การพัฒนาโปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบแสดงขั้นตอน

PROGRAM DEVELOPMENT FOR SOLUTION OF STEP BY STEP FOR FINDING LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

ทวีศักดิ์ พรหมมาศ

ธิติสรณ์ นุชนิยม

พรพล โอทาตะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

การพัฒนาโปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น แบบแสดงขั้นตอน

PROGRAM DEVELOPMENT FOR SOLUTION OF STEP BY STEP FOR FINDING LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

ทวีศักดิ์ พรหมมาศ
ธิติสรณ์ นุชนิยม
พรพล โอทาตะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2557

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของผลงานทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

PROGRAM DEVELOPMENT FOR SOLUTION OF STEP BY STEP FOR FINDING LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

THAWEESAK PHOMMAD
THITISON NUCHNIYOM
PORNPON OTHATA

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2014

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การพัฒนาโปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบแสดงขั้นตอน Program Development for Solution of Step by Step for Finding Linear Ordinary Differential Equations
ชื่อนักศึกษา	นายทวีศักดิ์ พรหมมาศ รหัสนักศึกษา 54050025 นายธิติสรณ์ นุชนิยม รหัสนักศึกษา 54050030 นายพรพล โอทาตะ รหัสนักศึกษา 54050045
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ พัชรินทร์ เหมโชติ รองศาสตราจารย์ ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ภาควิชาคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ประธานกรรมการ	
ดร.เดชา สมนะ กรรมการ	
รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การพัฒนาโปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบแสดงขั้นตอน	
ชื่อนักศึกษา	นาย ทวีศักดิ์ พรหมมาศ	รหัสนักศึกษา 54050025
	นาย ธิติสรณ์ นุชนิยม	รหัสนักศึกษา 54050030
	นาย พรพล โอทาตะ	รหัสนักศึกษา 54050045
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์	
ปีการศึกษา	2557	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ พัชรินทร์ เหมโชติ	
	รองศาสตราจารย์ ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์	

บทคัดย่อ

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องการหารากสมการพหุนามมีในระดับมัธยมศึกษา และการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญมีการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรี ในหลักสูตรต่างๆ เช่น คณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ วิศวกรรมศาสตร์ ชีววิทยา และเคมี เป็นต้น

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการหาค่ารากสมการพหุนาม และหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เช่น Mathlab และ Mathematica ทั้งสองโปรแกรมผู้ใช้จำเป็นต้องเรียนรู้คำสั่ง และถ้าต้องการให้แสดงขั้นตอนการหาค่าราก และผลเฉลย จำเป็นต้องรู้การเขียนโปรแกรมเพื่อเขียนชุดคำสั่ง ซึ่งทำให้ผู้ที่ไม่มีพื้นฐานการเขียนโปรแกรมใช้งานได้ไม่สะดวก

ปัญหาพิเศษได้พัฒนาโปรแกรมเพื่อหารากสมการพหุนามได้ถึงอันดับ 4 และหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการออยเลอร์ได้ถึงอันดับ 4 โดยผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงขั้นตอนการหา โปรแกรมนี้ใช้งานง่าย สามารถใช้ตรวจสอบคำตอบและช่วยการเรียนรู้ได้เร็วขึ้น

คำสำคัญ: รากสมการพหุนาม สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบออยเลอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Program Development for Solution of Step by Step for Finding Linear Ordinary Differential Equations	
Student	Mr.Thaweesak Phommad	Student ID 54050025
	Mr.Thitison Nuchniyom	Student ID 54050030
	Mr.Pornpon Othata	Student ID 54050045
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Academic Year	2014	
Advisor	Assoc.Prof.Patcharin Hemchote	
	Assoc.Prof.Praiboon Pantaragphong	

Abstract

In teaching mathematics, the roots of a polynomial equations are teaching at the secondary level. The solution of ordinary differential equations are teaching at the undergraduate level in many curriculums such as Mathematics, Applied Mathematics Engineering, Biology, and Chemistry, etc.

The computer program to be used for finding the roots of a polynomial equation and solution of ordinary differential equations such as MathLab and Mathematica, the user needs to learn the command. If users want to show the step of finding the roots and solutions, users need to know computer programming concept for prepare command. So the users who do not has the basic of computer programming cannot uses the above softwares.

This special problem developed software package for finding the roots of polynomial equations with order four and finding the solution of ordinary differential equations and Euler equations with order four. The output will show in step by step. This program can be easy to use and can be use for check the answers. We hope that the students learn more understood.

Keyword: root of polynomial equations, ordinary differential equations, Euler equations

เอกสารนี้ ... ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น ... ต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องการพัฒนาโปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบแสดงขั้นตอน สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ และ รองศาสตราจารย์ พัชรินทร์ เหมโชติ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่กรุณาช่วยแนะนำและให้ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับแนวทางการดำเนินงาน เอื้อเฟื้อเอกสารความรู้ต่างๆ และช่วยแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ แก่คณะผู้จัดทำเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณครอบครัวของคณะผู้จัดทำ ที่เป็นกำลังใจและให้คำแนะนำเป็นอย่างดีเสมอมา ขอขอบคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกๆ ท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้ทั้งทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ จนทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี และขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

นายทวีศักดิ์ พรหมมาศ
นายธิติสรณ์ นุชนิยม
นายพรพล โอทาตะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข

กิตติกรรมประกาศ ..... ค

สารบัญ ..... ง

สารบัญ(ต่อ) ..... จ

สารบัญรูปภาพ ..... ฉ

สารบัญรูปภาพ(ต่อ) ..... ช

สารบัญตาราง ..... ช

บทที่ 1 บทนำ **1**

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ 1

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ 2

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน 3

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง **4**

2.1 การหาค่ารากสมการพหุนาม 4

2.2 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 23

2.3 ภาวะรากซ้ำของผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 27

2.4 ซอฟแวร์ที่ใช้พัฒนาโปรแกรม 29

บทที่ 3 การออกแบบส่วนติดต่อผู้ใช้ และขั้นตอนวิธี **31**

3.1 ส่วนเลือกหัวข้อการทำงาน 31

3.2 ส่วนหน้าจอผู้ใช้งาน ส่วนประมวลผล และส่วนแสดงผลลัพธ์ 32

บทที่ 4 การพัฒนาโปรแกรมและผลลัพธ์ **49**

4.1 การพัฒนาโปรแกรม 49

4.2 ผลลัพธ์โปรแกรมของการหาค่ารากสมการพหุนาม 52

4.3 ผลลัพธ์โปรแกรมของการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 57

4.4 ผลลัพธ์โปรแกรมการหาผลเฉลยสมการออยเลอร์แบบเอกพันธุ์ 63

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 5 สรุปผลการพัฒนาโปรแกรมและข้อเสนอแนะ 65

5.1 สรุปผลการพัฒนาโปรแกรม 65

5.2 ข้อเสนอแนะ 65

เอกสารอ้างอิง 66

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ หน้า

3.1 หน้าต่างแสดงหน้าจอหลัก 31
3.2 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสอง 32
3.3 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสอง 33
3.4 หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสอง 33
3.5 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสาม 34
3.6 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสาม 35
3.7 หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสาม 35
3.8 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่ 36
3.9 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่ 37
3.10 หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่ 38
3.11 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง 39
3.12 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง 40
3.13 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม 41
3.14 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม 42
3.15 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ 43
3.16 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ 44
3.17 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์ 45
3.18 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์ 46
3.19 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม 47
3.20 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม 47
3.21 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่ 48
3.22 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่ 48
4.1 หน้าแรกของโปรแกรม 50
4.2 ส่วนการหาค่ารากสมการพหุนาม 50
4.3 ส่วนการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ 51
4.4 ส่วนการหาผลสมการออยเลอร์ 51
4.5 หน้าจอแสดงผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 2 แบบแยกตัวประกอบ 52
4.6 หน้าจอแสดงผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 2 แบบใช้สูตร 52
4.7 หน้าจอแสดงผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 3 แบบแยกตัวประกอบ 53
4.8 หน้าจอแสดงผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 3 แบบใช้สูตร 54
4.9 หน้าจอแสดงผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 4 แบบแยกตัวประกอบ 55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.10 หน้าจอแสดงผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 4 แบบใช้สูตร	56
4.11 หน้าจอแสดงผลลัพธ์การหาค่ารากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 แบบเอกพันธุ์	57
4.12 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ไม่เอกพันธุ์ แบบไม่หาสัมประสิทธ์ของ y_p	58
4.13 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ไม่เอกพันธุ์ แบบหาสัมประสิทธ์ของ y_p	58
4.14 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 แบบเอกพันธุ์	59
4.15 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ไม่เอกพันธุ์ แบบไม่หาสัมประสิทธ์ของ y_p	60
4.16 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ไม่เอกพันธุ์ แบบหาสัมประสิทธ์ของ y_p	60
4.17 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 แบบเอกพันธุ์	61
4.18 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 ไม่เอกพันธุ์ แบบไม่หาสัมประสิทธ์ของ y_p	61
4.19 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 ไม่เอกพันธุ์ แบบหาสัมประสิทธ์ของ y_p	62
4.20 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสอง	63
4.21 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม	64
4.22 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่	64

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

1.1 ตารางแสดงการดำเนินงาน 3
2.1 ตารางแสดงการสมมติค่า y_p 28

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations) และการหาผลเฉลยของสมการ จะมีการเรียนการสอนในหลายหลักสูตรในระดับอุดมศึกษา ปัญหาหนึ่งของผู้เรียนคือต้องใช้เวลาในการทำความเข้าใจเรื่องการหาผลเฉลยค่อนข้างมาก และสำหรับผู้ที่พื้นฐานทางคณิตศาสตร์น้อย ก็จะทำให้การหาผลเฉลยเป็นเรื่องยากเพิ่มขึ้น จึงต้องการมีผู้รู้คอยแนะนำที่มาของแต่ละขั้นตอนในโจทย์ปัญหาแต่ละข้อ สำหรับผู้ที่พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ดีโดยเฉพาะการหารากสมการพหุนาม การแยกตัวประกอบของสมการพหุนาม การทำความเข้าใจในการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญก็ไม่ใช่เรื่องยาก และสำหรับผู้เรียนแล้วจะต้องการการตรวจสอบคำตอบว่าได้ทำโจทย์มาแล้วทำถูกต้องหรือไม่

โครงงานนี้จึงสนใจศึกษาและสร้างเครื่องมือช่วยให้การเรียนรู้และทำความเข้าใจเนื้อหาด้วยตนเองในเรื่องการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น โดยพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่แสดงขั้นตอนการคิด หรือการคำนวณอย่างเป็นขั้นเป็นตอน เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำโจทย์และเข้าใจสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดียิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

พัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยในการค่ารากสมการพหุนาม หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการออยเลอร์รวมทั้งแสดงขั้นตอนในการค่ารากและผลเฉลยและสามารถใช้งานได้ง่ายไม่ซับซ้อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ขอบเขตของปัญหาที่ศึกษาเพื่อพัฒนาโปรแกรมให้แก้ปัญหาจะจำกัดอยู่ที่

1) รองรับการหาค่ารากสมการพหุนามกำลัง 4 และผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นและสมการออยเลอร์แบบเอกพันธุ์ได้ถึงอันดับ 4

2) รองรับสมการพหุนามและสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นเต็ม

3) สามารถหาค่ารากสมการพหุนามและผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

4) สำหรับสมการที่ไม่เป็นเอกพันธ์จะรองรับเพียงบางฟังก์ชันพื้นฐาน เช่น ค่าคงตัวพหุนาม (จำกัดดีกรี 2) ตรีโกณมิติ (sine, cosine) เอ็กโปเนนเชียล

5) กรณีสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเอกพันธ์ ถ้าเกิดภาวะรากซ้ำของ y_p ผลเฉลย y_p จะอยู่ในรูปแบบการสมมติค่า

6) โปรแกรมพัฒนาบนระบบปฏิบัติการวินโดว์ แบบผู้ใช้คนเดียว (เพื่อให้สะดวกต่อการติดตั้งใช้งาน ไม่ต้องมีผู้ดูแลระบบ)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สำหรับผู้พัฒนา

1) ได้ศึกษากระบวนการและขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการพหุนามการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการออยเลอร์

2) ได้ศึกษาเรียนรู้การออกแบบ การพัฒนาโปรแกรม

สำหรับผู้ใช้งาน

1) สามารถเรียนรู้การหารากของสมการพหุนามและหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการออยเลอร์

2) เป็นเครื่องมือช่วยในการตรวจทานคำตอบ และแสดงขั้นตอนการหา

3) ผู้ใช้สามารถทำความเข้าใจวิธีใช้งานได้ในเวลาอันสั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1) กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษและวางแผนการทำงานในขั้นตอนต่างๆ
2) รวบรวม และศึกษาข้อมูล หรือทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ
3) เขียนขั้นตอนวิธีสำหรับใช้ในโปรแกรม
4) ออกแบบและพัฒนาโปรแกรม
5) เขียนรายงานปัญหาพิเศษ
6) สรุปผลการดำเนินงาน
7) ปรับปรุง และแก้ไขข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น
8) นำเสนอปัญหาพิเศษ

สามารถแสดงกิจกรรมดำเนินงานได้ ดังนี้

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงการดำเนินงาน

กิจกรรมดำเนินงาน	เดือน / ปี (2557 - 2558)									
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ษ.	พ.ค.
1. กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษและวางแผนการทำงานในขั้นตอนต่างๆ										
2. รวบรวม และศึกษาข้อมูล หรือทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ										
3. เขียนขั้นตอนวิธีสำหรับใช้ในโปรแกรม										
4. ออกแบบและพัฒนาโปรแกรม										
5. เขียนรายงานของปัญหาพิเศษ										
6. สรุปผลการดำเนินงาน										
7. ปรับปรุง และแก้ไขข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น										
8. นำเสนอปัญหาพิเศษ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1การหาค่ารากสมการพหุนาม

สมการพหุนาม (Polynomial Equations) กำลัง N มีรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

โดยที่ a_j เป็นสัมประสิทธิ์ เมื่อ $j = 0, 1, \ldots, N$ และ $a_N \neq 0$

การหาค่ารากสมการพหุหามที่เกี่ยวข้องกับการทำปัญหาพิเศษจะเน้นที่กำลังสูงสุดคือกำลังสี่

2.1.1 การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสอง (Root of Quadratic Equations)

สมการพหุนามกำลังสอง (Quadratic Equation) มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$ax^2 + bx + c = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a, b และ c เป็นจำนวนจริงและ $a \neq 0$

การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสองจะใช้การจัดรูปให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์และการแยกตัวประกอบของผลต่างกำลังสอง พิจารณาดังนี้

จากสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงที่ และ $a \neq 0$

หารด้วย a ทั้งสองข้างของสมการจะได้ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

จัดรูปให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ $\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของผลงานทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

ถ้า $b^2-4ac \geq 0$ แล้ว $\sqrt{b^2-4ac}$ เป็นจำนวนจริงจะได้

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] = 0$$

ดังนั้น $\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$

หรือ $\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$

และได้ $x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

หรือ $x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ดังนั้น ค่ารากของสมการพหุนามกำลังสองคือ $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ตัวอย่างที่ 2.1 $x^2+2x+1=0$

จากโจทย์จะได้ว่า $a=1, b=2, c=1$

จาก $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

จะได้ $x=-1,-1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสาม (Root of Cubic Equations)

1) วิธียูนิไฟด์(Unified Method)

วิธียูนิไฟด์ เขียนโดย Dr.Raghavendra G.Kulkarni [3] ซึ่งกล่าวถึงวิธีการหาค่ารากสมการพหุนามด้วยวิธียูนิไฟด์ดังนี้

สมการพหุนาม(Polynomial Equations) กำลัง N มีรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \ldots + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

โดยที่ a_j เป็นสัมประสิทธิ์เมื่อ $j = 0,1,\ldots,N-1$ และ $N < 5$ เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

วิธียูนิไฟด์นี้เราจะกำหนดให้สมการพหุนามกำลัง N สามารถเขียนในรูปแบบดังต่อไปนี้ได้

$$\frac{\left[V_M(x)\right]^K - p^K\left[W_M(x)\right]^K}{1-p^K} = 0$$

โดยที่ $V_M(x)$ และ $W_M(x)$ เป็นพหุนามกำลัง M ซึ่ง $M < N$ และ p เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

ซึ่งค่า M และค่า K มีค่าความสัมพันธ์กับค่า N คือ

$$MK = N$$

โดยเราจะพิจารณาค่า M ดังนี้

ถ้า N เป็นจำนวนคี่ แล้ว $M = \dfrac{N-1}{2}$

ถ้า N เป็นจำนวนคู่ แล้ว $M = \dfrac{N}{2}$

ถ้ากำหนดให้พหุนาม $V_M(x)$ และ $W_m(x)$ เป็นดังนี้

$$V_M(x) = x^M + b_{M-1}x^{M-1} + \ldots + b_j x^j + \ldots + b_1 x + b_0$$

$$W_M(x) = x^M + c_{M-1}x^{M-1} + \ldots + c_j x^j + \ldots + c_1 x + c_0$$

โดยที่ b_j และ c_j เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าเมื่อ $j = 0,1,\ldots,M-1$ □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) การแก้สมการพหุนามกำลังสาม โดยใช้วิธีการยูนิไฟด์

สมการพหุนามกำลังสาม มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a_0, a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณาโดยใช้วิธียูนิไฟด์

เนื่องจาก $N=3$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $M=\frac{3-1}{2}=1$

และจาก $MK=N$ จะได้ว่า $K=3$

จะได้ว่า $$\frac{\left[V_1(x)\right]^3 - p^3\left[W_1(x)\right]^3}{1-p^3} = 0 \qquad (2)$$

ซึ่ง $$V_1(x) = x + b_0$$

$$W_1(x) = x + c_0 \qquad (3)$$

แทนสมการที่ (3) ในสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$\frac{(x+b_0)^3 - p^3(x+c_0)^3}{1-p^3} = 0 \qquad (4)$$

จากสมการข้างต้นเมื่อเรากระจาย จะได้ว่า

$$\frac{1}{1-p^3}\left[\left(x^3+3b_0x^2+3b_0^2x+b_0^3\right) - p^3\left(x^3+3c_0x^2+3c_0^2x+c_0^3\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{1-p^3}\left[\left(1-p^3\right)x^3 + 3\left(b_0-c_0p^3\right)x^2 + 3\left(b_0^2-c_0^2p^3\right)x + \left(b_0^3-c_0^3p^3\right)\right] = 0$$

$$x^3 + \frac{3\left(b_0-c_0p^3\right)}{1-p^3}x^2 + \frac{3\left(b_0^2-c_0^2p^3\right)}{1-p^3}x + \frac{\left(b_0^3-c_0^3p^3\right)}{1-p^3} = 0 \qquad (5)$$

เทียบสมการที่ (1) กับ (5) จะได้ว่า

$$\frac{3\left(b_0-p^3c_0\right)}{1-p^3} = a_2 \qquad (6)$$

$$\frac{3\left(b_0^2-c_0^2p^3\right)}{1-p^3} = a_1 \qquad (7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\left(b_0^3 - c_0^3 p^3\right)}{1-p^3} = a_0 \qquad (8)$$

พิจารณาหาตัวที่ไม่ทราบค่า p, b_0, c_0 ดังนี้

นำสมการที่ (7) หาร (6) จะได้

$$\frac{3\left(b_0^2 - c_0^2 p^3\right)}{1-p^3} \times \frac{1-p^3}{3\left(b_0 - c_0 p^3\right)} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\frac{b_0^2 - c_0^2 p^3}{b_0 - c_0 p^3} = \frac{a_1}{a_2} \qquad (9)$$

นำสมการที่ (8) หาร (6) จะได้

$$\frac{b_0^3 - c_0^3 p^3}{1-p^3} \times \frac{1-p^3}{3\left(b_0 - c_0 p^3\right)} = \frac{a_0}{a_2}$$

$$\frac{b_0^3 - c_0^3 p^3}{b_0 - c_0 p^3} = \frac{3a_0}{a_2} \qquad (10)$$

จากสมการที่ (6) พิจารณานิพจน์ของ p^3 จะได้ว่า

จาก $$\frac{3\left(b_0 - c_0 p^3\right)}{1-p^3} = a_2$$

$$3b_0 - 3c_0 p^3 = a_2 - a_2 p^3$$

$$a_2 p^3 - 3c_0 p^3 = a_2 - 3b_0$$

$$\left(a_2 - 3c_0\right) p^3 = a_2 - 3b_0$$

$$p^3 = \frac{a_2 - 3b_0}{a_2 - 3c_0} \qquad (11)$$

พิจารณาสมการ (9) โดยจัดรูปให้อยู่ในรูปของ p^3

จาก $$\frac{b_0^2 - c_0^2 p^3}{b_0 - c_0 p^3} = \frac{a_1}{a_2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a_2 b_0^2 - a_2 c_0^2 p^3 = a_1 b_0 - a_1 c_0 p^3$$

$$\left(a_1 c_0 - a_2 c_0^2\right) p^3 = a_1 b_0 - a_2 b_0^2$$

$$p^3 = \frac{a_1 b_0 - a_2 b_0^2}{a_1 c_0 - a_2 c_0^2}$$

ใช้สมการที่ (11) แทนค่า p^3 จะได้ว่า

$$\frac{a_2 - 3b_0}{a_2 - 3c_0} = \frac{a_1 b_0 - a_2 b_0^2}{a_1 c_0 - a_2 c_0^2}$$

$$(a_2 - 3b_0)(a_1 c_0 - a_2 c_0^2) = (a_2 - 3c_0)(a_1 b_0 - a_2 b_0^2)$$

$$a_1 a_2 c_0 - a_2^2 c_0^2 - 3a_1 b_0 c_0 + 3a_2 b_0 c_0^2 = a_1 a_2 b_0 - a_2^2 b_0^2 - 3a_1 b_0 c_0 + 3a_2 b_0^2 c_0$$

$$a_1 a_2 (b_0 - c_0) - a_2^2 (b_0^2 - c_0^2) + 3a_2 b_0 c_0 (b_0 - c_0) = 0$$

$$a_2 (b_0 - c_0)\left[a_1 + 3b_0 c_0 - a_2 (b_0 + c_0)\right] = 0$$

ดังนั้น

$$(b_0 - c_0)\left[a_1 + 3b_0 c_0 - a_2 (b_0 + c_0)\right] = 0 \qquad (12)$$

พิจารณา $b_0 - c_0 = 0$ จะได้ว่า $b_0 = c_0$ แทนในสมการที่ (4) จะได้ว่า

$$\frac{(x + c_0)^3 - p^3 (x + c_0)^3}{1 - p^3} = 0$$

$$\frac{(1 - p^3)(x + c_0)^3}{1 - p^3} = 0$$

ดังนั้น $(x + c_0)^3 = 0$ นั่นคือ $x^3 + 3c_0 x^2 + 3{c_0}^2 x + {c_0}^3 = 0$

จะเห็นว่า a_0, a_1, a_2 ขึ้นกับ c_0 นั่นคือ ไม่เป็นอิสระกัน ซึ่งขัดกับเงื่อนไขข้างต้น

เพราะฉะนั้น $b_0 \neq c_0$ จากสมการที่ (12) จะได้ว่า

$$a_1 + 3b_0 c_0 - a_2 (b_0 + c_0) = 0 \qquad (13)$$

พิจารณาสมการ (10) จัดรูปให้อยู่ในรูปของ p^3

จาก

$$\frac{{b_0}^3 - {c_0}^3 p^3}{b_0 - c_0 p^3} = \frac{3a_0}{a_2}$$

$$a_2 {b_0}^3 - a_2 {c_0}^3 p^3 = 3a_0 b_0 - 3a_0 c_0 p^3$$

$$p^3 = \frac{3a_0 b_0 - a_2 {b_0}^3}{3a_0 c_0 - a_2 {c_0}^3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้สมการที่ (11) แทนค่า p^3 จะได้ว่า

$$\frac{a_2-3b_0}{a_2-3c_0}=\frac{3a_0b_0-a_2b_0^{\,3}}{3a_0c_0-a_2c_0^{\,3}}$$

$$(a_2-3b_0)(3a_0c_0-a_2c_0^{\,3})=(a_2-3c_0)(3a_0b_0-a_2b_0^{\,3})$$

$$3a_0a_2c_0-9a_0b_0c_0-a_2^{\,2}c_0^{\,3}+3a_2b_0c_0^{\,3}=3a_0a_2b_0-9a_0b_0c_0-a_2^{\,2}b_0^{\,3}+3a_2b_0^{\,3}c_0$$

$$-3a_0a_2(b_0-c_0)-3a_2b_0c_0(b_0^{\,2}-c_0^{\,2})+a_2^{\,2}(b_0^{\,3}-c_0^{\,3})=0$$

$$3a_0(b_0-c_0)+3b_0c_0(b_0+c_0)(b_0-c_0)-a_2(b_0-c_0)(b_0^{\,2}+b_0c_0+c_0^{\,2})=0$$

ดังนั้น $$(b_0-c_0)\left[3a_0+3b_0c_0(b_0+c_0)-a_0(b_0^{\,2}+b_0c_0+c_0^{\,2})\right]=0 \qquad (14)$$

เนื่องจาก กรณีที่ $b_0=c_0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไขข้างต้น เพราะฉะนั้น พิจารณา

$$3a_0+3b_0c_0(b_0+c_0)-a_2(b_0^{\,2}+b_0c_0+c_0^{\,2})=0$$

จะได้ว่า $$3a_0+a_2b_0c_0+3b_0c_0(b_0+c_0)-a_2(b_0+c_0)^2=0 \qquad (15)$$

สมมติให้ $$f_1=b_0+c_0 \qquad (16)$$

$$f_2=b_0c_0 \qquad (17)$$

แทนค่า f_1, f_2 ในสมการที่ (13) และ (15) จะได้ว่า

$$a_1+3f_2-a_2f_1=0 \qquad (18)$$

$$3a_0+a_2f_2+3f_1f_2-a_2f_1^2=0 \qquad (19)$$

จากสมการที่ (18), (19) จัดรูป f_1, f_2 ในเทอมของ a_0, a_1, a_2

จากสมการที่ (18) จะได้ $$f_1=\frac{a_1+3f_2}{a_2}$$

แทนค่าในสมการที่ (19) จะได้

$$3a_0+a_2f_2+3\left(\frac{a_1+3f_2}{a_2}\right)f_2-a_2\left(\frac{a_1+3f_2}{a_2}\right)^2=0$$

คูณด้วย a_2 ตลอด ; $$3a_0a_2+a_2^{\,2}f_2+3(a_1+3f_2)f_2-(a_1^{\,2}+6a_1f_2+9f_2^{\,2})=0$$

$$3a_0a_2+a_2^{\,2}f_2-a_1^{\,2}-3a_1f_2=0$$

$$(a_2^{\,2}-3a_1)f_2=a_1^{\,2}-3a_0a_2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f_2 = \frac{a_1^{\,2} - 3a_0a_2}{a_2^{\,2} - 3a_1} \tag{20}$$

แทน f_2 ในสมการ f_1 ข้างต้น จะได้

$$f_1 = \frac{a_1 + 3\left(\frac{a_1^{\,2} - 3a_0a_2}{a_2^{\,2} - 3a_1}\right)}{a_2}$$

$$= \frac{a_1\left(a_2^{\,2} - 3a_1\right) + 3a_1^{\,2} - 9a_0a_2}{a_2\left(a_2^{\,2} - 3a_1\right)}$$

$$= \frac{a_1a_2^{\,2} - 3a_1^{\,2} + 3a_1^{\,2} - 9a_0a_2}{a_2\left(a_2^{\,2} - 3a_1\right)}$$

$$f_1 = \frac{a_1a_2 - 9a_0}{a_2^{\,2} - 3a_1} \tag{21}$$

เมื่อ $a_2^{\,2} - 3a_1 \neq 0$

จากนั้นหา b_0 และ c_0 โดยสมการพหุนามกำลังสอง

$$y^2 - f_1y + f_2 = 0$$

แก้สมการพหุนามกำลังสองโดยใช้สูตร $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ดังนั้น $$b_0 = \frac{f_1 + (f_1^{\,2} - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2} \tag{22}$$

$$c_0 = \frac{f_1 - (f_1^{\,2} - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2} \tag{23}$$

สุดท้ายพิจารณา p ซึ่งเป็นตัวที่ไม่ทราบค่า จากสมการที่ (11) โดยการแทน b_0 และ c_0 ในสมการ

จาก $$p^3 = \frac{a_2 - 3b_0}{a_2 - 3c_0}$$

$$= \frac{a_2 - 3 \cdot \dfrac{f_1 + (f_1^{\,2} - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2}}{a_2 - 3 \cdot \dfrac{f_1 - (f_1^{\,2} - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{2a_2 - 3f_1 - 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2a_2 - 3f_1 + 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$p = \left(\frac{2a_2 - 3f_1 - 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2a_2 - 3f_1 + 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

จากสมการที่ (4) สามารถแยกตัวประกอบได้ ดังนี้

$$\frac{(x+b_0)^3 - p^3(x+c_0)^3}{1-p^3} = 0$$

$$\frac{\left[(x+b_0) - p(x+c_0)\right]}{1-p} \cdot \frac{\left[(x+b_0)^2 + p(x+b_0)(x+c_0) + p^2(x+c_0)^2\right]}{1+p+p^2} = 0 \quad (25)$$

พิจารณาสมการที่ (25) จับแต่ละตัวประกอบเท่ากับศูนย์ จะได้

$$(x+b_0) - p(x+c_0) = 0 \quad (26)$$

และ $$(x+b_0)^2 + p(x+b_0)(x+c_0) + p^2(x+c_0)^2 = 0 \quad (27)$$

จากสมการที่ (26) หาค่า x จะได้ว่า

จาก $$(x+b_0) - p(x+c_0) = 0$$

$$x - px = c_0 p - b_0$$

$$x = \frac{c_0 p - b_0}{1-p}$$

ให้ x เป็นรากหนึ่งของสมการพหุนามกำลังสาม ให้ $x_1 = x$

นั่นคือ $$x_1 = \frac{c_0 p - b_0}{1-p} \quad (28)$$

หารากอีกสองรากที่เหลือ คือ x_2 และ x_3 จากสมการที่ (27)

จาก $$(x+b_0)^2 + p(x+b_0)(x+c_0) + p^2(x+c_0)^2 = 0$$

$$x^2 + 2b_0x + b_0^2 + p\left(x^2 + (b_0+c_0)x + b_0c_0\right) + p^2\left(x^2 + 2c_0x + c_0^2\right) = 0$$

$$x^2 + 2b_0x + b_0^2 + p\left(x^2 + f_1x + f_2\right) + p^2\left(x^2 + 2c_0x + c_0^2\right) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัดรูปใหม่จะได้ $\left(1+p+p^2\right)x^2+\left(2b_0+2c_0p^2+pf_1\right)x+\left(b_0{}^2+p^2c_0{}^2+pf_2\right)=0$

แก้สมการพหุนามกำลังสอง จะได้ว่า

$$x_2=\frac{-\left(2b_0+2p^2c_0+pf_1\right)+\left[\left(2b_0+2c_0p^2+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(b_0{}^2+p^2c_0{}^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2} \tag{29}$$

$$x_3=\frac{-\left(2b_0+2p^2c_0+pf_1\right)-\left[\left(2b_0+2c_0p^2+pf_1\right)^2-4\left(1+p+p^2\right)\left(b_0{}^2+p^2c_0{}^2+pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2+2p+2p^2} \tag{30}$$

ดังนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของสมการพหุนามกำลังสามได้จาก สมการ (28), (29), (30)

เมื่อ $f_1=\dfrac{a_1a_2-9a_0}{a_2{}^2-3a_1}$

$f_2=\dfrac{a_1{}^2-3a_0a_2}{a_2{}^2-3a_1}$

$b_0=\dfrac{f_1+(f_1^2-4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2}$

$c_0=\dfrac{f_1-(f_1^2-4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2}$

$p=\left[\dfrac{2a_2-3f_1-3(f_1^2-4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2a_2-3f_1+3(f_1^2-4f_2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}}$ □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปการแก้สมการพหุนามกำลังสาม

สมการพหุนามกำลังสาม มีรูปแบบ ดังนี้

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a_0, a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

1) ตรวจสอบเงื่อนไขของสัมประสิทธิ์ จาก

$$a_2{}^2 - 3a_1 \neq 0$$

ถ้าเป็นจริงตามเงื่อนไขข้างต้น สามารถใช้เทคนิคนี้หาค่ารากได้

2) หาค่าของ

$$f_1 = \frac{a_1a_2 - 9a_0}{a_2{}^2 - 3a_1}$$

$$f_2 = \frac{a_1{}^2 - 3a_0a_2}{a_2{}^2 - 3a_1}$$

$$b_0 = \frac{f_1 + (f_1{}^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$c_0 = \frac{f_1 - (f_1{}^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$p = \left[\frac{2a_2 - 3f_1 - 3(f_1{}^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2a_2 - 3f_1 + 3(f_1{}^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

3) นำค่าที่หาได้ทั้งหมดมาแทนในสมการ

$$x_1 = \frac{c_0p - b_0}{1 - p}$$

$$x_2 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right) + \left[\left(2b_0 + 2c_0p^2 + pf_1\right)^2 - 4\left(1 + p + p^2\right)\left(b_0{}^2 + p^2c_0{}^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2 + 2p + 2p^2}$$

$$x_3 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2c_0 + pf_1\right) - \left[\left(2b_0 + 2c_0p^2 + pf_1\right)^2 - 4\left(1 + p + p^2\right)\left(b_0{}^2 + p^2c_0{}^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2 + 2p + 2p^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ค่าของ x_1, x_2, x_3 เป็นรากทั้งสามของสมการพหุนามกำลังสาม □

ตัวอย่างที่ 2.2จงหาค่ารากทั้งหมดของพหุนามกำลังสามต่อไปนี้

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

จากโจทย์ จะได้ว่า $a_0 = -2,\ a_1 = 3, a_2 = 5$

1) ตรวจสอบเงื่อนไขของสัมประสิทธิ์ จาก

$$a_2{}^2 - 3a_1 \ = \ 16 \ \neq \ 0$$

เป็นจริงตามเงื่อนไข ดังนั้นสามารถใช้เทคนิคนี้หาค่ารากได้

2) หาค่าของ

$$f_1 = \frac{a_1 a_2 - 9a_0}{a_2{}^2 - 3a_1} = 2.0625$$

$$f_2 = \frac{a_1{}^2 - 3a_0 a_2}{a_2{}^2 - 3a_1} = 2.4375$$

$$b_0 = \frac{f_1 + (f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2} = 1.0313 + 1.1722i$$

$$c_0 = \frac{f_1 - (f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2} = 1.0313 - 1.1722i$$

$$p = \left[\frac{2a_2 - 3f_1 - 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}{2a_2 - 3f_1 + 3(f_1^2 - 4f_2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}} = 0.7544 - 0.6564i$$

3) นำค่าที่หาได้ทั้งหมดมาแทนในสมการ

$$x_1 = \frac{c_0 p - b_0}{1 - p} = -4.1642$$

$$x_2 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2 c_0 + pf_1\right) + \left[\left(2b_0 + 2c_0 p^2 + pf_1\right)^2 - 4\left(1 + p + p^2\right)\left(b_0{}^2 + p^2 c_0{}^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2 + 2p + 2p^2} = 0.3913$$

$$x_3 = \frac{-\left(2b_0 + 2p^2 c_0 + pf_1\right) - \left[\left(2b_0 + 2c_0 p^2 + pf_1\right)^2 - 4\left(1 + p + p^2\right)\left(b_0{}^2 + p^2 c_0{}^2 + pf_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2 + 2p + 2p^2} = -1.2271$$

ดังนั้น ค่ารากทั้งหมดคือ $-4.1642\ ,\ 0.3913\ ,\ -1.2271$ □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.3 สมการพหุนามกำลังสี่ (Quartic Equation)

วิธีใหม่สำหรับการแก้สมการพหุนามกำลังสี่(A New method for solving Quartics)

วิธีใหม่สำหรับการแก้สมการพหุนามกำลังสี่ เขียนโดย Dr.Raghavendra G.Kulkarni [4] ซึ่งมีวิธีการดังนี้

สมการพหุนามกำลังสี่มีรูปแบบดังนี้

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a_0 , a_1 , a_2 และ a_3 เป็นจำนวนจริง

พิจารณาสมการพหุนามกำลังสี่ในรูปแบบผลต่างกำลังสอง ดังนี้

$$(x^2 + b_1x + b_0)^2 - p(x + c_0)^2 = 0$$

$$(x^2 + b_1x + b_0)^2 - (p^{1/2}x + p^{1/2}c_0)^2 = 0 \qquad (2)$$

โดยที่ b_0, b_1, c_0 และ p เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า

จากสมการที่ (2) เราสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$\left[x^2 + b_1x + b_0 - p^{1/2}x - p^{1/2}c_0\right]\left[x^2 + b_1x + b_0 + p^{1/2}x + p^{1/2}c_0\right] = 0$$

$$\left[x^2 + (b_1 - p^{1/2})x + b_0 - p^{1/2}c_0\right]\left[x^2 + (b_1 + p^{1/2})x + b_0 + p^{1/2}c_0\right] = 0 \qquad (3)$$

จากสมการที่ (3) เมื่อเรากระจายแต่ละเทอม จะได้ว่า

$$x^2\left[x^2 + (b_1 + p^{1/2})x + b_0 + p^{1/2}c_0\right]$$

$$+(b_1 - p^{1/2})x\left[x^2 + (b_1 + p^{1/2})x + b_0 + p^{1/2}c_0\right]$$

$$+(b_0 - p^{1/2}c_0)\left[x^2 + (b_1 + p^{1/2})x + b_0 + p^{1/2}c_0\right] = 0$$

$$x^4 + (b_1 + p^{1/2})x^3 + (b_0 + p^{1/2}c_0)x^2$$

$$+(b_1 - p^{1/2})x^3 + (b_1 - p^{1/2})(b_1 - p^{1/2})x^2 + (b_1 - p^{1/2})(b_0 - p^{1/2}c_0)x$$

$$+(b_0 - p^{1/2}c_0)x^2 + (b_0 - p^{1/2}c_0)(b_1 + p^{1/2})x + (b_0 - p^{1/2}c_0)(b_0 + p^{1/2}c_0) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x^4+\left[(b_1+p^{1/2})+(b_1-p^{1/2})\right]x^3+\left[(b_0+p^{1/2}c_0)+(b_1-p^{1/2})(b_1+p^{1/2})+(b_0-p^{1/2}c_0)\right]x^2$$
$$+\left[(b_1-p^{1/2})(b_0+p^{1/2}c_0)+(b_0-p^{1/2}c_0)(b_1+p^{1/2})\right]x+(b_0-p^{1/2}c_0)(b_0+p^{1/2}c_0)=0$$

$$x^4+2b_1x^3+(2b_0+b_1^{\,2}-p)x^2$$
$$+(b_1b_0+b_1p^{1/2}c_0-b_0p^{1/2}-pc_0+b_0b_1+b_0p^{1/2}-b_1p^{1/2}c_0-pc_0)x$$
$$+(b_0^{\,2}+b_0p^{1/2}c_0-b_0p^{1/2}c_0-pc_0^{\,2})=0$$

$$x^4+2b_1x^3+(b_1^{\,2}+2b_0-p)x^2+2(b_0b_1-pc_0)x+b_0^{\,2}-pc_0^{\,2}=0 \qquad (4)$$

เทียบสัมประสิทธิ์สมการที่ (1) กับสมการที่ (4) จะได้ว่า

$$2b_1=a_3 \qquad (5)$$

$$b_1^{\,2}+2b_0-p=a_2 \qquad (6)$$

$$2(b_0b_1-pc_0)=a_1 \qquad (7)$$

$$b_0^{\,2}-pc_0^{\,2}=a_0 \qquad (8)$$

เราจะพิจารณาหาค่าของ b_0, b_1, c_0 และ p ในเทอมของ a_0, a_1, a_2, a_3 จากสมการที่ (5) ถึง (8)

จากสมการที่ (5) จะได้ว่า

$$2b_1=a_3$$

$$b_1=\frac{a_3}{2} \qquad (9)$$

จากสมการที่ (6) จะได้ว่า

$$b_1^{\,2}+2b_0-p=a_2$$

$$b_0=\frac{1}{2}\left(p+a_2-b_1^{\,2}\right) \qquad (10)$$

ใช้สมการที่ (9) แทนลงในสมการที่ (10) จะได้ว่า

$$b_0=\frac{1}{2}\left[p+a_2-\left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right] \qquad (11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (7) จะได้ว่า

$$2(b_0b_1-pc_0)=a_1$$

$$2b_0b_1 - 2pc_0 = a_1$$

$$2b_0b_1 - a_1 = 2pc_0 \qquad (12)$$

ใช้สมการที่ (9), (11) แทนในสมการที่ (12) จะได้ว่า

$$2\left[\frac{1}{2}\left(p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right)\right]\left(\frac{a_3}{2}\right) - a_1 = 2pc_0$$

$$2pc_0 = \left(\frac{a_3}{2}\right)\left[p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right] - a_1 \qquad (13)$$

ใช้สมการที่ (11) แทนในสมการ (8) จะได้ว่า

$$\left[\frac{1}{2}\left(p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right)\right]^2 - pc_0^{\,2} = a_0$$

$$\frac{1}{4}\left[p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right]^2 - a_0 = pc_0^{\,2}$$

$$4pc_0^{\,2} = \left[p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right]^2 - 4a_0 \qquad (14)$$

นำสมการที่ (13) ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$4p^2c_0^{\,2} = \left[\left(\frac{a_3}{2}\right)\left(p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right) - a_1\right]^2$$

$$4pc_0^{\,2} = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{a_3}{2}\right)\left(p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right) - a_1\right]^2 \qquad (15)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (14) และสมการที่ (15) เท่ากัน ฉะนั้น จะได้ว่า

$$\left[p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right]^2 - 4a_0 = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{a_3}{2}\right)\left(p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right) - a_1\right)\right]^2$$

$$p\left[\left(p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right)^2 - 4a_0\right] = \left[\left(\frac{a_3}{2}\right)\left(p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right) - a_1\right]^2 \qquad (16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการที่ (16) มาเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

โดยกำหนดให้ $F_1 = a_2 - \left(\frac{a_3^2}{4}\right)$ (17)

$$p_1 = p + F_1 \tag{18}$$

ใช้สมการที่ (17), (18) แทนในสมการที่ (16) จะได้

$$p\left[(p+F_1)^2 - 4a_0\right] = \left[\left(\frac{a_3}{2}\right)(p+F_1) - a_1\right]^2$$

$$(p_1 - F_1)\left[p_1^2 - 4a_0\right] = \left[\left(\frac{a_3}{2}\right)p_1 - a_1\right]^2$$

$$p_1^3 - 4a_0p_1 - F_1p_1^2 + 4a_0F_1 = \left(\frac{a_3^2}{4}\right)p_1^2 - 2\left(\frac{a_3}{2}\right)a_1p_1 + a_1^2$$

$$p_1^3 - 4a_0p_1 - F_1p_1^2 + 4a_0F_1 = (a_2 - F_1)p_1^2 - a_1a_3p_1 + a_1^2$$

$$p_1^3 - a_2p_1^2 + (a_1a_3 - 4a_0)p_1 + (4a_0F_1 - a_1^2) = 0 \tag{19}$$

จะสังเกตว่า สมการที่ (19) คือสมการพหุนามกำลังสาม (cubic equation) ที่อยู่ในเทอมของ p_1 ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงเมื่อเราแก้สมการที่ (19) นี้ เราจะได้ว่า มี p_1 ซึ่งเป็นรากที่เป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งราก ดังนั้น เราจะใช้ p_1 ตัวนี้ในการหาค่า p จากสมการที่ (18) นั่นคือ

$$p = p_1 - F_1 \tag{20}$$

เมื่อเราทราบค่า p จะทำให้เราหา b_0 ได้จากสมการที่ (11) และหาค่า c_0 ได้จากสมการที่ (13) นั่นคือ

$$c_0 = \frac{1}{2p}\left[\left(\frac{a_3}{2}\right)\left[p + a_2 - \left(\frac{a_3^2}{4}\right)\right] - a_1\right] \tag{21}$$

ตอนนี้เราสามารถหาสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า b_0, b_1, c_0, p ได้ทั้งหมดแล้ว ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการพหุนามกำลังสี่หรือสมการที่ (1) ในรูปแบบของสมการที่ (2) ได้ ซึ่งเราจะพิจารณาค่ารากของสมการพหุนามกำลังสี่ จากตัวประกอบของพหุนามกำลังสองในสมการที่ (3) นั่นคือ

$$\left[x^2 + (b_1 - p^{1/2})x + b_0 - p^{1/2}c_0\right] = 0 \tag{22}$$

$$\left[x^2 + (b_1 + p^{1/2})x + b_0 + b^{1/2}c_0\right] = 0 \tag{23}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาค่ารากของสมการพหุนามกำลังสองของสมการที่ (22) , (23) โดยใช้สูตร จะได้

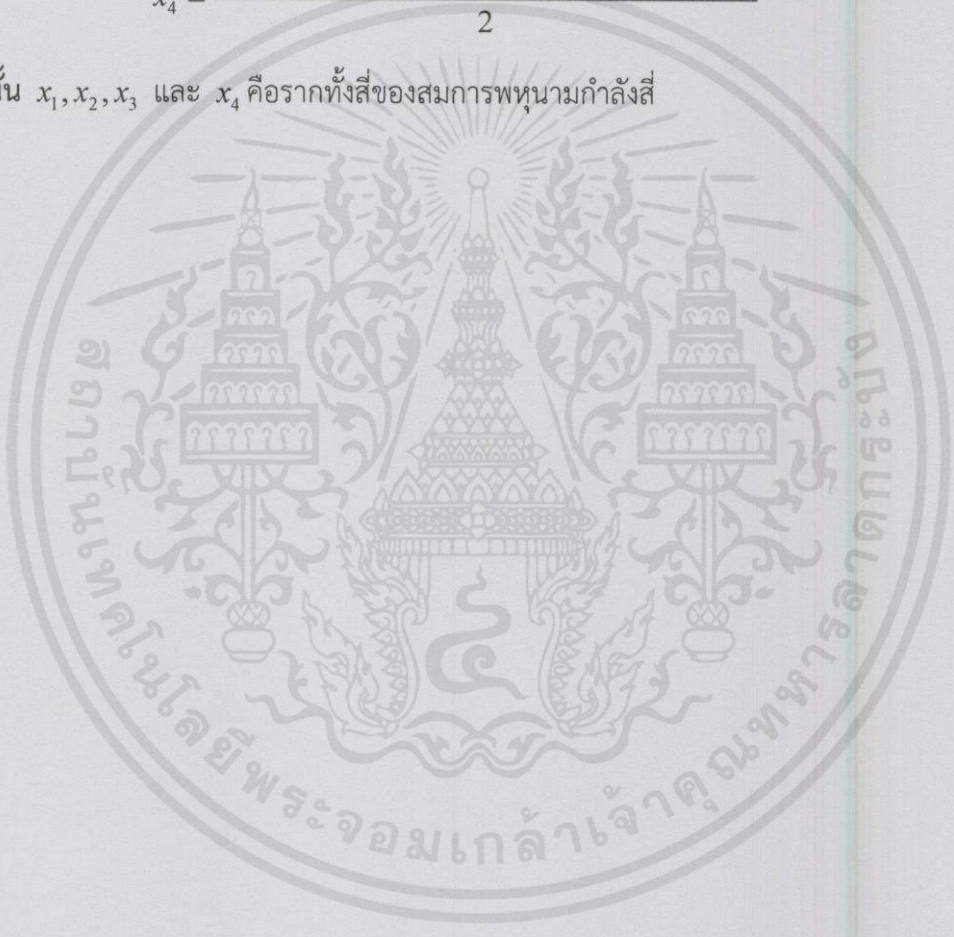
$$x_1 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) + [(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_0 - p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) - [(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_0 - p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-(b_1 + p^{1/2}) + [(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_0 + p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) - [(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_0 + p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2}$$

ดังนั้น x_1, x_2, x_3 และ x_4 คือรากทั้งสี่ของสมการพหุนามกำลังสี่



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปการแก้สมการพหุนามกำลังสี่

สมการพหุนามกำลังสี่ มีรูปแบบ ดังนี้

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a_0, a_1, a_2, a_3 เป็นจำนวนจริง

1) หาค่าของ F_1 จากสมการ

$$F_1 = a_2 - \frac{a_3^{\,2}}{4}$$

2) เลือกค่าของ p_1 ที่สอดคล้องกับสมการเมื่อ $p_1 \neq F_1$

$$p_1^{\,3} - a_2p_1^{\,2} + (a_1a_3 - 4a_0)\,p_1 + 4a_0F_1 - a_1^{\,2} = 0$$

3) หาค่าของ (สัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า)

$$p = p_1 - F_1$$

$$b_1 = \frac{a_3}{2}$$

$$b_0 = \frac{1}{2}\left[p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right]$$

$$c_0 = \frac{1}{2p}\left[\left(\frac{a_3}{2}\right)\left[p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right] - a_1\right]$$

4) หาค่ารากทั้งหมดจากสมการจาก

$$x_1 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) + [(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_0 - p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) - [(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_0 - p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-(b_1 + p^{1/2}) + [(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_0 + p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) - [(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_0 + p^{1/2}c_0)]^{2}}{2}$$

ดังนั้น ค่าของ x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นรากทั้งสี่ของสมการพหุนามกำลังสี่ □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.3จงหาค่ารากทั้งหมดของสมการพหุนามกำลังสี่ต่อไปนี้

$$x^4 - 3x^3 - 12x - 16 = 0$$

จากโจทย์ จะได้ว่า $a_0 = -16$, $a_1 = -12$, $a_2 = 0$, $a_3 = -3$

1) หาค่าของ F_1 จากสมการ

$$F_1 = a_2 - \frac{a_3^{\,2}}{4} = -\frac{9}{4}$$

2) เลือกค่าของ p_1 ที่สอดคล้องกับ

$$p_1^{\,3} - a_2 p_1^{\,2} + \left(a_1 a_3 - 4a_0\right) p_1 + 4a_0 F_1 - a_1^{\,2} = 0$$

จะได้ $p_1 = 0$, $-10i$, $10i$

เลือก $p_1 = 0$

3) หาค่าขอสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า

$$p = p_1 - F_1 = \frac{9}{4}$$

$$b_1 = \frac{a_3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$b_0 = \frac{1}{2}\left[\, p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right] = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{2p}\left[\left(\frac{a_3}{2}\right)\left[\, p + a_2 - \left(\frac{a_3^{\,2}}{4}\right)\right] - a_1\right] = \frac{8}{3}$$

4) หาค่ารากทั้งหมดจากสมการ

$$x_1 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) + [(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_0 - p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) - [(b_1 - p^{1/2})^2 - 4(b_0 - p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2} = -1$$

$$x_3 = \frac{-(b_1 + p^{1/2}) + [(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_0 + p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2} = 2i$$

$$x_4 = \frac{-(b_1 - p^{1/2}) - [(b_1 + p^{1/2})^2 - 4(b_0 + p^{1/2}c_0)]^{1/2}}{2} = -2i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น คำรากทั้งหมดคือ 4 , -1 , $2i$, $-2i$

2.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นจำเป็นต้องหาค่ารากของสมการพหุนามลักษณะเฉพาะซึ่งสามารถหาได้โดยวิธีการหารากสมการพหุนามข้างต้น ค่ารากของสมการจะเป็นตัวกำหนดรูปแบบของผลเฉลยและภาวะรากซ้ำของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งแบ่งออกเป็น

2.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

1) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเอกพันธุ์จะอยู่ในรูป

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงที่และสมการพหุนามลักษณะเฉพาะคือ

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r^2 + a_0 r = 0$$

ซึ่งค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะจะส่งผลต่อผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญคือ

- **กรณีค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง**

ผลเฉลยจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงกำลัง นั่นคืออยู่ในรูป $y_h = c_n e^{rx}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ r คือค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 2.4 $y'' - 4y' + 3y = 0$

สมการพหุนามลักษณะเฉพาะคือ $r^2 - 4r + 3 = 0$

$$(r-3)(r-1) = 0$$

$$r = 3, 1$$

ผลเฉลยคือ $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{1x}$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่

- **กรณีค่ารากสมการพหุนามการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน**

เมื่อรากสมการอยู่ในรูป $r = a + bi$ เมื่อ $i^2 = -1$ ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์จะอยู่ในรูป $y_h = e^{ax}\left(c_n \cos(bx) + c_{n+1} sin(bx)\right)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ a, b คือส่วนจริงและส่วนจินตภาพของค่ารากสมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.5 $y''+y'+y=0$

สมการพหุนามลักษณะเฉพาะคือ $r^2+r+1=0$

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$r=\frac{(-1)\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$r=\frac{-1-3i}{2},\frac{-1+3i}{2}$$

ผลเฉลยคือ

$y=e^{(-1/2x)}(c_1cos(-3/2)x+c_2sin(-3/2)x)+e^{(-1/2x)}(c_3cos(3/2)x+c_4sin(3/2)x)$ เมื่อ c_1,c_2,c_3 และ c_4 เป็นค่าคงที่

2) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเอกพันธุ์จะอยู่ในรูป

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$$

เมื่อ $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ เป็นค่าคงที่ และ f เป็นฟังก์ชั่นต่างๆเช่น พหุนาม ฟังก์ชันตรีโกณ ฟังก์ชันเชิงกำลัง เป็นต้น

การเขียนสมการลักษณะเฉพาะและรูปแบบของผลเฉลยจะเหมือนกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเอกพันธุ์ ผลเฉลยจะอยู่ในรูปของ $y=y_h+y_p$ เมื่อ y_h สามารถหาได้ดังตัวอย่างข้างต้น ส่วน y_p สามารถหาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.6 $y''+4y=4e^{-2x}$

หาค่า y_h จากสมการลักษณะเฉพาะ $r^2+4=0$

$$r^2=-4$$

$$r=\pm 2i$$

จะได้ $y_h=c_1cos2x+c_2sin2x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาค่าของ y_p สมมติให้ $y_p = Ae^{-2x}$

จะได้ $y_p' = -2Ae^{-2x}$ และ $y_p'' = 4Ae^{-2x}$

แทนค่าในโจทย์จะได้ $4Ae^{(-2x)} + 4(Ae^{(-2x)}) = 4e^{(-2x)}$

$$8Ae^{-2x} = 4e^{-2x}$$

จะได้ $8A = 4 \rightarrow A = \frac{1}{2}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p = \frac{1}{2}e^{-2x}$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยทั่วไป

$$y = y_h + y_p = c_1 cos2x + c_2 sin2x + \frac{1}{2}e^{(-2x)}$$

2.2.2 สมการออยเลอร์

สมการออยเลอร์ คือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรซึ่งมีรูปทั่วไปคือ

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = 0$$

เมื่อ a_i เมื่อ $i = 0, 1, 2, ..., n$ และสมการพหุนามลักษณะเฉพาะสามารถหาได้จากการแทนค่า $y = x^r$ ในรูปแบบทั่วไป ซึ่งค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะจะส่งผลต่อผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญคือ

- **กรณีค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง**

ผลเฉลยจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงกำลัง นั่นคืออยู่ในรูป $y_h = c_n x^r$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ r คือค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 2.7 $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$

สมการพหุนามลักษณะเฉพาะคือ $r^2 + 4r + 4 = 0$

$$(r+2)(r+2) = 0$$

$$r = -2, -2$$

ผลเฉลยคือ $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} lnx$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- **กรณีค่ารากสมการพหุนามการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน**

เมื่อรากสมการอยู่ในรูป $r = a + bi$ เมื่อ $i^2 = -1$ ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์จะอยู่ในรูป $y_h = x^a \left(c_n \cos\left(b\left(lnx\right)\right) + c_{n+1} sin\left(b\left(lnx\right)\right)\right)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ a, b คือส่วนจริงและส่วนจินตภาพของค่ารากสมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 2.8 $x^2 y'' + y = 0$

สมการพหุนามลักษณะเฉพาะคือ $r^2 + r + 1 = 0$

$$\left(r + \frac{1+3i}{2}\right)\left(r + \frac{1-3i}{2}\right) = 0$$

$$r = \frac{-1-3i}{2}, \frac{-1+3i}{2}$$

ผลเฉลยคือ

$$y = x^{(-\frac{1}{2})}(c_1 cos(-\frac{3}{2})lnx + c_2 sin(-\frac{3}{2})lnx) + x^{(-\frac{1}{2})}(c_3 cos(\frac{3}{2})lnx + c_4 sin(\frac{3}{2})lnx)$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นค่าคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 ภาวะรากซ้ำของผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2.3.1 ภาวะรากซ้ำของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์-ไม่เอกพันธุ์

1) ภาวะรากซ้ำของ y_h

ภาวะรากซ้ำของ y_h จะเกิดขึ้นเมื่อค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะมีค่าซ้ำกันเช่น $r=2,2$, $r=2,-1,-1$ เป็นต้น ซึ่งผลเฉลยของค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะที่มีค่าซ้ำ ตั้งแต่ตัวที่ n เมื่อ $n=2,3,4,...,k$ จะต้องคูณด้วย x^{n-1}

ตัวอย่างที่ 2.7 $r=2,1,1,1$ จะได้ผลเฉลยคือ $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+c_3xe^{x}+c_4x^2e^{x}$

2) ภาวะรากซ้ำในการสมมติ y_p

ภาวะรากซ้ำในการสมมติ y_p จะเกิดขึ้นเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธุ์ เมื่อกำหนดค่า จะต้องคูณด้วย x^n เมื่อ n คือจำนวนรากพหุนามลักษณะเฉพาะที่เกิดภาวะรากซ้ำ

- **ภาวะรากซ้ำเมื่อ** $f=ae^{bx}$

จะเกิดขึ้นเมื่อค่ารากของพหุนามลักษณะเฉพาะ มีเท่ากับจำนวนจริง bที่ไม่เท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 2.8 $f=4e^{-2x}$ และ $r=-1,-2,-2$

เกิดภาวะรากซ้ำ 2 ที่ $r=2$

จะสมมติ $y_p=Ax^2e^{-2x}$

- **ภาวะรากซ้ำเมื่อ** $f=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$

จะเกิดขึ้นเมื่อค่ารากของพหุนามลักษณะเฉพาะ มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$

ตัวอย่างที่ 2.9 $f=3e^{2x}\sin x$ และ $r=-1,2+i$

เกิดภาวะรากซ้ำ 1 ที่ $r=2+i$

จะสมมติ $y_p=xe^{2x}(A\cos x+\mathrm{B}\sin x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- **ภาวะรากซ้ำเมื่อ f เป็นพหุนาม**
  จะเกิดขึ้นเมื่อค่ารากของพหุนามลักษณะเฉพาะ มีค่าเป็น 0

ตัวอย่างที่ 2.10 $f = x^2 - 1$ และ $r = 2, -4, 0$

เกิดภาวะรากซ้ำ 1 ที่ $r = 0$

จะต้องสมมติ $y_p = (Ax^2 + Bx + C)\mathrm{x}$

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงการสมมติค่า y_p

รูปแบบของ $f(\mathrm{x})$	รูปแบบที่สมมติของ y_p	k เป็นภาวะรากซ้ำของราก
$p(x)$ เป็นพหุนามอันดับ n	$x^k(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n)$	0
$Ee^{\alpha x}$ เมื่อ E เป็นค่าคงตัว	$Ax^k e^{\alpha x}$	α
$p(\mathrm{x})e^{\alpha x}$ เมื่อ $p(x)$ เป็นพหุนามอันดับ n	$x^k(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n)\mathrm{e}^{\alpha x}$	α
$E_1\cos\beta\mathrm{x} + E_2\sin\beta x$ E_1 และ E_2 เป็นค่าคงที่และ ไม่เป็น 0 พร้อมกัน	$\mathrm{x}^k(\mathrm{A}\cos\beta\mathrm{x} + B\sin\beta x)$	βi
$\mathrm{p(x)}\cos\beta\mathrm{x} + q(x)\sin\beta x$ เมื่อ $p(x)$ เป็นพหุนามอันดับ n $q(x)$ เป็นพหุนามอันดับ m	$x^k(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^s)\cos\beta x$ $+x^k(B_0 + B_1x + \ldots + B_nx^s)\sin\beta x$ เมื่อ s เป็นค่ามากที่สุดของ m, n	βi
$E_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta\mathrm{x} + E_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ E_1 และ E_2 เป็นค่าคงที่และ ไม่เป็น 0 พร้อมกัน	$\mathrm{x}^k(\mathrm{Ae}^{\alpha x}\cos\beta\mathrm{x} + B\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x)$	$\alpha + \beta i$

2.3.2 ภาวะรากซ้ำของสมการออยเลอร์

ภาวะรากซ้ำในสมการออยเลอร์จะเกิดขึ้นเมื่อค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะมีค่าซ้ำกันเช่น $r = 2, 2$, $r = 2, -1, -1$ เป็นต้น ซึ่งผลเฉลยของค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะที่มีค่าซ้ำ ตั้งแต่ตัวที่ n เมื่อ $n = 2, 3, 4, \ldots, k$ จะต้องคูณด้วย $(\ln x)^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 2.11 $r = 1, 2, 2$ จะได้ผลเฉลยคือ $y_h = c_1x + c_2x^2 + c_3x^2\ln x + c_4x^2(\ln x)^2$

เอกสารนี้เป็นการเผยแพร่ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 ซอฟแวร์ที่ใช้พัฒนาโปรแกรม

2.4.1 ภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรม

โปรแกรมนี้พัฒนาขึ้นโดยใช้ภาษา Java โดยในการเขียนชุดคำสั่งต่างๆ จากภาษา Java มีข้อดีและคุณสมบัติเด่นดังนี้

1. ภาษา Java เป็นภาษาโปรแกรมที่ง่ายในการเรียนรู้ ภาษา Java มีคุณลักษณะต่างๆ ดังนี้ เช่น เชื่อมต่อข้ามแพล็ตฟอร์ม (Platforms) ต่างๆ ได้ สามารถเขียนโปรแกรมแบบ OOP (Object-Oriented Programming) ได้ง่ายมาก โปรแกรมมีขนาดเล็ก และมีวิธีการเขียนไม่ยุ่งยากซับซ้อน ดังนั้นโปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java จึงคอมไพล์ได้ง่ายตลอดจนตรวจสอบหาข้อผิดพลาดโปรแกรมได้ง่ายด้วย

2. ภาษา Java เป็นการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ OOP การเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ เป็นเทคนิคการเขียนโปรแกรมให้มีลักษณะเป็นโมดูล (Module) โดยแบ่งโปรแกรมเป็นส่วนๆ ตามสภาวะแวดล้อมการทำงานของโปรแกรมซึ่งเรียกว่า Method โดยทุก Method คือ ระเบียบวิธี หรือการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยจะถูกรวบรวมอยู่ในคลาส(Class) ซึ่งหลักการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุจะมององค์ประกอบของโปรแกรมต่างๆเป็นคลาสหรือวัตถุ เรียกว่า Object ตัวอย่าง เช่น วัตถุที่มองเห็นได้ เช่น รถ สินค้า หรือวัตถุที่ไม่สามารถมองเห็นได้ เช่น เหตุการณ์ หรือข้อมูลต่างๆของ Object จะถูกซ่อนไว้คลาสเรียกว่า Data Encapsulation ซึ่งมีประโยชน์ในการแก้ไขข้อมูลหรือMethod ใดๆ ที่อยู่ในคลาสโดยไม่ส่งผลกระทบต่อการทำงานหรือเรียกใช้งานของ Object นั้น

3. ภาษา Java เป็นอิสระต่อแพล็ตฟอร์ม(Java is Platform Independent)Java เป็นอิสระต่อแพล็ตฟอร์ม ทั้งระดับซอร์ซโค้ด (Source Code) และไบนารีโค้ด (Binary Code) ช่วยให้สามารถเคลื่อนย้ายโปรแกรมจากระบบคอมพิวเตอร์หนึ่งไปยังระบบคอมพิวเตอร์อื่นได้อย่างง่ายดาย เพราะว่าโปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java ได้รวบรวมคำสั่งต่างๆไว้ในไลบรารีคลาสพื้นฐานต่างๆ เป็น Java Packages ช่วยอำนวยความสะดวกในการเขียนคำสั่ง เมื่อย้ายโปรแกรมไปยังแพล็ตฟอร์มอื่น โดยไม่ต้องเขียนซอร์ซโค้ด (Source Code) ขึ้นใหม่ทำให้ประหยัดเวลามาก เมื่อคอมไพล์ซอร์ซโค้ด จะได้ไฟล์ไบนารีโค้ด ที่เรียกว่า Byte code การรันโปรแกรมของ Java จะทำงานในลักษณะอินเทอร์พรีเตอร์ (Interpreter) ของไฟล์ Byte code ซึ่งสามารถรันบนแพล็ตฟอร์มใดๆ ก็ได้ รวมทั้งระบบปฏิบัติการต่างๆ เช่น ระบบ Windows, Solaris, Linux หรือ Mac OS โดยการแปลคำสั่งทีละคำสั่ง แพล็ตฟอร์มที่ Java ทำงานได้จะต้องประกอบด้วย 2 ส่วน คือ Java Virtual Machine (JVM) และ Java Application Programming Interface (Java API) โดย Java Virtual Machine คือ เครื่องมือที่รวบรวมคำสั่งคอมไพล์และรันโปรแกรม Java ส่วน Java API เป็นกลุ่มของคลาส และอินเตอร์เฟส (Interface) ที่รวมอยู่ในไลบรารีที่เรียกว่า Java Package เช่น java.awt, java.utilหรือ java.io เป็นต้น ลักษณะการทำงานของ Java ที่เป็นอิสระต่อแพล็ตฟอร์มโดยการเขียนโปรแกรมเพียงครั้งเดียวแต่สามารถนำไปใช้ทำงานยังเครื่องอื่นๆ ได้นั้นเรียกว่า Write once, Run anywhere

เอกสารนี้ ไม่ว่ากรณีใดๆ

4. ภาษา Java มีระบบการทำงานและมีระบบความปลอดภัยที่ดี Java จะคำสั่งต่างๆที่เป็นส่วนประกอบของ Java API โดยมีการรวบรวมเป็นคลาสต่างๆไว้มากมาย ช่วยอำนวยความสะดวกในการเขียนโปรแกรม นอกจากนั้นยังมี Garbage Collector โดยมีระบบจัดการหน่วยความจำเพื่อเก็บขยะของโปรแกรมและคืนหน่วยความจำให้กับระบบ โปรแกรมที่เขียนด้วยภาษา Java มีระบบจัดการข้อผิดพลาดที่เกิดจากการทำงานของโปรแกรมที่เรียกว่า Exception Handling ด้วยทำให้สามารถตรวจสอบโปรแกรม (Debug) โปรแกรมได้ง่ายขึ้น Java มีระบบความปลอดภัยที่ดี เช่น โปรแกรม Java ที่ทำงานบนเว็บบราวเซอร์ (Web Browser) ที่เรียกว่า Java Applet นั้นจะทำงานเฉพาะบนเครื่องแม่ข่าย (Server) โดยไม่สามารถเข้าถึงเครื่องลูกข่าย (Client) ไปทำลายไฟล์ หรือไฟล์ระบบ (System file) ได้ ทำให้มีระบบความปลอดภัยที่ดี ป้องกันข้อมูลจากไวรัส และโปรแกรมที่เขียนด้วย Java ไม่มีพฤติกรรมเป็นไวรัสได้

ที่มา http://www.elearning.msu.ac.th/opencourse/1201104/Unit_3/Unit_1_01_3.htm

2.4.2 โปรแกรมที่ใช้ในสร้างหน้าต่างผู้ใช้งาน

ในการพัฒนาหน้าต่างผู้ใช้เราได้ใช้โปรแกรม Eclipse ในการพัฒนาซึ่งโปรแกรม Eclipse เป็นโปรแกรมหนึ่งที่ใช้ในการพัฒนา Application Server ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

Eclipse มีองค์ประกอบหลักที่เรียกว่า Eclipse Platform ซึ่งให้บริการพื้นฐานหลักสำหรับรวบรวมเครื่องมือต่างๆจากภายนอกให้สามารถเข้ามาทำงานร่วมกันในสภาพสภาพแวดล้อมเดียวกัน และมีองค์ประกอบที่เรียกว่า Plug-in Development Environment (PDE) ซึ่งใช้ในการเพิ่มความสามารถในการพัฒนาซอฟต์แวร์มากขึ้น เครื่องมือภายนอกจะถูกพัฒนาในรูปแบบที่เรียกว่า Eclipse plug-ins ดังนั้นหากต้องการให้ Eclipse ทำงานใดเพิ่มเติม ก็เพียงแต่พัฒนา plugin สำหรับงานนั้นขึ้นมา และนำ Plug-in นั้นมาติดตั้งเพิ่มเติมให้กับ Eclipse ที่มีอยู่เท่านั้น Eclipse Plug-in ที่มีมาพร้อมกับ Eclipse เมื่อเรา download มาครั้งแรกก็คือองค์ประกอบที่เรียกว่า Java Development Toolkit (JDT) ซึ่งเป็นเครื่องมือในการเขียนและ Debug โปรแกรมภาษา Java

ข้อดีของโปรแกรม Eclipse คือ ติดตั้งง่าย สามารถใช้ได้กับ J2SDK ได้ทุกเวอร์ชั่น รองรับภาษาต่างประเทศอีกหลายภาษา มี plugin ที่ใช้เสริมประสิทธิภาพของโปรแกรม สามารถทำงานได้กับไฟล์หลายชนิด เช่น HTML, Java, C, JSP, EJB, XML และ GIF อีกทั้งยังสามารถใช้งานได้กับระบบปฏิบัติการ Windows, Linux และ Mac OS

ที่มา http://javaitfun.blogspot.com/2013/09/eclipse.html

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การออกแบบส่วนติดต่อผู้ใช้ และขั้นตอนวิธี

ส่วนติดต่อผู้ใช้ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

1) ส่วนเลือกหัวข้อการทำงาน

2) ส่วนหน้าจอผู้ใช้งาน ส่วนประมวลผล และส่วนแสดงผลลัพธ์

3.1 ส่วนเลือกหัวข้อการทำงาน

ส่วนนี้จะเป็นหน้าแรกของโปรแกรม ซึ่งจะประกอบด้วยส่วนต่างๆดังต่อไปนี้

1) สมการพหุนาม
   - 1.1 การหาค่ารากพหุนามกำลังสอง
   - 1.2 การหาค่ารากพหุนามกำลังสาม
   - 1.3 การหาค่ารากพหุนามกำลังสี่
2) สมการเชิงอนุพันธ์
   - 2.1 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง
   - 2.2 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม
   - 2.3 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่
3) สมการออยเลอร์
   - 3.1 การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสอง
   - 3.2 การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม
   - 3.3 การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่
4) แจ้งข้อผิดพลาด
5) ข้อมูลอาจารย์ที่ปรึกษา
6) ข้อมูลผู้พัฒนา

รูปที่ 3.1 หน้าต่างแสดงหน้าจอหลัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ส่วนหน้าจอผู้ใช้งาน ส่วนประมวลผล และส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนนี้เราจะจำแนกออกเป็นสามกลุ่ม คือ หน้าจอป้อนค่า หน้าจอแสดงขั้นตอนการคำนวน และหน้าจอแสดงผลลัพธ์

3.2.1 จอภาพการทำงานการหารากสมการพหุนามกำลังสอง

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

รูปแบบสมการคือ $ax^2+bx+c=0$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a,b,c ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม รูปแบบหน้าจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.2

รูปที่ 3.2 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสอง

2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ)

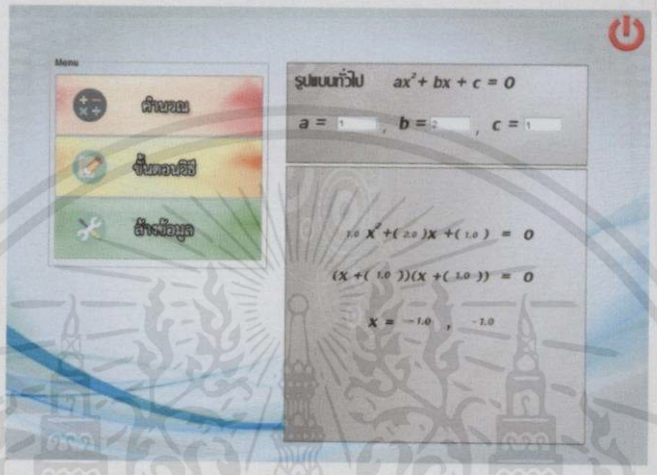
ใช้สูตรการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสองดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

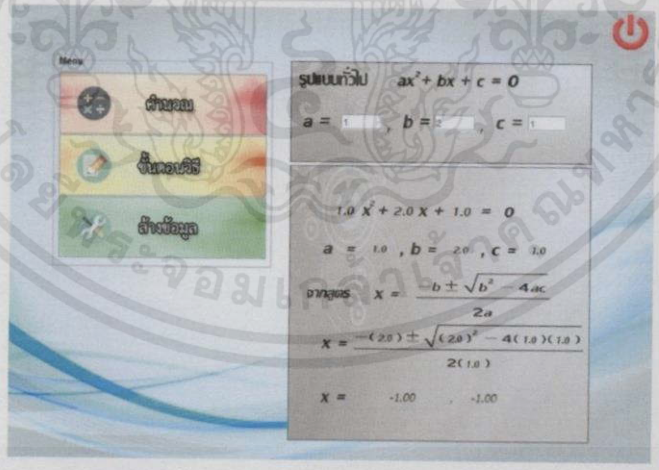
3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการพหุนามกำลังสองด้วยค่าสัมประสิทธิ์ที่ผู้ใช้กำหนดและป้อนให้ ผลลัพธ์จะแสดงเป็นรูปสมการ และแสดงในรูปตัวประกอบและแสดงค่ารากสมการ

รูปแบบจอภาพผลลัพธ์ ดังรูปที่ 3.3 และในกรณีที่ผู้ใช้ต้องการดูรายละเอียดวิธีการคิดสามารถกดปุ่มแสดงเพิ่มเติมได้ รูปแบบจอภาพรายละเอียดวิธีคิด ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.3 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสอง



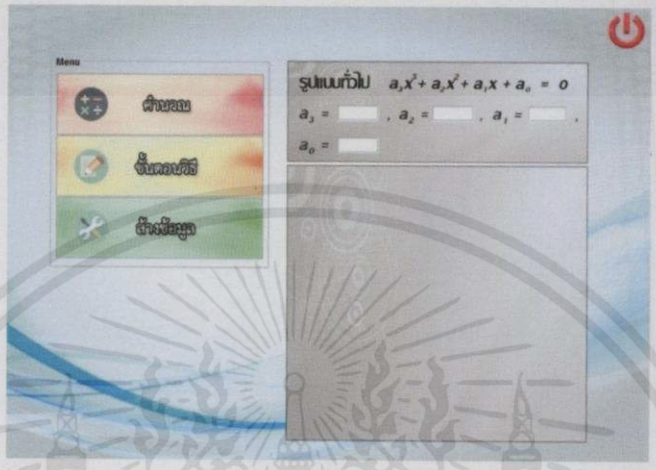
รูปที่ 3.4 หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2 จอภาพการทำงานการหารากสมการพหุนามกำลังสาม

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

รูปแบบสมการคือ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a,b,c,d ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม รูปแบบหน้าจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสาม

2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ)

ใช้วิธี Unified Method หาค่ารากสมการพหุนามกำลังสามดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2

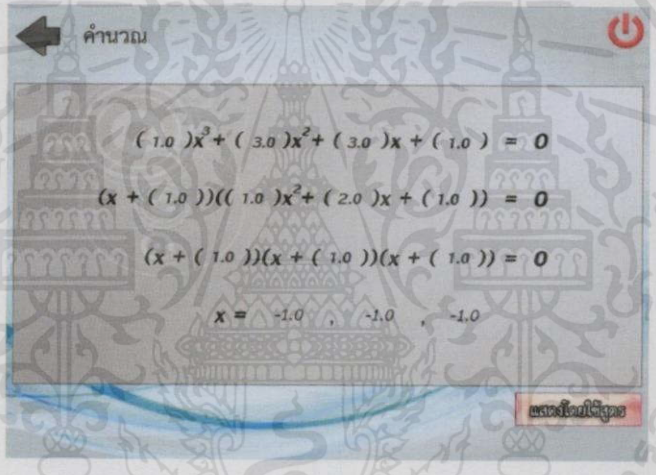
3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการพหุนามกำลังสามด้วยค่าสัมประสิทธิ์ที่ผู้ใช้กำหนดและป้อนให้ ผลลัพธ์จะแสดงเป็นรูปสมการ และแสดงในรูปตัวประกอบและแสดงค่ารากสมการ

รูปแบบจอภาพผลลัพธ์ ดังรูปที่ 3.6 และในกรณีที่ผู้ใช้ต้องการดูรายละเอียดวิธีการคิดสามารถกดปุ่มแสดงเพิ่มเติมได้ รูปแบบจอภาพรายละเอียดวิธีคิด ดังรูปที่ 3.7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.6 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสาม



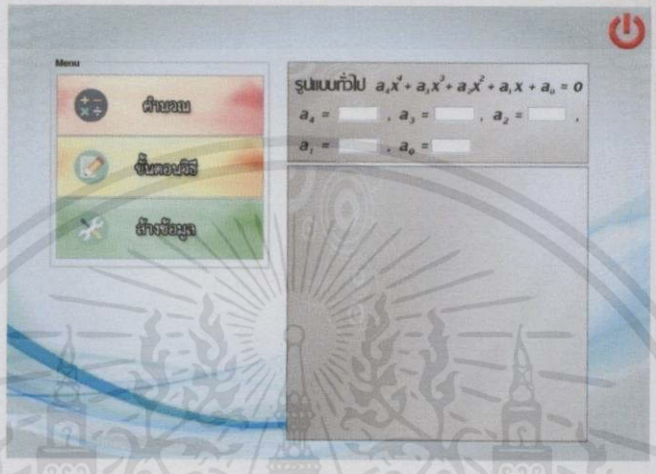
รูปที่ 3.7 หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3 จอภาพการทำงานการหารากสมการพหุนามกำลังสี่

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

รูปแบบสมการคือ $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม รูปแบบหน้าจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่

2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ)

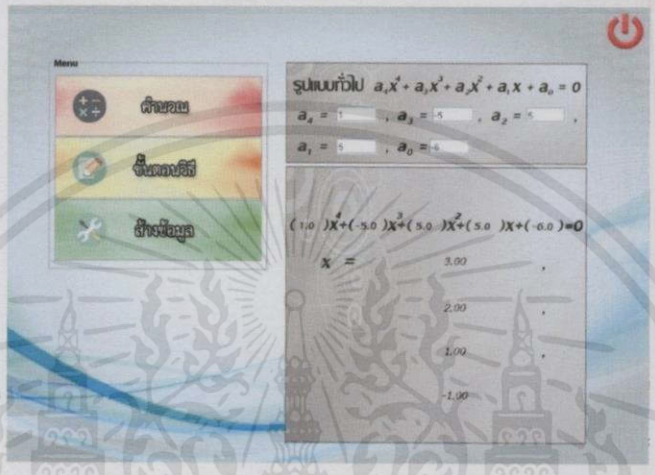
ใช้วิธี A New method for solving Quartics หาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

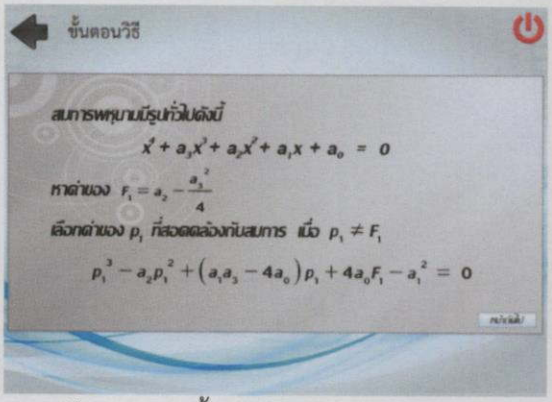
ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการพหุนามกำลังสี่ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ที่ผู้ใช้กำหนดและป้อนให้ ผลลัพธ์จะแสดงเป็นรูปสมการ และแสดงในรูปการแยกตัวประกอบ และแสดงค่ารากสมการ

รูปแบบจอภาพผลลัพธ์ ดังรูปที่ 3.9 และในกรณีที่ผู้ใช้ต้องการดูรายละเอียดวิธีการคิดสามารถกดปุ่มแสดงเพิ่มเติมได้ รูปแบบจอภาพรายละเอียดวิธีคิด ดังรูปที่ 3.10

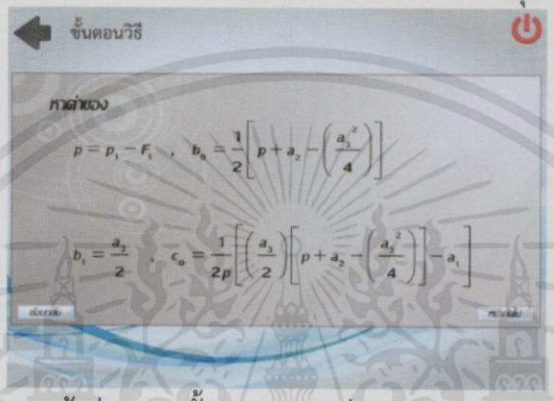


รูปที่ 3.9 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่

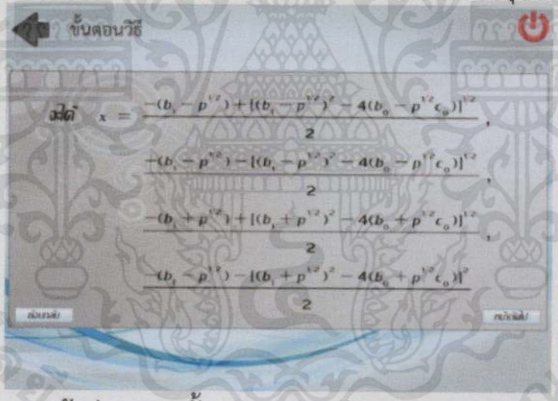
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



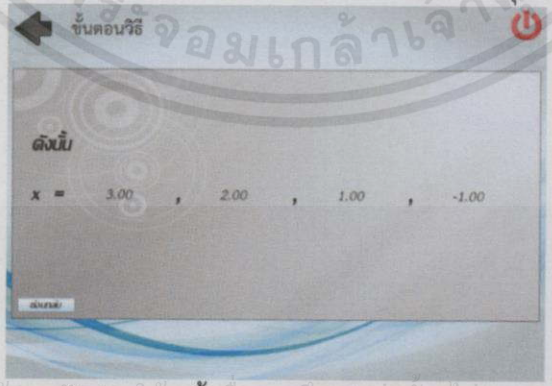
รูปที่ 3.10ก. หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่



รูปที่ 3.10ข.หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่



รูปที่ 3.10ค.หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่



รูปที่ 3.10ง. หน้าต่างแสดงขั้นตอนการหาค่ารากสมการพหุนามกำลังสี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.4 จอภาพการทำงานการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

จากรูปแบบทั่วไป $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a_0, a_1, a_2 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม และป้อนค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ตามรูปแบบจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.11

รูปที่ 3.11หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ)

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเอกพันธุ์จะอยู่ในรูป

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

เมื่อ a_i เมื่อ $i = 0,1,2,3,\ldots,n$ เป็นจำนวนเต็ม และจำนวนที่มีทศนิยม

1) เขียนสมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 r = 0$$

2) หาค่ารากของสมการพหุนามลักษณะเฉพาะตามหัวข้อ 2.2.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) ตรวจสอบผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะและตรวจสอบภาวะรากซ้ำตามบทที่ 2

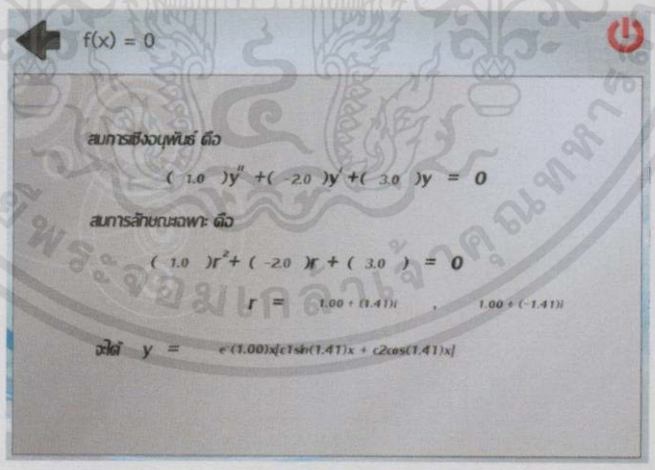
- กรณีค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง
  ผลเฉลยจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงกำลัง นั่นคืออยู่ในรูป $c_n e^{rx}$
- กรณีค่ารากสมการพหุนามการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน
  เมื่อ รากสมการอยู่ในรูป $r = a + bi$ เมื่อ $i^2 = -1$ ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์จะอยู่ในรูป $e^{ax}(c_n \cos(bx) + c_{n+1} \sin(bx))$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ a, b คือส่วนจริง และส่วนจินตภาพของค่ารากสมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

4) ถ้าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เอกพันธุ์จะต้องทำการหาค่า y_p จากการสมมติค่า y_p และตรวจสอบภาวะรากซ้ำตามบทที่ 2 โดย

- ถ้า $f = ae^{bx}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง จะสมมติ $y_p = Ae^{bx}$
- ถ้า $f = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$ เมื่อ a, b, c_1, c_2 เป็นจำนวนจริงจะสมมติ $y_p = e^{2x}(A\cos x + \mathrm{B}\sin x)$
- ถ้า $f = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงจะสมมติ $y_p = Ax^2 + Bx + C$

3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ผู้ใช้ได้ป้อนเข้ามาโดยจะแสดงผลออกมาตามรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.5 จอภาพการทำงานการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสาม

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

รูปแบบทั่วไปคือ $a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a_0, a_1, a_2, a_3 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม และป้อนค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ตามรูปแบบจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.13

รูปที่ 3.13 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม

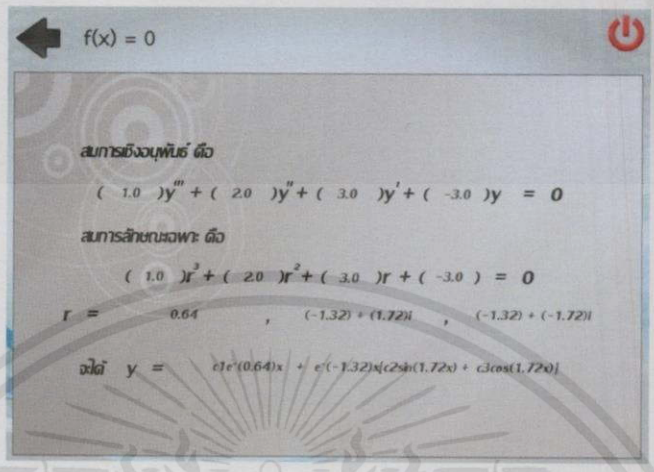
2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ)

ใช้วิธีการหาผลเฉลยดังที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.2.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสามที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ผู้ใช้ได้ป้อนเข้ามาโดยจะแสดงผลออกมาตามรูปที่ 3.14



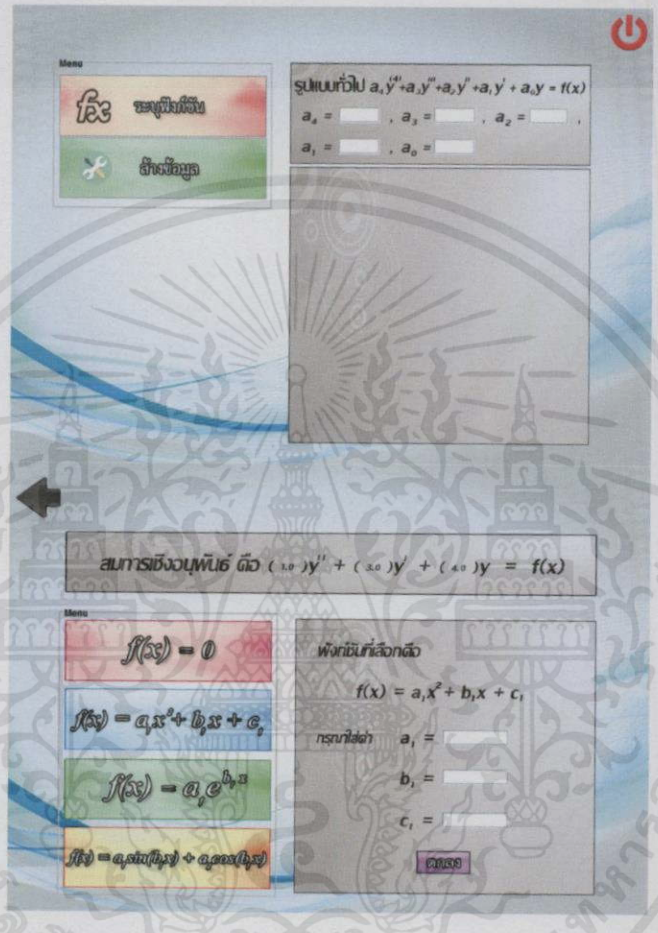
รูปที่ 3.14 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.6 จอภาพการทำงานการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

รูปแบบทั่วไปคือ $a_4y^{(4)}+a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่มีทศนิยม และป้อนค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ตามรูปแบบจอภาพผู้ใช้งานดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่

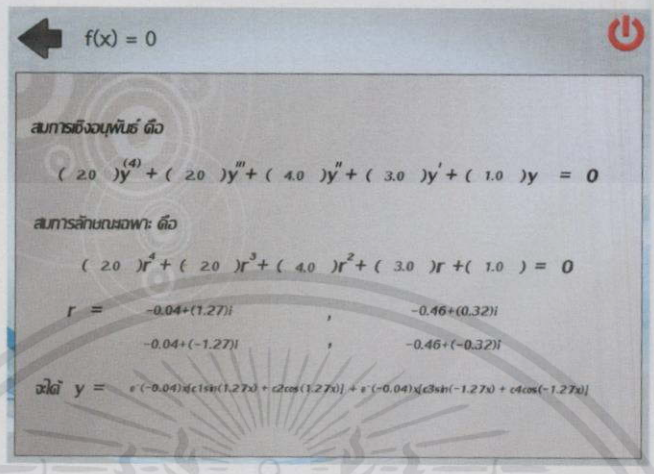
2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ)

ใช้วิธีการหาผลเฉลยดังที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.2.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ผู้ใช้ได้ป้อนเข้ามาโดยจะแสดงผลออกมาตามรูปที่ 3.16



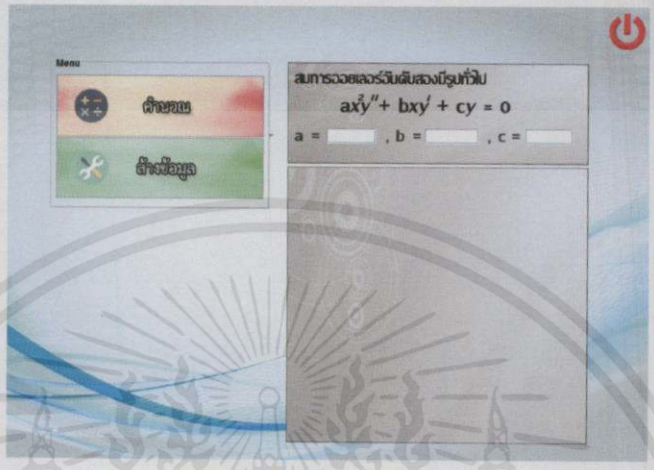
รูปที่ 3.16 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.7 จอภาพการทำงานการหาผลเฉลยออยเลอร์อันดับสอง

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

รูปแบบทั่วไปคือ $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a, b, c ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม รูปแบบจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับ 2

2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ)

สมการออยเลอร์อันดับสอง ซึ่งมีรูปทั่วไปคือ

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = 0$$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงที่

1) เขียนสมการพหุนามลักษณะเฉพาะ
2) หาค่ารากของสมการพหุนามลักษณะเฉพาะตามหัวข้อ 2.2.2
3) ตรวจสอบผลเฉลยของสมการพหุนามลักษณะเฉพาะ
   - กรณีค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง ผลเฉลยจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงกำลัง นั่นคืออยู่ในรูป $y_h = c_n x^r$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ r คือค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะ

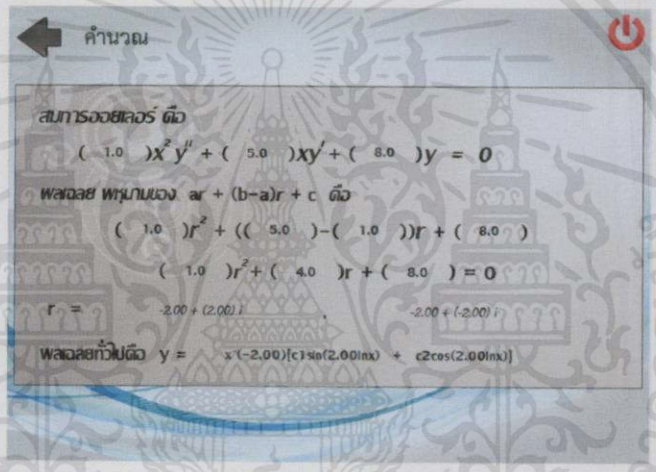
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- กรณีค่ารากสมการพหุนามการลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อ รากสมการอยู่ในรูป $r = a + bi$ เมื่อ $i^2 = -1$ ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์จะอยู่ในรูป คือ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ a, b คือส่วนจริงและส่วนจินตภาพของค่ารากสมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการออยเลอร์อันดับสองที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ผู้ใช้ได้ป้อนเข้ามาโดยจะแสดงผลออกมาตามรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.8 จอภาพการทำงานการหาผลเฉลยออยเลอร์อันดับสาม

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

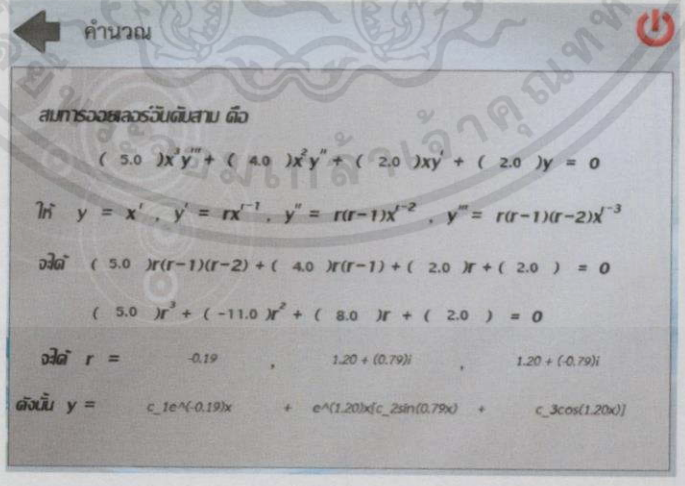
รูปแบบทั่วไปคือ $a_3x^3y'''+a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a_0, a_1, a_2, a_3 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม รูปแบบจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.19

รูปที่ 3.19 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม

2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ) ดังหัวข้อที่ 3.2.7

3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

ในส่วนแสดงผลลัพธ์จะเป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการออยเลอร์อันดับสามที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ผู้ใช้ได้ป้อนเข้ามาโดยจะแสดงผลออกมาตามรูปที่ 3.20



รูปที่ 3.20 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.9 จอภาพการทำงานการหาผลเฉลยออยเลอร์อันดับสี่

1) หน้าจอผู้ใช้งาน

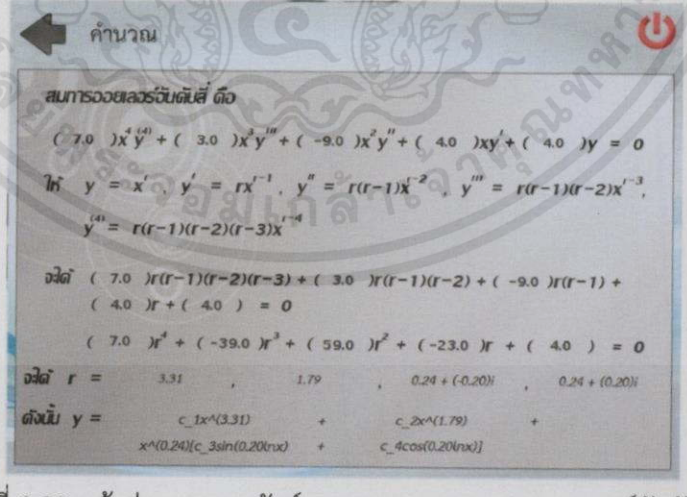
จากรูปแบบทั่วไป $a_4x^4y^{(4)} + a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$ ข้อมูลที่จะให้ผู้ใช้โปรแกรมป้อนประกอบด้วยค่า a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ซึ่งเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนที่มีทศนิยม รูปแบบจอภาพผู้ใช้งาน ดังรูปที่ 3.21

รูปที่ 3.21 หน้าต่างแสดงหน้าจอผู้ใช้งาน การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่

2) ส่วนประมวลผล (ขั้นตอนการคำนวณ) ดังหัวข้อที่ 3.2.7

3) ส่วนแสดงผลลัพธ์

จะเป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการออยเลอร์อันดับสี่ที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ผู้ใช้ได้ป้อนเข้ามาโดยจะแสดงผลออกมาตามรูปที่ 3.22



รูปที่ 3.22 หน้าต่างแสดงผลลัพธ์ การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การพัฒนาโปรแกรมและผลลัพธ์

4.1 การพัฒนาโปรแกรม

4.1.1 เครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนา

1) ฮาร์ดแวร์

ฮาร์ดแวร์ที่ใช้ในการพัฒนาโปรแกรมนี้ ได้แก่ คอมพิวเตอร์พกพา(Notebook) ซึ่งมีสเปค คือ CPU –หน่วยประมวลผล Intel Core i5-2410M (2.30GHz Turbo Boost up to 2.90GHz) 4MB L3 Cache, GPU - การ์ดจอ แสดงผล nVidia GeForce GT 540M หน่วยความจำ 1GB, ChipsetMobile Intel HM65 Express Chipset,หน่วยความจำ 4GB DDR3, ฮาร์ดดิส 640GB 5400 รอบต่อวินาทีเพื่อใช้ในเขียนโค้ดคำสั่ง ออกแบบและสร้างหน้าต่างผู้ใช้งาน และเพื่อทดสอบการทำงานของโปรแกรมบนคอมพิวเตอร์ต่างชนิดกัน

2) ซอฟแวร์

ในการเขียนโค้ดคำสั่งต่างๆ ที่ใช้ในโปรแกรมได้พัฒนาโดยใช้ภาษา Java เวอร์ชัน1.7.0 และโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างหน้าต่างผู้ใช้งาน คือ โปรแกรม Eclipse ซึ่งข้อดีและการทำงานของซอฟแวร์ทั้งสองนั้นได้กล่าวไว้บทที่ 2 และการพัฒนาโปรแกรมในส่วนต่างๆได้พัฒนาขึ้นบนระบบปฏิบัติการ Microsoft Window 8

4.1.2 โครงสร้างโปรแกรม

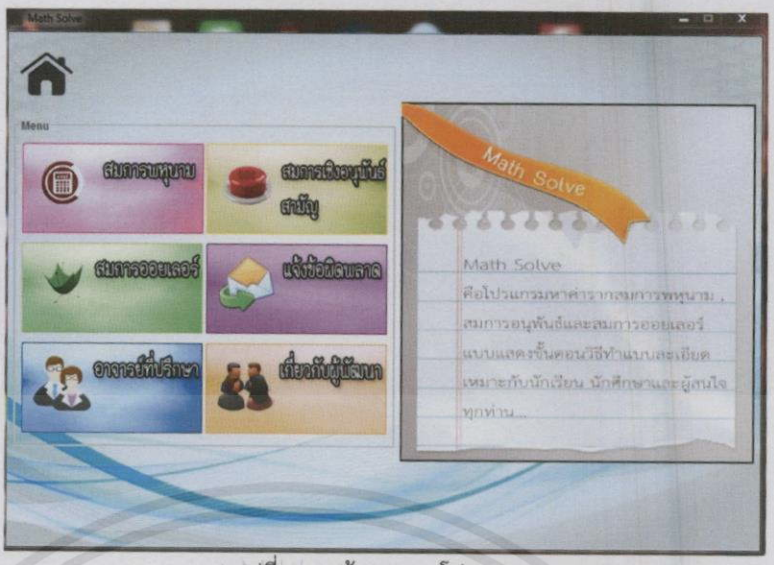
โครงสร้างของโปรแกรมจะประกอบด้วยกัน 4 ส่วนคือ

1) หน้าแรก

ซึ่งในหน้านี้จะประกอบเมนูต่างๆ ที่ให้ผู้ใช้เลือกใช้งานดังรูปที่ 4.1 ซึ่งประกอบไปด้วย

- สมการพหุนาม
- สมการเชิงอนุพันธ์
- สมการออยเลอร์
- แจ้งข้อผิดพลาด
- ข้อมูลอาจารย์ที่ปรึกษา
- ข้อมูลผู้พัฒนา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1 หน้าแรกของโปรแกรม

2) ส่วนการหาค่ารากสมการพหุนาม

ในส่วนนี้จะประกอบไปด้วยฟังก์ชั่นต่างๆ ในการหาค่ารากสมการพหุนามดังรูปที่ 4.2 ซึ่งประกอบไปด้วย

- การหาค่ารากพหุนามกำลังสอง
- การหาค่ารากพหุนามกำลังสาม
- การหาค่ารากพหุนามกำลังสี่

รูปที่ 4.2 ส่วนการหาค่ารากสมการพหุนาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) ส่วนการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ในส่วนนี้จะประกอบไปด้วยฟังก์ชั่นต่างๆ เกี่ยวกับการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดังรูปที่ 4.3 ซึ่งประกอบไปด้วย

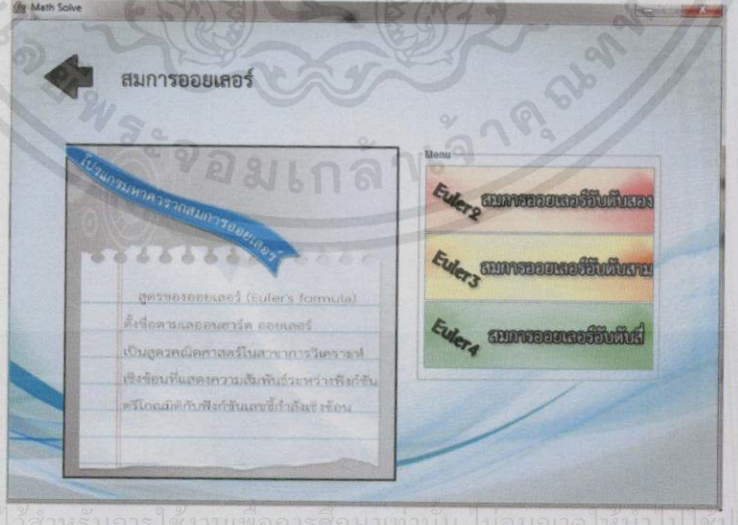
-การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง
- การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม
- การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่

รูปที่ 4.3 ส่วนการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์

4) ส่วนการหาผลสมการออยเลอร์

ในส่วนนี้จะประกอบไปด้วยฟังก์ชั่นต่างๆ เกี่ยวกับการหาผลเฉลยสมการออยเลอร์แบบเอกพันธุ์ ดังรูปที่ 4.4 ซึ่งประกอบไปด้วย

- การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสอง
- การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม
- การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่



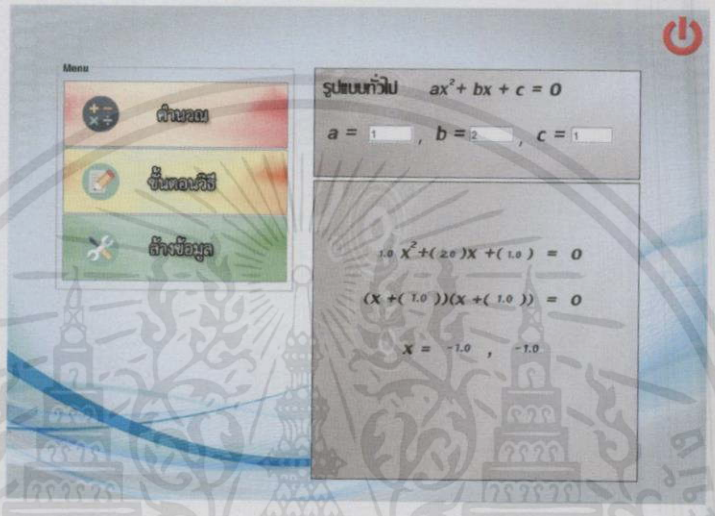
รูปที่ 4.4 ส่วนการหาผลสมการออยเลอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

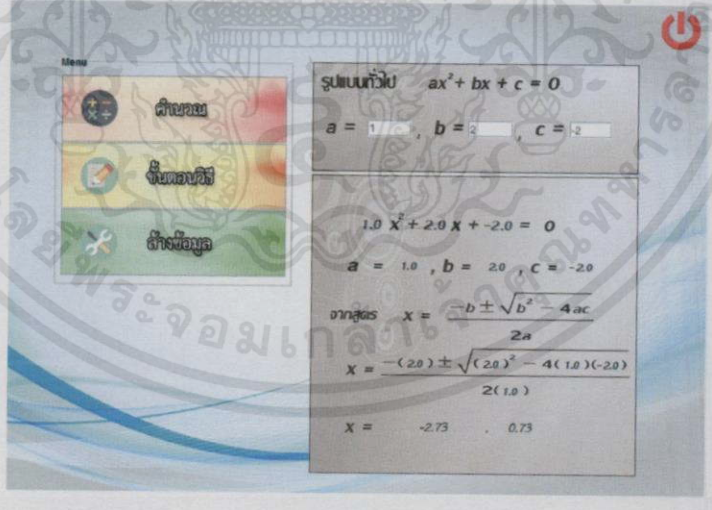
4.2 ผลลัพธ์โปรแกรมของการหาค่ารากสมการพหุนาม

4.2.1 ผลลัพธ์โปรแกรมของการหาค่ารากสมการพหุนามดีกรีสอง

รูปแบบทั่วไปคือ $ax^2+bx+c=0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a,b และ c โปรแกรมจะคำนวณหาค่ารากของสมการ คือค่า x ทั้งหมด 2 ค่าซึ่งถ้าค่า x ทั้งสองค่ามีค่าเป็นจำนวนเต็ม โปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์ในรูปของการแยกตัวประกอบ ดังรูปที่ 4.5 แต่ถ้าค่า x ค่าใดค่าหนึ่งหรือทั้งสองค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม โปรแกรมจะแสดงสูตรที่ใช้ในการคำนวณและค่ารากที่ได้ ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.5 ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 2 แบบแยกตัวประกอบ

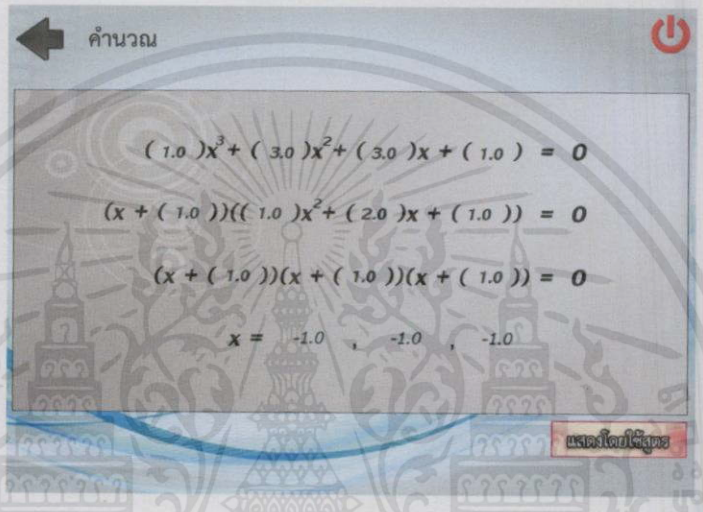


รูปที่ 4.6 ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 2 แบบใช้สูตร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

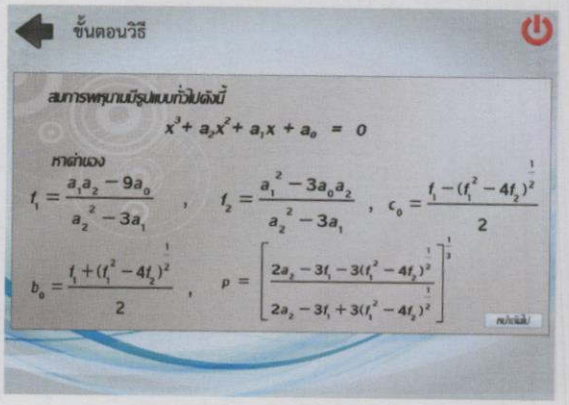
4.2.2 ผลลัพธ์โปรแกรมของการหาค่ารากสมการพหุนามดีกรีสาม

รูปแบบทั่วไปคือ $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0, a_1, a_2 และ a_3 โปรแกรมจะคำนวณหาค่ารากของสมการ คือค่า x ทั้งหมด 3 ค่าซึ่งถ้าค่า x ทั้งสองค่ามีค่าเป็นจำนวนเต็ม โปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์ในรูปของการแยกตัวประกอบ ดังรูปที่ 4.7 แต่ถ้าค่า x ค่าใดค่าหนึ่งหรือทั้งสองค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม โปรแกรมจะแสดงสูตร **unified method** ที่ใช้ในการคำนวณและค่ารากที่ได้ ดังรูปที่ 4.8

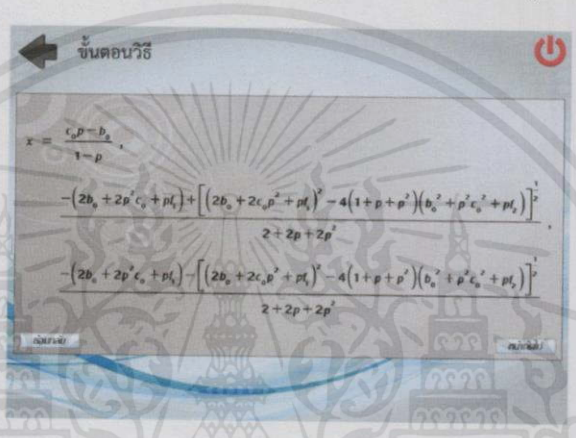


รูปที่ 4.7 ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 3 แบบแยกตัวประกอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.8ก. ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 3 แบบใช้สูตร



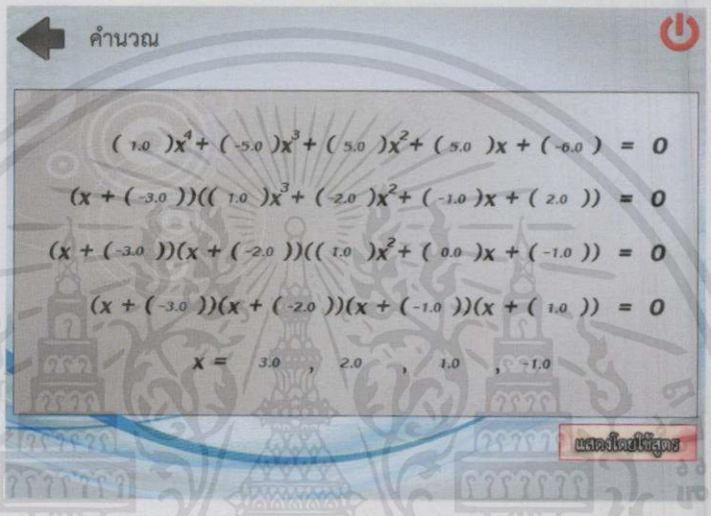
รูปที่ 4.8ข. ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 3 แบบใช้สูตร

รูปที่ 4.8ค. ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 3 แบบใช้สูตร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

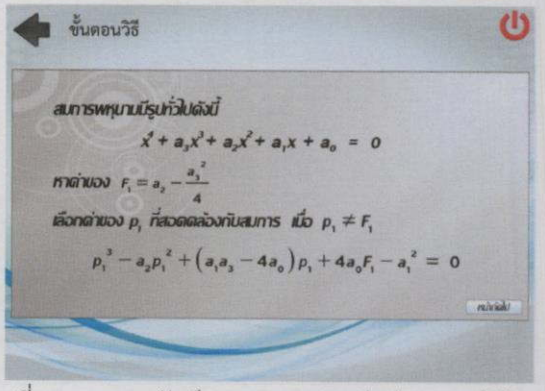
4.2.3 ผลลัพธ์โปรแกรมของการหาค่ารากสมการพหุนามดีกรีสี่

รูปแบบทั่วไปคือ $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0, a_1, a_2, a_3 และ a_4 โปรแกรมจะคำนวณหาค่ารากของสมการ คือค่า x ทั้งหมด 4 ค่าซึ่งถ้าค่า x ทั้งสองค่ามีค่าเป็นจำนวนเต็ม โปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์ในรูปของการแยกตัวประกอบ ดังรูปที่ 4.9 แต่ถ้าค่า x ค่าใดค่าหนึ่งหรือทั้งสองค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม โปรแกรมจะแสดงสูตร A New method for solving Quartics ที่ใช้ในการคำนวณและค่ารากที่ได้ ดังรูปที่ 4.10

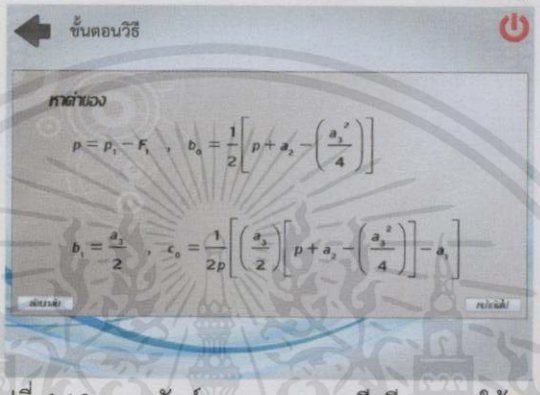


รูปที่ 4.9 ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 4 แบบแยกตัวประกอบ

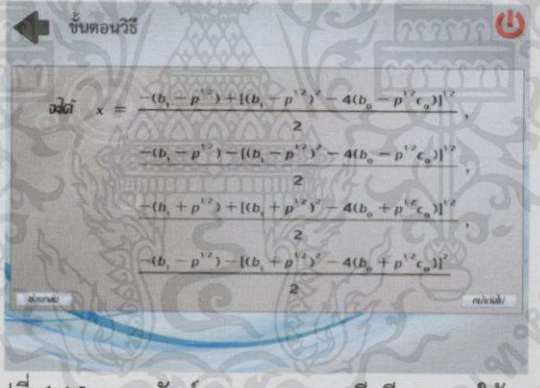
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



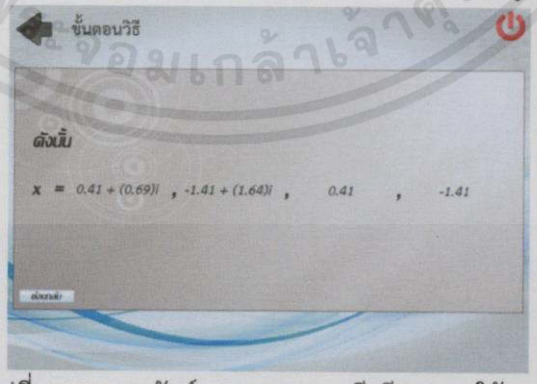
รูปที่ 4.10ก. ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 4 แบบใช้สูตร



รูปที่ 4.10ข. ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 4 แบบใช้สูตร



รูปที่ 4.10ค. ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 4 แบบใช้สูตร



รูปที่ 4.10ง. ผลลัพธ์สมการพหุนามดีกรี 4 แบบใช้สูตร

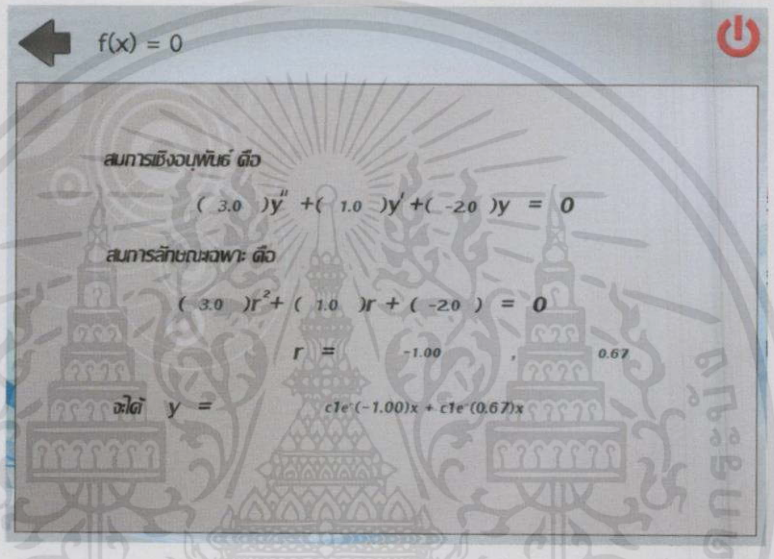
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 ผลลัพธ์โปรแกรมของการหาค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

4.3.1 ผลลัพธ์โปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

1) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง แบบเอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $ay''+by'+cy=0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a,b และ c โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.11

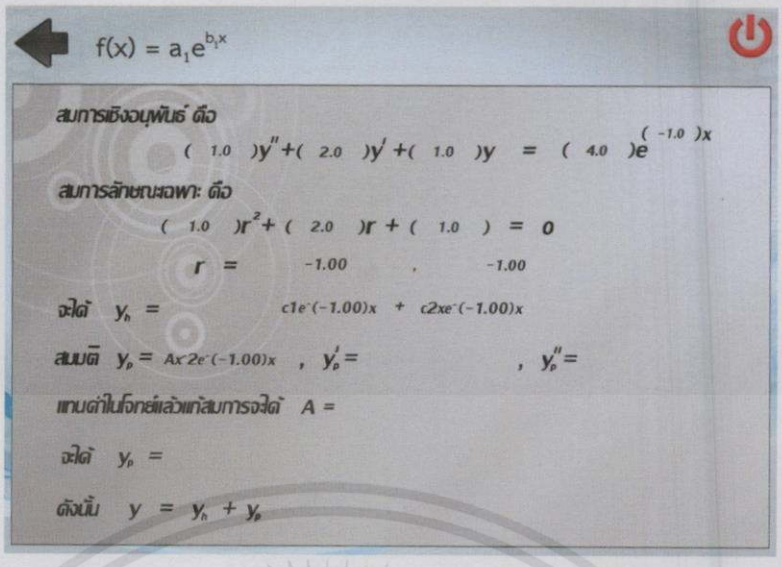


รูปที่ 4.11 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 แบบเอกพันธุ์

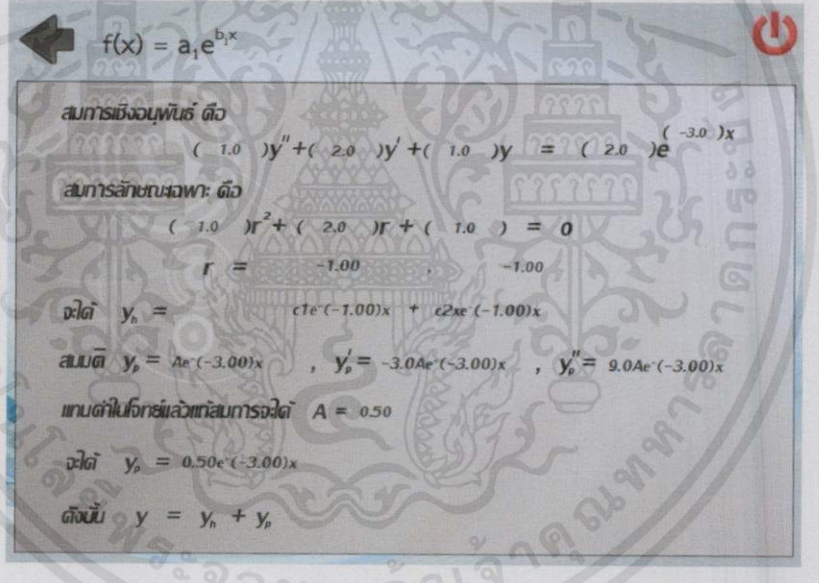
2) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง แบบไม่เอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $ay''+by'+cy=f(x)$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a,b,c และ $f(x)$ โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 และ y_p หาโดยการกำหนดตามรูปแบบและพิจารณาภาวะรากซ้ำดังรายละเอียดในบทที่2 ถ้า y_p มีภาวะรากซ้ำจะไม่หาสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของ y_p ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.12 ถ้า y_p ไม่มีภาวะรากซ้ำจะหาสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของ y_p ซึ่งผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 4.13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.12 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ไม่เอกพันธุ์แบบไม่หาสัมประสิทธิ์ของ y_p



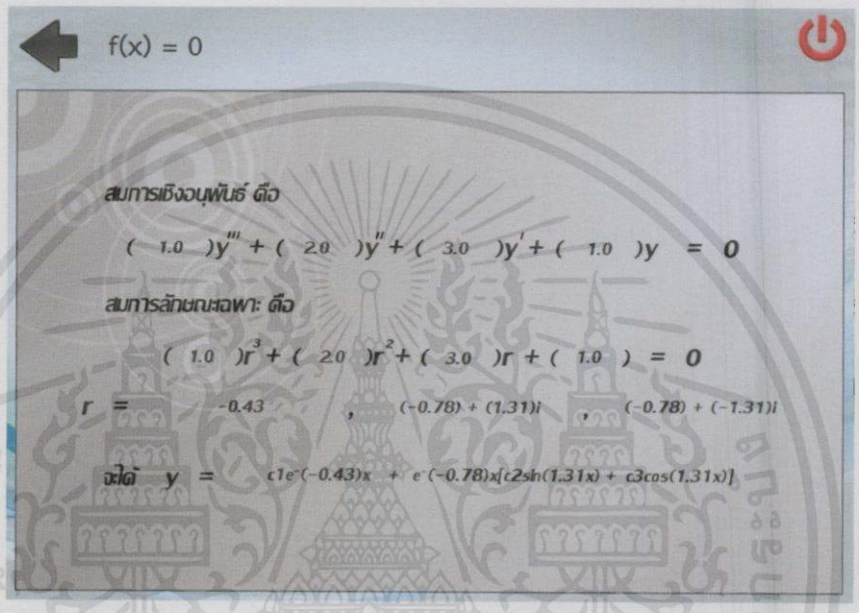
รูปที่ 4.13 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ไม่เอกพันธุ์แบบหาสัมประสิทธิ์ของ y_p

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.2 ผลลัพธ์โปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม

1) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม แบบเอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0, a_1, a_2 และ a_3 โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.14

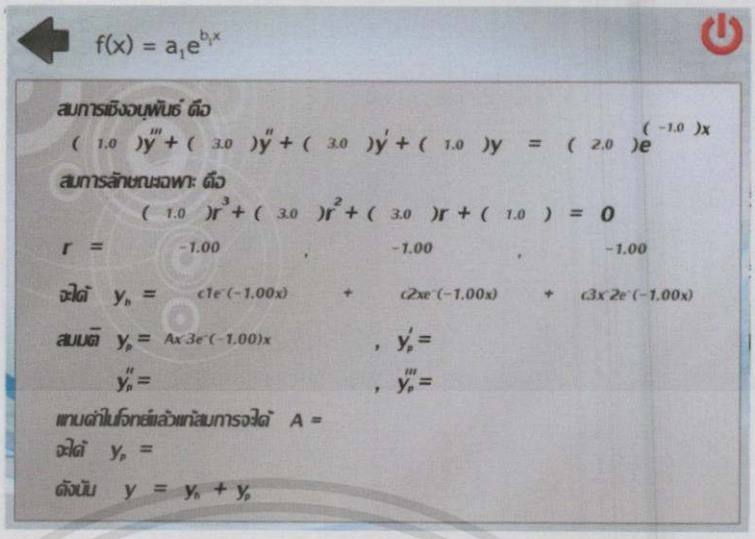


รูปที่ 4.14 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 แบบเอกพันธุ์

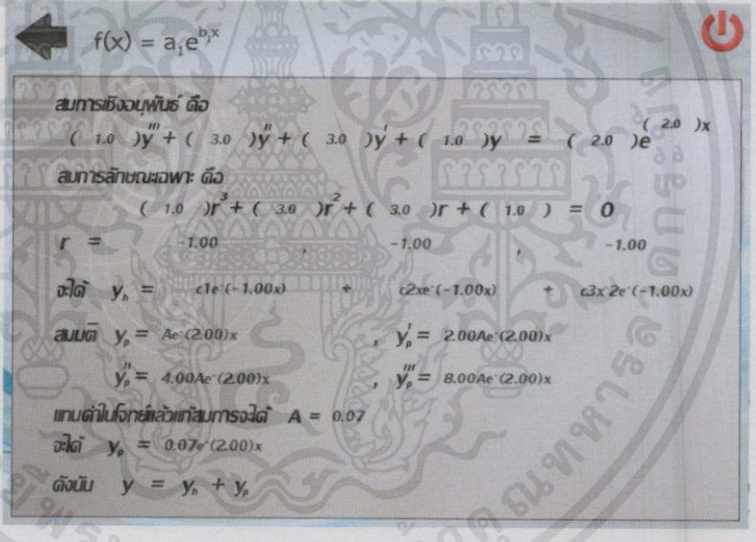
2) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม แบบไม่เอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0, a_1, a_2, a_3 และ $f(x)$ โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 และ y_p หาโดยการกำหนดตามรูปแบบและพิจารณาภาวะรากซ้ำดังรายละเอียดในบทที่2 ถ้า y_p มีภาวะรากซ้ำจะไม่หาสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของ y_p ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.15 ถ้า y_p ไม่มีภาวะรากซ้ำจะหาสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของ y_p ซึ่งผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 4.16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ไม่เอกพันธุ์แบบไม่หาสัมประสิทธิ์ของ y_p



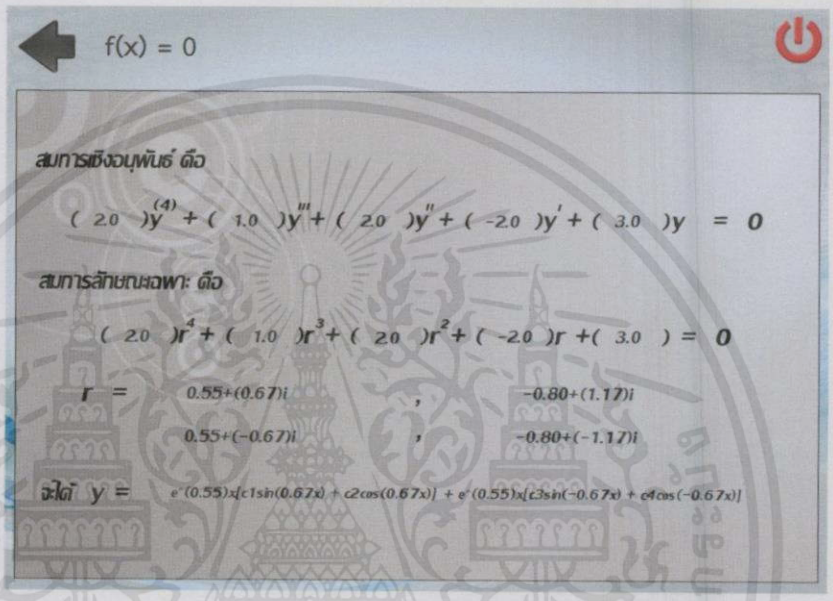
รูปที่ 4.16 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ไม่เอกพันธุ์แบบหาสัมประสิทธิ์ของ y_p

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.3 ผลลัพธ์โปรแกรมการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่

1) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ แบบเอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $a_4y^{(4)}+a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0,a_1,a_2,a_3 และ a_4 โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.17

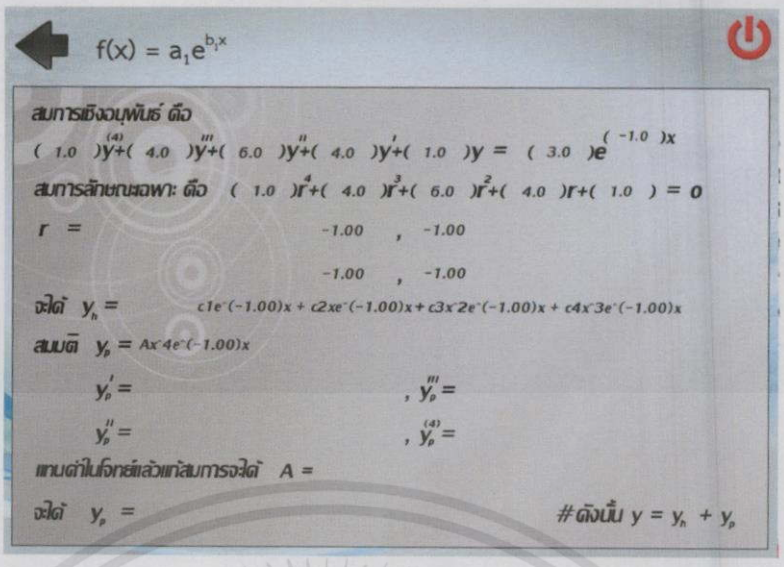


รูปที่ 4.17 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 แบบเอกพันธุ์

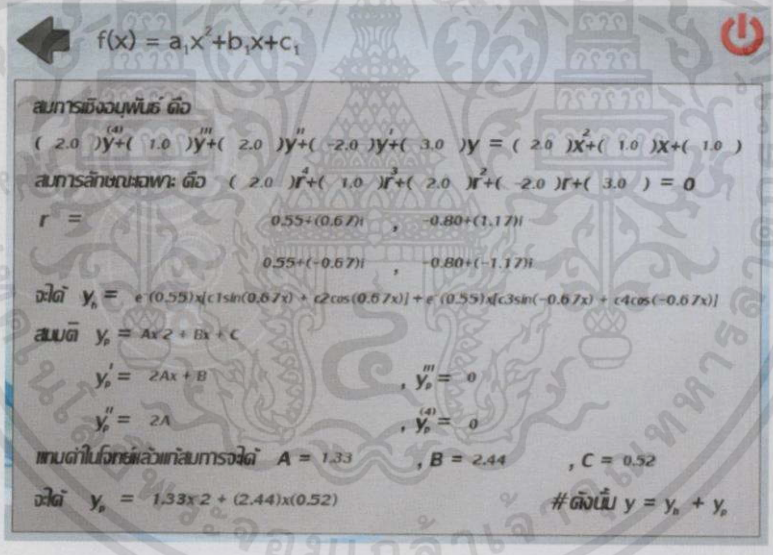
2) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ แบบไม่เอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $a_4y^{(4)}+a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 และ $f(x)$ โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 และ y_p หาโดยการกำหนดตามรูปแบบและพิจารณาภาวะรากซ้ำดังรายละเอียดในบทที่2 ถ้า y_p มีภาวะรากซ้ำจะไม่หาสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของ y_p ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.18 ถ้า y_p ไม่มีภาวะรากซ้ำจะหาสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของ y_p ซึ่งผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 4.19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.18 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 ไม่เอกพันธุ์แบบไม่หาสัมประสิทธิ์ของ y_p



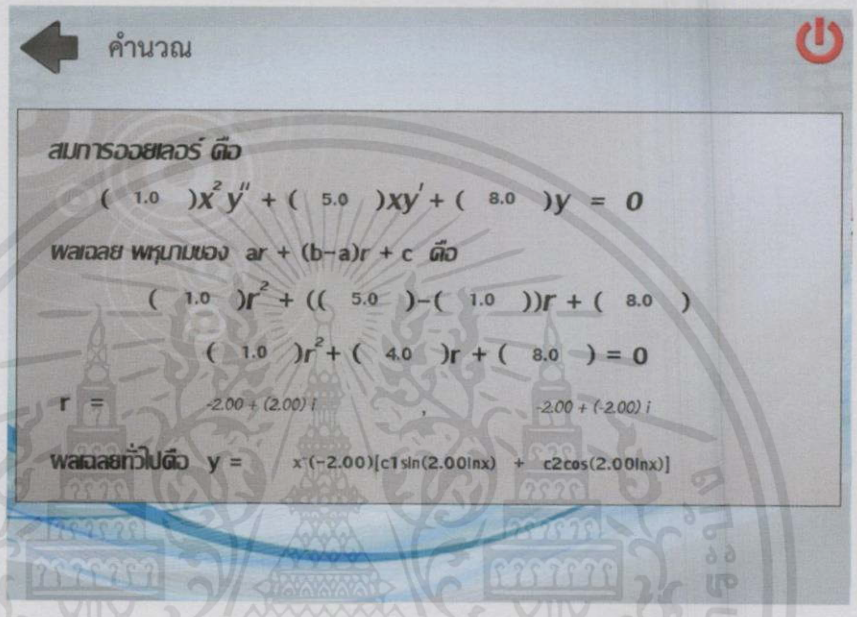
รูปที่ 4.19 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 ไม่เอกพันธุ์แบบหาสัมประสิทธิ์ของ y_p

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4 ผลลัพธ์โปรแกรมหาผลเฉลยสมการออยเลอร์แบบเอกพันธุ์

4.4.1 ผลลัพธ์โปรแกรมหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $ax^2y''+bxy'+cy=0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a,b และ c โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.20

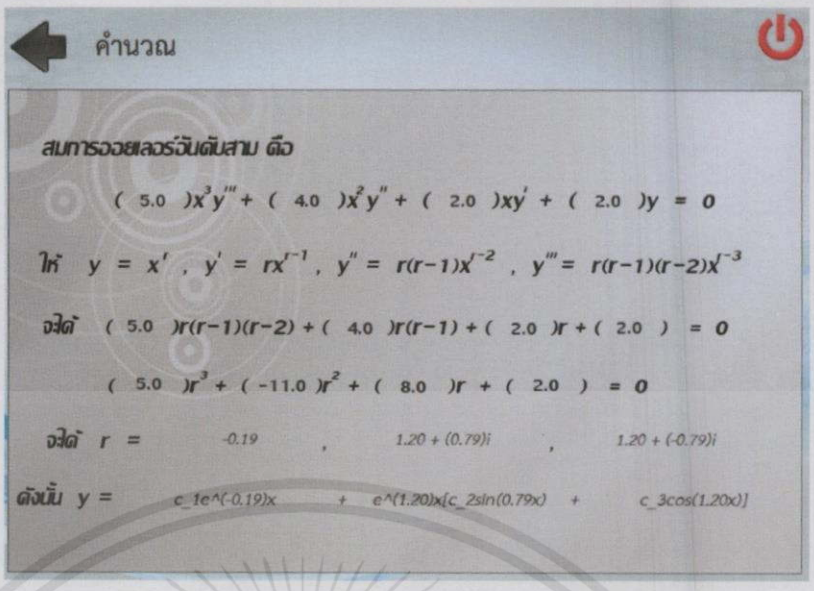


รูปที่ 4.20 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสอง

4.4.2 ผลลัพธ์โปรแกรมหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสามแบบเอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $a_3x^3y'''+a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0,a_1,a_2 และ a_3 โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y=y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.21

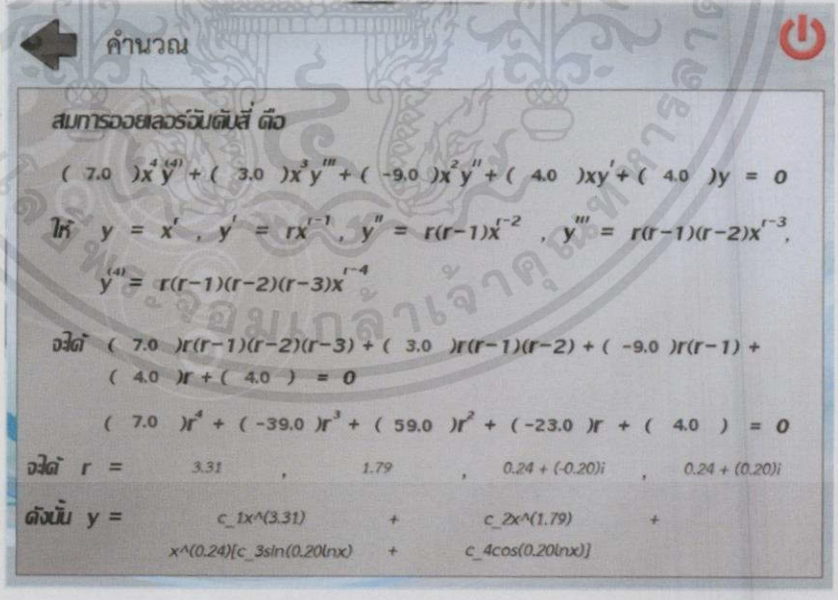
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.21 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสาม

4.4.3 ผลลัพธ์โปรแกรมหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่แบบเอกพันธุ์

รูปแบบทั่วไปคือ $a_4x^4y^{(4)} + a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$ เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าของ a_0, a_1, a_2, a_3 และ a_4 โปรแกรมแสดงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการลักษณะเฉพาะ แล้วหาค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะโดยใช้วิธีที่กล่าวถึงในหัวข้อ 4.2 และหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของ $y = y_h$ ดังรายละเอียดในบทที่ 2 ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.22



รูปที่ 4.22 ผลลัพธ์การหาผลเฉลยสมการออยเลอร์อันดับสี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการพัฒนาโปรแกรมและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการพัฒนาโปรแกรม

จากผลลัพธ์ของโปรแกรมการหาค่ารากของสมการพหุนาม และการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่พัฒนาขึ้น โดยที่ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องใช้คำสั่งหรือชุดคำสั่งใดๆ ในการหาค่ารากหรือผลเฉลย ผู้ใช้จึงสามารถใช้งานได้ง่ายไม่ซับซ้อน และไม่จำเป็นต้องมีความรู้ในด้านการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาก่อน โดยโปรแกรมยังแสดงถึงขั้นตอนการหาค่ารากหรือผลเฉลยโดยสังเขป ทำให้ผู้ใช้สามารถศึกษาทำความเข้าใจในกระบวนการหาค่ารากหรือผลเฉลยควบคู่ไปด้วย โดยโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้จะอยู่ในรูปแบบของซอฟแวร์สำเร็จรูป บนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล สามารถใช้งานระบบปฏิบัติการ Windows

โดยโปรแกรมมีความสามารถในการทำงานคือ

1) สามารถรองรับการหาค่ารากของสมการพหุนามดีกรีสองถึงดีกรีสี่ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองถึงอันดับสี่ และการหาผลเฉลยสมการออยเลอร์แบบเอกพันธุ์อันดับสองถึงอันดับสี่
2) การหาค่ารากสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เอกพันธุ์จะรองรับค่าฟังก์ชันเพียงบางฟังก์ชันพื้นฐาน และผลเฉลยส่วน y_p ถ้าไม่เกิดภาวะรากซ้ำจะแสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์ใน y_p ด้วย แต่ถ้าเกิดภาวะรากซ้ำจะแสดงค่า y_p โดยไม่หาค่าสัมประสิทธิ์ภายใน y_p
3) รองรับจำนวนเต็มที่ 10 หลัก แต่เนื่องด้วยข้อจำกัดทางพื้นที่หน้าจอจึงสามารถแสดงค่าได้เพียง 4 ตำแหน่ง

สำหรับผู้ใช้งานจำเป็นต้องมีความเข้าใจเบื้องต้นเกี่ยวกับรูปแบบทั่วไปของ สมการพหุนาม สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการออยเลอร์ เพื่อที่จะสามารถใช้โปรแกรมนี้ได้สะดวกยิ่งขึ้น และผู้ใช้ควรติดตั้งซอฟแวร์ Java Runtime Environment 1.7.0 ก่อนการใช้งานโปรแกรม

5.2 ข้อเสนอแนะ

ควรมีการพัฒนาบนระบบปฏิบัติการ Android หรือ iosเนื่องจากปัจจุบันมีการใช้สมาร์ทโฟนที่ใช้ระบบปฏิบัติการดังกล่าวกันอย่างแพร่หลาย ซึ่งจะทำให้เข้าถึงผู้ใช้ได้มากขึ้น และยังทำให้ผู้ใช้สามารถใช้งานได้สะดวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] พัชรินทร์ เหมโชติ. 2555. **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสามัญ.** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด มีนเซอร์วิส ซัพพลาย.

[2] ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์. **โครงสร้างข้อมูลและขั้นตอนวิธี.**

[3] Raghavendra G. Kulkarni."Unified method for solving general polynomial equationsof degreeless than five."

Alabama Journal of Mathematics.30 (1 & 2) (2006), 1-18.

[4] RaghavendraG.Kulkarni. 2009. "A New Method for Solving Quartic."

International Journal of Mathematical Science Education. Vol. 2,No. 2,24-26

[5] ศูนย์พัฒนาทรัพยากรการศึกษา มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. 2558. ข้อดีของภาษา Java.[Online] Available: http://www.elearning.msu.ac.th/opencourse/

[6] NisakornBoonchuay. 2013. Eclipse คืออะไร. [Online] Available: http://javaitfun.blogspot.com/2013/09/eclipse.html

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้