การคำนวณค่ารากของสมการพหุนามโดย Excel

EVALUATION ROOTS FOR POLYNOMIAL EQUATION WITH EXCEL

พัชราภรณ์ นครภักดี

พิเชษฐ์ เอี่ยมอำนวยวงศ์

วุฒิพงษ์ พงษ์สระพัง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

การคำนวณค่ารากของสมการพหุนามโดย Excel

EVALUATION ROOTS FOR POLYNOMIAL EQUATION WITH EXCEL

พัชราภรณ์ นครภักดี
พิเชษฐ์ เอี่ยมอำนวยวงศ์
วุฒิพงษ์ พงษ์สระพัง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

EVALUATION ROOTS FOR POLYNOMIAL EQUATION WITH EXCEL

PUDCHARAPORN NAKORNPUKDEE
PHICHET IAMAMNUAIWONG
VUTTIPONG PONGSRAPUNG

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การคำนวณค่ารากของสมการพหุนามโดย Excel
	Evaluation roots for polynomial equation with Excel
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพัชราภรณ์ นครภักดี 53050084
	นายพิเชษฐ์ เอี่ยมอำนวยวงศ์ 53050085
	นายวุฒิพงษ์ พงษ์สระพัง 53050109
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ ประธานกรรมการ	
ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการ	
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การคำนวณค่ารากของสมการพหุนามโดย Excel Evaluation roots for polynomial equation with Excel
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพัชราภรณ์ นครภักดี 53050084 นายพิเชษฐ์ เอี่ยมอำนวยวงศ์ 53050085 นายวุฒิพงษ์ พงษ์สระพัง 53050109
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2556
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. ศุกระวรรณ มะเวชะ

บทคัดย่อ

มีหลายวิธีในการหาผลเฉลยของสมการพหุนามไม่เชิงเส้น ปัญหาพิเศษนี้ใช้ Excel ในการหาผลเฉลยของสมการพหุนามไม่เชิงเส้น โดยใช้วิธีการทำซ้ำของนิวตันและวิธีการประมาณค่าในช่วง

คำสำคัญ : สมการพหุนามไม่เชิงเส้น ค่าราก วิธีการทำซ้ำของนิวตัน วิธีการประมาณค่าในช่วง

Special Project Title	Evaluation roots for polynomial equation with Excel
Students	Ms. Pudcharaporn Nakornpukdee 53050084
	Mr. Phichet Iamamnuaiwong 53050085
	Mr. Vuttipong Pongsrapung 53050109
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Mathematics
Academic Year	2013
Advisor	Dr. Sukrawan Mavecha

ABSTRACT

There are several ways to find the solution of the nonlinear polynomial equations. This work use Excel to find the solution of the nonlinear by Newton iteration method and interpolation method.

Keywords : Nonlinear equation, Root, Newton iteration method, Interpolation method

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่อง การคำนวณค่ารากของสมการพหุนามโดย Excel นี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษาและให้ความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้และช่วยตรวจสอบแก้ไขงานให้เกิดความถูกต้องครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุลวงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ และ ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายที่สุด ทางคณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสต์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่าน ที่ท่านช่วยประสิทธิ์ประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำอันเกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมา ตลอดจนขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ของทางสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ได้ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้ จนเป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญรูปภาพ

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

สารบัญตาราง

บทที่ 1
บทนำ

ในส่วนบทนำของปัญหาพิเศษฉบับนี้ คณะผู้จัดทำได้กล่าวถึงความสำคัญและที่มาของปัญหา วัตถุประสงค์ของงานวิจัย ขอบเขตของงานวิจัย ขั้นตอนในการดำเนินการและประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

เนื่องจากปัญหาต่างๆ มีรูปแบบเป็นสมการพหุนาม เช่น ด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรม ซึ่งการศึกษาด้านสมการพหุนามมีจุดหมาย คือ ต้องการหาค่ารากของพหุนามซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการพหุนามนั้นๆ การหาผลเฉลยของสมการพหุนามมีความยากง่ายขึ้นอยู่กับอันดับของสมการ ถ้าสมการมีอันดับสูงๆ จะทำให้หาผลเฉลยได้ยากขึ้น ดังนั้นจึงต้องใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาผลเฉลย โปรแกรม Excel เป็นโปรแกรมที่ใช้งานได้ง่ายและแต่ละคนมีความคุ้นเคยกับโปรแกรมนี้เป็นอย่างมาก ดังนั้นโครงการวิจัยนี้ต้องการนำโปรแกรม Excel มาร่วมหาผลเฉลยของสมการพหุนาม โดยใช้ขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการโดยวิธีต่างๆ เช่น วิธีการทำซ้ำของนิวตัน (Newton iteration method) และวิธีการประมาณค่าในช่วง (Interpolation method) โดยเราสามารถนำความรู้นี้ไปช่วยอธิบายและช่วยสอนในรายวิชาทฤษฎีของสมการเบื้องต้นได้ต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ

1.2.1 ศึกษาโปรแกรม Excel ในการแก้สมการพหุนาม

1.2.2 ศึกษาและสรุปขั้นตอนของวิธีการทำซ้ำของนิวตัน (Newton iteration method) ในการหาผลเฉลยของสมการพหุนาม

1.2.3 ศึกษาและสรุปขั้นตอนของวิธีการประมาณค่าในช่วง (Interpolation method) ในการหาผลเฉลยของสมการพหุนาม

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.3.1 มีความรู้และเข้าใจการหาผลเฉลยของสมการพหุนามโดยวิธีต่างๆ

1.3.2 มีความรู้ในการใช้โปรแกรม Excel หาผลเฉลยของสมการพหุนาม

1.3.3 นำโปรแกรมที่ได้ไปหาผลเฉลยของสมการพหุนามในวิธีต่างๆ ได้

1.4 ขอบเขตของปัญหา

1.4.1 ใช้โปรแกรม Excel ในการหารากจำนวนจริงของสมการพหุนามดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 6 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

1.4.2 หาผลเฉลยของสมการพหุนามโดยวิธี

1.4.2.1 วิธีการทำซ้ำของนิวตัน (Newton iteration method)

1.4.2.2 วิธีประมาณค่าในช่วง (Interpolation method)

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ปรึกษาสมาชิกในกลุ่มแล้วนำไปเสนออาจารย์ที่ปรึกษาและเลือกหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจ

1.5.2 หาข้อมูลเนื้อหาเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจจะทำปัญหาพิเศษ

1.5.3 ศึกษาการใช้โปรแกรม Excel ในการแก้สมการพหุนาม

1.5.4 ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับนิยาม โครงสร้างต่างๆของสมการพหุนาม

1.5.5 ศึกษาการหาค่ารากของพหุนาม โดยวิธีการทำซ้ำของนิวตันและวิธีการประมาณค่าในช่วง

1.5.6 ค้นคว้าข้อมูลเพิ่มเติมเพื่อนำมาประกอบการทำปัญหาพิเศษ

1.5.7 ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้า

1.5.8 ทำการศึกษา วิเคราะห์ สมการพหุนามดีกรี 3 ถึง 6 โดยการใช้โปรแกรม Excel

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

10 เดือน

ระยะเวลาดำเนินงานตามแผนงานแสดงไว้ในตารางที่ 1.1

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2556							ปี 2557		
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
ปรึกษาสมาชิกในกลุ่มแล้วนำไปเสนออาจารย์ที่ปรึกษาและเลือกหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจ	↔									
ศึกษาค้นคว้าเอกสารวิจัยเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจจะทำปัญหาพิเศษ		↔								
ศึกษาการใช้โปรแกรม Excel ในการแก้สมการพหุนาม			↔	↔						
ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับนิยามโครงสร้างต่างๆ ของสมการพหุนาม			↔	↔	↔					
ศึกษาการหาค่ารากของพหุนาม โดยวิธีการทำซ้ำของนิวตันและวิธีการประมาณค่ารากในช่วง				↔	↔	↔				
ค้นคว้าข้อมูลเพิ่มเติมเพื่อนำมาประกอบการทำปัญหาพิเศษ					↔	↔				
ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการค้นคว้า						↔	↔			
ทำการศึกษา วิเคราะห์ สมการพหุนามในโปรแกรม Excel						↔	↔	↔		
ตรวจสอบทดลองความถูกต้องของโปรแกรมและเนื้อหาทั้งหมด							↔	↔	↔	
จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งจัดทำแบบการนำเสนอ								↔	↔	
ซ้อมนำเสนอปัญหาพิเศษ										↔
นำเสนอปัญหาพิเศษ										↔

รูปที่ 1.2ตารางระยะเวลาดำเนินงาน

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นและทฤษฎีต่างๆ ตัวอย่างในการคำนวณค่ารากของสมการพหุนามและส่วนของโปรแกรม Excel ที่ใช้สำหรับคำนวณค่ารากของสมการพหุนามเพื่อความเข้าใจของโปรแกรมช่วยคำนวณ ผู้ใช้โปรแกรมควรจะศึกษาเนื้อหาในบทนี้เพื่อความเข้าใจวิธีคิดของโปรแกรมช่วยคำนวณเช่นกัน

2.1 ลิมิตของค่าราก (Limits of Roots)

ในการหาค่ารากของสมการพหุนาม $f(x)=0$ เราอาจพิจารณาค่ารากสูงสุดและค่ารากต่ำสุดของสมการได้ ซึ่งเรียกว่า ขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนบวก (upper limit of the positive root) และขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นจำนวนลบ (lower limit of the negative roots)

2.1.1 วิธีหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนบวก

กำหนดให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ และ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $a_n>0, a_{n-1}, a_{n-2},...,a_0$ เป็นจำนวนจริง การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนบวกของสมการ $f(x)=0$ กระทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือก $c>0$ แล้วนำ $x-c$ ไปหาร $f(x)$ ซึ่งสามารถใช้กระบวนวิธีหารแบบสังเคราะห์ (Synthetic Division) สมมติว่า

$$f(x)=(x-c)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0)+r \tag{1}$$

ซึ่ง

$$b_{n-1}=a_n$$
$$b_{n-2}-cb_{n-1}=a_{n-1}\rightarrow b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}=a_{n-1}+ca_n$$
$$b_{n-3}-cb_{n-2}=a_{n-2}\rightarrow b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}$$
$$b_{n-4}-cb_{n-3}=a_{n-3}\rightarrow b_{n-4}=a_{n-3}+cb_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$b_0-cb_1=a_1\rightarrow b_0=a_1+cb_1$$
$$r-cb_0=a_0\rightarrow \boxed{r=a_0+cb_0}\longrightarrow \text{เป็นเศษเหลือ}$$

ขั้นที่ 2 พิจารณา $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$

(ก) ถ้า $b_i \geq 0$ เมื่อ $i = 0,1,2,3,\ldots,n-1$ และ $r > 0$ สรุปได้ว่า c เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของสมการ $f(x)=0$ เพราะว่าถ้า $x \geq c$ จะได้ว่า $f(x) > 0$
นั่นคือ สมการ $f(x)=0$ ไม่มีค่ารากใดที่เป็นจำนวนบวกที่มีค่ามากหรือเท่ากับ c

(ข) ถ้า $r = 0$ และ $b_i \geq 0$ เมื่อ $i = 0,1,2,3,\ldots,n-1$ จะได้ว่า c เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ และค่ารากที่เป็นจำนวนบวกของสมการ $f(x)=0$ ค่าอื่นๆ จะต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ c ทั้งนี้เพราะว่าถ้า $c_1 > c$ จะได้ว่า

$$f(c_1) = (c_1 - c)(b_{n-1}c^{n-1} + b_{n-2}c^{n-2} + \ldots + b_1 c_1 + b_0) > 0 \qquad (2)$$

นั่นคือ c_1 ไม่ใช่ค่ารากของสมการ $f(x)=0$

หมายเหตุ ในการเลือกค่า c เพื่อทำให้ $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$ ไม่เป็นจำนวนลบ เราอาจเริ่มจำนวน c ที่ทำให้ $b_{n-1} \geq 0$ ซึ่งหาค่า c ได้ง่ายโดยใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า
$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1} = a_n c + a_{n-1}$ (ได้จากกระบวนการหารแบบสังเคราะห์)

ถ้าปรากฏว่า $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$ ไม่ใช่จำนวนลบ สรุปได้ว่า c เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนบวกของสมการ $f(x)=0$ แต่ถ้า $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$ ไม่ใช่จำนวนลบ โดยที่ $b_{k+1} < 0$ ต้องเริ่มต้นด้วยการเลือกค่า c ให้มีค่ามากกว่าเดิม กระทำโดยวิธีเช่นเดียวกันต่อเนื่องจนกระทั่งได้ว่า $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$ ไม่เป็นจำนวนลบ ก็จะหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของสมการ $f(x)=0$ ได้

<u>**ตัวอย่าง 2.1**</u> จงหาขีดจำกัดบนที่เป็นจำนวนบวกของสมการ $2x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$

วิธีทำ พิจารณา $b_{n-2} = a_n c + a_{n-1}$ เมื่อ $a_n = 2, a_{n-1} = -7$

จะได้ $b_{n-2} = 2c - 7$

จากสมการ (1) เลือกค่า c ที่ทำให้ $b_{n-2} \geq 2$ เริ่มจาก เลือก $c = 4$ นำ $x - 4$ ไปหาร $f(x) = 2x^2 - 7x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ โดยกระบวนการหารแบบสังเคราะห์ จะได้ดังนี้

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	
2	-7	-5	6	3	-10	4
	8	4				
2	1	$\boxed{-1}$				

จะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของผลหารตัวที่สามเป็นจำนวนลบ จึงต้องเลือกค่า c ใหม่ เลือก $c=5$ นำ $x-5$ ไปหาร $f(x)=2x^2-7x^4-5x^3+6x^2+3x-10$ ดังนี้

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	
2	-7	-5	6	3	-10	5
	10	15	50	280	1415	
2	3	10	56	283	$\boxed{1405}$	

ดังนั้น 5 เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของสมการ $x^2-7x^4-5x^3+6x^2+3x-10=0$

2.1.2 วิธีหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นจำนวนลบ

กำหนดให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $a_n>0$ การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนบวกของสมการ $f(x)=0$ กระทำได้โดยการแทนค่า $x=-y$ ในสมการ $f(x)=0$ จะได้สมการใหม่ในรูป

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+...+(-1)^na_0=0 \tag{3}$$

จากสมการ (2) ดำเนินการหาขีดจำกัดบนที่เป็นจำนวนบวกของสมการ (3) โดยกระบวนวิธีเดียวกันที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.1.1 ถ้า c เป็นขีดจำกัดบนที่เป็นจำนวนบวกของสมการ (3) $-c$ จะเป็นขีดจำกัดล่างที่เป็นจำนวนลบของสมการ $f(x)=0$ ทั้งนี้เพราะว่า ถ้า $-k$ เป็นค่ารากที่เป็นจำนวนลบของสมการ $f(x)=0$ จะได้ว่า $-k$ เป็นค่ารากที่เป็นบวกของสมการ (3) ดังนั้น $k<c$ ซึ่งจะได้ว่า $-k>-c$ นั่นคือ $-c$ จะเป็นขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นจำนวนลบของสมการ $f(x)=0$

หมายเหตุ ถ้า $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ และ $a_n,a_{n-1},a_{n-2},...,a_1,a_0$ เป็นจำนวนบวกหรือเป็นจำนวนลบทั้งหมดแล้วจะได้ว่า สมการ $f(x)=0$ จะไม่มีค่ารากเป็นจำนวนจริงบวกเลยหรืออาจกล่าวได้ว่า 0 เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากสมการ $f(x)=0$ ไปหาร $f(x)$ จะได้สัมประสิทธิ์ของผลหารเป็นจำนวนบวกทั้งหมดเศษเหลือจะเป็นจำนวนบวกด้วย

<u>**ตัวอย่าง 2.2**</u> จงหาขีดจำกัดของค่ารากของสมการ $2x^6+20x^5+30x^3+50x+1=0$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x)=2x^6+20x^5+30x^3+50x+1$

(ก) หาขีดจำกัดบนของค่ารากของสมการ $f(x)=0$ เพราะว่าสัมประสิทธิ์ทุกเทอมของ $f(x)$ เป็นจำนวนบวกทั้งหมด ดังนั้น ขีดจำกัดบนของสมการ $f(x)=0$ คือ 0

(ข) หาขีดจำกัดล่างที่เป็นจำนวนลบของสมการ $f(x)=0$ โดยการแทน $x=-y$ ในสมการ $f(x)=0$ จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$2y^6 - 20y^5 - 30y^3 - 50y + 1 = 0 \qquad (4)$$

พิจารณา $b_{n-2} = ca_n + a_{n-1}$ เมื่อ $a_n = 2$ และ $a_{n-1} = -10$

จะได้ $b_{n-2} = 2c - 10$ เลือกค่า $c = 10$ นำ $y - 10$ ไปหาร $2y^6 - 20y^5 - 30y^3 - 50y + 1$

จะได้สัมประสิทธิ์ของผลหารดังนี้ 2

-20	0	-30	0	-50	1	10
	20	0	0			
2	0	0	$\boxed{-30}$			

สัมประสิทธิ์ของผลหารบางค่าเป็นจำนวนลบ

เลือก $c = 11$ นำ $y - 11$ ไปหาร $2y^6 - 20y^5 - 30y^3 - 50y + 1$ จะได้สัมประสิทธิ์ของผลหารดังนี้

2	-20	0	-30	0	-50	1	11
	22	22	242	2332	25652	281622	
2	2	22	212	2332	25602	$\boxed{281623}$	→ เศษเหลือ

สัมประสิทธิ์ของผลหารเป็นจำนวนบวกทั้งหมดของสมการ (4)

ดังนั้น 11 เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนบวก

นั่นคือ -11 เป็นขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นจำนวนลบของสมการ $2y^6 - 20y^5 - 30y^3 - 50y + 1 = 0$

หมายเหตุ ในการหาขีดจำกัดบนที่เป็นจำนวนลบของสมการพหุนาม $f(x) = 0$ อาจใช้กฎของนิวตัน (Newton's Rule) ดังนี้ ถ้า $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 ; a_n > 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(b), f'(b), f''(b), \ldots, f^{(n)}(b)$ เป็นจำนวนบวก แล้ว b จะเป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f(x) = 0$

2.2 สมการพหุนามตัวแปรเดียว

2.2.1 ความหมายของพหุนาม (Polynomial)

นิยาม 2.1 กำหนดให้ $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$ เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ เป็นจำนวนคงค่าและ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือ 0

$P(x)$ เรียกว่า พหุนามใน x ดีกรี n $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์และ $a_i x^i$ เมื่อ $i = 0,1,2,3,\ldots,n$ เรียกว่า พจน์หรือเทอมที่ $i+1$ ของพหุนาม ถ้า $a_i = 0 \quad \forall i \in \{0,1,2,3,\ldots,n\}$ แล้วเรียก $P(x)=0$ เป็นพหุนามอันตรธานรูป (พหุนามไม่มีดีกรี)

<u>**ตัวอย่าง 2.3**</u> $x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี 3

$6x^8 + 3x + 1$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี 8

$3y + 1$ เป็นพหุนามใน y ดีกรี 1

t^2 เป็นพหุนามใน t ดีกรี 2

0 เป็นพหุนามอันตรธานรูป

นิยาม 2.2 ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว เรียกว่า $P(x)=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี n และถ้า $P(a)=0$ แล้ว a เรียกว่า รากของสมการพหุนาม $P(x)=0$

<u>**ตัวอย่าง 2.4**</u> $P(x) = x^2 + x - 2 = 0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี 2 และ -2 และ -1 เป็นค่าราก ของสมการ $P(x)=0$ เพราะว่า $P(-2)=0$ และ $P(1)=0$

<u>**ตัวอย่าง 2.5**</u>

ก) $f(x) = 3x^3 - x + 2 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี 3 นิยมเรียกว่า สมการพหุนามกำลังสาม (Cubic equation) เพราะว่า $f(-1)=0$
ดังนั้น -1 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

ข) $g(x) = 4x^4 - x^3 + 2x - 1 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี 4 นิยมเรียกว่า สมการพหุนามกำลังสี่ (Biquadratic equation)

2.2.2 การบวกและการลบพหุนาม

นิยาม 2.3 กำหนดให้ $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \neq 0$ และ $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n \neq 0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n $P(x) = Q(x)$ ก็ต่อเมื่อ $a_i = b_i$;$\forall i \in \{0,1,2,3,\ldots,n\}$

<u>ตัวอย่าง 2.6</u> ให้ $f(x)=7x^3+10$ และ $g(x)=(3a+2)x^3+4bx^2-5c$ ถ้า $f(x)=g(x)$ จงหาค่า a,b และ c

วิธีทำ เพราะว่า $f(x)=g(x)$ โดยนิยาม 2.3

จะได้ว่า $3a+2=7 \;\rightarrow\; a=\dfrac{5}{3}$

$$4b=0 \;\rightarrow\; b=0$$

$$-5c=10 \;\rightarrow\; c=-2$$

นิยาม 2.4 กำหนดให้ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$ เป็นพหุนามสองพหุนามใด ๆ

(1). $f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$

(2). $f(x)-g(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_n-b_n)x^n$

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> กำหนดให้ $f(x)=x^3+2x^2-2x+1$ และ $g(x)=x^3+2x^2-4x+5$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (1+1)x^3+(2+2)x^2+\left[(-2)+(-4)\right]x+(1+5) \\ &= 2x^3+2x^2-4x+5 \\ f(x)-g(x) &= (1-1)x^3+(2-2)x^2+\left[(-2)+(-4)\right]x+(1-5) \\ &= 0\cdot x^3+0\cdot x^2+2x-5 \\ &= 2x-5 \end{aligned}$$

หมายเหตุ การบวกและการลบพหุนาม จะเห็นว่าจำนวนที่มีบทบาทสำคัญในการหาผลบวกหรือผลลบ คือ สัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ ของพหุนาม ดังนั้นเราอาจนำเอาสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ ของพหุนามมาเรียงตามลำดับดีกรีแล้วดำเนินการหาผลบวกหรือผลลบของพหุนามได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ $P(x)=x^4+3x^2-5x+3$ และ $Q(x)=3x^2-6x+4$ หาค่า $P(x)+Q(x)$ และ $P(x)-Q(x)$ ได้ดังนี้

(1) หาค่า $P(x)+Q(x)$

x^4	x^3	x^2	x	x^0	
1	0	3	-5	3	
					+
0	0	3	-6	4	
1	0	6	-11	7	

จะได้ว่า $P(x)+Q(x)=x^4+6x^2-11x+7$

(2) หาค่า $P(x)-Q(x)$

x^4	x^3	x^2	x	x^0	
1	0	3	-5	3	
					$-$
0	0	3	-6	4	
1	0	0	1	-1	

ดังนั้น $P(x)-Q(x)=x^4+x-1$

2.2.3 การคูณพหุนาม

นิยาม 2.5 กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามใดๆ $f(x)\cdot g(x)$ คือ พหุนามที่ได้จากผลรวมพจน์ต่างๆ ที่เกิดจากเอาพจน์แต่ละพจน์ของ $g(x)$ คูณกับพจน์ของพหุนาม $f(x)$ ทุกๆ พจน์

จากนิยาม 2.3 ถ้า $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$ และ $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$

จะได้ว่า $f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot b_0+f(x)\cdot b_1x+f(x)\cdot b_2x^2+\ldots+f(x)\cdot b_mx^m$

<u>**ตัวอย่าง 2.8**</u> กำหนดให้ $f(x)=x^2+3x-1$ และ $g(x)=x^2+2x+1$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (x^2+3x-1)(x^2+2x+1) \\ &= (x^2+3x-1)x^2+(x^2+3x-1)2x+(x^2+3x-1) \\ &= (x^4+3x^3-x^2)+(2x^3+6x^2-2x)+(x^2+3x-1) \\ &= x^4+5x^3+6x^2+x-1 \end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 2.8 นำมาเขียนแจกแจงวิธีคูณ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{rl} (x^2+3x-1)(x^2+2x+1) & \\ \hline x^4+3x^3-x^2 \quad\quad\quad\quad & \text{..................ได้จาก } (x^2+3x-1)x^2 \\ +2x^3+6x^2-2x \quad\quad & \text{..................ได้จาก } (x^2+3x-1)2x \\ +x^2+3x-1 & \text{..................ได้จาก } (x^2+3x-1)(1) \\ \hline x^4+5x^3+6x^2+x-1 & \\ \hline \end{array}$$

หมายเหตุ ในการหาผลคูณของพหุนาม จำนวนที่มีบทบาทสำคัญในการหาผลคูณ คือ สัมประสิทธิ์ของตัวคูณและตัวตั้ง ถ้าเรานำสัมประสิทธิ์ของตัวคูณและตัวตั้งมาจัดเรียงลำดับจากพจน์ที่มีดีกรีสูงสุดไปหาพจน์ที่มีดีกรีต่ำสุด แล้วนำสัมประสิทธิ์เหล่านี้มาคูณกันให้สอดคล้องกับนิยามการคูณพหุนามก็จะทราบสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ ของคำตอบได้ วิธีคูณดังกล่าวนี้เรียกว่า **วิธีคูณโดยแยกสัมประสิทธิ์ออกจากตัวแปร** (Method of detached coefficients)

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> จงหาผลคูณของ $(x^2+3x-1)(x^2+2x+1)$ แสดงวิธีคูณโดยการแยกสัมประสิทธิ์ดังนี้

วิธีทำ

(1	3	−1) × (1	2	1)
1	3	−1		
	2	6	−2	
		1	3	−1
1	5	6	1	−1

ดังนั้น $(x^2+3x-1)(x^2+2x+1)=x^4+5x^2+6x^2+x-1$

<u>ตัวอย่าง 2.10</u> จงหาค่า $(x^5+2x^3-x^2+2)(3x^4-x^3+x^2-1)$ แสดงวิธีคูณโดยการแยกสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

วิธีทำ (1 0 2 −1 0 2) (3 −1 1 0 −1)

3	0	6	−3	0	6				
	−1	0	−2	1	0	−2			
		1	0	2	−1	0	2		
			0	0	0	0	0		
				−1	0	−2	1	0	−2
3	−1	7	−5	2	5	−4	3	0	−2

จะได้

$$(x^5+2x^3-x^2+2)(3x^4-x^3+x^2-1)=3x^9-x^8+7x^7-5x^6+2x^5+5x^4-4x^3+3x^2-2$$

2.2.4 การหารพหุนาม

กำหนดให้ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ และ $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ เป็นพหุนามสองพหุนามใดๆ ที่ $n\geq m; a_n\neq 0$ และ $b_m\neq 0$ เราสามารถจะหาจำนวนคงค่า c_k

โดยที่ $c_k=\dfrac{a_n}{b_m}$ และ

$$f(x)=c_kx^{n-m}\cdot g(x)+f_1(x) \tag{5}$$

จาก (5) จะเป็นพหุนามใน x สมมติว่ามีดีกรี n_1 และ ถ้า $n_1<m$ $f_1(x)$ เรียกว่า เศษของการหาร $f(x)$ ด้วย $g(x)$ ถ้า $n_1\geq m$ เราสามารถจะหา c_{k-1} โดยที่

$$f_1(x)=c_{k-1}x^{n_1-m}\cdot g(x)+f_2(x) \tag{6}$$

จาก (6) ถ้า $f_2(x)=0$ เราจะได้ว่า $\dfrac{f(x)}{g(x)}=c_kx^{n-m}+c_{k-1}x^{n_1-m}$ แต่ถ้า $f_2(x)\neq 0$ แล้ว $f_2(x)$ จะเป็นพหุนามใน x สมมติว่ามีดีกรี n_2 และ ถ้า $n_2<n_1$ $f_2(x)$ เรียกว่า เศษของการหาร $f(x)$ ด้วย $g(x)$ ถ้า $n_2\geq n_1$ สามารถจะหา c_{k-2} โดยที่

$$f_2(x)=c_{k-2}\cdot x^{n_2-m}\cdot g(x)+f_3(x) \tag{7}$$

เมื่อ $f_3(x)$ เป็นพหุนามใน x สมมติว่ามีดีกรี $n_3<n_2$ ถ้า $f_3(x)\neq 0$ และ $n_3\geq m$ เราสามารถจะหาค่า c_{k-3} โดยที่

$$f_3(x)=c_{k-3}\cdot x^{n_3-m}\cdot g(x)+f_4(x) \tag{8}$$

โดยกระบวนวิธีการกระทำต่อเนื่องดังกล่าวต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้

$f_k(x)=c_0x^{n_k-m}\cdot g(x)+f_{k+1}(x)$ เมื่อ $f_{k+1}(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรี $n_{k+1}<m$ หรือ $f_{k+1}(x)=0$ จะได้ว่า

$$f(x)=\left(c_0x^{n_k-m}+c_1x^{n_{k-1}-m}+c_2x^{n_{k-2}-m}\ldots+c_{k-1}x^{n_1-m}+c_kx^{n-m}\right)g(x)+f_{k+1}(x)$$

กำหนดให้ $q(x)=c_0x^{n_k-m}+c_1x^{n_{k-1}-m}+c_2x^{n_{k-2}-m}+\ldots+c_{k-1}x^{n_1-m}+c_kx^{n-m}$ และ $r(x)=f_{k+1}(x)$ จะได้ว่า

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x) \tag{9}$$

เมื่อดีกรีของ $r(x)<m$ หรือ $r(x)=0$ จาก (5) จะได้ว่า $q(x)$ เป็นผลหารของ $f(x)\div g(x)$ และ $r(x)$ เป็นเศษของการหาร โดยกระบวนวิธีการดังกล่าวสามารถนำมาแจกแจงแสดงวิธีการหารได้ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.11 จงหาค่า $(x^8+x^7+3x^4-1)\div(x^4-3x^3+4x-1)$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r}
x^4+4x^3+12x^2+32x+84 \\
x^4-3x^3+0\cdot x^2+4x-1\overline{\big)\,x^8+x^7+0\cdot x^6+0\cdot x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-1} \\
\underline{x^8-3x^7+0\cdot x^6+4x^5-x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
4x^7+0\cdot x^6-4x^5+4x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-1 \\
\underline{4x^7-12x^6+0\cdot x^5+16x^4-4x^3} \qquad\qquad\qquad \\
12x^6-4x^5-12x^4+4x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-1 \\
\underline{12x^6-36x^5+0\cdot x^4+48x^3-12x^2} \qquad\quad \\
32x^5-12x^4-44x^3+12x^2+0\cdot x-1 \\
\underline{32x^5-96x^4+0\cdot x^3+128x^2-32x} \\
84x^4-44x^3-116x^2+32x-1 \\
\underline{84x^4-252x^3+0\cdot x^2+336x-84} \\
\underline{208x^3-116x^2-304x+83}
\end{array}
$$

จะได้ว่า $(x^8+x^7+3x^4-1)\div(x^4-3x^3+4x-1)=x^4+4x^3+12x^2+32x+84$ เหลือเศษเท่ากับ $208x^3-116x^2-304x+83$

ในการหารพหุนาม เราจะเห็นว่าค่าที่มีบทบาทสำคัญในกระบวนการหาร คือ สัมประสิทธิ์ของพหุนามทั้งของตัวตั้งและตัวหาร ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการหารเราอาจใช้วิธีการแยกสัมประสิทธิ์ (Method of detached coefficient) เช่นเดียวกับกระบวนวิธีการคูณที่กล่าวมาแล้ว

ตัวอย่าง 2.12 จากโจทย์ในตัวอย่าง 2.11 หาผลหารโดยวิธีแยกสัมประสิทธิ์ ได้ดังนี้

วิธีทำ

ตัวตั้ง

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
1	1	0	0	3	0	0	0	−1
1	−3	0	4	−1				
4	0	−4	4	0				
4	−12	0	16	−4				
	12	−4	−12	4	0			
	12	−36	0	48	−12			
		32	−12	−44	12	0		
		32	−96	0	128	−32		

ตัวหาร

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
1	−3	0	4	−1

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
1	4	12	32	84

ผลหาร

$$\begin{array}{rrrrr} 84 & -44 & -116 & 32 & -1 \\ 84 & -252 & 0 & 336 & -84 \\ \hline & 208 & -116 & -304 & 83 \end{array}$$

จะได้ว่า $(x^8+x^7+3x^4-1)\div(x^4-3x^3+4x-1) = x^4+4x^3+12x^2+32x+84$ เหลือเศษเท่ากับ $208x^3-116x^2-304x+83$

2.2.5 ทฤษฎีเศษเหลือ (The Remainder Theorem)

การหาเศษเหลือของการหารพหุนาม $f(x)$ ด้วย $(x-c)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ เราสามารถหาได้โดยไม่ต้องแสดงกระบวนการหาร โดยใช้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 (The Remainder Theorem) ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 และ c เป็นค่าคงที่ใดๆ เศษเหลือที่เกิดจากการหาร $f(x)$ ด้วย $(x-c)$ เท่ากับ $f(c)$

บทแทรก 2.1 $f(x)$ หารด้วย $(x-c)$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $f(c)=0$

<u>**ตัวอย่าง 2.13**</u> กำหนดให้ $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ จงแสดงให้เห็นว่า $f(x)$ หารด้วย $x+3$ ลงตัว

วิธีทำ จาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

จะได้ว่า $f(-3)=-27+9+15+3=0$ เป็นเศษที่เหลือเมื่อ $f(x)$ หารด้วย $x+3=x-(-3)$ โดยบทแทรกของทฤษฎีเศษเหลือ สรุปได้ว่า $f(x)$ หารด้วย $x+3$ ลงตัว

2.2.6 การหารแบบสังเคราะห์ (Synthetic Division)

กำหนดให้ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n การหาผลเฉลยและเศษเหลือจากการหาร $f(x)$ ด้วย $(x-c)$ อาจกระทำได้โดยการหารแบบสังเคราะห์ โดยอาศัยกระบวนการวิธีดังต่อไปนี้

จากทฤษฎีเศษเหลือ สมมติให้ $f(x)$ หารด้วย $(x-c)$ ได้ผลลัพธ์ $g(x)$ เศษเหลือเท่ากับ r

จะได้ว่า $f(x)=(x-c)g(x)+r$ โดยที่ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี $n-1$ และ

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^{n-1}$

จะได้ว่า $(x-c)g(x)=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-cb_{n-1})x^{n-1}+(b_{n-3}-cb_{n-2})x^{n-2}+\ldots+(b_0-cb_1)x-cb_0$

แต่ $f(x)=(x-c)g(x)+r=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

จะได้ว่า $b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-cb_{n-1})x^{n-1}+(b_{n-3}-cb_{n-2})x^{n-2}+\ldots+(b_0-cb_1)x+(r-cb_0)$
$=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ โดยคุณสมบัติการเท่ากันของพหุนาม จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n\\
b_{n-2}-cb_{n-1} &= a_{n-1} \rightarrow b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}=a_{n-1}+ca_n\\
b_{n-3}-cb_{n-2} &= a_{n-2} \rightarrow b_{n-3}=a_{n-2}+cb_{n-2}\\
b_{n-4}-cb_{n-3} &= a_{n-3} \rightarrow b_{n-4}=a_{n-3}+cb_{n-3}\\
&\vdots\\
b_0-cb_1 &= a_1 \rightarrow b_0=a_1+cb_1\\
r-cb_0 &= a_0 \rightarrow \boxed{r=a_0+cb_0} \longrightarrow \text{เป็นเศษเหลือ}
\end{aligned}
$$

จากกระบวนการวิธีดังกล่าวนี้ นำมาสร้างแบบการหารแบบสังเคราะห์ของ $f(x)\div(x-c)$ ได้ดังนี้ จัดเรียงสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ ของ $f(x)$ ตามลำดับดีกรีจากมากไปน้อย ดังรูปต่อไปนี้

$$
\begin{array}{cccccc|l}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 & c\\
 & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \ldots & cb_1 & cb_0 & \\
\hline
a_n=b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_0 & r &
\end{array}
$$

$\longrightarrow$ เศษเหลือของการหาร $f(x)\div(x-c)$

__ตัวอย่าง 2.14__ จงหาผลหารและเศษเหลือ เมื่อ $3x^6-7x^5+5x^4-x^2-6x-8$ หารด้วย $x+2$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{ccccccc}
3 & -7 & 5 & 0 & -1 & -6 & -8\\
 & -6 & 26 & -62 & 124 & -246 & 504\\
\hline
3 & -13 & 31 & -62 & 123 & -252 & \boxed{496}
\end{array}
$$

ดังนั้น $3x^6-7x^5+5x^4-x^2-6x-8$ หารด้วย $x+2$ เศษเหลือเท่ากับ 496

2.2.7 กระบวนวิธีของฮอร์เนอร์ (Horner's Process)

พิจารณา x^m เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก c เป็นค่าคงที่ใด จาก $x^m = \left[c+\left(x-c\right)\right]^m$ โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$x^m = c^m + mc^{m-1}\left(x-c\right) + \frac{m\left(m-1\right)}{2!}c^{m-2}\left(x-c\right)^2 + ... + \frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)...2.1}{m!}\left(x-c\right)^m$$

จะเห็นว่า x^m สามารถกระจายให้อยู่ในรูปผลบวกของกำลังของ $x-c$ ได้ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว $f\left(x\right)$ สามารถกระจายในรูปผลบวกของกำลังของ $x-c$ ได้ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

สมมติให้ $f(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + ... + A_n(x-c)^n$ เมื่อ $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นค่าคงที่สามารถหาค่าได้โดยกระบวนการหารแบบสังเคราะห์ เมื่อ $f(x)$ หารด้วย $x-c$ แบบต่อเนื่องไปเรื่อยๆ ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 $f\left(x\right) = A_0 + \left(x-c\right)f_1\left(x\right)$

เมื่อ $f_1\left(x\right) = A_1 + A_2\left(x-c\right) + A_3\left(x-c\right)^2 + ... + A_n(x-c)^{n-1}$ ซึ่ง A_0 คือ เศษเหลือ เมื่อ $f\left(x\right)$ หารด้วย $x-c$

ขั้นที่ 2 $f_1\left(x\right) = A_1 + \left(x-c\right)f_2\left(x\right)$

เมื่อ $f_2\left(x\right) = A_2 + A_3\left(x-c\right) + A_4\left(x-c\right)^2 + ... + A_n(x-c)^{n-2}$ ซึ่ง A_1 คือ เศษเหลือ เมื่อ $f_1\left(x\right)$ หารด้วย $x-c$

ขั้นที่ 3 $f_2\left(x\right) = A_2 + \left(x-c\right)f_3\left(x\right)$

เมื่อ $f_3\left(x\right) = A_3 + A_4\left(x-c\right) + A_5\left(x-c\right)^2 + ... + A_n(x-c)^{n-3}$ ซึ่ง A_3 คือ เศษเหลือ เมื่อ $f_2\left(x\right)$ หารด้วย $x-c$

กระทำเช่นนี้ต่อเนื่องไปเรื่อยๆ จะได้ว่า

ขั้นที่ n $f_{n-1}\left(x\right) = A_{n-1} + \left(x-c\right)f_n\left(x\right)$ เมื่อ $f_4\left(x\right) = A_n$ และ A_{n-1} คือ เศษเหลือ $f_{n-1}\left(x\right)$ หารด้วย $x-c$

กระบวนการหาสัมประสิทธิ์ $A_0, A_1, A_3, ..., A_n$ ดังกล่าวนี้เรียกว่า **กระบวนวิธีของฮอร์เนอร์ (Horner's Process)** และกระบวนวิธีหาเศษเหลือ เมื่อ $f_i\left(x\right) \div \left(x-c\right)$ สามารถใช้วิธีสังเคราะห์การหารได้

<u>**ตัวอย่าง 2.15**</u> กำหนดให้ $f\left(x\right) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^3 + x^2 - x - 1$ จงกระจาย $f\left(x\right)$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $\left(x-1\right)$

วิธีทำ โดยใช้วิธีการสังเคราะห์การหาร กระทำได้ดังนี้

ให้ $f\left(x\right)=A_0+A_1\left(x-1\right)+A_2\left(x-1\right)^2+A_3\left(x-1\right)^3+A_4\left(x-1\right)^4+A_5\left(x-1\right)^5$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	
4	-6	3	1	-1	-1	1
4	-2	1	2	1		
4	-2	1	2	1	$0=A_0$	
4	2	3	5			
4	2	3	5	$6=A_1$		
4	6	9				
4	6	9	$14=A_2$			
4	10					
4	10	$19=A_3$				
4						
4	$14=A_4$					
$4=A_5$						

ดังนั้น $f(x)=0+6(x-1)+14(x-1)^2+19(x-1)^3+14(x-1)^4+4(x-1)^5$

$$=6(x-1)+14(x-1)^2+19(x-1)^3+14(x-1)^4+4(x-1)^5$$

2.2.8 สูตรของเทเลอร์ (Taylor's Formula)

กำหนดให้ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n จากทฤษฎีการหาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+...+n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+5\cdot 4\cdot 3a_5x^2+...+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=(n(n-1)(n-2)(n-3)...3\cdot 2\cdot 1)a_n$$

ซึ่งจะได้ว่า $f'(x),f''(x),f'''(x),.....,f^{(n)}(x)$ หาค่าได้ สำหรับ x ใดๆ สมมติว่า เราต้องการกระจาย $f(x)$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x-c)$ กระทำได้ดังกระบวนวิธีต่อไปนี้

กำหนดให้ $f(x)=A_0+A_1(x-c)+A_2(x-c)^2+...+A_n(x-c)^n$ จะได้ว่า

$$f(c) = A_0$$

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-c) + 3A_3(x-c)^2 + ... + nA_n(x-c)^{n-1}$$

$$f'(c) = A_1$$

$$f''(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-c) + 4\cdot 3A_4(x-c)^2 + ... + n(n-1)A_n(x-c)^{n-2}$$

$$f''(c) = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{f''(c)}{2} = \frac{f''(c)}{2!}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2A_3 + 4\cdot 3\cdot 2A_4\left(x-c\right) + ... + n\left(n-1\right)\left(n-2\right)A_n\left(x-c\right)^{n-3}$$

$$f'''(c) = 3\cdot 2A_3 \to A_3 = \frac{f'''(c)}{3\cdot 2} = \frac{f'''(c)}{3!}$$

.

.

.

$$(n+1) \to f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)...3\cdot 2\cdot 1A_n$$

และ $f^{n}(c) = n!A_n \to A_n = \dfrac{f^{n}(c)}{n!}$

ดังนั้น $f(x) = f(c) + \dfrac{f'(c)}{1!}(x-c) + \dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

สรุปได้ว่า ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว $f\left(x\right)$ สามารถเขียนในรูปผลบวกของกำลังของ $\left(x-c\right)$ ได้ดังนี้

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}\left(x-c\right) + \frac{f''(c)}{2!}\left(x-c\right)^2 + ... + \frac{f^{(n)}\left(c\right)}{n!}\left(x-c\right)^n$$

สูตรนี้เรียกว่า สูตรของเทเลอร์ (Taylor’s Formula)

<u>ตัวอย่าง 2.16</u> จงใช้สูตรของเทเลอร์กระจายพหุนาม

$4x^3 - 7x^2 + 5x + 3$ ในรูปผลบวกกำลังของ $\left(x-2\right)$

วิธีทำ $4x^3 - 7x^2 + 5x + 3$ โดยใช้สูตรของเทเลอร์จะได้ว่า

$$f(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!} + (x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3$$

$$f(-2) = 4(-8) - 7(4) + 5(-2) + 3 = -67$$

$$f'(x) = 12\,x^2 - 14x + 5$$

$$f'(-2) = 12(4) - 14(-2) + 15 = 81$$

$$f''(x) = 24x - 14$$

$$f''(-2) = -48 - 14 = -62$$

$$f'''(x) = 24$$

$$f'''(-2) = 24$$

ดังนั้น $4x^3-7x^2+5x+3=-67+81(x+2)-\frac{62}{2!}(x+2)^2+\frac{24}{3!}(x+2)^3$

$$=-67+81(x+2)-31(x+2)^2+4(x+2)^3$$

2.2.9 ตัวหารร่วมมากของพหุนามสองพหุนาม

นิยาม 2.6 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใดๆ ถ้ามีพหุนาม $g(x)$ โดยที่ $P(x)=g(x)\cdot Q(x)$ แล้วเรียกว่า $P(x)$ หารด้วย $Q(x)$ ลงตัว แทนด้วย $\langle Q(x)\,|\,P(x)\rangle$ เรียก $Q(x)$ เป็นตัวหาร หรือตัวประกอบของ $P(x)$

<u>ตัวอย่าง 2.17</u> ให้ $P(x)=x^4+4x^3+4x^2-x-2$ และ $Q(x)=x^2+x-1$

เพราะว่า $P(x)=(x^2+3x+2)(x^2+x-1)$

ดังนั้น $\langle Q(x)\,|\,P(x)\rangle$ หรือ x^2+x-1 เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^4+4x^3+4x^2-x-2$

นิยาม 2.7 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใดๆ ถ้าเป็นพหุนามที่ $\langle g(x)\,|\,P(x)\rangle$ และ $\langle g(x)\,|\,Q(x)\rangle$ แล้ว $g(x)$ เป็นตัวหาร $P(x)$ และ $Q(x)$

<u>ตัวอย่าง 2.18</u> ให้ $f(x)=(x+1)(x+2)(x^2+x-1)$

$g(x)=(x+1)(x+2)(x^4-x^3+x^2+1)$

จะได้ว่า $(x+1)(x+2)$ และ x^2+3x+2 เป็นตัวหารร่วม $f(x)$ และ $g(x)$

นิยาม 2.8 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใดๆ ตัวหารร่วมของ $P(x)$ และ $Q(x)$ ที่มีดีกรีสูงสุด เรียก พหุนามนั้นว่าเป็นตัวหารร่วมมากของ $P(x)$ และ $Q(x)$

2.3 ค่ารากของสมการเชิงพีชคณิต

2.3.1 สมการเชิงพีชคณิต (Algebraic Equation)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ที่มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนและมีดีกรี $n\geq 1$ จากนิยาม 2.1 เราทราบว่า $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนาม ซึ่ง ณ ที่นี้ จะเรียกว่า $f(x)=0$ เป็น **สมการเชิงพีชคณิตดีกรี** n เช่น

ในกรณีที่ $n=1$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x=0$ เรียกว่า สมการเชิงเส้น (Linear equation)

ในกรณีที่ $n=2$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x+a_2x^2=0$ เรียกว่า สมการกำลังสอง (Quadratic equation)

ในกรณีที่ $n=3$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$ เรียกว่า สมการ กำลังสาม (Cubic equation)

ในกรณีที่ $n=4$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=0$ เรียกว่า สมการกำลังสี่ (Biquadratic equation) เป็นต้น

c จะเรียกว่า เป็นรากของสมการ $f(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $f(c)=0$ จากความหมายของค่ารากของสมการพหุนาม เราอาจพิจารณาหาค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ได้ โดยอาศัยกระบวนวิธีคิดดังต่อไปนี้

1. ถ้า c_1 เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะได้ว่า $f(c_1)=0$ โดยทฤษฎีเศษเหลือ จะได้ว่า $(x-c_1)\mid f(x)$ ดังนั้นจะมีพหุนาม $f_1(x)$ ที่มีดีกรี $n-1$ โดยที่

$$f(x)=(x-c_1)\cdot f_1(x) \tag{10}$$

2. ถ้า c_2 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ และ $c_2\neq c_1$ จะได้ว่า $f(c_2)=0$ และ $f_1(c_2)=0$ (เพราะว่า $c_2-c_1\neq 0$) ดังนั้น จะมีพหุนาม $f_2(x)$ ที่มีดีกรี $n-2$ โดยที่

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)\cdot f_2(x) \tag{11}$$

3. ถ้า c_3 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f(x)=0$ โดยที่ $c_3\neq c_2$ และ $c_3\neq c_1$ โดยเหตุผลเช่นเดียวกันกับข้อ (1) และ (2) จะมีพหุนาม $f_3(x)$ ที่มีดีกรี $n-3$ โดยที่

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\cdot f_3(x) \tag{12}$$

โดยกระบวนวิธีคิดเช่นเดียวกันกับ ข้อ (1), (2) และ (3) กระทำต่อเนื่องกันไปเรื่อย ๆ จะได้ว่า $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)=0$ ซึ่งสรุปได้ว่า $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n$ เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ทั้งหมด n ค่าที่ต่างกัน

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ค่ารากที่ต่างกันของ $f(x)=0$ มีได้ n ค่า

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ c_1 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f(x)=0$ โดยที่ $f(x)=(x-c_1)f_1(x)$ เมื่อ $f_1(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี $n-1$ ถ้า

$c_2 \neq c_1$ และ c_2 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f_1(x)=0$ แล้ว c_2 จะเป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

นิยาม 2.9 กำหนดให้ $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x)=(x-c_1)f_1(x)$ เมื่อ $f_1(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี $n-1$ $f_1(x)=0$ เรียกว่า **สมการลดกำลัง** ของ $f(x)=0$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทที่ 2.3 การแก้สมการพหุนาม $f(x)=0$ อาจกำหนดกระบวนวิธีในการแก้สมการได้ดังนี้

1. หาค่ารากค่าหนึ่งของ $f(x)=0$ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ สมมติว่า $f(c_1)=0$ จะได้ว่า c_1 เป็นค่ารากค่าหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

2. จาก (1) นำ $(x-c_1)$ ไปหาร $f(x)$ สมมติว่าได้ผลลัพธ์เท่ากับ $f_1(x)$ จะได้ว่า $f(x)=(x-c_1)f_1(x)=0$

พิจารณาหาค่ารากของสมการลดกำลังของ $f(x)=0$ ซึ่งก็คือ สมการ $f_1(x)=0$ ค่ารากของสมการ $f_1(x)=0$ ก็จะเป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ด้วย กระทำโดยวิธีการดังกล่าวต่อเนื่องไปเรื่อยๆ จนถึงการหาค่ารากของสมการลดกำลังสุดท้ายของ $f(x)=0$ ซึ่งจะอยู่ในรูป $a_1 x + a_0 = 0$ ค่ารากของสมการลดกำลังทั้งหมดของ $f(x)=0$ ทั้งหมดจะเป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$

<u>**ตัวอย่าง 2.19**</u> จงแก้สมการ $x^4-5x^2-10x-6=0$

วิธีทำ ให้ $f(x)=x^4-5x^2-10x-6=0$

เพราะว่า $f(-1)=(-1)^4-5(-1)^2-10(-1)-6=0$

ดังนั้น -1 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f(x)=0$

พิจารณา $f(x)\div(x+1)$

x^4	x^3	x^2	x	x^0	$\lfloor -1$
1	0	−5	−10	−6	
	−1	1	4	6	
1	−1	−4	−6	$\boxed{0}$	

จะได้ว่า $f(x)=(x+1)(x^3-x^2-4x-6)$

ให้ $f_1(x)=x^3-x^2-4x-6$

เพราะว่า $f_1(3)=(3)^3-(3)^2-4(3)-6=0$

ดังนั้น 3 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f_1(x)=0$

พิจารณา $f_1(x)\div(x-3)$

$$\begin{array}{cccc|l} x^3 & x^2 & x & x^0 & 3 \\ \hline 1 & -1 & -4 & -6 & \\ & 3 & 6 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

จะได้ว่า $f_1(x)=(x-3)(x^2+2x+2)$

ดังนั้น $f(x)=(x+1)(x-3)(x^2+2x+2)=0$

พิจารณา หาค่ารากของสมการ $x^2+2x+2=0$ ซึ่งหาได้โดยใช้สูตรการแก้สมการกำลังสองในรูป $ax^2+bx+c=0$

จะได้ว่า $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ เมื่อ $b=2$,$a=1$ และ $c=2$

จะได้ว่า
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}$$
$$=\frac{-2\pm 2i}{2}$$
$$=-1\pm i$$

ดังนั้น $f(x)=(x+1)(x-3)(x+1-i)(x+1+i)=0$

นั้นคือ ค่ารากของสมการ $x^4-5x^2-10x-6=0$ คือ -1 3 $-1+i$ และ $-1-i$

<u>**ตัวอย่าง 2.20**</u> จงหาค่ารากของสมการ $x^3+4x^2-47x-210=0$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x)=x^3+4x^2-47x-210$

เพราะว่า $f(-5)=(-5)^3+4(-5)^2-47(-5)-210$
$$=-125+100+235-210$$
$$=0$$

จะได้ว่า -5 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

พิจารณา หา $f(x)\div(x+5)$ ดังนี้

x^3	x^2	x	x^0	
1	4	−47	−210	−5
	−5	5	210	
1	−1	−42	$\boxed{0}$	

จะได้ว่า $f(x)=(x+5)(x^2-x-42)$

ให้ $f_1(x)=x^2-x-42$

เพราะว่า $f_1(7)=(7)^2-7-42=0$

ดังนั้น 7 เป็นค่ารากหนึ่งของ $f_1(x)=0$

พิจารณา $f_1(x)\div(x-7)$ ดังนี้

x^2	x	x^0	
1	−1	−42	7
1	6	$\boxed{0}$	

จะได้ว่า $x^2-x-42=(x+6)(x-7)$ ดังนั้น $f(x)=(x+5)(x+6)(x-7)=0$
นั้นคือ ค่ารากของสมการ $x^3+4x^2-47x-210=0$ คือ −6 −5 และ 7

2.3.2 ทฤษฎีเอกลักษณ์และทฤษฎีพื้นฐานทางพีชคณิต

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n ถ้า $f(x)=0$ มีค่ารากที่ต่างกันมากกว่า n ค่า แล้ว $a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=\ldots=a_1=a_0=0$

ทฤษฎีบท 2.5 (Identity Theorem) ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n สองพหุนามใดๆ โดยที่ $f(x)=g(x)$ สำหรับค่า x ที่ต่างกันมากกว่า n ค่าแล้ว $f(x)$ และ $g(x)$ จะเป็นพหุนามเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2.6 (Fundamental Theorem of Algebra) ทุกสมการเชิงพีชคณิตที่สัมประสิทธิ์แต่ละพจน์เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จะมีค่ารากเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนจินตภาพอย่างน้อยหนึ่งค่ารากเสมอ

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 2.6 ถือว่าเป็นทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับการแก้สมการเชิงพีชคณิต เปรียบเสมือนข้อตกลงให้ทราบว่า ทุกสมการเชิงพีชคณิตจะมีค่ารากอย่างน้อยหนึ่งค่าเสมอเมื่อกล่าวในเอกภพของจำนวนเชิงซ้อน การพิสูจน์มีหลายรูปแบบที่ซับซ้อนมาก ดังนั้น ณ ที่นี้จะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์จะถือเสมือนเป็นข้อตกลงพื้นฐานเพื่อเป็นหลักในการศึกษาทฤษฎีสมการต่อไป

ทฤษฎีบท 2.7 ถ้า $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $f(x)$ สามารถจะเขียนในรูป

$$f(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)$$

เมื่อ $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n$ เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.7

1. ถ้า $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว สามารถเขียน $f(x)$ ในรูปของตัวประกอบเชิงเส้นได้ n ตัว
2. ตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$ อาจจะมีซ้ำกันได้ ดังเช่น

ถ้า $(x-a)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$ มีซ้ำกัน n_1 ตัว

$(x-b)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$ มีซ้ำกัน n_2 ตัว

$(x-c)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$ มีซ้ำกัน n_3 ตัว

.

.

.

$(x-1)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$ มีซ้ำกัน n_k ตัว

เมื่อ $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_{n_k}=n$ แล้ว $f(x)=a_n(x-a)^{n_1}\cdot(x-a)^{n_2}\cdot(x-a)^{n_3}\cdot\ldots\cdot(x-l)^{n_k}$

นิยาม 2.10 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x)=(x-c)^m\cdot g(x)$ เมื่อ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x และ c ไม่ใช่ค่ารากของ $g(x)=0$ แล้วเรียกว่า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของ $f(x)=0$

หมายเหตุ จากบทนิยาม 2.10

ในกรณีที่ $m=1$; c เรียกว่า รากเชิงเดียว (Simple root) ของ $f(x)=0$

ในกรณีที่ $m=2$; c เรียกว่า รากซ้ำที่สอง (Double root) ของ $f(x)=0$

ในกรณีที่ $m=3\,;c$ เรียกว่า รากซ้ำที่สาม (Triple root) ของ $f(x)=0$

ในกรณีที่ $m=4\,;c$ เรียกว่า รากซ้ำที่สี่ (Quadruple root) ของ $f(x)=0$

และ ในกรณีที่ $m=p\,;c$ เรียกว่า รากซ้ำที่ p ของ $f(x)=0$

ตัวอย่าง 2.21

(1) ให้ $f(x)=x^2+2x+1=0$

จะได้ว่า -1 เป็นค่ารากซ้ำที่สองของ $f(x)=0$

ทั้งนี้เพราะว่า $f(x)=(x+1)^2=0$

(2) ให้ $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-x=0$

จะได้ว่า $f(x)=x(x-1)^3=0$ และ 0 เป็นค่ารากเชิงเดียวของ $f(x)=0$ และ 1 เป็นค่ารากซ้ำที่สามของ $f(x)=0$

ทฤษฎีบท 2.8 ถ้า $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ที่มี $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_k$ เป็นค่ารากที่ต่างกันของสมการ $f(x)=0$ และเป็นค่ารากซ้ำที่ $m_1,m_2,m_3,\ldots,m_k$ ตามลำดับ แล้ว $f(x)=a_n(x-c_1)^{m_1}\cdot(x-c_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-c_k)^{m_k}=0$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{k}m_i=n$

ทฤษฎีบท 2.9 สมการพหุนามดีกรี n จะมีจำนวนค่ารากทั้งหมด n ค่า โดยนับรวมจำนวนค่ารากซ้ำ

ทฤษฎีบท 2.10 ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ แล้ว c เป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f^{'}(x)=0$ ด้วย เมื่อ $f(x)$ เป็นพหุนามใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.11 กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ c เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f'(x)=0$ แล้ว c จะเป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

ทฤษฎีบท 2.12 กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m สมการ $f(x)=0$ แล้ว $f(c)=f'(c)=f''(c)=f'''(c)=\ldots=f^{m-1}(c)=0$

<u>**ตัวอย่าง 2.22**</u> กำหนดให้ $f(x)=x^4-4x+3$ จะเห็นว่า 1 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ จงพิจารณาว่า 1 เป็นค่ารากซ้ำที่เท่าไรของสมการ $f(x)=0$

วิธีทำ จาก $f(x)=x^4-4x+3$

$$f'(x)=4x^3-4$$

$$f'(1)=4(1)^3-4=0$$

$$f''(x)=12x^2$$

$$f''(1)=12\neq 0$$

ดังนั้น 1 เป็นค่ารากซ้ำที่ 2 ของสมการ $x^4-4x+3=0$ และ $(x-1)^2 \mid (x^4-4x+3)$ แต่ x^4-4x+3 หารด้วย $(x-1)^3$ ไม่ลงตัว

<u>**ตัวอย่าง 2.23**</u> กำหนดให้ $f(x)=x^4+10x^3+24x^2-32x-128$ จงแก้สมการ $f(x)=0$ โดยการพิจารณาค่ารากซ้ำ

วิธีทำ พิจารณา $f(x)=x^4+10x^3+24x^2-32x-128$

เพราะว่า $f(-4)=(-4)^4+10(-4)^3+24(-4)^2-32(-4)-128$

$$=256-640+384+128-128$$

$$f(-4)=0$$

ดังนั้น -4 เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$

พิจารณาว่า -4 เป็นค่ารากซ้ำหรือไม่ ดังนี้

$$f'(x)=4x^3+30x^2+48x-32$$

$$f'(-4)=4(-4)^3+30(-4)^2+48(-4)-32$$

$$=-256+480-192-32=0$$

$$f''(x)=12x^2+60x+48$$

$$f''(-4)=12(-4)^2+60(-4)+48=192-240+48=0$$

$$f'''(x)=24x+60$$

$$f'''(-4)=24(-4)+60=-96+60\neq 0$$

เพราะฉะนั้น -4 เป็นค่ารากซ้ำ 3 ของสมการ $x^4+10x^3+24x^2-32x-128=0$

ซึ่งจะได้ว่า $x^4+10x^3+24x^2-32x-128=(x+4)^3\cdot(x+2)=0$

ดังนั้น ค่ารากของสมการ $x^4+10x^3+24x^2-32x-128=0$ คือ -4 -4 -4 และ 2

2.3.3 ค่ารากจินตภาพของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.13 ถ้า $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์ทุกเทอมเป็นจำนวนจริงและมี $a+bi$ เป็นค่ารากซ้ำที่ k แล้ว $a+bi$ จะเป็นค่ารากซ้ำที่ k ของสมการ $f(x)=0$

หมายเหตุ

1. ถ้า $a+bi$ เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ แล้ว $a+bi$ จะเป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

2. จำนวนค่ารากจินตภาพของสมการ $f(x)=0$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงจะมีเป็นจำนวนคู่แต่ละคู่จะเป็นจำนวนสังยุคของกันและกันและถ้าจำนวนรากจินตภาพของ $f(x)=0$ เป็น $2r$ และจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงเป็น s จะได้ว่า $2r+s=n$

3. ในกรณีที่ ดีกรีของ $f(x)$ เป็นจำนวนจริงบวกคี่ ค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะมีอย่างน้อยหนึ่งค่าที่เป็นจำนวนจริง

4. ในกรณีที่ดีกรีของ $f(x)$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ของสมการ $f(x)=0$ มีค่ารากเป็นจำนวนจินตภาพค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะเป็นจำนวนจินตภาพทั้งหมด

<u>**ตัวอย่าง 2.24**</u> สมการ $x^4+1=0$ มีค่ารากเป็น $\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$$x^4+1=(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}})(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1+i}{\sqrt{2}})(x+\frac{1-i}{\sqrt{2}})$$

$$=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

มีสัมประสิทธิ์ของตัวประกอบเป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.14 ถ้า $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n มีสัมประสิทธิ์แต่ละพจน์เป็นจำนวนตรรกยะและมี $a+\sqrt{b}$ เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ โดยที่ a เป็นจำนวนตรรกยะและ $\sqrt{b}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $a-\sqrt{b}$ จะเป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

<u>ตัวอย่าง 2.25</u> จงแก้สมการ $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ เมื่อมีค่ารากหนึ่งเป็น $2 + 3i$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$

เนื่องจาก $2 + 3i$ เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x) = 0$

ดังนั้น $2 - 3i$ เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x) = 0$ ด้วย

จะได้ว่า $f(x) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)g(x)$

$= (x^2 - 4x + 13)g(x)$

เมื่อ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี 2

จะได้ว่า $g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

ดังนั้น $f(x) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)(x+1)^2 = 0$

เพราะฉะนั้น ค่ารากของสมการ $f(x) = 0$ คือ $2 + 3i$ $2 - 3i$ -1 และ -1

2.3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่ารากและสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ ในสมการ

พิจารณาการกระจายผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

1. $(x + b_1)(x + b_2) = x^2 + (b_1 + b_2)x + b_1b_2$

2. $(x + b_1)(x + b_2)(x + b_3) = x^3 + (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x + b_1b_2b_3$

3. $(x + b_1)(x + b_2)(x + b_3)(\mathrm{x} + \mathrm{b}_4) = x^4 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)x^3 + (b_1b_2 + b_1b_3 +$

$+ \mathrm{b}_3\mathrm{b}_4)x^2 + (b_1b_2b_3 + b_1b_2b_3 + b_1b_3\,\mathrm{b}_4 + \mathrm{b}_2\mathrm{b}_3\mathrm{b}_4)x + b_1b_2b_3b_4b_1b_4 + \mathrm{b}_2\mathrm{b}_3 + \mathrm{b}_2\mathrm{b}_4$

จากตัวอย่างการกระจายพหุนาม ในข้อ 1 2 3 จะเห็นว่า

1. เมื่อดีกรีของพหุนาม $n = 2$ เทอมที่มีดีกรีสูงสุดเป็นเทอม x^2 สัมประสิทธิ์ของ x เท่ากับ $(b_1 + b_2)$ และเทอมตัวคงค่าเท่ากับ b_1b_2

2. เมื่อดีกรีของพหุนาม $n = 3$ เทอมที่มีดีกรีสูงสุดเป็น x^3 สัมประสิทธิ์ของเทอม x^2 เท่ากับ $(b_1 + b_2 + b_3)$ สัมประสิทธิ์ของเทอม x เท่ากับ $(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)$ ซึ่งก็คือ ผลบวกของ b_1, b_2, b_3 โดยเลือกมาคูณกันครั้ง 2 จำนวน และเทอมตัวคงค่าเท่ากับผลคูณของ b_1, b_2, b_3

3. เมื่อดีกรีของพหุนาม $n = 4$ เทอมที่มีดีกรีสูงสุดเท่ากับ x^4

สัมประสิทธิ์ของเทอม x^3 เท่ากับผลบวกของ b_1, b_2, b_3 และ b_4

สัมประสิทธิ์ของเทอม x^2 เท่ากับผลบวกของผลคูณระหว่าง b_1, b_2, b_3 และ b_4 โดยนำมาคูณครั้งละ 2 ตัว

สัมประสิทธิ์ของเทอม x เท่ากับผลบวกของผลคูณระหว่าง b_1, b_2, b_3 และ b_4

โดยนำมาคูณกันครั้งละ 3 ตัว เทอมตัวคงค่าเท่ากับผลคูณของ b_1, b_2, b_3 และ b_4

จากข้อสังเกตดังกล่าวจะเห็นว่า เราอาจพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างค่ารากของสมการ $f(x)=0$ กับสัมประสิทธิ์ในแต่ละเทอมของสมการได้ดังนี้

กำหนดให้ $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ และมี $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$

จะได้ว่า $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)=0$

หรือ $$(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)...(x-c_n)=x^n+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+...+a_n \qquad (13)$$

เนื่องจาก $$(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)...(x-c_n)=x^n-S_1x^{(n-1)}+S_2x^{(n-2)}+...+(-1)^n(S_n) \qquad (14)$$

เมื่อ

$S_1=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n$

$S_2=$ ผลบวกของผลคูณครั้งละ 2 ค่าราก

$S_3=$ ผลบวกของผลคูณครั้งละ 3 ค่าราก

.

.

.

$S_i=$ ผลบวกของผลคูณครั้งละ i ค่าราก

.

.

.

$S_n=c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot\ldots\cdot c_n$

จาก (13) และ (14) จะได้ว่า

$S_1=-a_1$

$S_2=a_2$

$S_3=-a_3$

.

.

.

$S_i=(-1)^i a_i$

.

.

.

$S_n=(-1)^n a_n$

หมายเหตุ ในกรณีสมการ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ และ $a_0\neq 1$ และ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ หรือ

$a_0(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)=0$

จะได้ว่า $a_0 S_1 = -a_1 \to S_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$$a_0 S_2 = a_2 \to S_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$a_0 S_3 = -a_3 \to S_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$a_0 S_n = (-1)^n a_n \to S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

<u>ตัวอย่าง 2.26</u> จงแก้สมการ $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ เมื่อผลคูณของค่าราก 2 ค่า มีค่าเท่ากับ 1

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = 3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ มี a ,b และ c เป็นค่าราก 3 ค่า โดยความสัมพันธ์ระหว่างค่ารากของสมการและสัมประสิทธิ์ของแต่ละเทอมในสมการ

จะได้ว่า $(a+b+c) = -\dfrac{16}{3} \to (a+b+c) = \dfrac{16}{3}$

$$ab + ac + bc = \frac{23}{3}$$

$$-(abc) = -\frac{6}{3} \to abc = 2$$

สมมติให้ $ab = 1$ (ตามโจทย์กำหนดให้)

จะได้ว่า $c = 2$

$$1 + 2a + 2b = \frac{23}{3} \to a + b = \frac{10}{3}$$

$$a + b + 2 = \frac{16}{3} \to a + b = \frac{10}{3}$$

จากระบบสมการ และ $ab = 1$ จะได้ว่า $a + b = \dfrac{10}{3}$ เมื่อ a และ b เป็นค่ารากของสมการ

$$x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \to x = 3\ ,\frac{1}{3}$$

ดังนั้นค่ารากของสมการ $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ คือ 2 ,3 และ $\dfrac{1}{3}$

<u>ตัวอย่าง 2.27</u> จงหาผลบวกกำลังสองของค่ารากของสมการ $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$

วิธีทำ จากสมการ $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$ จะมีค่ารากได้ 4 ค่า

สมมติให้ a,b,c และ d เป็นค่ารากของสมการ $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$

โดยความสัมพันธ์ระหว่างค่ารากของสมการกับสัมประสิทธิ์ของแต่ละเทอมในสมการ

จะได้ว่า $a+b+c+d=\dfrac{8}{2}=4$

$$S_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{6}{2}=3$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+2S_2=4^2=16\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2(3)=16\\&=a^2+b^2+c^2+d^2=16-6\\&=a^2+b^2+c^2+d^2=10\end{aligned}$$

2.3.5 การค้นหาค่ารากซ้ำของสมการพหุนาม

การค้นหาค่ารากซ้ำของสมการพหุนาม สามารถดำเนินการค้นหาได้โดยการดำเนินการทางพีชคณิต ดังนี้

1. กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_k$ เป็นค่ารากซ้ำที่ $m_1,m_2,m_3,\ldots,m_k$ ของ $f(x)=0$ ตามลำดับ โดยที่ $m_i>1$ เมื่อ $i=1,2,3,\ldots,k$ และ $m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k=n$

จากทฤษฎีบท 2.12 เราทราบว่าค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ จะเป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของ $f'(x)=0$ ด้วย เมื่อ $m-1$ ซึ่งจะเห็นชัดแจ้งว่า

$(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$ หาร $f(x)$ และ $f'(x)$ ลงตัว ซึ่งถ้าให้ $D(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f'(x)$ แล้ว จะได้ว่า

$$D(x)=(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$$

ทั้งนี้เพราะว่า ถ้า $D(x)=(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}g(x)$ โดยที่ $g(x)$ ไม่เป็นค่าคงที่และ $g(x)$ เป็นพหุนาม จะได้ว่าจะมี $(x-m)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $g(x)$ และ m ก็จะเป็นค่ารากหนึ่งของ $f(x)=0$ สมมติว่า $m=c_1$ จะได้ว่า $(x-c_1)^{m_1}$ หาร $f'(x)$ ลงตัว ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า c_1 เป็นค่ารากซ้ำที่ m_1-1 ของ $f'(x)=0$ ดังนั้น $(x-c_1)^{m_1}$ หาร $f'(x)$ ไม่ลงตัว ในทำนองเดียวกัน ถ้า $m=c_i$ เมื่อ $i=2,3,4,\ldots,k$ ก็จะได้ว่า $(x-c_1)^{m_1}$ หาร $f'(x)$ ไม่ลงตัว

นั่นคือ ตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f'(x)$ กับ $D(x)=(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$

2. กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x)=0$ มีทั้งค่ารากเชิงเดียว ค่ารากซ้ำที่ k เมื่อ $k=2,3,4,\ldots,m$ ปนกันอยู่เราสามารถใช้หลักการเช่นเดียวกันกับข้อ 1 พิจารณาค้นหาค่ารากซ้ำได้ดังนี้

สมมติให้ X_1 เป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$

X_k เป็นผลคูณของตัวประกอบที่สอดคล้องกับค่ารากซ้ำที่ k ของ $f(x)=0$ เมื่อ $k=2,3,4,\ldots,m$ และ X_c เป็นค่าคงที่ เมื่อ $f(x)=0$ ไม่มีค่ารากซ้ำ

จะได้ว่า $X_1\cdot X_2^2\cdot X_3^3\cdot\ldots\cdot X_m^m$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ และจะแตกต่างกับ $f(x)$ เฉพาะตัวคงค่าที่ปรากฏอยู่ในเทอม X^n เท่านั้น และจะได้ว่า

$D=X_2\cdot X_3^2\cdot X_4^3\cdot\ldots\cdot X_m^{m-1}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f'(x)$

$D_1=X_3\cdot X_4^2\cdot X_5^3\cdot\ldots\cdot X_m^{m-2}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ D กับ D'

$D_2=X_4\cdot X_5^2\cdot X_6^3\cdot\ldots\cdot X_m^{m-3}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ D_1 กับ D_1'

โดยการพิจารณาเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ เมื่อจัดลำดับของตัวหารร่วมมากดังกล่าวจะได้ดังนี้

$D, D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{m-1}$ ซึ่ง D_{m-1} จะเป็นค่าคงที่

ดังนั้น จะได้ว่า $f_1(x)=\dfrac{f(x)}{D}=X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot\ldots\cdot X_m$

$$f_2(x)=\frac{D}{D_1}=X_2\cdot X_3\cdot X_4\cdot\ldots\cdot X_m$$

$$f_3(x)=\frac{D_1}{D_2}=X_3\cdot X_4\cdot X_5\cdot\ldots\cdot X_m$$

$$\vdots$$

$$f_m(x)=\frac{D_{m-2}}{D_{m-1}}=X_m$$

จะเห็นว่า $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=X_1, \dfrac{f_2(x)}{f_3(x)}=X_2, \dfrac{f_3(x)}{f_4(x)}=X_3, \ldots, \dfrac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)}=X_{m-1}$ และ $f_m(x)=X_m$ จากการหา $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$

พิจารณาการแก้สมการ $X_1=0, X_2=0, X_3=0, \ldots, X_m=0$ จะได้คำตอบเป็นค่ารากเชิงเดียวของสมการดังกล่าวและค่ารากของสมการดังกล่าวที่ได้จะเป็นค่ารากเชิงเดียว ค่ารากซ้ำที่ 2 ค่ารากซ้ำที่ 3 ค่ารากซ้ำที่ 4 ต่อไปเรื่อยๆ ถึงค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ ตามลำดับและถ้าหากว่า X_k เป็นค่าคงที่ แสดงว่าค่ารากซ้ำที่ k ของ $f(x)=0$ ไม่มี

จากหลักการดังกล่าวมาแล้วนี้นำไปใช้ในการค้นหาค่ารากซ้ำของสมการ $f(x)=0$ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 2.28</u> จงพิจารณาหาค่ารากซ้ำของสมการ $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$

จะได้ว่า $f'(x)=5x^4-4x^3-6x^2+4x+1$

หาตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f'(x)$ ดังนี้

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	1	−1	−2	2	1	−1	5	−4	−6	4	1
คูณด้วย 5	−5	−10	10	5	−5		x	x^0			
	5	−4	−6	4	1		1	−1			
		−1	−4	6	4	−5					
คูณด้วย 5		−5	−20	30	20	−25					
		−5	4	6	−4	−1					
			−24	24	24	−24					
หารด้วย −24			1	−1	−1	1	สัมประสิทธิ์ของเศษเหลือ				

x^4	x^3	x^2	x	x^0	x^3	x^2	x	x^0
5	−4	−6	4	1	1	−1	−1	1
5	−5	−5	5		x	x^0		
	1	−1	−1	1	5	1		
	1	−1	−1	1				
				0				

ตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f'(x)$ คือ $D(x)=x^3-x^2-x+1$ จะได้

$D'(x)=3x^2-2x-1$

พิจารณาหาตัวหารร่วมมากของ $D(x)$ กับ $D'(x)$ ดังนี้

	x^3	x^2	x	x^0	x^2	x	x^0
	1	−1	−1	1	3	−2	−1
คูณด้วย 3	−3	−3	3	x	x^0		
	3	−2	−1	1	−1		
	−1	−2	3				
คูณด้วย 3	−3	−6	9				
	−3	2	1				
		−8	8				
หารด้วย 8		−1	1	สัมประสิทธิ์ของเศษเหลือ			

x^2	x	x^0	x	x^0
3	−2	−1	−1	1
3	−3		x	x^0
	1	−1	−3	−1
	1	−1		
		0		

ดังนั้น ตัวหารร่วมมากของ $D(x)$ กับ $D'(x)$ คือ $D_1(x)=x-1$

และตัวหารร่วมมากของ $D_1(x)$ กับ $\mathrm{D}_1'(x)$ คือ $D_2(x)=1$

ซึ่งจะได้ว่าสมการ $f(x)=0$ จะมีค่ารากซ้ำไม่เกินค่ารากซ้ำที่ 3 พิจารณาหาค่า X_1 ,X_2 และ X_3 โดยการพิจารณาจากสมการต่อไปนี้

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{D(x)}=x^2-1 \qquad f_2(x)=\frac{D(x)}{D_1(x)}=x^2-1 \qquad f_3(x)=\frac{D_1(x)}{D_2(x)}=x-1$$

จะได้ว่า $X_1=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1$, $X_2=\frac{f_2(x)}{f_3(x)}=x+1$ และ $X_3=x-1$

นั่นคือ $f(x)=(x+1)^2\cdot(x-1)^3=0$

สมการ $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$ ไม่มีค่ารากเชิงเดียวและมี -1 เป็นค่ารากซ้ำที่ 2 และ 1 เป็นค่ารากซ้ำที่ 3

2.4 ช่วงของค่ารากและการประมาณค่าราก

2.4.1 เครื่องหมายของพหุนาม

เนื่องจากฟังก์ชันพหุนาม $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ เมื่อ $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ เป็นจำนวนจริงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง การแก้สมการ $f(x)=0$ คือ การหาว่ากราฟของ $y=f(x)$ ตัดกับแกน X ณ จุดใด ดังนั้นการทราบเครื่องหมายของพหุนาม $f(x)$ สามารถนำมาใช้ในการพิจารณาว่า ค่ารากของสมการ $f(x)=0$ อยู่บนช่วงใด ดังเช่น ถ้า $f(a)$ มีค่าเป็นจำนวนบวก และ $f(b)$ มีค่าเป็นจำนวนลบ จะได้ว่า จะต้องมีค่ารากของสมการ $f(x)=0$ อยู่ในช่วง (a,b) เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.15 กำหนดให้ $f(x)=c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$ เมื่อ $c_0,c_1,c_2,...,c_n$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\varepsilon>0$ เป็นจำนวนจริงมีค่าน้อยเป็นเท่าใดก็ได้ จะมีจำนวนจริง $\dfrac{\varepsilon}{c+\varepsilon}$ และ $0<\dfrac{\varepsilon}{c+\varepsilon}<1$ โดยที่ถ้า $|x|<\dfrac{\varepsilon}{c+\varepsilon}$ แล้ว $|f(x)|<\varepsilon$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทที่ 2.15 สรุปเกี่ยวเครื่องหมายของพหุนามได้ดังนี้

1. สำหรับ $|x|$ ที่มีค่าน้อยเพียงพอ เครื่องหมายของพหุนาม $g(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+...+k_nx^n$ เมื่อ $k_0\neq 0$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกับ k_0

2. ถ้า $ax^m+bx^n+cx^p+...$ เป็นพหุนามใน x โดยที่ $a,b,c,...$ ไม่เป็น 0 พร้อมกันทั้งหมด และเรียงลำดับจากดีกรีต่ำสุดของ x ไปหาเทอมที่มีดีกรีสูงสุดของ x แล้ว สำหรับ x ที่มีค่าน้อยเพียงพอ พหุนาม $ax^m+bx^n+cx^p+...$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกับเทอม ax^m ซึ่งเป็นเทอมที่มีดีกรีต่ำสุด

3. ถ้า $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...a_1x+a_0$ เป็นพหุนามที่จัดเรียงลำดับจากเทอมที่มีดีกรีสูงสุดไปยังเทอมที่มีดีกรีต่ำสุด แล้วสำหรับ x ที่มีค่ามากเพียงพอ เครื่องหมายของ $f(x)$ จะเหมือนกับเครื่องหมายของเทอม a_nx^n

ทฤษฎีบท 2.16 ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามในระบบจำนวนจริงและ $f(a),f(b)$ หาค่าได้ โดย $f(a)<0$ และ $f(b)>0$ หรือ $f(a)>0$ และ $f(b)<0$ แล้วจะมีจำนวนจริง c อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ $c\in(a,b)$ และ c เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$

ทฤษฎีบท 2.17 ถ้า $f(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\ldots+a_1x+a_0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี $2n+1$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกคี่ $a_{2n+1},a_{2n},a_{2n-1},\ldots,a_1,a_0$ เป็นจำนวนจริง แล้วสมการ $f(x)=0$ จะมีค่ารากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งค่า

ทฤษฎีบท 2.18 กำหนดให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ เป็นจำนวนจริง $f(x)=0$ ไม่มีค่ารากเป็นจำนวนจริงบนช่วงปิด $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกันสำหรับทุกๆ $x\in[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.19 กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามในระบบจำนวนจริง จำนวนค่ารากของสมการ $f(x)=0$ โดยนับรวมจำนวนภาวะค่ารากซ้ำบนช่วงเปิด (a,b) ด้วย จะมีเป็นจำนวนคี่เมื่อ $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกันและจะมีจำนวนคู่เมื่อ $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

หมายเหตุ กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x

1. สัญลักษณ์ $f(+\infty)=+\infty$ หรือ $f(+\infty)=-\infty$ หมายความว่า ไม่ว่า x เป็นจำนวนจริงบวกมากเท่าใดก็ตาม $f(x)$ จะมีค่าเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบตามลำดับ
2. สัญลักษณ์ $f(-\infty)=+\infty$ หรือ $f(-\infty)=-\infty$ หมายความว่า สำหรับ x ที่เป็นจำนวนจริงลบที่มีขนาดมากเท่าใดก็ตาม $f(x)$ จะมีค่าเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบตามลำดับ

<u>**ตัวอย่าง 2.29**</u> กำหนดให้ $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a(x-2)(x-4)(x-6)=0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จากการแทนค่า x ใน $f(x)$ ด้วย $-\infty,2,4,6,+\infty$ ปรากฏเครื่องหมายของ $f(x)$ ดังนั้น

ค่าของฟังก์ชัน	$f(-\infty)$	$f(2)$	$f(4)$	$f(6)$	$f(+\infty)$
เครื่องหมาย	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

จากตารางเครื่องหมายของ $f(x)$ สรุปได้ว่า รากของสมการ $f(x)=0$ จะมีบนช่วง $(-\infty,2);(2,4);(4,6);(6,\infty)$ และเนื่องจากสมการ $f(x)=0$ เป็นสมการดีกรี ดังนั้น ค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะเป็นจำนวนจริงทั้งหมดและเป็นค่ารากเชิงเดียว ซึ่งจะได้ว่า

ถ้า c_1, c_2, c_3, c_4 เป็นค่ารากที่อยู่บนช่วง $(-\infty, 2);(2,4);(4,6);(6,\infty)$ ตามลำดับ จะได้ว่า $-\infty < c_1 < 2 < c_2 < 4 < c_3 < 6 < c_4 < +\infty$

2.4.2 ทฤษฎีของโรลล์เกี่ยวกับการหาช่วงของค่ารากของสมการพหุนาม

ทฤษฎีบท 2.20 กำหนดให้ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ และ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นค่ารากทั้ง n ค่าของสมการ $f(x) = 0$ แล้ว $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \ldots + \dfrac{1}{x - x_n}$ โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ไม่จำเป็นต้องต่างกัน

ทฤษฎีบท 2.21 กำหนดให้ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ถ้า x มีค่าเพิ่มเข้าใกล้ค่ารากใดค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x) = 0$ แล้ว $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ จะเปลี่ยนจากจำนวนที่มีค่าลบมากๆ $(-\infty)$ ไปสู่จำนวนที่มีค่าบวกมากๆ $(-\infty)$

ทฤษฎีบท 2.22 (The Rolle 's Theorem) ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n a กับ b เป็นค่ารากที่เป็นจำนวนจริง 2 ค่าของสมการ $f(x) = 0$ โดยที่ $a < b$ และไม่มีค่ารากใดของสมการ $f(x) = 0$ แทรกอยู่ระหว่าง a กับ b แล้วจะมีจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f'(x) = 0$ ที่อยู่ระหว่าง a กับ b เป็นจำนวนคี่

บทแทรก 2.2 ถ้า c และ d เป็นค่ารากที่เป็นจำนวนจริงสองค่าที่เรียงลำดับติดกัน โดยที่ $c < d$ ของสมการ $f'(x) = 0$ แล้ว ค่ารากของสมการ $f(x) = 0$ จะมีได้ไม่เกินหนึ่งค่าที่อยู่ระหว่าง c กับ d

หมายเหตุ

1. จากบทแทรกของทฤษฎีบทที่ 2.1 จะได้ว่า ถ้า a เป็นค่ารากที่มีค่าน้อยที่สุดของ $f'(x) = 0$ และ b เป็นค่ารากที่มากที่สุดของสมการ $f'(x) = 0$ ได้ไม่เกิน 1 ค่า

2. บนช่วง (c,d) จะไม่มีค่ารากของสมการ $f(x) = 0$ ถ้าหากว่า $f(c) \cdot f(d) > 0$ และจะมีค่ารากหนึ่งค่า เมื่อ $f(c) \cdot f(d) < 0$

3. ถ้า $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_r$ เป็นค่ารากที่ต่างกันของสมการ $f'(x)=0$ โดย $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_r$ ให้พิจารณาเครื่องหมายของ $f(x)$ ตามลำดับดังนี้

$$f(-\infty), f(c_1), f(c_2), f(c_3), \ldots, f(c_r), f(\infty) \tag{15}$$

จากลำดับ (15) พิจารณากรณีต่อไปนี้

ก) ถ้าเครื่องหมายเปลี่ยนจาก + เป็น − หรือ เปลี่ยนจาก − หรือ + สำหรับเทอมที่อยู่ลำดับติดกัน เรียกว่า เครื่องหมายแปรเปลี่ยน 1 ครั้ง

ข) ถ้าเครื่องหมายของเทอมของลำดับที่อยู่ติดกันเหมือนกัน เรียกว่า เครื่องหมายคงที่ หรือไม่มีการแปรเปลี่ยนเครื่องหมาย เช่น จากลำดับเครื่องหมายเป็นดังนี้ + + − − + − + − เรียกว่ามีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย 5 ครั้ง และ เครื่องหมายคงที่ 2 ครั้ง เป็นต้น

4. จำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f(x)=0$ จะเท่ากับจำนวนครั้งของการแปรเปลี่ยนลำดับเครื่องหมายใน (A) และในช่วงที่มีการแปรเปลี่ยนเครื่องหมายจะมีค่ารากที่เป็นจำนวนจริงได้เพียงค่าเดียว

<u>**ตัวอย่าง 2.30**</u> จงแยกช่วงของค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$$f(x)=2x^5-5x^4+10x^2-10x+1=0$$

วิธีทำ จาก $f(x)=2x^5-5x^4+10x^2-10x+1$

จะได้ $f'(x)=10x^4-20x^3+20x-10$

$$=10(x-1)^3(x+1)$$

ดังนั้น สมการ $f'(x)=0$ มีค่ารากต่างกัน 2 ค่า คือ −1 กับ 1

พิจารณาเครื่องหมายของ $f(-\infty), f(-1), f(1)$ และ $f(\infty)$ ปรากฏตามลำดับ ดังนั้น − + − + มีการแปรเปลี่ยนเครื่องหมาย 3 ครั้ง จะได้สมการ $f(x)=0$ จะมีค่ารากเชิงเดียวที่เป็นจำนวนจริงอยู่ 3 ค่า และอยู่ในช่วง $(-\infty,-1);(-1,1);(1,\infty)$ ช่วงละหนึ่งค่าราก

2.4.3 การใช้ทฤษฎีของโรลล์เกี่ยวกับการหาช่วงของค่าราก

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_s$ เป็นค่ารากจำนวนจริงที่ต่างกันของสมการ $f(x)=0$ โดยเป็นค่ารากซ้ำที่ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_s$ ตามลำดับ จะได้ว่า ถ้า r เป็นจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดของสมการ $f(x)=0$ แล้ว $r=c_1+c_2+c_3+\ldots c_s$ โดยทฤษฎี

ของโรลล์ในแต่ละช่วงเปิดต่อไปนี้ $(b_1,b_2),(b_2,b_3),(b_3,b_4),\ldots,(b_{s-1},b_s)$ จะมีค่ารากของสมการ $f'(x)=0$ อย่างน้อยหนึ่งค่า

เนื่องจาก จำนวนช่วงเปิดดังกล่าวมีทั้งหมด $s-1$ ช่วง ดังนั้นค่ารากที่ต่างกันของสมการ $f'(x)=0$ จะมีอย่างน้อย $s-1$ ค่า เพราะว่า b_i เป็นค่ารากซ้ำที่ c_i-1 ของสมการ $f'(x)=0$ ด้วย (ในกรณีที่ $b_i=1$ b_i จะไม่เป็นค่ารากของสมการ $f'(x)=0$)
ดังนั้น $(c_1-1)+(c_2-1)+(c_3-1)+\ldots+(c_s-1)=r-s$ และจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f'(x)=0$ จะมีอย่างน้อยที่สุด $(r-s)+(s-1)$ ค่า ด้วยเหตุผลดังกล่าว สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.23 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n ถ้า สมการ $f(x)=0$ มีค่ารากที่เป็นจำนวนจริง r ค่า แล้วจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f'(x)=0$ จะมีไม่น้อยกว่า $r-1$ ค่าและจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจินตภาพของสมการ $f'(x)=0$ จะมีไม่เกินจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจินตภาพของสมการ $f(x)=0$

จากทฤษฎีบทที่ 2.23 อธิบายได้ว่า ถ้า $2k$ เป็นจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจินตภาพของสมการ $f(x)=0$ และ n เป็นดีกรีของสมการ $f(x)=0$ แล้ว $n=r+2k$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า r' เป็นจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f'(x)=0$ และ $2k'$ เป็นจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจินตภาพของสมการ $f'(x)=0$ แล้ว $n-1=r'+2k'$
เนื่องจาก $r'\geq r-1$ จะได้ว่า $n=r+2k\geq r+2k'$ เมื่อ $2k'\leq 2k$

บทแทรก 2.3 ถ้าค่ารากของสมการพหุนาม $f(x)=0$ เป็นจำนวนจริงทั้งหมดแล้วค่ารากสมการ $f'(x)=0$ จะเป็นจำนวนจริงทั้งหมดด้วย

บทแทรก 2.4 ถ้าค่ารากของสมการ $f(x)=0$ เป็นจำนวนจริงทั้งหมด แล้วค่ารากของสมการ $f'(x)=0, f''(x)=0, f'''(x)=0\ldots$ จะเป็นจำนวนจริงทั้งหมดด้วย ค่ารากซ้ำของแต่ละสมการดังกล่าวนี้จะเป็นค่ารากซ้ำของสมการ $f(x)=0$ และถ้าค่ารากของสมการ $f(x)=0$ เป็นค่ารากเชิงเดี่ยวทั้งหมด ค่ารากของสมการ $f'(x)=0, f''(x)=0, f'''(x)=0, f^{(IV)}(x)=0,\ldots$ ก็จะเป็น

ค่ารากเชิงเดียวทั้งหมดและมีค่ารากอยู่ระหว่างค่ารากต่ำสุดและค่ารากที่มีค่าสูงสุดของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

ตัวอย่าง 2.31 กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนจริงสองจำนวนใดๆ และ $a<b$

ถ้า $f(x)=(x-a)^n(x-b)^n$

จะได้ว่า ค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะเป็นจำนวนจริงทั้งหมดมีค่าที่ต่างกัน 2 ค่า คือ a กับ b และทั้ง a,b เป็นค่ารากซ้ำที่ n ของสมการ $f(x)=0$

ดังนั้น สมการ $\frac{d^k}{dx^k}[(x-a)^n(x-b)^n]=0$ เมื่อ $k=1,2,3,...,n-1$ ก็จะมีค่ารากเป็นจำนวนจริงทั้งหมดและอยู่ในช่วง (a,b)

2.4.4 กฎเกี่ยวกับเครื่องหมายของเดส์การ์ตส์ (Descartes' Rule of Signs)

เรอเน เดส์การ์ตส์ (Rene' Descartes) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส มีชีวิตอยู่ในช่วงปีคริสต์ศักราช 1596-1650 เป็นผู้กล่าวถึงระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinates) อย่างเป็นระบบแบบแผนและได้ตั้งทฤษฎีเกี่ยวกับเครื่องหมายของพหุนามที่เกี่ยวกับการหาจำนวนรากของสมการพหุนามที่เรียกว่า **กฎเกี่ยวกับเครื่องหมายของเดร์การ์ตส์** ถือเป็นหลักการอย่างหนึ่งในการพิจารณาจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการพหุนามซึ่งจะได้ดังกล่าวต่อไปนี้

นิยาม 2.11 กำหนดให้ลำดับของจำนวนจริง เป็น $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ โดยทุกจำนวนไม่เท่ากับ 0

1. ถ้า a_{i-1},a_i ซึ่งเป็นเทอมสองเทอมที่มีลำดับติดกันใดๆ มีเครื่องหมายเหมือนกันแล้ว เรียกว่า ไม่มีการแปรผันเครื่องหมาย 1 ครั้ง (a permanence of sign)

2. ถ้า a_{i-1},a_i ซึ่งเป็นเทอมสองเทอมที่มีลำดับติดกันใดๆ มีเครื่องหมายต่างกันแล้ว เรียกว่า มีการแปรผันเครื่องหมาย 1 ครั้ง (a variation of sign)

ตัวอย่าง 2.32 ในลำดับจำนวนจริงดังนี้ $-2,-3,+4,+4,-1,+7,+7,+7,+7,-5,-4,1$ มีการแปรผันเครื่องหมาย 5 ครั้ง และไม่แปรผันเครื่องหมาย 5 ครั้ง

หมายเหตุ กรณีที่ลำดับของจำนวนมีบางเทอมเป็น 0 การนับจำนวนครั้งของการไม่แปรผันเครื่องหมายกับการแปรผันเครื่องหมาย นับโดยไม่พิจารณาในช่วงเทอมของลำดับที่เป็น 0 เช่นใน

ลำดับของจำนวนจริงต่อไปนี้ $1,0,0,-1,-1,0,0,0,2,3,-1,0,0$ จะได้ว่าจำนวนการแปรผันเครื่องหมายมี 3 ครั้ง และจำนวนไม่แปรผันเครื่องหมายมี 2 ครั้ง เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.24 (A Theorem of de Gua) กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ $F(x)=xf'(x)+\alpha f(x)$ เมื่อ α เป็นค่าคงที่ใดๆ ถ้า $f(x)=0$ มีจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวก r ค่า โดยนับรวมจำนวนค่ารากซ้ำด้วย แล้วสมการ $F(x)=0$ จะมีจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวก $r-1$ ค่าโดยนับรวมจำนวนค่ารากซ้ำด้วย

บทแทรก 2.5 ถ้า k เป็นจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนลบของสมการ $f(x)=0$ แล้วจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงลบของสมการ $F(x)=0$ จะมีอย่างน้อย $k-1$ ค่า

ทฤษฎีบท 2.25 (Descartes' Rule of signs)

กำหนดให้ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ เป็นลำดับของสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ เรียงจากเทอมที่มีดีกรีสูงสุดไปยังเทอมที่มีดีกรีต่ำสุด

1. จำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $f(x)=0$ จะมีไม่เกินจำนวนการแปรผันเครื่องหมายในลำดับ $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ และ

2. ถ้าจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $f(x)=0$ น้อยกว่าจำนวนการแปรผันเครื่องหมายของลำดับ $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ แล้วจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $f(x)=0$ จะน้อยกว่าจำนวนการแปรผันเครื่องหมายของลำดับ $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ เป็นทวีคูณของสอง

บทแทรก 2.5 จำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงลบของสมกา ร $f(x)=0$ จะเท่ากับจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $f(-x)=0$ หรือ ถ้า r' เป็นจำนวนรากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $f(-x)=0$ และ v' เป็นจำนวนการแปรผันของเครื่องหมายของลำดับสัมประสิทธิ์ของ $f(-x)$ แล้ว $v'=r'+2h'$ เมื่อ $h'\geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทที่ 2.25 (กฎเกี่ยวกับเครื่องหมายของเดร์การ์ตส์) จะบอกจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวกได้แน่นอนในกรณีที่ $V=0$ และ $V=1$ เท่านั้น ส่วนกรณีที่ $V>1$ จะบอกได้

เพียงขีด จำกัดสูงสุดของจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวกหรือลบเท่านั้นและจากเหตุผลดังกล่าวนี้ สามารถบอกจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจินตภาพได้ด้วย

<u>ตัวอย่าง 2.33</u> กำหนดให้ $f(x)=x^4+x^2-x+3=0$

จะได้ว่า $f(-x)=x^4+x^2+x-3=0$

จะเห็นว่า จำนวนการแปรผันเครื่องหมายของลำดับสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ กับ $f(-x)$ มีจำนวน 1 ครั้งดังนั้นสมการ $f(x)=0$ จะมีค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวก 1 ค่า และจำนวนค่ารากที่เป็นจำนวนจริงลบ 1 ค่าและค่ารากอีก 2 ค่าที่เหลือจะเป็นจำนวนจินตภาพ

2.4.5 การประมาณค่ารากอตรรกยะของสมการพหุนาม

การประมาณค่ารากอตรรกยะของสมการพหุนามมีหลายวิธี ณ ที่นี้จะกล่าวถึงการประมาณค่ารากอตรรกยะ โดยวิธีประมาณค่าซ้ำแบบสืบเนื่อง (successive enlargement) และกระบวนวิธีของฮอร์เนอร์ (Horner's Method)

2.4.5.1 การประมาณค่ารากโดยวิธีประมาณค่าซ้ำแบบสืบเนื่อง

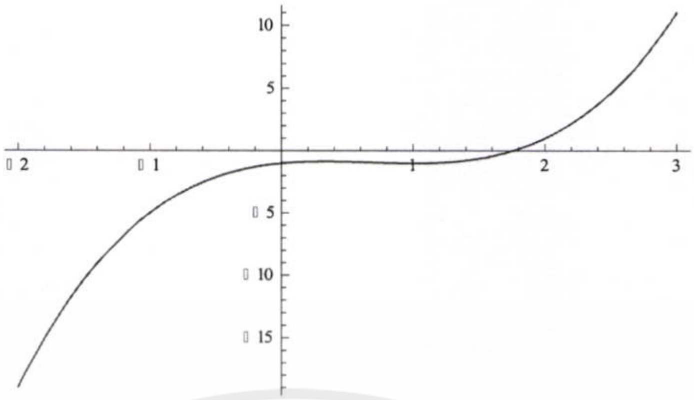
การประมาณค่ารากอตรรกยะของสมการพหุนามโดยวิธีประมาณค่าซ้ำแบบสืบเนื่อง กระทำโดยอาศัยหลักการที่ว่า ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกันแล้ว สมการ $f(x)=0$ จะมีค่ารากที่เป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งค่าที่อยู่ในช่วงเปิด (a,b) เมื่อ $a<b$ หรือกราฟของสมการพหุนาม $y=f(x)$ จะต้องตัดกับแกน x ณ จุด $x=c$ เมื่อ $c\in(a,b)$

กระบวนวิธีการประมาณค่ารากซ้ำแบบสืบเนื่องเป็นวิธีหาคู่ลำดับของจำนวนจริง (a,b) โดยที่ a กับ b มีค่าแตกต่างกันน้อยที่สุดที่ทำให้ $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 2.34</u> จงประมาณค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3-2x^2+x-1=0$ ต้องการค่าถูกต้องถึงทศนิยม 2 ตำแหน่ง

วิธีทำ กำหนดให้ $y=f(x)=x^3-2x^2+x-1$ ลักษณะกราฟของ $y=f(x)$ จะเป็นดังรูป

$\text{Plot}[y = x^3 - 2x^2 + x - 1, \{x, -2,3\}]$



จากรูปที่ข้างต้น จะเห็นว่าค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f(x)=0$ มี 1 ค่า อยู่ระหว่าง 1 กับ 2 หรืออยู่บนช่วงเปิด $(1,2)$ ทั้งนี้เพราะว่า กราฟของ $y=f(x)=x^3-2x^2+x-1$ ตัดกับแกน x ในช่วงเปิด $(1,2)$

พิจารณาค่าของ $f(x)$ บนสับเซตของช่วงเปิด $(1,2)$ ในลักษณะสืบเนื่องดังนี้

เมื่อ $x=1.1$ และ $x=1.2$ หรือ

เมื่อ $x=1.2$ และ $x=1.3$ หรือ

เมื่อ $x=1.3$ และ $x=1.4$ หรือ

.

.

.

เมื่อ $x=1.8$ และ $x=1.9$

จะเห็นว่า $f(1.7)=-0.167$ และ $f(1.8)=0.152$

ดังนั้น จุด $(1.7,-0.167)$ กับ $(1.8,0.152)$ จะอยู่บนกราฟ $y=f(x)$ หรือกล่าวได้ว่า ค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในช่วง $(1.7,1.8)$ ต่อไปพิจารณาค่า $f(x)$

เมื่อ $x\in(1.7,1.8)$ และ x เป็นจำนวนทศนิยมสองตำแหน่ง กล่าวคือ

พิจารณาค่า $f(x)$ เมื่อ $x=1.71$ และ $x=1.72$ หรือ

เมื่อ $x=1.72$ และ $x=1.73$ หรือ

เมื่อ $x=1.73$ และ $x=1.74$ หรือ

.

.

.

เมื่อ $x=1.78$ และ $x=1.79$

จะเห็นว่า $f(1.75) = -0.01526$ และ $f(1.76) = 0.016576$ ซึ่งจะได้ว่าค่ารากของสมการ $f(x) = 0$ จะอยู่ในช่วง $(1.75, 1.76)$ ต่อไปพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ $x \in (1.75, 1.76)$ กล่าวคือ

พิจารณาค่า $f(x)$ เมื่อ $x = 1.751$ และ $x = 1.752$ หรือ

เมื่อ $x = 1.752$ และ $x = 1.753$ หรือ

เมื่อ $x = 1.753$ และ $x = 1.754$ หรือ

.

.

.

เมื่อ $x = 1.759$ และ $x = 1.760$

จะได้ว่า ค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของ จะอยู่ในช่วง $(1.755, 1.756)$
นั่นคือ ค่ารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ มี 1 ค่า และมีค่าประมาณ 1.75

2.5 วิธีการทำซ้ำของนิวตัน (Newton iteration method)

ขั้นตอนการทำงานของ Excel โดยวิธีการทำซ้ำของนิวตัน (Newton iteration method) ที่สำคัญ คือ วิธีการทำซ้ำของนิวตันเป็นอัลกอริทึมพื้นฐานที่ดีที่สุดในการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น โดยมีสูตร คือ $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ เมื่อเราใช้วิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน จะต้องคำนึงถึงการเลือกค่าเริ่มต้นที่อยู่ในช่วงที่เรากำหนด

2.6 การประมาณค่าในช่วง (Interpolation method)

ทฤษฎีของการประมาณค่าในช่วง (Interpolation method) เมื่อ $f(x)$ หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและ $f(x)$ หาอนุพันธ์อันดับสองได้และผลลัพธ์ที่ได้มีเครื่องหมายเหมือนกัน
กำหนดให้ $x_0 = a$

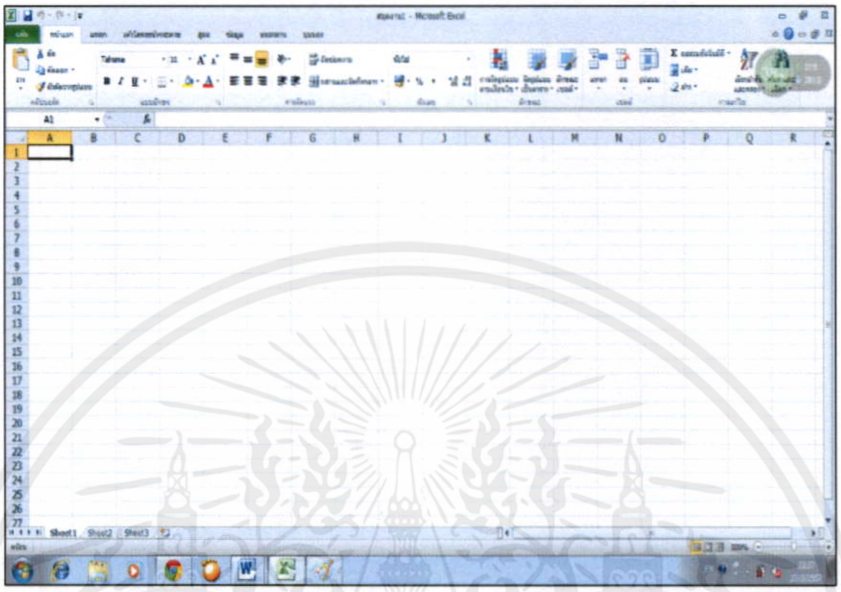
$$\text{สูตรการทำซ้ำคือ} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - b) f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}$$

เมื่อ $f(x)$ หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและ $f(x)$ หาอนุพันธ์อันดับสองได้และผลลัพธ์ที่ได้มีเครื่องหมายต่างกัน จะกำหนดให้ $x_0 = b$

$$\text{สูตรการทำซ้ำคือ} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - a) f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}$$

2.7 โปรแกรม Excel 2010

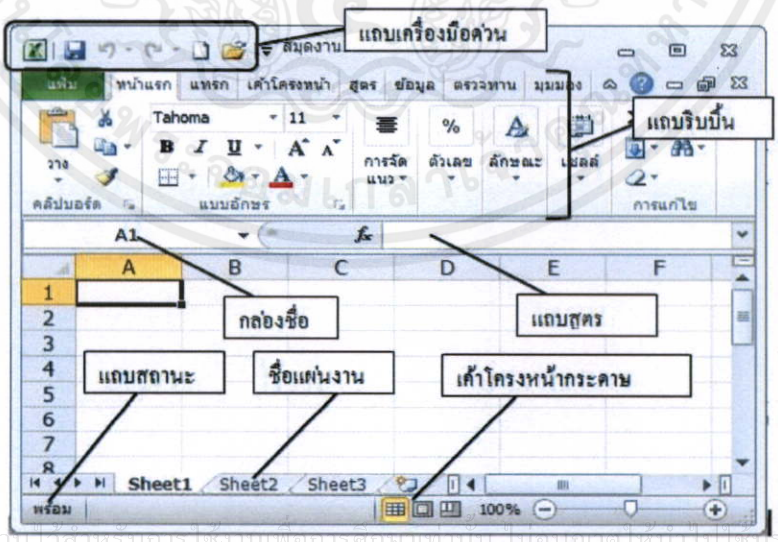
ในการหารากจำนวนจริงสมการพหุนามในครั้งนี้ ใช้โปรแกรม Excel 2010 มาช่วยในการคำนวณ โดยใช้โปรแกรม Excel 2010



รูปที่ 2.1 หน้าจอโปรแกรม Microsoft Excel 2010

2.7.1 ส่วนประกอบหลักของโปรแกรม Excel

โปรแกรม Excel มีความสามารถหลัก 3 ด้านด้วยกัน คือ การคำนวณ การสร้างแผนภูมิ และด้านฐานข้อมูล



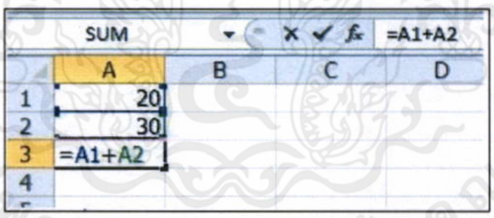
รูปที่ 2.2 ส่วนประกอบของหน้าจอโปรแกรม Microsoft Excel 2010

2.7.2 การคำนวณทางคณิตศาสตร์

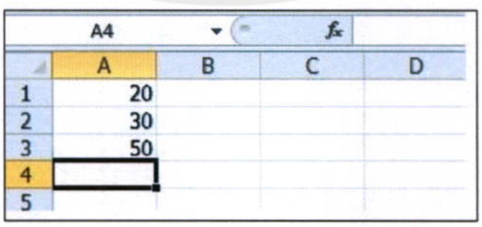
การคำนวณ ใน Excel ทำได้โดยการป้อนตัวเลขเข้าในเซลล์ แต่ละเซลล์จากนั้นจึงกำหนดให้นำตัวเลขในแต่ละเซลล์มา บวก ลบ คูณ หาร กัน ลองดูตัวอย่างและทำตามต่อไปนี้

การบวก

1. คลิกที่ตำแหน่ง A1
2. พิมพ์เลข 20
3. แล้วกด Enter เคอร์เซอร์ จะเลื่อนมาที่ เซลล์ A2
4. ที่ตำแหน่ง A2 พิมพ์เลข 30 แล้วกด Enter
5. เคอร์เซอร์ จะเลื่อนมาที่ A3 ให้พิมพ์ =A1+A2
6. เครื่องหมายเท่ากับข้างหน้าเป็นการบอก Excel ว่าเป็นการใช้สูตร ไม่ใช่เป็นการพิมพ์ข้อความธรรมดาและจะสังเกตสีของข้อความ A1 และ A2 แตกต่างไปจากสีธรรมดา และเมื่อขณะพิมพ์ A1 จะมีกรอบเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง A1 ด้วยและขณะพิมพ์ A2 ก็จะมีกรอบเกิดที่ตำแหน่ง A2 แสดงขอบเขตที่ถูกเลือก ดังรูปที่ 2.3
7. เมื่อพิมพ์เสร็จแล้ว ให้กดปุ่ม Enter กรอบจะเลื่อนไปยังตำแหน่ง A4 และจะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 50 ในตำแหน่งเซลล์ A3 ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.3 แสดงการบวกของโปรแกรม Excel 2010



รูปที่ 2.4 แสดงผลลัพธ์การคำนวณการบวก

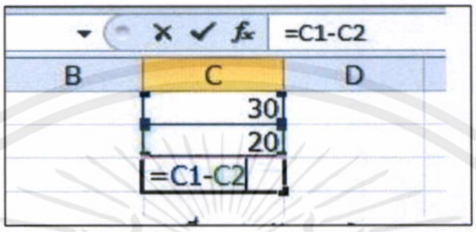
การลบ

1. คลิกที่ ตำแหน่ง C1 พิมพ์เลข 30 แล้วกด Enter

2. ที่ตำแหน่ง C2 และพิมพ์เลข 20 แล้วกด Enter

3. ที่ตำแหน่ง C3 ให้พิมพ์ =C1-C2

4. กดปุ่ม Enter จะได้ผลลัพธ์ คือ ผลต่างระหว่าง 30 และ 20 ซึ่งเท่ากับ 10 ในตำแหน่งเซลล์ C3



รูปที่ 2.5 แสดงการลบของโปรแกรม Excel 2010

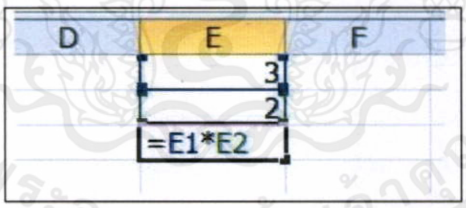
การคูณ

1. คลิกที่ ตำแหน่ง E1 พิมพ์เลข 3 แล้วกด Enter

2. ที่ตำแหน่ง E2 พิมพ์เลข 2 แล้วกด Enter

3. ที่ตำแหน่ง E3 ให้พิมพ์ =E1*E2

4. กดปุ่ม Enter จะได้ผลลัพธ์ ซึ่งเป็นผลคูณ ของ 3 และ 2 ซึ่งเท่ากับ 6 ในตำแหน่งเซลล์ E3



รูปที่ 2.6 แสดงการคูณของโปรแกรม Excel 2010

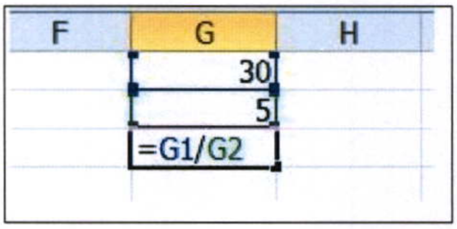
การหาร

1. คลิกที่ ตำแหน่ง G1 พิมพ์เลข 30 แล้วกด Enter

2. ที่ตำแหน่ง G2 พิมพ์เลข 5 แล้วกด Enter

3. ที่ตำแหน่ง G3 ให้พิมพ์ =G1/G2

4. กดปุ่ม Enter จะได้ผลลัพธ์ 30 หารด้วย 5 ซึ่งเท่ากับ 6 ในตำแหน่งเซลล์ G3

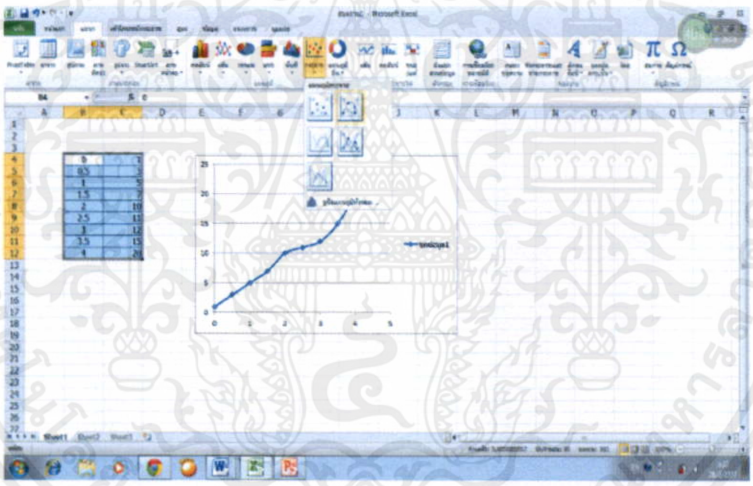


รูปที่ 2.7 แสดงการหารของโปรแกรม Excel 2010

2.7.3 การสร้างกราฟ (Chart) ใน Excel 2010

ในการสร้างกราฟใน Excel สิ่งสำคัญที่ต้องพิจารณา คือ ข้อมูลที่จะนำมาสร้างกราฟลักษณะข้อมูลที่จะนำมาสร้างกราฟและชนิดของกราฟที่ต้องการนำเสนอ โดยจะมีวิธีการในการสร้างกราฟดังนี้

- ไปที่แถบเมนู คลิกแทรกแล้วเลือกชนิดของกราฟที่ต้องการ ตามรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 หน้าแสดงโปรแกรม Microsoft Excel 2010

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในส่วนวิธีการดำเนินงานวิจัยของปัญหาพิเศษฉบับนี้ ทางคณะผู้จัดทำได้ทำการศึกษาและได้รวบรวมเนื้อหาที่มีความสำคัญสามารถนำมาใช้ในการหารากจำนวนจริงของสมการพหุนามดีกรี 3 ถึงดีกรี 6 โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1 ขั้นตอนการหาค่ารากของสมการพหุนาม

3.1.1. การหาขีดจำกัดของค่ารากจำนวนจริง

จากหัวข้อ 2.1 การคำนวณลิมิตของค่ารากสามารถสรุปขั้นตอนการหาลิมิตของค่ารากจำนวนจริงได้ดังต่อไปนี้

3.1.1.1 การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก

ให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0=0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและ $a_n>0$

- พิจารณาค่า $a_0,a_1,a_2,...,a_n$
- เลือก $c\geq\frac{a_{n-1}}{a_n}$ และ $c\geq 0$
- คำนวณ

$$
\begin{aligned}
b_{n-2}&=a_{n-1}+ca_n\\
b_{n-1}&=a_{n-2}+cb_{n-2}\\
&\vdots\\
b_0&=a_1+cb_1\\
r&=a_0+cb_0
\end{aligned}
$$

- พิจารณา $b_{n-2},b_{n-3},...,b_0,r$

ถ้า $b_{n-2},b_{n-3},...,b_0,r\geq 0$ ค่า c ที่ได้จะเป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $f(x)=0$

ถ้ามี $b_i<0:i\in\{0,1,...,n-2\}$ หรือ $r<0$ กำหนด $c=c+1$ แล้วกลับไปคำนวณ

$b_{n-2}, b_{n-3}, ..., b_0, r$ ใหม่

3.1.1.2 การหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบ

ให้ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ $a_n > 0$ แทนค่า $x = -y$ จะได้รูปแบบใหม่คือ

$$f(-y) = a_n(-y)^n + a_{n-1}(-y)^{n-1} + a_{n-2}(-y)^{n-2} + ... + a_1(-y) + a_0 = 0$$

มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและ $a_n > 0$

หาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของ $f(-y) = 0$ สมมติขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของ $f(-y) = 0$ คือ c แล้วแสดงว่าขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบของ $f(x) = 0$ คือ $-c$

3.1.2 หาช่วงที่บรรจุแต่ละรากที่เป็นจำนวนจริง

กำหนดให้ M เป็นขีดจำกัดบน และ m เป็นขีดจำกัดล่าง

เนื่องจากทฤษฎีบท 2.16 ในหัวข้อ 2.4 เรื่องการหาช่วงของค่าราก เราจะพิจารณาเครื่องหมายของ $f(m_j)$ เมื่อ $0 \le j \le r$ โดยที่ $m_0 = m$ และ $m_r \ge M$

กำหนด $m = m_0, m_1 = m_0 + 0.5, m_2 = m_1 + 0.5, ..., m_j = m_{j-1} + 0.5, ..., m_r \ge M$ ตั้งค่า 0.5 คือ ความละเอียดที่ต้องการ หากต้องการความละเอียดของค่า $f(m_j)$ มากกว่านี้สามารถปรับค่า 0.5 ให้ลดลงได้

3.1.3 ใช้วิธีการทำซ้ำของนิวตันและการประมาณค่าในช่วงหารากจำนวนจริงในแต่ละช่วง

สมมติจากช่วง (a,b) มีรากจำนวนจริงบรรจุอยู่ เราสามารถประมาณค่ารากนั้นได้โดยวิธีต่อไปนี้

วิธีการทำซ้ำของนิวตัน

- เลือก $x_0 \in (a,b)$ ที่ซึ่ง $f'(x_0) \ne 0$
- หารากจำนวนจริงที่บรรจุใน (a,b)

โดยสูตร $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$

วิธีการประมาณค่าในช่วง

- ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน เลือก $x_0 = a$

สูตรการหาค่าราก คือ $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - b) f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}$

- ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกัน เลือก $x_0 = b$

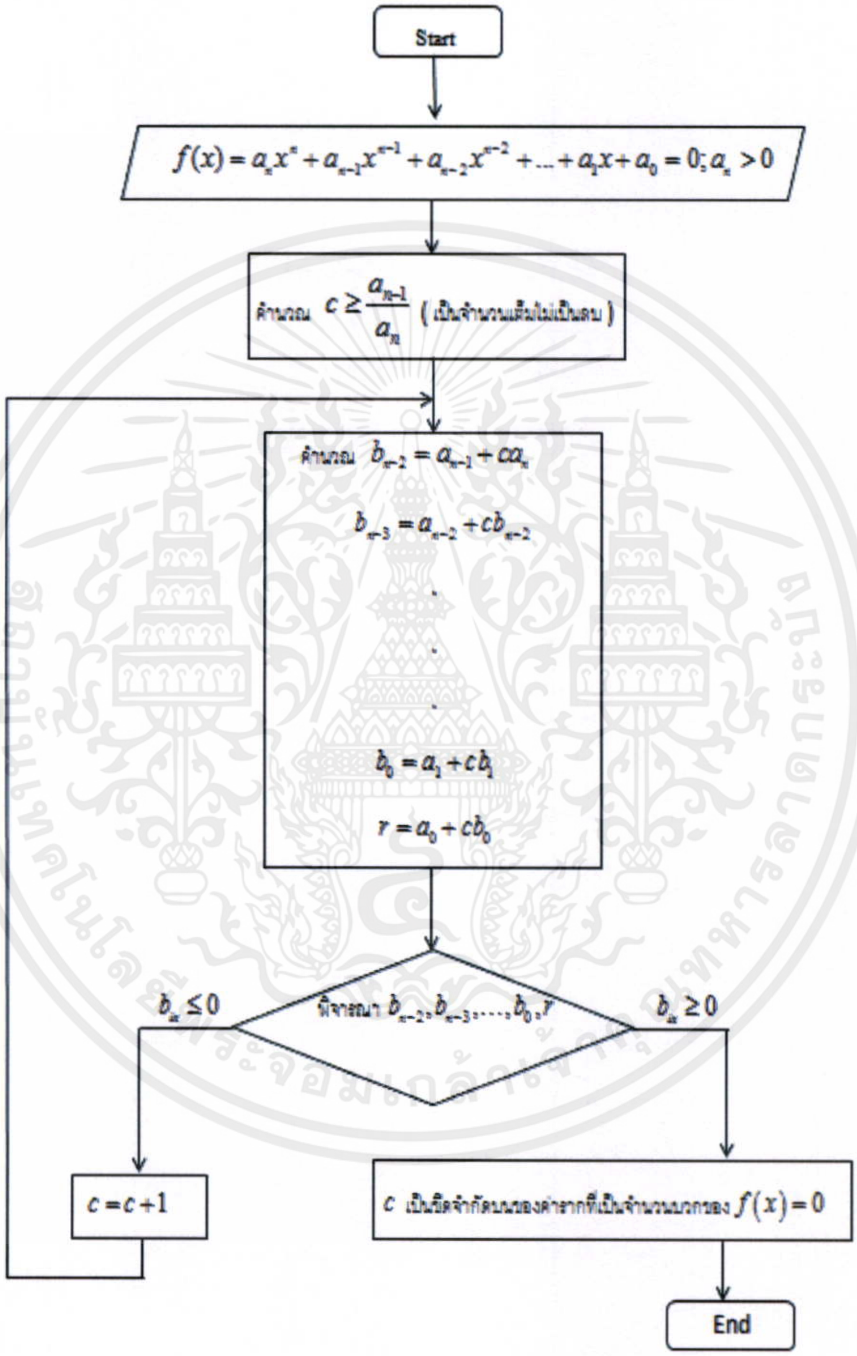
สูตรการหาค่าราก คือ $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - a) f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}$

3.1.4 พิจารณาภาวะรากซ้ำของแต่ละรากจำนวนจริง

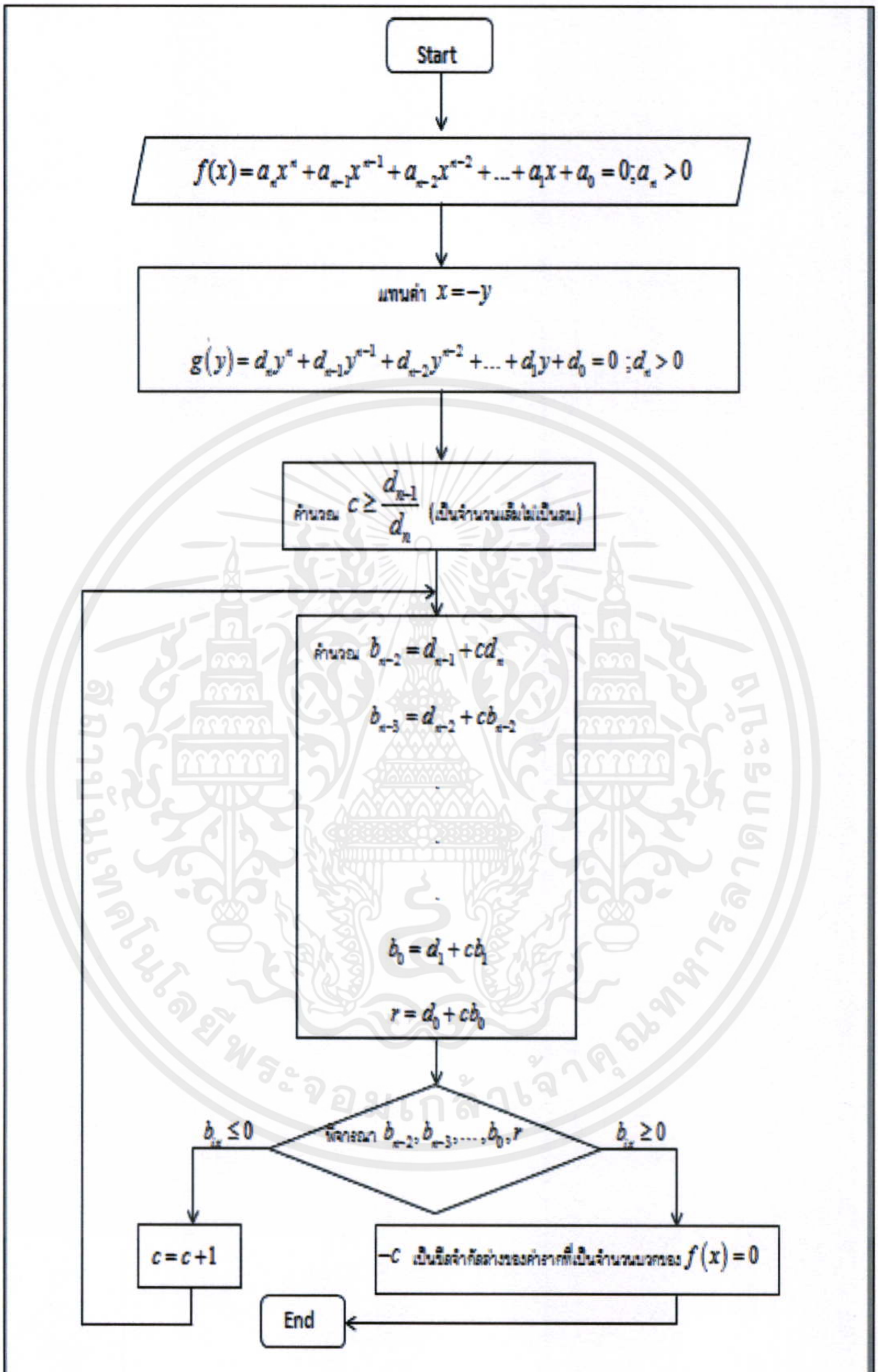
ให้ r เป็นรากจำนวนจริงของ $f(x) = 0$

จากทฤษฎีเศษเหลือ เราสามารถพิจารณาภาวะรากซ้ำของราก r โดยการหารสังเคราะห์ $f(x)$ หารด้วย $x-r$ จนกระทั่งเศษเหลือไม่เป็นศูนย์ แล้วสรุปภาวะรากซ้ำของราก r นั้นได้

ผังงานต่อไปนี้แสดงกระบวนการหาค่ารากจำนวนจริงของพหุนามดีกรี n เมื่อ $n \geq 2$



รูปที่ 3.1 ผังงานแสดงการหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของพหุนามดีกรี n

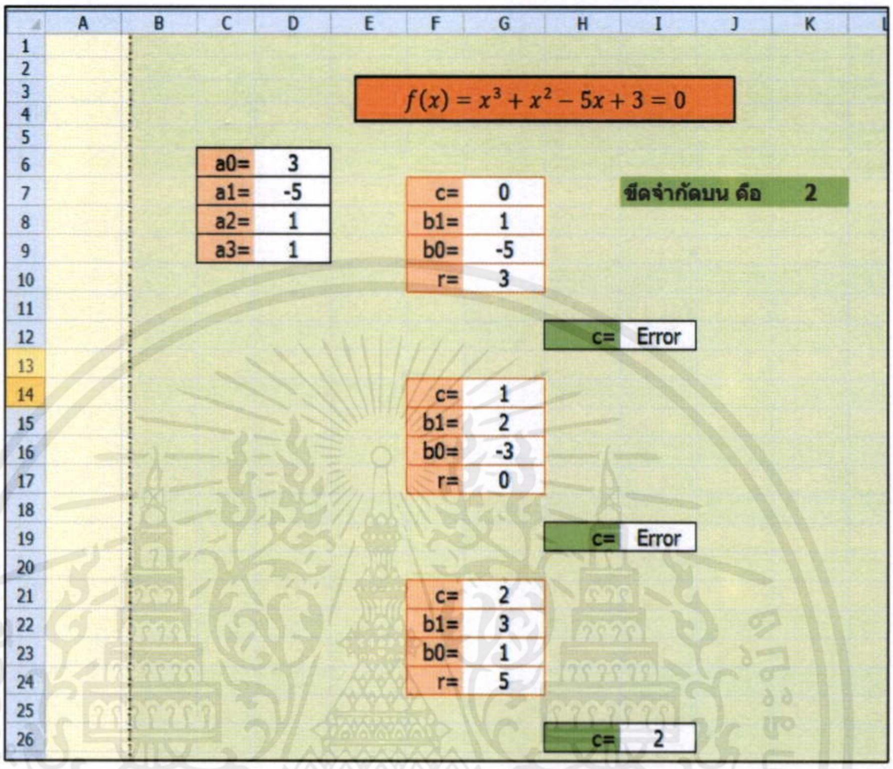


รูปที่ 3.2 ผังงานแสดงการหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบของพหุนามดีกรี n

<u>**ตัวอย่าง 3.1**</u> ให้ $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

1. การหาขีดจำกัดของค่ารากจำนวนจริง

1.1 หาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก



รูปที่ 3.3 การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของพหุนามดีกรี 3

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ D6 – D9 จะได้ $a_0 = 3, a_1 = -5, a_2 = 1, a_3 = 1$ ดังรูปที่ 3.3

- หาค่า c โดยพิมพ์ $= IF(AND(-D8/D9 >= 0), -D8/D9, 0)$ ในเซลล์ G7 โดยตั้งค่าเป็นจำนวนเต็ม จะได้ค่า $c = -1$

- คำนวณค่า b_1, b_0, r โดยที่

คำนวณ b_1 โดยพิมพ์ $= D8 + (G7 * D9)$ ในเซลล์ G8 จะได้ค่า $b_1 = 0$

คำนวณ b_0 โดยพิมพ์ $= D7 + (G7 * G8)$ ในเซลล์ G9 จะได้ค่า $b_0 = -5$

คำนวณ r โดยพิมพ์ $= D6 + (G7 * G9)$ ในเซลล์ G10 จะได้ค่า $r = 8$

พิจารณาค่า b_1, b_0, r ว่าทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 หรือไม่ โดยพิมพ์ =IF(AND(G8>=0,G9>=0,G10>=0),G7,"Error") ในเซลล์ I12 เพื่อตรวจสอบว่ามีบางตัวน้อยกว่า 0 หรือไม่ ถ้ามีต้องเลือกค่า c ใหม่

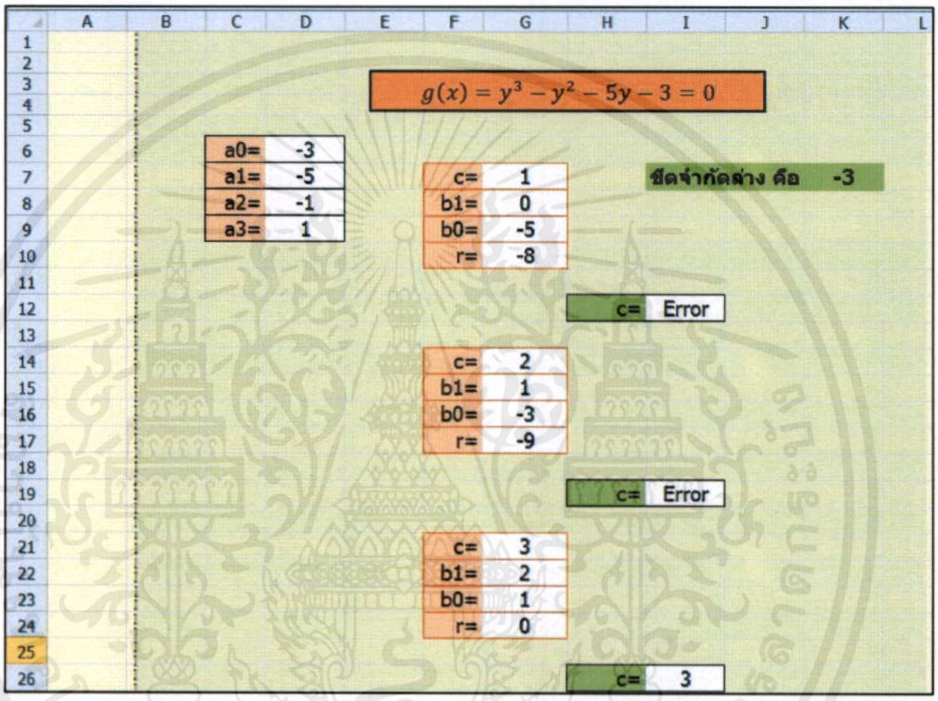
กรณีมีบางตัวน้อยกว่า 0

- หาค่า c ใหม่ โดยพิมพ์ $=G7+1$ ในเซลล์ G14 จะได้ค่า $c=0$

- คำนวณค่า b_1,b_0,r ใหม่ ดังวิธีการข้างต้นทำซ้ำจนกว่าได้ค่า b_1,b_0,r มากกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อเลือก $c=2$

ดังนั้น $c=2$ เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก

1.2 หาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบ

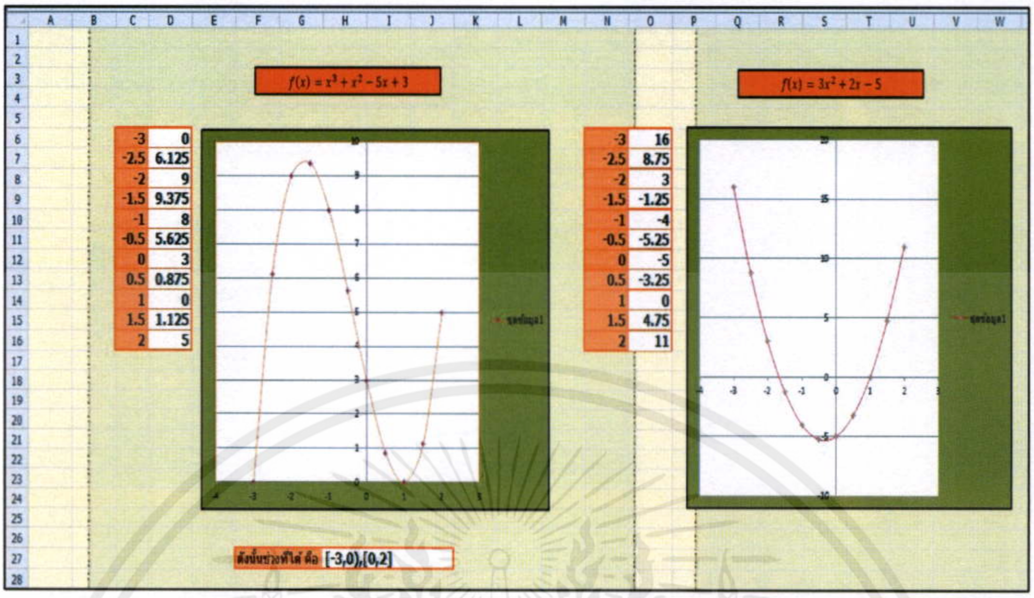


รูปที่ 3.4 การหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบของพหุนามดีกรี 3

จาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3=0$ แทนค่า $x=-y$ จะได้สมการใหม่ คือ $f(-y)=-y^3+y^2+5y+3=0$ ทำให้สัมประสิทธิ์ตัวที่มีกำลังมากสุดไม่ติดลบโดยที่นำ -1 ไปคูณใน $f(-y)$ จะได้ $g(y)=y^3-y^2-5y-3=0$

ทำเช่นเดียวกับการหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกใน 1.1 จะได้ $c=3$ เป็นขีดจำกัดบนของ $g(y)=0$ แสดงว่า -3 เป็นขีดจำกัดล่างของ $f(x)=0$ ดังผลที่แสดงในรูปที่ 3.4

2. หาช่วงที่บรรจุแต่ละรากจำนวนจริง

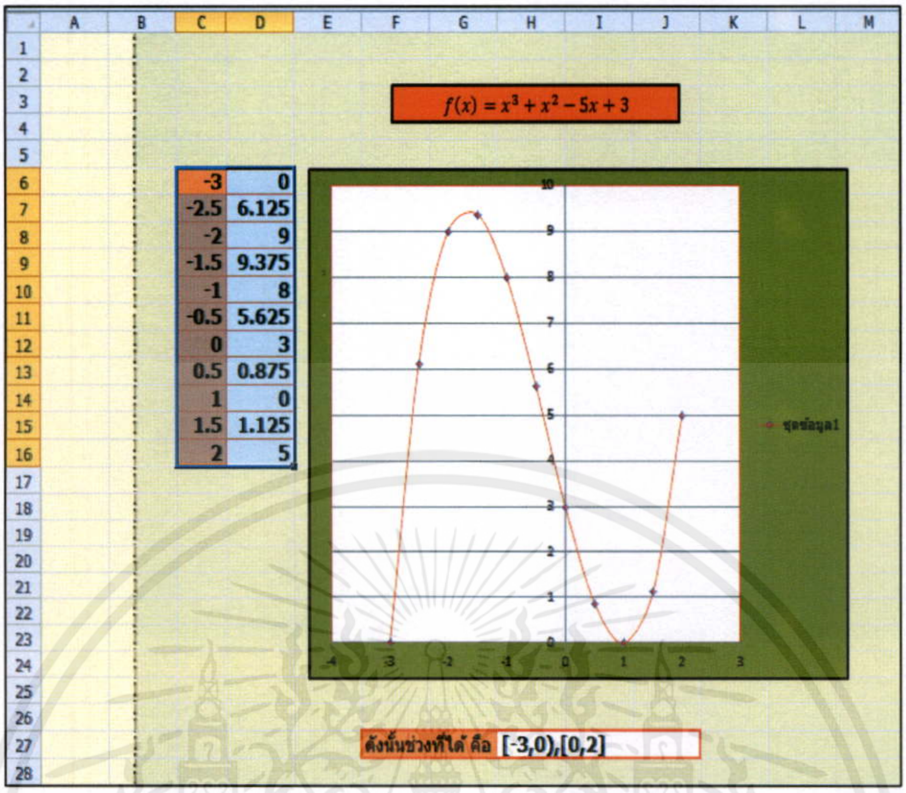


รูปที่ 3.5 ช่วงที่บรรจุในแต่ละรากของพหุนามดีกรี 3

เนื่องจากขีดจำกัดบน $M=2$ และขีดจำกัดล่าง $m=-3$ พิจารณา $f(m_j)$ เมื่อ $m_j = m_{j-1} + 0.5$

พิมพ์ -3 ลงในเซลล์ C6 และพิมพ์ $=C6+0.5$ ลงในเซลล์ C7 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ C16 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $(M=2)$) จากนั้น พิมพ์สูตร $=C6\wedge 3+C6\wedge 2-5*C6+3$ ลงในเซลล์ D6 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $-2.5,-2,-1.5,\ldots,2$

นำ $f(x)$ มาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะได้ $f'(x)=3x^2+2x-5$ โดยพิมพ์ -3 ลงในเซลล์ N6 และพิมพ์ $=N6+0.5$ ลงในเซลล์ N7 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ N16 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $M=2$) จากนั้นพิมพ์สูตร $=3*P6\wedge 2+2*P6-5$ ลงในเซลล์ O6 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $-2.5,-2,-1.5,\ldots,2$ จะได้ดังรูปที่ 3.5

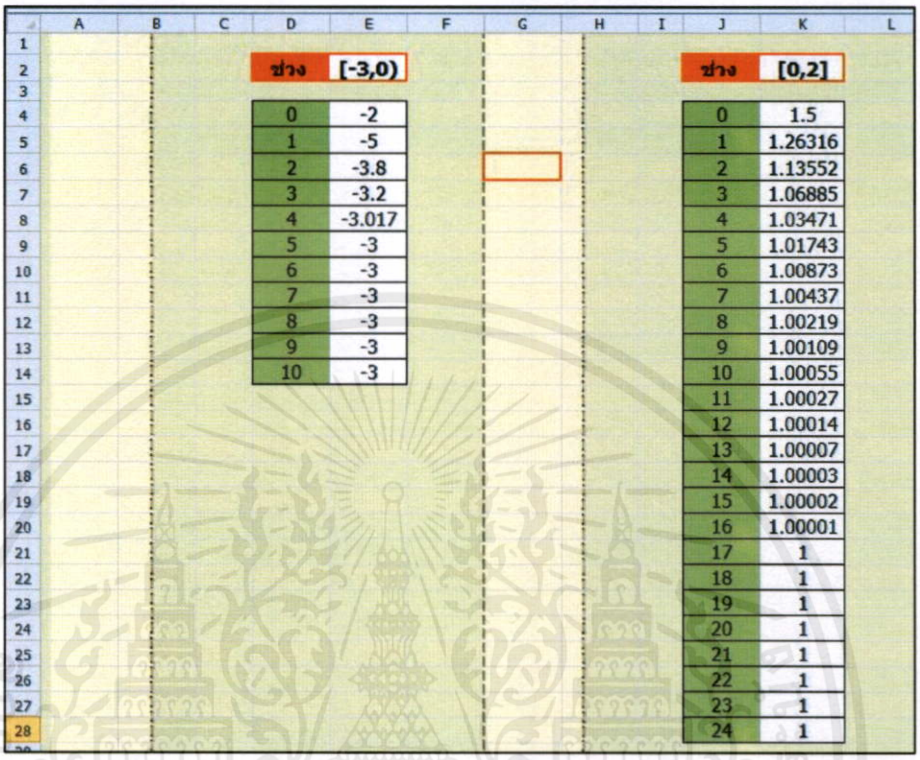


รูปที่ 3.6 วิธีการสร้างกราฟของพหุนามดีกรี 3

วิธีการวาดกราฟ ครอบเซลล์ C6-D16 $\rightarrow$ แทรก $\rightarrow$ กระจาย เลือก ดังรูปที่ 3.6 ดังนั้น จากกราฟได้ว่าช่วงที่บรรจุราก คือ $[-3,0)$ และ $[0,2]$

3. พิจารณาค่ารากจำนวนจริงในแต่ละช่วง

3.1 วิธีการทำซ้ำของนิวตัน



ช่วง	[-3,0)
0	-2
1	-5
2	-3.8
3	-3.2
4	-3.017
5	-3
6	-3
7	-3
8	-3
9	-3
10	-3

ช่วง	[0,2]
0	1.5
1	1.26316
2	1.13552
3	1.06885
4	1.03471
5	1.01743
6	1.00873
7	1.00437
8	1.00219
9	1.00109
10	1.00055
11	1.00027
12	1.00014
13	1.00007
14	1.00003
15	1.00002
16	1.00001
17	1
18	1
19	1
20	1
21	1
22	1
23	1
24	1

รูปที่ 3.7 การหาค่ารากด้วยวิธีการทำซ้ำนิวตันของพหุนามดีกรี 3

พิจารณาช่วง $[-3,0)$ เลือก $x_0=-2$

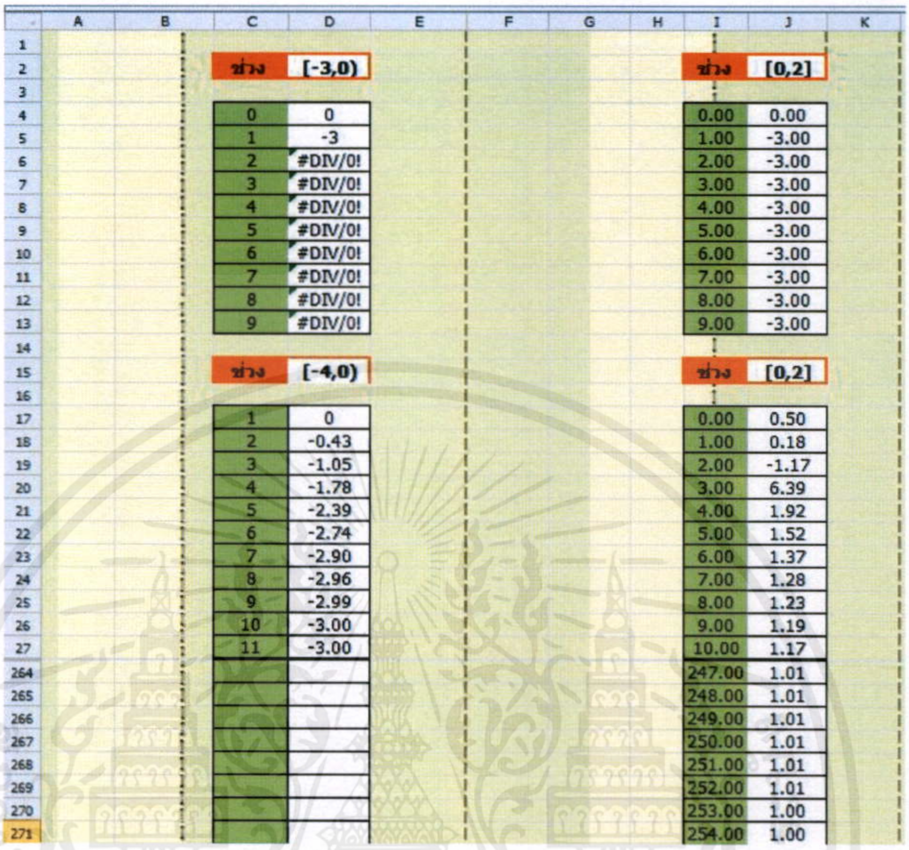
จากสูตรการทำซ้ำของนิวตัน $x_{n+1}=\dfrac{x_n-f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น -2 ลงในเซลล์ E4 แล้วพิมพ์สูตร $=E4-(E4\wedge 3+E4\wedge 2-5*E4+3)/(3*E4\wedge 2+2*E4-5)$ ในเซลล์ E5 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่ารากคือ $x=-3$

พิจารณาช่วง $[0,2]$ เลือก $x_0=1.5$

จากสูตรการทำซ้ำของนิวตัน $x_{n+1}=\dfrac{x_n-f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น 1.5 ลงในเซลล์ K4 แล้วพิมพ์สูตร $=K4-(K4\wedge 3+K4\wedge 2-5*K4+3)/(3*K4\wedge 2+2*K4-5)$ ในเซลล์ K5 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่ารากคือ $x=1$

ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x)=0$ คือ $x=-3$ และ $x=1$

3.2 วิธีการประมาณค่าในช่วง



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			ช่วง	[-3,0)					ช่วง	[0,2]	
3											
4			0	0					0.00	0.00	
5			1	-3					1.00	-3.00	
6			2	#DIV/0!					2.00	-3.00	
7			3	#DIV/0!					3.00	-3.00	
8			4	#DIV/0!					4.00	-3.00	
9			5	#DIV/0!					5.00	-3.00	
10			6	#DIV/0!					6.00	-3.00	
11			7	#DIV/0!					7.00	-3.00	
12			8	#DIV/0!					8.00	-3.00	
13			9	#DIV/0!					9.00	-3.00	
14											
15			ช่วง	[-4,0)					ช่วง	[0,2]	
16											
17			1	0					0.00	0.50	
18			2	-0.43					1.00	0.18	
19			3	-1.05					2.00	-1.17	
20			4	-1.78					3.00	6.39	
21			5	-2.39					4.00	1.92	
22			6	-2.74					5.00	1.52	
23			7	-2.90					6.00	1.37	
24			8	-2.96					7.00	1.28	
25			9	-2.99					8.00	1.23	
26			10	-3.00					9.00	1.19	
27			11	-3.00					10.00	1.17	
264									247.00	1.01	
265									248.00	1.01	
266									249.00	1.01	
267									250.00	1.01	
268									251.00	1.01	
269									252.00	1.01	
270									253.00	1.00	
271									254.00	1.00	

รูปที่ 3.8 การหาค่ารากด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงของพหุนามดีกรี 3

พิจารณาช่วง $[-3,0)$

จาก $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

$f'(x)=3x^2+2x-5$

$f''(x)=6x+2$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(-3)$ และ $f(0)$ มีเครื่องหมายต่างกันจึงได้ว่า $x_0=0$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1}=\frac{(x_n-b)f(x_n)}{f(x_n)-f(b)} \text{ เมื่อ } b=0, f(b)=3$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0=0$ ในเซลล์ D4 แล้วพิมพ์สูตร

$=D4-(D4-0)*(D4\wedge3+D4\wedge2-5*D4+3)/((D4\wedge3+D4\wedge2-5*D4+3)-3)$

ในเซลล์ D5 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะเกิด #DIV/0! หมายความว่า ตัวหารเป็น 0 ซึ่งไม่สามารถหาค่าต่อไปได้

สามารถแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นโดยการขยายช่วงที่คลุมช่วงเดิม จากช่วง $[-3,0)$ ขยายเป็น $[-4,0)$

พิจารณาช่วง $[-4,0)$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(-4)$ และ $f(0)$ มีเครื่องหมายต่างกันจึงได้ว่า $x_0 = 0$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1} = \frac{(x_n - a) f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \text{ เมื่อ } a = 0, f(a) = 3$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ ในเซลล์ D17 แล้วพิมพ์สูตร
$= D17-(D17-2)*(D17\string^3+D17\string^2-5*D17+3)/((D17\string^3+D17\string^2-5*D17+3)-5)$
ในเซลล์ D18 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x = -3$

พิจารณาช่วง $[0,2]$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(0)$ และ $f(2)$ มีเครื่องหมายเหมือนกันจึงได้ว่า $x_0 = 0$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1} = \frac{(x_n - b) f(x_n)}{f(x_n) - f(b)} \text{ เมื่อ } b = 2, f(b) = 5$$

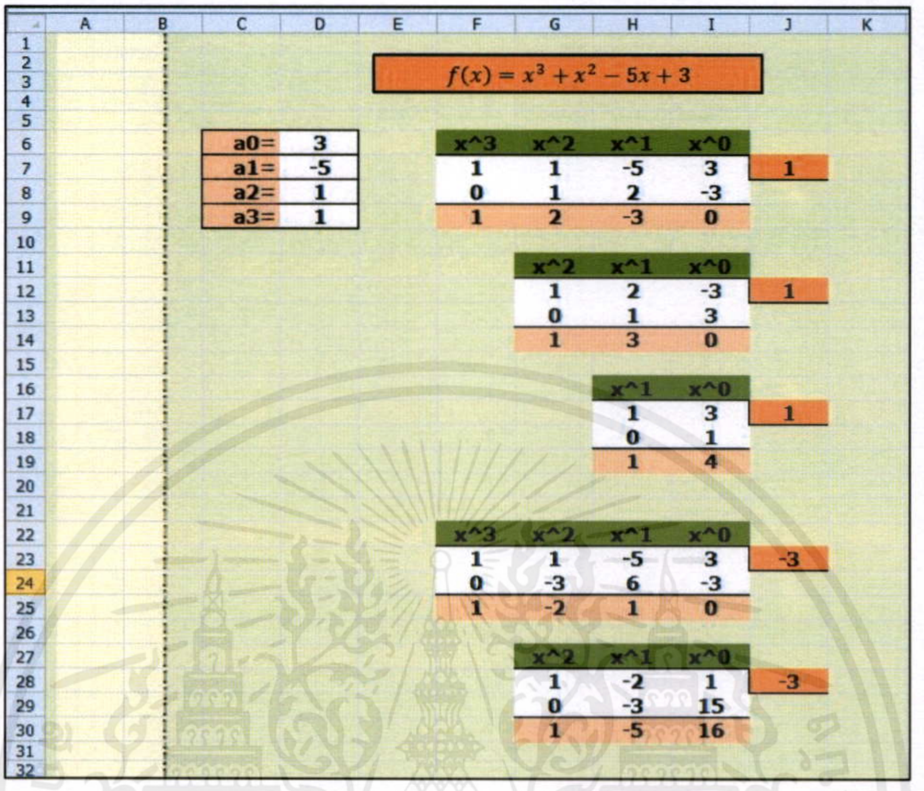
ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ ในเซลล์ J4 แล้วพิมพ์สูตร

$= J4-(J4-2)*(J4\string^3+J4\string^2-5*J4+3)/((J4\string^3+J4\string^2-5*J4+3)-5)$ ในเซลล์ J5 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x = -3$ แต่ -3 ไม่อยู่ในช่วง $[0,2]$ ดังนั้น เลือกค่าเริ่มต้นใหม่

กำหนดให้ $x_0 = 0.5$ ในเซลล์ J17 แล้วพิมพ์สูตร
$= J17-(J17-2)*(J17\string^3+J17\string^2-5*J17+3)/((J17\string^3+J17\string^2-5*J17+3)-5)$
ในเซลล์ J18 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x = 1$

ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x) = 0$ คือ $x = -3$ และ $x = 1$

4. พิจารณาภาวะรากซ้ำของรากจำนวนจริงสมการ $f(x)=x^3+x^2-5x+3$



	C	D	E	F	G	H	I	J
2–3				$f(x)=x^3+x^2-5x+3$				
6	a0=	3		x^3	x^2	x^1	x^0	
7	a1=	-5		1	1	-5	3	1
8	a2=	1		0	1	2	-3	
9	a3=	1		1	2	-3	0	
11					x^2	x^1	x^0	
12					1	2	-3	1
13					0	1	3	
14					1	3	0	
16						x^1	x^0	
17						1	3	1
18						0	1	
19						1	4	
22				x^3	x^2	x^1	x^0	
23				1	1	-5	3	-3
24				0	-3	6	-3	
25				1	-2	1	0	
27					x^2	x^1	x^0	
28					1	-2	1	-3
29					0	-3	15	
30					1	-5	16	

รูปที่ 3.9 แสดงการคำนวณการหารสังเคราะห์

จากข้อ 3.1 และ 3.2 พบว่า -3 และ 1 เป็นรากของ $f(x)=0$ พิจารณาภาวะรากซ้ำของ 1 ได้ดังนี้

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ D6 – D9 จะได้ $a_0=3$ $a_1=-5$ $a_2=1$ และ $a_3=1$ ดังรูปที่ 3.9

- พิมพ์ $=D9$ ในเซลล์ F7 $=D8$ ในเซลล์ G7 $=D7$ ในเซลล์ H7 $=D6$ ในเซลล์ I7 และ 1 ในเซลล์ J7

- คำนวณค่าในเซลล์ G8 H8 และ I8 โดยพิมพ์ $=F9*J7$, $=G9*J7$, $=H9*J7$ ตามลำดับ

- คำนวณค่าในเซลล์ F9 G9 H9 และ I9 โดยพิมพ์ $=F7$, $=G7+G8$, $=H7+H8$, $=I7+I8$ ตามลำดับ จะได้ดังรูปที่ 3.9

พิจารณาค่าที่ได้ในเซลล์ I9 เท่ากับ 0 หรือไม่ ถ้าไม่เท่ากับ 0 ให้หยุด ถ้าเท่ากับ 0 ให้พิจารณาต่อไป

กรณีค่าที่ได้ในเซลล์ I9=0

- พิมพ์ค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ โดย พิมพ์ $=F9$ ในเซลล์ G12 $=G9$ ในเซลล์ H12 $=H9$ ในเซลล์ I12 และ 1 ในเซลล์ J12 จากนั้นคำนวณค่าที่เหลือ ดังวิธีการข้างต้น ทำซ้ำจนกว่าค่าที่ได้จากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

พิจารณาภาวะรากซ้ำของ -3 ได้ดังนี้ จากวิธีการข้างต้น ทำจนกว่าจะได้ค่าที่จากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

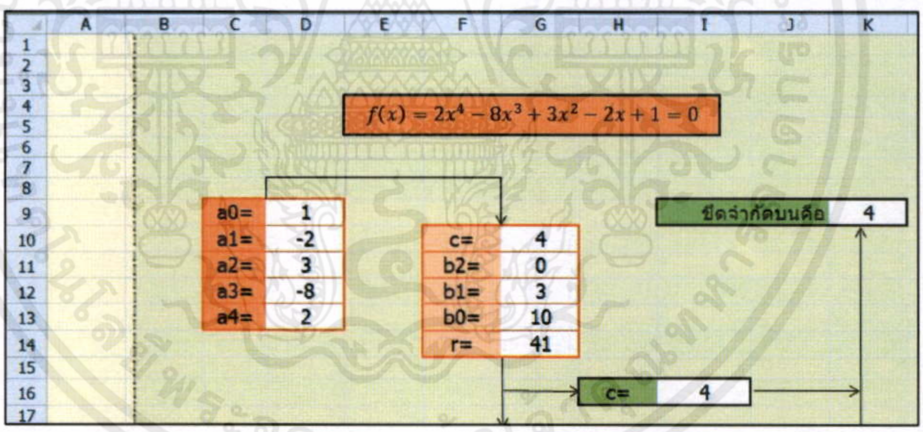
ดังนั้น กรณีรากคือ -3 เป็นรากเชิงเดียว และ 1 มีภาวะรากซ้ำที่ 2

โดยขั้นตอนการพิจารณาหาค่ารากของ $f(x)=0$ ทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 3.1 จะแสดงการหาค่ารากจำนวนจริงของ $f(x)=0$ ที่มีดีกรี 4 , 5 และ 6 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>**ตัวอย่าง 3.2**</u> ให้ $f(x)=2x^4-8x^3+3x^2-2x+1=0$

1. การหาขีดจำกัดของค่ารากจำนวนจริง

1.1 หาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก



รูปที่ 3.10 การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของพหุนามดีกรี 4

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ D6 – D10 จะได้

$a_0=1, a_1=-2, a_2=3, a_3=-8, a_4=2$ ดังรูปที่ 3.10

- หาค่า c โดยพิมพ์ $=IF(AND(-D9/D10>=0),-D9/D10,0)$ ในเซลล์ G7 โดยตั้งค่าเป็นจำนวนเต็ม จะได้ค่า $c=4$

- คำนวณค่า b_2, b_1, b_0, r โดยที่

คำนวณ b_2 โดยพิมพ์ $=D9+(G7*D10)$ ในเซลล์ G8 จะได้ค่า $b_2=0$

คำนวณ b_1 โดยพิมพ์ $=D8+(G7*G8)$ ในเซลล์ G8 จะได้ค่า $b_1=3$

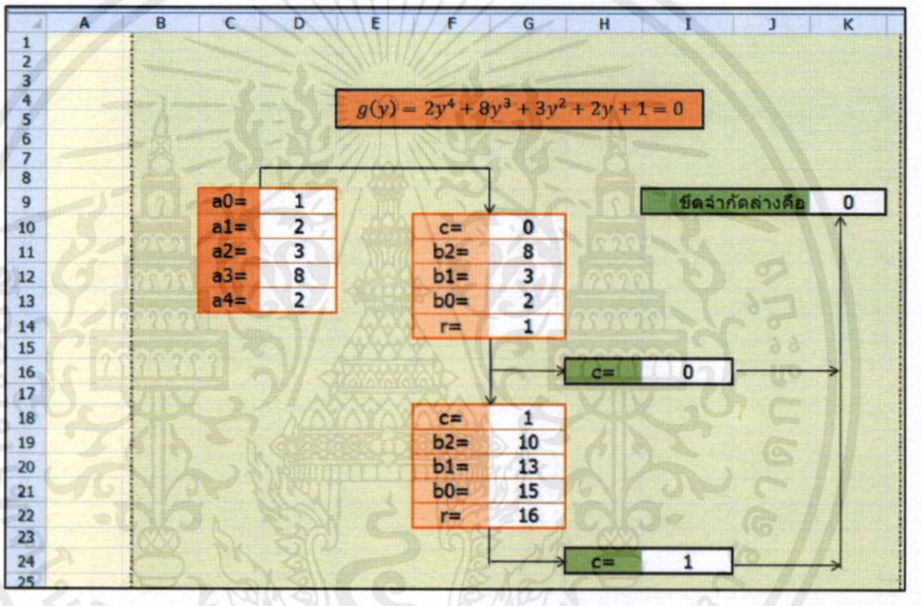
คำนวณ b_0 โดยพิมพ์ $=D7+(G7*G9)$ ในเซลล์ G9 จะได้ค่า $b_0=10$

คำนวณ r โดยพิมพ์ $=D6+(G7*G10)$ ในเซลล์ G10 จะได้ค่า $r=41$

พิจารณาค่า b_2,b_1,b_0,r ว่าทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 หรือไม่ โดยพิมพ์ =IF(AND(G8>=0,G9>=0,G10>=0,G11>=0),G7,"Error") ในเซลล์ I12 เพื่อตรวจสอบว่ามีบางตัวน้อยกว่า 0 หรือไม่ ถ้ามีต้องเลือกค่า c ใหม่ จะเห็นว่า b_2,b_1,b_0,r มากกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อเลือก $c=4$

ดังนั้น $c=4$ เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก

1.2 หาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบ

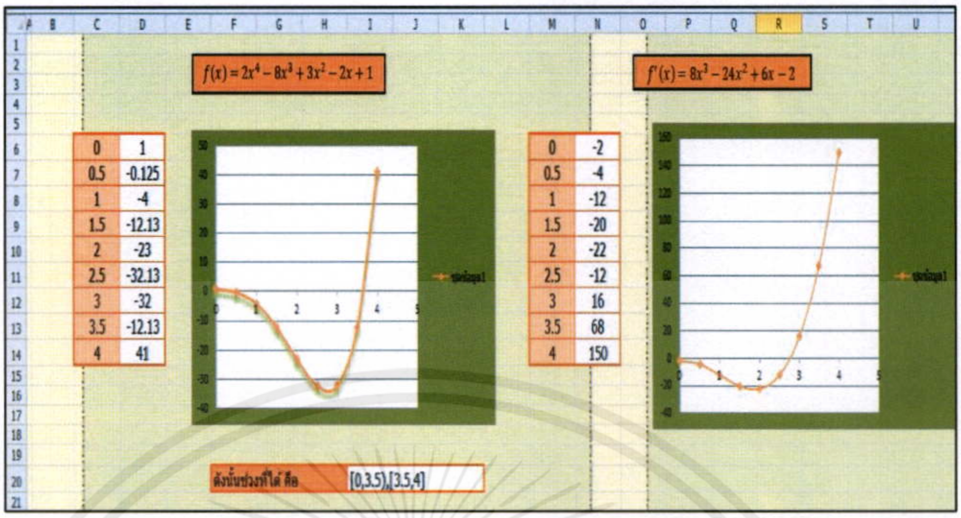


รูปที่ 3.11 การหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบของพหุนามดีกรี 4

จาก $f(x)=2x^4-8x^3+3x^2-2x+1=0$ แทนค่า $x=-y$ จะได้สมการใหม่ คือ $g(y)=2y^4+8y^3+3y^2+2y+1=0$

ทำเช่นเดียวกับการหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกใน 1.1 จะได้ $c=0$ เป็นขีดจำกัดบนของ $g(y)=0$ แสดงว่า 0 เป็นขีดจำกัดล่างของ $f(x)=0$ ดังผลที่แสดงในรูปที่ 3.11

2. หาช่วงที่บรรจุแต่ละรากจำนวนจริง



รูปที่ 3.12 ช่วงที่บรรจุในแต่ละรากของพหุนามดีกรี 4

เนื่องจากขีดจำกัดบน $M = 4$ และขีดจำกัดล่าง $m = 0$ พิจารณา $f(m_j)$ เมื่อ $m_j = m_{j-1} + 0.5$

พิมพ์ 0 ลงในเซลล์ C6 และพิมพ์ $= C6 + 0.5$ ลงในเซลล์ C7 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ C14 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $M = 4$) จากนั้น พิมพ์สูตร $= 2*C6\hat{}4 - 8*C6\hat{}3 + 3*C6\hat{}2 - 2*C6 + 1$ ลงในเซลล์ D6 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $0.5, 1, 1.5, ..., 4$

นำ $f(x)$ มาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะได้ $f'(x) = 8x^3 - 24x^2 + 6x - 2$ โดยพิมพ์ 0 ลงในเซลล์ M6 และพิมพ์ $= M6 + 0.5$ ลงในเซลล์ M7 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ M14 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $M = 4$) จากนั้นพิมพ์สูตร $= 8*N6\hat{}3 - 24*N6\hat{}2 + 6*N6 - 2$ ลงในเซลล์ N6 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $0.5, 1, 1.5, ..., 4$ จะได้ดังรูปที่ 3.12

ดังนั้น จากกราฟได้ว่าช่วงที่บรรจุราก คือ $[0, 3.5)$ และ $[3.5, 4]$

3. พิจารณาค่ารากจำนวนจริงแต่ละช่วง

3.1 วิธีการทำซ้ำของนิวตัน

	C	D	H	I
2	ช่วง	[0,3.5)	ช่วง	[3.5,4]
4	0	0.25	0	4
5	1	0.55417	1	3.72667
6	2	0.47733	2	3.65824
7	3	0.46733	3	3.65417
8	4	0.46717	4	3.65415
9	5	0.46717	5	3.65415
10	6	0.46717	6	3.65415
11	7	0.46717	7	3.65415
12	8	0.46717	8	3.65415
13	9	0.46717	9	3.65415
14	10	0.46717	10	3.65415
15	11	0.46717	11	3.65415
16	12	0.46717	12	3.65415
17	13	0.46717	13	3.65415
18	14	0.46717	14	3.65415
19	15	0.46717	15	3.65415
20	16	0.46717	16	3.65415
21	17	0.46717	17	3.65415
22	18	0.46717	18	3.65415
23	19	0.46717	19	3.65415
24	20	0.46717	20	3.65415

รูปที่ 3.13 การหาค่ารากด้วยวิธีการทำซ้ำของนิวตันของพหุนามดีกรี 4

พิจารณาช่วง [0,3.5) เลือก $x_0 = 0.25$

จากสูตรการทำซ้ำของนิวตัน $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น 0.25 ลงในเซลล์ D4 แล้วพิมพ์สูตร $= D4-(2*D4\char`^4-8*D4\char`^3+3*D4\char`^2-2*D4+1)/(8*D4\char`^3-24*D4\char`^2+6*D4-2)$ ในเซลล์ D5 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่าราก คือ $x = 0.46717$

พิจารณาช่วง [3.5,4] เลือก $x_0 = 4$

จากสูตรการทำซ้ำของนิวตัน $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น 4 ลงในเซลล์ I4 แล้วพิมพ์สูตร $= I4-(2*I4\char`^4-8*I4\char`^3+3*I4\char`^2-2*I4+1)/(8*I4\char`^3-24*I4\char`^2+6*I4-2)$ ในเซลล์ I5 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่าราก $x = 3.65415$

ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x) = 0$ คือ $x = 0.46717$ และ $x = 3.65415$

3.2 วิธีการประมาณค่าในช่วง

ช่วง	[0,3.5)	ช่วง	[3.5,4]
0	0.25	0	4
1	0.55417	1	3.72667
2	0.47733	2	3.65824
3	0.46733	3	3.65417
4	0.46717	4	3.65415
5	0.46717	5	3.65415
6	0.46717	6	3.65415
7	0.46717	7	3.65415
8	0.46717	8	3.65415
9	0.46717	9	3.65415
10	0.46717	10	3.65415
11	0.46717	11	3.65415
12	0.46717	12	3.65415
13	0.46717	13	3.65415
14	0.46717	14	3.65415
15	0.46717	15	3.65415
16	0.46717	16	3.65415
17	0.46717	17	3.65415
18	0.46717	18	3.65415
19	0.46717	19	3.65415
20	0.46717	20	3.65415

รูปที่ 3.14 การหาค่ารากด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงของพหุนามดีกรี 4

พิจารณาช่วง $[0,3.5)$

จาก $f(x)=2x^4-8x^3+3x^2-2x+1$

$f'(x)=8x^3-24x^2+6x-2$

$f''(x)=24x^2-48x+6$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(0)$ และ $f(3.5)$ มีเครื่องหมายต่างกันจึงได้ว่า $x_0=3.5$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1}=\frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \text{ เมื่อ } a=0, f(a)=1$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0=3.5$ ในเซลล์ E4 แล้วพิมพ์สูตร

$=E4-(E4-0)*(2*E4\wedge 4-8*E4\wedge 3+3*E4\wedge 2-2*E4+1)/((2*E4\wedge 4-8*E4\wedge 3+3*E4\wedge 2-2*E4+1)-1)$

ในเซลล์ E5 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x=0.46717$

พิจารณาช่วง $[3.5,4]$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(3.5)$ และ $f(4)$ มีเครื่องหมายต่างกันจึงได้ว่า $x_0=4$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1}=\frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \text{ เมื่อ } a=3.5, f(a)=-12.13$$

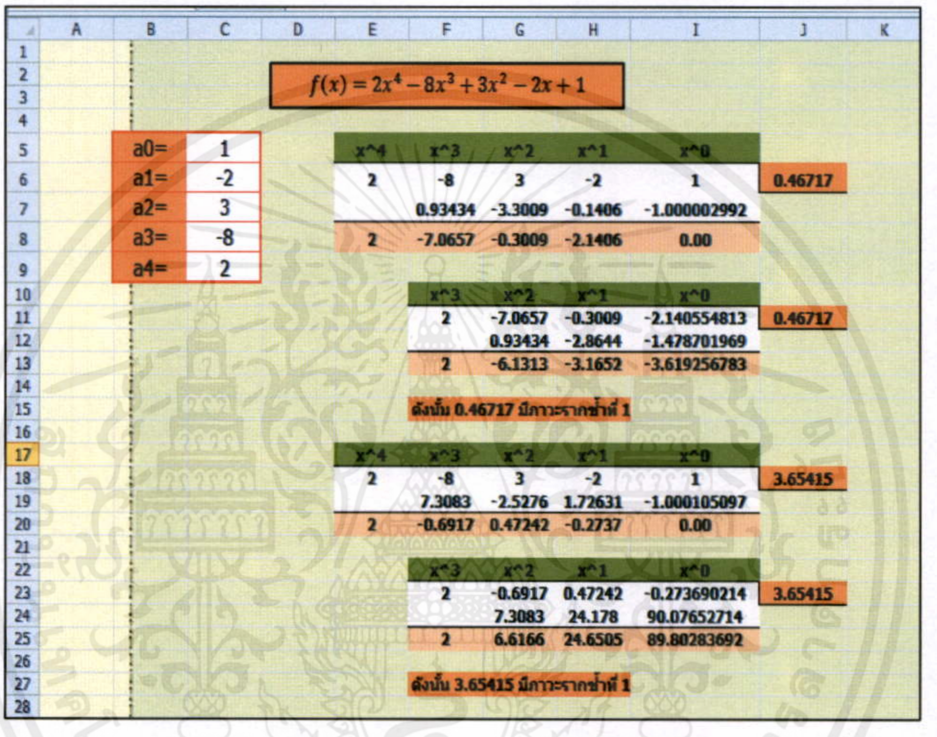
ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0 = 4$ ในเซลล์ K4 แล้วพิมพ์สูตร

$=K4-(K4-3.5)*(2*K4\wedge4-8*K4\wedge3+3*K4\wedge2-2*K4+1)/((2*K4\wedge4-8*K4\wedge3+3*K4\wedge2-2*K4+1)+12.13)$

ในเซลล์ K5 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x = 3.65415$

ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x)=0$ คือ $x = 0.46717$ และ $x = 3.65415$

4. พิจารณาภาวะรากซ้ำของรากจำนวนจริงของสมการ $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 1$



รูปที่ 3.15 แสดงการคำนวณการหารสังเคราะห์

จากข้อ 3.1 และ 3.2 พบว่า 0.46717 และ 3.65415 เป็นรากของ $f(x)=0$ พิจารณาภาวะรากซ้ำของ 0.46717 ได้ดังนี้

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ C5 – C9 จะได้ $a_0 = 1$ $a_1 = -2$ $a_2 = 3$ $a_3 = -8$ และ $a_4 = 2$ ดังรูปที่ 3.15

- พิมพ์ $=D9$ ในเซลล์ E6 $=D8$ ในเซลล์ F6 $=D7$ ในเซลล์ G6 $=D6$ ในเซลล์ H6 $=D5$ ในเซลล์ I6 และ 0.46717ในเซลล์ J6

- คำนวณค่าในเซลล์ F7 G7 H7 และ I7 โดยพิมพ์ $=E8*J6$, $=F8*J6$, $=G8*J6$, $=H8*J6$ ตามลำดับ

- คำนวณค่าในเซลล์ E8 F8 G8 H8 และ I8 โดยพิมพ์ $=E6$, $=F6+F7$, $=G6+G7$, $=H6+H7$, $=I6+I7$ ตามลำดับ จะได้ดังรูปที่ 3.15

พิจารณาค่าที่ได้ในเซลล์ I8 เท่ากับ 0 หรือไม่ ถ้าไม่เท่ากับ 0 ให้หยุด ถ้าเท่ากับ 0 ให้พิจารณาต่อไป

กรณีค่าที่ได้ค่าในเซลล์ I8=0

- พิมพ์ค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ โดย พิมพ์ $=E8$ ในเซลล์ F11 $=F8$ ในเซลล์ G11 $=G8$ในเซลล์ H11 $=H8$ ในเซลล์ I11 และ 0.46717 ในเซลล์ J11 จากนั้นคำนวณค่าที่เหลือ ดังวิธีการข้างต้น ทำซ้ำจนกว่าค่าที่ได้จากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

พิจารณาภาวะรากซ้ำของ 3.65415 ได้ดังนี้

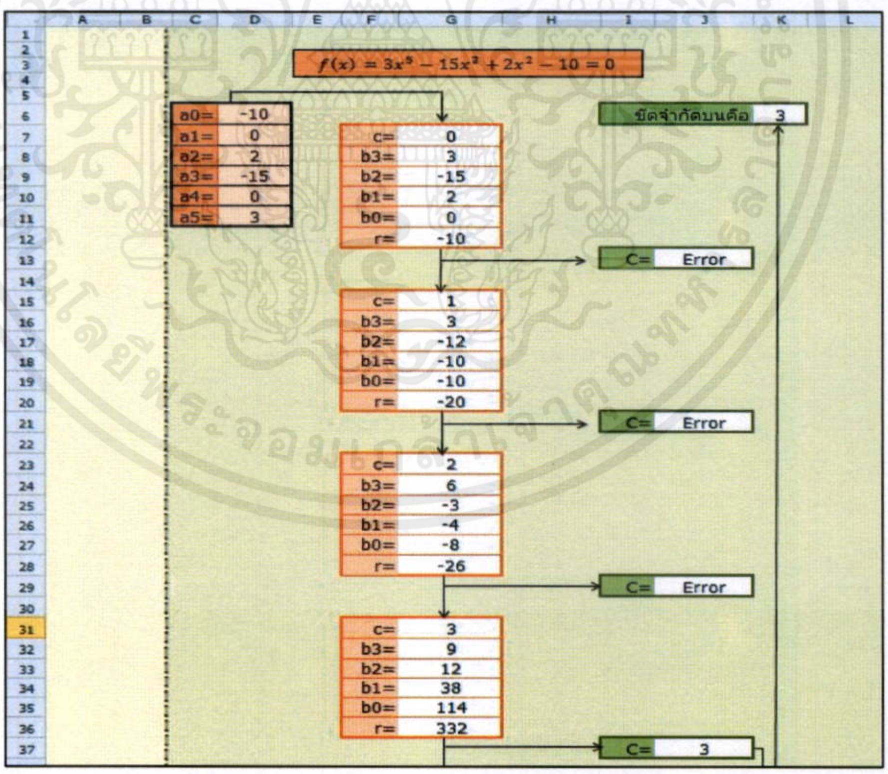
จากวิธีการข้างต้น ทำจนกว่าจะได้ค่าจากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น กรณีรากคือ 0.46717 และ 3.65415 เป็นรากเชิงเดียว

__ตัวอย่าง 3.3__ ให้ $f(x)=3x^5-15x^3+2x^2+3=0$

1. การหาขีดจำกัดของค่ารากจำนวนจริง

1.1 หาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก



รูปที่ 3.16 การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของพหุนามดีกรี 5

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ D6 – D11 จะได้ $a_0=-10$ $a_1=0$ $a_2=2$ $a_3=-15$ $a_4=0$ และ $a_5=3$ ดังรูปที่ 3.16

- หาค่า c โดยพิมพ์ $= IF(AND(-D10/D11>=0),-D10/D11,0)$ ในเซลล์ G7 โดยตั้งค่าเป็นจำนวนเต็ม จะได้ค่า $c=0$

- คำนวณค่า b_3,b_2,b_1,b_0,r โดยที่

คำนวณ b_3 โดยพิมพ์ $=D10+(G7*D11)$ ในเซลล์ G8 จะได้ค่า $b_3=0$

คำนวณ b_2 โดยพิมพ์ $=D9+(G7*G8)$ ในเซลล์ G9 จะได้ค่า $b_2=-15$

คำนวณ b_1 โดยพิมพ์ $=D8+(G7*G9)$ ในเซลล์ G10 จะได้ค่า $b_1=2$

คำนวณ b_0 โดยพิมพ์ $=D7+(G7*G10)$ ในเซลล์ G11 จะได้ค่า $b_0=0$

คำนวณ r โดยพิมพ์ $=D6+(G7*G11)$ ในเซลล์ G12 จะได้ค่า $r=-10$

พิจารณาค่า b_3,b_2,b_1,b_0,r ว่าทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 หรือไม่ โดยพิมพ์ =IF(AND(G8>=0,G9>=0,G10>=0,G11>=0.G12>=0),G7,"Error") ในเซลล์ J12 เพื่อตรวจสอบว่ามีบางตัวน้อยกว่า 0 หรือไม่ ถ้ามีต้องเลือกค่า c ใหม่

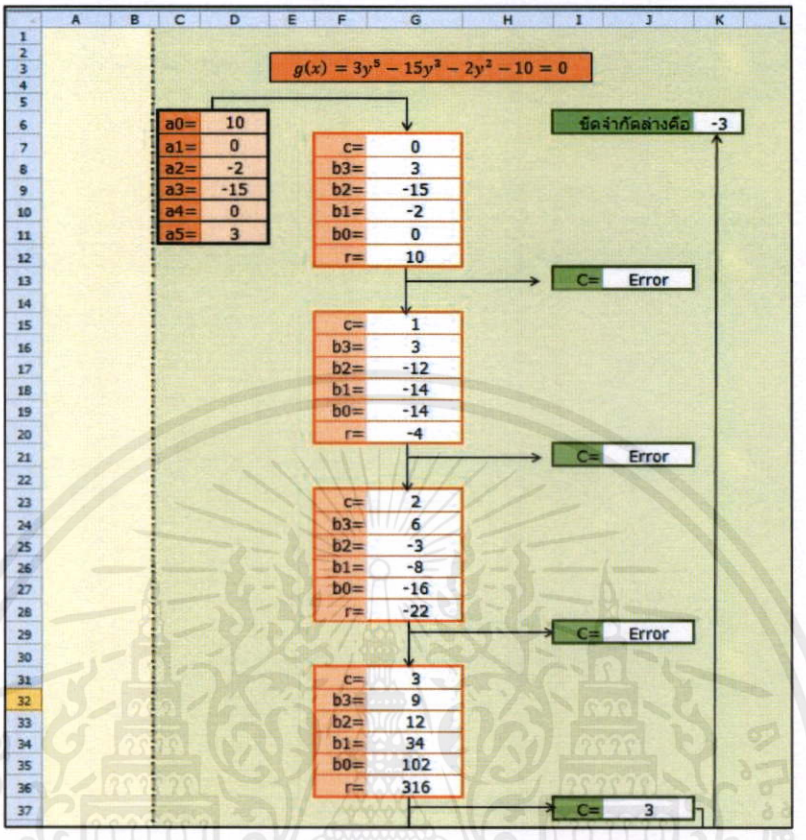
กรณีมีบางตัวน้อยกว่า 0

- หาค่า c ใหม่ โดยพิมพ์ $=G7+1$ ในเซลล์ G14 จะได้ค่า $c=1$

- คำนวณค่า b_3,b_2,b_1,b_0,r ใหม่ ดังวิธีการข้างต้นทำซ้ำจนกว่าได้ค่า b_3,b_2,b_1,b_0,r มากกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อเลือก $c=3$

ดังนั้น $c=3$ เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก

1.2 หาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบ

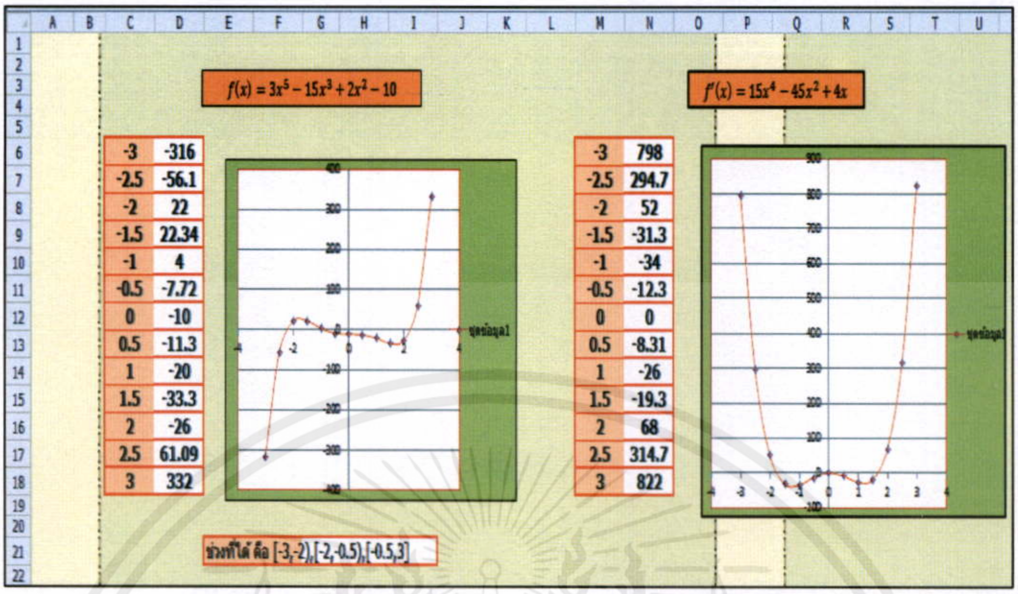


รูปที่ 3.17 การหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบของพหุนามดีกรี 5

จาก $f(x)=3x^5-15x^3+2x^2-10=0$ แทนค่า $x=-y$ จะได้สมการใหม่คือ $f(-y)=-3y^5+15y^3+2y^2-10=0$ ทำให้สัมประสิทธิ์ตัวที่มีกำลังมากสุดไม่ติดลบโดยที่นำ -1 ไปคูณใน $f(-y)=0$ จะได้ $g(y)=3y^5-15y^3-2y^2-10=0$

ทำเช่นเดียวกับการหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกใน 1.1 จะได้ $c=3$ เป็นขีดจำกัดบนของ $f(-y)=0$ แสดงว่า -3 เป็นขีดจำกัดล่างของ $f(x)=0$ ดังผลที่แสดงในรูปที่ 3.17

2. หาช่วงที่บรรจุแต่ละรากจำนวนจริง



รูปที่ 3.18 ช่วงที่บรรจุในแต่ละรากของพหุนามดีกรี 5

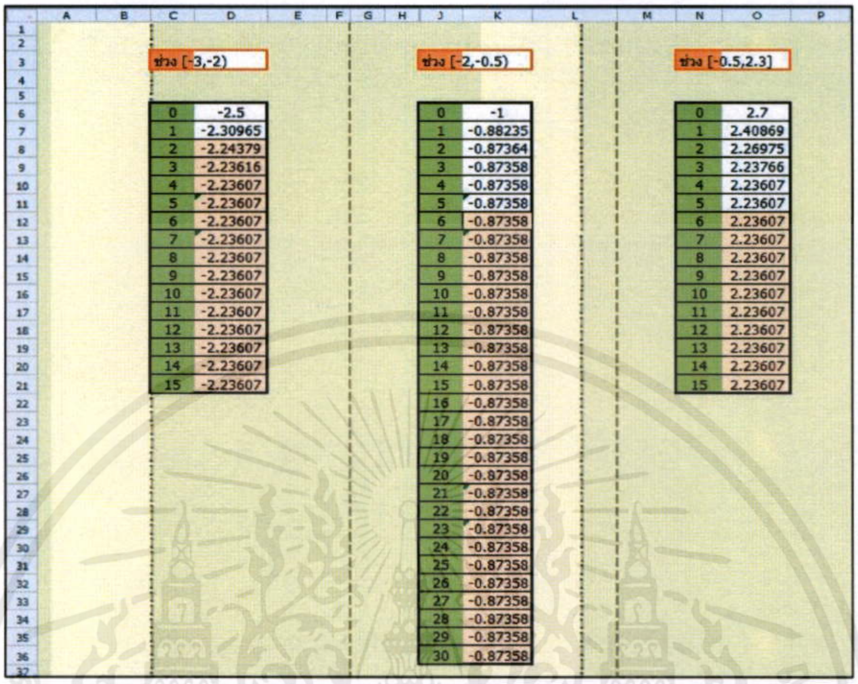
เนื่องจากขีดจำกัดบน $M=3$ และขีดจำกัดล่าง $m=-3$ พิจารณา $f(m_j)$ เมื่อ $m_j = m_{j-1} + 0.5$

พิมพ์ -3 ลงในเซลล์ C6 พิมพ์ $=C6+0.5$ ลงในเซลล์ C7 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ C18 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $M=3$) จากนั้น พิมพ์สูตร $=3*C6\wedge 5-15*C6\wedge 3+2*C6\wedge 2-10$ ลงในเซลล์ D6 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $-2.5,-2,-1.5,\ldots,3$ นำ $f(x)$ มาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะได้ $f'(x)=15x^4-45x^2+4x$ โดยพิมพ์ -3 ลงในเซลล์ M6 และพิมพ์ $=M6+0.5$ ในเซลล์ M7 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ M18 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $M=3$) จากนั้นพิมพ์สูตร $=15*M6\wedge 4-45*M6\wedge 2+4*M6$ ลงในเซลล์ N6 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $-2.5,-2,-1.5,\ldots,3$ จะได้ดังรูปที่ 3.18

ดังนั้น จากกราฟได้ว่าช่วงที่บรรจุราก คือ $[-3,-2)$ $[-2,-0.5)$ และ $[-0.5,3]$

3. พิจารณาค่ารากจำนวนจริงในแต่ละช่วง

3.1 วิธีการทำซ้ำของนิวตัน



ช่วง [-3,-2)

0	-2.5
1	-2.30965
2	-2.24379
3	-2.23616
4	-2.23607
5	-2.23607
6	-2.23607
7	-2.23607
8	-2.23607
9	-2.23607
10	-2.23607
11	-2.23607
12	-2.23607
13	-2.23607
14	-2.23607
15	-2.23607

ช่วง [-2,-0.5)

0	-1
1	-0.88235
2	-0.87364
3	-0.87358
4	-0.87358
5	-0.87358
6	-0.87358
7	-0.87358
8	-0.87358
9	-0.87358
10	-0.87358
11	-0.87358
12	-0.87358
13	-0.87358
14	-0.87358
15	-0.87358
16	-0.87358
17	-0.87358
18	-0.87358
19	-0.87358
20	-0.87358
21	-0.87358
22	-0.87358
23	-0.87358
24	-0.87358
25	-0.87358
26	-0.87358
27	-0.87358
28	-0.87358
29	-0.87358
30	-0.87358

ช่วง [-0.5,2.3]

0	2.7
1	2.40869
2	2.26975
3	2.23766
4	2.23607
5	2.23607
6	2.23607
7	2.23607
8	2.23607
9	2.23607
10	2.23607
11	2.23607
12	2.23607
13	2.23607
14	2.23607
15	2.23607

รูปที่ 3.19 การหาค่ารากด้วยวิธีการทำซ้ำของนิวตันของพหุนามดีกรี 5

พิจารณาช่วง $[-3,-2)$ เลือก $x_0 = -2.5$

จากสูตรการทำซ้ำของนิวตัน $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น -2.5 ลงในเซลล์ D6 แล้วพิมพ์สูตร $= D6-(3*D6\wedge 5-15*D6\wedge 3+2*D6\wedge 2-10)/(15*D6\wedge 4-45*D6\wedge 2+4*D6)$ ในเซลล์ D7 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่าราก คือ $x = -2.23607$ พิจารณาช่วง $[-2,-0.5)$ เลือก $x_0 = -1$

จากสูตรการทำซ้ำของนิวตัน $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น -1 ลงในเซลล์ K6 แล้วพิมพ์สูตร$= K6-(3*K6\wedge 5-15*K6\wedge 3+2*K6\wedge 2-10)/(15*K6\wedge 4-45*K6\wedge 2+4*K6)$ ในเซลล์ K7 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่ารากคือ $x = -0.87358$ พิจารณาช่วง $[-0.5,3]$ เลือก $x_0 = 2.7$

จากสูตรการทำซ้ำของนิวตัน $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น 2.7 ลงในเซลล์ O6 แล้วพิมพ์สูตร $= O6-(3*O6\wedge 5-15*O6\wedge 3+2*O6\wedge 2-10)/(15*O6\wedge 4-45*O6\wedge 2+4*O6)$

ในเซลล์ O7 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่ารากคือ $x = 2.23607$

ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x)=0$ คือ $x=-2.23607$ -0.87358 และ $x = 2.23607$

3.2 พิจารณาค่าช่วงด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วง

ช่วง	[-3,-2)	ช่วง	[-2,-0.5)	ช่วง	[-0.5,3]
0	-2	0	-0.5	0	3
1	-2.06509	1	-0.88959	1	-0.4205
2	-2.11536	2	-0.86528	2	33.9983
3	-2.15255	3	-0.87753	3	2.99992
4	-2.17913	4	-0.87162	4	2.59608
5	-2.19767	5	-0.87453	5	2.43467
6	-2.21037	6	-0.87311	6	2.35276
7	-2.21895	7	-0.87381	7	2.30684
8	-2.22471	8	-0.87347	8	2.27976
9	-2.22855	9	-0.87364	9	2.26332
10	-2.2311	10	-0.87355	10	2.25318
11	-2.23279	11	-0.87359	11	2.24685
12	-2.2339	12	-0.87357	12	2.24288
13	-2.23464	13	-0.87358	13	2.24038
14	-2.23513	14	-0.87358	14	2.2388
15	-2.23545	15	-0.87358	15	2.2378
16	-2.23566	16	-0.87358	16	2.23716
17	-2.2358	17	-0.87358	17	2.23676
18	-2.23589	18	-0.87358	18	2.23651
19	-2.23595	19	-0.87358	19	2.23635
20	-2.23599	20	-0.87358	20	2.23625
21	-2.23602			21	2.23618
22	-2.23603			22	2.23614
23	-2.23605			23	2.23611
24	-2.23605			24	2.2361
25	-2.23606			25	2.23609
26	-2.23606			26	2.23608
27	-2.23606			27	2.23608
28	-2.23607			28	2.23607
29	-2.23607			29	2.23607
30	-2.23607			30	2.23607
31	-2.23607				
32	-2.23607				

รูปที่ 3.20 การหาค่ารากด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงของพหุนามดีกรี 5

พิจารณาช่วง $[-3,-2)$

จาก $f(x) = 3x^5 - 15x^3 + 2x^2 - 10$

$f'(x) = 15x^4 - 45x^2 + 4x$

$f''(x) = 60x^3 - 90x + 4$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(-3)$ และ $f(-2)$ มีเครื่องหมายต่างกันจึงได้ว่า $x_0 = -2$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1} = \frac{(x_n - a)f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \text{ เมื่อ } a = -3, f(a) = -316$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0 = -2$ ในเซลล์ D6 แล้วพิมพ์สูตร

$= D6-(D6+3)*(3*D6^5-15*D6^3+2*D6^2-10)/((3*D6^5-15*D6^3+2*D6^2-10)+316)$

ในเซลล์ D7 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x = -2.23607$

พิจารณาช่วง $[-2,-0.5)$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(-2)$ และ $f(-0.5)$ มีเครื่องหมายต่างกันจึงได้ว่า $x_0=-0.5$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1}=\frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \text{ เมื่อ } a=-2, f(a)=22$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0=4$ ในเซลล์ I6 แล้วพิมพ์สูตร $=I6-(I6+2)*(3*I6^\wedge5-15*I6^\wedge3+2*I6^\wedge2-10)/((3*I6^\wedge5-15*I6^\wedge3+2*I6^\wedge2-10)-22)$ ในเซลล์ I7 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x=-0.87358$

พิจารณาช่วง $[-0.5,3]$

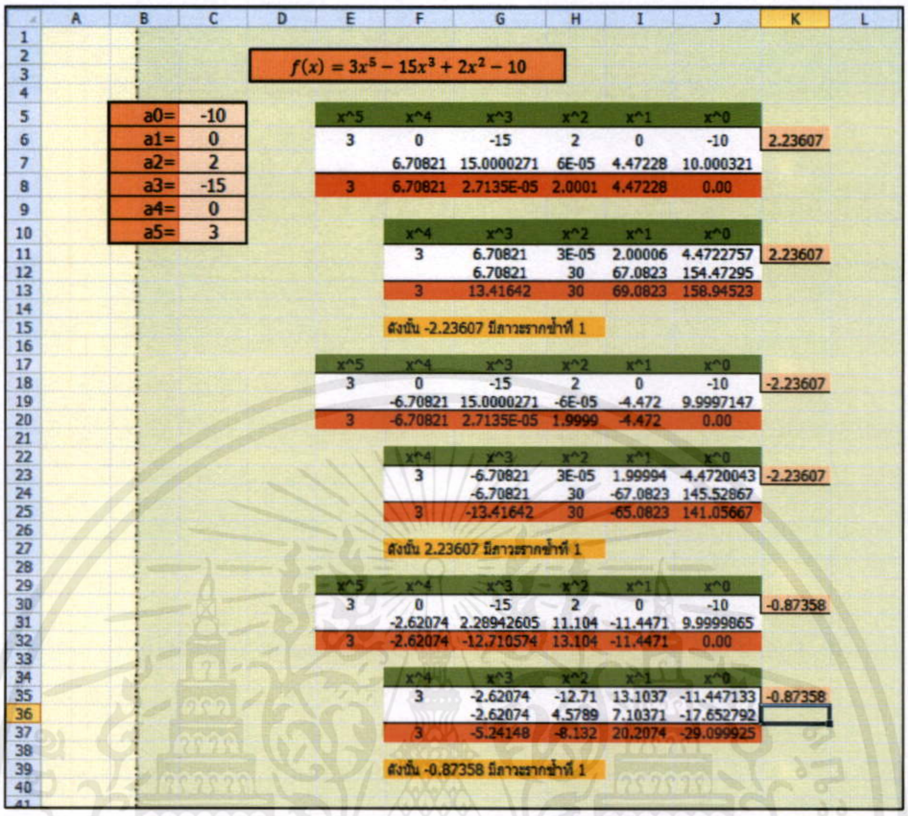
เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(-0.5)$ และ $f(3)$ มีเครื่องหมายต่างกันจึงได้ว่า $x_0=3$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1}=\frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \text{ เมื่อ } a=-0.5, f(a)=-7.719$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0=3$ ในเซลล์ M6 แล้วพิมพ์สูตร
$=M6-(I6+0.5)*(3*M6^\wedge5-15*M6^\wedge3+2*M6^\wedge2-10)/((3*M6^\wedge5-15*M6^\wedge3+2*M6^\wedge2-10)+7.719)$
ในเซลล์ M7 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x=2.23607$

ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x)=0$ คือ $x=-2.23607$ -0.87358 และ $x=2.23607$

4.พิจารณาภาวะรากซ้ำของรากจำนวนจริงสมการ $f(x)=3x^5-15x^3+2x^2-10$



รูปที่ 3.21 แสดงการคำนวณการหารสังเคราะห์

จากข้อ 3.1 และ 3.2 พบว่า -2.23607 2.23607 และ -0.87358 เป็นรากของ $f(x)=0$ พิจารณาภาวะรากซ้ำของ 2.23607 ได้ดังนี้

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ C5 – C10 จะได้ $a_0=-10$ $a_1=0$ $a_2=2$ $a_3=-15$ $a_4=0$ และ $a_5=3$ ดังรูปที่ 3.21
- พิมพ์ $=D10$ ในเซลล์ E6 $=D9$ ในเซลล์ F6 $=D8$ ในเซลล์ G6 $=D7$ ในเซลล์ H6 $=D6$ ในเซลล์ I6 $=D5$ ในเซลล์ J6 และ 2.23607 ในเซลล์ K6
- คำนวณค่าในเซลล์ F7 G7 H7 I7 และ J7 โดยพิมพ์ $=E8*K6$, $=F8*K6$, $=G8*K6$, $=H8*K6$, $=I8*K6$ ตามลำดับ
- คำนวณค่าในเซลล์ E8 F8 G8 H8 I8 และ J8 โดยพิมพ์ $=E6$, $=F6+F7$, $=G6+G7$, $=H6+H7$, $=I6+I7$, $=J6+J7$ ตามลำดับ จะได้ดังรูปที่ 3.21

พิจารณาค่าที่ได้ในเซลล์ J8 เท่ากับ 0 หรือไม่ ถ้าไม่เท่ากับ 0 ให้หยุด ถ้าเท่ากับ 0 ให้พิจารณาต่อไป

กรณีค่าที่ได้ค่าในเซลล์ J8=0

- พิมพ์ค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ โดย พิมพ์ $=E8$ ในเซลล์ F11 $=F8$ ในเซลล์ G11 $=G8$ ในเซลล์ H11 $=H8$ ในเซลล์ I11 $=I8$ ในเซลล์ J11 และ 2.23607 ในเซลล์ K11 จากนั้นคำนวณค่าที่เหลือ ดังวิธีการข้างต้น ทำซ้ำจนกว่าค่าที่ได้จากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

พิจารณาภาวะรากซ้ำของ –2.23607 ได้ดังนี้

จากวิธีการข้างต้น ทำจนกว่าจะได้ค่าจากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

พิจารณาภาวะรากซ้ำของ –0.87358 ได้ดังนี้

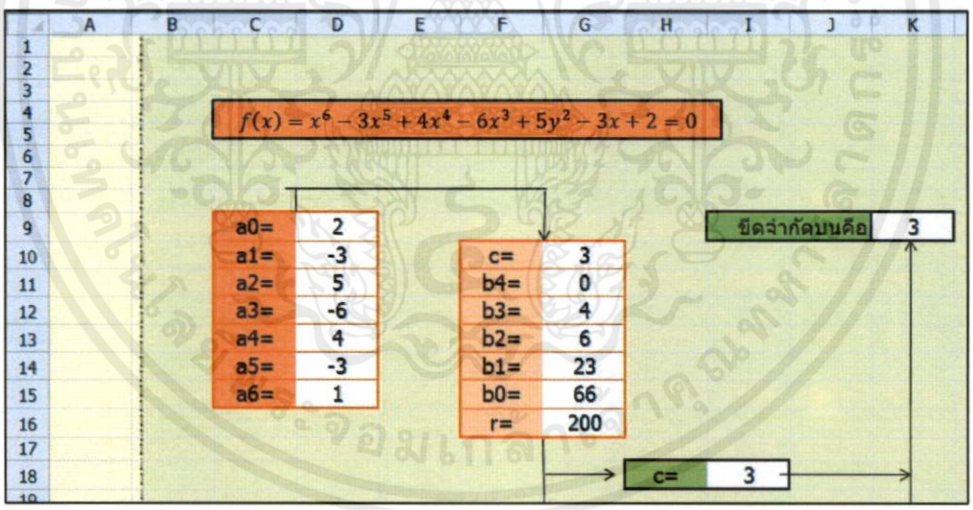
จากวิธีการข้างต้น ทำจนกว่าจะได้ค่าจากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น กรณีรากคือ 2.23607 -2.23607 และ -0.87358 เป็นรากเชิงเดียว

<u>**ตัวอย่าง 3.4**</u> ให้ $f(x)=x^6-3x^5+4x^4-6x^3+5x^2-3x+2$

1. การหาขีดจำกัดของค่ารากจำนวนจริง

1.1 หาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก



รูปที่ 3.22 การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของพหุนามดีกรี 6

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ D9 – D15 จะได้ $a_0=2$ $a_1=-3$ $a_2=5$ $a_3=-6$ $a_4=4$ $a_5=-3$ และ $a_6=1$ ดังรูปที่ 3.22

- หาค่า c โดยพิมพ์ $=IF(AND(-D14/D15>=0),-D14/D15,0)$ ในเซลล์ G10 โดยตั้งค่าเป็นจำนวนเต็ม จะได้ค่า $c=3$

- คำนวณค่า b_4,b_3,b_2,b_1,b_0,r โดยที่

คำนวณ b_4 โดยพิมพ์ $=D14+(G10*D15)$ ในเซลล์ G11 จะได้ค่า $b_4=0$

คำนวณ b_3 โดยพิมพ์ $=D13+(G10*G11)$ ในเซลล์ G12 จะได้ค่า $b_3=4$

คำนวณ b_2 โดยพิมพ์ $=D12+(G10*G12)$ ในเซลล์ G13 จะได้ค่า $b_2=6$

คำนวณ b_1 โดยพิมพ์ $=D11+(G10*G13)$ ในเซลล์ G14 จะได้ค่า $b_1=23$

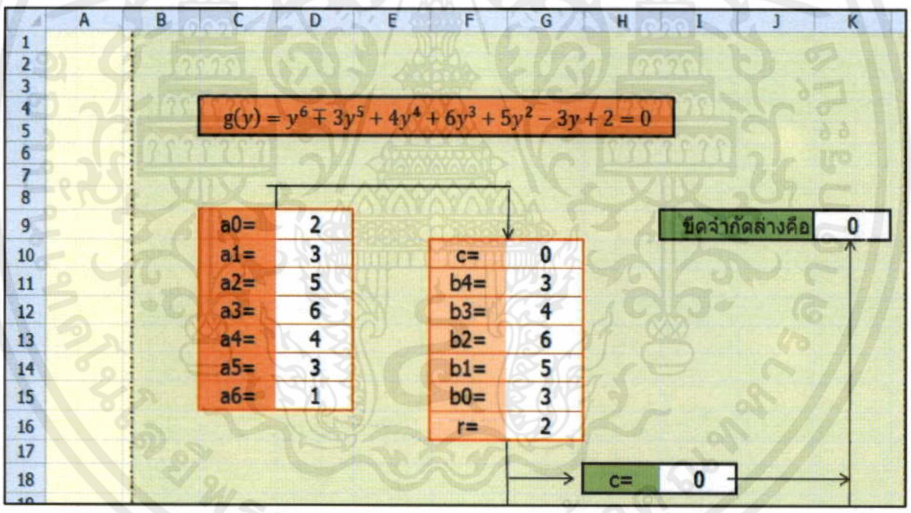
คำนวณ b_0 โดยพิมพ์ $=D10+(G10*G14)$ ในเซลล์ G15 จะได้ค่า $b_0=66$

คำนวณ r โดยพิมพ์ $=D9+(G10*G15)$ ในเซลล์ G16 จะได้ค่า $r=200$

พิจารณาค่า b_4,b_3,b_2,b_1,b_0,r ว่าทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 หรือไม่ โดยพิมพ์ =IF(AND(G11>=0,G12>=0,G13>=0,G14>=0.G15>=0,G16>=0),G10,"Error") ในเซลล์ I18 เพื่อตรวจสอบว่ามีบางตัวน้อยกว่า 0 หรือไม่ ถ้ามีต้องเลือกค่า c ใหม่

จะเห็นว่า b_4,b_3,b_2,b_1,b_0,r มากกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อเลือก $c=3$ ดังนั้น $c=3$ เป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก

1.2 หาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบ



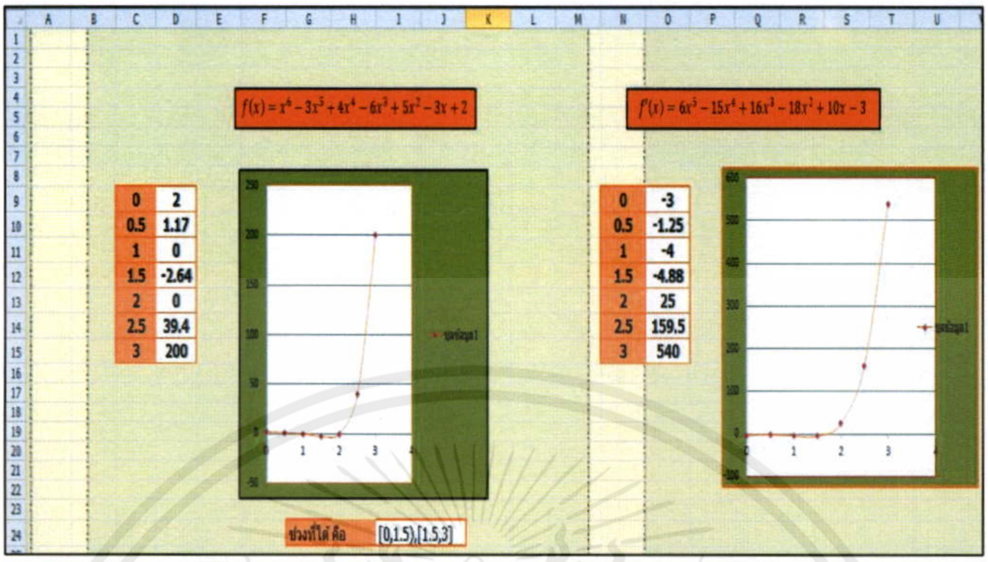
รูปที่ 3.23 การหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบของพหุนามดีกรี 6

จาก $f(x)=x^6-3x^5+4x^4-6x^3+5x^2-3x+2=0$ แทนค่า $x=-y$ จะได้สมการใหม่ คือ $g(y)=y^6+3y^5+4y^4+6y^3+5y^2+3y+2=0$

ทำเช่นเดียวกับการหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกใน 1.1 จะได้ $c=0$ เป็นขีดจำกัดบนของ $f(-y)=0$ แสดงว่า 0 เป็นขีดจำกัดล่างของ $f(x)=0$ ดังผลที่แสดงในรูปที่ 3.23

แสดงว่า $f(x)=0$ ไม่มีรากจำนวนจริงเป็นลบ

2. หาช่วงที่บรรจุแต่ละรากเป็นจำนวนจริง



รูปที่ 3.24 ช่วงที่บรรจุในแต่ละรากของพหุนามดีกรี 6

เนื่องจากขีดจำกัดบน $M=3$ และขีดจำกัดล่าง $m=0$ พิจารณา $f(m_j)$ เมื่อ $m_j = m_{j-1} + 0.5$

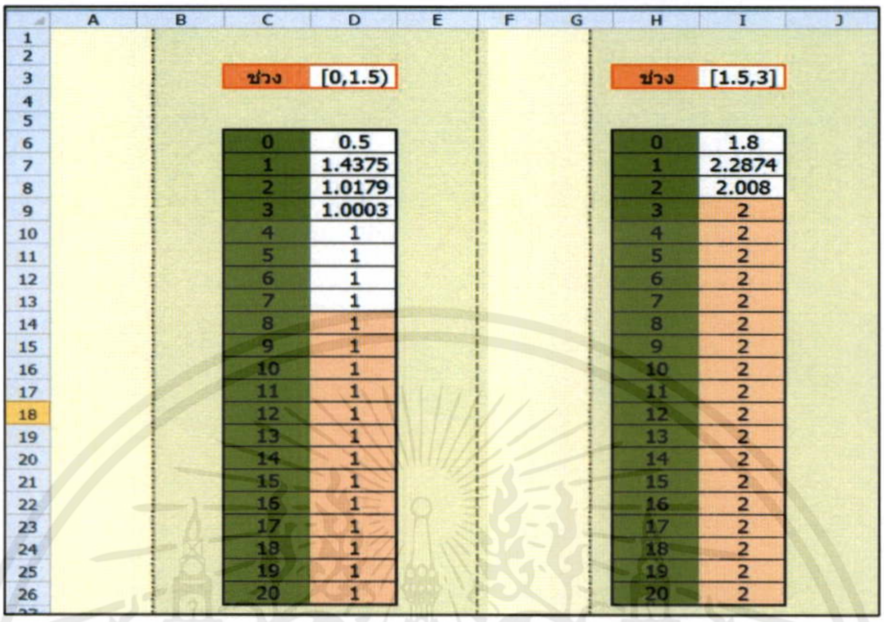
พิมพ์ 0 ลงในเซลล์ C9 และพิมพ์ $=C9+0.5$ ลงในเซลล์ C10 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ C15 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $M=3$) จากนั้น พิมพ์สูตร $=C9\char`^6-3*C9\char`^5+4*C9\char`^4-6*C9\char`^3+5*C9\char`^2-3*C9+2$ ลงในเซลล์ D9 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $0.5,1,1.5,\ldots,3$ จะได้ดังรูปที่ 3.24

นำ $f(x)$ มาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะได้ $f'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 18x^2 + 10x - 3$ โดยพิมพ์ 0 ลงในเซลล์ N9 และพิมพ์ $=N9+0.5$ ในเซลล์ N10 แล้วลากลงจนถึงเซลล์ N15 (ลากลงจนถึงค่าขีดจำกัดบน $M=3$) จากนั้นพิมพ์สูตร $=6*N9\char`^5-15*N9\char`^4+16*N9\char`^3-18*N9\char`^2+10*N9-3$ ลงในเซลล์ O9 จากนั้นลากลงเพื่อหาค่าของ $0.5,1,1.5,\ldots,3$ จะได้ดังรูปที่ 3.24

ดังนั้น จากกราฟได้ว่าช่วงที่บรรจุราก คือ $[0,1.5)$ และ $[1.5,3]$

3. พิจารณาค่ารากจำนวนจริงในแต่ละช่วง

3.1 วิธีการทำซ้ำของนิวตัน



ช่วง	[0,1.5)	ช่วง	[1.5,3]
0	0.5	0	1.8
1	1.4375	1	2.2874
2	1.0179	2	2.008
3	1.0003	3	2
4	1	4	2
5	1	5	2
6	1	6	2
7	1	7	2
8	1	8	2
9	1	9	2
10	1	10	2
11	1	11	2
12	1	12	2
13	1	13	2
14	1	14	2
15	1	15	2
16	1	16	2
17	1	17	2
18	1	18	2
19	1	19	2
20	1	20	2

รูปที่ 3.25 การหาค่ารากด้วยวิธีการทำซ้ำของนิวตันของพหุนามดีกรี 6

พิจารณาช่วง $[0,1.5)$ เลือก $x_0 = 0.5$

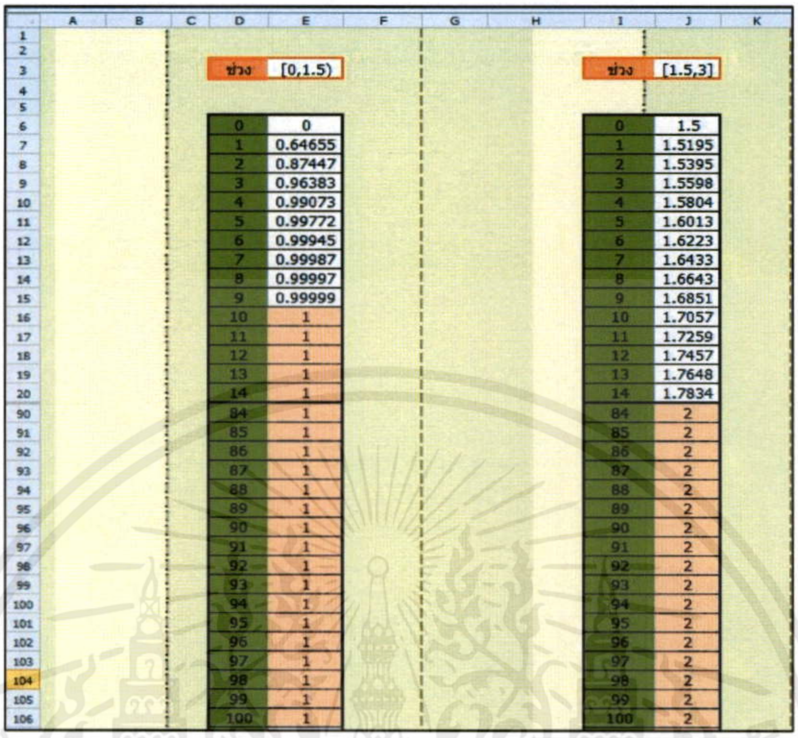
จากสูตรของนิวตัน $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น 0.5 ลงในเซลล์ D6 แล้วพิมพ์สูตร $= D6-(D6\^{}6-3*D6\^{}5+4*D6\^{}4-6*D6\^{}3+5*D6\^{}2-3*D6+2)/$ $(6*D6\^{}5-15*D6\^{}4+16*D6\^{}3-18*D6\^{}2+10*D6-3)$ ในเซลล์ D7 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่ารากคือ $x=1$

พิจารณาช่วง $[1.5,3]$ เลือก $x_0 = 1.8$

จากสูตรของนิวตัน $x_{n+1} = \dfrac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ พิมพ์ค่าเริ่มต้น 1.8 ลงในเซลล์ I6 แล้วพิมพ์สูตร $= I6-(I6\^{}6-3*I6\^{}5+4*I6\^{}4-6*I6\^{}3+5*I6\^{}2-3*I6+2)/$

$(6*I6\^{}5-15*I6\^{}4+16*I6\^{}3-18*I6\^{}2+10*I6-3)$ ในเซลล์ I7 จากนั้นลากลงเพื่อพิจารณาหาค่ารากโดยที่จะพิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ จะได้ ค่ารากคือ $x=2$ ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x)=0$ คือ $x=1$ และ $x=2$

3.2 วิธีการประมาณค่าในช่วง



ช่วง	[0,1.5)	ช่วง	[1.5,3]
0	0	0	1.5
1	0.64655	1	1.5195
2	0.87447	2	1.5395
3	0.96383	3	1.5598
4	0.99073	4	1.5804
5	0.99772	5	1.6013
6	0.99945	6	1.6223
7	0.99987	7	1.6433
8	0.99997	8	1.6643
9	0.99999	9	1.6851
10	1	10	1.7057
11	1	11	1.7259
12	1	12	1.7457
13	1	13	1.7648
14	1	14	1.7834
84	1	84	2
85	1	85	2
86	1	86	2
87	1	87	2
88	1	88	2
89	1	89	2
90	1	90	2
91	1	91	2
92	1	92	2
93	1	93	2
94	1	94	2
95	1	95	2
96	1	96	2
97	1	97	2
98	1	98	2
99	1	99	2
100	1	100	2

รูปที่ 3.26 การหาค่ารากด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงของพหุนามดีกรี 6

พิจารณาช่วง $[0,1.5)$

จาก $f(x)=x^6-3x^5+4x^4-6x^3+5x^2-3x+2$

$$f'(x)=6x^5-15x^4+16x^3-18x^2+10x-3$$

$$f''(x)=30x^4-60x^3+48x^2-36x+10$$

เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(0)$ และ $f(1.5)$ มีเครื่องหมายเหมือนกันจึงได้ว่า $x_0=0$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1}=\frac{(x_n-b)f(x_n)}{f(x_n)-f(b)} \text{ เมื่อ } b=1.5, f(b)=-2.64$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0=0$ ในเซลล์ E6 แล้วพิมพ์สูตร

$=E6-(E6-1.5)*(E6\verb|^|6-3*E6\verb|^|5+4*E6\verb|^|4-6*E6\verb|^|3+5*E6\verb|^|2-3*E6+2)/$

$((E6\verb|^|6-3*E6\verb|^|5+4*E6\verb|^|4-6*E6\verb|^|3+5*E6\verb|^|2-3*E6+2)+2.64)$ ในเซลล์ E7 จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x=1$

พิจารณาช่วง $[1.5,3]$

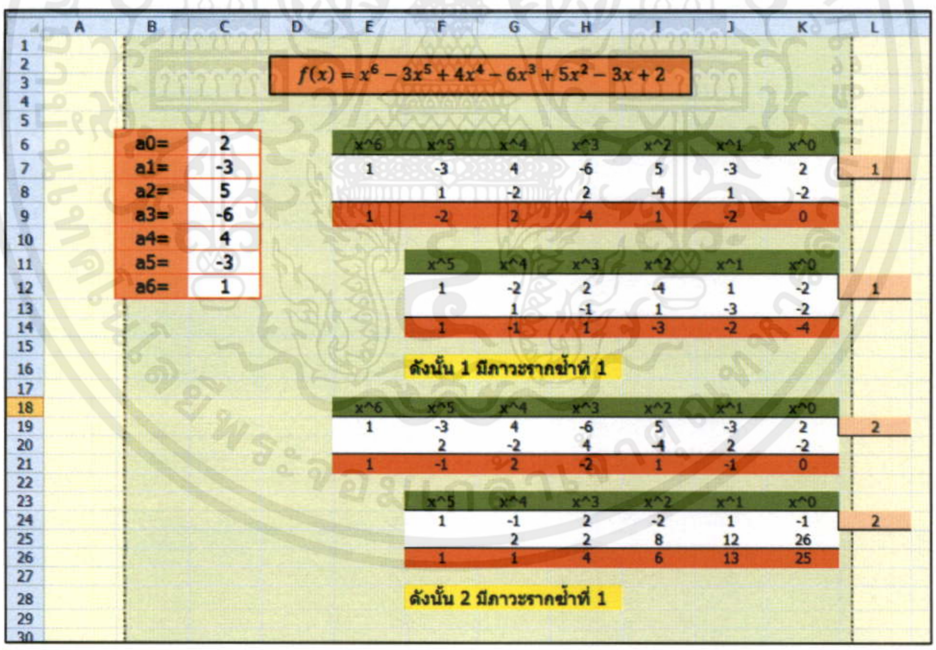
เนื่องจาก $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองได้ ซึ่ง $f(1.5)$ และ $f(3)$ มีเครื่องหมายเหมือนกันจึงได้ว่า $x_0 = 0$ จึงใช้สูตร

$$x_{n+1} = \frac{(x_n - b)f(x_n)}{f(x_n) - f(b)} \text{ เมื่อ } b = 3, f(b) = 200$$

ส่วนของโปรแกรม Excel พิมพ์ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ ในเซลล์ J6 แล้วพิมพ์สูตร
$= J6-(J6-3)*(J6\^{}6-3*J6\^{}5+4*J6\^{}4-6*J6\^{}3+5*J6\^{}2-3*J6+2)/$
$((J6\^{}6-3*J6\^{}5+4*J6\^{}4-6*J6\^{}3+5*J6\^{}2-3*J6+2)-200)$ ในเซลล์ J7
จากนั้นลากลงเพื่อคำนวณหาค่าราก จะได้ $x = 2$
ดังนั้น ค่ารากจริงของ $f(x) = 0$ คือ $x = 1$ และ $x = 2$

4. พิจารณาภาวะรากซ้ำของรากจำนวนจริงของสมการ

$f(x) = x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2$



รูปที่ 3.27 แสดงการคำนวณการหารสังเคราะห์

จากข้อ 3.1 และ 3.2 พบว่า 1 และ 2 เป็นรากของ $f(x) = 0$ พิจารณาภาวะรากซ้ำของ 1 ได้ดังนี้

- นำสัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ มาใส่ในเซลล์ C6 – C12 จะได้ $a_0 = 2$ $a_1 = -3$ $a_2 = 5$ $a_3 = -6$ $a_4 = 4$ $a_5 = -3$ และ $a_6 = 1$ ดังรูปที่ 3.27

- พิมพ์ $=D12$ ในเซลล์ E7 $=D11$ ในเซลล์ F7 $=D10$ ในเซลล์ G7 $=D9$ ในเซลล์ H7 $=D8$ ในเซลล์ I7 $=D7$ ในเซลล์ J7 $=D6$ ในเซลล์ K7 และ 1 ในเซลล์ L7 - คำนวณค่าในเซลล์ F8 G8 H8 I8 J8 และ K8 โดยพิมพ์ $=E9*L7$, $=F9*L7$, $=G9*L7$, $=H9*L7$, $=I9*L7$, $=J9*L7$ ตามลำดับ

- คำนวณค่าในเซลล์ E9 F9 G9 H9 I9 J9 และ K9 โดยพิมพ์ $=E7$, $=F7+F8$, $=G7+G8$, $=H7+H8$, $=I7+I8$, $=J7+J8$, $=K7+K8$ ตามลำดับ จะได้ดังรูปที่ 3.27 พิจารณาค่าที่ได้ในเซลล์ K9 เท่ากับ 0 หรือไม่ ถ้าไม่เท่ากับ 0 ให้หยุด ถ้าเท่ากับ 0 ให้พิจารณาต่อไป

กรณีค่าที่ได้ในเซลล์ K9=0

- พิมพ์ค่าสัมประสิทธิ์ใหม่ โดย พิมพ์ $=E9$ ในเซลล์ F12 $=F9$ ในเซลล์ G12 $=G9$ ในเซลล์ H12 $=H9$ ในเซลล์ I12 $=I9$ ในเซลล์ J12 $=J9$ ในเซลล์ K12 และ 1 ในเซลล์ L12 จากนั้นคำนวณค่าที่เหลือ ดังวิธีการข้างต้น ทำซ้ำจนกว่าค่าที่ได้จากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0พิจารณาภาวะรากซ้ำของ 2 ได้ดังนี้

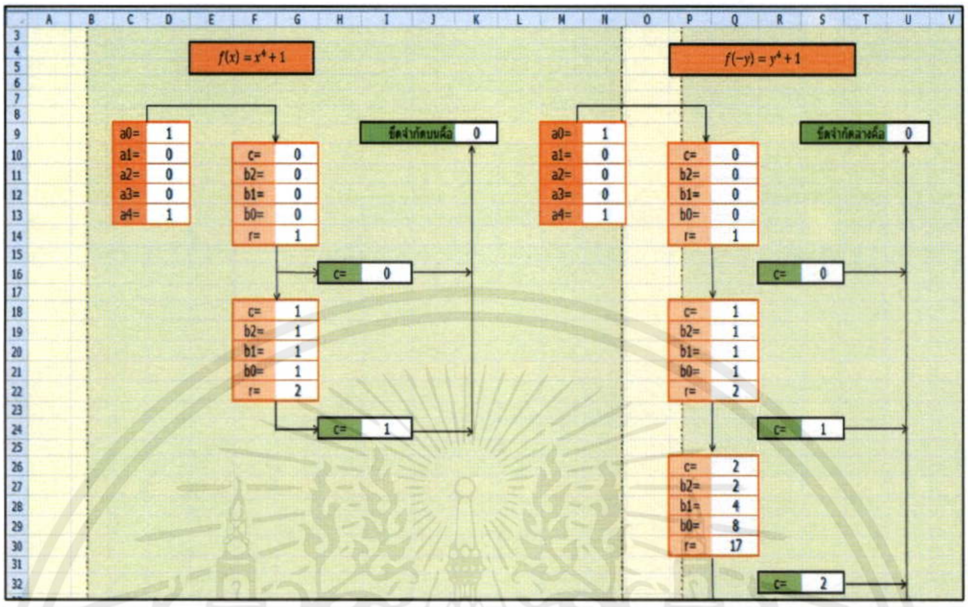
จากวิธีการข้างต้น ทำจนกว่าจะได้ค่าจากการหารสังเคราะห์ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น กรณีรากคือ 1 และ 2 เป็นรากเชิงเดียว

หมายเหตุ จะมีบางสมการที่ค่ารากที่ได้จะไม่มีค่ารากที่เป็นจำนวนจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> $f(x) = x^4 + 1$

1.การหาขีดจำกัดของค่ารากจำนวนจริง



รูปที่ 3.28 การหาขีดจำกัดบนและขีดจำกีดล่างของพหุนามดีกรี 4

จากรูปที่ 3.28 จะเห็นว่า ขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างเท่ากับ 0 แสดงว่า $f(x)$ ไม่มีค่ารากที่เป็นจำนวนจริงบวกและลบและเนื่องจาก $f(0) = 1 \neq 0$ แสดงว่า 0 ไม่เป็นรากของ $f(x) = 0$ ดังนั้น สรุปได้ว่า $f(x) = 0$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในส่วนผลการวิจัยและอภิปรายผลของปัญหาพิเศษฉบับนี้ ทางคณะผู้จัดทำได้ทำการศึกษารวมทั้งทำความเข้าใจถึงงานวิจัยต่างๆ จากบทที่ 3 และเราสามารถหารากจำนวนจริงของ $f(x)=0$ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

4.1 ขั้นตอนการหาค่ารากของสมการพหุนาม

4.1.1. การหาขีดจำกัดของค่ารากจำนวนจริง

จากหัวข้อ 2.1 การคำนวณลิมิตของค่ารากสามารถสรุปขั้นตอนการหาลิมิตของค่ารากจำนวนจริงได้ดังต่อไปนี้

4.1.1.1 การหาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวก

ให้ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ $a_n>0$

- พิจารณาค่า $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$
- เลือก $c\geq\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ และ $c\geq 0$
- คำนวณ

$$
\begin{aligned}
b_{n-2} &= a_{n-1}+ca_n \\
b_{n-1} &= a_{n-2}+cb_{n-2} \\
&\vdots \\
b_0 &= a_1+cb_1 \\
r &= a_0+cb_0
\end{aligned}
$$

- พิจารณา $b_{n-2},b_{n-3},\ldots,b_0,r$

ถ้า $b_{n-2},b_{n-3},\ldots,b_0,r\geq 0$ ค่า c ที่ได้จะเป็นขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $f(x)=0$

ถ้ามี $b_i<0:i\in\{0,1,\ldots,n-2\}$ หรือ $r<0$ กำหนด $c=c+1$ แล้วกลับไปคำนวณ

$b_{n-2}, b_{n-3}, ..., b_0, r$ ใหม่

4.1.1.2 การหาขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบ

ให้ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ $a_n > 0$ แทนค่า $x = -y$ จะได้รูปแบบใหม่คือ

$$f(-y) = a_n(-y)^n + a_{n-1}(-y)^{n-1} + a_{n-2}(-y)^{n-2} + ... + a_1(-y) + a_0 = 0$$

มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและ $a_n > 0$

หาขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของ $f(-y) = 0$ สมมติขีดจำกัดบนของค่ารากที่เป็นบวกของ $f(-y) = 0$ คือ c แล้วแสดงว่าขีดจำกัดล่างของค่ารากที่เป็นลบของ $f(x) = 0$ คือ $-c$

4.1.2 หาช่วงที่บรรจุแต่ละรากที่เป็นจำนวนจริง

กำหนดให้ M เป็นขีดจำกัดบน และ m เป็นขีดจำกัดล่าง

เนื่องจากทฤษฎีบท 2.16 ในหัวข้อ 2.4 เรื่องการหาช่วงของค่าราก เราจะพิจารณาเครื่องหมายของ $f(m_j)$ เมื่อ $0 \le j \le r$ โดยที่ $m_0 = m$ และ $m_r \ge M$

กำหนด $m = m_0, m_1 = m_0 + 0.5, m_2 = m_1 + 0.5, ..., m_j = m_{j-1} + 0.5, ..., m_r \ge M$ ตั้งค่า 0.5 คือความละเอียดที่ต้องการ หากต้องการความละเอียดของค่า $f(m_j)$ มากกว่านี้ สามารถปรับค่า 0.5 ให้ลดลงได้

4.1.3 ใช้วิธีการทำซ้ำของนิวตันและการประมาณค่าในช่วงหารากจำนวนจริงในแต่ละช่วง

สมมติจากช่วง (a,b) มีรากจำนวนจริงบรรจุอยู่ เราสามารถประมาณค่ารากนั้นได้โดยวิธีต่อไปนี้

วิธีการทำซ้ำของนิวตัน

- เลือก $x_0 \in (a,b)$ ที่ซึ่ง $f'(x_0) \ne 0$
- หารากจำนวนจริงที่บรรจุใน (a,b)

$$\text{โดยสูตร } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

วิธีการประมาณค่าในช่วง

- ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน เลือก $x_0 = a$

สูตรการหาค่าราก คือ $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - b)f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}$

- ถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกัน เลือก $x_0 = b$

สูตรการหาค่าราก คือ $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - a)f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}$

4.1.4 พิจารณาภาวะรากซ้ำของแต่ละรากจำนวนจริง

ให้ r เป็นรากจำนวนจริงของ $f(x) = 0$

จากทฤษฎีเศษเหลือ เราสามารถพิจารณาภาวะรากซ้ำของราก r โดยการหารสังเคราะห์ $f(x)$ หารด้วย $x - r$ จนกระทั่งเศษเหลือไม่เป็นศูนย์ แล้วสรุปภาวะรากซ้ำของราก r นั้นได้

บทที่ 5

สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

ส่วนสรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะของปัญหาพิเศษฉบับนี้ ทางคณะผู้จัดทำแบ่งเนื้อหาออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนของสรุปผลวิจัยและส่วนข้อเสนอแนะ ซึ่งมีรายละเอียดของแต่ละส่วนดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลวิจัย

5.1.1 การใช้โปรแกรม Excel ในการคำนวณค่ารากจำนวนจริงของสมการพหุนามนี้เป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่สามารถหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นได้เนื่องจาก Excel เป็นโปรแกรมที่มีอยู่ทั่วไปและสามารถใช้งานได้อย่างง่าย

5.1.2 การใช้โปรแกรม Excel ในการคำนวณค่ารากจำนวนจริงของสมการพหุนามที่จัดทำขึ้นนี้สามารถนำไปใช้สำหรับประกอบการเรียนการสอนภายในห้องเรียนได้

5.1.3 สามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์กับวิธีต่างๆได้

5.1.4 ทำให้คณะผู้จัดทำและผู้ที่ศึกษาได้รับความรู้และเข้าใจขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการพหุนามโดยวิธีต่างๆ และการใช้โปรแกรม Excel ช่วยในการหาผลเฉลยของสมการพหุนาม

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 สำหรับผู้ที่จะศึกษานั้น ควรที่จะทำความเข้าใจในส่วนของเนื้อหา ขั้นตอนการหารากจำนวนจริงของสมการพหุนาม และส่วนของการใช้โปรแกรม Excel ก่อนที่จะทำการใช้โปรแกรมในการคำนวณ

5.2.2 ควรมีการนำโปรแกรมที่จัดทำขึ้นไปทดลองใช้สำหรับประกอบการเรียนการสอนภายในห้องเรียน เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจกระบวนการหารากจำนวนจริงของสมการพหุนามดีกรีต่างๆได้ง่ายขึ้น

5.2.3 โปรแกรมนี้สามารถนำไปศึกษาและพัฒนาต่อได้ในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

[1] กาญจนา คำนึงกิจ. *การวิเคราะห์เชิงตัวเลข.* พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : หจก. มีเซอร์วิสซัพลาย, (2552).

[2] ดุสิต กอปรรักชาติ. *Advanced Excel ฉบับเขียนโปรแกรมด้วย Macro&VBA.* กรุงเทพฯ : โปรวิชั่น, (2556).

[3] สุพรรณ เพ็งชัย. *ทฤษฎีสมการเบื้องต้น.* กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น, (2544).

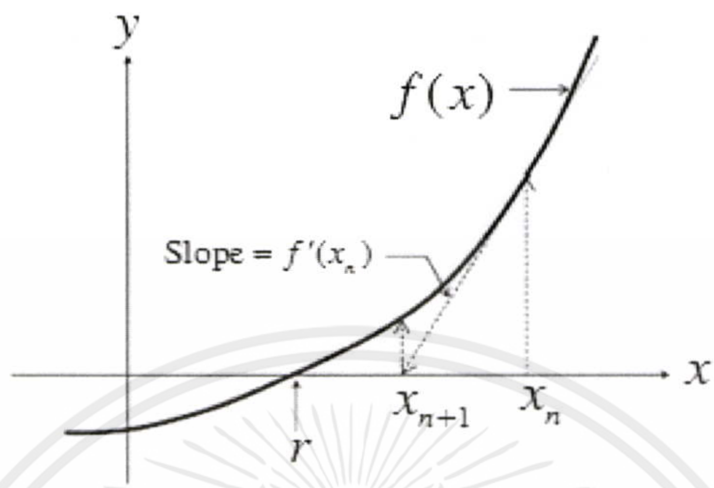
[4] Guihong Wang, Haiyan Liu and Xiangfeng Liu. *The Application of Excel in Solving Linear Equation and Nonlinear Equation*, 2011 : 4081-4084

[5] J.V. Uspensky, *Theory of Equations*, McGraw – Hill, Newyork, 1948.

ภาคผนวก

การพิสูจน์สูตรวิธีการทำซ้ำของนิวตันและวิธีการประมาณค่าในช่วง

พิสูจน์สูตรการประมาณค่ารากโดยวิธีการทำซ้ำของนิวตัน



รูปที่ 1 กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยวิธีการทำซ้ำของนิวตัน

ในทางทฤษฎี อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันที่จุด x_i นิยามโดย

$$f'(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}$$

จากรูปที่ 2.1 ถ้าเราให้ $r = 0$ (ซึ่งก็คือจุดตัดแกน x นั่นเอง)

จะได้ว่า $$f'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

เมื่อจัดรูปใหม่เราจะได้สมการการหารากโดยวิธีของนิวตัน คือ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

หรือจากอนุกรมเทเลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \dots$$

เมื่อตัดเทอมกำลังสองขึ้นไปทิ้ง จะได้ฟังก์ชันประมาณโดย

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

เนื่องจาก

$$f'(x_{i+1}) = 0$$

จะได้

$$f'(x)(x_{i+1}-x_i) = -f(x_i)$$

$$x_{i+1}-x_i = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

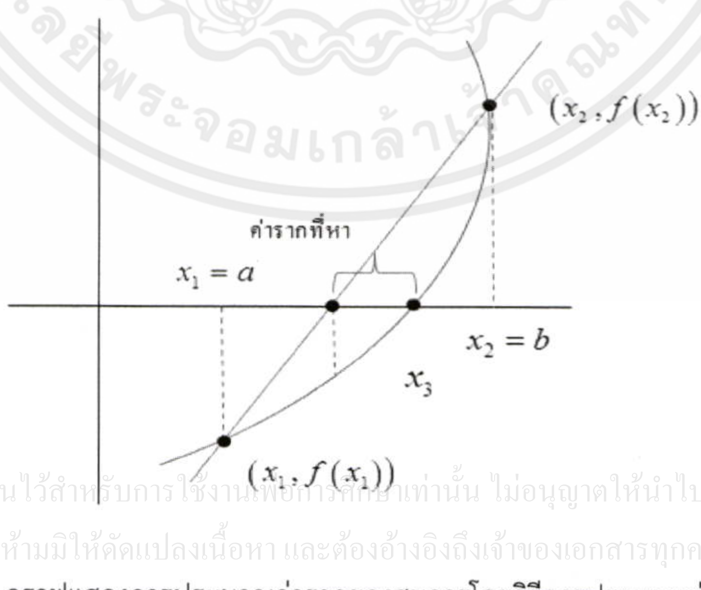
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ดังนั้น สูตรของนิวตัน คือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

พิสูจน์สูตรการประมาณค่ารากโดยวิธีการประมาณค่าในช่วง

วิธีการหารากนี้จะขึ้นอยู่กับการประมาณค่าในช่วงด้วยเส้นตรง สำหรับวิธีนี้จะคล้ายวิธีแบ่งครึ่งช่วง แต่แตกต่างกันตรงที่การหาช่วงที่มีรากอยู่จะได้จากการหาจุดตัดของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดของฟังก์ชัน $f(x)$ กับแกน X นั่นคือ ถ้า $[a,b]$ เป็นช่วงที่มีรากอยู่ ให้ $x_1 = a$ และ $x_2 = b$



รูปที่ 2 กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยวิธีการประมาณค่าในช่วง

จาก $$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

จาก $$y-y_1=m(x-x_1)$$

เมื่อผ่านจุด $(x_2, f(x_2))$ จะได้

$$y-f(x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_2)$$

ดังนั้นเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(x_1, f(x_1))$ และ $(x_2, f(x_2))$ คือ

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{y-f(x_2)}{x-x_2}$$

เนื่องจากจุด x_3 คือจุดที่เส้นตรงตัดกับแกน X จะหาได้จาก การกำหนดให้ $y=0$ ซึ่งกราฟผ่านจุด $(x_3, 0)$

จะได้ $$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{0-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$\left[f(x_1)-f(x_2)\right](x_3-x_2)=-f(x_2)(x_1-x_2)$$

$$x_3=\frac{-f(x_2)(x_1-x_2)}{\left[f(x_1)-f(x_2)\right]}+x_2$$

ทำให้ได้ค่าประมาณของรากตำแหน่งใหม่ คือ

$$x_3=x_2-f(x_2)\frac{(x_2-x_1)}{\left[f(x_2)-f(x_1)\right]}$$

จากนั้นเราสามารถตรวจสอบได้ว่ารากของสมการจะอยู่ในช่วง $[x_1, x_3]$ หรือ $[x_3, x_2]$ เราก็จะได้ช่วงที่แคบลงและทำซ้ำไปเรื่อยๆ ซึ่งเราสามารถเขียนสูตรในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{(x_n-x_{n-1})}{\left(f(x_n)-f(x_{n-1})\right)}$$

และจะหยุดการทำซ้ำเมื่อ

- $|f(x_n)| \le \varepsilon$ หรือ

- $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$

หมายเหตุ จุดปลายของการทำซ้ำด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นนี้ จุดปลายของช่วงด้านใดด้านหนึ่งจะอยู่คงที่ ถ้าจะให้การทำซ้ำลู่เข้าสู่รากเร็วขึ้นได้ เช่น ถ้า x_1 เป็นจุดปลายด้านที่อยู่คงที่สามารถกำหนดให้ $x_{n+1} = \dfrac{x_1 + x_n}{2}$ และการทำซ้ำด้วยวิธีนี้ ลำดับ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ก็จะลู่เข้าสู่ราก r แน่นอน