การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลาง

ANALYSIS OF PROJECTILE MOTION IN A RESISTING MEDIUM

สุรีพร อินทะสอน
อรวีย์ ภิรักจรรยากุล

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2557

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลาง

ANALYSIS OF PROJECTILE MOTION IN A RESISTING MEDIUM

สุรีพร อินทะสอน

อรวีย์ ภิรักจรรยากุล

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

ANALYSIS OF PROJECTILE MOTION IN A RESISTING MEDIUM

SUREEPORN INTHASORN

ORAWEE PIRUGJANYAKUN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2014

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลาง Analysis of Projectile Motion in a Resisting Medium
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุรีพร อินทะสอน 54050099 นางสาวอรวีย์ ภิรักจรรยากุล 54050108
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ กรรมการ	
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลาง

ชื่อนักศึกษา นางสาวสุรีพร อินทะสอน 54050099

นางสาวอรวีย์ ภิรักจรรยากุล 54050108

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2557

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.ภัคคินี ชิตสกุล

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ เป็นการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุในวิถีโค้ง มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างโปรแกรมคำนวณในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุโดยไม่คิดแรงต้านของอากาศและการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยคิดแรงต้านของอากาศสำหรับหาระยะจุดตกและความเร็วของวัตถุ การคำนวณจะคำนวณทั้งบนพื้นราบและพื้นเอียงซึ่งผลลัพธ์จะแสดงค่าคำนวณที่ป้อนเข้าไปพร้อมรูปภาพกราฟิก นอกจากนี้ ตัวโปรแกรมยังมีเมนูช่วยเหลือสำหรับผู้ที่ต้องการทบทวนเนื้อหาอย่างละเอียดพร้อมอธิบายที่มาของสูตรแบบเข้าใจง่าย โดยผู้จัดทำมุ่งหวังอย่างยิ่งว่าผู้ใช้งานจะได้รับประโยชน์สูงสุดทั้งในด้านการศึกษาและการนำไปต่อยอดงานวิจัยในลำดับต่อไป

คำสำคัญ : การเคลื่อนที่ในแนววิถีโค้ง ความแม่นยำ พื้นราบ พื้นเอียง แรงต้านอากาศ

Title	Analysis of Projectile Motion in a Resisting Medium
Students	Ms. Sureeporn Inthasorn 54050099
	Ms.Orawee Pirugjanyakun 54050108
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Academic Year	2014
Advisor	Assoc. Prof. Dr. Pakkinee Chitsakul
Co-Advisor	Asst. Prof. Dr. Jaipong Kasemsuwan

Abstract

In this project, we develop a computer program to calculate the projectile motion. We consider in both with and without air resistance. We find the distance and velocity of the object. We also consider in both flat and slope plane. We show not only the results but also the computer graphics. Furthermore, this program is contain helping menu for review lesson elaborately along with provenance of formula which easily to understand. Researchers extremely hopes for user will get maximum advantage both of study and research and research development.

Keywords : Projectile motion, State of Motion, Air Resistance

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลาง คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล และ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษและคณะกรรมการ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือในส่วนของคำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหา รวมทั้งเป็นผู้ช่วยเหลือคณะผู้วิจัยในการช่วยตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนทางด้านกำลังใจและทุนทรัพย์ รวมทั้งขอขอบคุณ รุ่นพี่รุ่นน้องและเพื่อนๆที่ให้ความร่วมมือในด้านต่างๆ ทั้งด้านกำลังใจและความช่วยเหลือเกี่ยวกับงานวิจัย

นอกจากนี้ผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่มอบความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้วิจัยมาโดยตลอดการศึกษาเล่าเรียน โดยมีส่วนช่วยเหลือให้คณะผู้วิจัยสามารถจัดทำปัญหาพิเศษนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

นางสาวสุรีพร อินทะสอน

นางสาวอรวีย์ ภิรักจรรยากุล

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ

การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์(Projectile motion) หมายถึง การเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือวัตถุในสองมิติ(2-dimension motion) ภายใต้สนามของแรงคงที่ กระทำในทิศทางทำมุมใดๆกับความเร็ว เช่น การเคลื่อนที่ของวัตถุใดๆบริเวณใกล้ผิวโลกที่มีความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงคงที่ ($g \approx 9.8 m/s^2$) แรงคงที่นั้นจะส่งผลกระทบต่อการเคลื่อนที่ โดยทำให้วัตถุหรืออนุภาคที่อยู่ภายใต้สนามของแรงเหล่านั้นมีความเร็ว(ทั้งขนาดและทิศทางของความเร็ว)เปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา

การพัฒนาเทคโนโลยีภายในประเทศนั้นต้องอาศัยพื้นฐานทางวิทยาศาสตร์ที่ดี จึงจำเป็นต้องฝึกให้เยาวชนรู้จักคิดและสร้างประสบการณ์ให้แก่เยาวชนที่เป็นอนาคตของประเทศ ในการเรียนการสอนทางวิชาฟิสิกส์การคำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์นั้นโดยทั่วไปจะไม่คิดแรงต้านของตัวกลาง เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ แต่ในความเป็นจริงแล้วการเคลื่อนที่ของทุกสิ่งทุกอย่างบนโลกจะเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางเสมอ

ปัญหาการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลาง สืบเนื่องมาจากความสนใจในการคำนวณระยะหวังผลกระสุนทางการทหาร การคำนวณการขว้าง เตะ หรือ ตีลูกบอลทางวิทยาศาสตร์การกีฬา และกิจกรรมด้านอื่นๆ ที่จำเป็นต้องใช้ศาสตร์ทางการคำนวณหาความแม่นยำและพัฒนาประสิทธิภาพในกิจกรรมนั้นๆในรูปแบบของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1) เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์
2) เพื่อวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านของอากาศ
3) เพื่อคำนวณหาความเร็ว ความสูง และระยะจุดตกของวัตถุ
4) เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อคิดแรงต้านของอากาศกับไม่คิดแรงต้านของอากาศ

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1) ตัวกลางที่ใช้ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของปัญหานี้คือ อากาศ โดยแรงต้านของอากาศจะเคลื่อนที่ตรงกันข้ามกับความเร็วของวัตถุ

2) การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุในปัญหานี้ จะวิเคราะห์เฉพาะพื้นราบและพื้นเอียง

3) กำหนดวัตถุที่ใช้ในการเคลื่อนที่คือ กระสุนปืน มวลขนาด 0.046 กิโลกรัม สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ 1.24 ความหนาแน่นของอากาศ 1.29 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร และพื้นที่หน้าตัดที่มากที่สุดของวัตถุ 0.043 ตารางเมตร

4) ในการสร้างโปรแกรมให้ความรู้และโปรแกรมคำนวณการเคลื่อนที่จะใช้ Microsoft visual basic 2013 , MATLAB 2014 และ GeoGebra

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) สามารถเข้าใจความรู้พื้นฐานของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านจากตัวกลาง
2) สามารถนำการวิเคราะห์ปัญหา การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลางไปประยุกต์ใช้ทางการทหาร ได้แก่ การคาดการณ์วิถีกระสุน หรือใช้ในการวางกลยุทธ์ในด้านการป้องกันและโจมตีระยะไกล เป็นต้น
3) สามารถนำความรู้ไปต่อยอดทางด้านการกีฬา เช่น การยิงลูกฟุตบอลแบบปั่นโค้งเข้าประตู การตบลูกวอลเลย์บอลให้ผู้รับไม่สามารถควบคุมทิศทางได้ เป็นต้น เพื่อพัฒนาทักษะของนักกีฬาตามหลักการคำนวณและวิทยาศาสตร์
4) ใช้เป็นพื้นฐานในการทำวิจัยขั้นสูงต่อไป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1) ศึกษาความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาที่นำมาวิเคราะห์ Projectile motion, Linear projectile motion, Nonlinear projectile motion รวมถึงแรงต้านอากาศทางฟิสิกส์
2) ศึกษาหารูปแบบทั่วไปของสูตรที่ใช้ในการคำนวณ เพื่อใช้ในการสร้างโปรแกรมคำนวณและออกแบบโปรแกรมปัญหาพิเศษ
3) เขียนโปรแกรม
4) ทดสอบโปรแกรม
5) สรุปข้อดีและข้อเสียของโปรแกรม พร้อมทั้งจัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

ตาราง 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน							
	ปี 2557				ปี 2558			
	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาหาข้อมูลและกำหนดหัวข้อโครงงาน								
2. ศึกษาสูตรที่ใช้ในการคำนวณและออกแบบโปรแกรม								
3. เขียนโปรแกรมคำนวณ								
4. ทดสอบและประเมินผล								
5. สรุปผลการศึกษาและจัดทำรูปเล่ม								

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัจจุบันมีงานวิจัยจำนวนไม่น้อยที่นำเอาแรงต้านอากาศมาคิดในกระบวนการวิเคราะห์การเคลื่อนที่หลากหลายรูปแบบ ทั้งเพื่อหารูปทรงที่เหมาะสมแก่การเคลื่อนที่ในรูปแบบต่างๆ หรือเพื่อหาค่าความแม่นยำ รวดเร็วในเชิงกีฬาและเพื่อการสร้างสรรค์อาวุธยุทโธปกรณ์ทางการทหารให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น กำเนิดองค์ความรู้ต่อยอดจากทฤษฎีพื้นฐานมากมาย ทำให้คณะผู้วิจัยสามารถสร้างสูตรในการคำนวณ เพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาความแตกต่างระหว่างการคิดแรงต้านอากาศและไม่คิดแรงต้านอากาศในสภาวะพื้นราบและพื้นเอียงของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์(Projectile Motion)

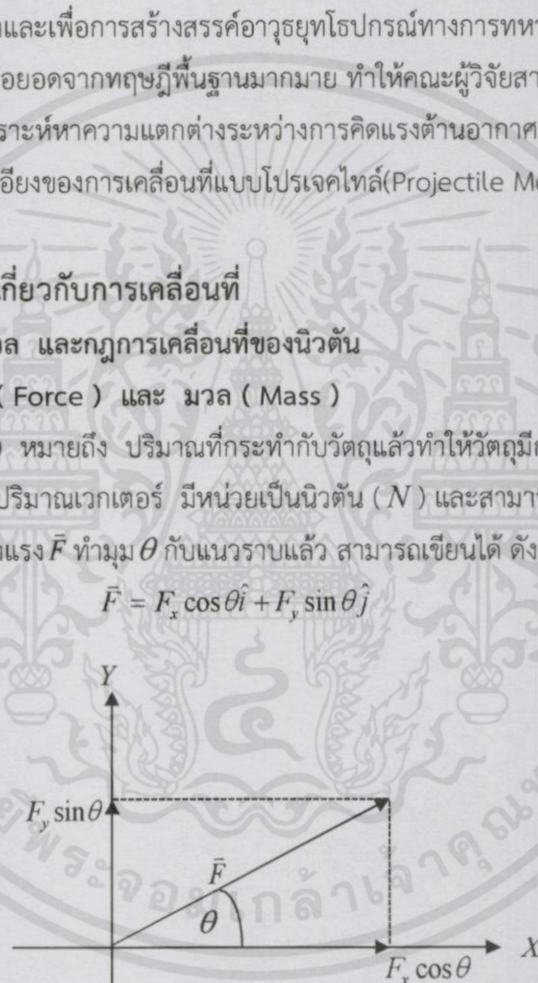
2.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการเคลื่อนที่

2.1.1 แรง มวล และกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

2.1.1.1 แรง (Force) และ มวล (Mass)

แรง (Force) หมายถึง ปริมาณที่กระทำกับวัตถุแล้วทำให้วัตถุมีการเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่ แรง ($\bar{F}$) เป็นปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็นนิวตัน (N) และสามารถเขียนเป็นผลรวมในแนวราบและในแนวตั้ง ถ้าแรง $\bar{F}$ ทำมุม θ กับแนวราบแล้ว สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\bar{F} = F_x \cos\theta \hat{i} + F_y \sin\theta \hat{j}$$



รูปที่ 2.1 แรงในระบบพิกัดฉาก (แกน X , แกน Y)

$$\bar{F}_{\text{ลัพธ์}} = \sum F_x + \sum F_y \quad (2.1)$$

เมื่อมีแรงมากกว่า 2 แรง มากระทำบนวัตถุอันเดียวกันแรงเหล่านั้นสามารถรวมกันได้ ผลรวมของแรงหลายแรง เรียกว่า **แรงลัพธ์ (Resultant force)**

โดยที่

ขนาดของ $\bar{F}_{\text{ลัพธ์}} = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$

และทิศของแรงลัพธ์ $\tan \alpha = \dfrac{\sum F_y}{\sum F_x}$

มวล (Mass) หมายถึง สมบัติของก้อนสสารที่บ่งบอกถึงค่าความต้านทานในการเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่ หรือเป็นปริมาณที่แปรผันตรงกับค่าความต้านทานต่อการเกิดความเร่งเมื่อถูกแรงกระทำ หรือมวล (m) ของวัตถุ หมายถึง ความเฉื่อย (Inertia) ต่อการเคลื่อนที่ มวลเป็นปริมาณสเกลาร์และมีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg)

สภาพการเคลื่อนที่ (State of motion) ของวัตถุแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

1) สภาพการเคลื่อนที่คงเดิม หมายถึง อาการที่วัตถุอยู่นิ่งหรือมีความเร็วคงที่

2) สภาพการเคลื่อนที่เปลี่ยนแปลง หมายถึง อาการที่วัตถุมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง

2.1.2 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

นิวตัน (Sir Isaac Newton , ค.ศ. 1642 – 1727) คือ บุคคลแรกที่สรุปกฎเกี่ยวกับแรงและการเคลื่อนที่ไว้ 3 ข้อ ดังนี้

<u>กฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งของนิวตัน</u> คือ วัตถุจะคงสภาพอยู่นิ่งตราบที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ ส่วนวัตถุที่เคลื่อนที่จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวในแนวเส้นตรง โดยกฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งของนิวตันมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่ง คือ **กฎความเฉื่อย (Law of inertia)**

$$\sum \bar{F} = 0 \qquad (2.2)$$

วัตถุที่เป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งของนิวตัน จะมีความเร่งเป็นศูนย์เพราะวัตถุไม่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็ว (Δv) แสดงให้เห็นว่าวัตถุไม่มีแรงมากระทำหรือมีแรงหลายแรงมากระทำแต่ผลรวมของแรงที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์

<u>กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน</u> คือ เมื่อมีแรงลัพธ์ซึ่งมีขนาดไม่เป็นศูนย์มากระทำต่อวัตถุ วัตถุเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่จะทำให้วัตถุเกิดความเร่งในทิศเดียวกับแรงลัพธ์ที่มากระทำ โดยขนาดของความเร่งจะแปรผันตรงกับขนาดของแรงลัพธ์ และจะแปรผกผันกับมวลของวัตถุ หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุเป็นปฏิภาคโดยตรงกับแรงลัพธ์ของแรงที่มากระทำกับวัตถุ

กฎข้อที่สองของนิวตัน อธิบายถึงความสัมพันธ์ของแรง ที่มากระทำต่อวัตถุกับการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ของวัตถุ นิวตันได้กำหนดปริมาณของการเคลื่อนที่ขึ้นมาปริมาณหนึ่งเรียกว่า “โมเมนตัม” โดยนิยามโมเมนตัมของมวลที่เคลื่อนที่ว่า เป็นผลคูณของมวลวัตถุกับความเร็วของวัตถุนั้น เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\bar{p} = m\bar{v}$$

โดยที่ $\bar{p}$ คือโมเมนตัม

m คือมวลของวัตถุ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg)

$\bar{v}$ คือความเร็วของวัตถุ มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s)

ดังนั้น กฎข้อที่สองของนิวตันจึงเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$\sum \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

เมื่อมวล m มีค่าคงที่ จากนิยามของโมเมนตัม สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไป (General Form) ของกฎข้อที่สองของนิวตันได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum \bar{F} &= \frac{d\left(m\bar{v}\right)}{dt} \\ &= m\frac{d\bar{v}}{dt} \\ \sum \bar{F} &= m\bar{a} \end{aligned} \qquad (2.3)$$

<u>กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามของนิวตัน</u> คือ เมื่อมีแรงกระทำกับวัตถุ ทุกแรงกิริยาจะต้องมีแรงปฏิกิริยาที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้ามและสามารถหักล้างกันได้เสมอ (Action = Reaction) เรียกแรงทั้งสองนี้ว่า แรงคู่กิริยาปฏิกิริยา

2.2 ปริมาณต่างๆของการเคลื่อนที่

การเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุ ทำให้เกิดปริมาณต่างๆโดยการวัด และเมื่อนำปริมาณที่ได้มาสัมพันธ์กัน จะทำให้เกิดปริมาณที่ซับซ้อนขึ้น

ระยะทาง (Distance , s) คือ ปริมาณที่ได้จากการวัดระยะตามแนวทางการเคลื่อนที่ เป็นปริมาณ สเกลาร์ มีหน่วยเป็นเมตร (m) โดยมีเส้นเชื่อมจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งได้หลายเส้นทาง

การกระจัด (Displacement , $\bar{s}$) คือ ปริมาณที่ได้จากการวัดระยะในแนวเส้นตรงจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง เป็นปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็นเมตร (m) ซึ่งเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดของการเปลี่ยนตำแหน่ง

อัตราเร็ว (Speed , v) คือ ระยะที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในหนึ่งหน่วยเวลาเป็นปริมาณสเกลาร์มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s)

$$v = \frac{s}{t} \tag{2.4}$$

โดยที่ v คือ อัตราเร็ว (m/s)
s คือ ระยะทาง (m)
t คือ เวลา (s)

อัตราเร็วขณะหนึ่ง (Instantaneous speed , v) คือ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ต่อหนึ่งหน่วยเวลาสั้นๆ

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.5}$$

โดยที่ v คือ อัตราเร็วขณะหนึ่ง (m/s)
Δs คือ ระยะทางสั้นๆ (m)
Δt คือ ช่วงเวลาสั้นๆ (s)

การบอกอัตราเร็วขณะหนึ่งจึงหมายถึงอัตราเร็วเมื่อเวลาที่วินาทีใดๆ

อัตราเร็วเฉลี่ย (Average speed , v_{av}) คือ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ทั้งหมดต่อช่วงเวลาทั้งหมด

$$v_{av} = \frac{s}{t} \tag{2.6}$$

โดยที่ v_{av} คือ อัตราเร็วเฉลี่ย (m/s)

s คือ ระยะทางทั้งหมด (m)

t คือ ช่วงเวลาทั้งหมด (s)

อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้นๆ เมื่อ t น้อยจนเข้าใกล้ศูนย์ก็คือ อัตราเร็วขณะหนึ่งนั่นเอง

ความเร็ว (Velocity , $\bar{v}$) คือ การกระจัดของวัตถุที่เคลื่อนที่ต่อหนึ่งหน่วยเวลา

$$\bar{v} = \frac{\bar{s}}{t} \tag{2.7}$$

โดยที่ $\bar{v}$ คือ ความเร็ว (m/s)

$\bar{s}$ คือ การกระจัด (m)

t คือ เวลา (s)

ความเร็วขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity , $\bar{v}$) คือความเร็วของวัตถุ ณ เวลาใดๆ ซึ่งการกระจัดมีค่าน้อย และเวลาของการเคลื่อนที่มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ หรือก็คือ ลิมิต (limit) ของอัตราส่วน $\frac{\Delta \bar{s}}{\Delta t}$ เข้าใกล้ศูนย์ สามารถเขียนในรูปสมการได้ว่า

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{s}}{\Delta t}$$

หรือ

$$\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt} \tag{2.8}$$

ความเร็วเฉลี่ย (Average velocity , $\bar{v}_{av}$) คือ การกระจัดของวัตถุที่เคลื่อนที่ได้ทั้งหมดต่อหนึ่งหน่วยเวลาทั้งหมด สามารถเขียนในรูปสมการคือ

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{s}}{t} \tag{2.9}$$

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{s}-\bar{s}_0}{t-t_0}$$

ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้นๆ เมื่อ t น้อยจนเข้าใกล้ศูนย์ ก็คือ ความเร็วขณะหนึ่ง

ความเร่ง (Acceleration , $\bar{a}$) คือ ความเร็วของวัตถุที่เปลี่ยนไปในหนึ่งหน่วยเวลา ความเร่งเป็นปริมาณเวกเตอร์มีทิศเดียวกับเวกเตอร์ความเร็วที่เปลี่ยนไป ($\Delta\bar{v}$)

$$\bar{a} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \tag{2.10}$$

โดยที่ $\bar{a}$ คือ ความเร่ง (m/s^2)

$\Delta\bar{v}$ คือ ความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไป (m)

Δt คือ เวลาที่เปลี่ยนแปลงไป (s)

ความเร่งขณะหนึ่ง (Instantaneous acceleration : $\bar{a}$) คือ อัตราส่วนของความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปในช่วงเวลาสั้นๆ จะเป็นความเร่งของวัตถุ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง ก็คือ ลิมิต (limit) ของความเร่งเฉลี่ย ($\bar{a}_{av}$) เมื่อ $\Delta t \to 0$ สามารถเขียนในรูปสมการ คือ

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

- เมื่อวัตถุมีความเร็วเปลี่ยนไปแบบเพิ่มขึ้น จะมีความเร่งเป็นบวก
- เมื่อวัตถุมีความเร็วเปลี่ยนไปแบบลดลง จะมีความเร่งเป็นลบ
- เมื่อวัตถุมีความเร่งคงตัว จะมีความเร่งเป็นศูนย์

หรือ $$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \tag{2.11}$$

ความเร่งเฉลี่ย (Average acceleration : $\vec{a}_{av}$) คือ อัตราส่วนของความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปในช่วงเวลาหนึ่ง สามารถเขียนในรูปสมการคือ

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t-t_0}$$

หรือ $$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (2.12)$$

เมื่อ $\vec{v}_0$ และ $\vec{v}$ เป็นเวคเตอร์ความเร็วที่เวลา t_0 และ t ตามลำดับ

2.3 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติ

วัตถุที่มีการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ คือ ในแนวราบ (แกน X) หรือในแนวดิ่ง (แกน Y) และในการเคลื่อนที่ทั้งสองแบบก็จะพบว่า ทิศการเคลื่อนที่มีทั้งไปทางเดียวและการเคลื่อนที่ย้อนกลับ ซึ่งจะทำให้ระยะทางและการกระจัดไม่เท่ากัน

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุใน 1 มิติ

กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ตามแนวแกน X เมื่อ s_x เป็นการกระจัดตามแนวแกน X โดยสมมติให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ และความเร็วขณะหนึ่งในแนวแกน X คือ v_{av} กับความเร่งขณะหนึ่งในแนวแกน X คือ a_{av} ของวัตถุอยู่บนแกนเดียวกัน

ความเร็วเฉลี่ยและความเร่งเฉลี่ยในหนึ่งมิติ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$v_{av} = \frac{s_x - s_{x_0}}{t-t_0}$$

$$a_{av} = \frac{v_x - v_{x_0}}{t-t_0}$$

ถ้า ณ ตำแหน่งเริ่มต้น $s_{x_0} = 0$ และความเร็วเริ่มต้น $v_{x_0} = u_x$ โดยแทน $t_0 = 0$ ในสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$s_x = v_{av}t \qquad (2.13)$$

$$v_x = u_x + a_x t \qquad (2.14)$$

จากการเฉลี่ยค่าความเร็วต้นและความเร็วปลาย จะได้ว่า

$$v_{av} = \frac{1}{2}(u_x + v_x)$$

แทนค่า v_{av} ลงในสมการที่ (2.13) จะได้ว่า

$$s_x = \frac{1}{2}(u_x + v_x)t \qquad (2.15)$$

แทนค่า v_x จากสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.15) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{1}{2}(u_x + (u_x + a_x t))t \\ &= \frac{1}{2}(2u_x + a_x t)t \\ &= u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$s_x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.16)$$

จากสมการ (2.16) เมื่อแทน $u_x = v_x - a_x t$ ลงไปจะได้ว่า

$$\begin{aligned} s_x &= (v_x - a_x t)t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= v_x t - a_x t^2 + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$s_x = v_x t - \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.17)$$

ใช้ t จากสมการ (2.14) แทนลงในสมการ (2.15) จะได้

$$v_x^2 = u_x^2 + 2a_x s_x \qquad (2.18)$$

การเคลื่อนที่ใน 1 มิติ อีกลักษณะหนึ่ง คือ การที่วัตถุตกอย่างอิสระ ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y โดยวัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง และความเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ตกอย่างอิสระนี้เรียกว่า ความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (Acceleration due of gravity : g) โดยที่ g มีค่า 9.8 เมตรต่อวินาทีกำลังสอง (m/s^2) ปกติแล้วค่า g มีทิศทางลงเสมอ ดังนั้นเมื่อขว้างวัตถุขึ้นที่สูง ความเร็วต้น (u) มีทิศขึ้น เพราะฉะนั้น g จะต้องใช้เครื่องหมายลบ แต่ถ้าวัตถุหล่นลงมาหรือถูกขว้างลงมา g จะมีค่าเป็นบวก

เนื่องจากวัตถุเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ความเร่งจึงเป็นความเร่งตามแนวแกน Y คือ $a_y = -g$

ดังนั้น ในทำนองเดียวกับสมการการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ ตามแนวแกน X จะได้ว่า สมการการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ ตามแนวแกน Y คือ

$$v_y = u_y - gt \tag{2.19}$$

$$s_y = \frac{1}{2}\left(u_y + v_y\right)t \tag{2.20}$$

$$s_y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.21}$$

$$s_y = v_y t + \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.22}$$

$$v_y^{\,2} = u_y^{\,2} - 2gs_y \tag{2.23}$$

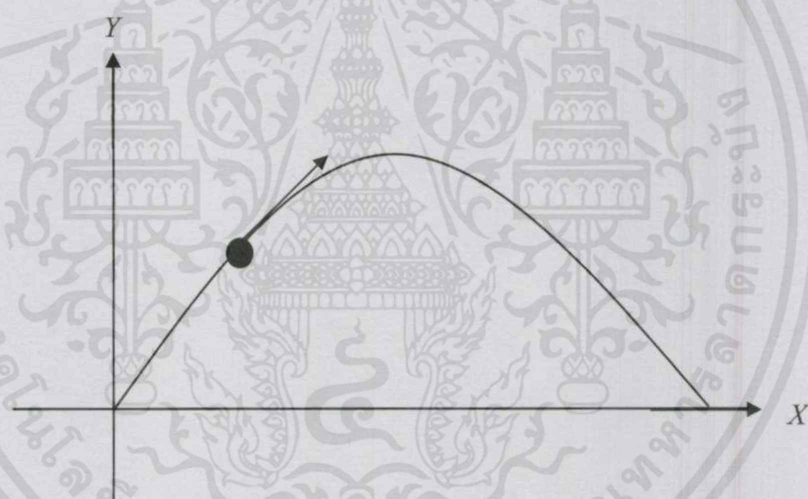
2.4 การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ

การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ มีการเคลื่อนที่หลากหลายแบบ เช่น การเคลื่อนที่ในแนววงกลม (Circular Motion) การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิกส์ (Simple Harmonic Motion) การแกว่งของลูกตุ้ม (Simple Pendulum Motion) และการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง(Projectile Motion) เป็นต้น ซึ่งการเคลื่อนที่แบบต่างๆที่ได้กล่าวมานั้น เป็นการเคลื่อนที่ที่พบในชีวิตประจำวันเสมอ แต่ในที่นี้คณะผู้จัดทำจะศึกษาเฉพาะการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง(Projectile Motion) และขอบเขตจะเฉพาะเจาะจงไปที่พื้นราบและพื้นเอียง

2.4.1 การเคลื่อนที่แบบวิถีโค้งหรือการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์(Projectile Motion)

การเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง (Projectile Motion) เป็นการเคลื่อนที่ใน 2 มิติ หรือในแนวระนาบ คือ เคลื่อนที่ในแนวระดับ (แนวแกน X) และเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (แนวแกน Y) พร้อมๆกัน โดยที่ในแนวดิ่งจะเป็นการเคลื่อนที่ ที่มีความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ในขณะที่การเคลื่อนที่ในแนวระดับจะไม่มีความเร่ง ทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่เป็นแนวโค้ง ซึ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นเส้นโค้งแบบพาราโบลา

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์มีความสำคัญมาก โดยเฉพาะในแง่ของกระบวนการวิเคราะห์วิถีจรวดและวิถีกระสุน เนื่องจากการเคลื่อนที่ของวิถีจรวดและวิถีกระสุนจะเกี่ยวข้องโดยตรงกับความแม่นยำในการยิง ซึ่งความแม่นยำดังกล่าว ขึ้นอยู่กับรายละเอียดในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยสามารถที่จะนำปัจจัยหลายอย่างที่เกี่ยวข้อง อาทิ แรงโน้มถ่วงของโลกและแรงต้านอากาศ มาพิจารณาหาแนวยิงให้เกิดประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น



รูปที่ 2.2 เส้นทางการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์

ในการเรียนการสอนระดับพื้นฐานทั่วไปจะเรียนรู้เฉพาะรูปแบบของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ โดยไม่คิดแรงต้านอากาศ ซึ่งในโลกของความเป็นจริงจะเกิดแรงต้านอากาศขึ้นขณะเกิดการเคลื่อนที่ของวัตถุ

ดังนั้น คณะผู้จัดทำได้แบ่งการพิจารณาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เป็น 2 ประเภท โดยตัวกลางคืออากาศ ได้แก่

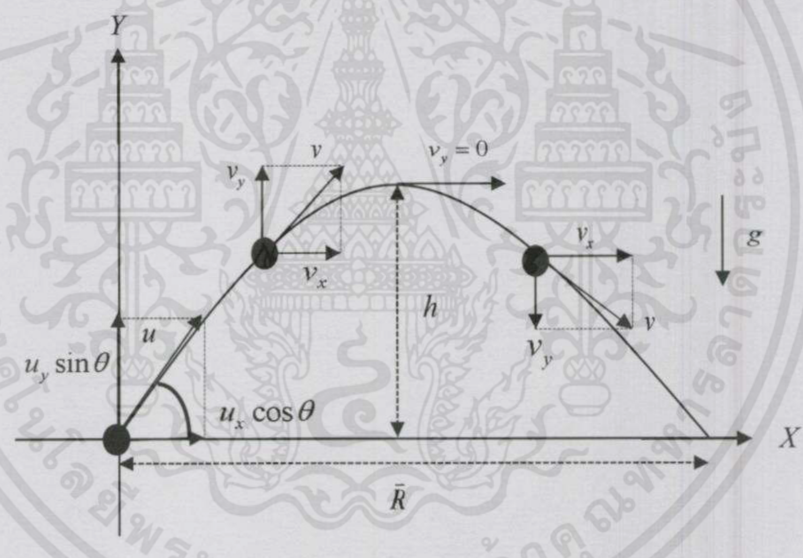
1) การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านอากาศ
(Projectile Motion without Air Resistance)

2) การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศ (Projectile Motion with Air Resistance) ซึ่งเนื้อหาในส่วนนี้เป็นเนื้อหาที่หาได้ยากและยังไม่มีงานวิจัยชิ้นไหนอธิบายได้ละเอียดพอ คณะผู้วิจัยจึงได้ทำการพิจารณาต่อ และนำสิ่งที่ได้จากการพิจารณานั้นไปอธิบายไว้ในบทที่ 3

2.4.1.1 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านอากาศ

2.4.1.1.1 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบวิถีโค้งบนระนาบ XY โดย X เป็นแนวระดับและ Y เป็นความสูงที่ตั้งฉากกับผิวโลก เมื่อวัตถุเคลื่อนที่มีความเร็วต้นคือ u ทำมุม θ กับแนวระดับ (ไม่คิดแรงต้านอากาศ) ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 วิถีการเคลื่อนที่ของวัตถุแบบโปรเจคไทล์

ถ้าจุดกำเนิด (0,0) เป็นตำแหน่งที่วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ นั่นคือ $s_0 = 0$ และ $t = 0$ และวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนววิถีโค้ง จะมีความเร็วเมื่อเวลาใดๆ ทั้งในแนวแกน X และในแนวแกน Y โดยในแนวแกน X วัตถุจะมีความเร็วคงตัว คือ $v_x = u_x$ และความเร่งในแนวแกน X จะเป็นศูนย์($a_x = 0$) ในแนวแกน Y วัตถุจะมีความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ($a_y = -g$) และความเร็วที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุจะประกอบไปด้วยความเร็วสองแนว คือ ความเร็วในแนวราบ (v_x) และความเร็วในแนวดิ่ง (v_y) ซึ่งมีขนาดและทิศทาง ดังนี้

ขนาดของ $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$

ทิศทาง $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

ดังนั้น จะแยกพิจารณาเป็น 2 แกน คือ พิจารณาในแนวแกน X และพิจารณาในแนวแกน Y

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวระดับ (แนวแกน X)

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ตามแนวแกน X เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศ ในแนวระดับจะไม่มีแรงใดๆมากระทำกับวัตถุ (ความเร่งเป็นศูนย์ : $a_x = 0$) หรือก็คือแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุในแนวระดับเป็นศูนย์

$$\sum F_x = 0$$

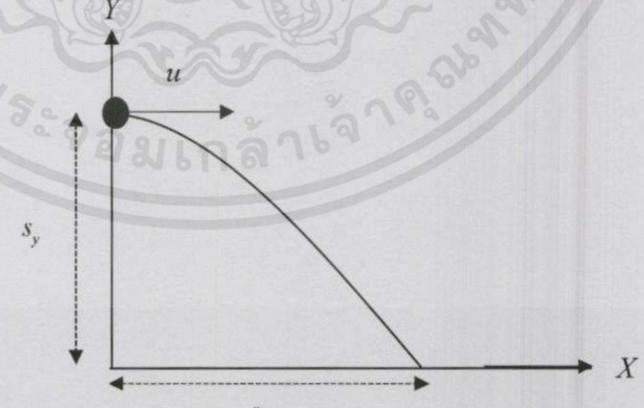
จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งของนิวตัน เมื่อไม่มีแรงมากระทำต่อวัตถุ วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว โดยที่ u_x คือความเร็วต้นของวัตถุในแนวแกน X นั่นคือ

$$u_x = v_x = u\cos\theta \qquad (2.24)$$

จากสมการการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ (2.13) เนื่องจากวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว ดังนั้น $v_{av} = u_x$ จะได้ว่า

$$s_x = (u_x\cos\theta)t \qquad (2.25)$$

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่เป็นแนวโค้งดังรูปที่ 2.4 ดังนี้



รูปที่ 2.4 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุทำมุม 0 องศา

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวระดับมีค่าเป็นศูนย์ ($\cos 0^\circ = 1$) จะได้ว่า

ความเร็วของวัตถุในแนวระดับเมื่อเวลาใดๆ คือ $v_x = u_x$

ระยะทางของวัตถุเมื่อเวลาใดๆ คือ $s_x = u_x t$

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (แนวแกน Y)

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ตามแนวแกน Y เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศ ในแนวดิ่งวัตถุจะมีความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g โดยที่ $a_y = -g$

พิจารณาสมการความเร็วจากการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ (2.19) $v_y = u_y - gt$ โดยที่ u_y คือ ความเร็วต้นของวัตถุในแนวแกน Y จากรูปที่ 2.4 จะได้ว่า

$$u_y = u\sin\theta \tag{2.26}$$

ดังนั้น ความเร็วในแนวแกน Y เมื่อเวลาใดๆ คือ

$$v_y = u\sin\theta - gt \tag{2.27}$$

พิจารณาสมการระยะทางจากการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ (2.21) $s_y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2$

เนื่องจาก $u_y = u\sin\theta$ ดังนั้น ระยะทางในแนวแกน Y เมื่อเวลาใดๆ คือ

$$s_y = u\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.28}$$

จากรูปที่ 2.4 เมื่อวัตถุทำมุมกับแนวระดับมีค่าเป็นศูนย์ ($\sin 0^\circ = 0$)
ความเร็วของวัตถุในแนวดิ่งเมื่อเวลาใดๆ คือ

$$v_y = -gt \tag{2.29}$$

ระยะทางของวัตถุเมื่อเวลาใดๆ คือ

$$s_y = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{2.30}$$

สามารถหาเวลาในการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อ วัตถุเคลื่อนที่ที่จุดสูงสุด จะได้ว่า

$$v_y = u_y - gt$$

เนื่องจากวัตถุเคลื่อนที่สูงที่สุดเมื่อ $v_y = 0$

ดังนั้น

$$t = \frac{u_y}{g}$$

$$= \frac{u\sin\theta}{g}$$

เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ทั้งหมด คือ 2 เท่าของ t ที่ใช้ในการเคลื่อนที่ถึงจุดสูงสุด

ดังนั้น เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ขึ้นจนกระทั่งตกถึงพื้นระดับคือ

$$t = \frac{2u\sin\theta}{g} \tag{2.31}$$

เนื่องจากช่วงเวลา t นี้เป็นช่วงเวลาเดียวกันกับที่วัตถุเคลื่อนที่ในแนวระดับ

ดังนั้น เราสามารถคำนวณระยะทางที่ไกลที่สุดของวัตถุ ได้โดย

$$s_x = (u\cos\theta)t$$

$$= (u\cos\theta)\frac{2u\sin\theta}{g}$$

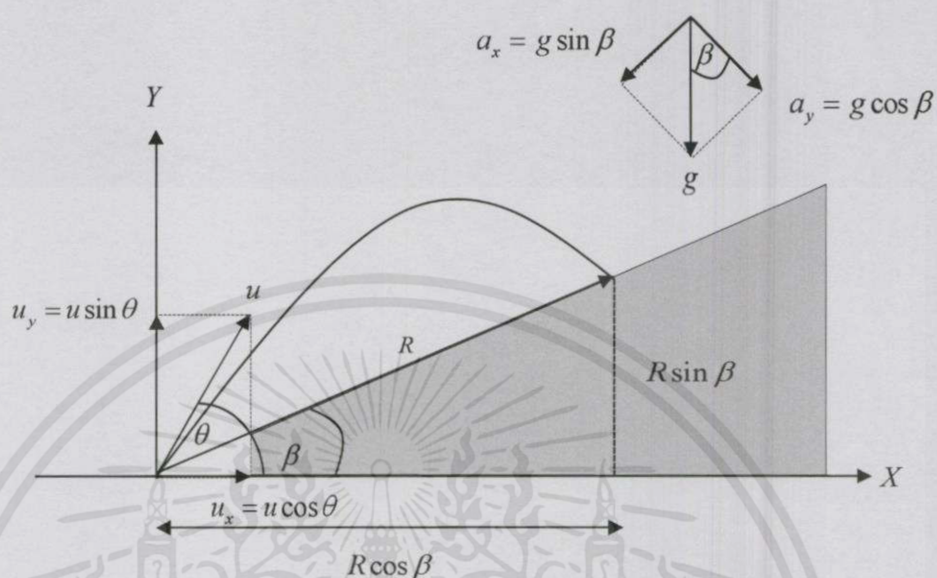
$$= \frac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g} \tag{2.32}$$

จากค่าเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ดังนั้นจากสมการ (2.32) จะได้ว่า

$$s_x = \frac{u^2\sin 2\theta}{g} \tag{2.33}$$

จากสมการ (2.33) จะเห็นได้ว่า ระยะที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดก็ต่อเมื่อ $\sin 2\theta$ มีค่ามากที่สุดซึ่งเท่ากับ 1 ดังนั้นมุมที่ทำให้ได้ระยะสูงสุดคือ $\theta = 45^\circ$

2.4.1.1.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียง



รูปที่ 2.5 วัตถุที่เคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์บนพื้นเอียง

จากรูปที่ 2.5 แสดงการเคลื่อนที่ขอวัตถุแบบโปรเจคไทล์บนพื้นเอียง จะมีแรงกระทำทั้งในแนวแกน X และ Y ดังนั้น

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ คือ

$$\vec{F} = -m\vec{g}$$

$$m\left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j}\right) = m\left[(-g\sin\beta)\hat{i} + (-g\cos\beta)\hat{j}\right]$$

ซึ่งจะได้ว่า

ความเร่งในแนวแกน X คือ $a_x = -g\sin\beta$ (2.34)

ความเร่งในแนวแกน Y คือ $a_y = -g\cos\beta$ (2.35)

โดย g มีทิศทางพุ่งลงเข้าสู่จุดกำเนิด

พิจารณารูปที่ 2.5 เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u ในทิศทำมุม θ กับแนวแกน X จะได้

ความเร็วต้นในแนวแกน X คือ $u_x = u\cos\theta$ (2.36)

ความเร็วต้นในแนวแกน Y คือ $u_y = u\sin\theta$ (2.37)

ดังนั้น จะสามารถหาค่าความเร็วที่เวลาใดๆ ของทั้งสองแนวได้ โดย

แทนสมการ (2.34) และ (2.36) ลงในสมการ (2.14) จะได้ความเร็วในแนวแกน X

$$v_x = u\cos\theta - (g\sin\beta)\mathrm{t} \tag{2.38}$$

แทนสมการ (2.35) และ (2.37) ลงในสมการ (2.19) จะได้ความเร็วในแนวแกน Y

$$v_y = u\sin\theta - (g\cos\beta)t \tag{2.39}$$

และจะสามารถหาระยะการกระจัดที่เวลาใดๆของทั้งสองแนวได้ โดย

แทนสมการ (2.34) และ (2.36) ลงในสมการ (2.16) จะได้ระยะการกระจัดในแนวแกน X

$$s_x = (u\cos\theta)t - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2 \tag{2.40}$$

แทนสมการ (2.35) และ (2.37) ลงในสมการ (2.21) จะได้ระยะการกระจัดในแนวแกน Y

$$s_y = (u\sin\theta)t - \frac{1}{2}(g\cos\beta)t^2 \tag{2.41}$$

จากสมการ (2.40) และ (2.41) ทำให้สามารถหาค่าระยะที่วัตถุตกไกลที่สุดบนพื้นเอียง เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u และทำมุม θ กับแนวแกน X ได้ดังนี้ โดยที่จุดเริ่มต้นแยกความเร็วเป็น 2 แนวคือ แนวราบ $u_x = u\cos\theta$ และแนวดิ่ง $u_y = u\sin\theta$

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวระดับ (แนวแกน X)

จาก $s_x = u_x t$ จะได้ว่า

$$R\cos\beta = u\cos\theta t$$

ดังนั้น

$$t = \frac{R\cos\beta}{u\cos\theta} \tag{2.42}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (แนวแกน Y)

จากรูปที่ 2.5 จะได้ว่า $u_y = u\sin\theta$, $s_y = R\sin\beta$, $t = \dfrac{R\cos\beta}{u\cos\theta}$

จากสมการ (2.21) $s_y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2$ จะได้

$$R\sin\beta = (u\sin\theta)\left(\frac{R\cos\beta}{u\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{R\cos\beta}{u\cos\theta}\right)^2$$

นำ R มาหารตลอดทั้งสมการ จะได้ว่า $\sin\beta = \dfrac{\sin\theta\cos\beta}{\cos\theta} - \dfrac{1}{2}g\dfrac{R\cos^2\beta}{u^2\cos^2\theta}$

จัดรูปสมการ

$$\frac{gR\cos^2\beta}{2u^2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta\cos\beta}{\cos\theta} - \sin\beta$$

$$\frac{gR\cos^2\beta}{2u^2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta\cos\beta - \sin\beta\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{gR\cos^2\beta}{2u^2\cos^2\theta} = \frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos\theta}$$

ดังนั้น ระยะที่วัตถุตกไกลที่สุดบนพื้นเอียงคือ

$$R = \frac{2u^2\cos\theta\sin(\theta-\beta)}{g\cos^2\beta} \tag{2.43}$$

จากสมการ (2.43) สรุปได้ว่า R จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $\cos\theta\sin(\theta-\beta)$ มากที่สุดด้วย จากสูตรตรีโกณมิติ $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ จะได้ว่า

$$\cos\theta\sin(\theta-\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\theta+\theta-\beta) - \sin(\theta-\theta+\beta)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(2\theta-\beta) - \sin\beta\right]$$

แต่ $\sin\beta$ มีค่าคงที่ ดังนั้น $\cos\theta\sin(\theta-\beta)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อ $\sin(2\theta-\beta)$ มีค่ามากที่สุดซึ่งเท่ากับ $\sin 90^o$

นั่นคือ

$$\sin(2\theta-\beta) = \sin 90^o$$
$$2\theta-\beta = 90^o$$
$$\theta = 45^o + \frac{\beta}{2}$$

ดังนั้น การขว้างวัตถุให้ตกระยะไกลที่สุดบนพื้นเอียง จะต้องขว้างด้วยความเร็วต้น ทำมุม $45^o + \frac{\beta}{2}$ เมื่อ β คือมุมของพื้นเอียงทำกับแนวระดับ

ในทำนองเดียวกัน ถ้าขว้างวัตถุจากจุดบนพื้นเอียงลงมาข้างล่างให้ได้ระยะตกไกลที่สุดบนพื้นเอียง จะต้องขว้างวัตถุด้วยความเร็วต้นทำมุม $45^o - \frac{\beta}{2}$

2.5 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการเขียนโปรแกรม

2.5.1 องค์ประกอบของระบบคอมพิวเตอร์

1) ฮาร์ดแวร์ (Hardware) สิ่งที่มองเห็นและจับต้องสัมผัสได้ทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ ไม่สามารถทำงานด้วยตัวเองได้ ต้องอาศัยโปรแกรมหรือก็คือซอร์ฟแวร์ที่ถูกเขียนขึ้นเพื่อปฏิบัติงาน

2) ซอฟต์แวร์ (Software) โปรแกรมคอมพิวเตอร์หรือชุดคำสั่งที่เขียนขึ้น แบ่งออกเป็น 2 ประเภท

- ซอฟต์แวร์ระบบปฏิบัติการ (Operating System Software-OS) หมายถึง ซอฟต์แวร์หรือโปรแกรมที่ควบคุมการทำงานทั้งหมดของเครื่อง ได้แก่ Windows , Dos , Linux , Unix , Mac
- ซอฟต์แวร์ประยุกต์ (Application Software) หมายถึงโปรแกรมที่เขียนขึ้นมาเพื่อสั่งให้เครื่องคอมพิวเตอร์ทำงานเฉพาะด้าน เช่น โปรแกรมระบบบัญชี โปรแกรมออกแบบ โปรแกรมสำเร็จรูปต่างๆ

3) ข้อมูล (Data)

4) บุคลากร หรือพีเพิลแวร์ (People ware)

- ผู้ใช้งานคอมพิวเตอร์ (User)
- ผู้ดูแลและซ่อมบำรุงเครื่องคอมพิวเตอร์ (Supporter or Technician)
- ผู้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Programmer: โปรแกรมเมอร์)
- ผู้ออกแบบและวิเคราะห์ระบบคอมพิวเตอร์ (System Analysis)
- ผู้บริหารระบบคอมพิวเตอร์ (System Manager or Administrator)

5) กระบวนการทำงาน (Documentation/Procedure) ขั้นตอนการทางานหรือระเบียบปฏิบัติที่เป็นในแนวทางเดียวกัน

2.5.2 ภาษาคอมพิวเตอร์ (Computer Programming Language)

ในทางคอมพิวเตอร์มีภาษาที่สามารถใช้สื่อสารระหว่างมนุษย์กับเครื่องคอมพิวเตอร์ได้ แต่ด้วยเหตุที่เครื่องคอมพิวเตอร์เป็นอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ซึ่งมีเฉพาะวงจรการเปิดและปิดทำให้เครื่องคอมพิวเตอร์สื่อสารโดยใช้เลขฐานสองได้เท่านั้น เรียกภาษาที่ใช้เฉพาะเลขฐานสองในคอมพิวเตอร์ว่า ภาษาเครื่อง (Machine Language) และเพราะภาษาเครื่องเป็นภาษาที่ยากต่อการเรียนรู้และเข้าใจทำให้เกิดการคิดค้นสร้างภาษาคอมพิวเตอร์(Computer Programming Language)ขึ้นมาใช้งาน

1) ชนิดของภาษาคอมพิวเตอร์

- ภาษาระดับต่ำ (Low Level Language) ได้แก่ ภาษาเครื่อง (Machine Language), ภาษาแอสเซมบลี (Assembly Language)
- ภาษาระดับสูง (High Level Language) ใช้คำในภาษาอังกฤษแทนคำสั่งต่างๆรวมทั้งสามารถใช้นิพจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ ถูกเรียกว่า ภาษายุคที่สาม (third-generation language)

- ภาษาระดับสูงมาก (Very high-level Language) ผู้เขียนโปรแกรมเพียงแต่กำหนดว่าต้องการให้โปรแกรมทำอะไรบ้างก็สามารถเขียนโปรแกรมได้ทันทีโดยไม่ต้องทราบว่าทำได้อย่างไรทำให้การเขียนโปรแกรมง่ายและรวดเร็วขึ้น โดยถูกเรียกว่า ภาษายุคที่ 4 (fourth-generation language)
- ภาษาธรรมชาติ (Nature Language) ผู้ใช้เพียงแต่พิมพ์สิ่งที่ต้องการลงในเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นคำหรือประโยคตามที่ผู้ใช้เข้าใจซึ่งจะทำให้มีรูปแบบของคำสั่งหรือประโยคที่แตกต่างกันออกไปได้มากมาย เพราะสามารถใช้ระบบฐานความรู้ (knowledge base system) ช่วยในการแปลความหมายของคำสั่งต่างๆ โดยถูกเรียกว่า ภาษายุคที่ 5 (fifth generation language)
- ภาษาโปรแกรมเชิงวัตถุ (Object-Oriented Programming Language) เทคนิคการโปรแกรมเชิงวัตถุ (Object-Oriented Programming) หรือ OOP สร้างขึ้นเพื่อลดความยุ่งยากของการเขียนโปรแกรมลง โปรแกรมเชิงวัตถุที่ได้รับความนิยมสูงได้แก่ JAVA , Visual Basic , C++

2.5.3 การพัฒนาโปรแกรม

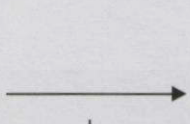
ขั้นตอนหรือวิธีการพัฒนาโปรแกรมประกอบด้วย 6 ขั้นตอนดังนี้

1) การวิเคราะห์ปัญหา(Problem Analysis)
    - กำหนดวัตถุประสงค์ของงาน
    - พิจารณาข้อมูลนำเข้า
    - พิจารณาการประมวลผล
    - พิจารณาข้อมูลนำออก
2) การออกแบบโปรแกรม(Design) สร้างผังงาน (Flow chart)โดยไม่ต้องพะวงกับรูปแบบคำสั่งภาษาคอมพิวเตอร์ แต่มุ่งความสนใจไปที่ลำดับขั้นตอนในการประมวลผลของโปรแกรม
3) การเขียนโปรแกรมด้วยภาษาคอมพิวเตอร์(Programming)
4) การทดสอบและแก้ไขโปรแกรม(Testing)
5) การทำเอกสารประกอบโปรแกรม(Documentation)
6) การบำรุงรักษาโปรแกรม(Maintenance)

2.5.4 สัญลักษณ์หรือ ผังงาน (Flowchart)

เป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งที่ใช้รูปภาพแสดงการไหลของข้อมูลในระบบตั้งแต่แรกจนได้ผลลัพธ์ตามต้องการ ใช้เป็นแนวทางในการเขียนโปรแกรมและเมื่อโปรแกรมเกิดข้อผิดพลาดการเข้าไปวิเคราะห์ผังงานโปรแกรมจะทำได้ง่ายกว่าการเข้าไปวิเคราะห์ตัวโปรแกรมโดยตรง

ตางรางที่ 2.1 แสดงสัญลักษณ์ที่ใช้ในการเขียนผังงานและหน้าที่

ภาพสัญลักษณ์		ความหมาย
	Processing	กระบวนการคำนวณ
	Decision Symbol	การตัดสินใจ
	Input/Output Data	ข้อมูลเข้าหรือแสดงข้อมูลออก
	Manual Input	รับข้อมูลเข้าทางแป้นพิมพ์
	Document Output	การแสดงผลทางเครื่องพิมพ์
	Monitor	จอภาพแสดงผล
	Connection Symbol	จุดเชื่อมต่อ
	Flow Line	ลูกศรแสดงทิศทาง
	Start/End Symbol	เริ่มต้น/สิ้นสุดโปรแกรม

ประโยชน์ของผังงาน

1) ช่วยอธิบายลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม
2) ทำให้ตรวจสอบข้อผิดพลาดของโปรแกรมได้ง่าย
3) ทำให้ผู้อื่นสามารถศึกษาการทางานของโปรแกรมและแก้ไขโปรแกรมได้ง่าย

ในส่วนของการออกแบบโปรแกรมคำนวณการเคลื่อนที่คณะผู้วิจัยจะนำเสนอในกรณีของการคำนวณและการแสดงผลแบบกราฟิก ผลที่ได้รับจะแสดงคำตอบและจำลองภาพตามค่าข้อมูลที่ป้อนลงไปในตัวโปรแกรม นอกจากนี้ยังมีคำสั่งที่จะอธิบายในส่วนความรู้สำหรับผู้ใช้งานเพื่อเป็นการทบทวนเพื่อที่จะสามารถใช้งานโปรแกรมคำนวณได้อย่างถูกต้อง ซึ่งในส่วนนี้คณะผู้วิจัยได้จัดทำเป็นโปรแกรมในลักษณะคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยเป็นผลพลอยได้ไว้สำหรับผู้ที่ต้องการความรู้ในเรื่องการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยเฉพาะ

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) หมายถึง สื่อการเรียนการสอนทางคอมพิวเตอร์ในการนำเสนอสื่อประสม ได้แก่ ข้อความ ภาพนิ่ง กราฟิก แผนภูมิ กราฟ ภาพเคลื่อนไหว วีดีทัศน์และเสียง ผู้เรียนที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการเรียนจะใช้เวลาเพียงสองในสามของผู้เรียนที่เรียนด้วยวิธีการสอนตามปกติ ในขณะเดียวกันผู้เรียนสามารถที่จะนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ในการเรียนด้วยตนเองโดยปราศจากข้อจำกัดทางด้านเวลาและสถานที่ในการศึกษา

ในปัจจุบัน มีการผลิตสื่อการศึกษาทางคอมพิวเตอร์ซึ่งใช้มัลติมีเดียในการนำเสนอเนื้อหาเป็นจำนวนมาก ซึ่งสื่อการศึกษาทางคอมพิวเตอร์ทั้งหมดไม่ใช่คอมพิวเตอร์ช่วยสอน เนื่องจากหากพิจารณาอย่างละเอียดแล้ว มีสื่อการสอนทางคอมพิวเตอร์เป็นจำนวนมากที่จัดว่าเป็นแค่สื่อที่ใช้ในการนำเสนอ (Presentation Media) เนื่องจากสื่อการศึกษาเหล่านั้นต่างขาดคุณลักษณะสำคัญ 4 ประการของคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สมบูรณ์ ซึ่งก็ได้แก่ สารสนเทศ ความแตกต่างระหว่างบุคคล การตอบโต้ และผลป้อนกลับโดยทันที

<u>ประโยชน์ของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน</u>

1. คอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะช่วยสอนให้ผู้เรียนที่เรียนไม่ทันหรือไม่เข้าใจเนื้อหา สามารถใช้เวลาว่างที่นอกจากเวลาเรียนในการทบทวนบทเรียนและฝึกฝนทักษะเพิ่มเติมความรู้เพื่อที่จะปรับปรุงการเรียนของตนเองให้ทันผู้เรียนคนอื่นๆได้
2. ผู้เรียนสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ในการเรียนด้วยตนเองในสถานที่ซึ่งผู้เรียนสะดวกได้ และนอกจากนี้ยังสามารถเรียนในเวลาใดก็ได้ที่ต้องการ
3. คอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ได้รับการออกแบบอย่างถูกต้องตามหลังของการออกแบบคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะสามารถที่จะจูงใจผู้เรียนให้ผู้เรียนเกิดความกระตือรือร้นที่จะเรียนและสนุกสนานไปกับการเรียนตามแนวคิดของการเรียนในปัจจุบันที่ว่า “ Leaning is fan ” ซึ่งหมายถึง การเรียนรู้เป็นเรื่องที่สนุก

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในสมัยกรีกโบราณ(Ancient Greece) ผู้คนเชื่อตามทฤษฎีของอริสโตเติล(Aristotle's theory)ที่ว่า ถ้ายิงวัตถุจากปืนใหญ่วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตามแนวที่ยิง และวัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่ได้จนกระทั่งความเร็วนั้นค่อย ๆ ลดลงกลายเป็นศูนย์ แล้ววัตถุจะตกลงมาอย่างรวดเร็วที่ตำแหน่งนั้น

ต่อมาจากการสังเกตอย่างละเอียดของ นิคโคโล ทาแทกเลีย(Niccolo Tartaglia)พบว่าอันที่จริงแล้วการเคลื่อนที่ของกระสุนปืนใหญ่นั้น แนวการเคลื่อนที่เป็นรูปโค้ง ในขณะนั้นไม่มีใครสามารถอธิบายได้ว่าเป็นเพราะอะไร ต่อมา กาลิเลโอ กาลิเลอี(Galileo Galilei)ได้อธิบายว่า การเคลื่อนที่ของกระสุนปืนใหญ่ เป็นการเคลื่อนที่ที่ประกอบด้วยการเคลื่อนที่ในสองแนวไม่ใช่แนวเดียว โดยในแนวดิ่งจะมีแรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกกระทำต่อวัตถุทำให้วัตถุเคลื่อนที่ลงด้วยความเร่ง $9.8\ m/s^2$ และในเวลาเดียวกับที่วัตถุถูกดึงลง โปรเจคไทล์ก็ยังคงเคลื่อนที่ตรงในแนวราบด้วย (Galilao's pricipal Inertia หลักความเฉื่อยของกาลิเลโอ) แสดงให้เห็นว่าการเคลื่อนที่ดังกล่าวประกอบไปด้วยการเคลื่อนที่ 2 แนว พร้อม ๆกัน โดยในแต่ละแนวจะเคลื่อนที่อย่างอิสระไม่เกี่ยวข้องกัน และยังพบว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของโปรเจคไทล์(Projectile Motion)จะเป็นรูปเรขาคณิต ที่เรียกว่า "พาราโบลา(Parabola)

นอกจากนี้กาลิเลโอยังศึกษาต่อและพบว่าพาราโบลาเป็นวิถีโค้งอุดมคติทางทฤษฎีที่เกิดจากโปรเจคไทล์ซึ่งเร่งขึ้นอย่างสม่ำเสมอโดยไม่มีความฝืดหรือการรบกวนอื่น ๆ กาลิเลโอยอมรับว่าทฤษฎีนี้ยังมีข้อจำกัด โดยระบุว่าวิถีโปรเจคไทล์ตามทฤษฎีดังกล่าวเมื่อนำมาทดลองในขนาดเปรียบเทียบกับโลกแล้วไม่อาจทำให้เกิดเส้นโค้งพาราโบลาขึ้นได้ ถึงกระนั้นก็ยังคงยึดแนวคิดนี้เพื่อทดลองในระยะทางที่ไกลโดยการยิงปืนใหญ่ และเชื่อว่าการผิดเพี้ยนของวิถีโปรเจคไทล์ที่ผิดไปจากพาราโบลาเกิดจากความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อย

โดยในความเป็นจริงนั้นสิ่งที่ขัดขวางการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ในรูปแบบอุดมคตินั้นก็คืออิทธิพลของลมและแรงต้านอากาศ(Air Resistance) โดยส่งผลให้เกิดการพัฒนารูปทรงของวัตถุต่างๆ เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในด้านของความเร็ว การทรงตัว และการบิน

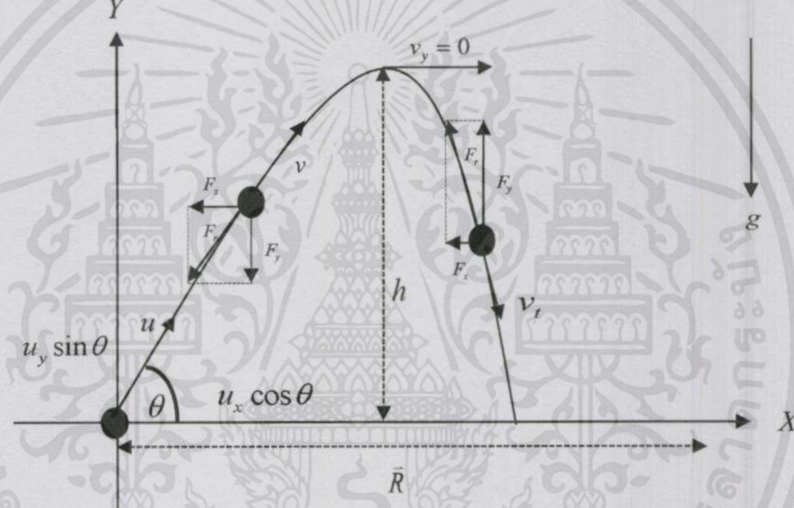
งานวิจัยของเรามีจุดประสงค์เพื่อชี้ให้เห็นถึงความแตกต่างของวิถีการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศและไม่คิดแรงต้านอากาศ ซึ่งได้อาศัยพื้นฐานความรู้ดั้งเดิม [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] เพื่อสร้างสูตรการเคลื่อนที่แบบคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบและพื้นเอียง

จากการศึกษาบทความแรงต้านอากาศกับการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ [11] [12] ทำให้ได้รับแนวทางในการศึกษาวิจัยไปจนถึงการเขียนโปรแกรมเพื่อแสดงการเคลื่อนที่และความแตกต่างของสภาพการเคลื่อนที่เมื่อคิดแรงต้านอากาศ

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

จากความรู้เรื่อง Projectile Motion ในบทที่ 2 ซึ่งเป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นราบและพื้นเอียง เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศ คณะผู้วิจัยจึงพิจารณาต่อ ในกรณีมีแรงต้านของอากาศบนพื้นราบและวัตถุที่เคลื่อนที่บนพื้นเอียง

โดยจะแบ่งสูตรแรงต้านการเคลื่อนที่เป็น Linear Air Resistance และ Quadratic Air Resistance



รูปที่ 3.1 เส้นทางการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศ

3.1 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศ โดยใช้สูตรแรงต้านการเคลื่อนที่แบบ Linear Air Resistance

3.1.1 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบ

การเคลื่อนที่ของวัตถุในของไหล (Motion through a liquid or gas) จะพิจารณาแรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงตามความเร็วของวัตถุ ตัวอย่างของแรงต้านการเคลื่อนที่ ที่มีสมบัติดังกล่าวคือ แรงหนืดในของเหลว แรงต้านของอากาศ เป็นต้น

โดยทั่วไป วัตถุที่มีขนาดเล็ก และเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ เช่น ลูกกลมโลหะขนาดเล็ก เคลื่อนที่ตกลงมายังก้นภาชนะ ที่บรรจุของเหลวภายใต้แรงดึงดูดของโลก จะถูกต้านการเคลื่อนที่ ด้วยแรงต้านซึ่งแปรผันตรง กับขนาดของความเร็วของวัตถุ และสามารถเขียน ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\vec{F}_r = -k\vec{v}$$

เครื่องหมายลบ แสดงว่าแรงต้านการเคลื่อนที่มีทิศตรงข้ามกับความเร็วของวัตถุ

โดยที่

$\vec{F}_r$ คือ แรงต้านการเคลื่อนที่

$\vec{v}$ คือ ความเร็วของวัตถุ

k คือ ค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกลางและรูปร่างของวัตถุ เช่น ในกรณีของทรงกลม ค่า $k = 4\pi\eta D$ โดยที่ η คือสัมประสิทธิ์ความหนืดของของเหลว และ D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม (k ตัวนี้ ไม่มีความยาวเกี่ยวข้องใดๆทั้งสิ้นกับค่าคงตัวของสปริง)

แรงที่กระทำต่อวัตถุในแนวดิ่งประกอบด้วย $\vec{F}_r$ และ $m\vec{g}$ ดังนั้น เมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันจะได้ว่า

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} + \vec{F}_r = m\vec{a}$$

และหากกำหนดให้ทิศชี้ลงเป็นบวกจะได้ว่า

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

เรียกว่าสมการอนุพันธ์ (differential equation) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v กับเวลา t สามารถแก้สมการนี้เพื่อเขียน v ในรูปของ t ได้เป็น

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

ถ้าพิจารณากรณีที่เวลา t มีค่ามากๆ จะได้ว่าความเร็วจะมีค่าเข้าใกล้ค่า $\frac{mg}{k}$ ทำให้เรียก $\frac{mg}{k}$ ว่า ความเร็วสุดท้าย (Terminal Velocity, $v_{terminal}$) สามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$v = v_{terminal}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

โดยที่

$$v_{terminal} = \frac{mg}{k}$$

เมื่อพิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง เช่น อากาศ จะทำให้เกิดแรงปะทะหรือแรงต้านของวัตถุกับอากาศ ซึ่งจากการศึกษาค้นคว้า พบว่ามีงานวิจัย [8] ที่เกี่ยวข้องกับแรงต้านอากาศ(Resistance Force) พบว่าขนาดของแรงต้านของอากาศจะแปรผันตรงกับความเร็วของวัตถุ ทิศของแรงต้านอากาศที่กระทำต่อวัตถุจะมีทิศตรงข้ามกับความเร็วของวัตถุ โดยในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะศึกษากรณีแรงต้านของอากาศที่มีทิศตรงกันข้ามกับความเร็วของวัตถุเท่านั้น

ดังนั้น รูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ของแรงต้านอากาศที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุ คือ

$$\vec{F}_r = -k\vec{v} \tag{3.1}$$

โดยที่ $\vec{F}_r$ คือ แรงต้าน

k คือ ค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกลางและรูปร่างของวัตถุ ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ผ่านแรงต้านของอากาศ ค่า $k = \frac{1}{2}C\rho A$ โดยที่ ρ คือ ความหนาแน่นของอากาศมีค่าคงที่ A คือ พื้นที่หน้าตัดของวัตถุ โดยรูปทรงที่ศึกษาในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะรูปทรงที่มีพื้นที่หน้าตัดคงที่เท่านั้น และ C คือ Drag Coefficient สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศขึ้นกับรูปร่างของวัตถุ

เมื่อแบ่งคิดตามแนวแกน X $F_r = -kv_x$

เมื่อแบ่งคิดตามแนวแกน Y $F_r = -kv_y$

การที่จะวิเคราะห์ผลการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ให้แม่นยำมากยิ่งขึ้นนั้น จำเป็นต้องนำแรงต้านอากาศเข้ามาใช้ในการวิเคราะห์ด้วย โดยเฉพาะการเคลื่อนที่ของจรวดวิถีที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงก็จะทำให้แรงต้านอากาศมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้น แรงต้านอากาศจึงมีผลต่อการเคลื่อนที่ของจรวดและกระสุน

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (2.3)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

จะได้แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$\vec{F} = \vec{F}_r + m\vec{g}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + m\vec{g}$$

ดังนั้นขนาดความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \left(\frac{k}{m}\right)v$$

เมื่อเวลาผ่านไปวัตถุจะมีความเร็วเพิ่มขึ้น กล่าวคือ แรงต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุก็จะเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน จนกระทั่งแรงต้านการเคลื่อนที่ มีขนาดเท่ากับน้ำหนักของวัตถุ ดังนั้นวัตถุก็จะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเท่ากับศูนย์ หรืออาจกล่าวได้ว่าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ซึ่งความเร็วดังกล่าวก็คือความเร็วสุดท้าย (terminal velocity , $v_{terminal}$)

$$g - \left(\frac{k}{m}\right)v_{terminal} = 0$$

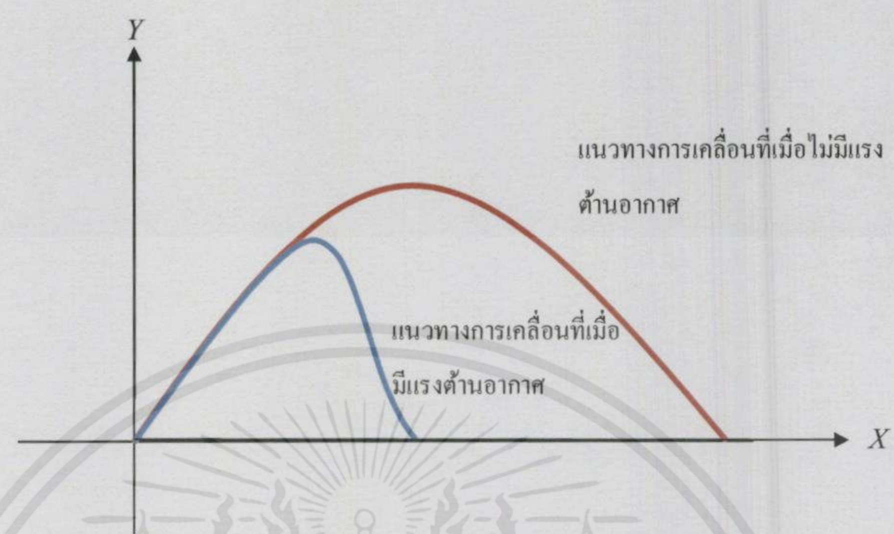
$$\left(\frac{k}{m}\right)v_{terminal} = g$$

$$kv_{terminal} = mg$$

$$v_{terminal} = \frac{mg}{k}$$

$$k = \frac{mg}{v_{terminal}}$$

เนื่องจากแรงต้านของอากาศมีทิศทางตรงข้ามกับความเร็วของวัตถุ ดังนั้นเครื่องหมายจึงตรงกันข้ามกับความเร็วของวัตถุ



รูปที่ 3.2 แสดงการเปรียบเทียบแนวทางการเคลื่อนที่ของวัตถุแบบโปรเจคไทล์ เมื่อไม่มีแรงต้านอากาศกับเมื่อมีแรงต้านอากาศ

จากตรงนี้เราจะให้ $v_{terminal} = v_t$ เพื่อความกระชับและสะดวกในการอ่านสมการ

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวระดับ (แนวแกน X)

การเคลื่อนที่ในแนวระดับ (แนวแกน X) ในกรณีนี้ มีแรงต้านอากาศเพียงแรงเดียวที่กระทำกับวัตถุ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น $u_x = u\cos\theta$ นั่นคือ

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$$

$$\frac{1}{v_x}dv_x = -\frac{g}{v_t}dt$$

$$\int_{u\cos\theta}^{v_x}\frac{1}{v_x}dv_x = -\int_0^t\frac{g}{v_t}dt$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{u\cos\theta}\right) = -\frac{g}{v_t}t$$

$$\frac{v_x}{u\cos\theta} = e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$v_x = (u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

ดังนั้น เมื่อทำการจัดรูปสมการจะได้ความเร็วตามแนวแกน X คือ

$$v_x = (u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} \tag{3.2}$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน X (3.2)ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน X คือ 30^o, 45^o และ 60^o

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

เนื่องจาก $$v_x = (u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \left(u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$\int_{s_{x_0}}^{s_x} ds_x = \int_0^t \left(u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t}\,dt$$

$$s_x - s_{x_0} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)\int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}\,dt$$

ให้ $U = -\dfrac{g}{v_t}t$ จะได้ $dU = -\dfrac{g}{v_t}dt$

$$s_x = s_{x_0} + (u\frac{\sqrt{3}}{2})\left(-\frac{v_t}{g}\right)\int_0^t e^U\,dU$$

$$= s_{x_0} + (u\frac{\sqrt{3}}{2})\left(-\frac{v_t}{g}\right)\left(e^{-\frac{gt}{v_t}} - 1\right)$$

$$= s_{x_0} + (u\frac{\sqrt{3}}{2})\left(\frac{v_t}{g}\right)\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_t}}\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_x = s_{x_0} + (u\frac{\sqrt{3}}{2})\left(\frac{v_t}{g}\right)\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_t}}\right) \tag{3.3}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

เนื่องจาก $$v_x = (u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \left(u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$\int_{s_{x_0}}^{s_x} ds_x = \int_0^t \left(u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t}dt$$

$$s_x - s_{x_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\right)\int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}dt$$

ให้ $U = -\frac{g}{v_t}t$ จะได้ $dU = -\frac{g}{v_t}dt$

$$s_x = s_{x_0} + (u\frac{1}{\sqrt{2}})\left(-\frac{v_t}{g}\right)\int_0^t e^U dU$$

$$= s_{x_0} + (u\frac{1}{\sqrt{2}})\left(-\frac{v_t}{g}\right)\left(e^{-\frac{gt}{v_t}} - 1\right)$$

$$= s_{x_0} + \left(u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{v_t}{g}\right)\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_t}}\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_x = s_{x_0} + (u\frac{1}{\sqrt{2}})\left(\frac{v_t}{g}\right)\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_t}}\right) \tag{3.4}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

เนื่องจาก $$v_x = (u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \left(u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$\int_{s_{x_0}}^{s_x} ds_x = \int_0^t \left(u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t}dt$$

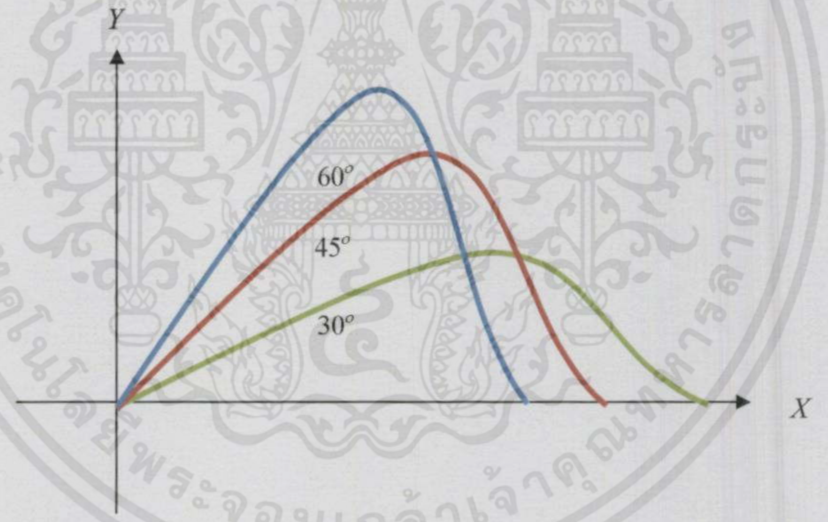
$$s_x - s_{x_0} = \left(\frac{1}{2}u\right)\int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}dt$$

ให้ $U = -\frac{g}{v_t}t$ จะได้ $dU = -\frac{g}{v_t}dt$

$$s_x = s_{x_0} + (u\frac{1}{2})\left(-\frac{v_t}{g}\right)\int_0^t e^U dU$$
$$= s_{x_0} + (u\frac{1}{2})\left(-\frac{v_t}{g}\right)\left(e^{-\frac{gt}{v_t}} - 1\right)$$
$$= s_{x_0} + \left(u\frac{1}{2}\right)\left(\frac{v_t}{g}\right)\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_t}}\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o คือ

$$s_x = s_{x_0} + (u\frac{1}{2})\left(\frac{v_t}{g}\right)\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_t}}\right) \tag{3.5}$$



รูปที่ 3.3 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อเคลื่อนที่ทำมุม 30^o 45^o และ 60^o

จากรูปที่ 3.3 วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม θ คือมุมที่วัตถุเคลื่อนที่วัดเทียบกับแกน X จะพบว่าเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบวัตถุจะเคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดเมื่อ θ ทำมุม 30^o

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (แนวแกน Y)

การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (แนวแกน Y) ในกรณีนี้จะมีแรงที่กระทำต่อวัตถุ คือ แรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกและแรงต้านอากาศกระทำต่อวัตถุ ทำให้ $a_y = -g$ นั่นคือ

$$\vec{F} = \vec{F}_r - m\vec{g}$$

และตามแนวแกน Y วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น $u_y = u\sin\theta$ จะได้ว่า

$$m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg$$

กำหนดให้ $k = \frac{mg}{v_t}$ จะได้ว่า

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{g}{v_t}v_y - g$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g\left(\frac{v_y}{v_t} + 1\right)$$

$$\frac{1}{v_t}\left(\frac{1}{1+\frac{v_y}{v_t}}\right)dv_y = -\frac{g}{v_t}dt$$

$$\int_{u\sin\theta}^{v_y}\frac{1}{v_t+v_y}dv_y = \int_0^t -\frac{g}{v_t}dt$$

ให้ $U = v_t + v_y$ จะได้ $dU = dv_y$

จะได้ว่า

$$\int_{u\sin\theta}^{v_y}\frac{1}{U}dU = \int_0^t -\frac{g}{v_t}dt$$

$$\ln\left(\frac{v_t+v_y}{v_t+u\sin\theta}\right) = -\frac{g}{v_t}t$$

$$\frac{v_t+v_y}{v_t+u\sin\theta} = e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$v_y = (u\sin\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1-e^{-\frac{g}{v_t}t})$$

ดังนั้น เมื่อทำการจัดรูปสมการจะได้ความเร็วตามแนวแกน Y คือ

$$v_y = (u\sin\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1-e^{-\frac{g}{v_t}t}) \tag{3.6}$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน Y (3.6) ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน Y คือ 30^o, 45^o และ 60^o

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

เนื่องจาก
$$v_y = (u\sin\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1-e^{-\frac{g}{v_t}t})$$
$$\frac{ds_y}{dt} = \left(u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1-e^{-\frac{g}{v_t}t})$$
$$\int_{s_{y0}}^{s_y} ds_y = \int_0^t \left(\left(u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1-e^{-\frac{g}{v_t}t})\right)dt$$
$$s_y - s_{y_0} = u\frac{1}{2}\left(\frac{v_t}{g}t\right)(1-e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t\left(t+\frac{v_t}{g}\left(e^{-\frac{g}{v_t}t}-1\right)\right)$$
$$s_y = s_{y_0} + \frac{v_t}{g}\left(u\frac{1}{2}+v_t\right)(1-e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t t$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_y = s_{y_0} + \frac{v_t}{g}\left(u\frac{1}{2}+v_t\right)(1-e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t t \tag{3.7}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

เนื่องจาก
$$v_y = (u\sin\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1-e^{-\frac{g}{v_t}t})$$
$$\frac{ds_y}{dt} = \left(u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1-e^{-\frac{g}{v_t}t})$$

$$\int_{s_{y0}}^{s_y} ds_y = \int_0^t \left(\left(u \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) \right) dt$$

$$s_y - s_{y_0} = u \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{v_t}{g} t \right) (1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t \left(t + \frac{v_t}{g} \left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1 \right) \right)$$

$$s_y = s_{y_0} + \frac{v_t}{g} \left(u \frac{1}{\sqrt{2}} + v_t \right) (1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t t$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_y = s_{y_0} + \frac{v_t}{g} \left(u \frac{1}{\sqrt{2}} + v_t \right) (1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t t \tag{3.8}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

เนื่องจาก $$v_y = (u \sin\theta) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t})$$

$$\frac{ds_y}{dt} = \left(u \frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t})$$

$$\int_{s_{y0}}^{s_y} ds_y = \int_0^t \left(\left(u \frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) \right) dt$$

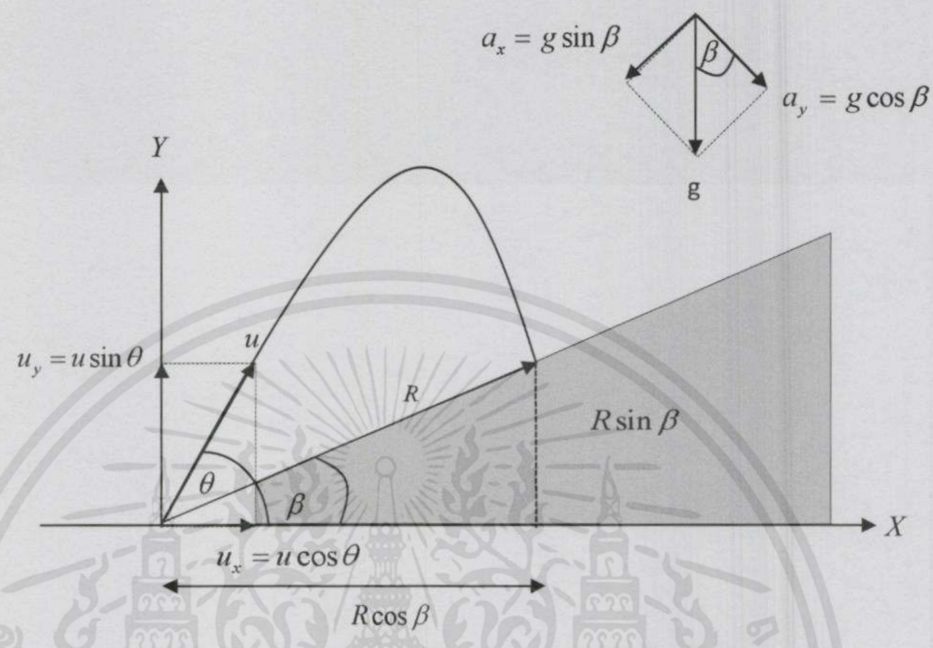
$$s_y - s_{y_0} = u \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{v_t}{g} t \right) (1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t \left(t + \frac{v_t}{g} \left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1 \right) \right)$$

$$s_y = s_{y_0} + \frac{v_t}{g} \left(u \frac{\sqrt{3}}{2} + v_t \right) (1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t t$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_y = s_{y_0} + \frac{v_t}{g} \left(u \frac{\sqrt{3}}{2} + v_t \right) (1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}) - v_t t \tag{3.9}$$

3.1.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียง



รูปที่ 3.4 การเคลื่อนที่แบบโปรแจคไทล์บนพื้นเอียง

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (2.3)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

แรงลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ คือ

$$\vec{F} = \vec{F}_r + m\vec{g}$$

$$m\left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j}\right) = F_r + m\left[\left(-g\sin\beta\right)\hat{i} + \left(-g\cos\beta\right)\hat{j}\right] \qquad (3.10)$$

จากรูปที่ 3.4 ซึ่งจะได้ว่า

ความเร่งในแนวแกน X คือ $a_x = -g\sin\beta$ (3.11)

ความเร่งในแนวแกน Y คือ $a_y = -g\cos\beta$ (3.12)

โดย g มีทิศทางพุ่งลงเข้าสู่จุดกำเนิด

พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวระดับ (แนวแกน X)
แทนสมการ (3.1) ลงในสมการ (3.10) โดยคิดตามแนวแกน X
จะได้ว่า

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x - mg\sin\beta$$

ให้ $k = \frac{mg}{v_t}$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{g}{v_t}v_x - g\sin\beta$$

$$\frac{1}{\sin\beta + \frac{v_x}{v_t}}dv_x = -g\,dt$$

$$\int_{u\cos\theta}^{v_x}\frac{1}{v_t\sin\beta + v_x}dv_x = -\int_0^t\frac{g}{v_t}dt$$

ให้ $U = v_t\sin\beta + v_x$ จะได้ $dU = dv_x$

นั่นคือ

$$\ln\left(\frac{v_t\sin\beta + v_x}{v_t\sin\beta + u\cos\theta}\right) = -\frac{g}{v_t}t$$

$$\frac{v_t\sin\beta + v_x}{v_t\sin\beta + u\cos\theta} = e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$v_x = (v_t\sin\beta + u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t\sin\beta$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุตามแนวแกน X คือ

$$v_x = (v_t\sin\beta + u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t\sin\beta \qquad (3.13)$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน X (3.13)ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นเอียงเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน Y คือ 30^o , 45^o และ 60^o โดยที่มุมของพื้นเอียง β จะมีค่าคงที่ และ $\theta < 90^o - \beta$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

เนื่องจาก $$v_x = (v_t \sin\beta + u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \left(v_t \sin\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta$$

$$\int_{s_{x_0}}^{s_x} ds_x = \int_0^t \left(\left(v_t \sin\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta\right)dt$$

$$s_x = s_{x_0} + \left(v_t \sin\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}\,dt - \int_0^t v_t \sin\beta\,dt$$

$$= s_{x_0} + \left(v_t \sin\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{v_t}{g}\right)\left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1\right) - v_t\,\mathrm{t}\sin\beta$$

$$= s_{x_0} + \left(\frac{v_t}{g}\right)\left(v_t \sin\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}\right) - v_t\,\mathrm{t}\sin\beta$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_x = s_{x_0} + \left(\frac{v_t}{g}\right)\left(v_t \sin\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}\right) - v_t\,\mathrm{t}\sin\beta \tag{3.14}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

เนื่องจาก $$v_x = (v_t \sin\beta + u\cos\theta)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta$$

$$\int_{s_{x_0}}^{s_x} ds_x = \int_0^t \left(\left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta\right)dt$$

$$s_x = s_{x_0} + \left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}\,dt - \int_0^t v_t \sin\beta\,dt$$

$$= s_{x_0} + \left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{v_t}{g}\right)\left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1\right) - v_t\,\mathrm{t}\sin\beta$$

$$= s_{x_0} + \left(\frac{v_t}{g}\right)\left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}\right) - v_t\,\mathrm{t}\sin\beta$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_x = s_{x_0} + \left(\frac{v_t}{g}\right)\left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}\right) - v_t\, t\sin\beta \tag{3.15}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

เนื่องจาก
$$v_x = \left(v_t \sin\beta + u\cos\theta\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta$$

$$\int_{s_{x_0}}^{s_x} ds_x = \int_0^t \left(\left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \sin\beta\right)dt$$

$$s_x = s_{x_0} + \left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{2}\right)\int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}\,dt - \int_0^t v_t \sin\beta\, dt$$

$$= s_{x_0} + \left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v_t}{g}\right)\left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1\right) - v_t\, t\sin\beta$$

$$= s_{x_0} + \left(\frac{v_t}{g}\right)\left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{2}\right)\left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}\right) - v_t\, t\sin\beta$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o คือ

$$s_x = s_{x_0} + \left(\frac{v_t}{g}\right)\left(v_t \sin\beta + u\frac{1}{2}\right)\left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t}\right) - v_t\, t\sin\beta \tag{3.16}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่ง (แนวแกน Y)

แทนสมการ (3.1) ลงในสมการ (3.8) โดยคิดตามแนวแกน Y
จะได้ว่า

$$m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg\cos\beta$$

ให้ $k = \dfrac{mg}{v_t}$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{g}{v_t}v_y - g\cos\beta$$

$$\frac{1}{\cos\beta + \dfrac{v_y}{v_t}}\,dv_y = -g\,dt$$

$$\int_{u\sin\theta}^{v_y} \frac{1}{v_t\cos\beta + v_y}\,dv_y = -\int_0^t \frac{g}{v_t}\,dt$$

ให้ $U = v_t\cos\beta + v_y$ จะได้ $dU = dv_y$

นั่นคือ

$$\ln\left(\frac{v_t\cos\beta + v_y}{v_t\cos\beta + u\sin\theta}\right) = -\frac{g}{v_t}t$$

$$\frac{v_t\cos\beta + v_y}{v_t\cos\beta + u\sin\theta} = e^{-\frac{g}{v_t}t}$$

$$v_y = \left(v_t\cos\beta + u\sin\theta\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t\cos\beta$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุตามแนวแกน Y คือ

$$v_y = \left(v_t\cos\beta + u\sin\theta\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t\cos\beta \qquad (3.17)$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน Y (3.17)ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นเอียงเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน Y คือ 30^o , 45^o และ 60^o โดยที่มุมของพื้นเอียง β จะมีค่าคงที่ และ $\theta < 90^o - \beta$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

เนื่องจาก $$v_y = \left(v_t\cos\beta + u\sin\theta\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t\cos\beta$$

$$\frac{ds_y}{dt} = \left(v_t\cos\beta + u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t\cos\beta$$

$$\int_{s_{y0}}^{s_y} ds_y = \int_0^t \left(\left(v_t\cos\beta + u\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t\cos\beta\right)dt$$

$$s_y = s_{y_0} + \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{2} \right) \int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}\, dt - \int_0^t v_t \cos\beta\, dt$$

$$= s_{y_0} + \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{v_t}{g} \right) \left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1 \right) - v_t t \cos\beta$$

$$= s_{y_0} + \left(\frac{v_t}{g} \right) \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{2} \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t} \right) - v_t t \cos\beta$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_y = s_{y_0} + \left(\frac{v_t}{g} \right) \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{2} \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t} \right) - v_t t \cos\beta \tag{3.18}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

เนื่องจาก $$v_y = (v_t \cos\beta + u \sin\theta) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \cos\beta$$

$$\frac{ds_y}{dt} = \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \cos\beta$$

$$\int_{s_{y_0}}^{s_y} ds_y = \int_0^t \left(\left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \cos\beta \right) dt$$

$$s_y = s_{y_0} + \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}\, dt - \int_0^t v_t \cos\beta\, dt$$

$$= s_{y_0} + \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{v_t}{g} \right) \left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1 \right) - v_t t \cos\beta$$

$$= s_{y_0} + \left(\frac{v_t}{g} \right) \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t} \right) - v_t t \cos\beta$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_y = s_{y_0} + \left(\frac{v_t}{g} \right) \left(v_t \cos\beta + u\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t} \right) - v_t t \cos\beta \tag{3.19}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

เนื่องจาก $$v_y = (v_t \cos\beta + u \sin\theta) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \cos\beta$$

$$\frac{ds_y}{dt} = \left(v_t \cos\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \cos\beta$$

$$\int_{s_{y_0}}^{s_y} ds_y = \int_0^t \left(\left(v_t \cos\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{-\frac{g}{v_t}t} - v_t \cos\beta \right) dt$$

$$s_y = s_{y_0} + \left(v_t \cos\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \int_0^t e^{-\frac{g}{v_t}t}\, dt - \int_0^t v_t \cos\beta\, dt$$

$$= s_{y_0} + \left(v_t \cos\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{v_t}{g} \right) \left(e^{-\frac{g}{v_t}t} - 1 \right) - v_t t \cos\beta$$

$$= s_{y_0} + \left(\frac{v_t}{g} \right) \left(v_t \cos\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t} \right) - v_t t \cos\beta$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o คือ

$$s_y = s_{y_0} + \left(\frac{v_t}{g} \right) \left(v_t \cos\beta + u\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v_t}t} \right) - v_t t \cos\beta \qquad (3.20)$$

3.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศ โดยใช้สูตรแรงต้านการเคลื่อนที่แบบ Quadratic Air Resistance

3.2.1 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบ

พบว่าในวัตถุใหญ่ขนาดของแรงต้านของอากาศจะแปรผันตรงกับความเร็วยกกำลังสองของวัตถุ ทิศของแรงต้านอากาศที่กระทำต่อวัตถุจะมีทิศตรงข้ามกับความเร็วของวัตถุ

ดังนั้น รูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ของแรงต้านอากาศที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุ คือ

เมื่อแบ่งคิดตามแนวแกน X $$F_r = -\frac{1}{2}C\rho A v_x^2 \qquad (3.21)$$

เมื่อแบ่งคิดตามแนวแกน Y $$F_r = -\frac{1}{2}C\rho A v_y^2 \qquad (3.22)$$

เนื่องจากแรงต้านของอากาศมีทิศทางตรงข้ามกับความเร็วของวัตถุ ดังนั้นเครื่องหมายจึงตรงกันข้ามกับความเร็วของวัตถุ จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (2.3)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

จะได้แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$\vec{F} = \vec{F}_r - m\vec{g}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{2}C\rho A\vec{v}^2 - m\vec{g}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวระดับ (แนวแกน X)

การเคลื่อนที่ในแนวระดับ (แนวแกน X) ในกรณีนี้ มีแรงต้านอากาศเพียงแรงเดียวที่กระทำกับวัตถุ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น $u_x = u\cos\theta$ และแทนสมการแรงต้าน (3.21) จะได้

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2}C\rho A{v_x}^2$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{C\rho A{v_x}^2}{m}$$

$$\frac{1}{{v_x}^2}dv_x = -\frac{1}{2}\frac{C\rho A}{m}dt$$

$$\int_{u\cos\theta}^{v_x}\frac{1}{{v_x}^2}dv_x = -\frac{1}{2}\frac{C\rho A}{m}\int_0^t dt$$

$$\int_{u\cos\theta}^{v_x}\frac{1}{{v_x}^2}dv_x = -\frac{C\rho At}{2m}$$

$$-\frac{1}{v_x}\bigg|_{u\cos\theta}^{v_x} = -\frac{C\rho At}{2m}$$

$$-\frac{1}{v_x}+\frac{1}{u\cos\theta} = -\frac{C\rho At}{2m}$$

$$-\frac{1}{v_x} = -\frac{C\rho At}{2m}-\frac{1}{u\cos\theta}$$

ดังนั้น เมื่อทำการจัดรูปสมการจะได้ความเร็วตามแนวแกน X คือ

$$v_x = \frac{2m(u\cos\theta)}{C\rho At(u\cos\theta)+2m} \tag{3.23}$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน X (3.23)ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน X คือ 30^o, 45^o และ 60^o

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

$$v_x = \frac{2m(u\cos30^o)}{C\rho At(u\cos30^o)+2m}$$

$$= \frac{2m(\frac{\sqrt{3}}{2}u)}{C\rho At(\frac{\sqrt{3}}{2}u)+2m}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}mu}{\sqrt{3}uC\rho At+4m} \tag{3.24}$$

สามารถหาระยะทางที่ใช้ในการเคลื่อนที่ตามแนวแกน X ได้ดังนี้

เนื่องจาก $$v_x = \frac{ds_x}{dt}$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \frac{2\sqrt{3}mu}{\sqrt{3}uC\rho At+4m}$$

$$\int_0^{s_x} ds_x = \int_0^t \frac{2\sqrt{3}mu}{\sqrt{3}uC\rho At+4m}d\tau$$

$$s_x = 2\sqrt{3}mu\int_0^t \frac{1}{\sqrt{3}uC\rho At+4m}d\tau$$

ให้ $U = \sqrt{3}uC\rho At+4m$ จะได้ $dU = \sqrt{3}uC\rho Adt$

$$s_x = \frac{2\sqrt{3}mu}{\sqrt{3}uC\rho A}\int_0^t \frac{1}{U}dU$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_x = \frac{2m}{C\rho A}\left(\ln\left|\sqrt{3}uC\rho At+4m\right|\right) \tag{3.25}$$

กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

$$v_x = \frac{2m(u\cos 45^o)}{C\rho At(u\cos 45^o)+2m}$$

$$= \frac{2m(\frac{\sqrt{2}}{2}u)}{C\rho At(\frac{\sqrt{2}}{2}u)+2m}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}mu}{\sqrt{2}uC\rho At+4m} \tag{3.26}$$

สามารถหาระยะทางที่ใช้ในการเคลื่อนที่ตามแนวแกน X ได้ดังนี้

เนื่องจาก $$v_x = \frac{ds_x}{dt}$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \frac{2\sqrt{2}mu}{\sqrt{2}uC\rho At + 4m}$$

$$\int_0^{s_x} ds_x = \int_0^t \frac{2\sqrt{2}mu}{\sqrt{2}uC\rho At + 4m} d\tau$$

$$s_x = 2\sqrt{2}mu \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2}uC\rho At + 4m} d\tau$$

ให้ $U = \sqrt{2}uC\rho At + 4m$ จะได้ $dU = \sqrt{2}uC\rho A d\tau$

$$s_x = \frac{2\sqrt{2}mu}{\sqrt{2}uC\rho A} \int_0^t \frac{1}{U} dU$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_x = \frac{2m}{C\rho A}\left(\ln\left|\sqrt{2}uC\rho At + 4m\right|\right) \tag{3.27}$$

กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

$$v_x = \frac{2m(u\cos 60^o)}{C\rho At(u\cos 60^o) + 2m}$$

$$= \frac{2m(\frac{1}{2}u)}{C\rho At(\frac{1}{2}u) + 2m}$$

$$= \frac{2mu}{uC\rho At + 4m} \tag{3.28}$$

สามารถหาระยะทางที่ใช้ในการเคลื่อนที่ตามแนวแกน X ได้ดังนี้

เนื่องจาก $$v_x = \frac{ds_x}{dt}$$

$$\frac{ds_x}{dt} = \frac{2mu}{uC\rho At + 4m}$$

$$\int_0^{s_x} ds_x = \int_0^t \frac{2mu}{uC\rho At + 4m} d\tau$$

$$s_x = 2mu\int_0^t \frac{1}{uC\rho At + 4m} d\tau$$

ให้ $U = uC\rho At + 4m$ จะได้ $dU = uC\rho A d\tau$

$$s_x = \frac{2mu}{uC\rho A}\int_0^t \frac{1}{U} dU$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o คือ

$$s_x = \frac{2m}{C\rho A}\left(\ln\left|uC\rho At + 4m\right|\right) \tag{3.29}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (แนวแกน Y)

การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (แนวแกน Y) ในกรณีนี้จะมีแรงที่กระทำต่อวัตถุ คือ แรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกและแรงต้านอากาศกระทำต่อวัตถุ นั่นคือ

$$\vec{F} = \vec{F}_r - m\vec{g}$$

โดยตามแนวแกน Y วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น $u_y = u\sin\theta$ และแทนสมการแรงต้าน (3.22) จะได้ว่า

$$m\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2}C\rho A v_y^{\,2} - mg$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{C\rho A v_y^{\,2}}{m} - g$$

กำหนดให้ $k = \frac{1}{2}C\rho A$ จะได้ว่า

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{-kv_y^{\,2}}{m} - g$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{-\left(kv_y^{\,2} + mg\right)}{m}$$

$$\frac{1}{kv_y^{\,2} + mg}\, dv_y = -\frac{1}{m}\, dt$$

$$\int_{u\sin\theta}^{v_y} \frac{1}{(\sqrt{k}v_y)^2+(\sqrt{mg})^2}dv_y = \int_0^t -\frac{1}{m}dt$$

ให้ $u = \sqrt{k}v_y$ จะได้ $du = d\sqrt{k}v_y$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{v_0\sin\theta}^{v_y} \frac{1}{(\sqrt{k}v_y)^2+(\sqrt{mg})^2}d\sqrt{k}v_y = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg}}\tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg}})\right)\Bigg|_{u\sin\theta}^{v_y} = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg}}\right)\right)-\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg}}\right)\right) = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{kmg}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg}}\right)\right) = -\frac{t}{m}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg}}\right) = -\frac{t\sqrt{kmg}}{m}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg}}\right) = -\frac{t\sqrt{kmg}}{m}+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg}} = \frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg}}-\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)$$

$$\sqrt{k}v_y = \sqrt{k}u\sin\theta-\sqrt{mg}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)$$

$$v_y = u\sin\theta-\sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)$$

แทน $k = \frac{1}{2}C\rho A$ จะได้ความเร็วตามแนวแกน Y คือ

$$v_y = u\sin\theta-\sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right) \tag{3.30}$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน Y (3.30)ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน Y คือ 30^o, 45^o และ 60^o

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

$$v_y = u\sin 30^o - \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right)$$

$$= \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right) \qquad (3.31)$$

เนื่องจาก $v_y = \dfrac{ds_y}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน Y ได้ ดังนี้

$$\frac{ds_y}{dt} = \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)$$

$$ds_y = \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)d\tau$$

$$\int_0^{s_y} ds_y = \frac{u}{2}\int_0^t d\tau - \sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t \tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)d\tau$$

ให้ $u = \dfrac{t\sqrt{kmg}}{m}$ จะได้ $du = \dfrac{\sqrt{kmg}}{m}d\tau$

$$s_y = \frac{ut}{2} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg}}\int_0^t \tan u du\right)$$

$$= \frac{ut}{2} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg}}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)\right|\right)\right)_0^t$$

$$= \frac{ut}{2} - \frac{m}{k}\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)\right|$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_y = \frac{ut}{2} - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.32}$$

กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

$$v_y = u\sin 45^o - \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right)$$

$$= \frac{u}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right) \tag{3.33}$$

เนื่องจาก $v_y = \dfrac{ds_y}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน Y ได้ ดังนี้

$$\frac{ds_y}{dt} = \frac{u}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)$$

$$ds_y = \frac{u}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)d\tau$$

$$\int_0^{s_y} ds_y = \frac{u}{\sqrt{2}}\int_0^t d\tau - \sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t \tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)d\tau$$

ให้ $u = \dfrac{t\sqrt{kmg}}{m}$ จะได้ $du = \dfrac{\sqrt{kmg}}{m}d\tau$

$$s_y = \frac{ut}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg}}\int_0^t \tan u\,du\right)$$

$$= \frac{ut}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg}}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)\right|\right)\right)_0^t$$

$$= \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{m}{k}\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)\right|$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_y = \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.34}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

$$v_y = u\sin 60^o - \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right)$$

$$= \sqrt{3}u - \sqrt{\frac{mg}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right) \tag{3.35}$$

เนื่องจาก $v_y = \frac{ds_y}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน Y ได้ ดังนี้

$$\frac{ds_y}{dt} = \sqrt{3}u - \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)$$

$$ds_y = \sqrt{3}u - \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)d\tau$$

$$\int_0^{s_y} ds_y = \sqrt{3}u\int_0^t d\tau - \sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t \tan\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)d\tau$$

ให้ $u = \frac{t\sqrt{kmg}}{m}$ จะได้ $du = \frac{\sqrt{kmg}}{m}d\tau$

$$s_y = \sqrt{3}ut - \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg}}\int_0^t \tan u\,du\right)$$

$$= \sqrt{3}ut - \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg}}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)\right|\right)\right)_0^t$$

$$= \sqrt{3}ut - \frac{m}{k}\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg}}{m}\right)\right|$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o คือ

$$s_y = \sqrt{3}ut - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.36}$$

3.2.2 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียง

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (2.3)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

แรงลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ คือ

$$m\left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j}\right) = F_r + m\left[(-g\sin\beta)\hat{i} + (-g\cos\beta)\hat{j}\right] \tag{3.37}$$

โดยที่

ความเร่งในแนวแกน X คือ $a_x = -g\sin\beta$ (3.38)

ความเร่งในแนวแกน Y คือ $a_y = -g\cos\beta$ (3.39)

โดย g มีทิศทางพุ่งลงเข้าสู่จุดกำเนิด

พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวระดับ (แนวแกน X)

แทนสมการ (3.21) ลงในสมการ (3.37) โดยคิดตามแนวแกน X

จะได้ว่า

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2}C\rho Av_x^{\,2} - mg\sin\beta$$

ให้ $k = \frac{1}{2}C\rho A$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x^{\,2} - mg\sin\beta$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\left(kv_x^{\,2} + mg\sin\beta\right)}{m}$$

$$\frac{1}{kv_x^{\,2}+mg\sin\beta}dv_x = -\frac{1}{m}dt$$

$$\int_{u\cos\theta}^{v_x}\frac{1}{\left(\left(\sqrt{k}v_x\right)^2+\left(mg\sin\beta\right)^2\right)}dv_x = \int_0^t -\frac{1}{m}dt$$

ให้ $u = \sqrt{k}v_x$ จะได้ $du = d\sqrt{k}v_x$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{u\cos\theta}^{v_x}\frac{1}{\left(\left(\sqrt{k}v_x\right)^2+\left(\sqrt{mg\sin\beta}\right)^2\right)}dv_x = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg\sin\beta}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_x}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)\right)\Bigg|_{u\cos\theta}^{v_x} = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg\sin\beta}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_x}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)\right)-\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg\sin\beta}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\cos\theta}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)\right) = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{kmg\sin\beta}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_x}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\cos\theta}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)\right) = -\frac{t}{m}$$

$$\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_x}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\cos\theta}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)\right) = -\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}v_x}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right) = -\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}u\cos\theta}{\sqrt{mg\sin\beta}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{k}v_x}{\sqrt{mg\sin\beta}} = \frac{\sqrt{k}u\cos\theta}{\sqrt{mg\sin\beta}}-\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$$

$$v_x = u\cos\theta-\frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุตามแนวแกน X คือ

$$v_x = u\cos\theta-\sqrt{\frac{mg\sin\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m} \qquad (3.40)$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน X (3.40)ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นเอียงเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน Y คือ 30^o , 45^o และ 60^o โดยที่มุมของพื้นเอียง β จะมีค่าคงที่ และ $\theta < 90^o - \beta$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

$$v_x = u\cos 30^\circ - \sqrt{\frac{mg\sin\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}u - \sqrt{\frac{mg\sin\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m} \quad (3.41)$$

เนื่องจาก $v_x = \dfrac{ds_x}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน X ได้ดังนี้

$$\frac{ds_x}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$$

$$ds_x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{s_x} ds_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^t d\tau - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\int_0^t \tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}d\tau$$

ให้ $u = \dfrac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$ จะได้ $du = \dfrac{\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}d\tau$

นั่นคือ

$$s_x = \frac{\sqrt{3}}{2}ut - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg\sin\beta}}\int_0^t \tan u\, du\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}ut - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right)_0^t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}ut - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right| - \ln|\sec(0)|\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}ut - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_x = \frac{\sqrt{3}}{2}ut - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.42}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

$$v_x = u\cos 45^\circ - \sqrt{\frac{mg\sin\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}u - \sqrt{\frac{mg\sin\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m} \tag{3.43}$$

เนื่องจาก $v_x = \frac{ds_x}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน X ได้ดังนี้

$$\frac{ds_x}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$$

$$ds_x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{s_x} ds_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^t d\tau - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\int_0^t \tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}d\tau$$

ให้ $u = \frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$ จะได้ $du = \frac{\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}d\tau$

นั่นคือ

$$s_x = \frac{\sqrt{2}}{2}ut - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg\sin\beta}}\int_0^t \tan u\,du\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}ut - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right)_0^t$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}ut - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right| - \ln\left|\sec(0)\right|\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}ut - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_x = \frac{\sqrt{2}}{2}ut - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.44}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

$$v_x = u\cos 60^\circ - \sqrt{\frac{mg\sin\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m}$$

$$= \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{mg\sin\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m} \tag{3.45}$$

เนื่องจาก $v_x = \frac{ds_x}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน X ได้ดังนี้

$$\frac{ds_x}{dt} = \frac{u}{2} - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$$

$$ds_x = \left(\frac{u}{2} - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{s_x} ds_x = \frac{u}{2}\int_0^t d\tau - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\int_0^t \tan\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}d\tau$$

ให้ $u = \frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}$ จะได้ $du = \frac{\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}d\tau$

จะได้ว่า

$$s_x = \frac{ut}{2} - \frac{\sqrt{mg\sin\beta}}{\sqrt{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg\sin\beta}}\int_0^t \tan u\,du\right)$$

$$= \frac{ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right)_0^t$$

$$= \frac{ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right| - \ln\left|\sec(0)\right|\right)$$

$$= \frac{ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน X เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o คือ

$$s_x = \frac{ut}{2} - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\sin\beta}}{m}\right)\right|\right) \quad (3.46)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่ง (แนวแกน Y)

แทนสมการ (3.22) ลงในสมการ (3.37) โดยคิดตามแนวแกน Y

จะได้ว่า

$$m\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2}C\rho A v_y^2 - mg\cos\beta$$

ให้ $k = \frac{1}{2}C\rho A$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y^2 - mg\cos\beta$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\left(kv_y^2 + mg\cos\beta\right)}{m}$$

$$\frac{1}{kv_y^2 + mg\cos\beta}dv_y = -\frac{1}{m}dt$$

$$\int_{u\sin\theta}^{v_y} \frac{1}{\left(\left(\sqrt{k}v_y\right)^2 + (mg\cos\beta)^2\right)}dv_y = \int_0^t -\frac{1}{m}dt$$

ให้ $u = \sqrt{k}v_y$ จะได้ $du = d\sqrt{k}v_y$

นั่นคือ

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{u\sin\theta}^{v_y} \frac{1}{\left(\left(\sqrt{k}v_y\right)^2 + \left(\sqrt{mg\cos\beta}\right)^2\right)}dv_y = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg\cos\beta}}\tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg\cos\beta}})\right)\Bigg|_{u\sin\theta}^{v_y} = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg\cos\beta}}\tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg\cos\beta}})\right) - \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{mg\cos\beta}}\tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg\cos\beta}})\right) = -\frac{t}{m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{kmg\cos\beta}}\left(\tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg\cos\beta}}) - \tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg\cos\beta}})\right) = -\frac{t}{m}$$

$$\left(\tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg\cos\beta}}) - \tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg\cos\beta}})\right) = -\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$$

$$\tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg\cos\beta}}) = -\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m} + \tan^{-1}(\frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg\cos\beta}})$$

$$\frac{\sqrt{k}v_y}{\sqrt{mg\cos\beta}} = \frac{\sqrt{k}u\sin\theta}{\sqrt{mg\cos\beta}} - \tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$$

$$v_y = u\sin\theta - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุตามแนวแกน Y คือ

$$v_y = u\sin\theta - \sqrt{\frac{mg\cos\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m} \tag{3.47}$$

จากสมการ ความเร็วตามแนวแกน Y (3.47)ในการพิจารณาระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุบนพื้นเอียงเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุมกับแนวแกน Y คือ 30^o , 45^o และ 60^o โดยที่มุมของพื้นเอียง β จะมีค่าคงที่ และ $\theta < 90^o - \beta$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o

$$v_y = u\sin 30^o - \sqrt{\frac{mg\cos\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m}$$

$$= \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{mg\cos\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m} \tag{3.48}$$

เนื่องจาก $v_y = \dfrac{ds_y}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน Y ได้ดังนี้

$$\frac{ds_y}{dt} = \frac{u}{2} - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$$

$$ds_y = \left(\frac{u}{2} - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{s_y} ds_y = \frac{u}{2}\int_0^t d\tau - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\int_0^t \tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}d\tau$$

ให้ $u = \dfrac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$ จะได้ $du = \dfrac{\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}d\tau$

$$s_y = \frac{ut}{2} - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg\cos\beta}}\int_0^t \tan u\, du\right)$$

$$= \frac{ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right)_0^t$$

$$= \frac{ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right| - \ln\left|\sec(0)\right|\right)$$

$$= \frac{ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 30^o คือ

$$s_y = \frac{ut}{2} - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.49}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o

$$v_y = u\sin 45^o - \sqrt{\frac{mg\cos\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m}$$

$$= \frac{u}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{mg\cos\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}}\tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m} \tag{3.50}$$

เนื่องจาก $\quad v_y = \frac{ds_y}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน Y ได้ดังนี้

$$\frac{ds_y}{dt} = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}} \tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$$

$$ds_y = \left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}} \tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{s_y} ds_y = \frac{u}{\sqrt{2}}\int_0^t d\tau - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\int_0^t \tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m} d\tau$$

ให้ $u = \frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$ จะได้ $du = \frac{\sqrt{kmg\cos\beta}}{m} d\tau$

$$s_y = \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg\cos\beta}}\int_0^t \tan u\, du\right)$$

$$= \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right)_0^t$$

$$= \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right| - \ln\left|\sec(0)\right|\right)$$

$$= \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45^o คือ

$$s_y = \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.51}$$

กรณีที่ วัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o

$$v_y = u\sin 60^o - \sqrt{\frac{mg\cos\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}} \tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m}$$

$$= \sqrt{3}u - \sqrt{\frac{mg\cos\beta}{\frac{1}{2}C\rho A}} \tan\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m} \tag{3.52}$$

เนื่องจาก $v_y = \dfrac{ds_y}{dt}$

สามารถหาระยะการกระจัดตามแนวแกน Y ได้ดังนี้

$$\frac{ds_y}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$$

$$ds_y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{s_y} ds_y = \frac{\sqrt{3}}{2}u\int_0^t d\tau - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\int_0^t \tan\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}d\tau$$

ให้ $u = \dfrac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}$ จะได้ $du = \dfrac{\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}d\tau$

$$s_y = \frac{\sqrt{3}ut}{2} - \frac{\sqrt{mg\cos\beta}}{\sqrt{k}}\left(\frac{m}{\sqrt{kmg\cos\beta}}\int_0^t \tan u\,du\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right)\Bigg|_0^t$$

$$= \frac{\sqrt{3}ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right| - \ln\left|\sec(0)\right|\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}ut}{2} - \frac{m}{k}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{kmg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right)$$

ดังนั้น ระยะการกระจัดตามแนวแกน Y เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 60^o คือ

$$s_y = \frac{\sqrt{3}ut}{2} - \frac{m}{\frac{1}{2}C\rho A}\left(\ln\left|\sec\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{2}C\rho Amg\cos\beta}}{m}\right)\right|\right) \tag{3.53}$$

3.3 การสร้างโปรแกรมเพื่อวิเคราะห์ความแตกต่างของการคิดและไม่คิดแรงต้านอากาศในการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์

โดยโปรแกรมที่เราใช้จะแบ่งเป็นโปรแกรมเพื่อใช้นำเสนอความรู้ที่เราพิจารณาต่อยอด และโปรแกรมสำหรับคำนวณโดยใช้สูตร

3.3.1 Visual Basic Program [9]

Visual Basic เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ ที่มีประสิทธิภาพสูง และออกแบบมาเพื่อทำงานบนระบบปฏิบัติการ Windows ในที่นี้จะขอเรียก Visual Basic สั้นๆว่า VB

VB เป็นโปรแกรมสำหรับพัฒนาโปรแกรมประยุกต์ที่กำลังเป็นที่นิยมใช้อยู่ในปัจจุบัน โปรแกรม VB เป็นโปรแกรมที่ได้เปลี่ยนรูปแบบการเขียนโปรแกรมใหม่ โดยมีชุดคำสั่งมาสนับสนุนการทำงาน มีเครื่องมือต่าง ๆ ที่เรียกกันว่า คอนโทรล(Controls) ไว้สำหรับช่วยในการออกแบบโปรแกรม โดยเน้นการออกแบบหน้าจอแบบกราฟิก (GUI) ทำให้การจัดรูปแบบหน้าจอง่าย และในการเขียนโปรแกรมนั้นจะเขียนแบบ Event - Driven Programming คือ โปรแกรมจะทำงานก็ต่อเมื่อเหตุการณ์ (Event) เกิดขึ้น ตัวอย่างของเหตุการณ์ได้แก่ ผู้ใช้เลื่อนเมาส์ ผู้ใช้กดปุ่มบนคีย์บอร์ด ผู้ใช้กดปุ่มเมาส์ เป็นต้น

เครื่องมือ หรือ คอนโทรล ต่าง ๆ ที่ Visual Basic ได้เตรียมไว้ให้ ไม่ว่าจะเป็น Form Textbox Label ฯลฯ ถือว่าเป็นวัตถุ (Object) นั่นหมายความว่า ไม่ว่าจะเป็นเครื่องมือใด ๆ ใน Visual Basic จะเป็นออบเจ็กต์ทั้งสิ้น สามารถที่จะควบคุมการทำงาน แก้ไขคุณสมบัติของออบเจ็กต์นั้นได้โดยตรง ในทุกๆ ออบเจ็กต์จะมีคุณสมบัติ (properties) และเมธอด (Methods) ประจำตัว ขึ้นอยู่กับชนิดของออบเจ็กต์

วิธีการสร้างโปรแกรม CAI ด้วย Visual Basic

1) ออกแบบส่วนเชื่อมโยงผู้ใช้ (user interface design) ออกแบบจำนวนหน้าต่างโปรแกรม และการเชื่อมโยงของฟอร์มต่างๆ โดยใช้ Control จาก Toolbox มาวางลงในฟอร์ม

2) กำหนดคุณสมบัติ Control แต่ละตัว

3) เขียนโปรแกรมคุมการทำงานของ Control แต่ละตัว

4) ใส่ข้อมูลที่ต้องการนำเสนอ โดยคำนึงถึงความเข้าใจง่าย สะดวก และสวยงาม

3.3.2 MALAB [10]

MATLAB หรือ Matrix Laboratory เป็นซอฟต์แวร์ในการคำนวณและการเขียนโปรแกรม โปรแกรมหนึ่ง ที่มีความสามารถครอบคลุมตั้งแต่ การพัฒนาอัลกอริธึม การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการทำซิมูเลชั่นของระบบ การสร้างระบบควบคุม และโดยเฉพาะเรื่อง image processing และ wavelet การสร้างเมตริกซ์

MALAB เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในแวดวงของนักวิทยาศาสตร์และ วิศวกรในปัจจุบัน สามารถทำงานได้ทั้งในลักษณะของการติดต่อโดยตรง คือการเขียนคำสั่งเข้าไปทีละคำสั่ง

เพื่อให้ MATLAB ประมวลผลไปเรื่อยๆ หรือสามารถที่จะรวบรวมชุดคำสั่งนั้นเป็นโปรแกรมได้ข้อสำคัญอย่างหนึ่งก็คือข้อมูลทุกตัวจะถูกเก็บในลักษณะของแถวลำดับ โดยในแต่ละตัวแปรจะได้รับ

การแบ่งเป็นส่วนย่อยเล็กๆขึ้น ซึ่งการใช้ตัวแปรเป็นแถวลำดับ ใน MALAB ไม่จำเป็นที่จะต้องจองมิติเหมือนกับการเขียนโปรแกรมในภาษาขั้นต่ำทั่วไป ทำให้สามารถที่จะแก้ปัญหาของตัวแปรที่อยู่ในลักษณะของเมทริกซ์และเวกเตอร์ได้โดยง่าย ช่วยลดเวลาการทำงานลงได้อย่างมากเมื่อเทียบกับการเขียนโปรแกรมโดยภาษาซีหรือภาษาฟอร์แทรน

วิธีสร้างและออกแบบส่วนคำนวณด้วย MATLAB

1) ออกแบบหน้าต่าง GUI เพื่อให้ผู้ใช้สามารถใช้งานโปรแกรมได้สะดวก
2) เขียนโปรแกรมคุมการทำงานของ Control แต่ละตัว เพื่อรับค่าและเรียกใช้ส่วนคำนวณที่ได้สร้างสูตรเอาไว้มาใช้งาน
3) แสดงผลลัพธ์ในรูปของกราฟเคลื่อนไหวและค่าเชิงตัวเลข

3.3.3 GeoGebra

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตกล่าวคือเป็นโปรแกรมทางเรขาคณิตที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับการใช้สันตรงและวงเวียน มีลักษณะปฏิสัมพันธ์โดยที่ผู้ใช้สามารถเปลี่ยนแปลงรูปเรขาคณิตให้เคลื่อนไหวตามความต้องการ โดยยังคงรักษาสมบัติและความสัมพันธ์ที่ถูกกำหนดของรูปนั้นไว้เสมอ และโปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรม General Public License (GPL) คืออนุญาตให้ใช้และเผยแพร่โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย

3.4 วิเคราะห์โปรแกรม

ระบบงานของโปรแกรมวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าความแม่นยำและไว้ใช้ในด้านการศึกษา แบ่งออกเป็น 2 ส่วน

3.4.1 ระบบงานในส่วนของโปรแกรมคำนวณ

1) ส่วนนำเข้าข้อมูล
2) ส่วนวิเคราะห์และคำนวณผลลัพธ์
   - ใช้ข้อมูลที่นำเข้ามาแทนค่าในสูตรโปรแกรม
3) ส่วนแสดงผล
   - แสดงผลในแบบผลลัพธ์ที่เป็นค่าตัวเลขและแสดงภาพกราฟิกจำลองการเคลื่อนที่ตามที่ได้นำเข้าข้อมูล โดยที่ทั้งค่าตัวเลขและภาพกราฟิกจะแสดงผลในหน้าเดียวกัน
4) ขั้นตอนการดำเนินงาน
   - เลือกสิ่งที่ต้องการคำนวณรวมทั้งสภาวะของสิ่งที่ต้องการคำนวณ
   - นำเข้าค่าข้อมูลเพื่อใช้ในการคำนวณ

- โปรแกรมจะทำการคำนวณตามคำสั่ง
- แสดงผลลัพธ์และภาพการฟิก
- จบการทำงาน

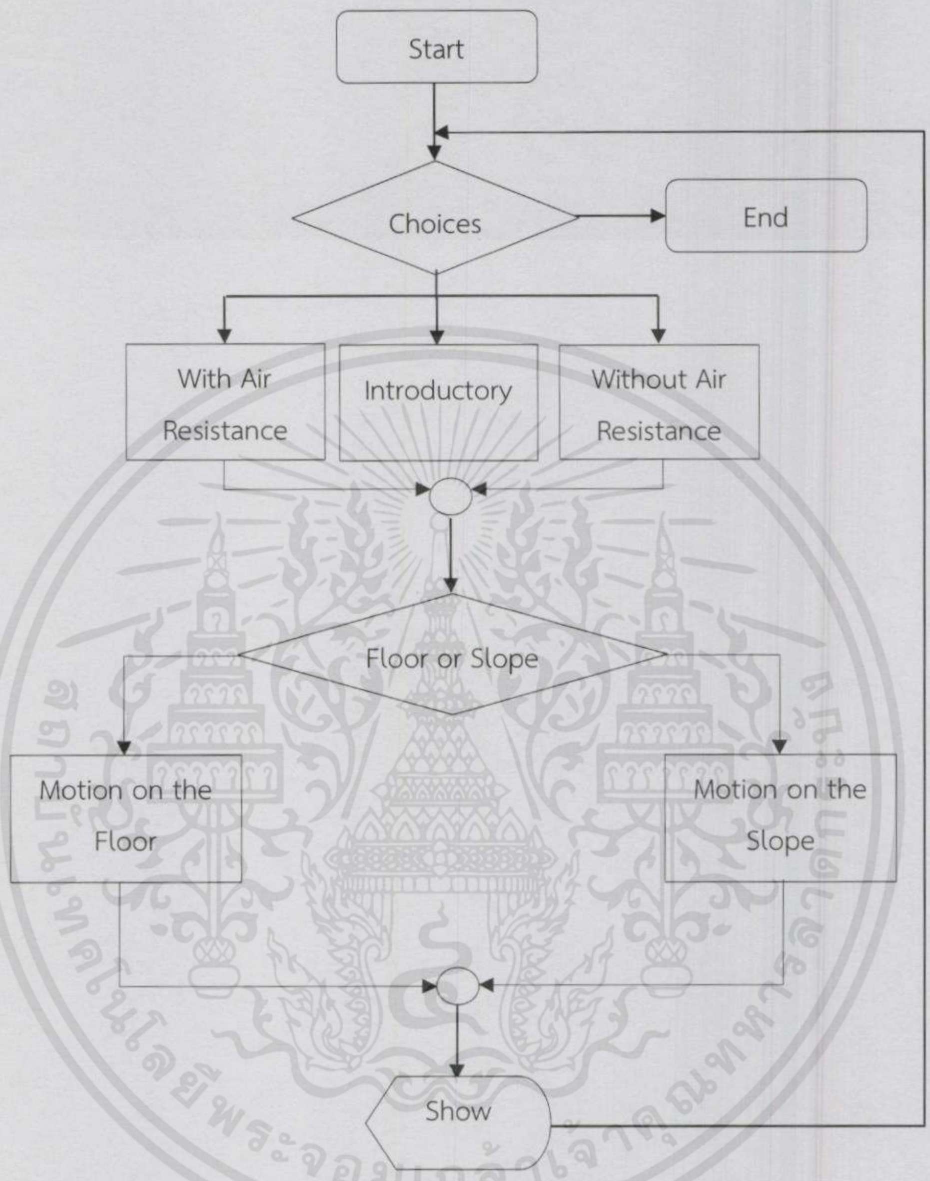
3.4.2 ระบบงานในส่วนของ CAI

ในส่วนนี้จะมีคำแนะนำการใช้โปรแกรม ข้อมูลติดต่อผู้พัฒนาโปรแกรม และความรู้สำหรับทบทวนอย่างละเอียดรวมทั้งความรู้ใหม่ที่ได้รวบรวมข้อมูลหายากที่ไม่ได้มีอยู่ในตำราทั่วไปมาใช้อธิบายอย่างครบครัน

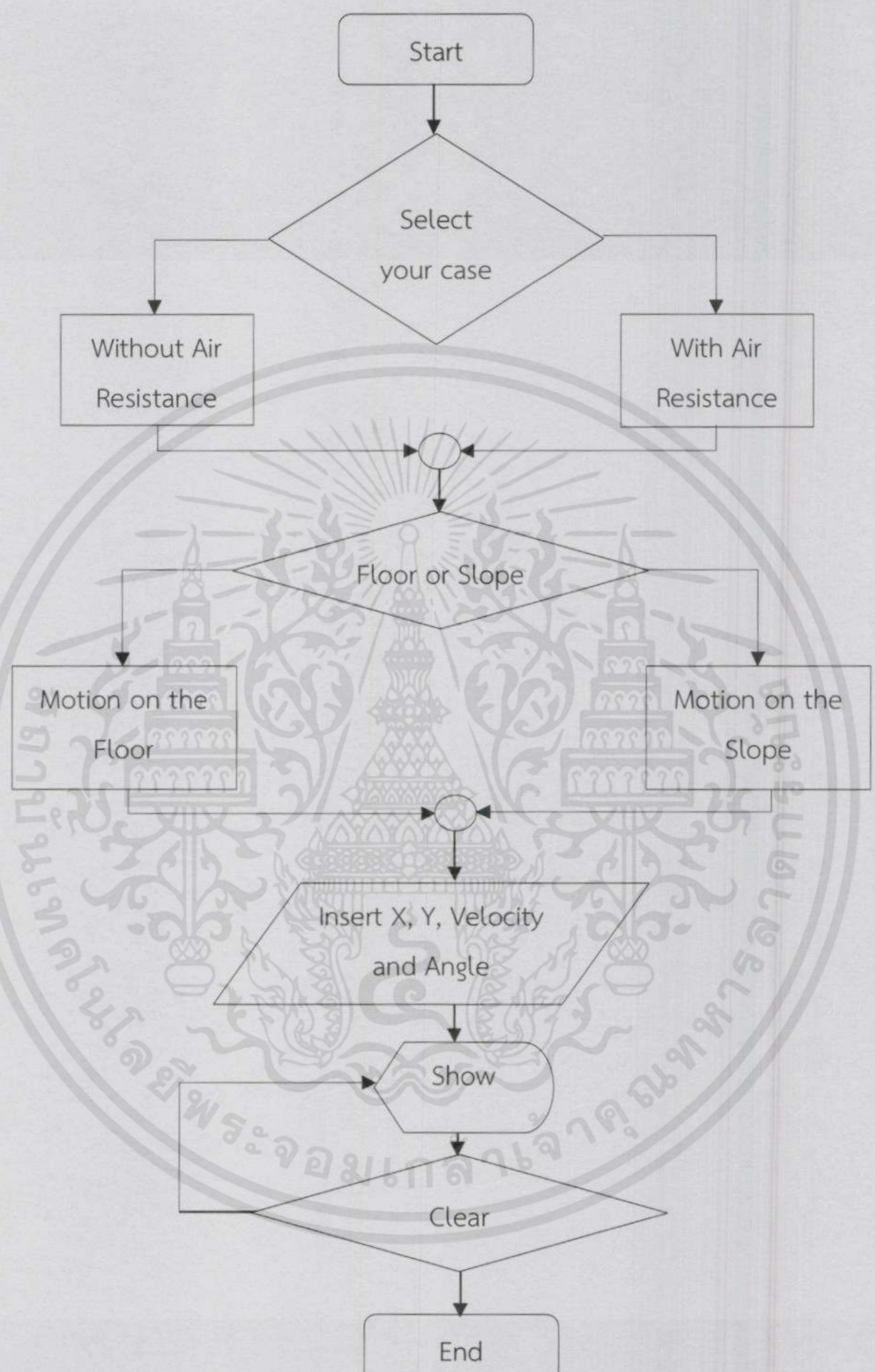
1) ขั้นตอนการดำเนินงาน
    - เลือกส่วนช่วยเหลือหรือหัวข้อทฤษฎีที่ต้องการศึกษา
    - จบการทำงาน

3.4.3 ระบบงานในส่วนของ GeoGebra

ในส่วนของ GeoGebra นั้น ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แสดงรูปภาพและแนวโน้มโดยรวมของทฤษฎีเพื่อประกอบงานวิจัยเท่านั้น ไม่มีส่วนทางด้านการสร้างโปรแกรมแต่อย่างใด



รูปที่ 3.5 ผังงานโปรแกรมให้ความรู้เกี่ยวกับการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ชนิดคิดแรงต้านและไม่คิดแรงต้านอากาศ

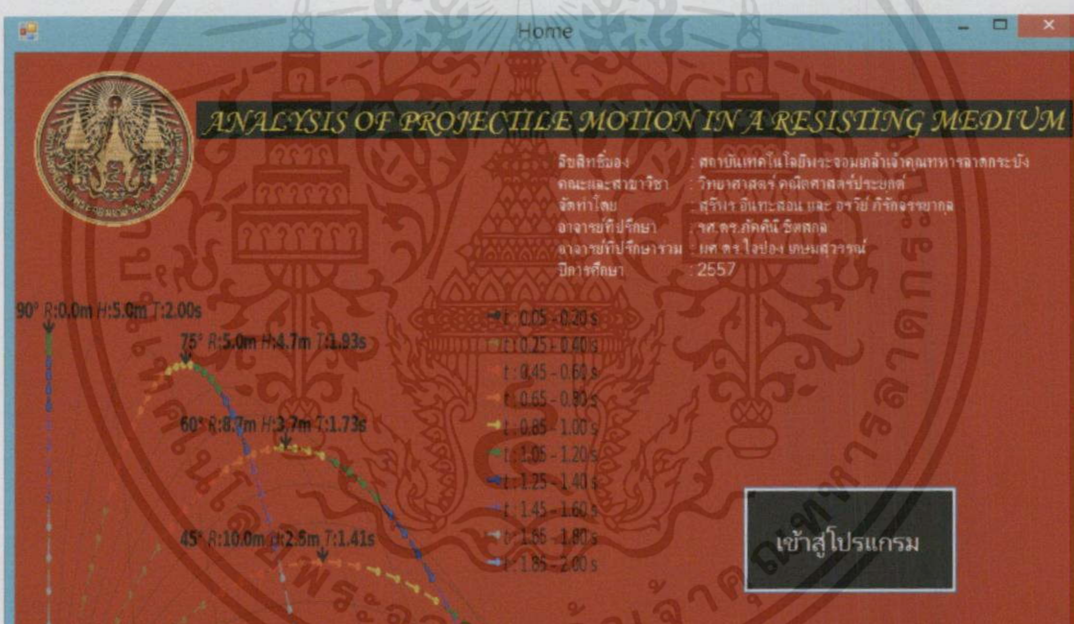


รูปที่ 3.6 ผังงานโปรแกรมคำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ชนิดคิดแรงต้านและไม่คิดแรงต้านอากาศ

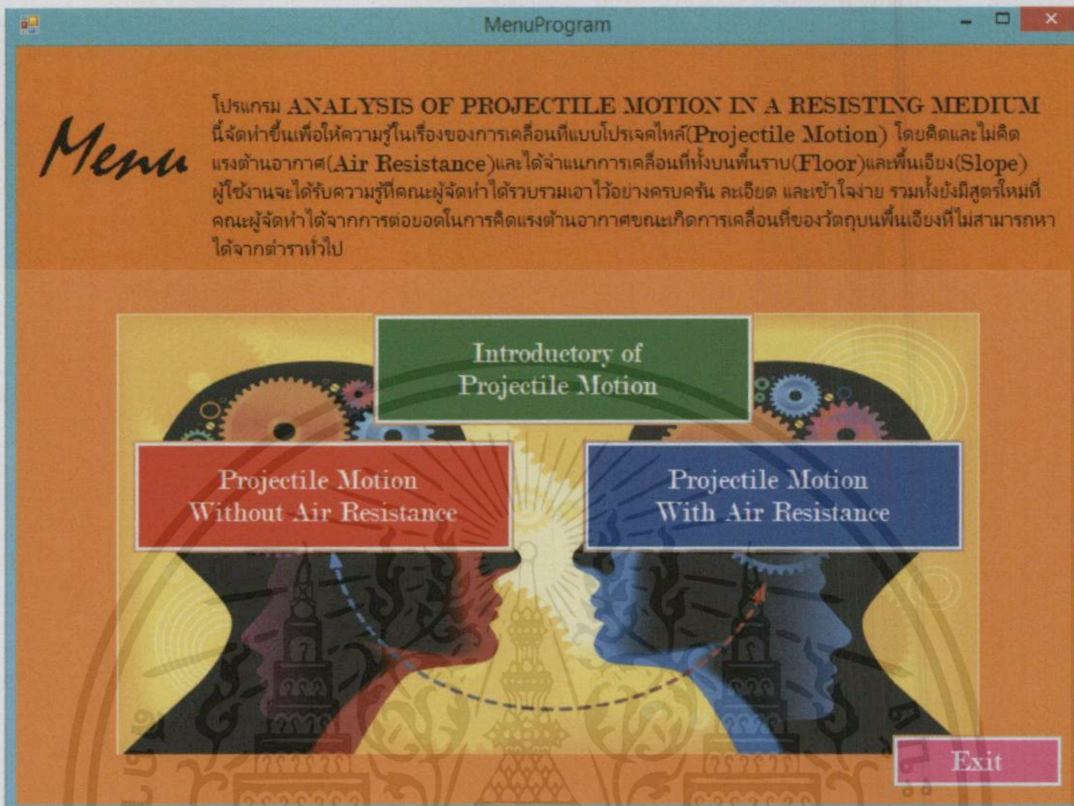
บทที่ 4
ผลการวิจัยและการอภิปราย

จากความรู้ทางทฤษฎีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในบทที่ 2 และการดำเนินงานวิจัยโดยสร้างสูตรต่อยอดจากความรู้ดั้งเดิมในบทที่ 3 นำมาสู่โปรแกรมรวบรวมความรู้ทางด้าน Projectile Motion เพื่อแจกจ่ายความรู้ในรูปแบบอิเลคทรอนิกส์ และผู้วิจัยได้สร้างโปรแกรมเพื่อคำนวณและจำลองกราฟิกของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ทั้งคิดแรงต้านอากาศและไม่คิดแรงต้านอากาศทั้งบนพื้นราบและพื้นเอียง

4.1 โปรแกรมรวบรวมความรู้ทางด้าน Projectile Motion (CAI)



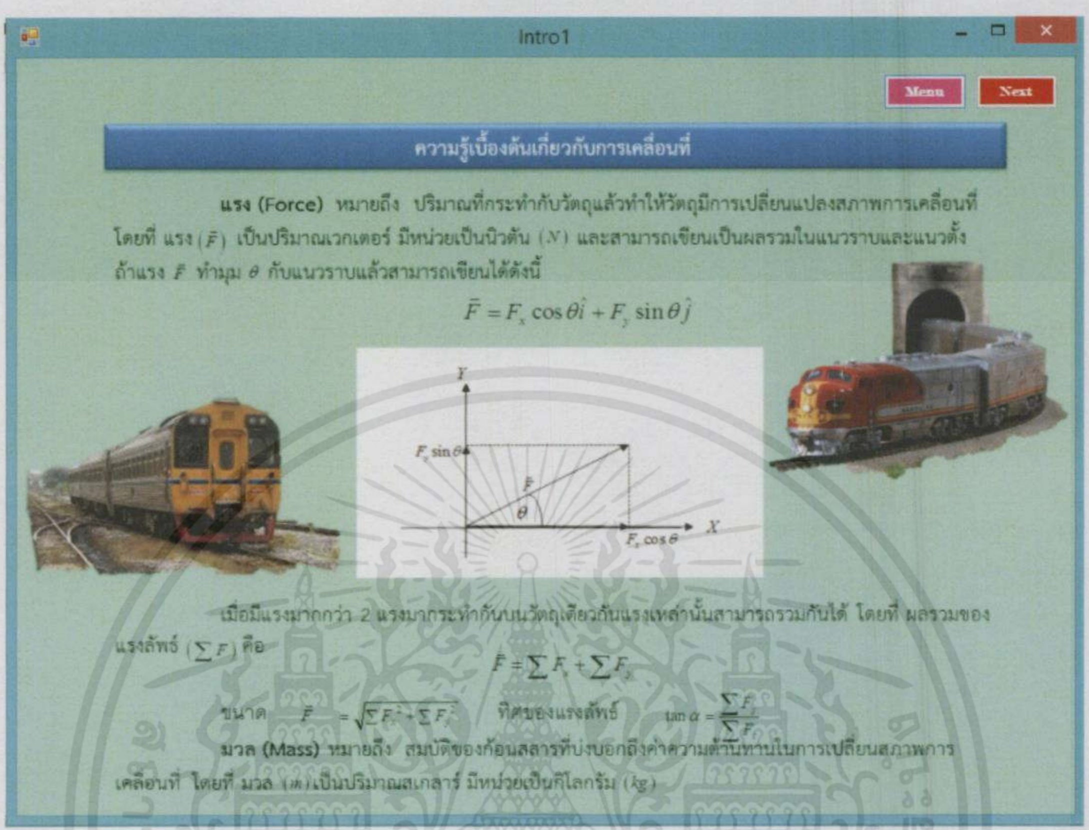
รูปที่ 4.1 หน้าแรกของโปรแกรม



รูปที่ 4.2 แสดงหน้าจอเมนูหลักของโปรแกรม

รูปที่ 4.2 แสดงหน้าจอเมนูหลักของโปรแกรมเมื่อคลิก Enter จากหน้าจอแรกของโปรมแกรม ซึ่งประกอบไปด้วย

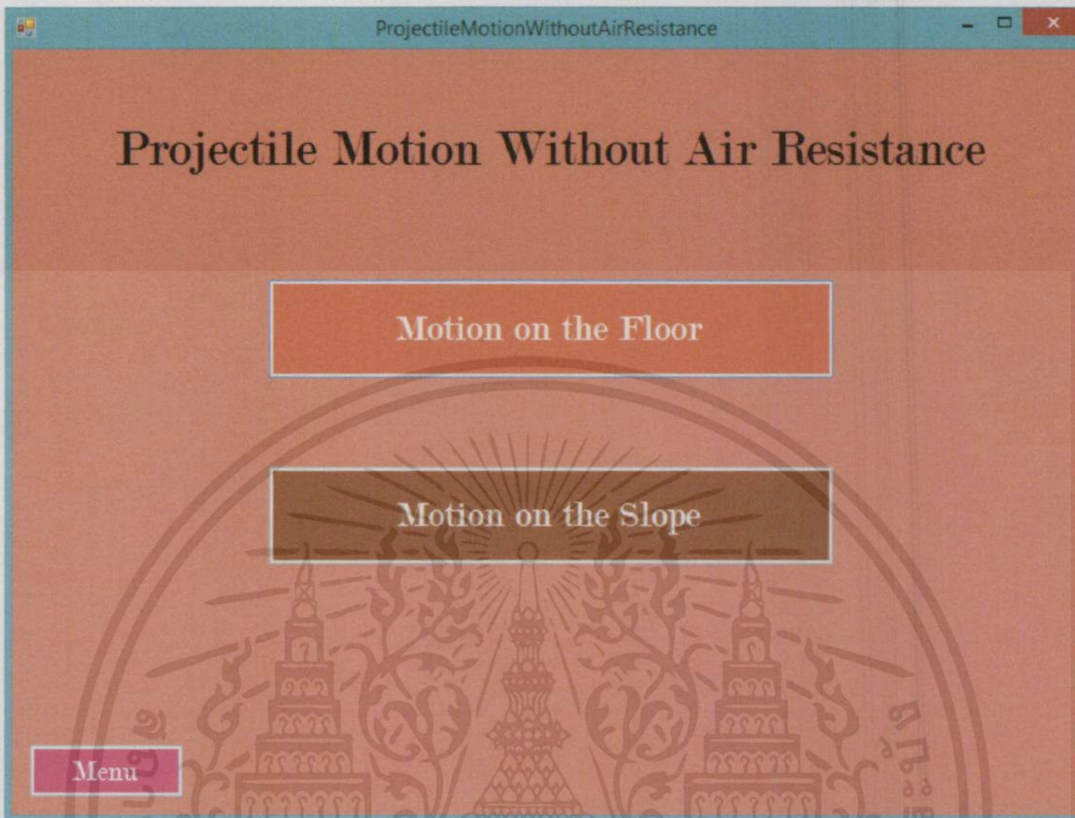
1. ปุ่ม Introductory of Projectile Motion สำหรับให้ความรู้เบื้องต้นทางด้านการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์
2. ปุ่ม Projectile Motion Without Air Resistance สำหรับให้ความรู้เรื่องการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านของอากาศ
3. ปุ่ม Projectile Motion With Air Resistance สำหรับให้ความรู้เรื่องการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านของอากาศ
4. ปุ่ม Exit คลิกเพื่อต้องการออกจากโปรมแกรม



รูปที่ 4.3 แสดงหน้าจอ Introductory of Projectile Motion

รูปที่ 4.3 แสดงหน้าจอความรู้พื้นฐาน เมื่อคลิกปุ่ม Introductory จากหน้าจอเมนูหลัก Menu ซึ่งประกอบไปด้วย

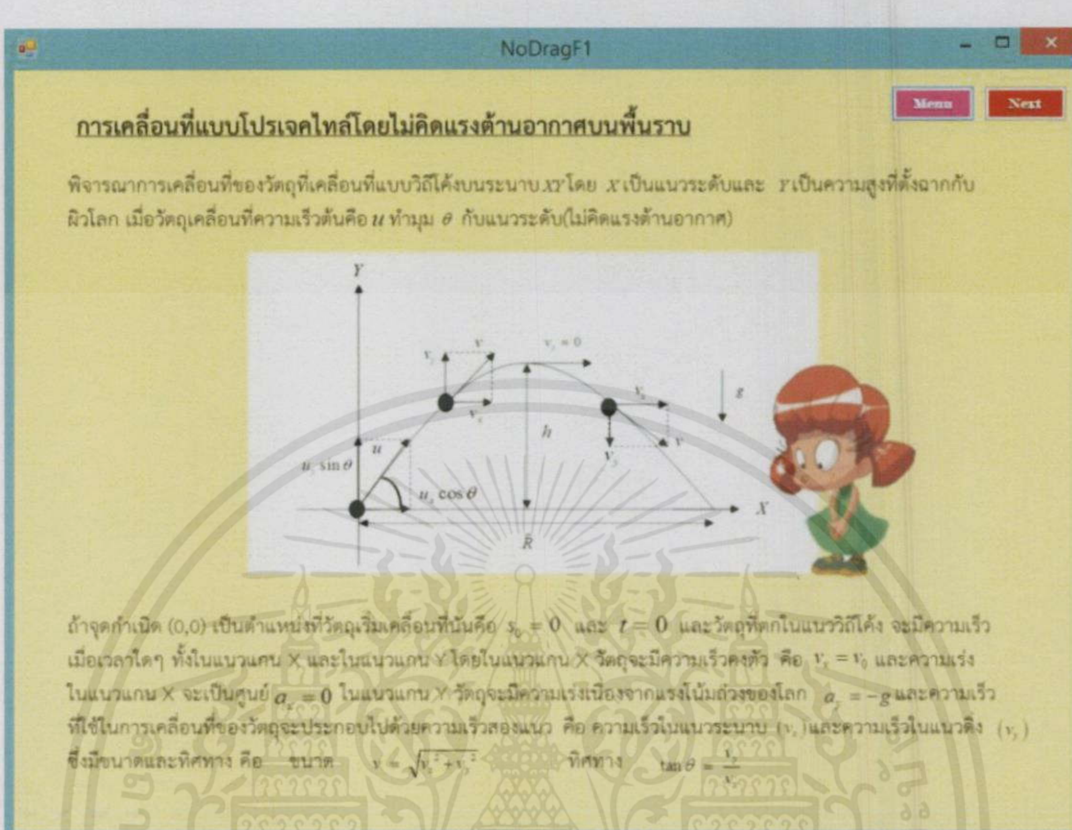
1. ปุ่ม Next จะนำเข้าสู่ความรู้พื้นฐานทางด้านโปรเจคไทล์หน้าถัดไป
2. ปุ่ม Menu จะพากลับไปยังหน้าจอ Menu



รูปที่ 4.4 แสดงหน้าจอ Projectile Motion without Air Resistance

รูปที่ 4.4 แสดงหน้าจอเมนูส่วนของ State เมื่อคลิก Projectile Motion Without Air Resistance จากหน้าจอ Menu ของโปรมแกรม ซึ่งประกอบไปด้วย

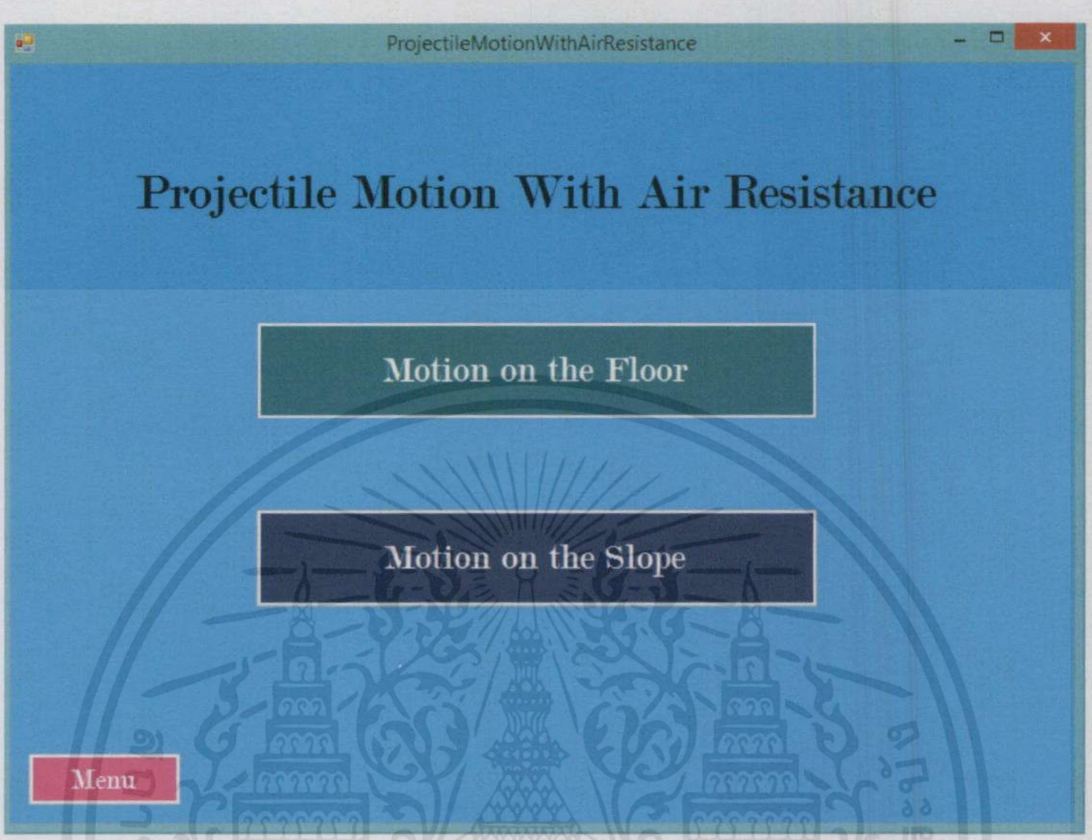
1. ปุ่ม Motion on the Floor เพื่อเข้าสู่ส่วนความรู้และสูตรคำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบ
2. ปุ่ม Motion on the Slope เพื่อเข้าสู่ส่วนความรู้และสูตรคำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียง
3. ปุ่ม Menu จะพากลับไปยังหน้าจอ Menu



รูปที่ 4.5 แสดงหน้าจอ Projectile Motion without Air Resistance on the Floor

รูปที่ 4.5 แสดงหน้าจอความรู้ เมื่อคลิกปุ่ม Motion on the Floor จากหน้าจอ Projectile Motion Without Air Resistance ซึ่งประกอบไปด้วย

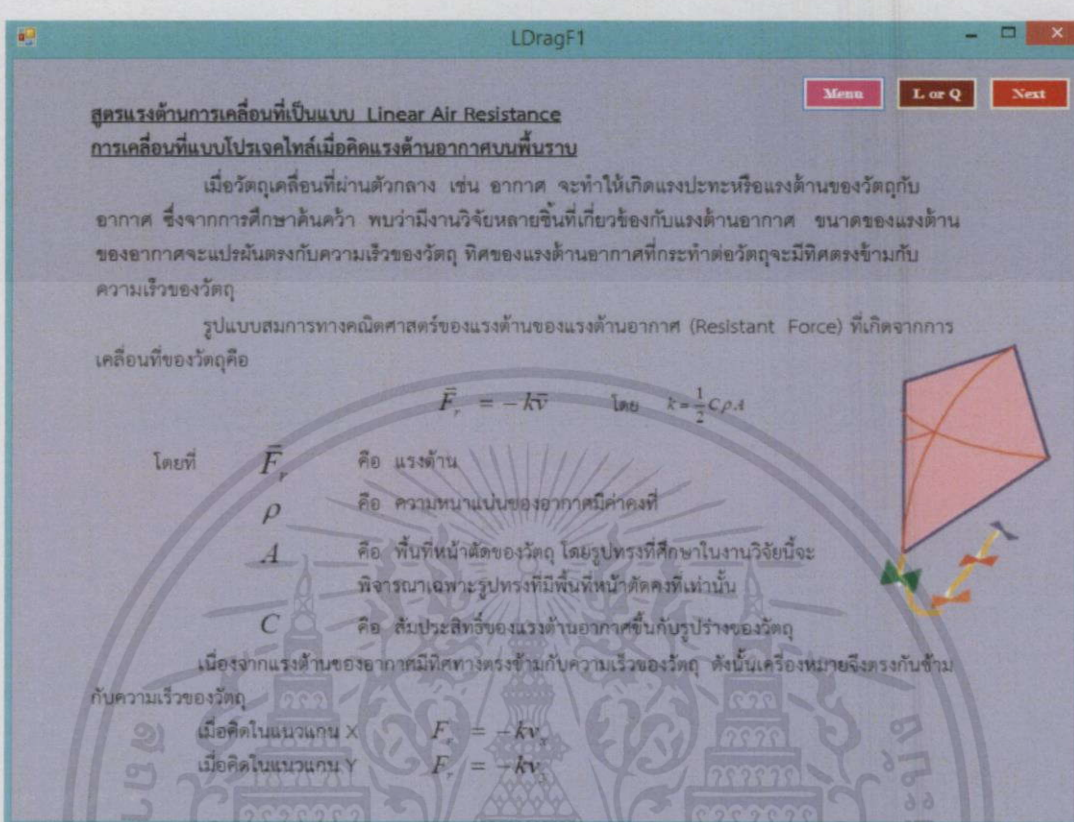
1. ปุ่ม Next จะนำเข้าสู่ความรู้หน้าถัดไป
2. ปุ่ม Back จะพากลับไปยังหน้าก่อน
3. ปุ่ม Menu จะพากลับไปยังหน้าจอ Menu



รูปที่ 4.6 แสดงหน้าจอ Projectile Motion with Air Resistance

รูปที่ 4.6 แสดงหน้าจอเมนูส่วนของ State เมื่อคลิก Projectile Motion With Air Resistance จากหน้าจอ Menu ของโปรมแกรม ซึ่งประกอบไปด้วย

1. ปุ่ม Motion on the Floor เพื่อเข้าสู่ส่วนความรู้และสูตรคำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบ
2. ปุ่ม Motion on the Slope เพื่อเข้าสู่ส่วนความรู้และสูตรคำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียง
3. ปุ่ม Menu จะพากลับไปยังหน้าจอ Menu



รูปที่ 4.7 แสดงหน้าจอ Projectile Motion with Air Resistance on the Floor

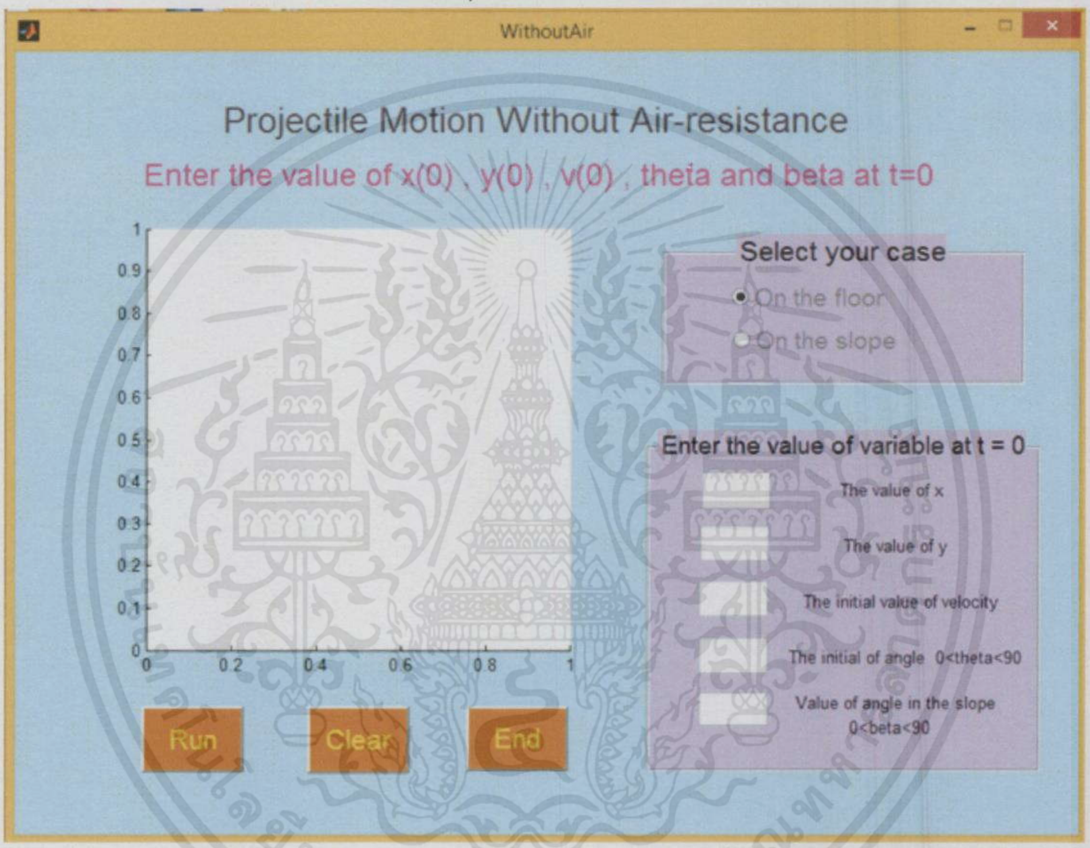
รูปที่ 4.7 แสดงหน้าจอความรู้ เมื่อคลิกปุ่ม Motion on the Floor จากหน้าจอ Projectile Motion With Air Resistance ซึ่งประกอบไปด้วย

1. ปุ่ม Next จะนำเข้าสู่ความรู้หน้าถัดไป
2. ปุ่ม L or Q จะพากลับไปยังหน้าเลือกสูตรแรงต้าน
3. ปุ่ม Menu จะพากลับไปยังหน้าจอ Menu

4.2 การทดลองและผลการทดลองในส่วนโปรแกรมคำนวณ MATLAB

สมมติให้ - m มวลของกระสุน เท่ากับ 0.046 กิโลกรัม

- C สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ เท่ากับ 1.24
- ρ ความหนาแน่นของอากาศ เท่ากับ 1.29 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร
- A พื้นที่หน้าตัดของวัตถุ เท่ากับ 0.043 ตารางเมตร

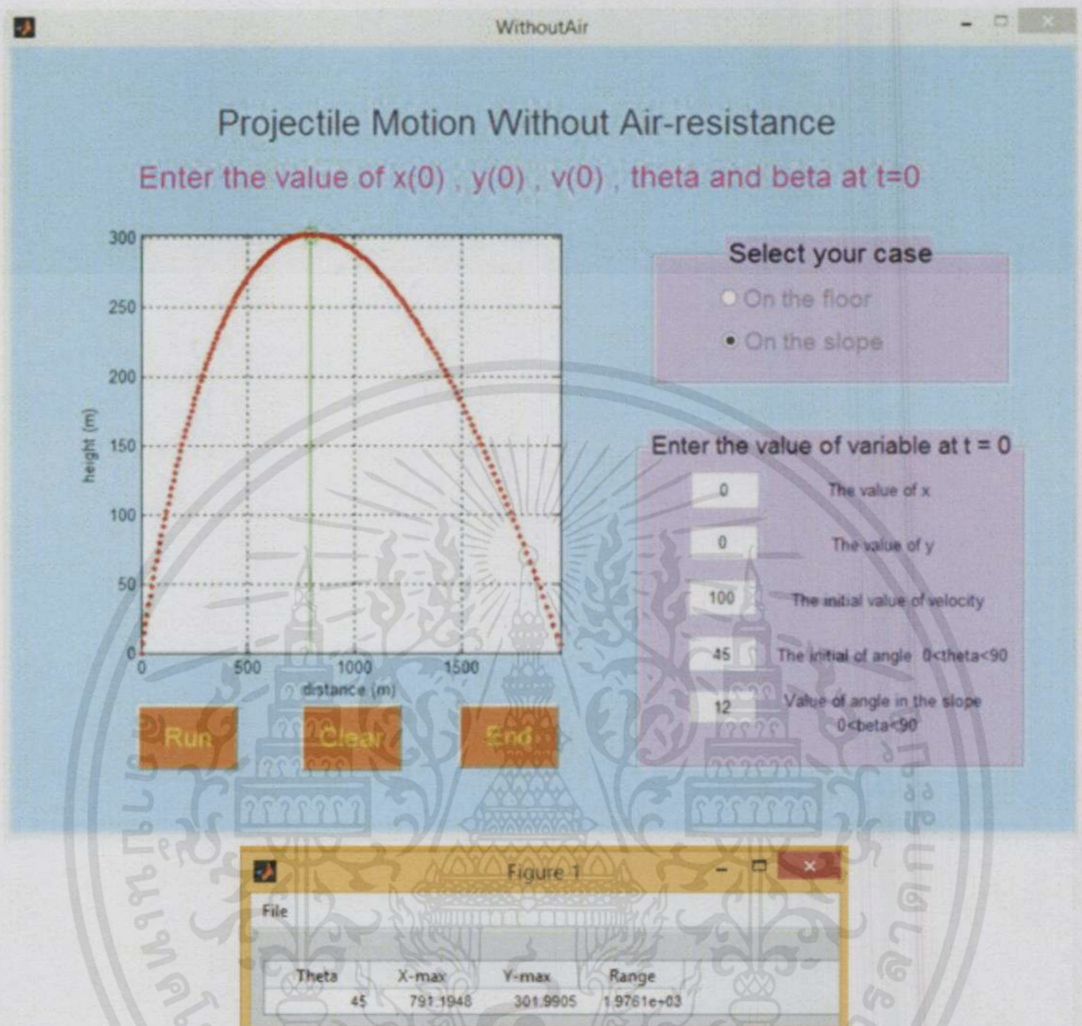


รูปที่ 4.8 หน้าจอโปรแกรมคำนวณการเคลื่อนที่แบบ Projectile Motion Without Air-resistance

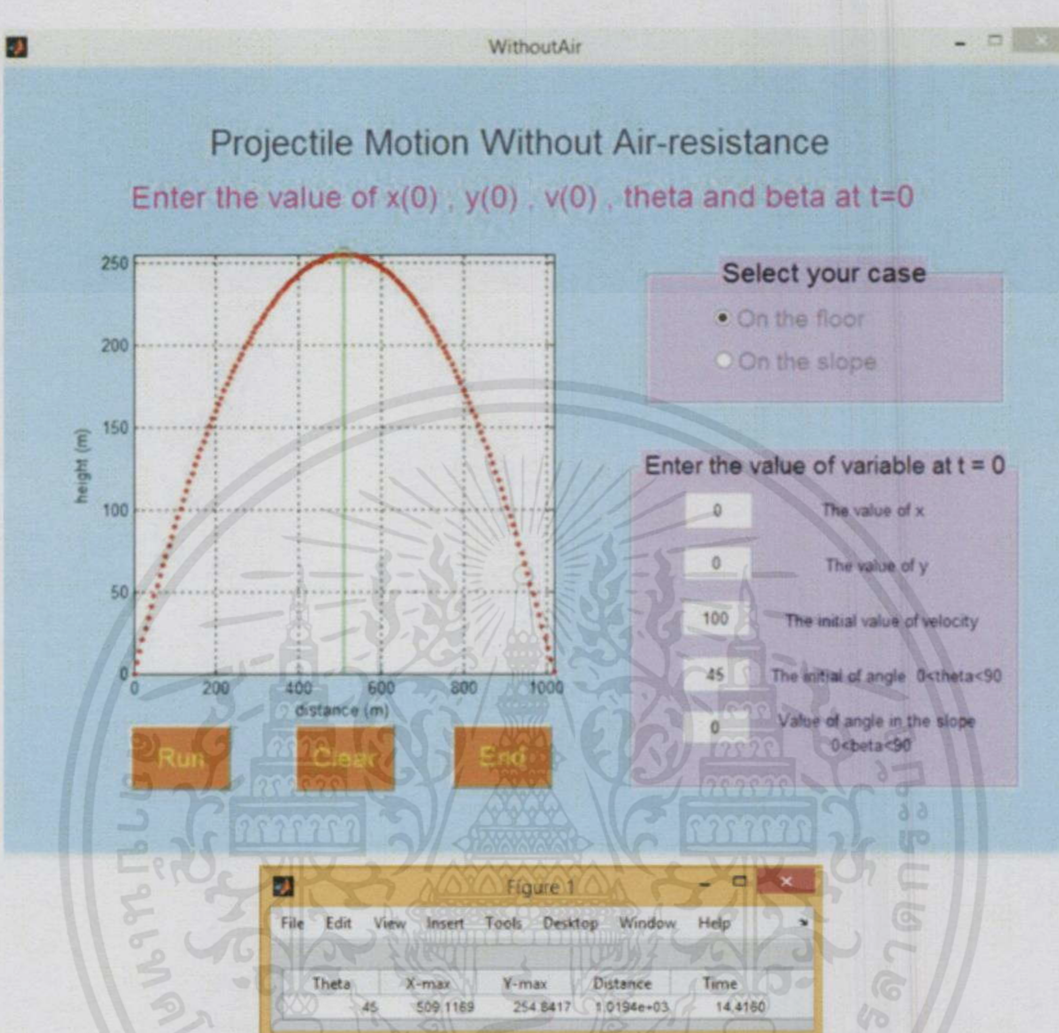
ประกอบด้วย

1. Select your case โดยแบ่งเป็น On the floor และ On the slope
2. Enter the Value of variable at t=0 ให้ป้อนค่าเพื่อใช้คำนวณผลลัพธ์และแสดงภาพกราฟิก

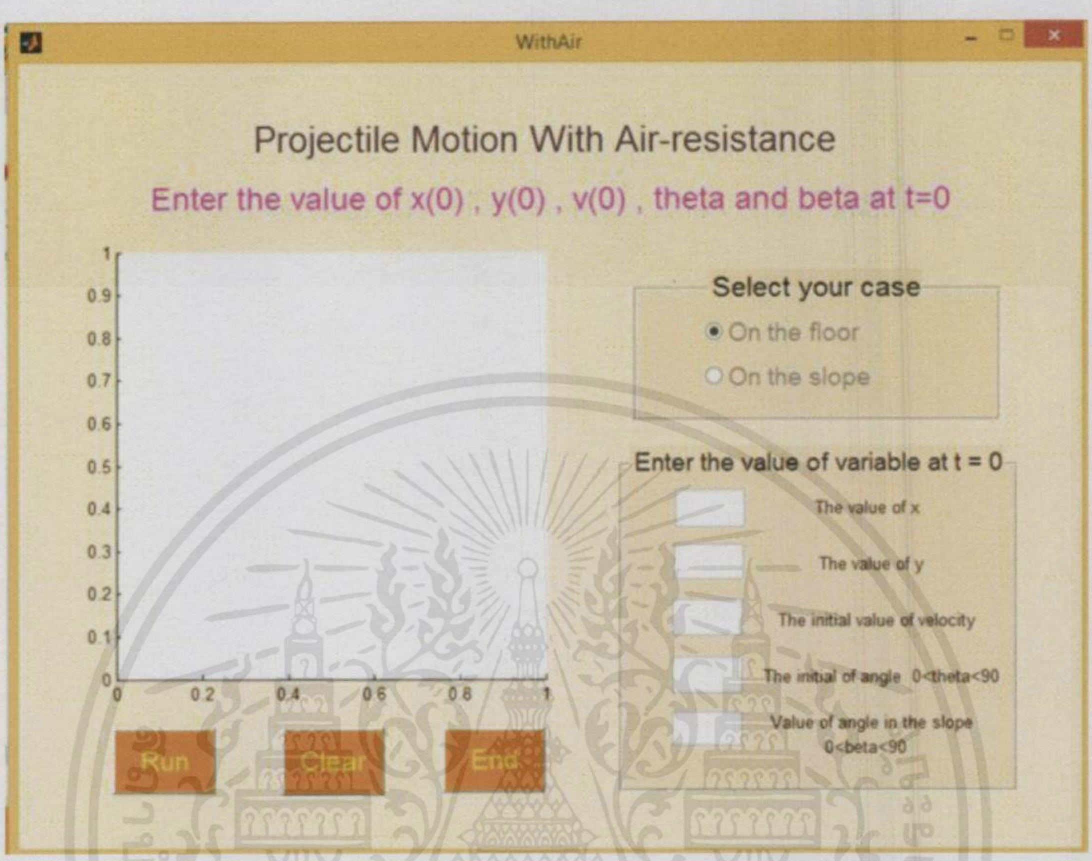
ปุ่ม Run เพื่อแสดงผล ปุ่ม Clear เพื่อลบรูปภาพเมื่อต้องการใส่ค่าใหม่ และปุ่ม End เพื่อออกจากโปรแกรม



รูปที่ 4.9 ตัวอย่างภาพกราฟิกและตารางแสดงค่า เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45 องศาบนพื้นเอียง 12 องศา โดยไม่คิดแรงต้านอากาศ



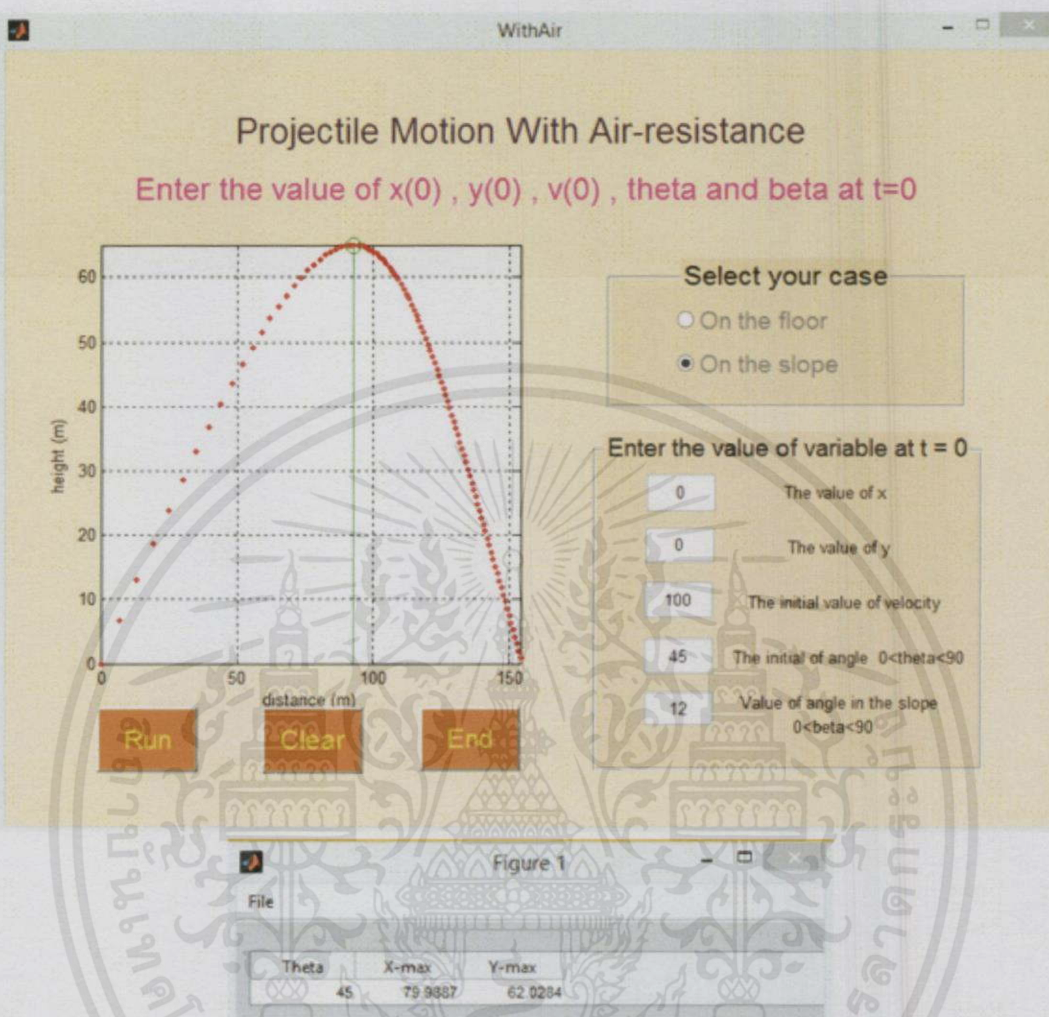
รูปที่ 4.10 ตัวอย่างภาพกราฟิกและตารางแสดงค่า เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45 องศา บนพื้นราบโดยไม่คิดแรงต้านอากาศ



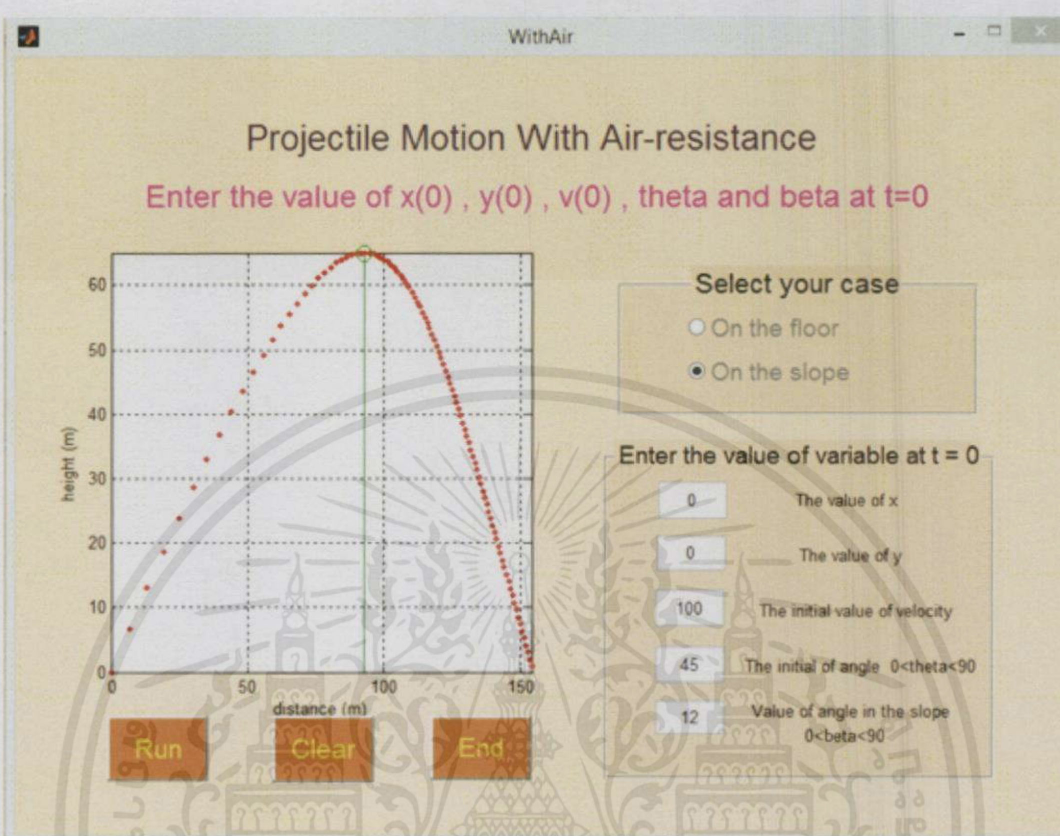
รูปที่ 4.11 หน้าจอโปรแกรมคำนวณการเคลื่อนที่แบบ Projectile Motion with Air-resistance

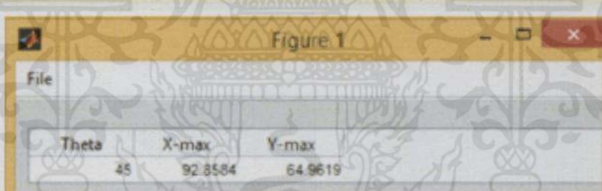
ประกอบด้วย

1. Select your case โดยแบ่งเป็น On the floor และ On the slope
2. Enter the Value of variable at t=0 ให้ป้อนค่าเพื่อใช้คำนวณผลลัพธ์และแสดงภาพกราฟิก
3. ปุ่ม Run เพื่อแสดงผล ปุ่ม Clear เพื่อลบรูปภาพเมื่อต้องการใส่ค่าใหม่ และปุ่ม End เพื่อออกจากโปรแกรม



รูปที่ 4.12 ตัวอย่างภาพกราฟิกและตารางแสดงค่า เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45 องศา บนพื้นราบโดยคิดแรงต้านอากาศ รูปภาพสามารถปรับมุมไปมาได้ตามแต่ผู้ใช้งานต้องการ

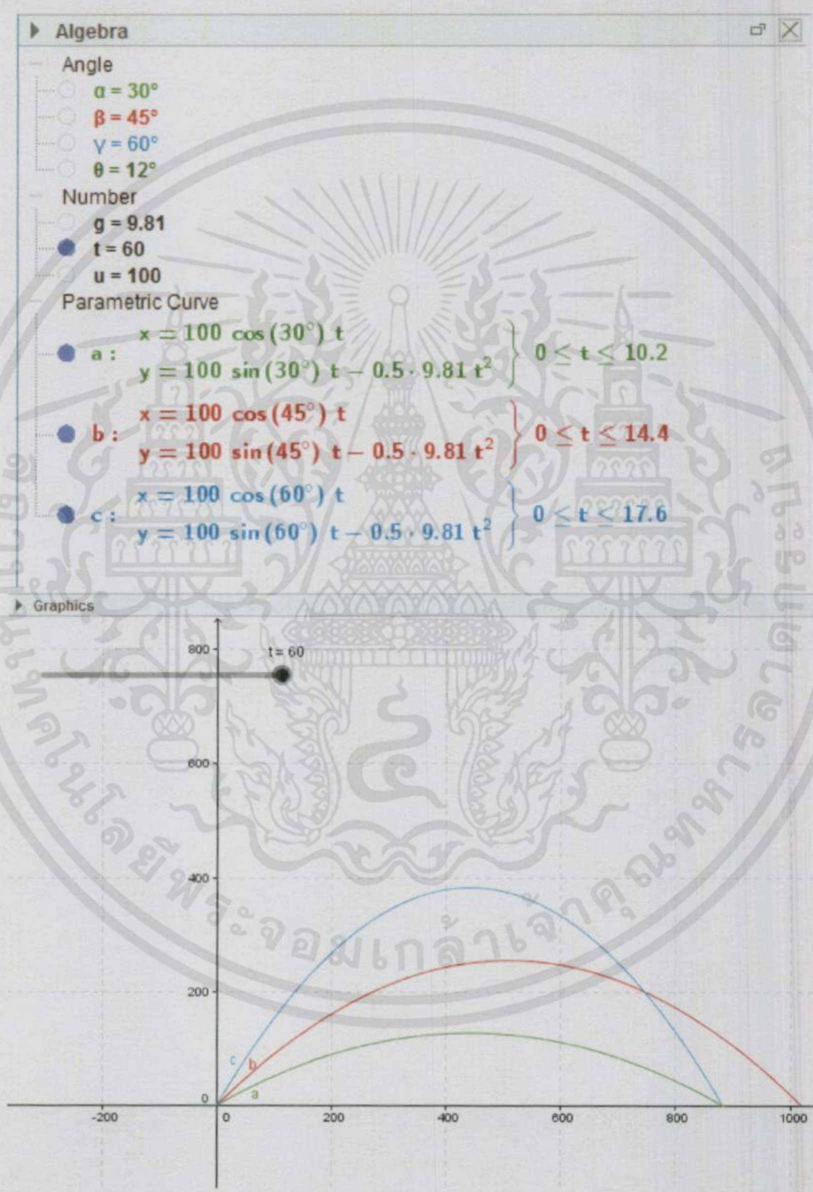




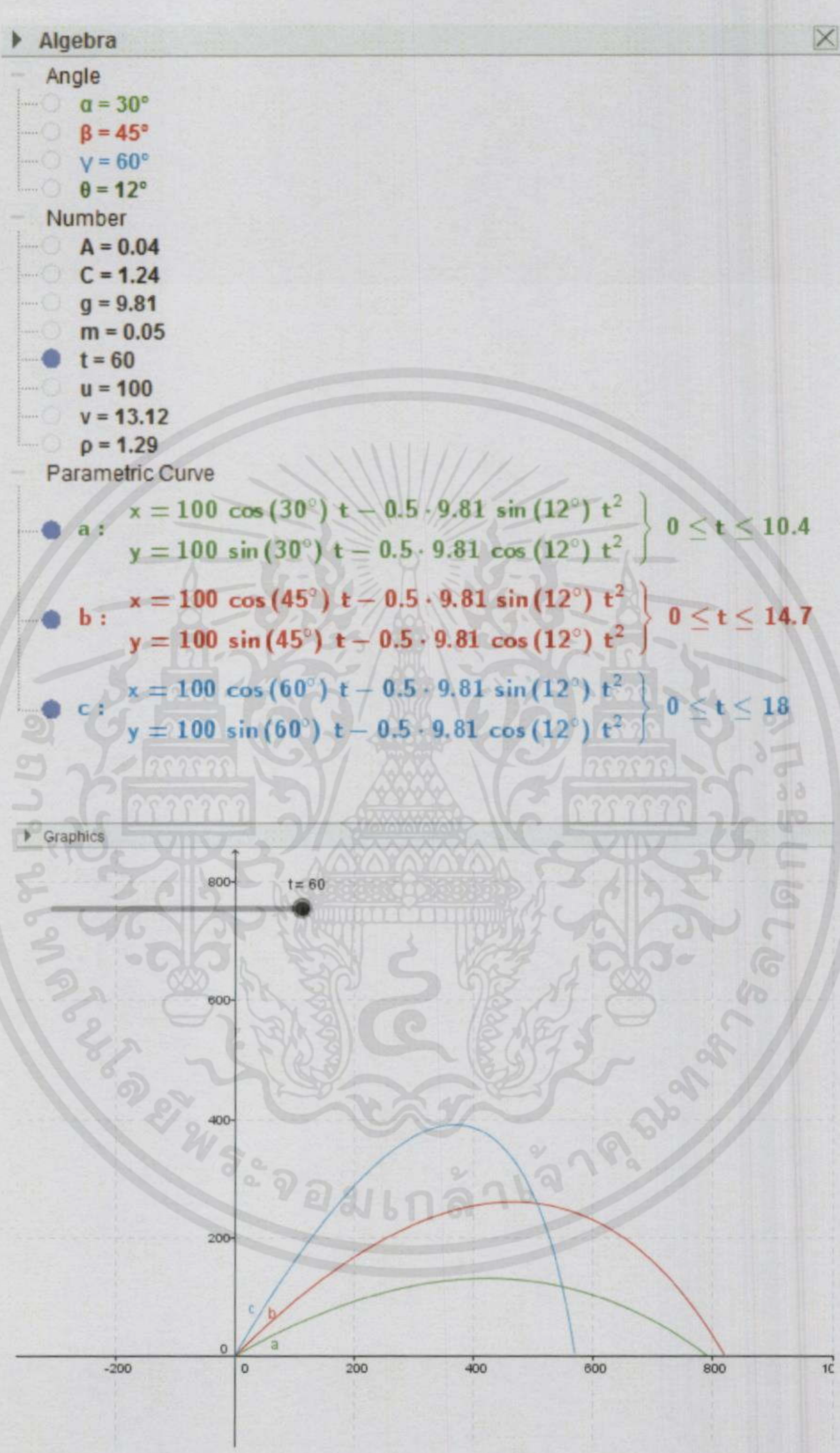
รูปที่ 4.13 ตัวอย่างภาพกราฟิกและตารางแสดงค่า เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม 45 องศา บนพื้นเอียง 12 องศา โดยคิดแรงต้านอากาศ รูปภาพสามารถปรับมุมไปมาได้ตามแต่ผู้ใช้งานต้องการ

4.3 การทดลองและผลการทดลองในส่วนโปรแกรมแสดงภาพ GeoGeBra

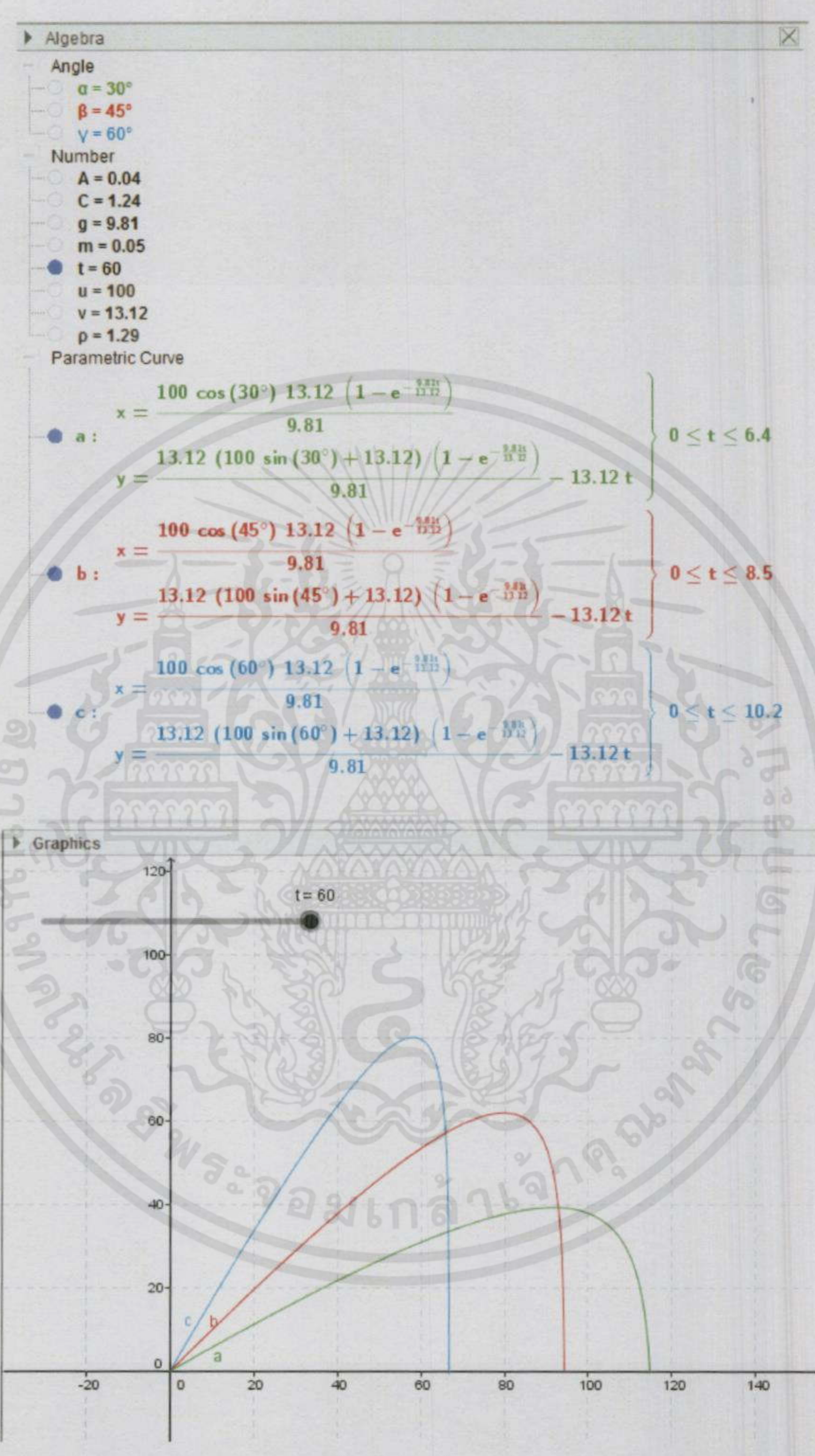
โปรแกรมส่วนนี้จัดทำขึ้นเพื่อแสดงภาพเปรียบเทียบมุมการเคลื่อนที่ของวัตถุมาตรฐาน 30, 45 และ 60 องศา ในสูตรการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดและไม่คิดแรงต้านอากาศทั้งของพื้นราบและพื้นเอียง



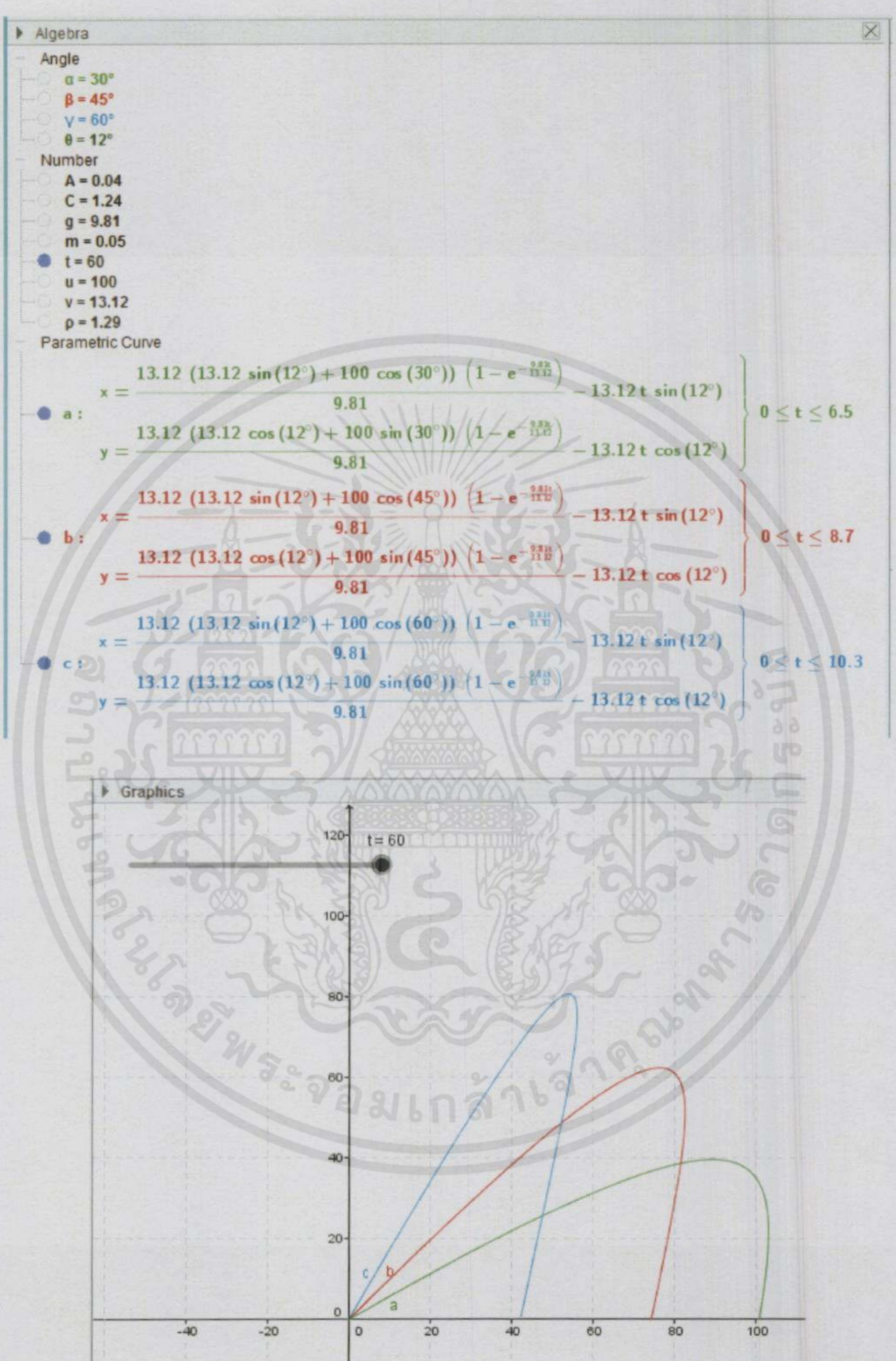
รูปที่ 4.14 ผลกราฟิกจากสมการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบ



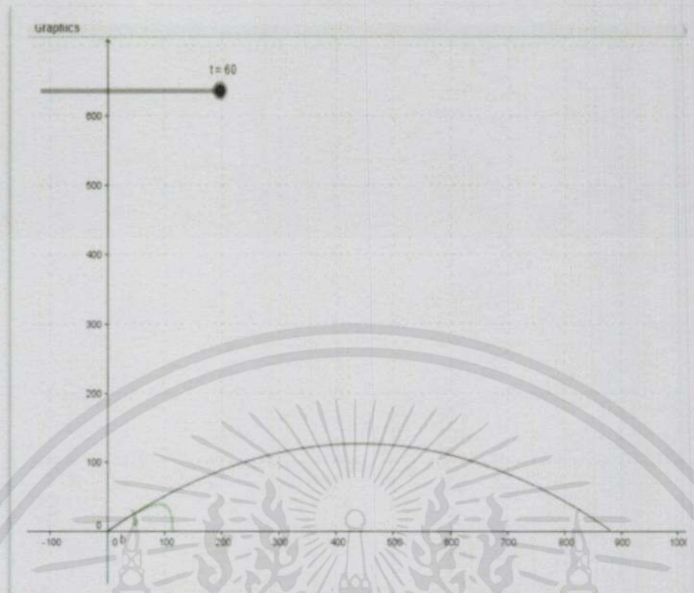
รูปที่ 4.15 ผลกราฟิกจากสมการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียง



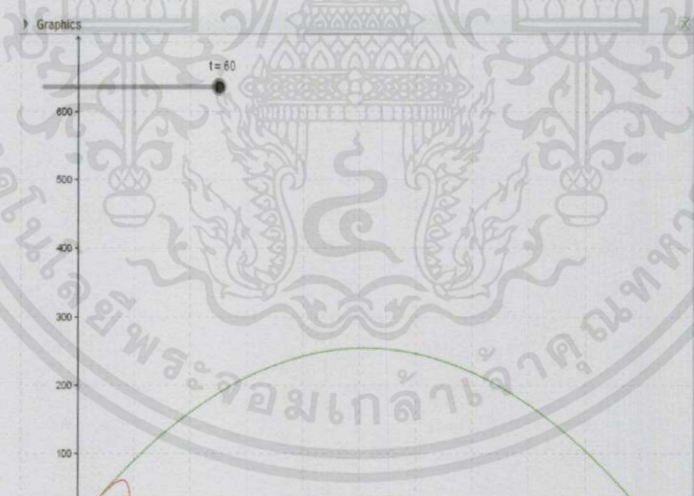
รูปที่ 4.16 ผลกราฟิกจากสมการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบ



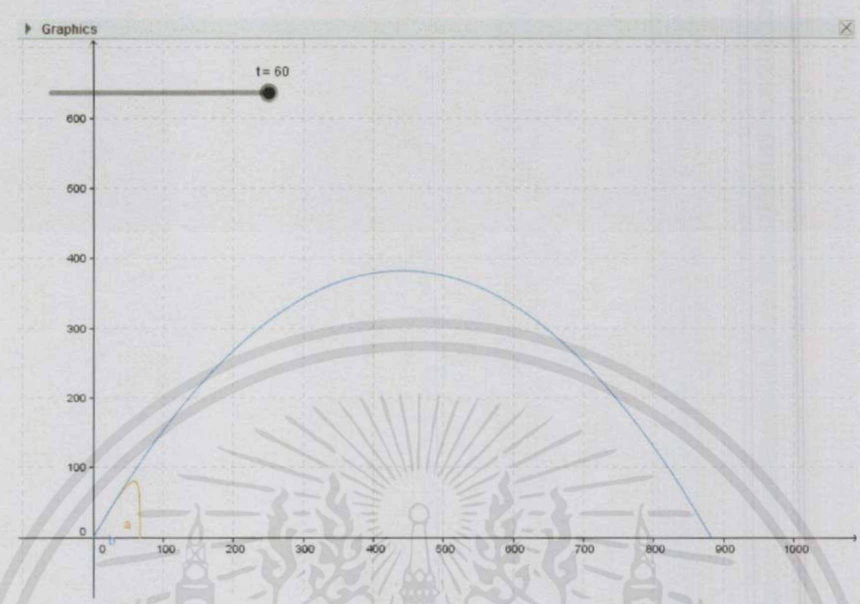
รูปที่ 4.17 ผลกราฟิกจากสมการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียง



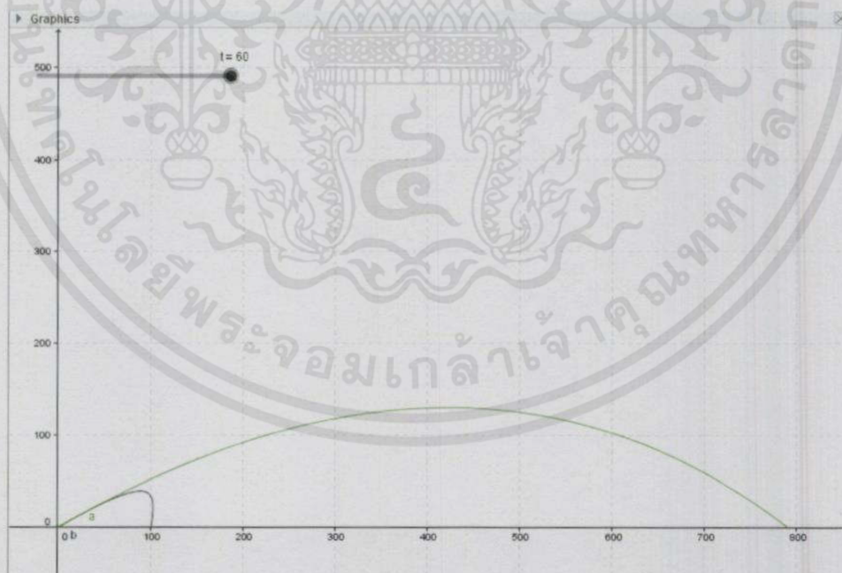
รูปที่ 4.18 ผลกราฟิกแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศและคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบทำมุม 30°



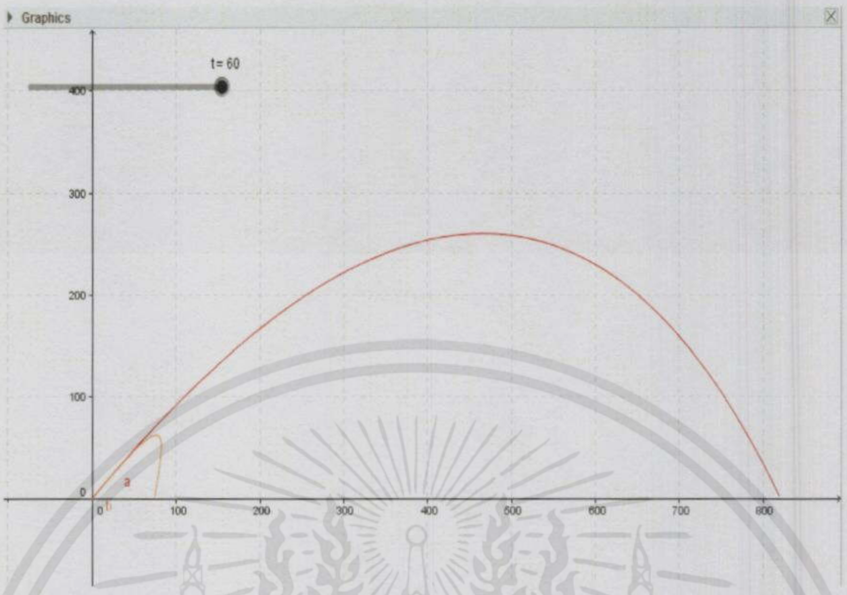
รูปที่ 4.19 ผลกราฟิกแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศและคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบทำมุม 45°



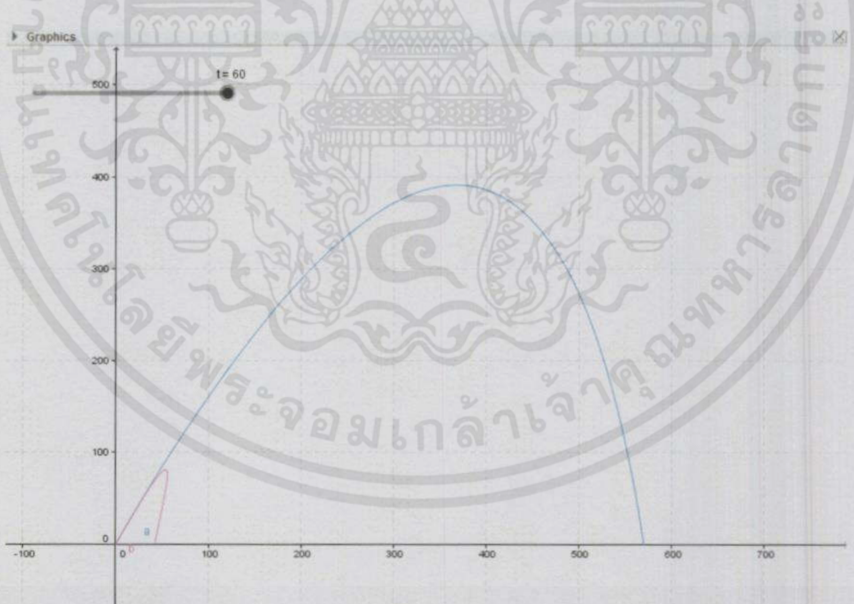
รูปที่ 4.20 ผลกราฟิกแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศและคิดแรงต้านอากาศบนพื้นราบทำมุม 60°



รูปที่ 4.21 ผลกราฟิกแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศและคิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียงทำมุม 30°



รูปที่ 4.22 ผลกราฟิกแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศและคิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียงทำมุม 45°



รูปที่ 4.23 ผลกราฟิกแสดงการเปรียบเทียบระหว่างการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อไม่คิดแรงต้านอากาศและคิดแรงต้านอากาศบนพื้นเอียงทำมุม 60°

4.4 ปัญหาที่พบในการทำปัญหาพิเศษ

1. การกักเก็บข้อมูลไม่รัดกุมจึงทำให้ข้อมูลมีมากเกินกว่าที่ Hardware ของผู้จัดทำจะจัดการโปรแกรมได้อย่างราบรื่น ส่งผลให้ต้องแก้ไขหลายครั้ง
2. องค์ความรู้ในการเรียกใช้โปรแกรมไม่เพียงพอ ผู้จัดทำได้พยายามศึกษาจากหลายด้านด้วยกันและพบว่าข้อมูลความรู้ทางด้านนี้มีน้อยมาก
3. กราฟิกมีข้อจำกัดจึงแสดงภาพบนพื้นเอียงได้ไม่สมจริง
4. ไม่สามารถรวมโปรแกรมคำนวณกับโปรแกรม CAI ได้ เนื่องจากความสมบูรณ์ของเครื่องมือที่ไม่ใช่เวอร์ชันเต็ม

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

ปัญหาโครงงานพิเศษเรื่อง การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์เมื่อคิดแรงต้านของตัวกลาง ฉบับนี้ได้จัดทำเป็น 2 ส่วน คือ โปรแกรมคำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์ และ ส่วนบทเรียนเบื้องต้นที่รวบรวมข้อมูลต่างๆและสูตรที่ผู้จัดทำคิดค้นขึ้น

โดยในส่วนเนื้อหาเป็นส่วนที่เน้นให้ผู้ใช้งานทบทวนความรู้และทำความเข้าใจความรู้ใหม่ๆที่ไม่มีในบทเรียนตามปกติ

ในส่วนโปรแกรมคำนวณจะแบ่ง ดังนี้

1) คำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านอากาศ

   1.1) คำนวณบนพื้นราบ

   1.2) คำนวณบนพื้นเอียงในทิศทางที่วัตถุเคลื่อนที่ในทิศขึ้น

2) คำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านอากาศ

   2.1) คำนวณบนพื้นราบ

   2.2) คำนวณบนพื้นเอียงในทิศทางที่วัตถุเคลื่อนที่ในทิศขึ้น

โปรแกรมที่ใช้สร้างคือ visual studio เวอร์ชัน 2013 และ โปรแกรม MatLab

5.1.2 สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

จากการศึกษาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยไม่คิดแรงต้านของอากาศ และการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์โดยคิดแรงต้านของอากาศ ทำให้ทราบว่า แรงต้านของอากาศมีผลทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ช้าลง โดยการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อมีแรงต้านของอากาศจะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ใกล้จุดที่ต้องการมากกว่าการเคลื่อนที่เมื่อไม่คิดแรงต้านของอากาศ ซึ่งทางคณะผู้จัดทำได้เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่บนพื้นราบและพื้นเอียง โดยวัตถุทำมุมต่างกัน คือ 30^o, 45^o และ 60^o

ผลการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ แบ่งได้เป็น 2 กรณีนั่นคือ

1) การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อไม่คิดแรงต้านของอากาศ

- กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่บนพื้นราบ

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ และเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u เท่ากัน โดยจะพิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม θ กับแนวระดับ คือ 30^o, 45^o และ 60^o พบว่า วัตถุที่เคลื่อนที่ทำมุม 45^o จะเคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดและวัตถุที่ทำมุม 60^o จะเคลื่อนที่ได้ใกล้ที่สุด

- กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่บนพื้นเอียง

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ไปบนพื้นเอียง โดยที่พื้นเอียงทำมุม β กับแนวระดับ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u เท่ากัน ซึ่งจะพิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม θ กับแนวระดับ คือ 30^o, 45^o และ 60^o พบว่า วัตถุที่เคลื่อนที่ทำมุม 60^o จะเคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดและวัตถุที่ทำมุม 30^o จะเคลื่อนที่ได้ใกล้ที่สุด

2) การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อคิดแรงต้านของอากาศ

- กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่บนพื้นราบ

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $y_0 = 0$ และเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u เท่ากัน โดยจะพิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม θ กับแนวระดับ คือ 30^o, 45^o และ 60^o พบว่า วัตถุที่เคลื่อนที่ทำมุม 30^o จะเคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดและวัตถุที่ทำมุม 60^o จะเคลื่อนที่ได้ใกล้ที่สุด

- กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่บนพื้นเอียง

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ไปบนพื้นเอียง โดยที่พื้นเอียงทำมุม β กับแนวระดับ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u เท่ากัน ซึ่งจะพิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ทำมุม θ กับแนวระดับ คือ 30^o, 45^o และ 60^o พบว่า วัตถุที่เคลื่อนที่ทำมุม 30^o จะเคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดและวัตถุที่ทำมุม 60^o จะเคลื่อนที่ได้ใกล้ที่สุด

5.1.3 ข้อจำกัดของโปรแกรม

1) โปรแกรมสามารถคำนวณได้ในกรณีของพื้นราบและพื้นเอียงเท่านั้น

2) สามารถคิดแรงต้านที่เป็นแรงสวนทางกับความเร็วของวัตถุ ไม่สามารถคำนวณผลกระทบแรงต้านที่มาจากรอบข้างของวัตถุและไม่สามารถได้ผลคำนวณจากผลกระทบของแรงหมุนของวัตถุได้

3) โปรแกรมจะแสดงผลเฉพาะ ระยะการกระจัดจากจุดปล่อยตัวไปถึงจุดตกและระยะการกระจัดสูงที่สุดจากพื้น

4) ตัวกลางที่ใช้มีเพียงอากาศเท่านั้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

1) พัฒนาให้สามารถคำนวณในกรณีที่หลากหลายขึ้น นอกเหนือจากพื้นราบและพื้นเอียง
2) พัฒนาให้สามารถแสดงภาพกราฟิกที่ดูสมจริงเป็นแบบสามมิติเสมือน
3) พัฒนาให้ให้มีการทำแบบทดสอบในส่วนให้ความรู้เบื้องต้น
4) พัฒนาให้สามารถคำนวณผลกระทบจากแรงต้านทานอื่นๆที่อาจเกิดขึ้นกับวัตถุ
5) พัฒนาให้สามารถคิดแรงต้านจากตัวกลางอื่น เช่น ของเหลว
6) พัฒนาให้สามารถจำลองออกแบบสถานการณ์ เช่น คิดค้นยุทธวิธีทางการทหาร เป็นต้น
7) พัฒนาให้สองโปรแกรมรวมกันเป็นโปรแกรมเดียว

เอกสารอ้างอิง

[1] Dr S.T.C. Siklos. 2011. Hand-out 3. **Projectile with linear drag**. Mathematical Tripos Part IA. pp. 1.

[2] พิเชษฐ์ ลิ้มสุวรรณ. (2541). **กลศาสตร์เชิงวิเคราะห์**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

[3] สุมิตร สวนสุข. (2537). **หลักฟิสิกส์กลศาสตร์ 1**. กรุงเทพฯ: ธิรพงษ์การพิมพ์.

[4] เอกสารประกอบการเรียนวิชาฟิสิกส์ หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การเคลื่อนที่แบบต่างๆ : **การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์** (ออนไลน์). (2012). สืบค้นจาก : https://krubenjamat 2012.files.wordpress.com/2012/05/1-e0b881e0b8b2e0b8a3e0b884e0b897-e0b981e0b89ae0b89a e0b9 82e0b89be0b8a3e0b980e0b888e0b884e0b9 84e0b897e0b8a5e0b98c.pdf [10 ตุลาคม 2557]

[5] ดร. ศรีประจักร ครองสุข. (2013). **ฟิสิกส์ทั่วไป 1** (ออนไลน์). สืบค้นจาก : http://www.physics.rmutk.ac.th/wp-content/uploads/2013/06/315102_%E0%B8%9F%E0%B8%B4%E0%B8%AA%E0%B8%B4%E0%B8%81%E0%B8%AA%E0%B9%8C%E0%B8%97%E0%B8%B1%E0%B9%88%E0%B8%A7%E0%B9%84%E0%B8%9B-1.pdf [10 ตุลาคม 2557]

[6] Dr. Teepanis Chachiyo. 2010. **กลศาสตร์ Newton** (ออนไลน์). สืบค้นจาก : http://www.vcharkarn.com/uploads/230/230361.pdf [11 ตุลาคม 2557]

[7] บดินทร์ชาติ สุขบท. 2551. **ฟิสิกส์ 1**. พิมพ์ครั้งที่ 3. ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์.

[8] Florian Schmidt. 2004. **Laboratory at Umeå University, Department of Physics** (ออนไลน์). สืบค้นจาก : http://www.jus.umu.se/digitalAssets/40/40623_klmeklabairdrag.pdf [15 มกราคม 2558]

[9] ธีรศักดิ์ สุโชตินันท์ และประยุทธ อินแบน. 2549. **ล้วงลึก โปรแกรมเมอร์มือใหม่ หัดเขียนโปรแกรม Microsoft Visual Basic 6.0 Enterprise edition**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[10] ผศ.ดร.ปริญญา สงวนสัตย์. 2556. คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณ์. พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรีฯ : ไอดีซี พรีเมียร์.

[11] Richard Fitzpatrick. 2011. **Projectile Motion with Air Resistance** (ออนไลน์). สืบค้นจาก : http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newtonhtml/node29.html [17 มกราคม 2558]

[12] **Projectile Motion with Air Resistance**. 2011. (ออนไลน์). สืบค้นจาก : http://wps.aw.com/wps/media/objects/877/898586/topics/topic01.pdf [20 มกราคม 2558]