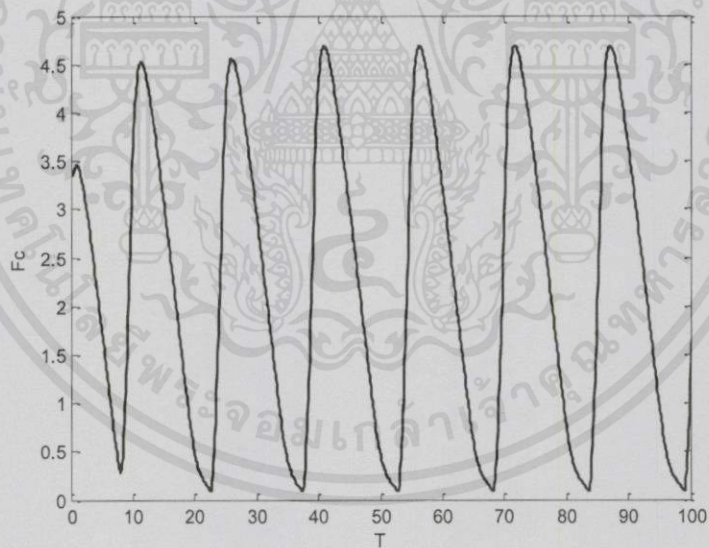


รูปที่ 4.2 จากวิธีรณรงค์ตามอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิอนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรณรงค์ตามอันดับ 6 นั้นมีช่วงความสูงของกราฟที่สูงกว่าวิธีเดิม
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งหากนำไปใช้



รูปที่ 4.3 จากงานวิจัยเดิม [5]



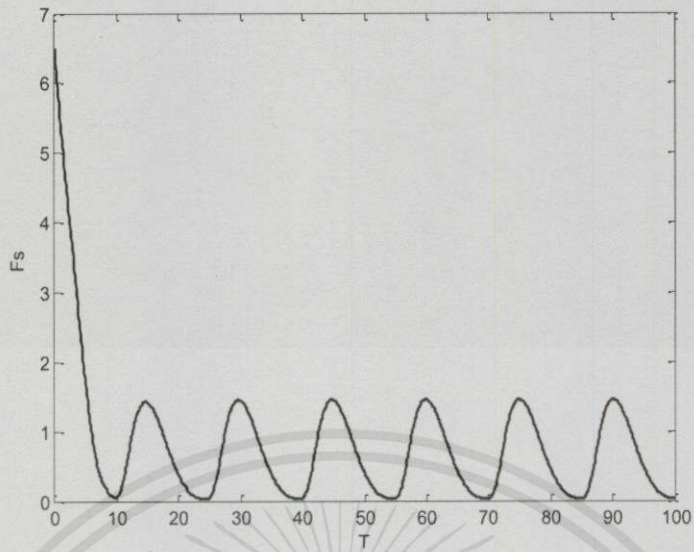
รูปที่ 4.4 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

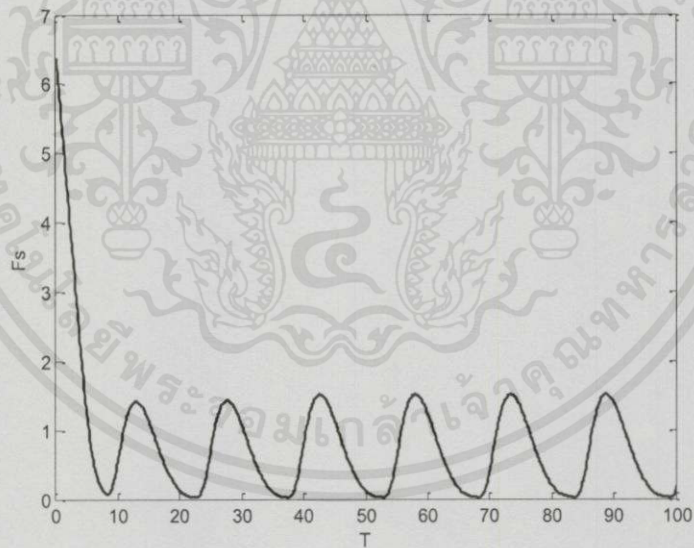
มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีช่วงความสูงของกราฟที่สูงกว่าวิธีเดิมเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 จากงานวิจัยเดิม [5]

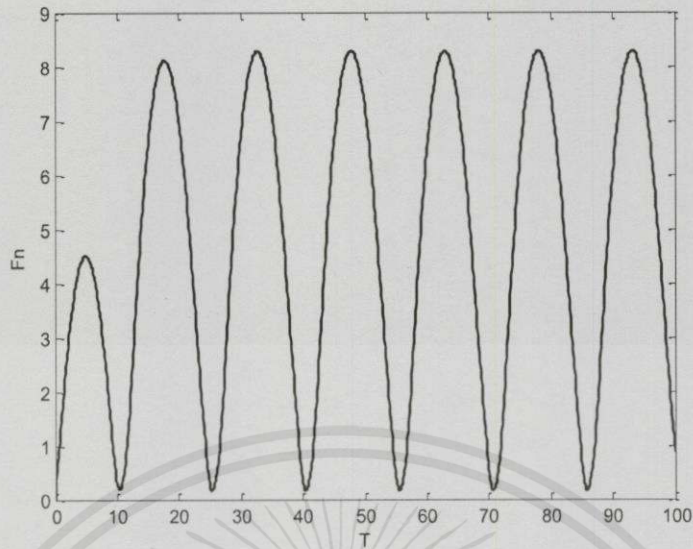


รูปที่ 4.6 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

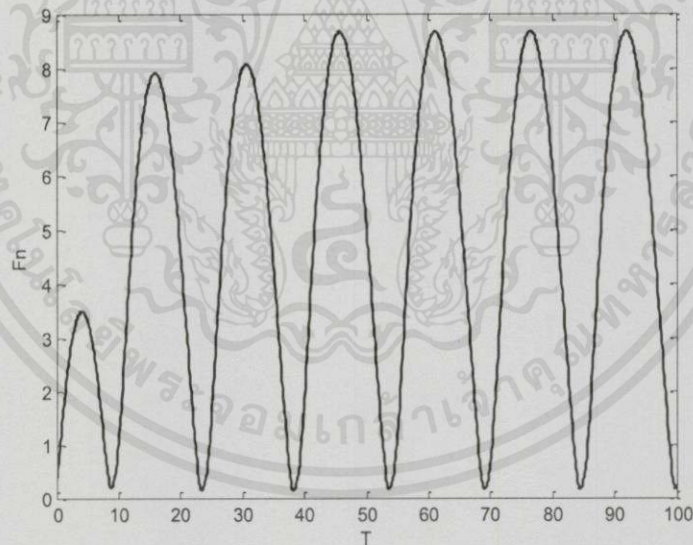
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสอง

กราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.7 จากงานวิจัยเดิม [5]

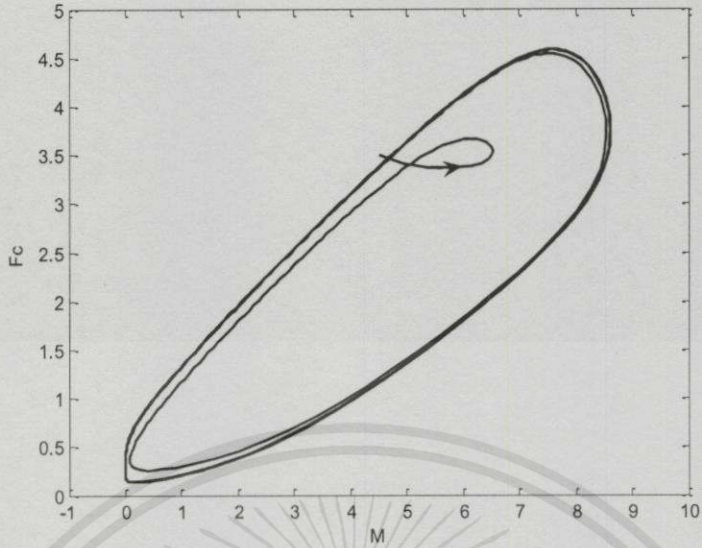


รูปที่ 4.8 จากวิธีรุ่งเฑศตอานัดบ 6

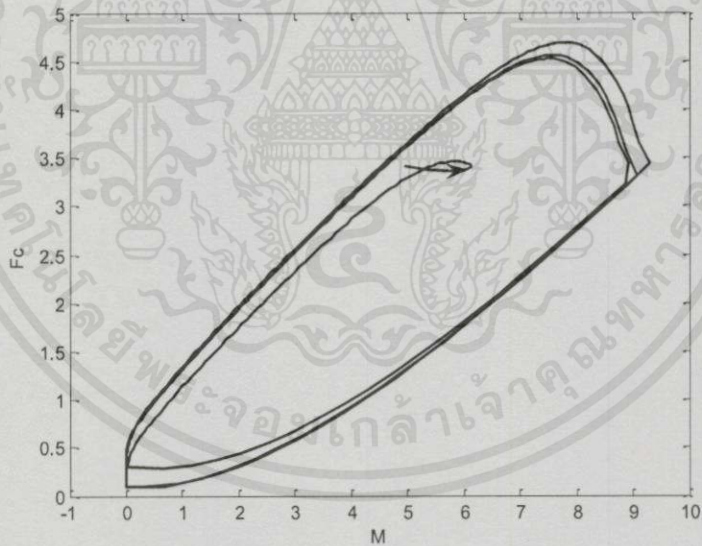
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N ในเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเฑศตอานัดบ 6 นั้นมีช่วงความสูงของกราฟในความโค้งแรกที่ดี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับวารสารงานเพื่อวารสารศึกษานานับ ไม่นอนเวลาให้รับไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
กว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย และวิธีรุ่งเฑศตอานัดบ 6 มีช่วงความสูงของกราฟในความโค้งต่อมาสูงกว่า
ไม่ว่ากรณีใดก็ตามอีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
วิธีเดิมเพียงเล็กน้อย



รูปที่ 4.9 จากงานวิจัยเดิม [5]

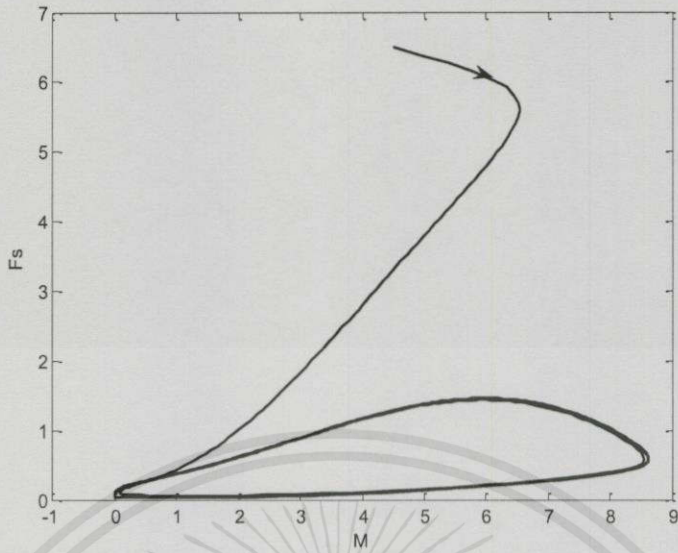


รูปที่ 4.10 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

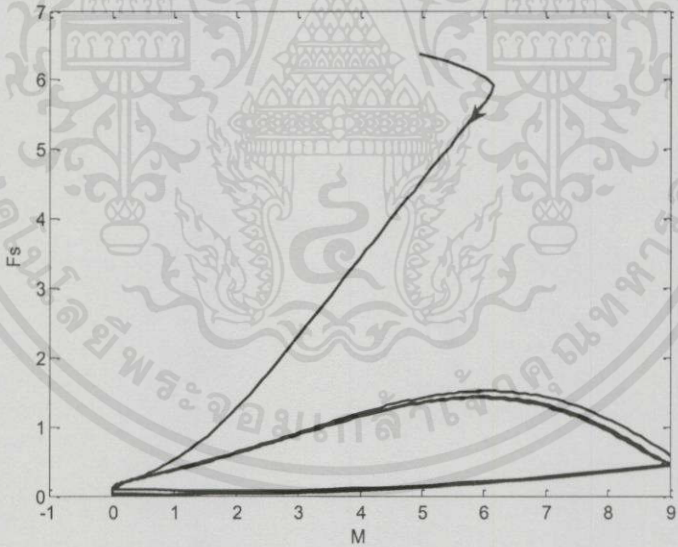
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_c ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

แต่วิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการเริ่มต้นที่แตกต่างจากวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย มีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิมและมีการวนซ้ำที่ไม่เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.11 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.12 จากวิธีรุ่งเจดุดาอันดับ 6

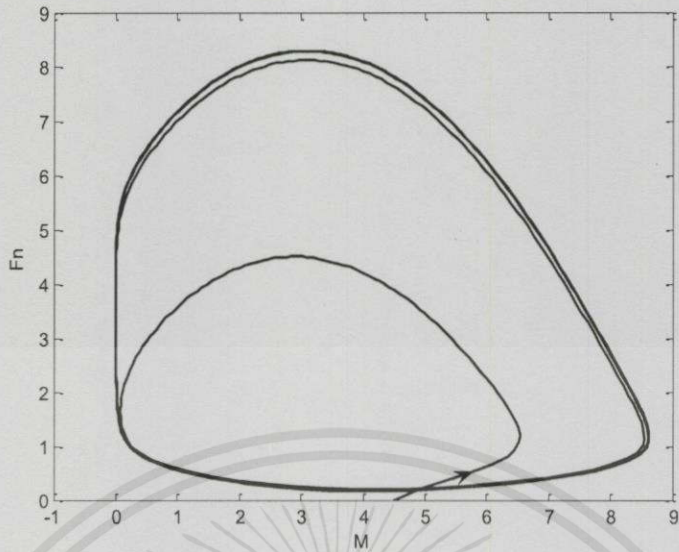
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กันแต่วิธีรุ่งเจดุดาอันดับ 6 นั้นมีการเริ่มต้นที่แตกต่างจากวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย มีการวิ่งของเส้นกราฟ

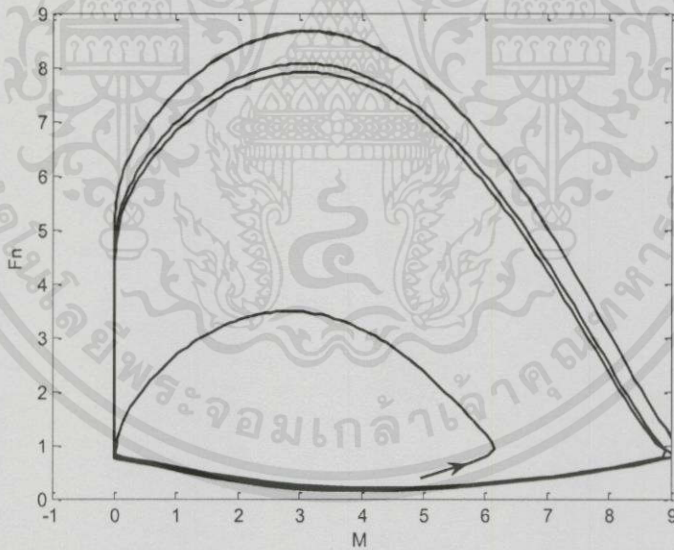
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ที่กว้างกว่าวิธีเดิม

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.13 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.14 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

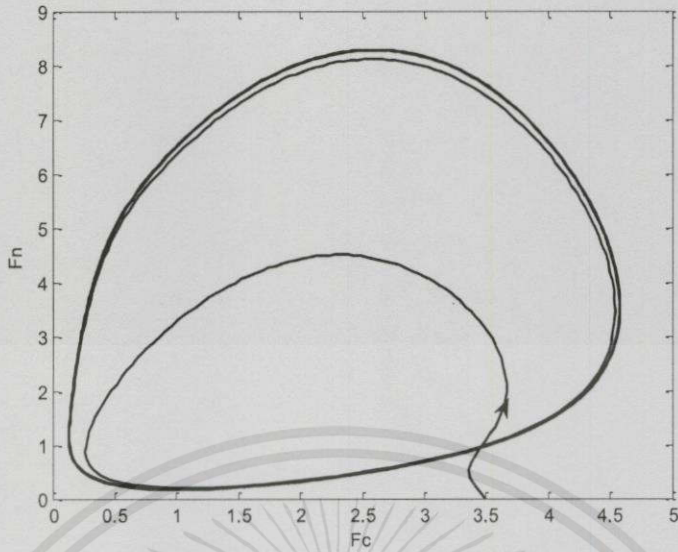
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการเริ่มต้นที่แตกต่างจากวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย มีการวิ่งของเส้นกราฟที่

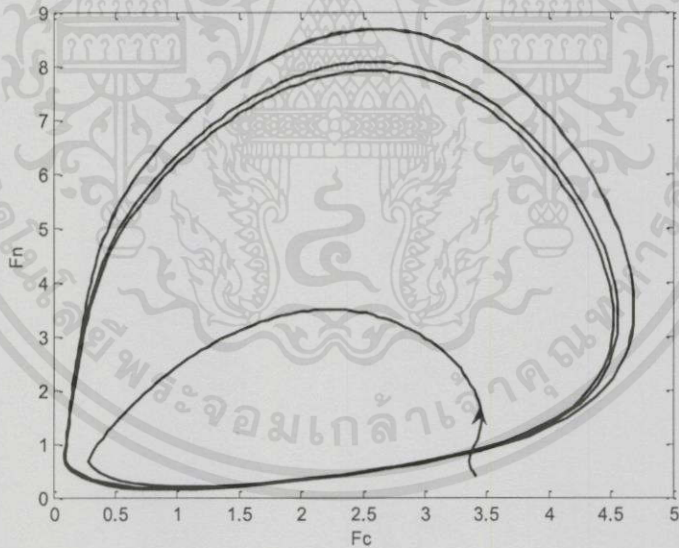
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับอาจารย์และบุคลากรในมหาวิทยาลัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

กว้างกว่าวิธีเดิมและวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 มีรอบของการวนมากกว่าวิธีเดิม

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามนำให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.16 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_c และ F_h ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

แต่วิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการเริ่มต้นที่แตกต่างจากวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย มีการวิ่งของเส้นกราฟที่

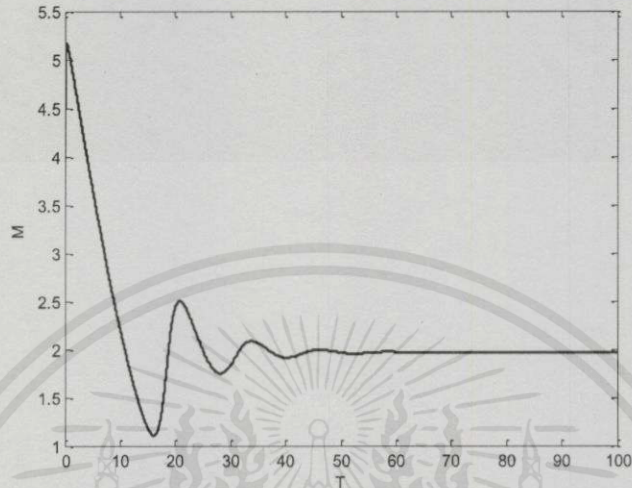
เอวกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

กว้างกว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อยและวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 มีรอบของการวนมากกว่าวิธีเดิม

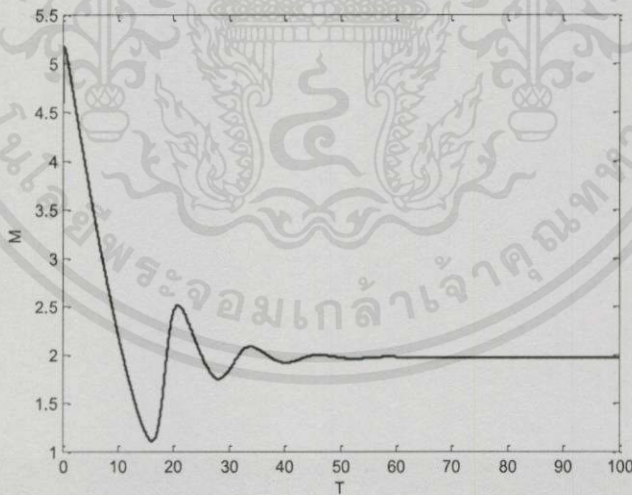
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 4.5, v_m = 0.5, v_d = 3.0, v_{dN} = 1.7, k_s = 0.7, k = 0.4, k_1 = 1.8, k_2 = 0.5, \\ K_m = 2.0, K_l = 0.8, K_d = 1.2, K_{dN} = 1.2, n = 4, L = 0.002$$



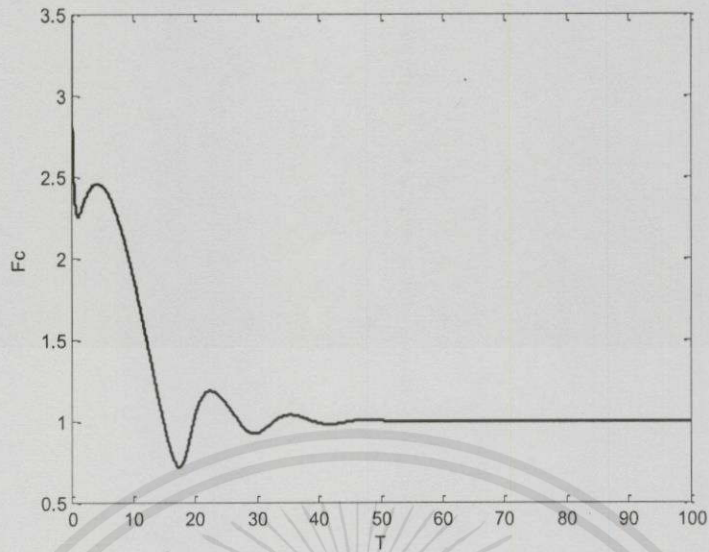
รูปที่ 4.17 จากงานวิจัยเดิม [5]



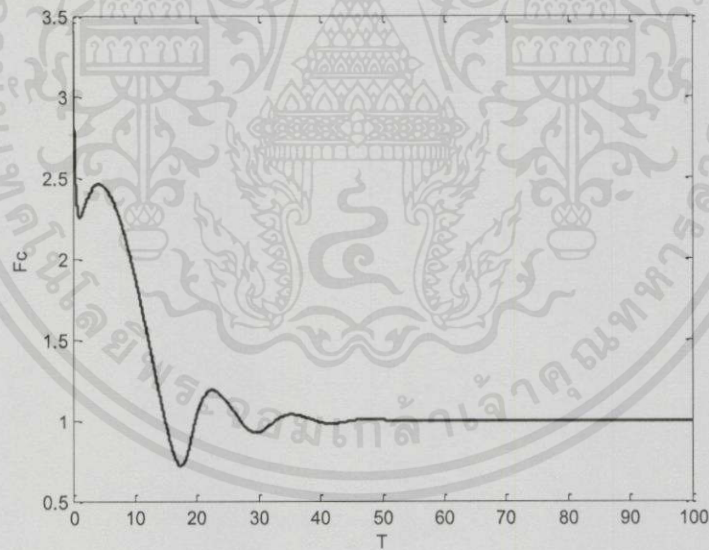
รูปที่ 4.18 จากวิธีรุงคงตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

เอกสารนี้ที่เอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูใช้ภายในเพื่อรู้ลึกซึ้งเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก ต่างกันแค่ทั้งสองวิธีนี้มีการเริ่มต้นไม่เหมือนกันเพียงเล็กน้อย
 ไม่ว่าจะฉีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.19 จากงานวิจัยเดิม [5]

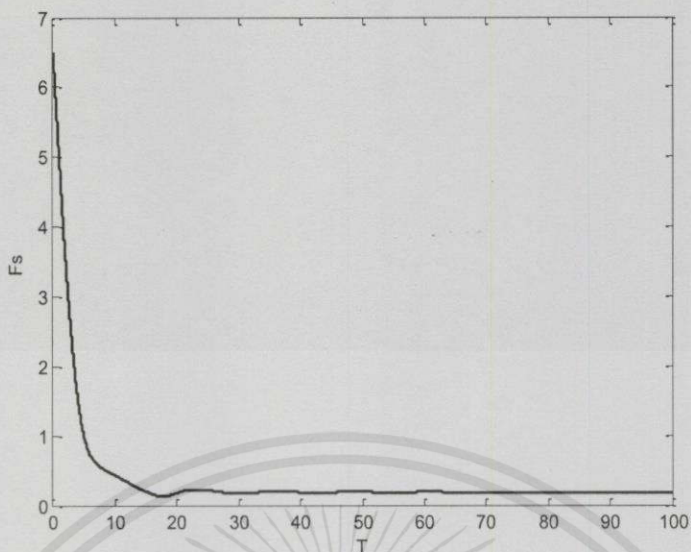


รูปที่ 4.20 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

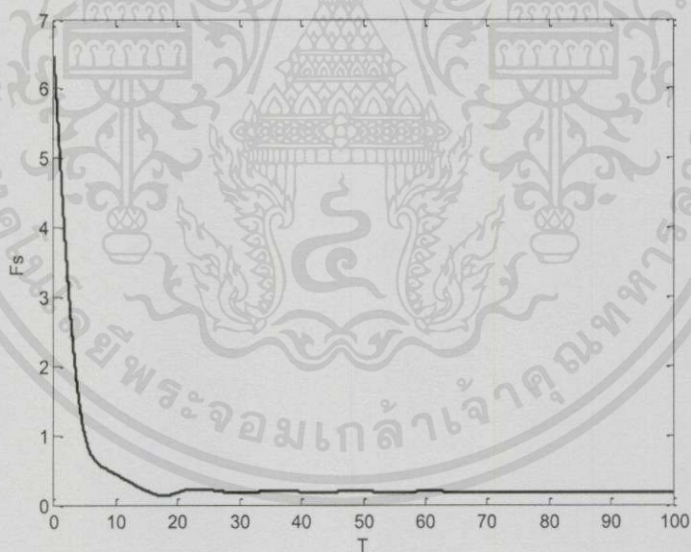
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสอง

กราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สแกนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.21 จากงานวิจัยเดิม [5]

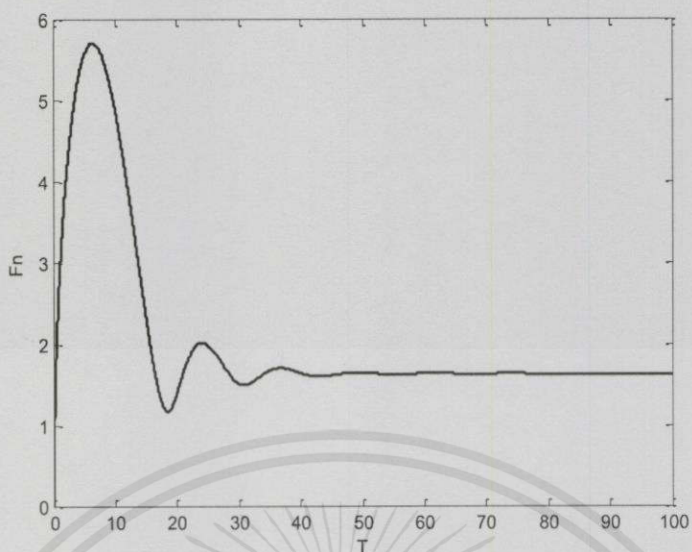


รูปที่ 4.22 จากวิธีรุ่งเกตุตาอันดับ 6

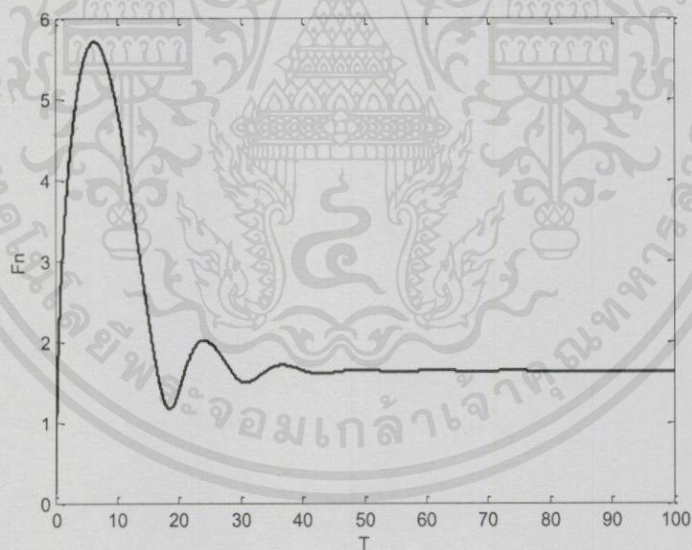
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.23 จากงานวิจัยเดิม [5]

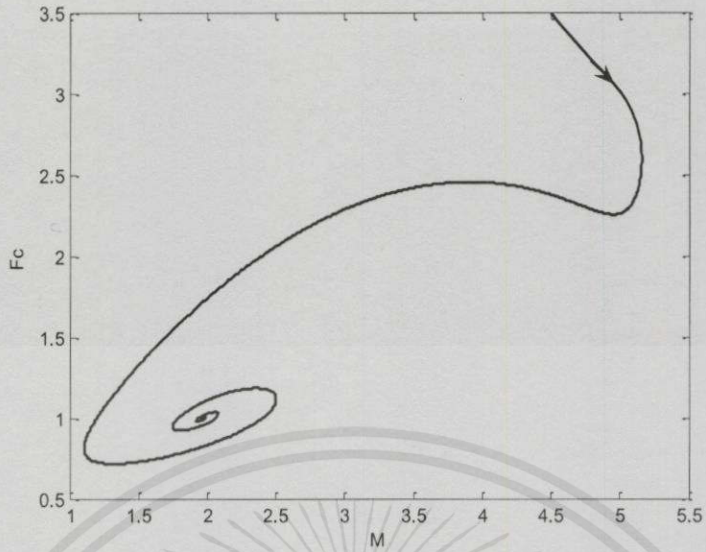


รูปที่ 4.24 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

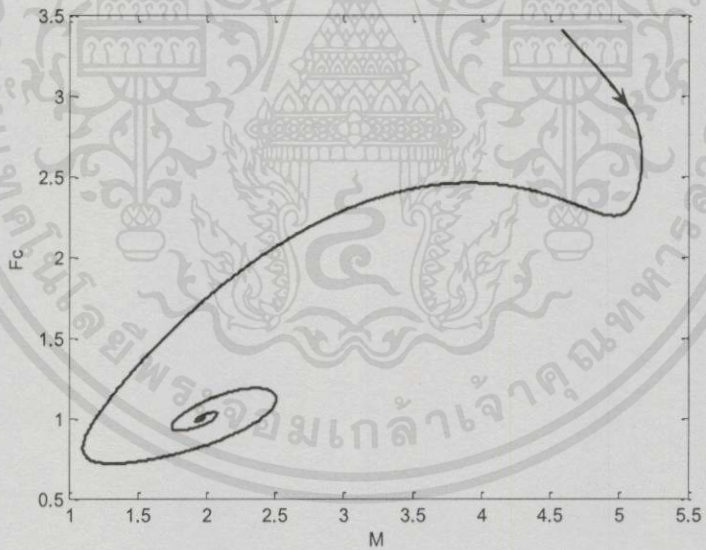
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.25 จากงานวิจัยเดิม [5]

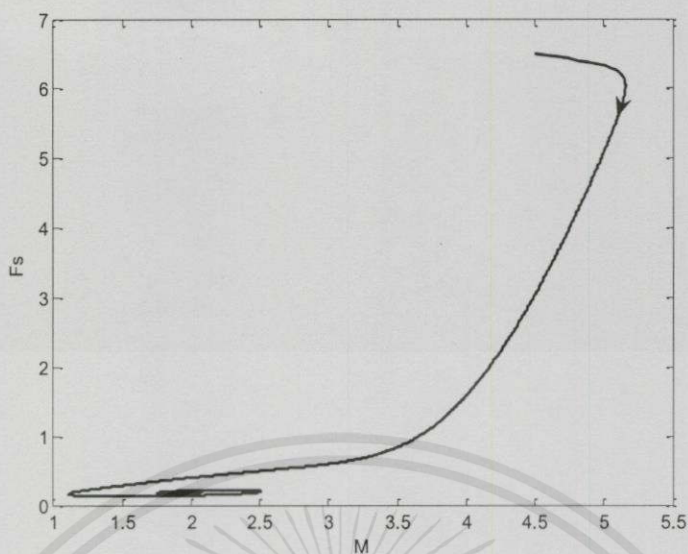


รูปที่ 4.26 จากวิธีรุงคงดูดอันดับ 6

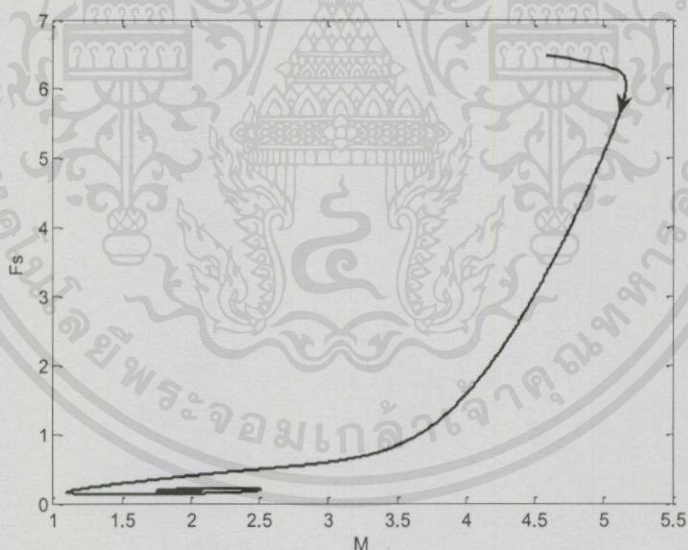
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_C ซึ่งจากทั้งสองกราฟนี้มีความ

คล้ายคลึงกันมาก ต่างกันแค่ทั้งสองวิธีนี้มีการเริ่มต้นไม่เหมือนกันเพียงเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.27 จากงานวิจัยเดิม [5]

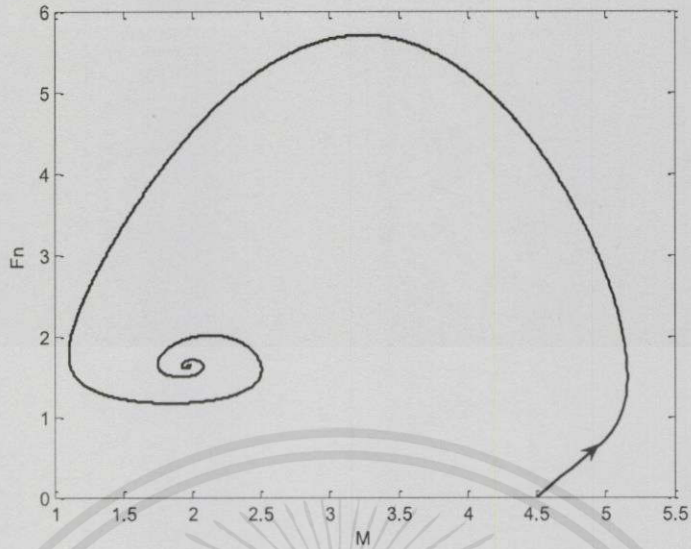


รูปที่ 4.28 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

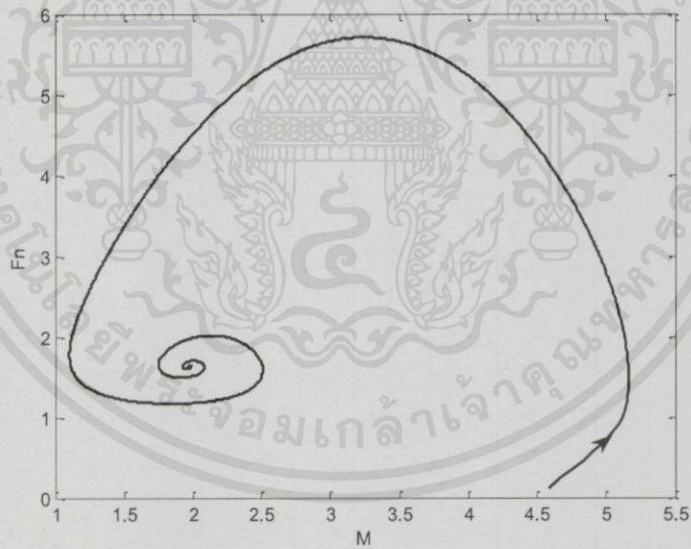
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กันมาก ต่างกันแค่ทั้งสองวิธีนี้มีการเริ่มต้นไม่เหมือนกันเพียงเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.29 จากงานวิจัยเดิม [5]

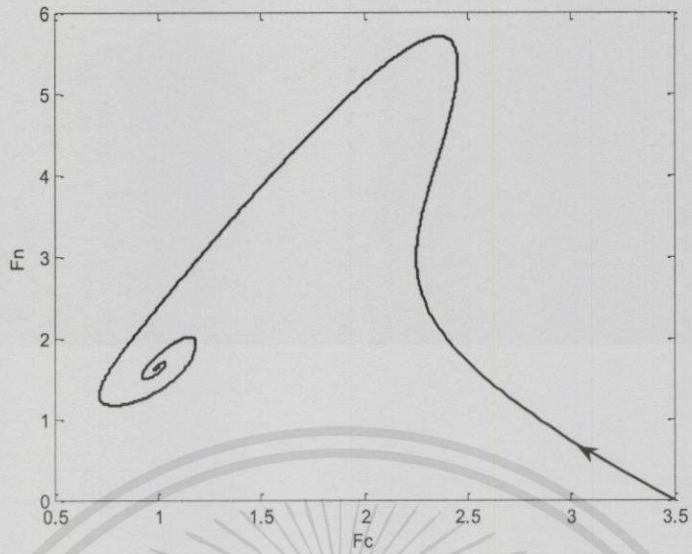


รูปที่ 4.30 จากวิธีรุ่งงคุดตาอันดับ 6

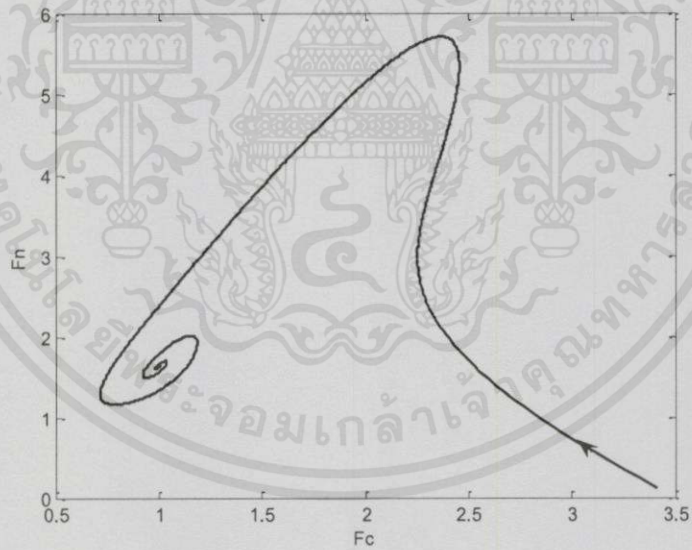
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กันมาก ต่างกันแค่ทั้งสองวิธีนี้มีการเริ่มต้นไม่เหมือนกันเพียงเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.31 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.32 จากวิธีรุ่งเงาคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กันมากต่างกันแค่ทั้งสองวิธีนี้มีการเริ่มต้นไม่เหมือนกันเพียงเล็กน้อย

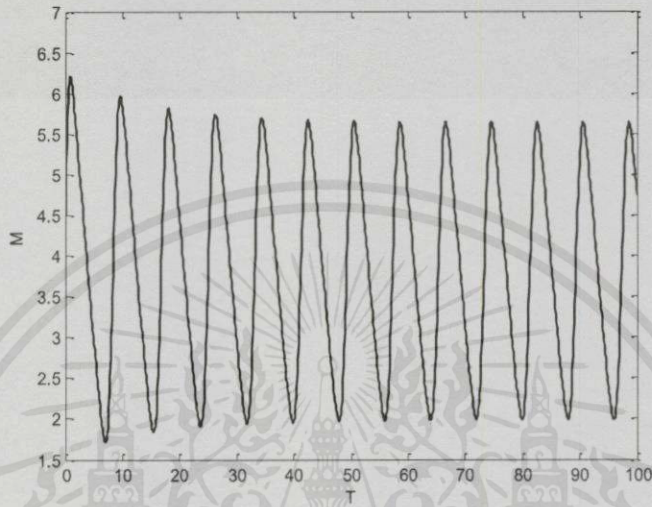
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที $L=1$

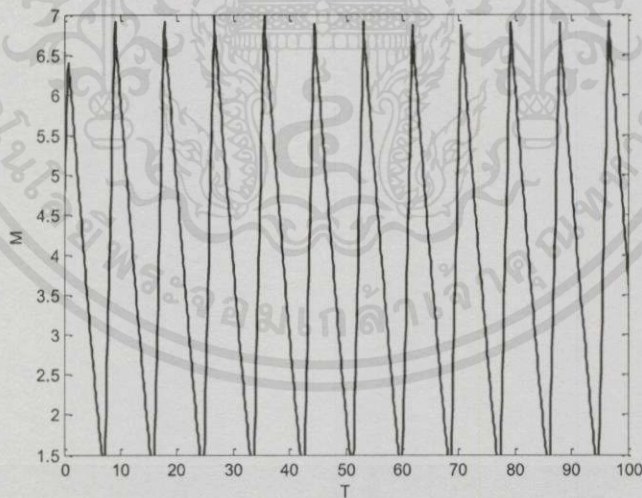
กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 4.0, v_m = 2.0, v_d = 4.0, v_{dN} = 2.2, k_s = 0.9, k = 0.6, k_1 = 0.7, k_2 = 0.25,$$

$$K_m = 0.3, K_l = 0.8, K_d = 1.4, K_{dN} = 0.4, n = 5, L = 1$$



รูปที่ 4.33 จากงานวิจัยเดิม [5]



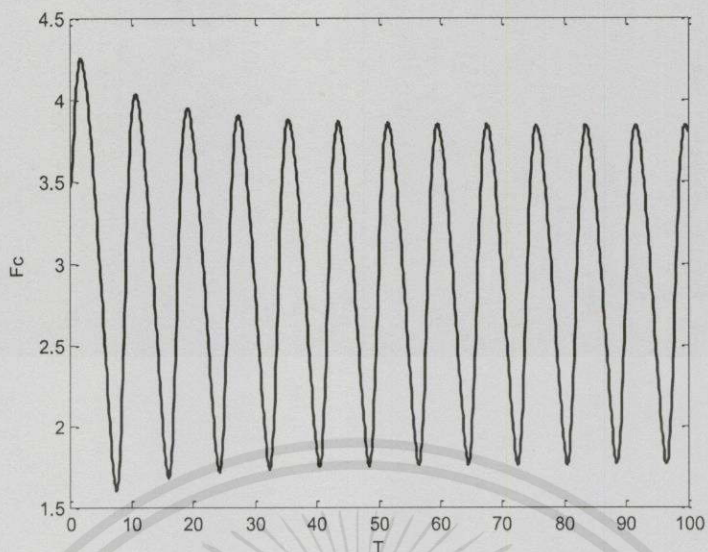
รูปที่ 4.34 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

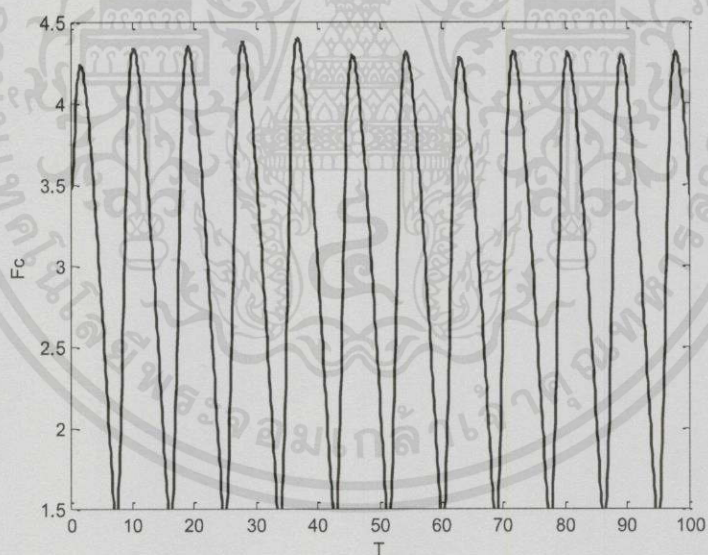
เอกสารนี้ที่ได้ออกสารที่ส่งมอบไปสำหรับงานวิจัยเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีช่วงความสูงของกราฟที่สูงกว่าวิธีเดิม

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.35 จากงานวิจัยเดิม [5]



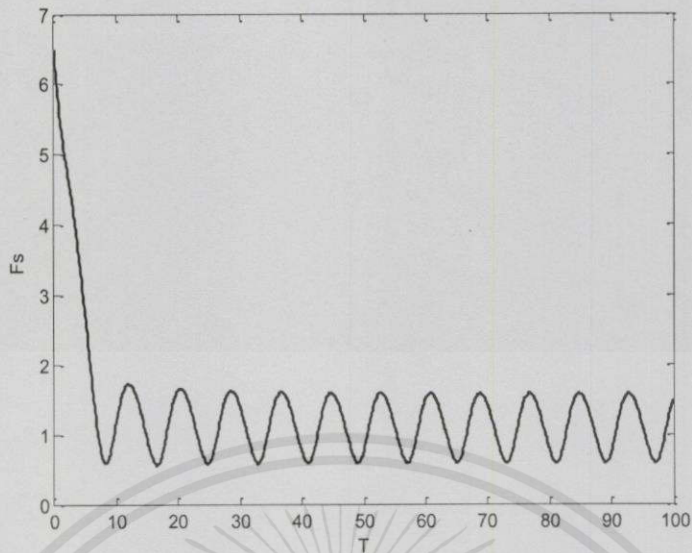
รูปที่ 4.36 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสอง

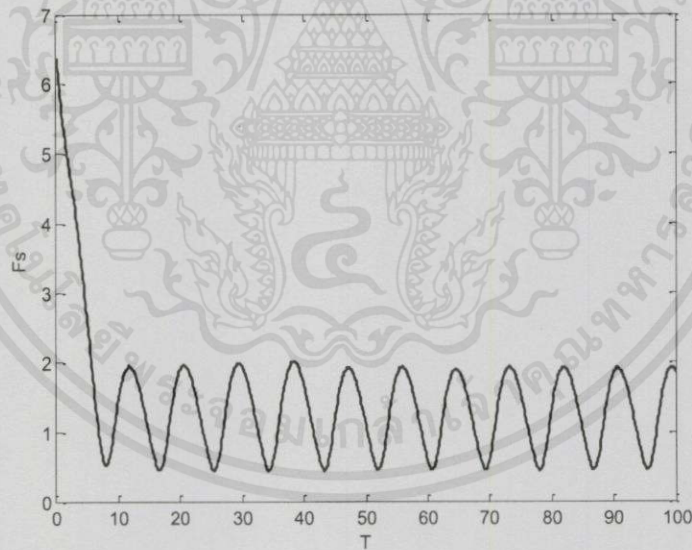
กราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีช่วงความสูงของกราฟที่สูงกว่าวิธีเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.37 จากงานวิจัยเดิม [5]

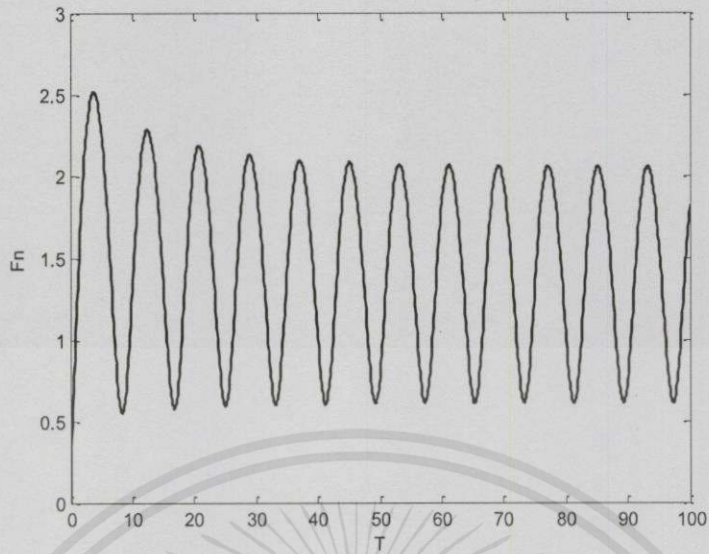


รูปที่ 4.38 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

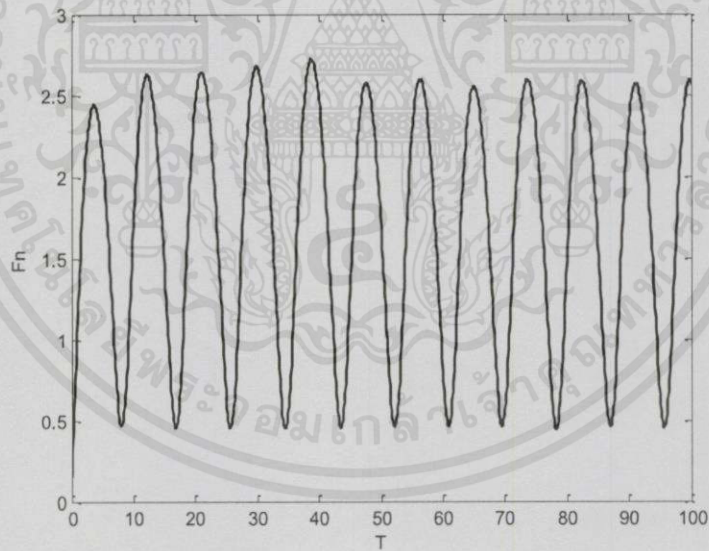
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีช่วงความสูงของกราฟที่สูงกว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.39 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.40 จากวิธีรุงเงคุดตาอันดับ 6

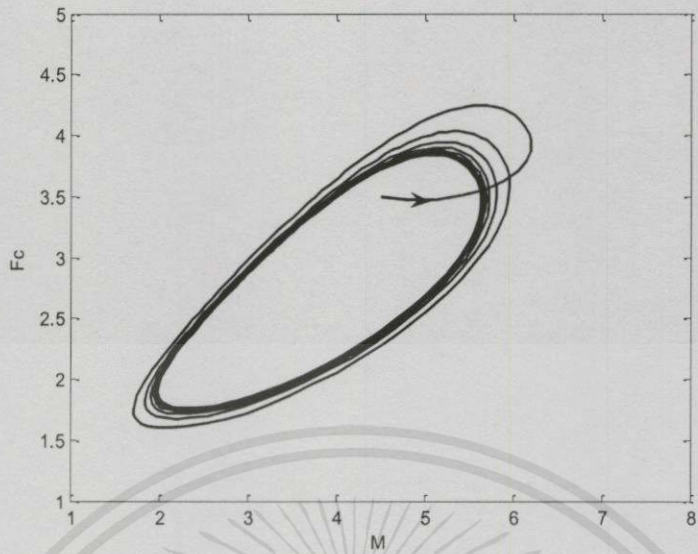
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุงเงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีช่วงความสูงของกราฟที่สูงกว่าวิธีเดิมเพียง

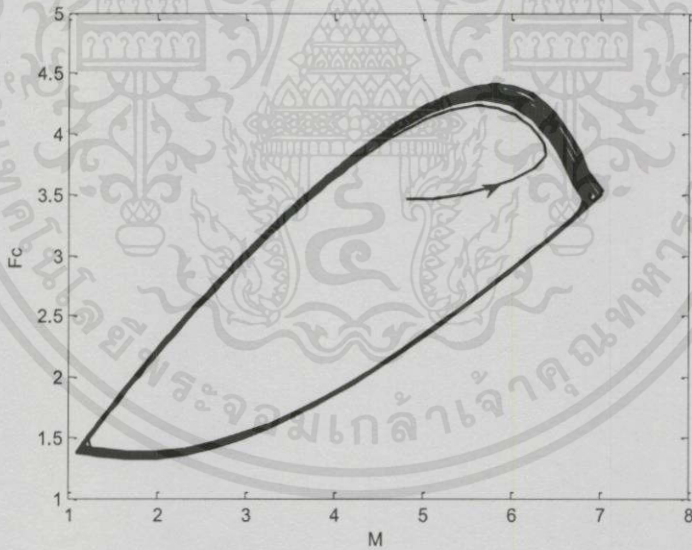
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.41 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.42 จากวิธีรุ่งเขตตาอันดับ 6

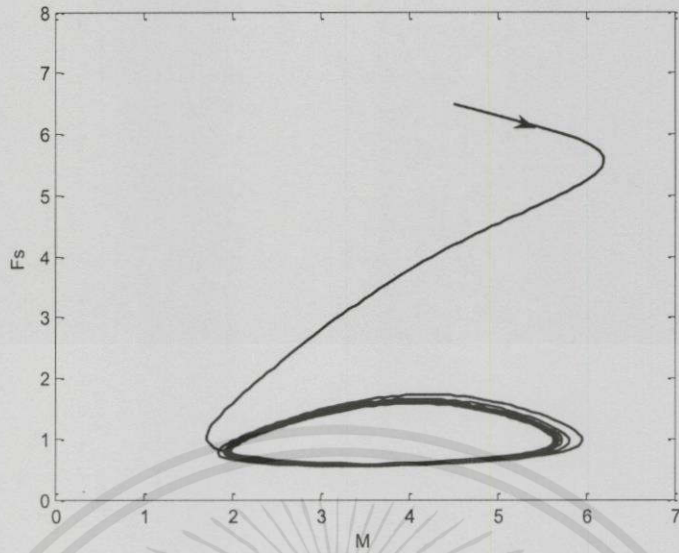
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_c ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

แต่วิธีรุ่งเขตตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม มีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธี

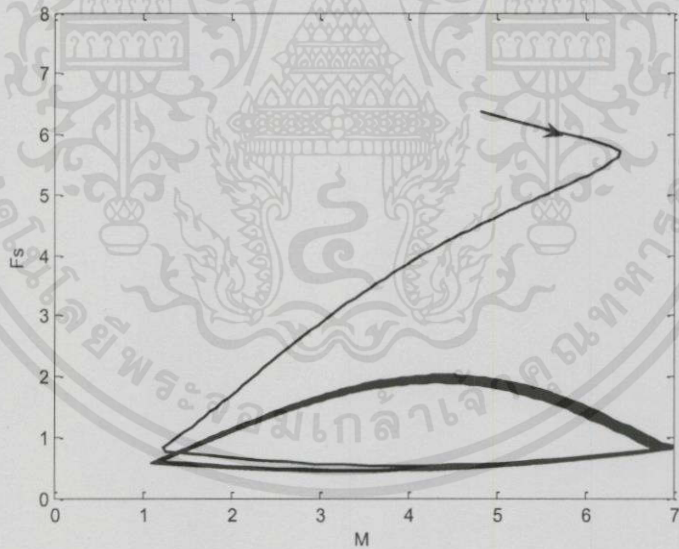
เดิมนั้นเป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เดิมและมีการวนซ้ำที่ไม่เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.43 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.44 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

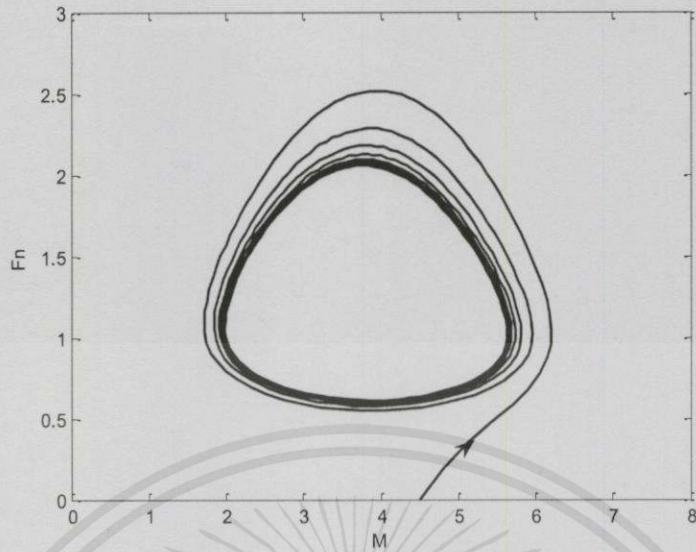
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กัน แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม และมีลักษณะการวนซ้ำที่ไม่

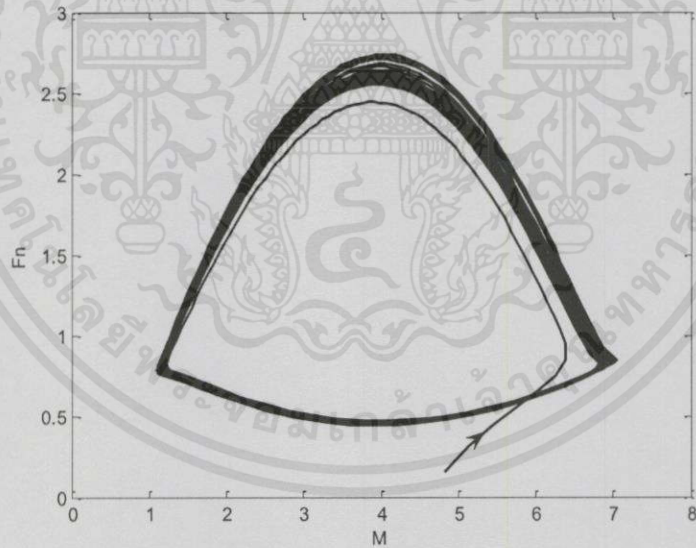
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.45 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.46 จากวิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6

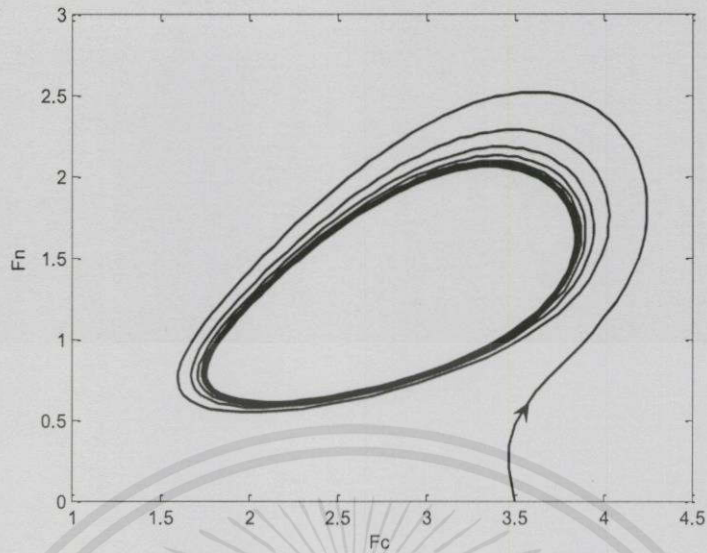
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลี่ยของ M และ F_v ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

แต่วิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม มีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธี

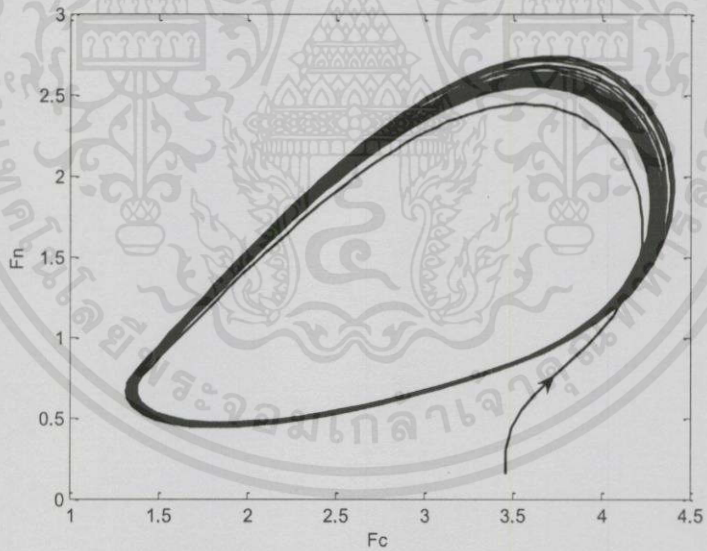
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เดิมและมีลักษณะการวนซ้ำที่ไม่เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.47 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.48 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กัน แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม และมีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็ว

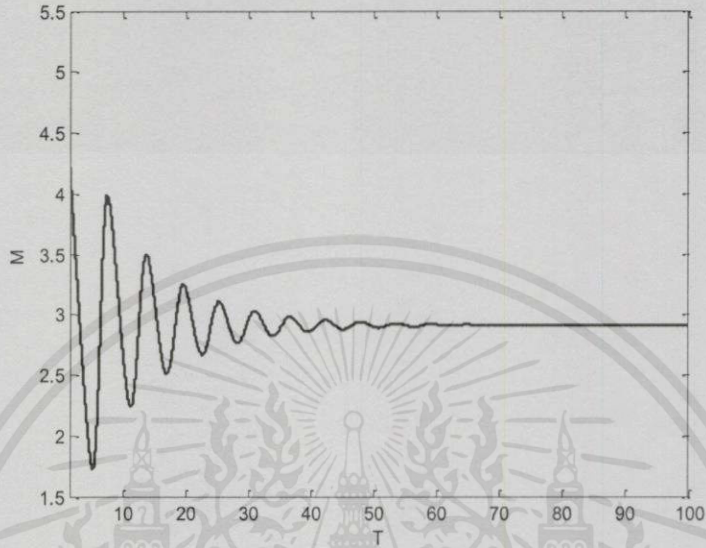
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

กว่าวิธีเดิม

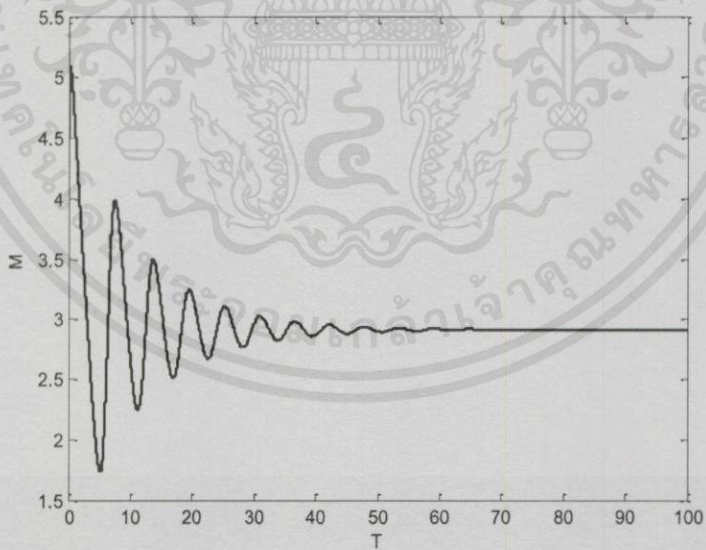
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 4.0, v_m = 2.0, v_d = 4.0, v_{dN} = 2.2, k_s = 0.9, k = 0.6, k_1 = 1.7, k_2 = 1.25, \\ K_m = 0.3, K_l = 0.8, K_d = 1.4, K_{dN} = 0.4, n = 5, L = 1$$

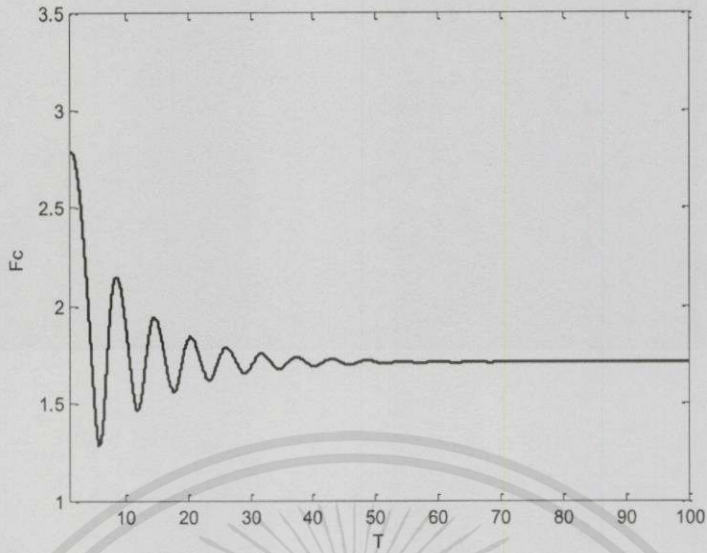


รูปที่ 4.49 จากงานวิจัยเดิม [5]

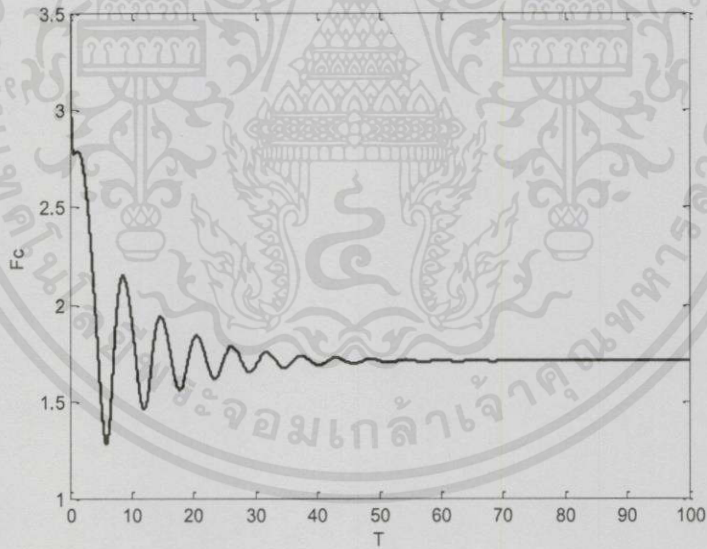


รูปที่ 4.50 จากวิธีรุงเงคุดตาอันดับ 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารจากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมงซึ่งทั้งสองกราฟนั้นการคำนวณว่ากรณีมีความคล้ายคลึงกันมาก ต่างกันแค่ทั้งสองวิธีนี้มีการเริ่มต้นไม่เหมือนกันเล็กน้อยทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.51 จากงานวิจัยเดิม [5]

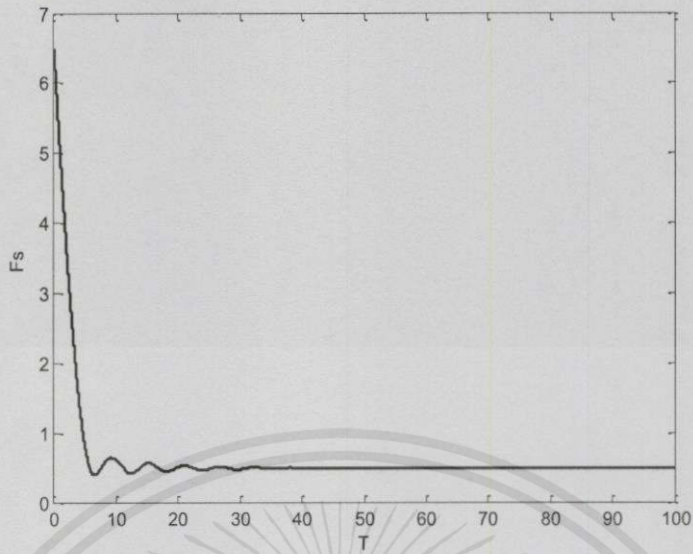


รูปที่ 4.52 จากวิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6

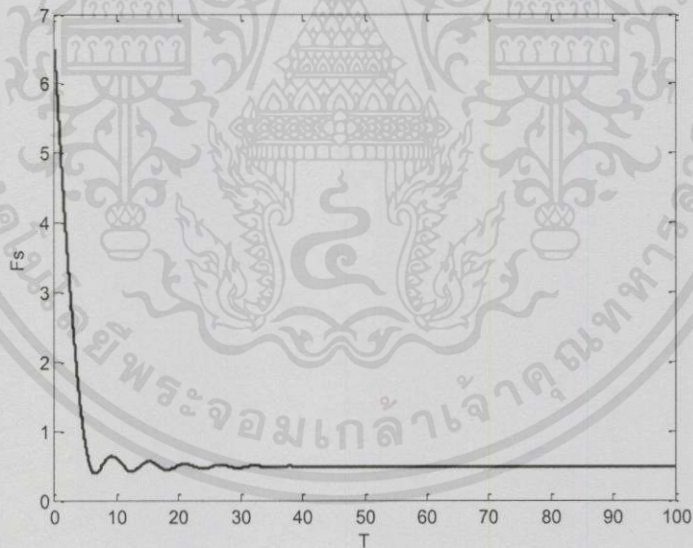
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก ต่างกันแค่ทั้งสองวิธีนี้มีการเริ่มต้นไม่เหมือนกันเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.53 จากงานวิจัยเดิม [5]

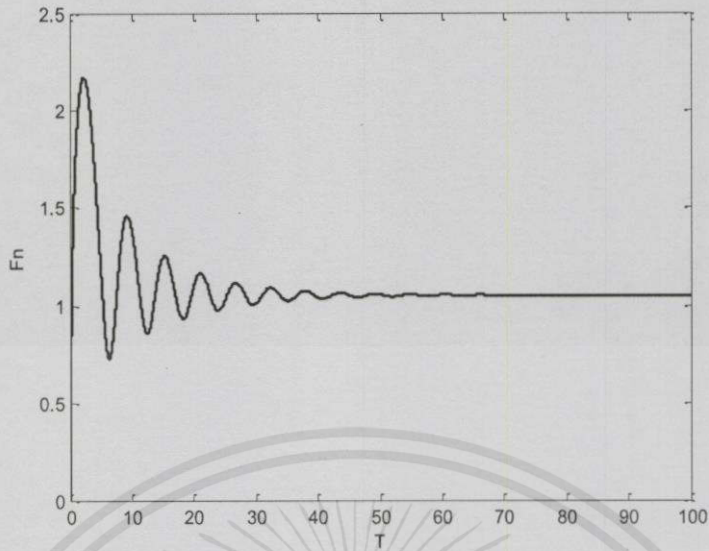


รูปที่ 4.54 จากวิธีรุ่งงคุดตาอันดับ 6

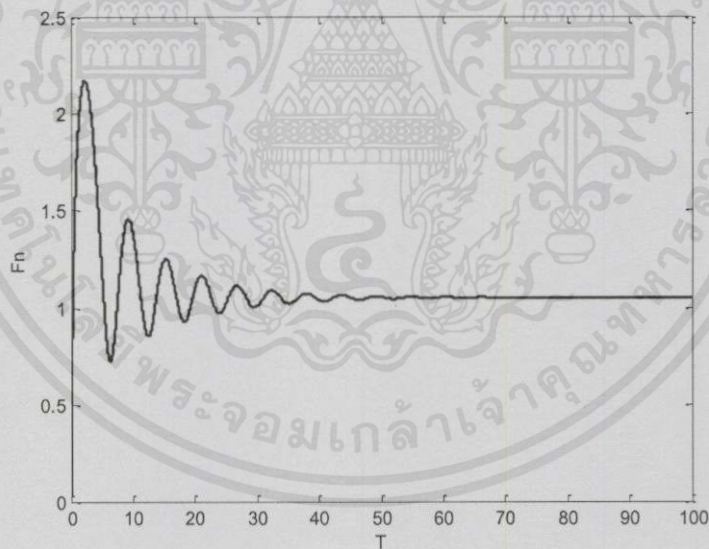
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.55 จากงานวิจัยเดิม [5]

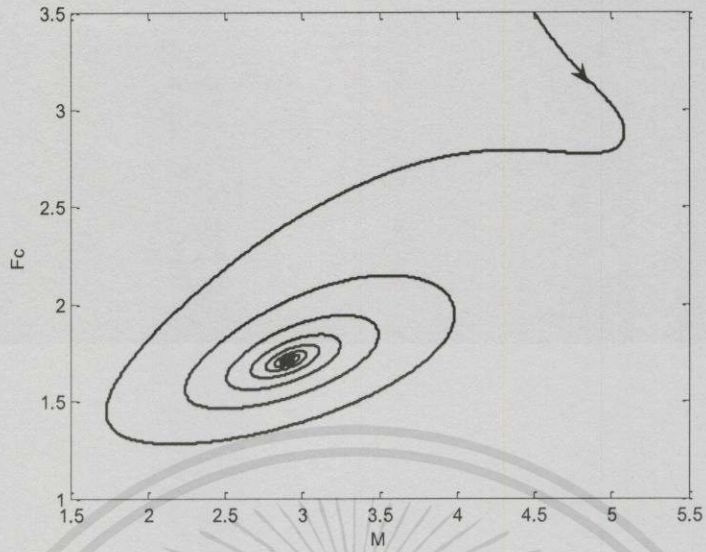


รูปที่ 4.56 จากวิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6

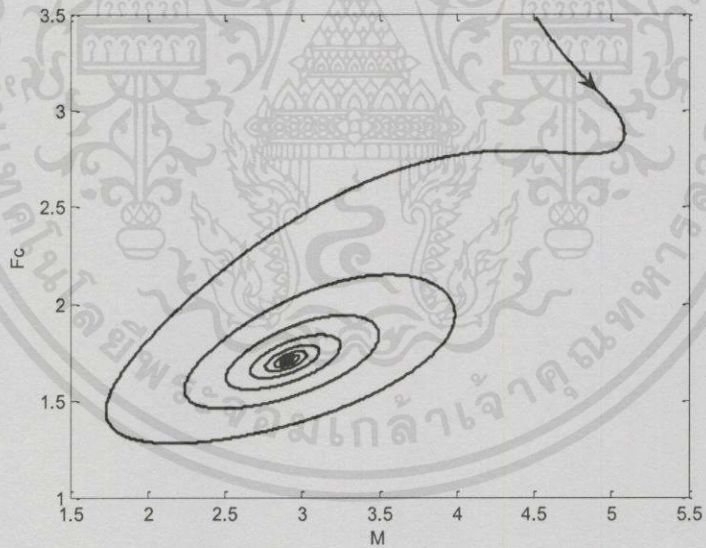
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_n ในช่วงเวลา 100 ชั่วโมงซึ่งทั้งสองกราฟนี้

มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



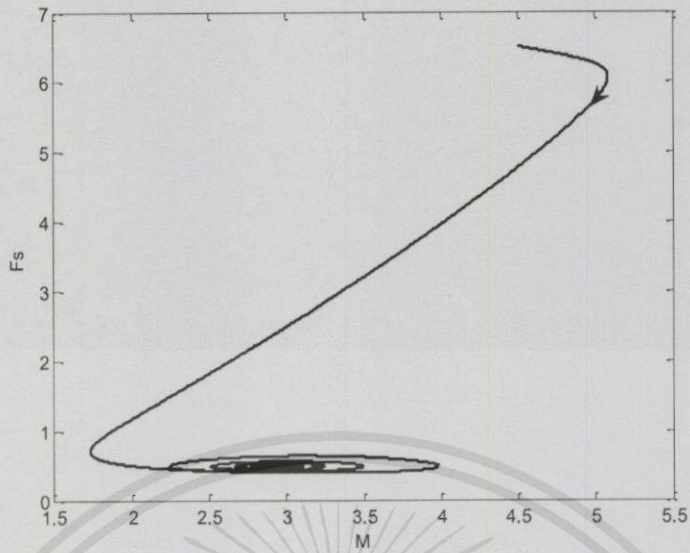
รูปที่ 4.57 จากงานวิจัยเดิม [5]



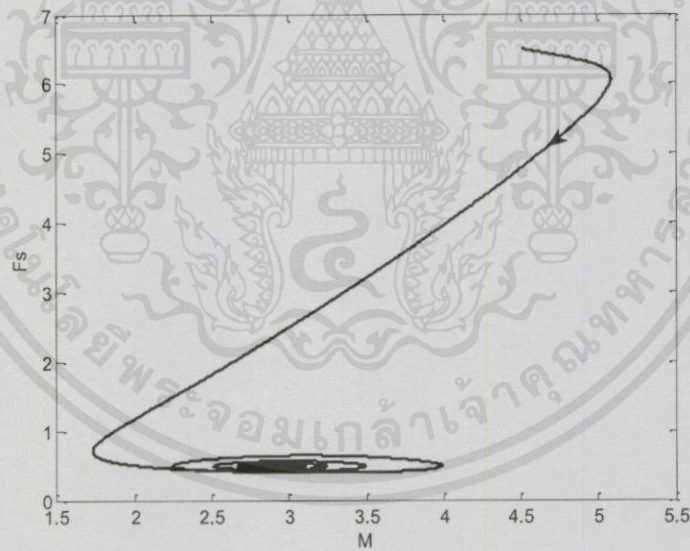
รูปที่ 4.58 จากวิธีรุ่งเงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_c ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



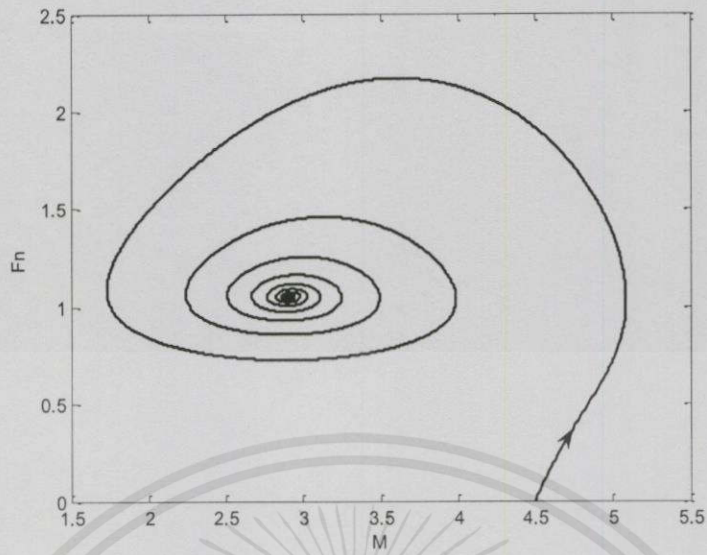
รูปที่ 4.59 จากงานวิจัยเดิม [5]



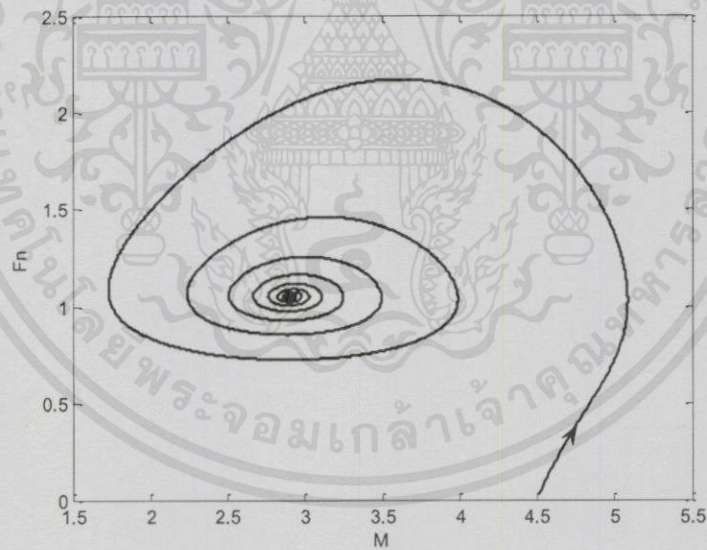
รูปที่ 4.60 จากวิธีรุ่งเคงตุตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



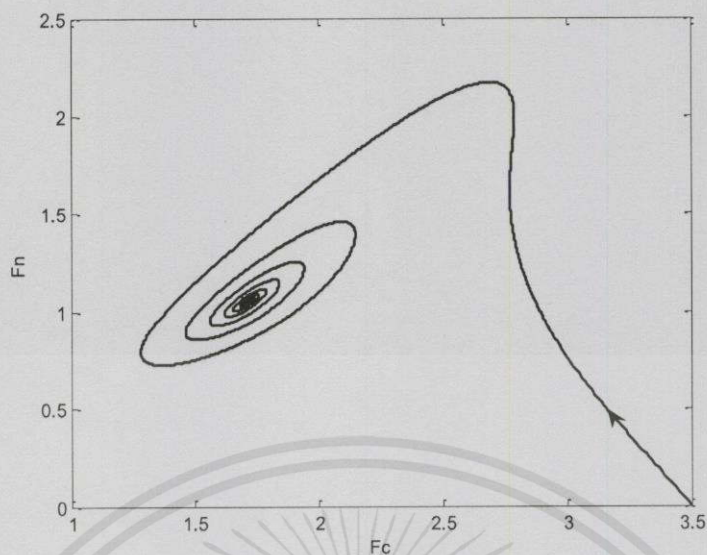
รูปที่ 4.61 จากงานวิจัยเดิม [5]



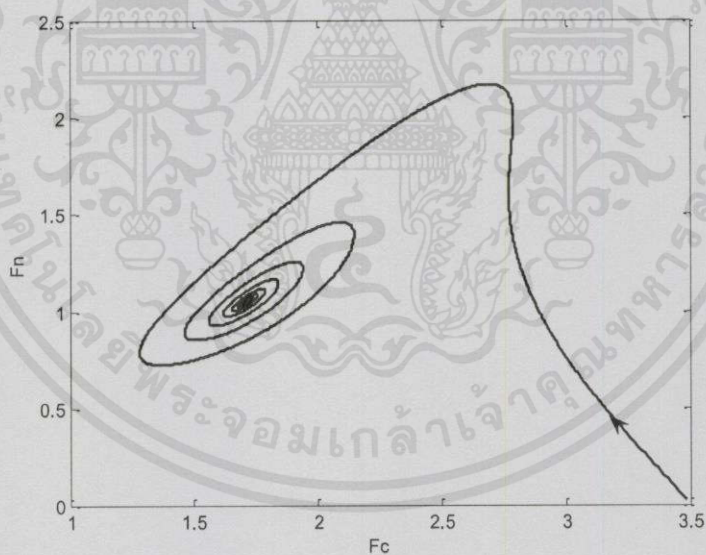
รูปที่ 4.62 จากวิธีรุงคงจุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.63 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.64 จากวิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6

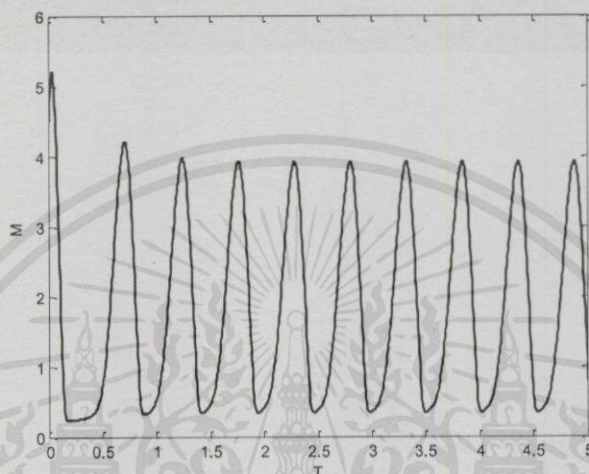
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

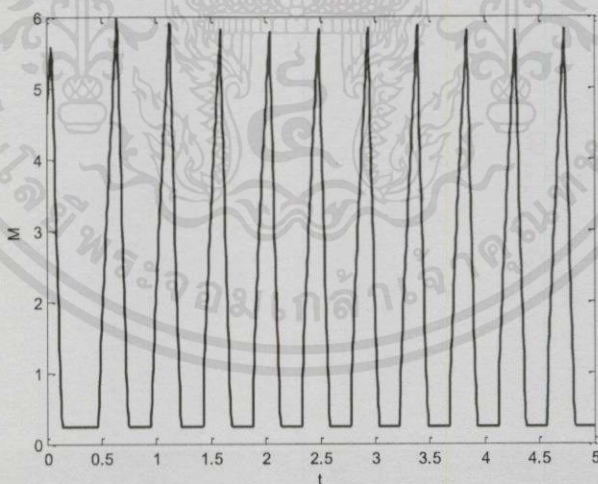
กรณีนี้ $L = 400$

กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 95.0, v_m = 470.0, v_d = 65.0, v_{dN} = 4.5, k_s = 5.0, k = 6.6, k_1 = 5.5, k_2 = 1.1, \\ K_m = 0.04, K_l = 0.6, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.1, n = 4, L = 400$$

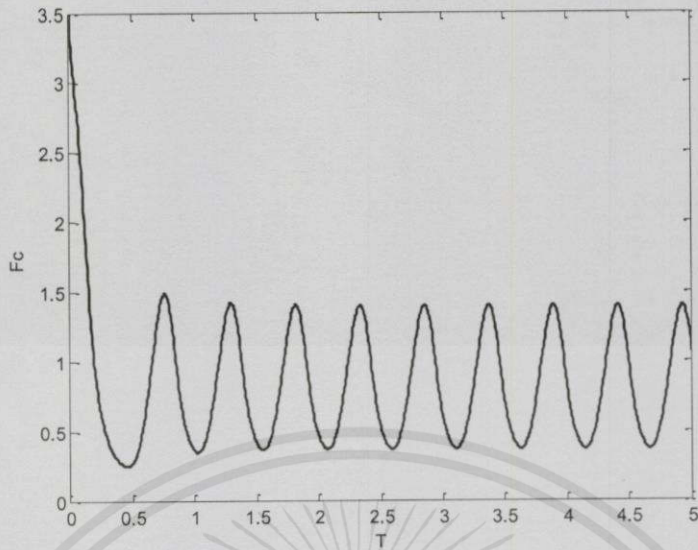


รูปที่ 4.65 จากงานวิจัยเดิม [5]

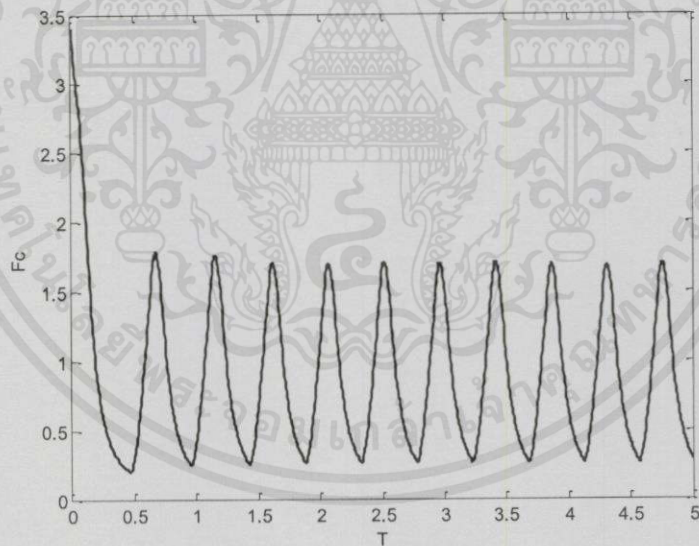


รูปที่ 4.66 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับบริการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ความคล้ายคลึงกัน แต่ลักษณะกราฟของวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีลักษณะเป็นเหลี่ยมๆ และความไม่ว่กรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอก, เมือหา, และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้สูงของกราฟนั้นมีความสูงมากกว่าวิธีเดิมอีกด้วย



รูปที่ 4.67 จากงานวิจัยเดิม [5]



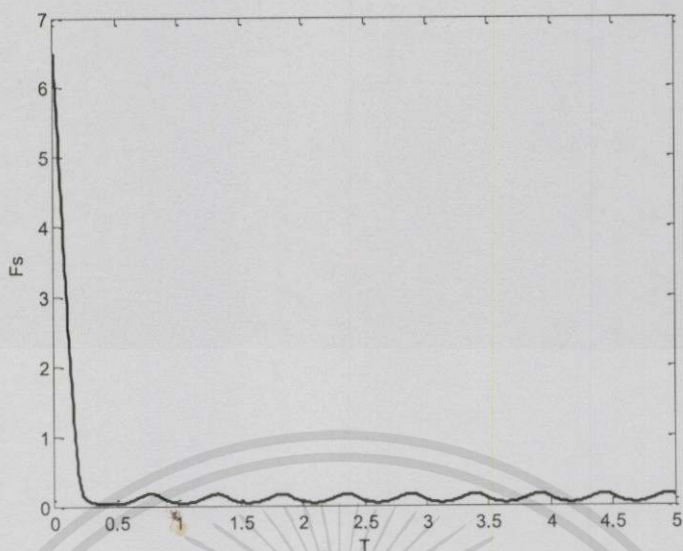
รูปที่ 4.68 จากวิธีรุ่งเคงตุดาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

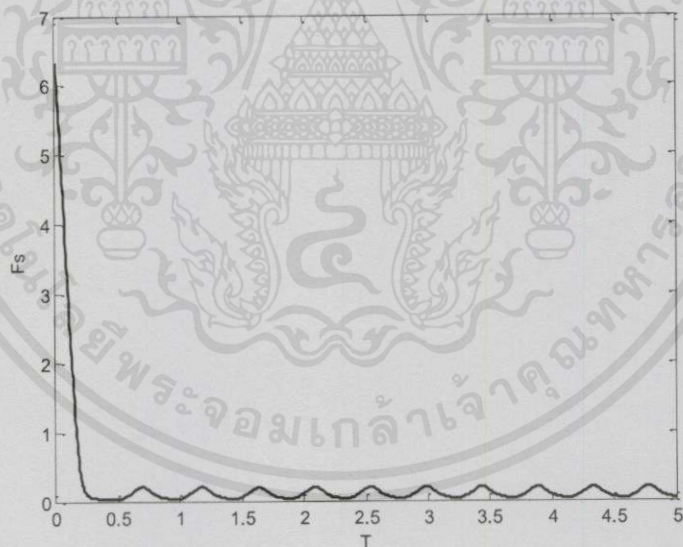
มีความคล้ายคลึงกัน แต่กราฟของวิธีรุ่งเคงตุดาอันดับ 6 นั้นมีความถี่มากกว่าและความสูงของกราฟก็

มากกว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.69 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.70 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

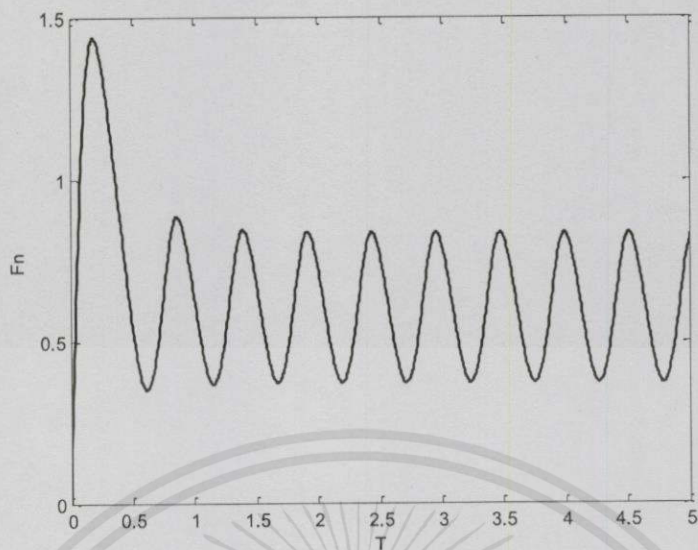
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมงซึ่งทั้งสองกราฟนี้มี

ความคล้ายคลึงกัน แต่กราฟของวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีความถี่มากกว่าและความสูงของกราฟก็

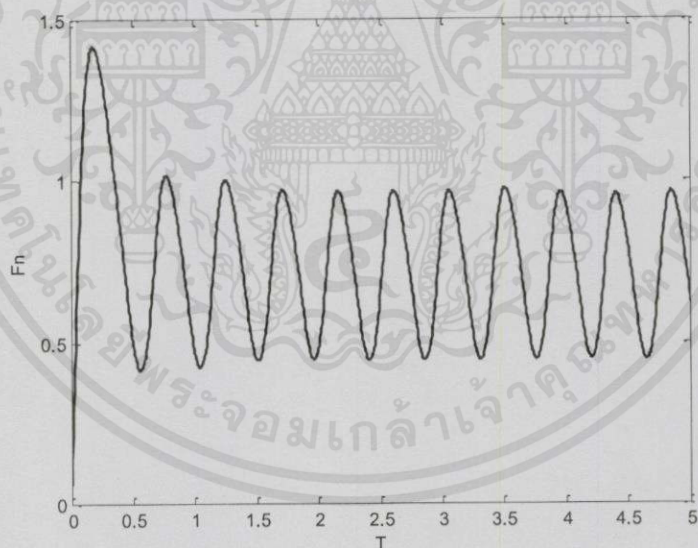
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

มากกว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.71 จากงานวิจัยเดิม [5]



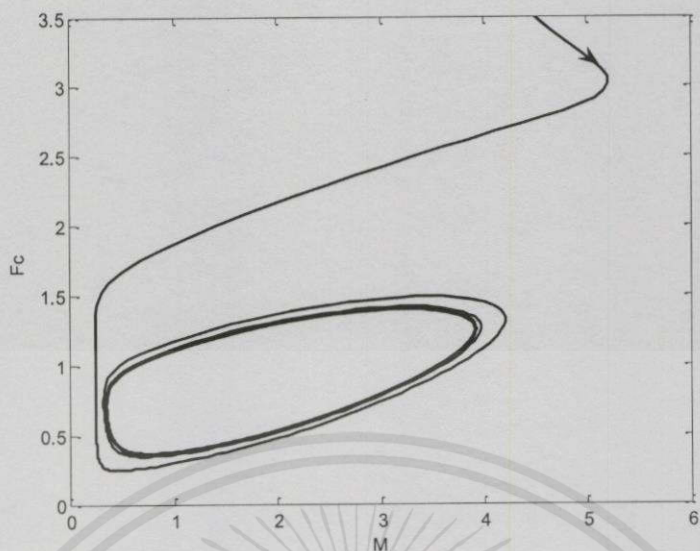
รูปที่ 4.72 จากวิธีรุ่งเงศุตตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N ในช่วงเวลา 5 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

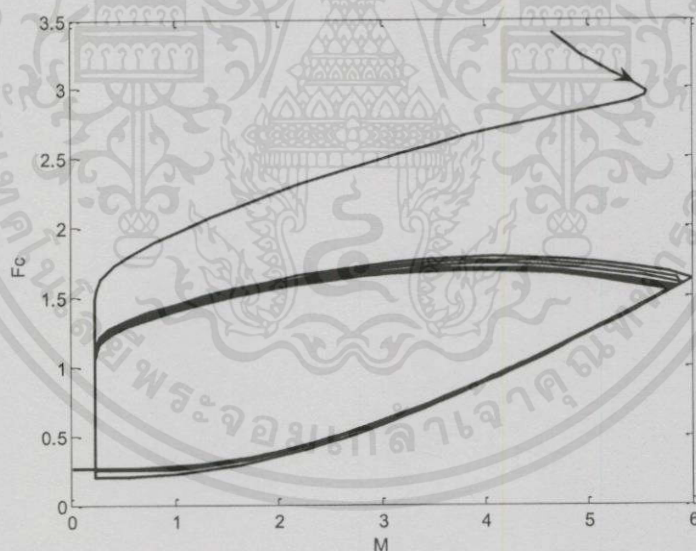
มีความคล้ายคลึงกัน แต่กราฟของวิธีรุ่งเงศุตตาอันดับ 6 นั้นมีความถี่มากกว่าและความสูงของกราฟก็

มากกว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.73 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.74 จากวิธีรุงคงดูดอันดับ 6

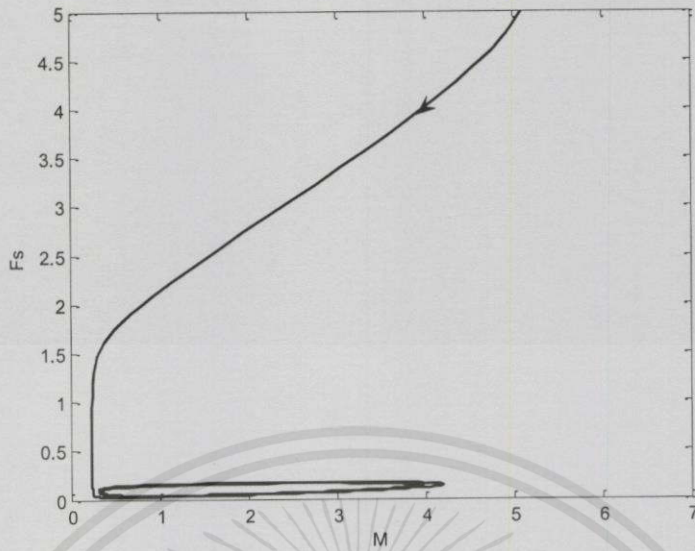
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_c ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

แต่วิธีรุงคงดูดอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม มีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธี

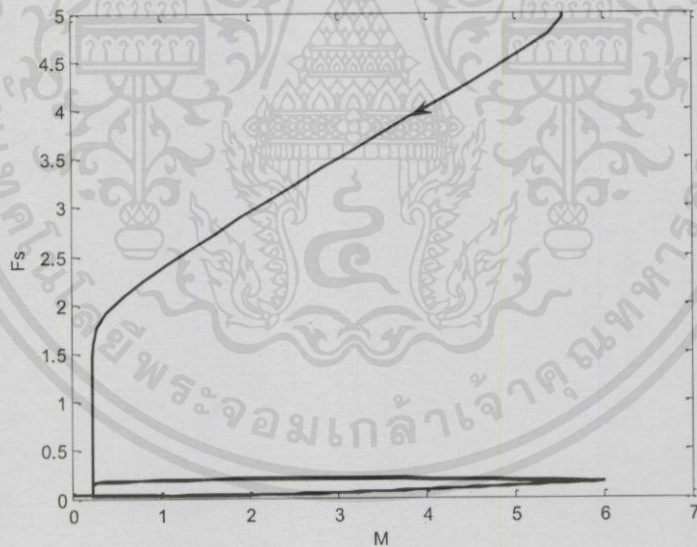
เดิมนี่เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เดิม และมีลักษณะการวนซ้ำที่ไม่เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.75 จากงานวิจัยเดิม [5]



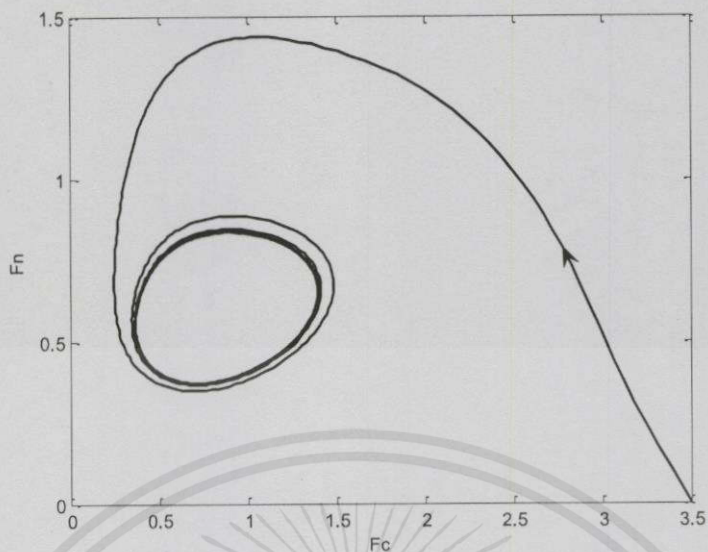
รูปที่ 4.76 จากวิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

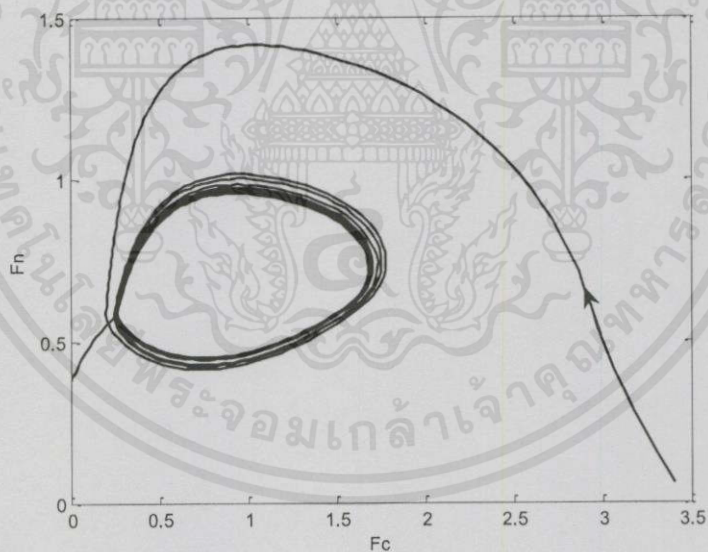
กัน แต่วิธีรุงคงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม และมีการเริ่มต้นไม่เท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.77 จากงานวิจัยเดิม [5]

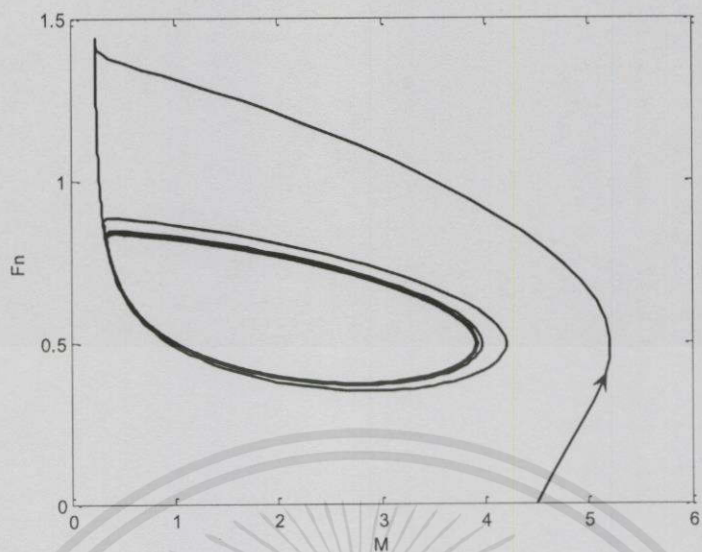


รูปที่ 4.78 จากวิธีรุงคงดูดอันดับ 6

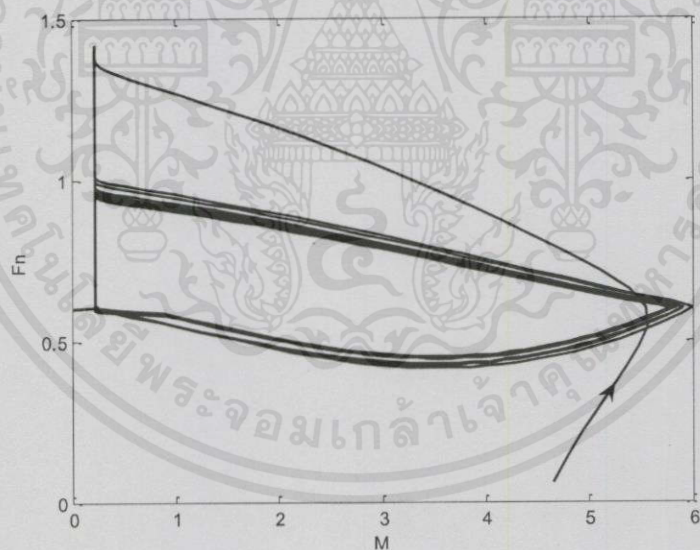
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_c และ F_n ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กัน แต่วิธีรุงคงดูดอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม มีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธีเดิม และมีการเริ่มต้นไม่เท่ากันเล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.79 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.80 จากวิธีรุ่งเงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

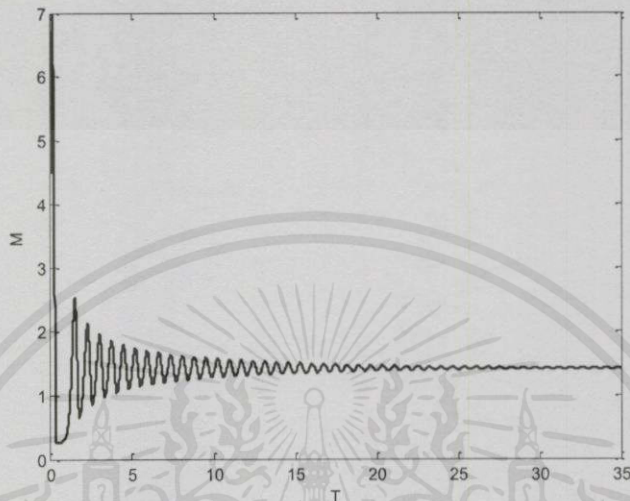
แต่วิธีรุ่งเงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม มีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธี

เดิม มีลักษณะการวนซ้ำที่ไม่เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม และมีการเริ่มต้นไม่เท่ากันเพียงเล็กน้อย

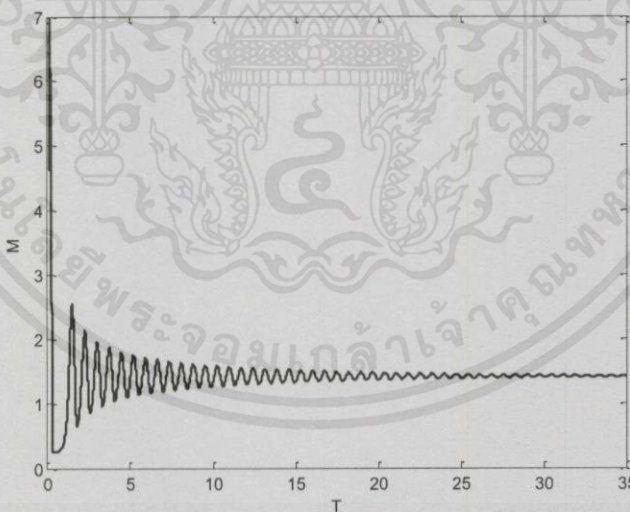
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 95.0, v_m = 470.0, v_d = 35.0, v_{dN} = 1.5, k_s = 5.0, k = 6.6, k_1 = 1.5, k_2 = 0.1, \\ K_m = 0.04, K_l = 0.6, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.1, n = 4, L = 400$$



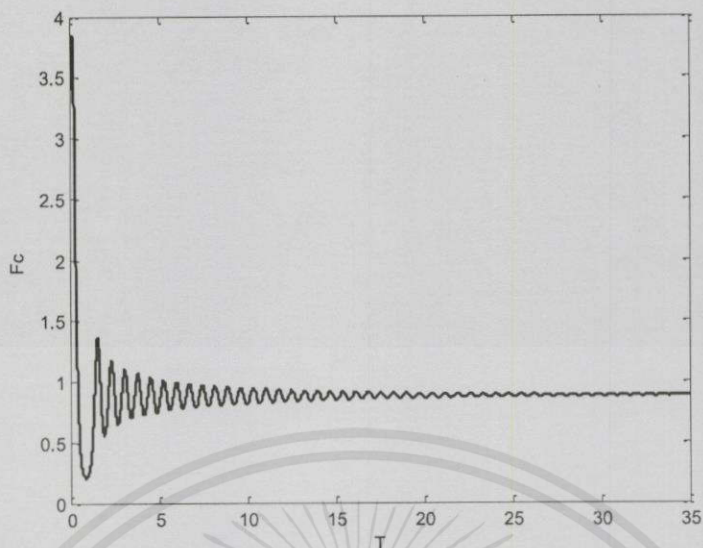
รูปที่ 4.81 จากงานวิจัยเดิม [5]



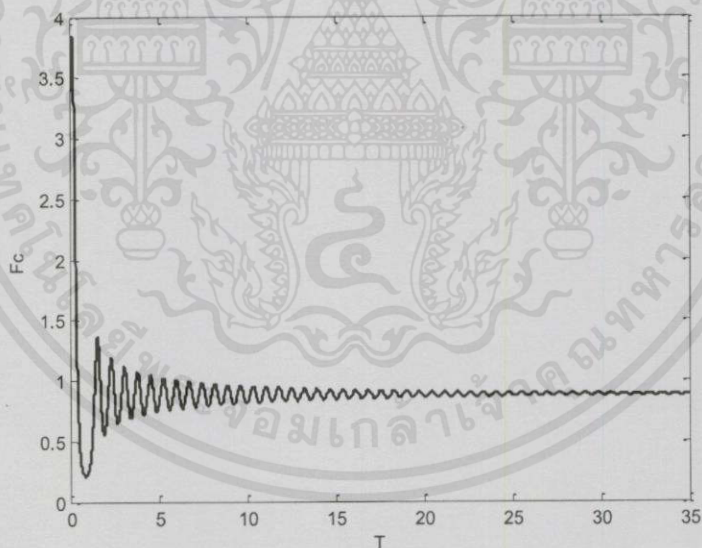
รูปที่ 4.82 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 35 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

เอกสารนี้ มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการเข้าสู่สถานะเสถียรช้ากว่าวิธีเดิมเพียง ๓ นาที
ไม่ว่ากรณีเล็กน้อย อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



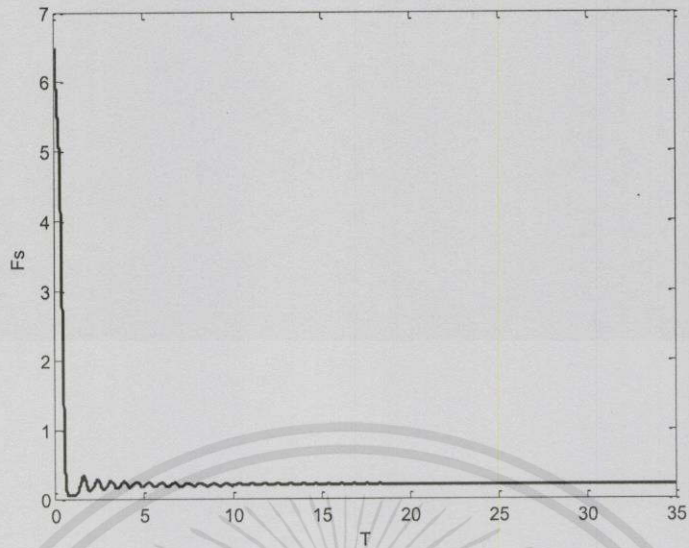
รูปที่ 4.83 จากงานวิจัยเดิม [5]



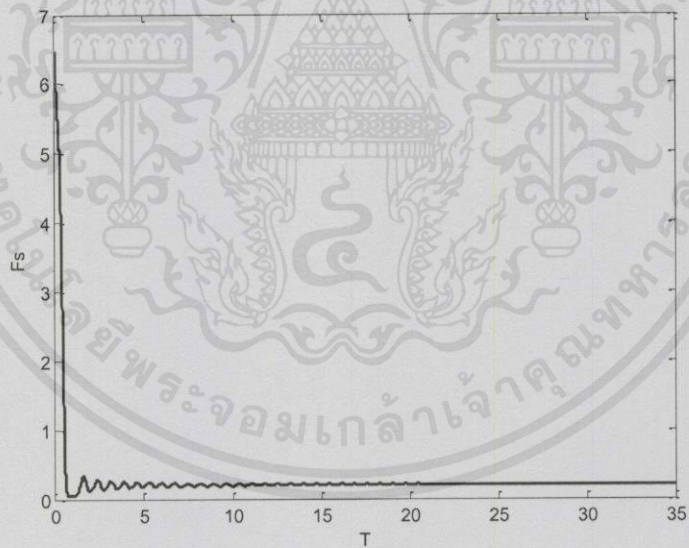
รูปที่ 4.84 จากวิธีรุ่งเคงตุตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 35 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเคงตุตาอันดับ 6 นั้นมีการเข้าสู่สภาวะเสถียรช้ากว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.85 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.86 จากวิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6

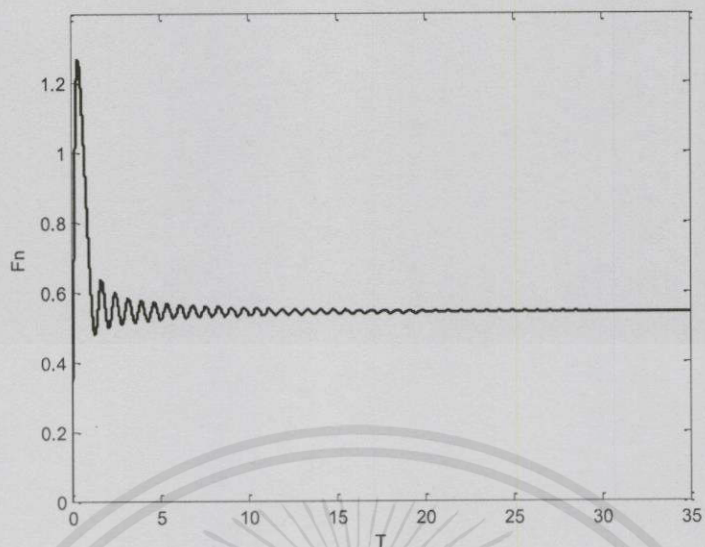
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 35 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีการเข้าสู่ภาวะเสถียรช้ากว่าวิธีเดิมเพียง

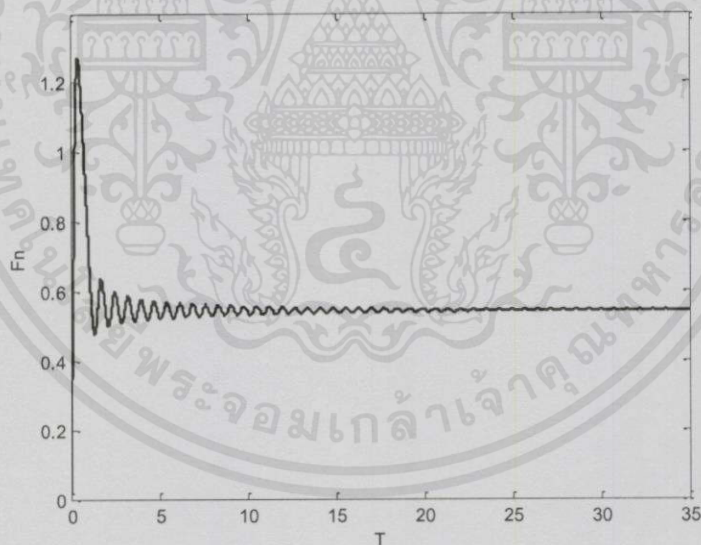
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.87 จากงานวิจัยเดิม [5]



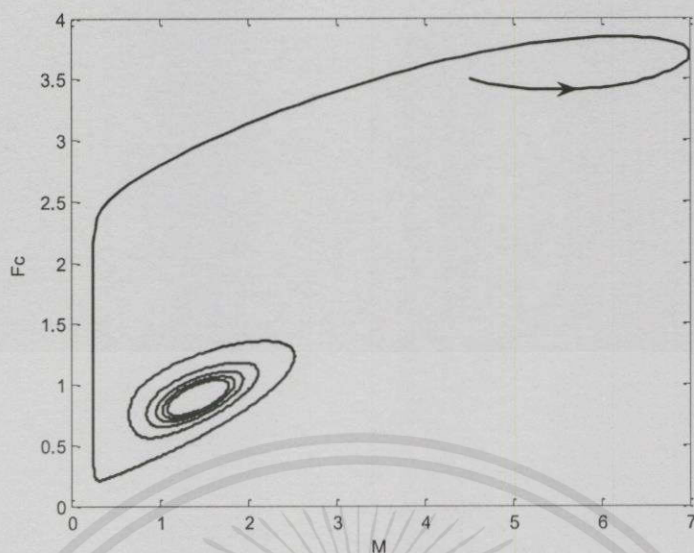
รูปที่ 4.88 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N ในช่วงเวลา 35 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

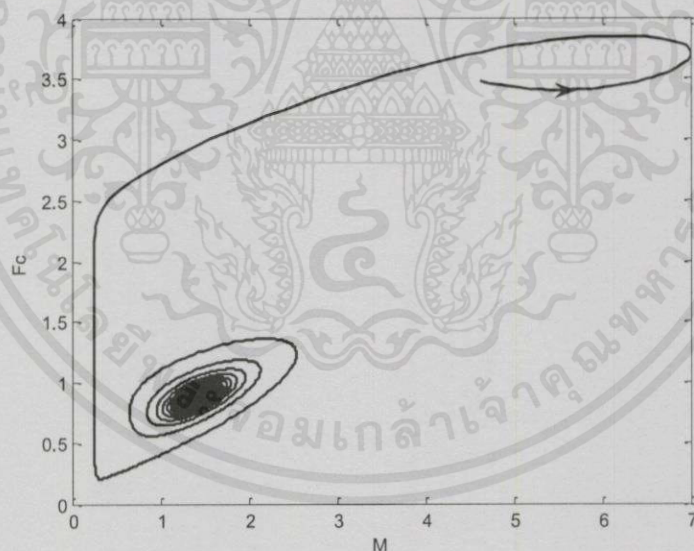
มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการเข้าสู่ภาวะเสถียรช้ากว่าวิธีเดิมเพียง

เล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.89 จากงานวิจัยเดิม [5]



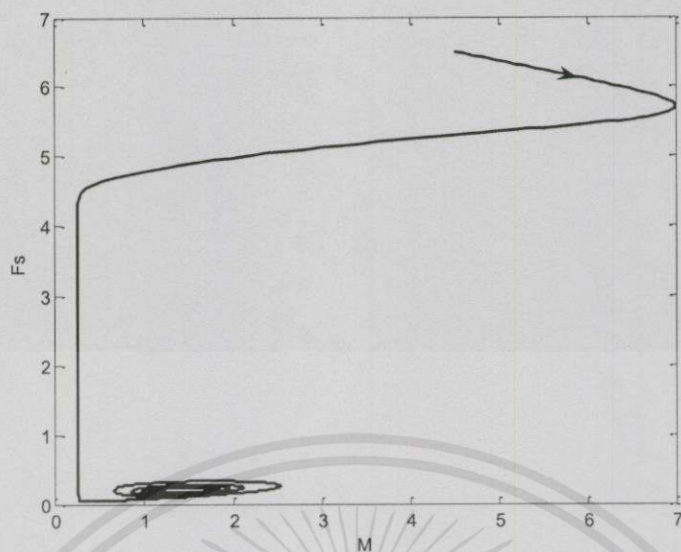
รูปที่ 4.90 จากวิธีรุงเงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_c ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

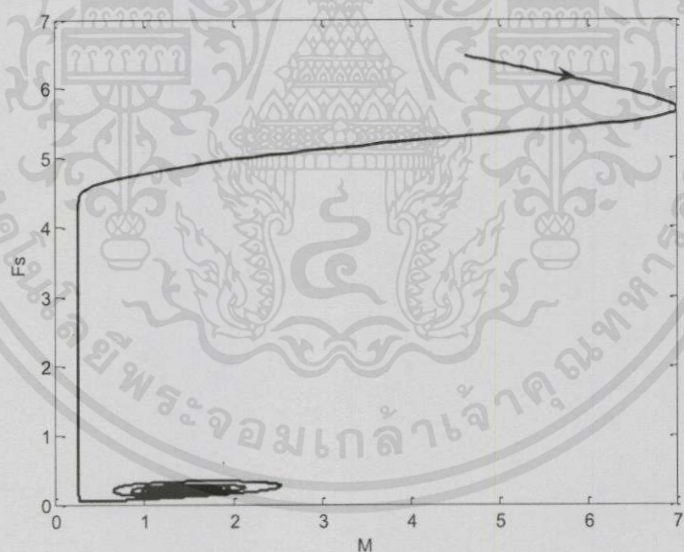
มาก แต่วิธีรุงเงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวนเข้าสู่สภาวะเสถียรชัดกว่าวิธีเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



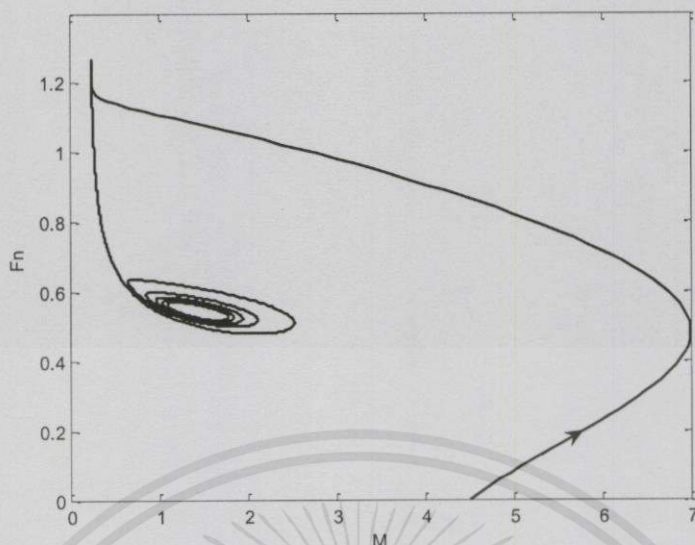
รูปที่ 4.91 จากงานวิจัยเดิม [5]



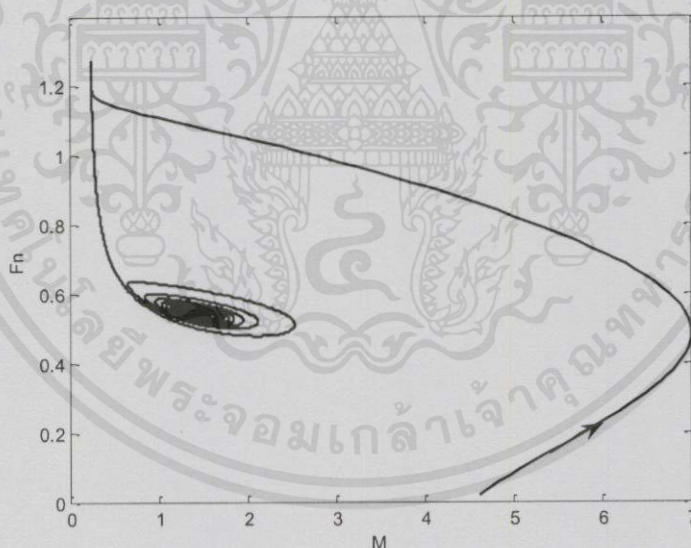
รูปที่ 4.92 จากวิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.93 จากงานวิจัยเดิม [5]

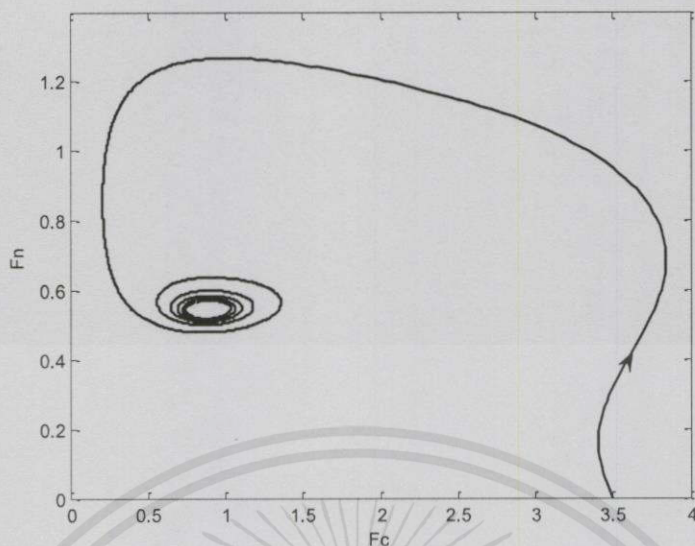


รูปที่ 4.94 จากวิธีรุงคุดตาอันดับ 6

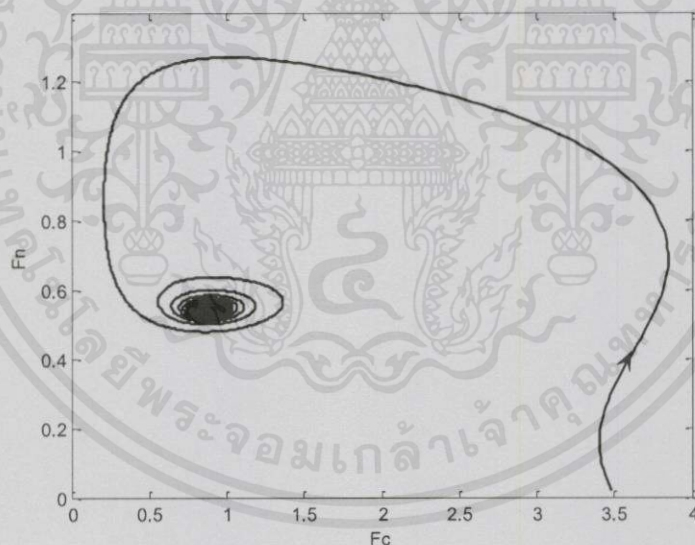
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กันมาก แต่วิธีรุงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวนเข้าสู่สภาวะเสถียรชัดกว่าวิธีเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.95 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.96 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

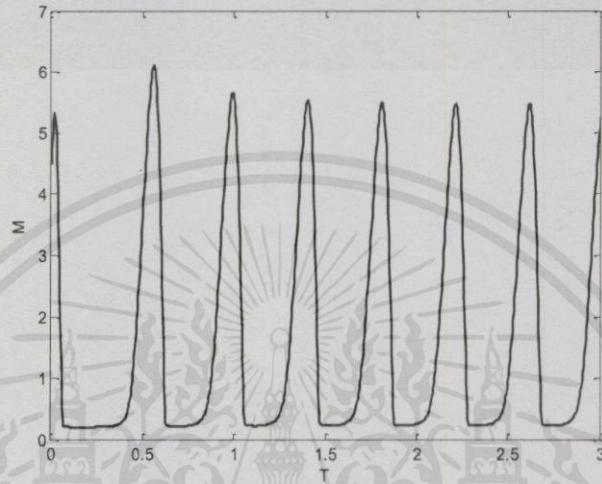
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N ซึ่งจากทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวนเข้าสู่สภาวะเสถียรชัดกว่าวิธีเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

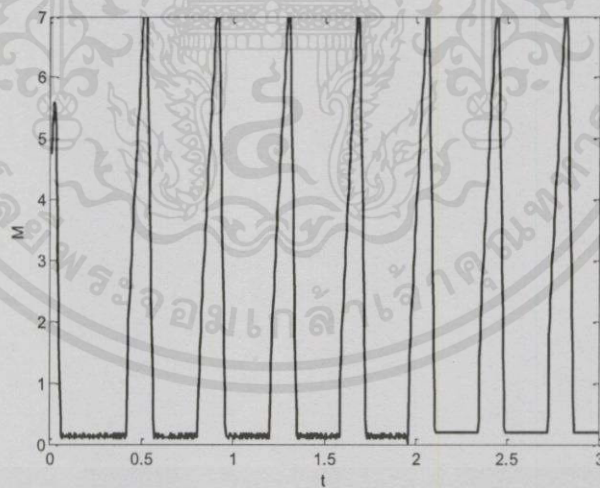
กรณีนี้ $L = 1000$

กรณีที่เป็น Limit Cycle มีค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$v_s = 250.0, v_m = 1200.0, v_d = 150.0, v_{dN} = 6.5, k_s = 5.5, k = 3.5, k_1 = 6.0, k_2 = 1.0, \\ K_m = 0.04, K_l = 0.4, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.05, n = 4, L = 1000$$



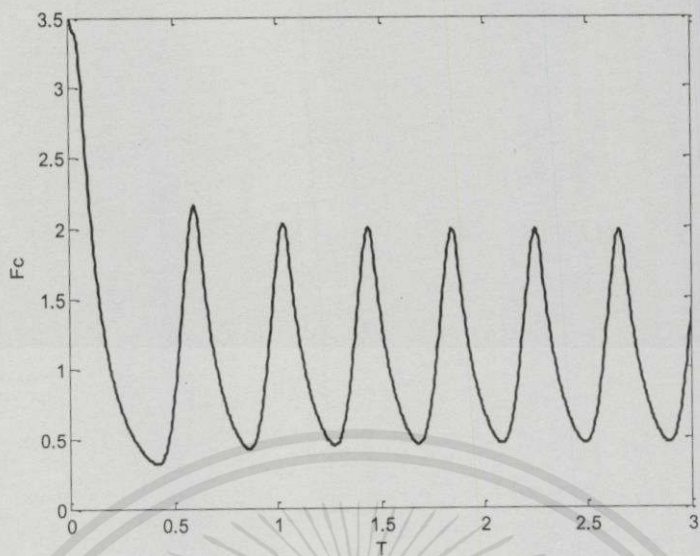
รูปที่ 4.97 จากงานวิจัยเดิม [5]



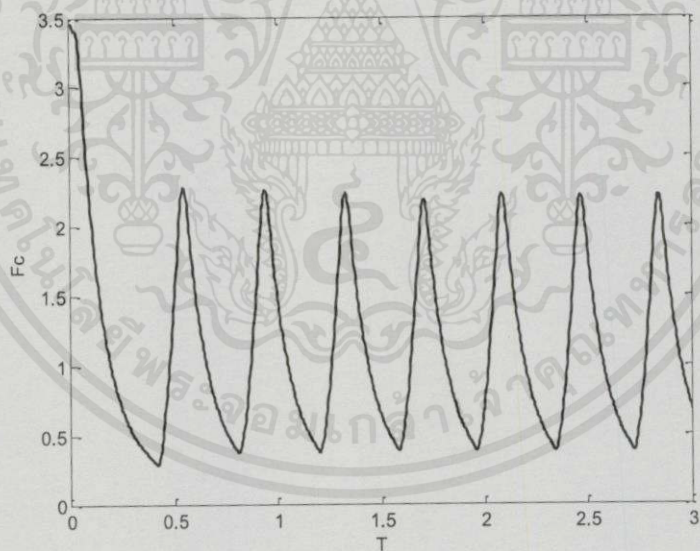
รูปที่ 4.98 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 3 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

มีความคล้ายคลึงกัน แต่ลักษณะกราฟของวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีลักษณะเป็นเหลี่ยมๆ และความสูงของกราฟนั้นมีความสูงมากกว่าวิธีเดิมอีกด้วย



รูปที่ 4.99 จากงานวิจัยเดิม [5]

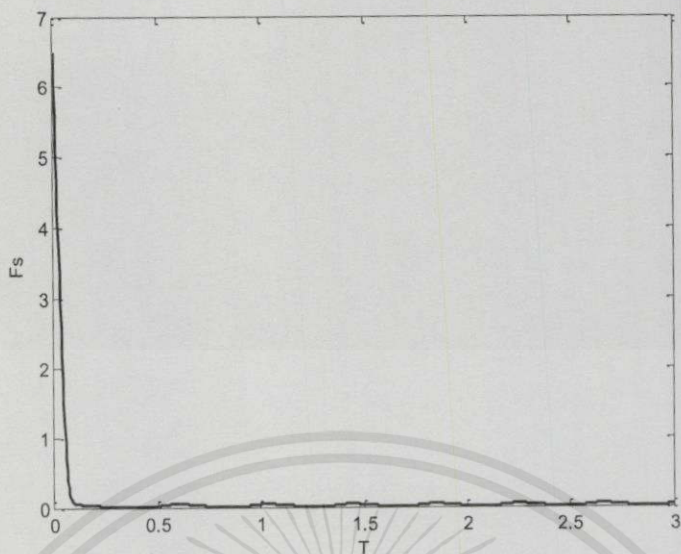


รูปที่ 4.100 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

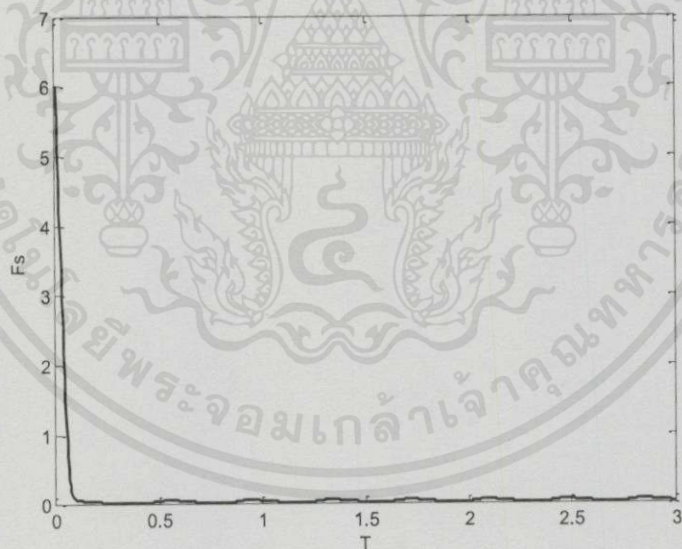
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 3 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มี

ความคล้ายคลึงกัน แต่กราฟของวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีความถี่มากกว่าและความสูงของกราฟก็
 เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกร ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประ โยชน์ด้านการค้า
 มากกว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.101 จากงานวิจัยเดิม [5]



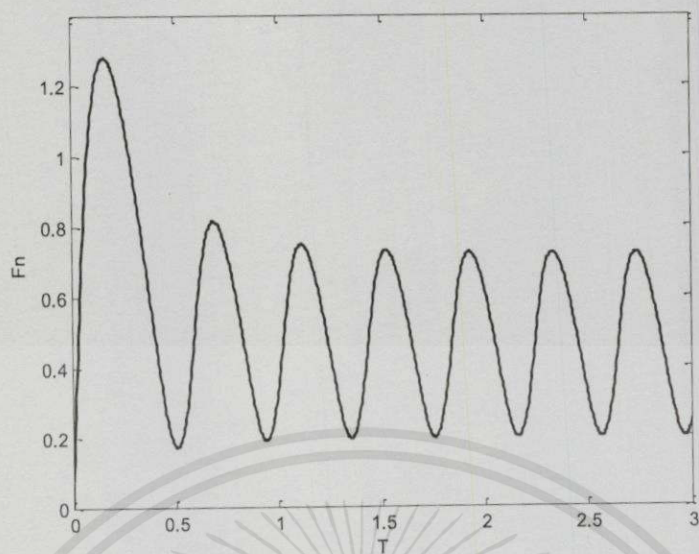
รูปที่ 4.102 จากวิธีรุ่งเคงตุตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 3 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มี

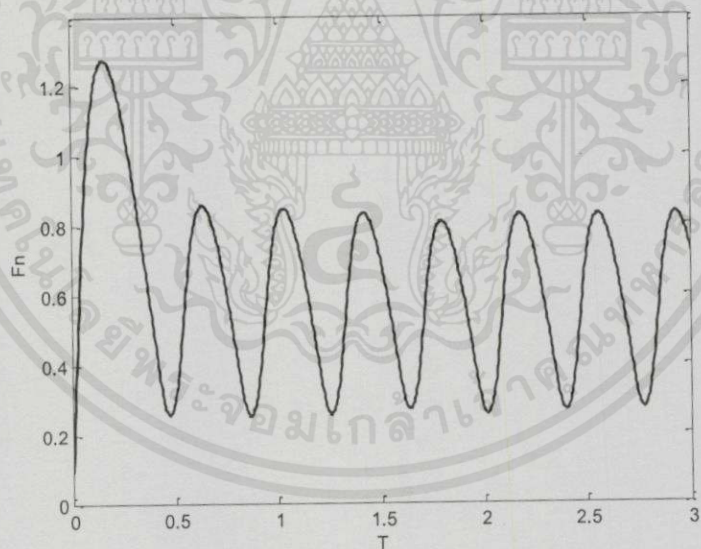
ความคล้ายคลึงกันมาก แต่กราฟทั้งสองมีค่าเริ่มต้นต่างกันเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.103 จากงานวิจัยเดิม [5]



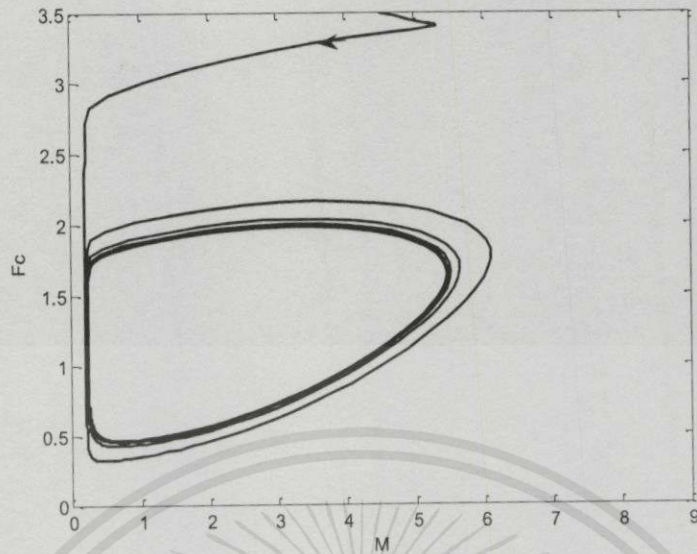
รูปที่ 4.104 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N ในช่วงเวลา 3 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มี

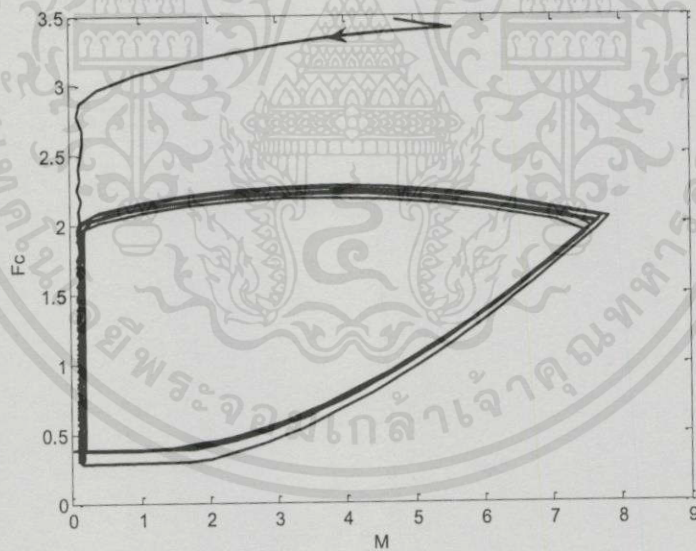
ความคล้ายคลึงกัน แต่กราฟของวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีความถี่มากกว่าวิธีเดิมเพียงเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



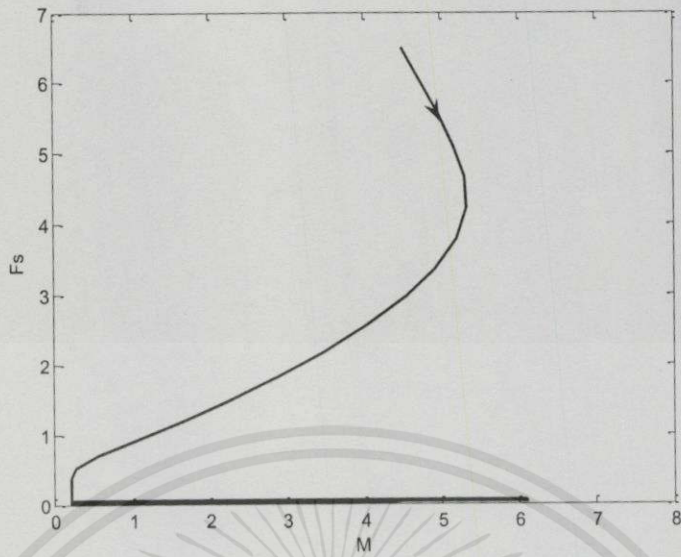
รูปที่ 4.105 จากงานวิจัยเดิม [5]



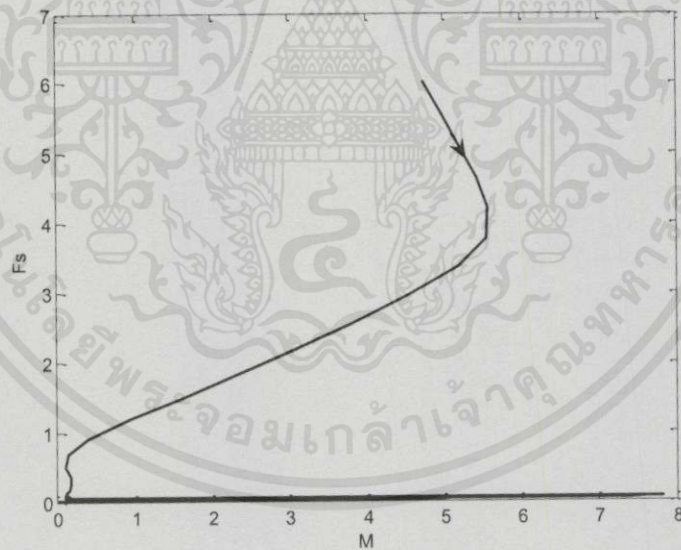
รูปที่ 4.106 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_c ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม มีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธี
 เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับบริการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 เดิม และมีลักษณะการวนซ้ำที่ไม่เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทางสน. ออกทางห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.107 จากงานวิจัยเดิม [5]



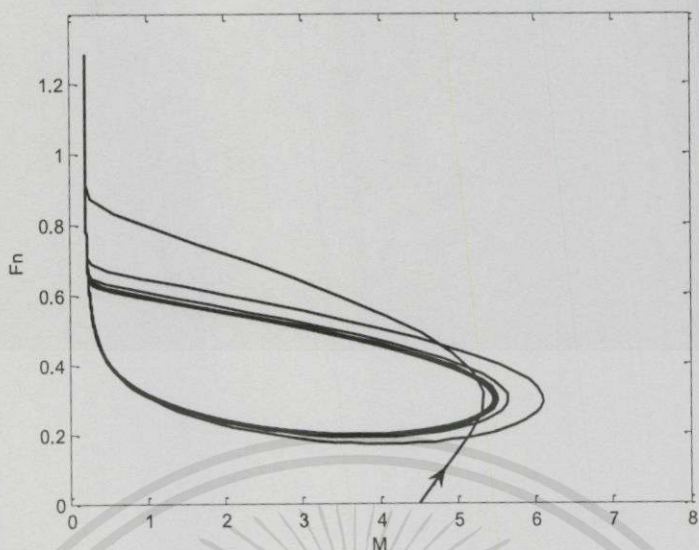
รูปที่ 4.108 จากวิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

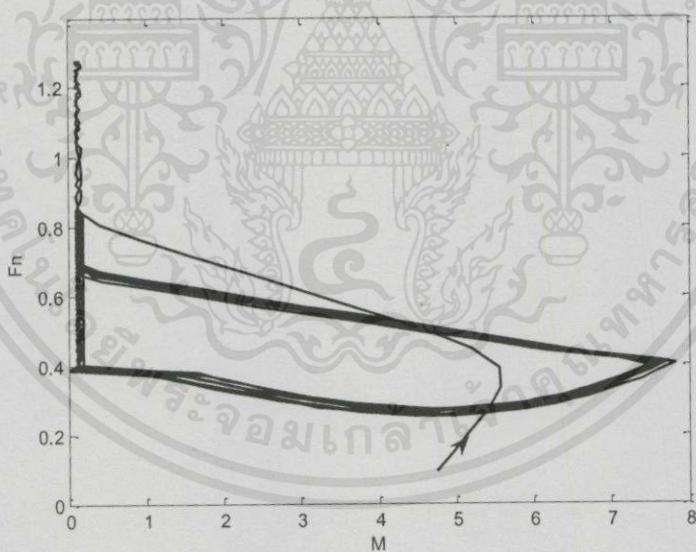
แต่วิธีรุ่งเงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม และมีการเริ่มต้นไม่เท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น "ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.109 จากงานวิจัยเดิม [5]



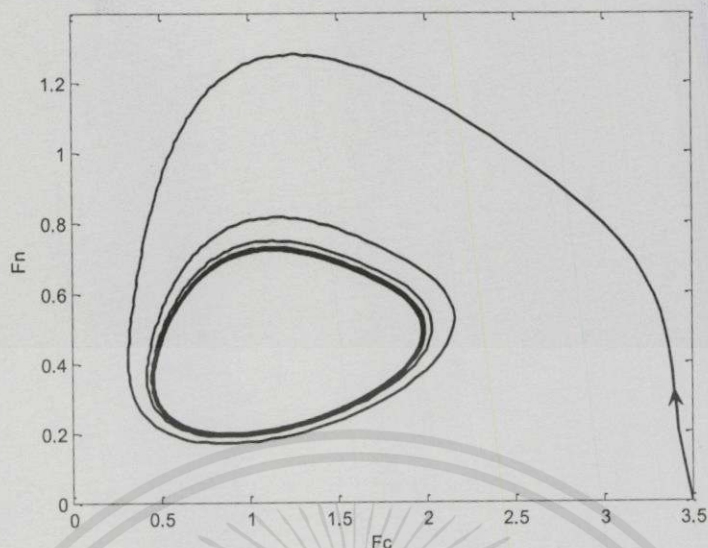
รูปที่ 4.110 จากวิธีรุ่งเงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน

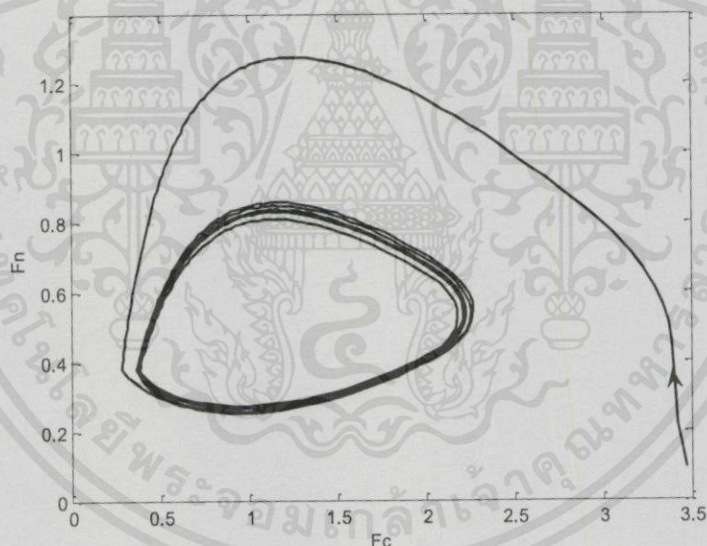
แต่วิธีรุ่งเงคุดตาอันดับ 6 นั้นมีการวิ่งของเส้นกราฟที่กว้างกว่าวิธีเดิม มีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธี

เดิม มีลักษณะการวนซ้ำที่ไม่เป็นวงรีเท่าวิธีเดิม และมีการเริ่มต้นไม่เท่ากันเพียงเล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.111 จากงานวิจัยเดิม [5]



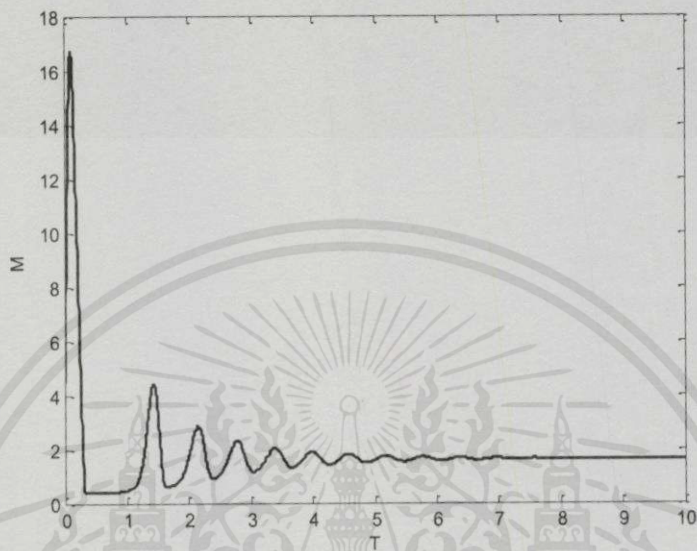
รูปที่ 4.112 จากวิธีรุงงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_c และ F_n ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกัน แต่วิธีรุงงศุดตาอันดับ 6 นั้นมีการเข้าสู่การวนซ้ำเร็วกว่าวิธีเดิม และมีการเริ่มต้นไม่เท่ากันเล็กน้อย

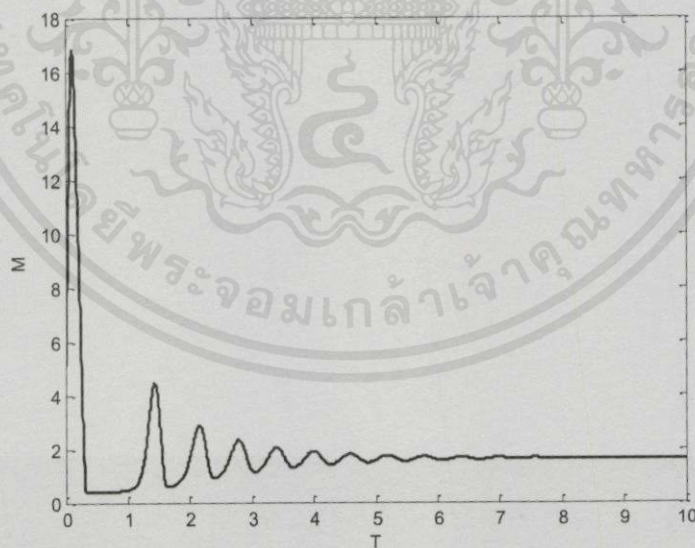
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น "ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น" อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่เป็น Stable มีค่าพารามิเตอร์คือ

$$v_s = 250.0, v_m = 1100.0, v_d = 150.0, v_{dN} = 6.5, k_s = 5.5, k = 3.5, k_1 = 1.0, k_2 = 1.0, \\ K_m = 0.04, K_l = 0.4, K_d = 1.0, K_{dN} = 1.5, n = 4, L = 1000$$

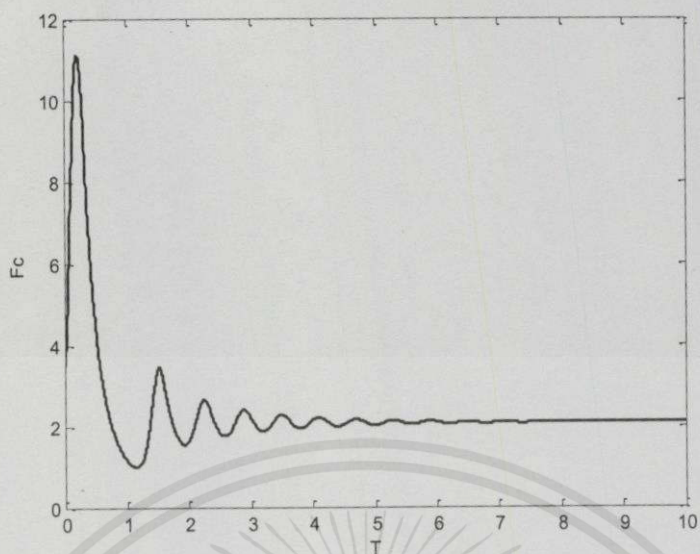


รูปที่ 4.113 จากงานวิจัยเดิม [5]

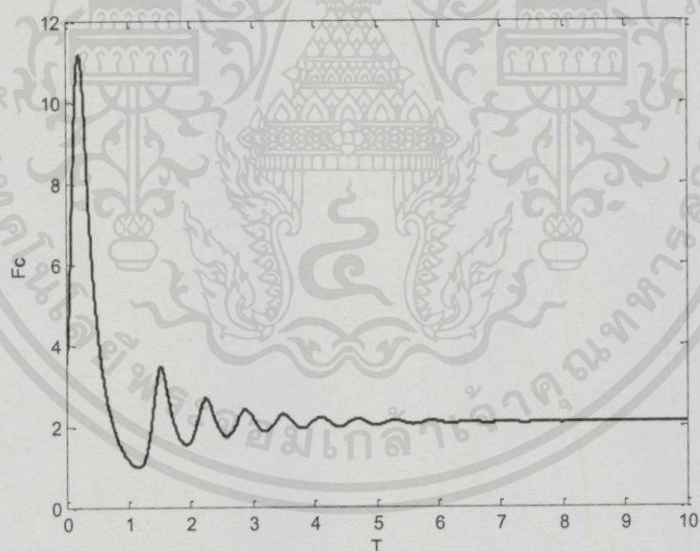


รูปที่ 4.114 จากวิธีรุงคงดูดอันดับ 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ไปใช้ประโยชน์ในการค้า
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ M ในช่วงเวลา 10 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
มีความคล้ายคลึงกันมาก



รูปที่ 4.115 จากงานวิจัยเดิม [5]



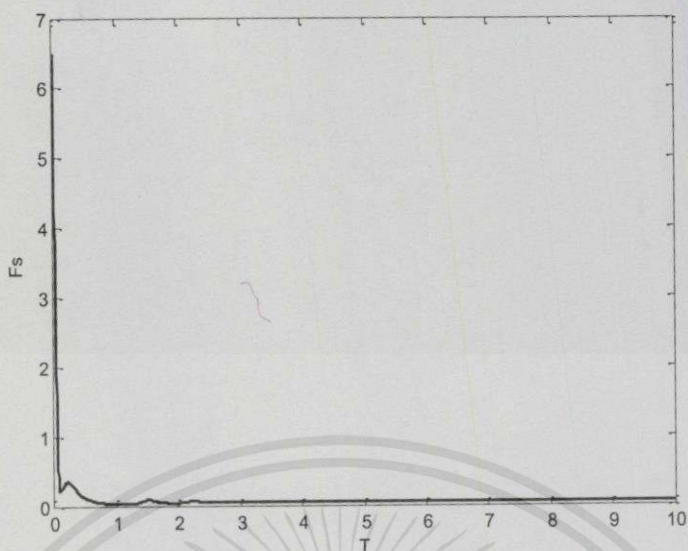
รูปที่ 4.116 จากวิธีรุ่งเคงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_c ในช่วงเวลา 10 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟ

นี้มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.117 จากงานวิจัยเดิม [5]

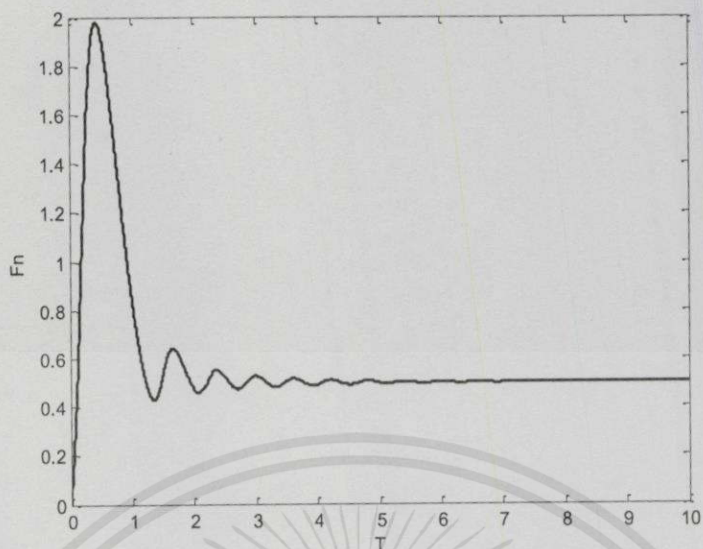


รูปที่ 4.118 จากวิธีรุ่งงศุตตาอันดับ 6

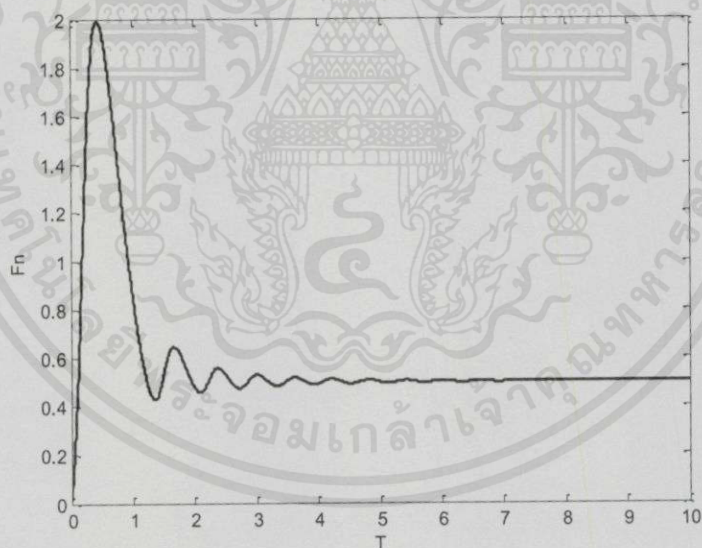
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_s ในช่วงเวลา 10 ชั่วโมง ซึ่งทั้งสองกราฟนี้

มีความคล้ายคลึงกันมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.119 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.120 จากวิธีรุ่งเคงตุตาอันดับ 6

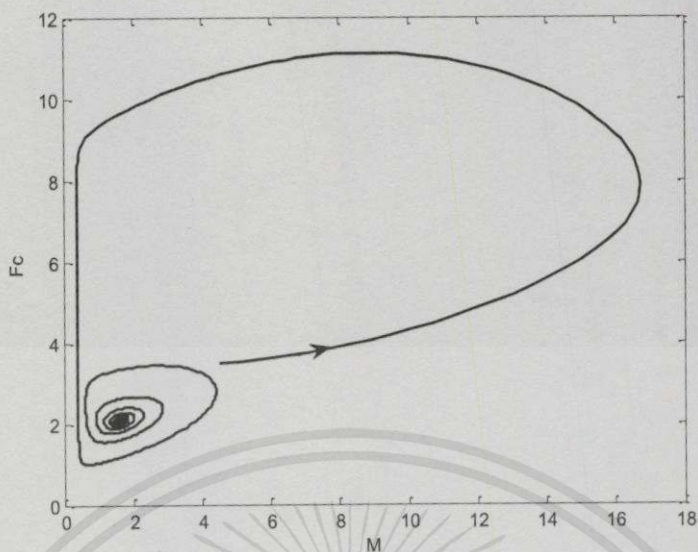
จากกราฟแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ F_N ในช่วงเวลา 10 ชั่วโมงซึ่งทั้งสองกราฟนี้

มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่วิธีรุ่งเคงตุตาอันดับ 6 นั้นมีการเข้าสู่ภาวะเสถียรช้ากว่าวิธีเดิมเพียง

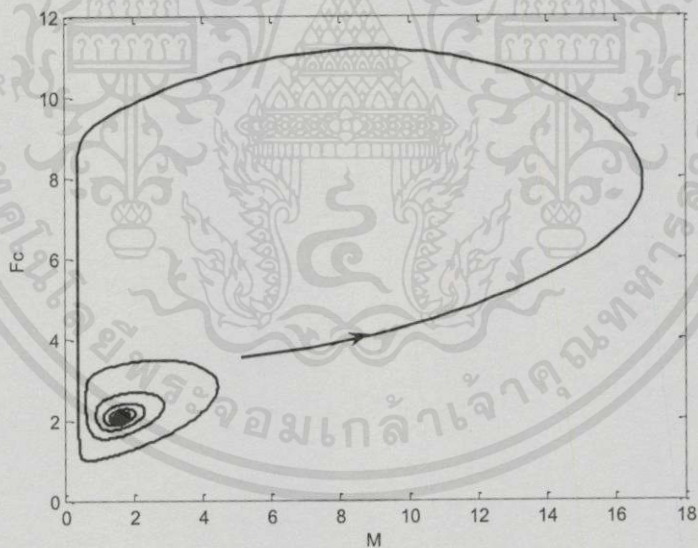
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เล็กน้อย

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.121 จากงานวิจัยเดิม [5]



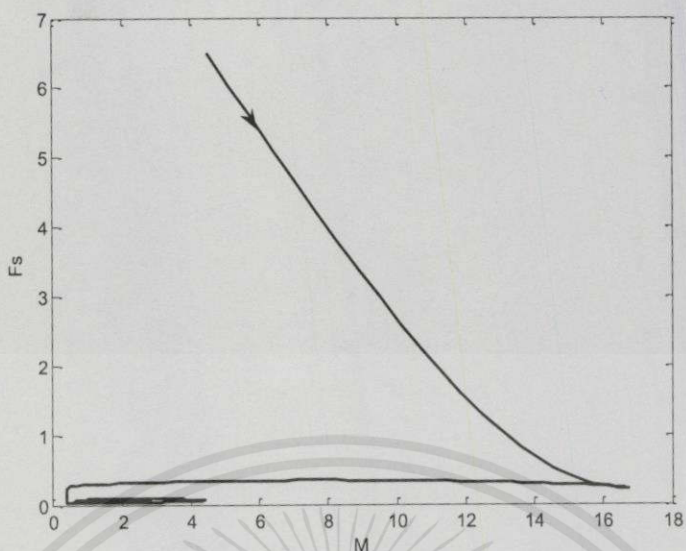
รูปที่ 4.122 จากวิธีรุ่งศตออันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_c ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

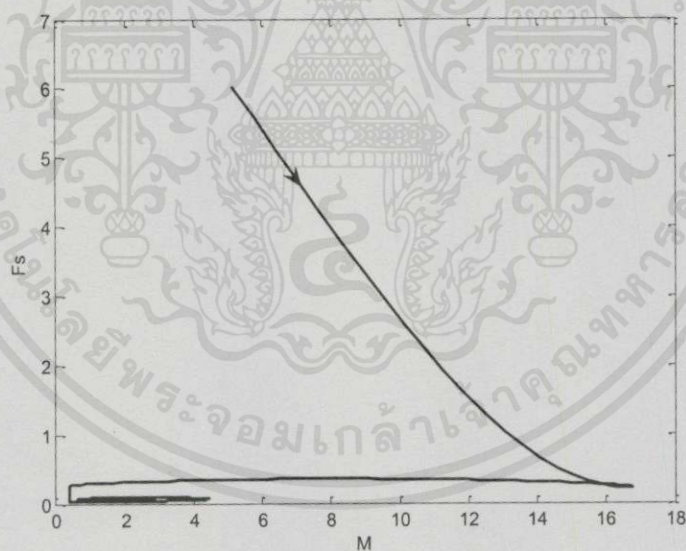
กันมาก แต่การเริ่มต้นของสองวิธีนี้แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.123 จากงานวิจัยเดิม [5]



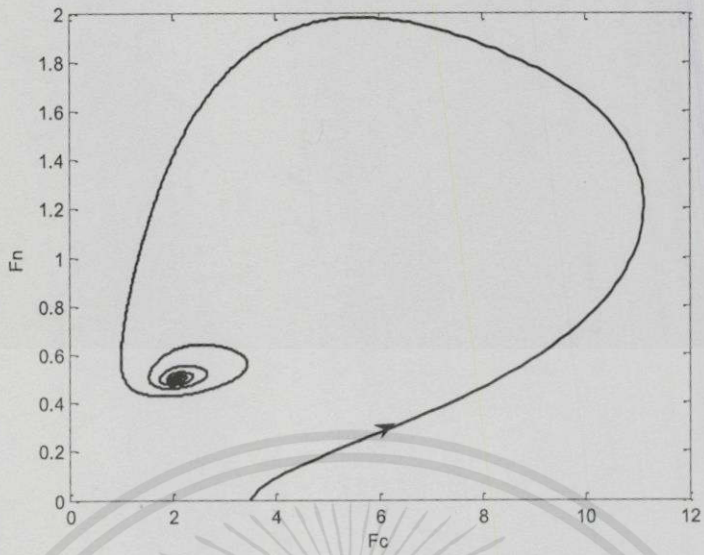
รูปที่ 4.124 จากวิธีรุ่งคงคุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_s ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

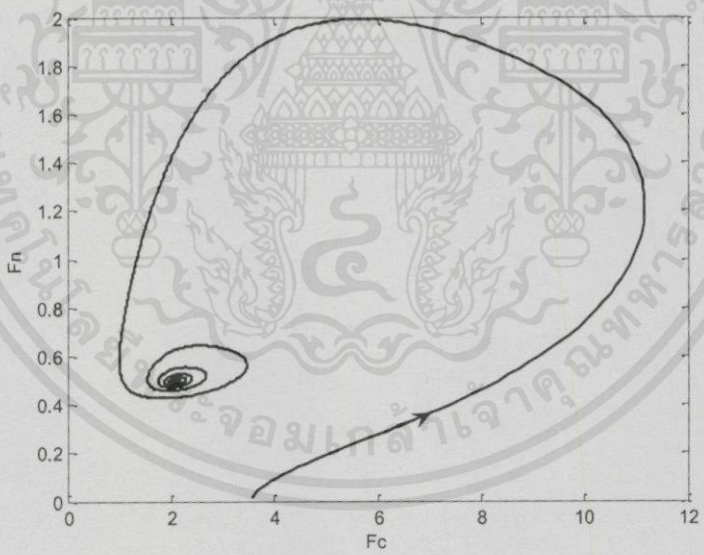
กันมาก แต่การเริ่มต้นของสองวิธีนี้แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.125 จากงานวิจัยเดิม [5]

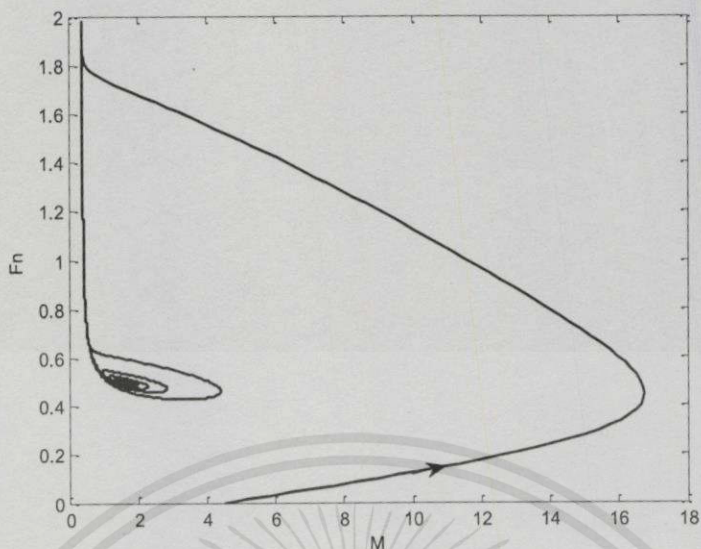


รูปที่ 4.126 จากวิธีรุงคงดูดอันดับ 6

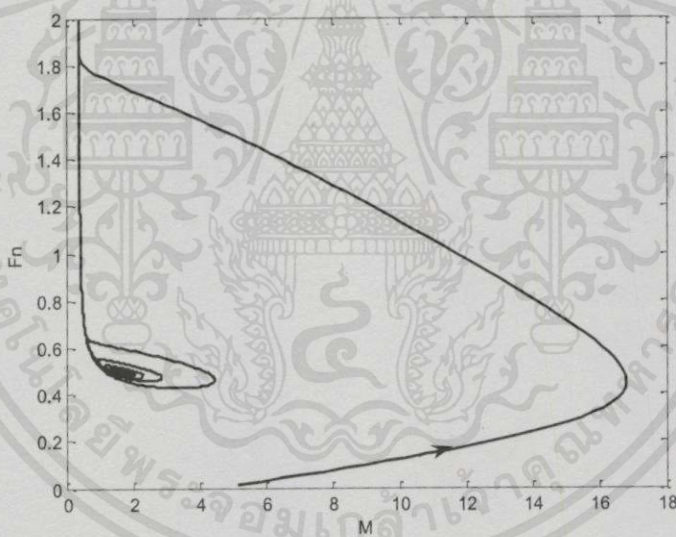
จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ F_C และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึง

กันมาก แต่การเริ่มต้นของสองวิธีนี้แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.127 จากงานวิจัยเดิม [5]



รูปที่ 4.128 จากวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6

จากกราฟแสดงถึงกราฟของผลเฉลยของ M และ F_N ซึ่งทั้งสองกราฟนี้มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่การเริ่มต้นของสองวิธีนี้แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย

จากการศึกษางานวิจัยแบบจำลองคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรานิวโรสปอร์รา แล้วนำ

เอกสารนี้ที่ผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับโดยการสร้างกราฟจากงานวิจัยเดิมและวิธีรุ่งงศุดตาอันดับ 6 ซึ่งในบทความการคำนวณว่ากรณีต่อไปจะเป็นการสรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะอย่างอึ้งถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรานิวโรสפורราพบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเกิดเชื้อรานิวโรสפורรา สามารถเขียนได้เป็นระบบสมการทางคณิตศาสตร์ด้วยระบบสมการไม่เชิงเส้นที่ประกอบไปด้วยสมการที่ (3.1) ถึงสมการที่ (3.4) และพบว่าสามารถสรุปเป็นขั้นตอนการทำวิจัยได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำระบบสมการที่หาจุดสมดุล ซึ่งมีค่าดังนี้

$(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ เป็นจุดสมดุล (Equilibrium Point) โดยที่ $F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}$ และ M_0 มีค่าเท่ากับสมการ (3.18), (3.20), (3.17) และ (3.21)

ขั้นที่ 2 นำระบบสมการที่ได้ไปวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีบททางสมการเชิงอนุพันธ์ และใช้ทฤษฎีบทของอนุกรมเทเลอร์หาเงื่อนไขต่างๆ ของพารามิเตอร์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ในสถานะเสถียรและสถานะวงกลมิต

ขั้นที่ 3 จากขั้นตอนที่ 2 เพื่อเป็นการยืนยันเงื่อนไขต่างๆ ของพารามิเตอร์ทั้ง 2 สภาวะ พบว่างานวิจัยได้นำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาใช้เพื่อยืนยันแล้วแสดงผลให้ชัดเจนด้วยกราฟ

นอกจากการศึกษางานวิจัยนี้แล้ว ทางคณะผู้จัดทำได้ทำเพิ่มในส่วนของการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยใช้การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้รุ่นงศุดตาอันดับ 6 พบว่า จากการเปรียบเทียบกราฟระหว่างวิธีของงานวิจัยเดิมและวิธีรุ่นงศุดตาอันดับ 6 จะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีนี้มีการแสดงผลด้วยกราฟที่คล้ายกันมาก แต่วิธีรุ่นงศุดตาอันดับ 6 มีบางกราฟที่ละเอียดกว่างานวิจัยเดิม ดังตาราง

กรณี	สถานะ	ผลเฉลย	หมายเหตุ
L = 1	limit cycle	M และ Fn	67
L = 400	limit cycle	Fc และ Fn	83
L = 400	Stable	M และ Fn	91
L = 1000	Stable	M และ Fc	105

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. จากเนื้อหาของปัญหาพิเศษนี้มีความเกี่ยวข้องกับวัฏจักรทางชีววิทยา เนื่องจากนักศึกษาเป็นนักศึกษาสาขาคณิตศาสตร์จึงใช้เวลาในการศึกษาทำความเข้าใจค่อนข้างนานพอสมควร จากปัญหาดังกล่าวนักศึกษาควรปรึกษาผู้เชี่ยวชาญทางด้านชีววิทยาด้วย

2. จากปัญหาพิเศษนี้มีการเขียนโปรแกรม MATLAB ซึ่งเกี่ยวกับกระบวนการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่มีความละเอียดค่อนข้างสูง เนื่องจากนักศึกษาเป็นนักศึกษาสาขาคณิตศาสตร์อาจไม่คุ้นเคยในการเขียนโปรแกรมมากนัก จากปัญหาดังกล่าวนักศึกษาควรขอคำแนะนำจากผู้เชี่ยวชาญจากสาขาคอมพิวเตอร์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] กาญจนา คำนิงกิจ. 2554. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข. ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์แผนก ตำราและสื่อการสอน คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [2] ปราโมทย์ เตชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภาคย์. 2549. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [3] ปริญญา สงวนสัตย์. 2553. คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์. ครั้งที่1. นนทบุรี : ไอซีดี พรีเมียร์.
- [4] พชรินทร์ เหมโชติ. 2555. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ. คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [5] วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง และ ศราวุธ สุวรรณอัติถ์. 2552. "แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเวลาวัฏจักรชีวิต." วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [6] วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. 2543. คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณ์. ครั้งที่1 กรุงเทพฯ : อินโฟเพรส.
- [7] Aronson B.D., Johnson K.A., Loros J.J., Dunlap J.C., Negative Feedback defining a circadian clock: Autoregulation of the clock gene frequency, Science 263 (1994) 1578-1584.
- [8] Brian R. Hunt Ronald L. Lipsman Jonathan M. Rosenberg with Kevin R. Coombes, John E. Osborn, and Garrett J. Stuck, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo Cambridge University Press (2001)
- [9] D.C.Klein, The mammalian melaton in rhythm generating system, in: L.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้หรือเผยแพร่ในทางอื่นโดยไม่ได้รับอนุญาต
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น York (1993) มิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [10] Dunlap J.C., Molecular bases for circadian clocks, *Cell* 96 (1999) 271-290
- [11] Goldbeter A., *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms: The Molecular Bases of Periodic and Chaotic Behaviour*, Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- [12] Goodwin B.C., Oscillatory behavior in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* 3 (1965) 425-438.
- [13] John W.Gray, *Mastering Mathematica, Second Edition: Programming Methods and Applications*, Academic Press, 2 edition (1997)
- [14] Kanchana Kumnungkit and Nipon Wongvisetsirikul, Neurospora Biorhythm Mathematical Model with Light-Dark Cycle, *Proceeding of the 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistics and its Applications (ICMSA2010)* UniversitiTunku Abdul Rahman, Kuala Lumpur, Malaysia
- [15] Kanchana Kumnungkit, Dynamical analysis of a Model for bursting electrical activity in the pancreatic β -cell, *Applied Mathematics*, Mahidol University (1995) 76-79.
- [16] Mark S. Gockenbach, *MATLAB Tutorial to accompany Partial Differential Equations: Analytical and Numerical Methods*, 2nd edition, SIAM, 2010
- [17] Tei H., Okamura H., Shigeyoshi Y., Fukuhara C., Ozawa R., Hirose M., Sakaki Y., Circadian oscillation of a mammalian homologue of the *Drosophila* period gene, *Nature* 389 (1997) 512-516

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก

ตารางค่าความเข้มแสง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความเข้มแสง	ตัวอย่าง
10^{-5} lux	แสงจากดาวซีเรียสซึ่งเป็นดวงดาวที่สว่างที่สุดในท้องฟ้าเวลากลางคืน
10^{-4} lux	แสงของท้องฟ้าที่มีเมฆมาก
0.002 lux	แสงในตอนกลางคืนที่ไม่มีแสงจันทร์
0.01 lux	แสงในตอนกลางคืนที่มีพระจันทร์เสี้ยว
0.27 lux	แสงในตอนกลางคืนที่มีพระจันทร์เต็มดวง
1 lux	แสงในตอนกลางคืนที่มีพระจันทร์เต็มดวงในเขตเส้นศูนย์สูตร
3.4 lux	แสงในช่วงเวลาหลังจากพระอาทิตย์ตกหรือก่อนฟ้าสว่างในวันที่ท้องฟ้าปลอดโปร่ง
50 lux	แสงในห้องนั่งเล่นสำหรับครอบครัว
80 lux	แสงในห้องโถงหรือแสงในห้องน้ำ
100 lux	แสงในวันที่มีเมฆมาก
320 – 500 lux	แสงในสำนักงาน
400 lux	แสง ณ เวลาที่พระอาทิตย์ขึ้นหรือพระอาทิตย์ตกในวันที่ท้องฟ้าปลอดโปร่ง
1,000 lux	แสงในวันที่มีเมฆบางส่วน หรือแสงในห้องถ่ายทำรายการโทรทัศน์
10,000 – 25,000 lux	แสงในเวลากลางวัน
32,000 – 130,000 lux	แสงในขณะที่ถูกแสงอาทิตย์โดยตรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข

อธิบาย ณ จุดสมมูล (0,0,0,0)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อธิบาย ณ ที่ จุดสมดุล (0,0,0,0)

พิจารณาจากจุดสมดุล (0,0,0,0) เมื่อแทนค่า $M = F_C = F_S = F_N = 0$ ในสมการ (3.1) – (3.4)

แล้วพบว่า

$$\frac{dM}{dt} = v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_{N_0}^n} - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0} + L = 0$$

$$v_s + L = 0$$

$$-v_s = L$$

ดังนั้น สามารถแปลความหมายได้ เมื่อความเข้มแสงเพิ่มขึ้น อัตราการถอดรหัสพันธุกรรม v_s จะลดลง

หรือ เมื่อความเข้มแสงลดลง อัตราการถอดรหัสพันธุกรรม v_s จะมากขึ้น

จาก (3.2) จะได้

$$\frac{dF_C}{dt} = k_s M_0 - k_1 F_{C_0} + k_2 F_{N_0} - k F_{C_0} = 0$$

ดังนั้น สามารถแปลความหมายได้ ไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงของ F_C

จาก (3.3) จะได้

$$\frac{dF_S}{dt} = k F_{C_0} - v_d \frac{F_{S_0}}{K_d + F_{S_0}} = 0$$

ดังนั้น สามารถแปลความหมายได้ ไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงของ F_S

จาก (3.4) จะได้

$$\frac{dF_N}{dt} = k_1 F_{C_0} - k_2 F_{N_0} - v_{dN} \frac{F_{N_0}}{K_{dN} + F_{N_0}} = 0$$

ดังนั้น สามารถแปลความหมายได้ ไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงของ F_N

เอกสารนี้เป็นที่แน่นอนคือ M, F_C, F_S และ F_N มีค่าคือ 0,0,0 และ 0 ตามลำดับ จากจุดสมดุล (0,0,0,0) เป็นจุดที่วงจรการกำ
ไม่ว่ากรณีใดก็ตาม การเกิดเชื้อราไวรัสสปอร์ราไม่มีการเจริญเติบโต ต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Neurospora Biorhythm Mathematical Model with Light-Dark Cycle

Kanchana Kumnungkit¹ and Nipon Wongvisetsirikul²

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology
Ladkrabang, Bangkok, Thailand
kkumnungkit@gmail.com

²Department of Chemistry, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology
Ladkrabang, Bangkok, Thailand
kwnipon@kmitl.ac.th

Abstract. This research is about a developed mathematical model for Neurospora biorhythm. The model can preserve useful in clarifying the periodic biological phenomena system, and save much time for the Neurospora mechanism experiments. Both of the biochemical variables and the light-dark cycle are considered in the set of differential equation. A bifurcation analysis and the state of variations in the parameters are carried out to determine which parameter has greatest effect on the system. Computer Simulations of the biorhythms of this model for two types of states, stable and limit cycle are also performed.

Keywords : Neurospora Biorhythm, Bifurcation Analysis, Limit Cycle, Stable

1 Introduction

Interest in biorhythm mathematical model has been growing in recent years as a result of several active and at times controversial, areas of research. The day/night or circadian rhythms with circulating melatonin in vertebrates or a neurospora biorhythm model with light/dark cycle is well known and reasonably well understood [1, 2]. It is well documents for this research is about a modified mathematical model for neurospora biorhythm. Biological systems have long been proving by theoretical models that useful in clarifying the conditions in which periodic phenomena [3, 4]. The previous model for oscillations resulting from negative feedback loop was due to Goodwin [5]. The purpose of the present article is to examine both of the biochemical variables and the light/dark cycle by the sets of differential equation system.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2 Model Formula

2.1 Mathematical Model

The sole negative regulation based on resulting for the previous model studying oscillations *Drosophila* [4, 6]. The role of the PER-TIM complex in the negative feedback on gene expression in *Drosophila* is done by FRQ in *neurospora* [7]. A further differential pertains to the effect of light, which controlled TIM degradation in the fly [8-11]. The modified mathematical model system of *neurospora* biorhythm differential equations is

$$\frac{dM}{dt} = v_s \frac{K_l^n}{K_l^n + F_N^n} - v_m \frac{M}{K_m + M} + L \quad (1)$$

$$\frac{dF_C}{dt} = k_s M - k_1 F_C + k_2 F_N - k F_C \quad (2)$$

$$\frac{dF_S}{dt} = k F_C - v_d \frac{F_S}{K_d + F_S} \quad (3)$$

$$\frac{dF_N}{dt} = k_1 F_C - k_2 F_N - v_{dN} \frac{F_N}{K_{dN} + F_N} \quad (4)$$

In these system (Eq.1-Eq.4), there are 4 variables M , F_C , F_S , and F_N in equation (Eq.1) denote the concentrations of the *frq* mRNA and the cytosolic, stable and nuclear forms of FRQ respectively. $F_t = F_C + F_S + F_N$ is the total concentration of FRQ protein which is denoted F_t . Parameter v_s denotes the rate of *frq* transcription, the constant K_l related to the threshold of the *frq* transcription before nuclear FRQ represses this process. The constant n is the Hill coefficient, v_m is the maximum rate of *frq* mRNA degradation and the Michaelis constant K_m related to *frq* mRNA degradation and eventually L is the illuminance which is its unit is *lux* or *lx*. The constant k_s is the rate of FRQ protein synthesis, the constant k_1 and k_2 denoted the transport of FRQ protein into and out of the nucleus of *Neurospora* in the 2nd equation (Eq.2). The third equation (Eq.3) the constant k is the rate of cytosol FRQ which is turned to be stable FRQ, the constant v_d is the maximum rate of stable FRQ degradation and Michaelis constant K_d related to this process. And the last equation (Eq.4), the constant v_{dN} is the maximum rate of nuclear FRQ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

degradation and Michael's constant K_{dN} related to this process. The process is shown in the Fig.1.

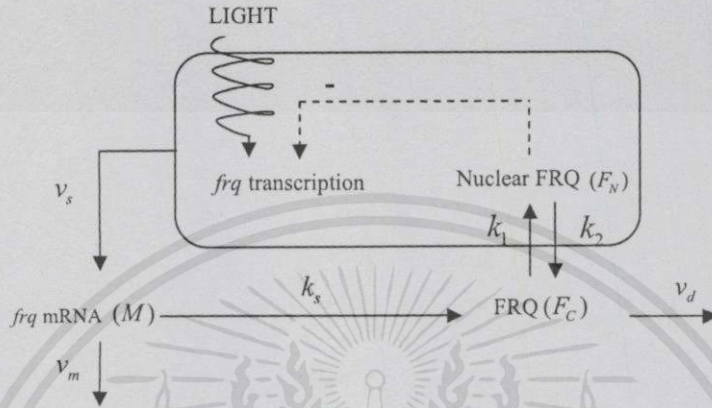


Fig.1 Scheme of the model for circadian oscillations in Neurospora

2.2 Model Analysis

The system described by equation (Eq.1) to (Eq.4) has two positive steady state $(0,0,0,0)$ and $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ where

$$M_0 = -\frac{K_m (F_{N_0}^n L + K_l^n (L + v_s))}{F_{N_0}^n (L - v_m) + K_l^n (L - v_m + v_s)},$$

$$F_{N_0}^n = \left[K_l^n \left(-1 - \frac{v_s}{L - v_m} \frac{M_0}{K_m + M_0} \right) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad F_{C_0} = \frac{k_s M_0 + k_2 F_{N_0}}{k_1 + k} \text{ and}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F_{S_0} = \frac{kK_d \left[k_s M_0 + k_2 \left(-K_l^n - \frac{K_l^n v_s}{L - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]}{(k + k_1) - v_d + \frac{k \left[k_s M_0 + k_2 \left(-K_l^n - \frac{K_l^n v_s}{L - v_m \frac{M_0}{K_m + M_0}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]}{(k + k_1)}}$$

The non-vanishing steady state $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ interested in solving by bifurcation analysis. We applied for studying a linearization of the system at its steady state and do consider stable and limit cycle analysis.

From Eqs. (1), (2), (3) and (4), we consider the interval of steady state points that satisfy the stability. Due to $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$ is the steady state point so $g_i(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0 ; i = 1, 2, 3, 4$

Since the solution converges to $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$, we transform the non-linear equations by defining new variables that is

$m = M - M_0, f_C = F_C - F_{C_0}, f_S = F_S - F_{S_0}$ and $f_N = F_N - F_{N_0}$. If M, F_C, F_S and F_N converges to $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$, m, f_C, f_S and f_N converges to 0. So we obtain $M = m + M_0, F_C = f_C + F_{C_0}, F_S = f_S + F_{S_0}$ and $F_N = f_N + F_{N_0}$ where M_0, F_{C_0}, F_{S_0} and F_{N_0} are constants. Then, the system has been

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d(M - M_0)}{dt} = \frac{dM}{dt} = g_1(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ &= g_1(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \frac{df_C}{dt} &= \frac{d(F_C - F_{C_0})}{dt} = \frac{dF_C}{dt} = g_2(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ &= g_2(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df_S}{dt} &= \frac{d(F_S - F_{S_0})}{dt} = \frac{dF_S}{dt} = g_3(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ &= g_3(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df_N}{dt} &= \frac{d(F_N - F_{N_0})}{dt} = \frac{dF_N}{dt} = g_4(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ &= g_4(M_0 + m, F_{C_0} + f_C, F_{S_0} + f_S, F_{N_0} + f_N) \end{aligned}$$

We expand the right hand side by using the Taylor approximation. So we get

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= g_1(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_1}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_1}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \\ &\quad \frac{\partial g_1}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_1}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df_C}{dt} &= g_2(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_2}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_2}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \\ &\quad \frac{\partial g_2}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_2}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df_S}{dt} &= g_3(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_3}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_3}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \\ &\quad \frac{\partial g_3}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_3}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df_N}{dt} &= g_4(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) + \frac{\partial g_4}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})m + \frac{\partial g_4}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_C + \\ &\quad \frac{\partial g_4}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_S + \frac{\partial g_4}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})f_N + O(h) \end{aligned}$$

but $g_i(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) = 0 ; i = 1, 2, 3, 4$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Then, the system has been

$$\begin{pmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{df_c}{dt} \\ \frac{df_s}{dt} \\ \frac{df_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_3}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_4}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ f_c \\ f_s \\ f_N \end{pmatrix} + O(h)$$

where 4×4 matrix is called the Jacobian Matrix of the system at $M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}$.

So we linearized system at $(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0})$, the system becomes

$$\begin{pmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{df_c}{dt} \\ \frac{df_s}{dt} \\ \frac{df_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_1}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_2}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_3}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_3}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \\ \frac{\partial g_4}{\partial M}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_C}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_S}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) & \frac{\partial g_4}{\partial F_N}(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ f_c \\ f_s \\ f_N \end{pmatrix} \quad (5)$$

After we find derivatives of $g_i(M_0, F_{C_0}, F_{S_0}, F_{N_0}) ; i = 1, 2, 3, 4$, it has been

$$\begin{pmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{df_c}{dt} \\ \frac{df_s}{dt} \\ \frac{df_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_m \frac{K_m}{(K_m + M_0)^2} & 0 & 0 & -v_s \frac{K_l^n n F_{N_0}^{n-1}}{(K_l^n + F_{N_0}^n)^2} \\ k_s & -(k_1 + k) & 0 & k_2 \\ 0 & k & -v_d \frac{K_d}{(K_d + F_{S_0})^2} & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_2 - v_{dN} \frac{K_{dN}}{(K_{dN} + F_{N_0})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ f_c \\ f_s \\ f_N \end{pmatrix} \quad (6)$$

Let

$$A' = \frac{K_l^n n F_{N_0}^{n-1}}{(K_l^n + F_{N_0}^n)^2}, B' = \frac{K_m}{(K_m + M_0)^2}, C' = \frac{K_d}{(K_d + F_{S_0})^2} \text{ and } D' = \frac{K_{dN}}{(K_{dN} + F_{N_0})^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which we substitute to (6), so we can use

$$J = \begin{pmatrix} -v_m B' & 0 & 0 & -v_s A' \\ k_s & -(k_1 + k) & 0 & k_2 \\ 0 & k & -v_d C' & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_2 - v_{dN} D' \end{pmatrix} \quad (7)$$

Let $\det(J - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -v_m B' - \lambda & 0 & 0 & -v_s A' \\ k_s & -(k_1 + k) - \lambda & 0 & k_2 \\ 0 & k & -v_d C' - \lambda & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_2 - v_{dN} D' - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Hence $\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$ (9)

where $a_1 = k + k_1 + k_2 + C' v_d - D' v_{dN} + B' v_m$ (10)

$$a_2 = -D' k_1 v_{dN} + B' k_1 v_m + B' k_2 v_m - B' D' v_{dN} v_m + C' v_d (k_1 + k_2 - D' v_{dN} + B' v_m) + k(k_2 + C' v_d - D' v_{dN} + B' v_m)$$
 (11)

$$a_3 = -B' v_m (-k k_2 + D' k v_{dN} + D' k_1 v_{dN}) + C' v_d (B' v_m (k_1 + k_2) - D' v_{dN} (k_1 + B' v_m) + k(k_2 - D' v_{dN} + B' v_m)) + A' k_1 k_s v_s$$
 (12)

$$a_4 = C' v_d (-B' v_m (-k k_2 + D' k v_{dN} + D' k_1 v_{dN}) + A' k_1 k_2 v_s)$$
 (13)

We find the stability of steady state points by using Routh-Hurwitz criterion that we don't have to find the eigenvalues. The conditions are $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 \geq 0$ and $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$. If the parameter values satisfy these conditions, the steady state points will be asymptotically stable.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3 The Parameter Values and Numerical Simulations

3.1 The Parameter Values

From Eqs. (1), (2), (3) and (4), we consider the illuminance (L) for four values is

1. $L = 0.002 \text{ lux}$

The steady state point is (3.16032 , 1.89301 , 0.40514 , 1.18785) , in case of limit cycle. The parameter values of limit cycle state are $v_s = 5.5, v_m = 1.0, v_d = 3.0, v_{dN} = 1.7, k_s = 0.7, k = 0.4, k_1 = 0.8, k_2 = 0.05, K_m = 0.2, K_l = 0.8, K_d = 1.2, K_{dN} = 0.2, n = 4, L = 0.002$

The steady state point is (1.96913 , 0.997289 , 0.184038 , 1.63128) , in case of stable. The parameter values of stable state are $v_s = 4.5, v_m = 0.5, v_d = 3.0, v_{dN} = 1.7, k_s = 0.7, k = 0.4, k_1 = 1.8, k_2 = 0.5, K_m = 2.0, K_l = 0.8, K_d = 1.2, K_{dN} = 1.2, n = 4, L = 0.002$

2. $L = 1 \text{ lux}$

The steady state point is (3.79256 , 2.87819 , 1.06361 , 1.31337) , in case of limit cycle. The parameter values of limit cycle state are $v_s = 5.5, v_m = 2.0, v_d = 4.0, v_{dN} = 2.2, k_s = 0.9, k = 0.6, k_1 = 0.7, k_2 = 0.25, K_m = 0.3, K_l = 0.8, K_d = 1.4, K_{dN} = 0.4, n = 5, L = 1$

The steady state point is (2.91103 , 1.71046 , 0.483161 , 1.05131) , in case of stable. The parameter values of stable state are $v_s = 4.0, v_m = 2.0, v_d = 4.0, v_{dN} = 2.2, k_s = 0.9, k = 0.6, k_1 = 1.7, k_2 = 1.25, K_m = 0.3, K_l = 0.8, K_d = 1.4, K_{dN} = 0.4, n = 5, L = 1$

3. $L = 400 \text{ lux}$

The steady state point is (1.80224 , 0.792509 , 0.0875122 , 0.525576) , in case of limit cycle. The parameter values of limit cycle state are $v_s = 95,$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_m = 470.0, v_d = 65.0, v_{dN} = 4.5, k_s = 5.0, k = 6.6, k_1 = 5.5, k_2 = 1.1, K_m = 0.04, \\ K_l = 0.6, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.1, n = 4, L = 400$$

The steady state point is (1.41521, 0.880271, 0.199032, 0.541681), in case of stable. The parameter values of stable state are $v_s = 95, sv_m = 470, v_d = 35.0, v_{dN} = 1.5, k_s = 5.0, k = 6.6, k_1 = 1.5, k_2 = 0.1, K_m = 0.04, K_l = 0.6, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.1, n = 4, L = 400$

4. $L = 1000 lux$

The steady state point is (1.65897, 0.995047, 0.0237696, 0.328634), in case of limit cycle. The parameter values of limit cycle state are $v_s = 250, v_m = 1200, v_d = 150, v_{dN} = 6.5, k_s = 5.5, k = 3.5, k_1 = 6.0, k_2 = 1.0, K_m = 0.04, K_l = 0.4, K_d = 1.0, K_{dN} = 0.05, n = 4, L = 1000$

The steady state point is (1.64031, 2.11531, 0.0519199, 0.497184), in case of stable. The parameter values of stable state are $v_s = 250, v_m = 1100, v_d = 150.0, v_{dN} = 6.5, k_s = 5.5, k = 3.5, k_1 = 1.0, k_2 = 1.0, K_m = 0.04, sK_l = 0.4, K_d = 1.0, K_{dN} = 1.5, n = 4, L = 1000$

3.2 Numerical Simulations

We can verify all parameter values by using numerical method, the fourth-order Runge Kutta method, and solution curves as follows.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

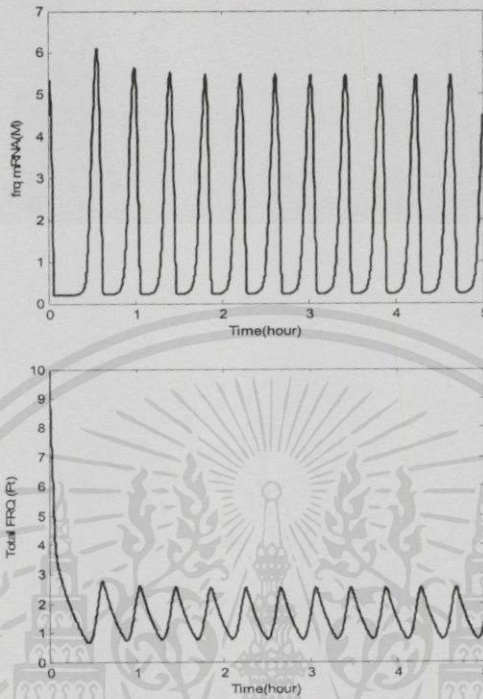


Fig. 2. In case of limit cycle state, *frq* mRNA and total FRQ protein vs. time in 5 hours with $L = 1000 \text{ lux}$.

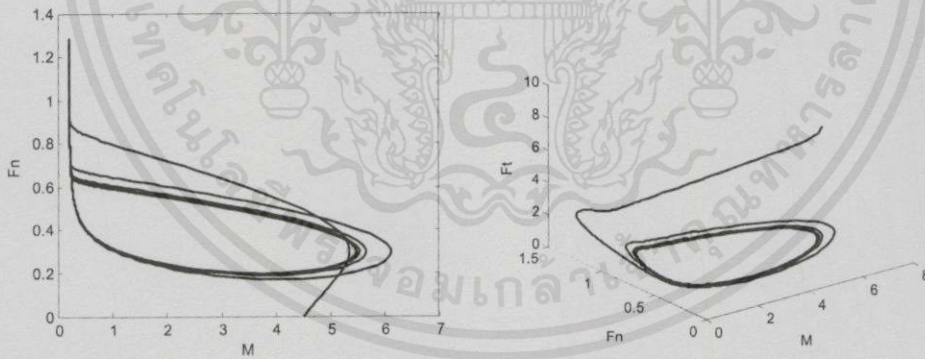


Fig. 3. In case of limit cycle state, *frq* mRNA vs. nuclear FRQ in 2-dimension and *frq* mRNA vs. nuclear FRQ vs. total FRQ protein in 3-dimension with $L = 1000 \text{ lux}$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

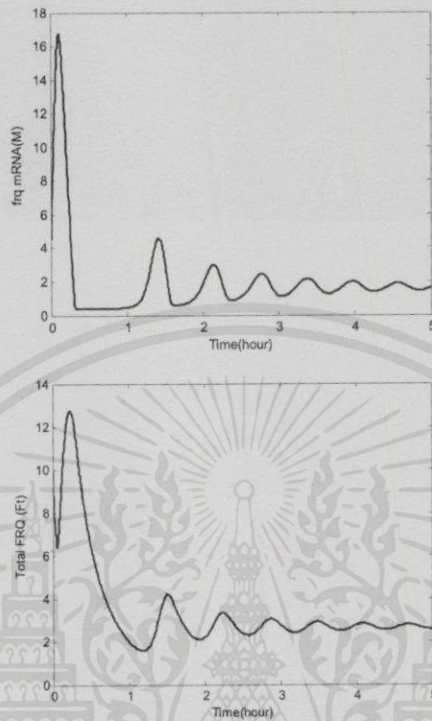


Fig. 4. In case of stable state, *frq* mRNA and total FRQ protein vs. time in 5 hours with $L = 1000 \text{ lux}$.

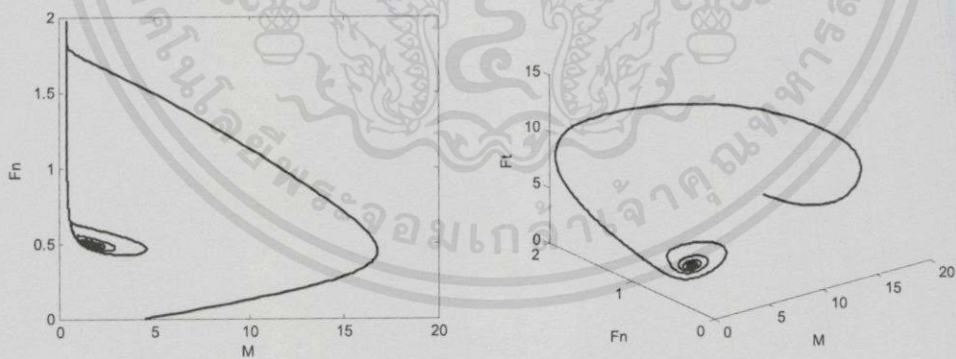


Fig.5. In case of stable state, *frq* mRNA vs. nuclear FRQ in 2-dimension and *frq* mRNA vs. nuclear FRQ vs. total FRQ protein in 3-dimension with $L = 1000 \text{ lux}$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4 Conclusion

The model for *Neurospora* and *Drosophila*, we modified the new *Neurospora* model with light. That is the incentive which is the system (Eqs. (1), (2), (3) and (4)). More importantly, we considered the illuminance as follows

- (i) $L = 0.002 \text{ lux}$, for example, is moonless clear night sky with airflow.
- (ii) $L = 1 \text{ lux}$, for example, is full moon overhead at tropical latitudes.
- (iii) $L = 400 \text{ lux}$, for example, is sunrise or sunset on a clear day.s
- (iv) $L = 1000 \text{ lux}$, for example, overcast day or typical TV studio lighting

From the system, we can find the steady state points and parameters which satisfy limit cycle state and stable state as follow in section 3. These values can be verified by using the fourth-order Runge Kutta method and solution curves that show in previous section. Moreover, all parameters will be very useful for scientist or researcher who would like to restrain the growth of *Neurospora* because it always grows in their laboratory and experiments.

5 Acknowledgement

Significantly, this research was support by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang and main idea for parts of under graduated special project, Mr.Sarawut Suwannaut and Mr.Wongvisarut Khuengsatung.

References

1. Dunlap J.C., Molecular bases for circadian clocks, *Cell* 96 (1999) 271–290.
2. D.C.Klein, The mammalian melaton in rhythm generating system, in: L.Wetterberg(Ed.), *Light and Biological Rhythms in Man*, PergamonPress, NewYork (1993)
3. Winfree A.T., *The Geometry of Biological Time*, Springer, New York (1980)
4. Goldbeter A., *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms: The Molecular Bases of Periodic and Chaotic Behaviour*, Cambridge University Press, Cambridge (1996)
5. Goodwin B.C., Oscillatory behavior in enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* 3 (1965) 425–438.
6. Tei H., Okamura H., Shigeyoshi Y., Fukuhara C., Ozawa R., Hirose M., Sakaki Y., Circadian oscillation of a mammalian homologue of the *Drosophila* period gene, *Nature* 389 (1997) 512–516.
7. Aronson B.D., Johnson K.A., Loros J.J., Dunlap J.C., Negative feedback defining a circadian clock: Autoregulation of the clock gene frequency, *Science* 263 (1994) 1578–1584.
8. Hunter-Ensor M., Ousley A., Sehgal A., Regulation of the *Drosophila* protein Timeless suggests a mechanism for resetting the circadian clock by light, *Cell* 84 (1996) 677–685.
9. Lee C., Parikh V., Itsukaichi T., Bae K., Edery I., Resetting the *Drosophila* clock by photic regulation of PER and a PER-TIM complex, *Science* 271 (1996) 1740–1744.
10. Myers M.P., Wager-Smith K., Rothenfluh-Hilfiker A., Young M.W., Light-induced degradation of TIMELESS and entrainment of the *Drosophila* circadian clock, *Science* 271 (1996) 1736–1740.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

11. Zeng H., Qian Z., Myers M.P., Rosbash M., A light-entrainment mechanism for the *Drosophila* circadian clock, *Nature* 380 (1996) 129–135.
12. C.J. Thompson, Y.S. Yang, A.W. Wood, A Mathematical model for the mammalian melatonin rhythm, *Physica A* 296 (2001) 293-306.
13. D. Gonze et al., Theoretical models for circadian rhythms in *Neurospora* and *Drosophila*, *C.R. Acad. Sci. Paris. Sciences de la vie/Life Sciences* 323 (2000) 57-67



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้