

การแก้ไขพื้นผิวแบบหลายระดับความละเอียดโดยใช้การแปลงเวฟเล็ต

MULTIRESOLUTION SURFACES EDITING BY WAVELET
TRANSFORMS



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2542

ISBN 974-622-609-6

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การแก้ไขพื้นผิวแบบหลายระดับความละเอียดโดยใช้การแปลงเวฟเล็ต

MULTIRESOLUTION SURFACES EDITING BY WAVELET
TRANSFORMS



สมศักดิ์ เขมววิธ
SOMSAK KHEMVIVIT

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อ พ.ศ.2542 นั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน...34732...
วัน, เดือน, ปี 29 S.A. 2542

สงวนลิขสิทธิ์ ห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อ ISBN 974-622-609-6 ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

MULTIRESOLUTION SURFACES EDITING BY WAVELET
TRANSFORMS



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

1999

ISBN 974-622-609-6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 1999

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การแก้ไขพื้นผิวแบบหลายระดับความละเอียดโดยใช้การแปลงเวฟเล็ต
นักศึกษา	นายสมศักดิ์ เขมวิวิธ
รหัสประจำตัว	40061008
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	2542
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์

บทคัดย่อ

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอวิธีการแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติโดยใช้คุณสมบัติการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียดของเวฟเล็ตทรานส์ฟอร์มร่วมกับหลักการของเส้นโค้งแบบ B-Spline สร้างพื้นผิวหลายระดับความละเอียดขึ้นมาและจากพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่าง ๆ นี้ สามารถเลือกแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดน้อยกว่า แต่จะมีผลทำให้พื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงกว่าเปลี่ยนแปลงตามไปด้วยโดยไม่จำเป็นต้องหาสมการพื้นผิว ในการทดลองได้แสดงการแก้ไขภาพสามมิติที่สังเคราะห์จุดควบคุมขึ้นมาพร้อมกับแสดงผลที่ได้ ซึ่งสามารถสรุปได้ว่าวิธีการแก้ไขพื้นผิวดังกล่าวนี้นี้เป็นวิธีที่ง่าย สะดวก เหมาะสำหรับการใช้ในทางปฏิบัติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis Title	Multiresolution Surfaces Editing By Wavelet Transforms
Student	Mr. Somsak Khemvivit
Student ID.	40061008
Degree	Master of Engineering
Programme	Electrical Engineering
Year	1999
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Dr.Manas Sangworasilp

ABSTRACT

This thesis presents a useful method of multiresolution surface editing. The concept is to combine the wavelet transforms and B-spline curve for generating multiresolution surfaces from such image. An advantage of these multiresolution surfaces is once editing a few control points of lower detail, it can affect the high detail (the detail follows the changes performed at the coarse level). Consequently it is unnecessary to find an equation of the surface needed to change. The performance of the method is evaluated by operating with some synthesized images such as facial image. In conclusion, this technique is facile and practical.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เนื่องมาจากความช่วยเหลือและสนับสนุนจากบุคคลหลายๆ ฝ่ายด้วยกัน ซึ่งผู้เขียนขอขอบพระคุณทุกท่านดังต่อไปนี้

คุณพ่อ คุณแม่ ผู้ซึ่งคอยอบรมสั่งสอน ให้การสนับสนุนในเรื่องการศึกษา และเป็นกำลังใจให้ อย่างเสมอมา

รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์ อาจารย์ที่ปรึกษาผู้ซึ่งคอยให้คำปรึกษา ชี้แนะแนวทางในการทำวิทยานิพนธ์ ตลอดจนให้ความรู้ ความเข้าใจ และให้การอบรมสั่งสอนในทุกๆ ด้าน ตลอดระยะเวลาการศึกษา ซึ่งผู้เขียนรู้สึกซาบซึ้งในความเมตตาจากท่านเป็นอย่างสูง

ดร.กิตติพล ชิตสกุล ดร.สุรพันธุ์ เชื้อไพบูลย์ ที่กรุณาให้คำปรึกษาอันมีประโยชน์อย่างยิ่งต่องานวิจัย

ครู อาจารย์ทุกๆ ท่านที่กรุณาให้การอบรม สั่งสอนและให้ความรู้ พี่ๆ เพื่อนๆ และน้องๆ ทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้

สมศักดิ์ เขมวិธิธ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญรูป.....	VIII
สารบัญตาราง.....	XI
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	1
1.3 แนวทางในการแก้ปัญหา.....	2
1.4 ขอบเขตของการวิจัย.....	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต.....	4
2.1 บทนำ.....	4
2.2 ทฤษฎีทั่วไปสำหรับการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด.....	4
2.2.1 ปริภูมิของฟังก์ชัน.....	4
2.2.2 ฟังก์ชันสเกลลิง.....	5
2.2.3 การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด.....	6
2.2.4 ฟังก์ชันเวฟเล็ต.....	8
2.3 ระบบเวฟเล็ตแบบอโทกอนัล เสมิอโทกอนัล และไบอโทกอนัล.....	11
2.3.1 ฟังก์ชันมูลฐานแบบอโทกอนัลและไบอโทกอนัล.....	11
2.3.2 ระบบเวฟเล็ตแบบอโทกอนัล.....	14
2.3.3 ระบบเวฟเล็ตแบบไบอโทกอนัล.....	15
2.3.4 ระบบเวฟเล็ตแบบเสมิอโทกอนัล.....	15
2.4 สรุป.....	16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 การแปลงเวฟเล็ตบนขอบเขตจำกัด.....	17
3.1 บทนำ.....	17
3.2 การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด.....	17
3.2.1 การยืดและการหดของฟังก์ชันมูลฐาน.....	18
3.3 การแปลงเวฟเล็ตโดยใช้หลักการ Synthesis Filter Banks.....	19
3.4 การแปลงเวฟเล็ตโดยใช้หลักการ Analysis Filter Banks.....	20
3.5 เวฟเล็ตออร์ทोगอนัลในรูปแบบเมตริกซ์.....	21
3.6 เวฟเล็ตเซมิออร์ทोगอนัลในรูปแบบเมตริกซ์.....	23
3.6.1 สรุปขั้นตอนการออกแบบเวฟเล็ตเซมิออร์ทोगอนัล.....	23
3.7 เวฟเล็ตไบออร์ทोगอนัลในรูปแบบเมตริกซ์.....	24
3.8 สรุป.....	30
บทที่ 4 เส้นโค้งแบบ B-spline และเวฟเล็ต B-spline	32
4.1 บทนำ.....	32
4.2 เส้นโค้ง spline.....	32
4.3 เส้นโค้ง B-spline.....	33
4.4 การหาค่าบนเส้นโค้ง B-spline โดยการแทรก knot	34
4.4.1 วิธีการแทรก knot.....	36
4.4.2 คุณสมบัติการแทรก knot	37
4.4.3 การหาค่าจุดควบคุม P^u	38
4.5 การสร้างเส้นโค้ง B-spline โดยวิธีการของ de Boor.....	42
4.6 การพิจารณาลักษณะรูปร่างฟังก์ชันมูลฐานของเส้นโค้ง B-spline	45
4.7 อนุพันธ์เส้นโค้ง B-spline	49
4.8 เวฟเล็ตแบบ B-spline	52
4.8.1 กำหนดเมตริกซ์สังเคราะห์ P_j	53
4.8.2 กำหนดเมตริกซ์ผลคูณภายในฟังก์ชันมูลฐาน $[\langle \phi, \phi \rangle]$	57
4.8.3 การแก้สมการหาเมตริกซ์สังเคราะห์ Q_j	58
4.9 การพิจารณาหาเมตริกซ์วิเคราะห์ A_j และ B_j ในการกระจายเส้นโค้ง.....	59

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

4.10 ตัวอย่างการใช้เวฟเล็ต B-spline.....	60
--	----

บทที่ 5 พื้นผิวภาพสามมิติหลายระดับความละเอียด

5.1 บทนำ.....	62
5.2 การสร้างพื้นผิวภาพสามมิติ B-spline โดยวิธีการ Tensor product.....	62
5.3 พื้นผิวภาพสามมิติ B-spline หลายระดับความละเอียด.....	64
5.3.1 วิธี Standard tensor product	65
5.3.2 วิธี Nonstandard tensor product.....	65

บทที่ 6 การทดลองแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติ

6.1 บทนำ.....	69
6.2 การแตกกระจายพื้นผิวและการรวมกลับพื้นผิว.....	69
6.2.1 การแตกกระจายพื้นผิว.....	69
6.2.2 การรวมกลับพื้นผิว.....	75
6.3 การทดลองแตกกระจายพื้นผิวและประมาณพื้นผิว.....	76
6.3.1.การทดลองประมาณพื้นผิวที่มี control mesh ได้จากการสุ่มตัวอย่างจากสมการคณิตศาสตร์.....	76
6.3.2 การทดลองประมาณพื้นผิวรูปหน้า.....	80
6.3.3 การประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดทศนิยม.....	82
6.3.4 การทดลองประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดทศนิยม.....	82
6.4 การทดลองแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิว.....	84
6.4.1 การทดลองแก้ไข control mesh ที่อยู่บนระนาบเดียวกัน.....	85
6.4.2 การทดลองแก้ไข control mesh ที่มีลักษณะโค้ง.....	87
6.5 การทดลองแก้ไขเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของพื้นผิว.....	89
6.5.1 การทดลองเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวรูปพาราโบลา.....	90
6.5.2 การทดลองเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวรูปขวด.....	92
6.6 การแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติโดยวิธี Free form deformation	94

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์การค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามทำซ้ำหรือดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 7 สรุปและวิจารณ์การทดลอง.....	97
7.1 สรุปผลการทดลอง.....	97
7.1.1 การประมาณพื้นผิวภาพสามมิติ.....	97
7.1.2 การแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวภาพสามมิติ.....	97
7.1.3 การแก้ไขส่วนรายละเอียดของพื้นผิวภาพสามมิติ.....	98
7.2 ปัญหาและข้อเสนอแนะ.....	99
เอกสารอ้างอิง.....	100
ภาคผนวก ก.....	102
ประวัติผู้เขียน.....	109

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 การซ้อนทับกันของปริภูมิย่อยที่มีฟังก์ชันสเกลลิงแม่ตัวปริภูมิ.....	7
2.2 ฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Haar(ซ้าย) และฟังก์ชันสเกลลิงแบบสามเหลี่ยม(ขวา).....	8
2.3 ปริภูมิของฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเลตกรณีตั้งฉากกัน.....	10
2.4 เวฟเลตแบบ Haar และแบบสามเหลี่ยม.....	10
3.1 แผนภูมิการสังเคราะห์หรือการสร้างขึ้นใหม่.....	20
3.2 แผนภูมิการกระจายข้อมูล.....	21
3.3 เวฟเลตแบบ B-spline.....	27
3.4 เวฟเลตแบบ Haar.....	28
3.5 ไบอฮโทกอนัลเวฟเลตแบบสามเหลี่ยม.....	29
4.1 ลักษณะเส้นโค้ง spline.....	32
4.2 การเกิดลายเส้นแบบ B-spline.....	33
4.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง u_i , ε_i และ d_i กรณี $n = 1$ และ $L = 1$	35
4.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง u_i , ε_i และ d_i กรณี $n = 2$ และ $L = 2$	35
4.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง u_i , ε_i และ d_i กรณี $n = 3$ และ $L = 2$	36
4.6 คุณสมบัติ variation diminishing process.....	37
4.7 คุณสมบัติ convexity preserving.....	37
4.8 การหาค่าจุดควบคุม d_i^u	38
4.9 ความสัมพันธ์ของ knot vector (u_i) และพิกัดตามขวาง (ε_i).....	39
4.10 ความสัมพันธ์ knot vector u_i^u พิกัดขวาง ε_i^u และจุดควบคุม d_i^u	40
4.11 ความสัมพันธ์ knot vector $u_i^{u^2}$ พิกัดขวาง $\varepsilon_i^{u^2}$ และจุดควบคุม $d_i^{u^2}$	41
4.12 การหาจุดบนเส้นโค้ง B-spline $n=3$ $L=2$ ด้วยวิธีการ de Boor.....	43
4.13 การหาค่าจากฟังก์ชันชายน.....	43
4.14 เส้นโค้ง B-spline แบบ Open knot vector เมื่อ $n = 3$ $L = 6$	44
4.15 เส้นโค้ง B-spline แบบ Uniform knot vector เมื่อ $n = 3$ $L = 6$	44
4.16 เส้นโค้ง B-spline แบบ Open knot vector เมื่อ $n = 5$ $L = 4$	44
4.17 เส้นโค้ง B-spline แบบ Uniform knot vector เมื่อ $n = 5$ $L = 4$	45

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.18 ลักษณะฟังก์ชันมูลฐาน B-spline $n=2$, $L = 4$ ใช้ Open knot vector.....	46
4.19 ฟังก์ชันมูลฐานของ B-spline กรณี $L = 2$ $n = 3$	49
4.20 ค่าอนุพันธ์ที่จุดปลายของเส้นโค้ง B-spline กรณี $r = 1$ และ $r = 2$	52
4.21 การประมาณตัวอักษรภาษาไทยที่ระดับความละเอียดต่างๆ.....	61
5.1 พื้นผิว B-spline และพารามิเตอร์ต่างๆ.....	63
5.2 ผลกระทบต่อพื้นผิวB-spline อันดับชั้นที่2เมื่อ control mesh ถูกเคลื่อนย้าย.....	64
5.3 การรวมกลับข้อมูลกรณีพื้นผิวหลายระดับความละเอียด.....	67
5.4 การแตกกระจายข้อมูลกรณีพื้นผิวหลายระดับความละเอียด.....	68
6.1 ขนาดของ control mesh ก่อนแปลงเวฟเล็ต.....	70
6.2 การแตกกระจาย control mesh ของพื้นผิว.....	70
6.3 control mesh ที่ได้จากการสุ่มฟังก์ชัน $f(x,y) = 4 \sin(t)/t$	72
6.4 control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียด $j=1$, $i = 1$	75
6.5 การรวมกลับ control mesh ของพื้นผิว.....	76
6.6 control mesh ที่ได้จากการสุ่มจากฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{-r} \cos(5r)$	76
6.7 พื้นผิวB-spline ที่เกิดจากcontrol meshส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ.....	77
6.8 control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ.....	78
6.9 พื้นผิวB-splineแสดงอิทธิพลของรายละเอียดพื้นผิวต่อส่วนประมาณของพื้นผิว.....	79
6.10 อิทธิพลของส่วนประมาณพื้นผิวและรายละเอียดพื้นผิวต่อพื้นผิวระดับความละเอียดสูงสุด.....	80
6.11 การประมาณพื้นผิวรูปหน้าที่ระดับความละเอียดต่างๆ.....	80
6.12 อิทธิพลของส่วนประมาณพื้นผิวและส่วนรายละเอียดพื้นผิวต่อพื้นผิวรูปหน้าระดับความละเอียดสูงสุด.....	81
6.13 พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียดทศนิยม 4.3 และ 4.7.....	83
6.14 พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียดทศนิยม 3.5 และ 3.75.....	84
6.15 รูปแบบการแก้ไขส่วนประมาณของพื้นผิว.....	85
6.16 control mesh ของพื้นผิวอยู่บนระนาบ X-Y.....	86
6.17 การแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิว.....	86

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานวิจัยงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.18 control mesh ลักษณะโค้งตันฉบับ.....	88
6.19 ผลการแก้ไข control mesh ลักษณะโค้ง.....	88
6.20 การแก้ไขพื้นผิวข้อความ.....	89
6.21 การแก้ไขพื้นผิวรูปหน้า.....	89
6.22 รูปแบบการแก้ไขรายละเอียดของพื้นผิว.....	90
6.23 พื้นผิว B-spline ตันฉบับก่อนการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว.....	91
6.24 พื้นผิว B-spline ตันฉบับหลังการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว.....	91
6.25 พื้นผิวB-spline ตันฉบับรูปวาดและรูปคล้ายสปริงระดับความละเอียด $j=6, i=6$	92
6.26 ผลลัพธ์พื้นผิวB-spline รูปวาดหลังการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว.....	92
6.27 ตัวอย่างพื้นผิวB-spline รูปแก้วหลังการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว.....	93
6.28 FFD สำหรับการเปลี่ยนรูปร่างเส้นโค้ง.....	94
6.29 FFD สำหรับการเปลี่ยนพื้นผิวภาพสามมิติ.....	95

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 สมการที่ได้จากการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด.....	31
3.2 เงื่อนไขของระบบเวฟเลิตแบบต่างๆ.....	31



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โดยปกติภาพสามมิติในทางคอมพิวเตอร์กราฟฟิกส์ สามารถพิจารณาได้ว่าประกอบด้วยพื้นผิวสองส่วนใหญ่ ๆ คือโครงของพื้นผิวและรายละเอียดของพื้นผิว ดังนั้นการแก้ไขเปลี่ยนแปลงพื้นผิวจึงสามารถกระทำกับพื้นผิวทั้งสองส่วนนี้ เช่นถ้าต้องการแก้ไขโครงของพื้นผิวโดยที่รายละเอียดของพื้นผิวไม่เปลี่ยนแปลงหรือต้องการเปลี่ยนรายละเอียดของพื้นผิวเดิมให้เป็นรายละเอียดของพื้นผิวแบบใหม่โดยที่โครงของพื้นผิวเดิมไม่เสียไป

ในการแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติทั่วไปในทางคอมพิวเตอร์กราฟฟิกส์จะกระทำที่พื้นผิวระดับความละเอียดสูงสุดโดยตรง (เช่นการเคลื่อนย้ายจุดควบคุมบนพื้นผิว) ซึ่งจะทำให้โครงของพื้นผิวและรายละเอียดของพื้นผิวบริเวณแก้ไขเปลี่ยนแปลงไป แต่ถ้าต้องการแยกแก้ไขเฉพาะโครงของพื้นผิวหรือรายละเอียดของพื้นผิว อันดับแรกจะต้องทำการนำพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดมาแยกโครงของพื้นผิวและรายละเอียดของพื้นผิวให้ได้เสียก่อน จากนั้นนำพื้นผิวทั้งสองส่วนนี้ไปทำการแก้ไขตามต้องการ แล้วนำโครงของพื้นผิวและรายละเอียดของพื้นผิวรวมกลับเข้าด้วยกันก็จะได้ พื้นผิวภาพสามมิติถูกแก้ไขเปลี่ยนแปลงไป จากการกระทำดังกล่าวในขั้นตอนการหาสมการโครงของพื้นผิวและสมการรายละเอียดของพื้นผิวนั้น ถ้าพื้นผิวภาพสามมิติที่นำมาแก้ไขมีจำนวนจุดควบคุมมาก (พื้นผิวมีความละเอียดสูง) หรือพื้นผิวมีรูปร่างที่ซับซ้อน การหาสมการก็จะยุ่งยากและเสียเวลามากอีกทั้งถ้าขบวนการแยกไม่มีคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด (Multiresolution) แล้วพื้นผิวทั้งสองที่แยกได้จะมีจำนวนจุดควบคุมของพื้นผิว (Control mesh) เท่าเดิม ดังนั้นยังต้องเสียเวลาในการเปลี่ยนแปลงพื้นผิวทั้งสองส่วนนี้อีก

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. พัฒนารูปแบบการแก้ไขเปลี่ยนแปลงพื้นผิวภาพสามมิติ ให้สามารถกระทำได้อย่างง่าย ๆ และสะดวกมากยิ่งขึ้น
2. เพื่อที่จะสามารถนำหลักการและวิธีการดังกล่าวนี้ ไปใช้เป็นทฤษฎีพื้นฐาน สำหรับการประยุกต์ใช้งานในด้านคอมพิวเตอร์กราฟฟิกส์ในรูปแบบอื่น ๆ หรือในงานด้านอื่นได้ต่อไป
3. เพื่อแนะนำถึงวิธีการนำฟังก์ชันมูลฐานแบบ B-spline มาสร้างเวฟเล็ตเพื่อใช้ในการคอมพิวเตอร์กราฟฟิกส์

1.3 แนวทางในการแก้ปัญหา

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นการนำเสนอการประยุกต์ใช้คุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดของการแปลงเวฟเล็ตเข้ามาช่วยในการแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติ หลักการคือจะทำการกระจายพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดออกเป็นพื้นผิวแบบหลายระดับความละเอียด โดยพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่ำกว่าจะมีจำนวนจุดควบคุมของพื้นผิวน้อยกว่าระดับที่มีความละเอียดสูงกว่า

การแก้ไขสามารถแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆได้โดยที่พื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงกว่าจะเปลี่ยนตามไปด้วย ข้อดีของการแก้ไขพื้นผิวดังวิธีนี้คือ

1. ไม่ต้องหาสมการโครงของพื้นผิวและสมการรายละเอียดของพื้นผิว เพราะว่าผลจากการแปลงเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดใดๆ จะได้โครงของพื้นผิวและรายละเอียดของพื้นผิวออกมาโดยอัตโนมัติ
2. สามารถช่วยให้ผู้แก้ไขพื้นผิวเปลี่ยนแปลงพื้นผิวได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น เพราะผู้แก้ไขเปลี่ยนแปลงจุดควบคุมของพื้นผิวเพียงเล็กน้อยในปริภูมิเวฟเล็ตก็สามารถเปลี่ยนแปลงจุดควบคุมของพื้นผิวเป็นบริเวณกว้างที่ระดับความละเอียดสูงก็ได้
3. ในการแสดงผลโดยใช้คอมพิวเตอร์สามารถเลือกแสดงผลพื้นผิวภาพสามมิติที่ระดับความละเอียดต่ำกว่าที่ระดับความละเอียดสูงสุดได้
4. สามารถเลือกแก้ไขโครงของพื้นผิวหรือเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ ได้โดยอิสระ

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นการนำเสนอเทคนิคที่เข้ามาช่วยในการแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติที่ได้จากกระบวนการ tensor product พื้นผิวลักษณะนี้จะอยู่ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมซึ่งจะทราบจุดควบคุมของพื้นผิวก่อน และมุ่งเน้นที่การนำฟังก์ชันมูลฐาน B-spline มาใช้ ซึ่งเป็นฟังก์ชันมูลฐานที่นิยมใช้กันมากทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟฟิกส์ โดยเฉพาะใน CAD (Computer Aides Design)[1][2] โดยรายละเอียดต่างๆ ภายในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้จัดแบ่งในส่วนของเนื้อหาทั้งหมดออกเป็น 7 บท ซึ่งแต่ละบทจะมีหัวข้อและเนื้อหาดังต่อไปนี้

บทที่ 1 บทนำ

อธิบายถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาตลอดจนวัตถุประสงค์และขอบเขต

เอกสารนี้ของวิทยานิพนธ์นี้ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ตของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อธิบายถึงลักษณะทั่วไปของปริภูมิฟังก์ชัน และลักษณะของฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิที่ทำให้เกิดคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด ซึ่งจะนำไปสู่ระบบเวฟเล็ตแบบต่างๆ เช่นระบบเวฟเล็ตออร์ทोगอนัล เชมิโอออร์ทोगอนัล และ ไบออร์ทोगอนัล

บทที่ 3 การแปลงเวฟเล็ตแบบแบ่งช่วงที่นิยามบนขอบเขตจำกัด

อธิบายถึงชนิดเวฟเล็ตต่างๆ ที่ได้กล่าวในบทที่ 2 อีกครั้ง แต่จะเน้นที่ระบบเวฟเล็ตที่นิยามบนขอบเขตจำกัด ซึ่งเงื่อนไขต่างๆ สามารถอธิบายอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้รวมถึงสมการกระจายข้อมูล(decomposition)และสมการรวมกลับข้อมูล(reconstruction)ใช้แปลงเวฟเล็ตหนึ่งมิติสำหรับเงื่อนไขของระบบเวฟเล็ตเชมิโอออร์ทोगอนัลจะถูกนำไปใช้ร่วมกับฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ในบทที่สี่ ทำให้เกิดเวฟเล็ต B-spline ซึ่งนำมาใช้ประมาณและแก้ไขพื้นผิวในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

บทที่ 4 เส้นโค้ง B-spline และเวฟเล็ต B-spline

อธิบายถึงการสร้างเส้นโค้ง B-spline การเกิดของฟังก์ชัน B-spline ตลอดจนคุณสมบัติต่างๆของเส้นโค้ง และอธิบายขั้นตอนการออกแบบเวฟเล็ต B-spline ซึ่งจะต้องใช้เงื่อนไขระบบเวฟเล็ตเชมิโอออร์ทोगอนัลร่วมกับฟังก์ชันมูลฐานB-spline เวฟเล็ตB-spline ที่ออกแบบในบทนี้ใช้สำหรับกระจายและรวมกลับเส้นโค้ง

บทที่ 5 พื้นผิวหลายระดับความละเอียด

กล่าวถึงพื้นผิวภาพสามมิติที่เกิดจากกระบวนการ tensor product พื้นผิวนี้อาจไม่มีคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด ในการสร้างพื้นผิวที่มีคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดจะนำเวฟเล็ต B-spline มาทำ standard tensor product หรือ nonstandard tensor product

บทที่ 6 การทดลองแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติ

แสดงการประมาณพื้นผิวและแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ

บทที่ 7 สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

สรุปและวิจารณ์ผลที่ได้จากการทดลองพร้อมทั้งปัญหาที่เกิดขึ้นตลอดจนข้อเสนอแนะต่างๆ ในการทำวิจัยต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต

2.1 บทนำ

ในบทนี้จะเป็นการอธิบายหลักการพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต โดยส่วนแรกจะกล่าวถึงลักษณะของปริภูมิที่ทำให้เกิดคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด ส่วนที่สองจะกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของเซตฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิซึ่งทำให้เกิดระบบเวฟเล็ตกลุ่มต่างๆ ขึ้น เนื้อหาในบทนี้จะเป็พื้นฐานที่สำคัญสำหรับการออกแบบระบบเวฟเล็ต ซึ่งจะกล่าวในบทถัดไป

2.2 ทฤษฎีทั่วไปสำหรับการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด

2.2.1 ปริภูมิของฟังก์ชัน

ปริภูมิที่สำคัญในการประมวลผลสัญญาณคือ $L^2(\mathbb{R})$ ถ้าฟังก์ชัน $f(t)$ อยู่ในปริภูมิ หมายความว่า $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$ โดย $\mathbb{R}$ แทนช่วงอินทิกรัลเป็นค่าจำนวนจริง ฟังก์ชัน $g(t)$ อยู่ในปริภูมิ $L^2(\mathbb{R})$ จะใช้สัญลักษณ์ $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ หรือ $g(t) \in L^2$

สำหรับทุกๆ ฟังก์ชันที่อยู่ในปริภูมิ S หรือ $f(t) \in S$ จะสามารถเขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นตามสมการ (2.1)

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \quad (2.1)$$

เซตของฟังก์ชัน $\phi_k(t)$ เรียกว่าเซตการกระจาย(Expansion set)ของปริภูมิ S ถ้าสมการที่ (2.1) มีลักษณะเฉพาะจะเรียกเซตของฟังก์ชัน $\phi_k(t)$ ว่าเป็นฟังก์ชันมูลฐานของปริภูมิ S การที่กล่าวว่าเซตฟังก์ชันมูลฐานมีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากหมายความว่า

$$\langle \phi_k(t), \phi_l(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi_k(t) \cdot \phi_l(t) dt = 0 \quad ; k \neq l \quad (2.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับเซตของฟังก์ชันมูลฐานที่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากกัน ค่าสัมประสิทธิ์ a_k ในสมการ (2.1) คำนวณได้จากการพิจารณาผลคูณภายใน (Inner product)

$$a_k = \langle f(t), \phi_k(t) \rangle / \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \frac{\int_R f(t) \phi_k(t) dt}{\int_R |\phi_k(t)|^2 dt} \quad (2.3)$$

จากสมการ(2.3)เพิ่มเงื่อนไขเทอม $\int_R |\phi_k(t)|^2 dt = 1$ เรียกเซตของฟังก์ชันมูลฐาน $\phi_k(t)$ ว่ามีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากปกติ (Orthonormal) ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ a_k จะลดรูปเป็น

$$a_k = \int_R f(t) \phi_k(t) dt \quad (2.4)$$

เซตฟังก์ชันใดๆ จะเรียกว่าเป็นกลุ่มฟังก์ชันมูลฐานจะต้องมีคุณสมบัติดังนี้ คือการเป็นอิสระต่อกันและการแผ่ทั่วปริภูมิอย่างสมบูรณ์ (Completeness) จากคุณสมบัติทั้งสองข้อของฟังก์ชันมูลฐาน สามารถสรุปว่าการเพิ่มฟังก์ชันในกลุ่มฟังก์ชันมูลฐานจะทำให้คุณสมบัติความเป็นอิสระต่อกันเสียไป และการตัดฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งในกลุ่มของฟังก์ชันมูลฐานจะทำให้คุณสมบัติการแผ่ทั่วปริภูมิอย่างสมบูรณ์เสียไป[3]

2.2.2 ฟังก์ชันสเกลลิง (Scaling function)

ก่อนที่จะกล่าวถึงแนวความคิดเกี่ยวกับการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด จะนิยามฟังก์ชันสเกลลิงก่อนดังนี้

$$\phi_k(t) = \phi(t - k) \quad k \in \mathbb{Z}, \phi_k(t) \in L^2 \quad (2.5)$$

โดย $\mathbb{Z}$ ใช้แทนเซต ของจำนวนเต็ม

$\phi_k(t)$ ใช้แทนเซตของฟังก์ชันมูลฐานและเรียกว่าฟังก์ชันสเกลลิงที่เริ่มเกิดขึ้น

ณ ตำแหน่งจำนวนเต็ม k

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ปริภูมิย่อยของ $L^2(\mathbb{R})$ ที่มี $\phi_k(t)$ เป็นฟังก์ชันมูลฐานแทนด้วย V_0 ดังนั้น
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งนั้น หากท่านมีข้อสงสัยหรือต้องการข้อมูลเพิ่มเติม กรุณาติดต่อฝ่ายเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$V_0 = \text{span}\{\phi_k(t)\} \quad (2.6)$$

ค่า k เป็นค่าจำนวนเต็มมีค่าตั้งแต่ลบอนันต์จนถึงบวกอนันต์ สมการที่(2.6) ถ้าทุกๆ $f(t) \in V_0$ แล้ว

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \quad (2.7)$$

การเพิ่มขนาดของปริภูมิย่อยสามารถทำได้โดยเปลี่ยนขนาดของเวลา(t)ของฟังก์ชันสเกลลิง ปริภูมิย่อยที่ถูกเพิ่มขนาดจะใช้สัญลักษณ์ V_j

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (2.8)$$

$$V_j = \text{span}\{\phi_k(2^j t)\} = \text{span}\{\phi_{j,k}(t)\} \quad (2.9)$$

ทุกๆ ฟังก์ชัน $f(t)$ ที่อยู่ในปริภูมิ V_j สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลรวมฟังก์ชันสเกลลิง $\phi_{j,k}(t)$

$$f(t) = \sum_k a_k \phi(2^j t - k) \quad (2.10)$$

ปริภูมิย่อยที่มี $j > 0$ จะมีรูปร่างของสเกลลิงฟังก์ชัน $\phi_{j,k}(t)$ ลักษณะแคบและช่วงการเลื่อน k จะเป็นช่วงสั้นๆ แต่สำหรับปริภูมิย่อยที่มี $j < 0$ ลักษณะของรูปร่างฟังก์ชันสเกลลิง $\phi_{j,k}(t)$ และช่วงการเลื่อนจะกว้างขึ้น ดังนั้นฟังก์ชัน $f(t)$ ในปริภูมิย่อยที่มี $j < 0$ จะมีลักษณะเป็นข้อมูลที่หายากและ $f(t)$ ในปริภูมิย่อยที่มี $j > 0$ จะเป็นข้อมูลที่ให้รายละเอียดมากกว่า

2.2.3 การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด

สำหรับคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดจะเริ่มจากการนิยามปริภูมิย่อยที่มีคุณสมบัติทับซ้อนกันดังสมการที่ (2.11)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2 \quad (2.11)$$

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้ง...
เอกสารทุกครั้งที่มีการนำ

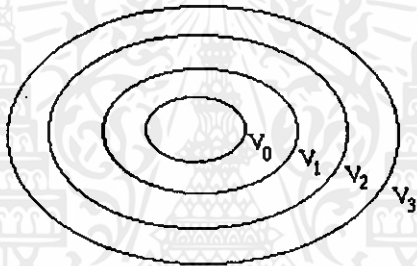
หรือ
$$V_j \subset V_{j+1} \text{ สำหรับทุก } j \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

และ
$$V_{-\infty} = \{0\}, \quad V_{+\infty} = L^2$$

จากการนิยามของ V_j ดังนั้น

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \quad (2.13)$$

การซ้อนทับกันของปริภูมิย่อย $\phi(2^j t - k)$ ใช้สัญลักษณ์ V_j ในสมการที่ (2.11) และ (2.13) สามารถแสดงเป็นภาพดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การซ้อนทับกันของปริภูมิย่อยที่มีฟังก์ชันสเกลลิงแม่ตัวปริภูมิ

จากคุณสมบัติ $V_0 \subset V_1$ หมายความว่า $\phi(t) \in V_1$ หรือ $\phi(t)$ อยู่ในปริภูมิย่อย V_0 ในขณะที่เดียวกันก็อยู่ในปริภูมิย่อย V_1 ด้วย ซึ่งสอดคล้องตามสมการ (2.14)

$$\phi(t) = \sum_k h(k) \sqrt{2} \phi(2t - k), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.14)$$

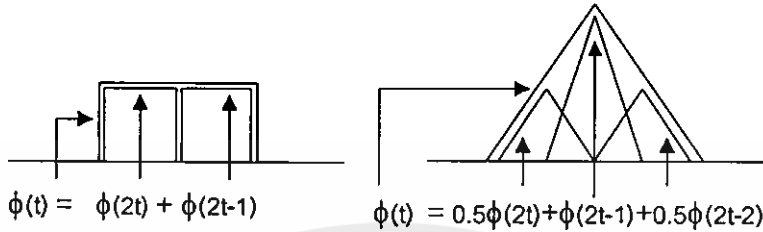
ค่าสัมประสิทธิ์ $h(k)$ คือลำดับของจำนวนจริง(สามารถเป็นจำนวนจินตภาพได้) เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิง สมการ (2.14) นี้ถูกเรียกว่า สมการการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด[4] หรือสมการ Refinement

ตัวอย่าง สเกลลิงฟังก์ชันแบบ Haar ซึ่ง $\phi(t)$ แสดงดังภาพที่ 2.2 (ซ้าย) $\phi(2t)$ สามารถทำให้เกิด $\phi(t)$ ได้

ซึ่ง

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$$

$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



รูปที่ 2.2 ฟังก์ชันสเกลลิงแบบ Haar (ซ้าย) และฟังก์ชันสเกลลิงแบบสามเหลี่ยม (ขวา)

สำหรับฟังก์ชันสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.2 (ขวา) จะได้ $h(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2.2.4 ฟังก์ชันเวฟเล็ต

นิยามฟังก์ชันเวฟเล็ต $\varphi_{j,j}(t)$ คือเซตของฟังก์ชันมูลฐานที่แผ่ทั่วถึงปริภูมิย่อยที่เกิดจากผลต่างระหว่างปริภูมิย่อย V_{j+1} กับ V_j เขียนแสดงได้ดังนี้ จากสมการ (2.11) พิจารณาปริภูมิย่อย V_j เริ่มต้นที่ $j = 0$

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2 \quad (2.15)$$

จากการนิยามกำหนดให้เซตฟังก์ชันเวฟเล็ต $\varphi(t)$ แผ่ทั่วถึงปริภูมิย่อย W_0 ดังนั้น

$$V_1 = V_0 + W_0 \quad (2.16)$$

โดยรูปแบบทั่วไป

$$L^2 = V_0 + W_0 + W_1 + \dots \quad (2.17)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ทั้งห้าปีถัดไปฉบับนี้จะไม่คงอำนาจบังคับของเอกสารฉบับนี้ที่มีการนำไปใช้
การเริ่มต้นของปริภูมิสามารถเริ่มที่ระดับ j ใดๆ เช่นเริ่มต้นที่ $j = 10$ สมการที่ (2.17) สามารถเขียนใหม่ได้

$$L^2 = V_{10} + W_{10} + W_{11} + \dots \quad (2.18)$$

ถ้า j เริ่มต้นที่ลบอนันต์จะทำให้ปริภูมิของฟังก์ชันสเกลลิ่งหายไป

$$L^2 = \dots + W_{-2} + W_{-1} + W_0 + W_1 + W_2 \dots \quad (2.19)$$

จากสมการที่ (2.19) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมีย่อย V_0 และปริภูมีย่อยเวฟเล็ตคือ

$$W_{-\infty} + \dots + W_{-1} = V_0 \quad (2.20)$$

สำหรับปริภูมิสเกลลิ่ง V_j มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากกับปริภูมิเวฟเล็ต W_j และรวมทั้งสองปริภูมิจะได้ปริภูมิ V_{j+1} นั้นหมายความว่า

$$\left\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \right\rangle = \int_R \phi_{j,k}(t) \cdot \phi_{j,l}(t) dt = 0 \quad (2.21)$$

สมการ (2.21) เป็นจริงทุก $j, k, l \in \mathbb{Z}$ ดังนั้นจะแทนเครื่องหมายการกระทำบวก (+) ในสมการที่ (2.16) ถึงสมการ (2.20) ด้วยเครื่องหมาย $\oplus$ ยกตัวอย่างเช่น กรณี j เริ่มต้นที่ $j=0$ จากสมการที่ (2.17) จะได้ $L^2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$ เขียนแสดงดังรูปที่ 2.3

ผลของสมการ (2.16) สามารถขยายไปที่ระดับความละเอียด $j+1$ หรือปริภูมิเวฟเล็ตจะถูกแผ่ทั่วถึงโดยปริภูมิสเกลลิ่งที่ระดับความละเอียดสูงกว่า $V_{j+1} = V_j + W_j$ ดังนั้นทุกฟังก์ชันเวฟเล็ตในปริภูมิ W_j สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันสเกลลิ่งใน V_{j+1} ได้

$$\varphi(t) = \sum_n h_n(n) \sqrt{2} \phi(2t - n) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

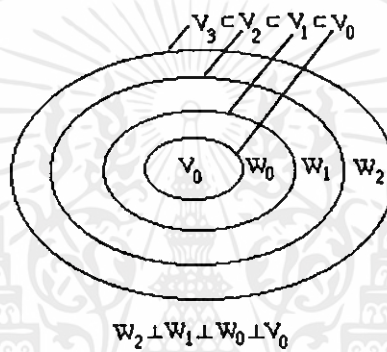
ชุดลำดับ $h_1(n)$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ของเวฟเล็ต และ $\phi(t)$ เรียกว่าเวฟเล็ตต้นแบบ หรือเวฟเล็ตแม่ สมการ (2.22) ถูกเรียกว่าสมการเวฟเล็ต ที่ระดับความละเอียดใดๆ นิยามโดย

$$\phi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - n) \quad (2.23)$$

เมื่อ 2^j คือการยืดหดของตัวแปร t

$n/2^j$ ค่าแสดงการเลื่อนของตัวแปร t

$\phi_{j,n}(t)$ ฟังก์ชันเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียด j

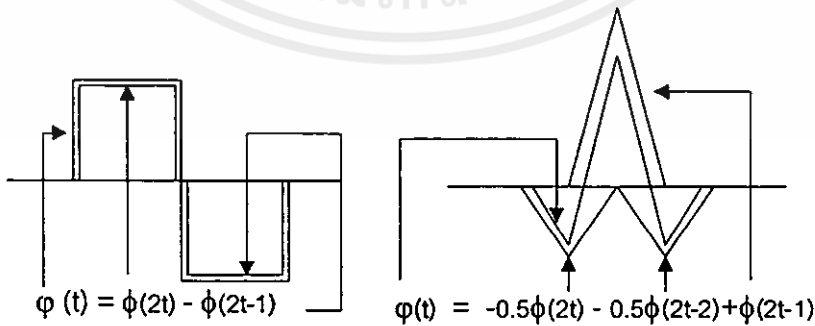


รูปที่ 2.3 ปริภูมิของฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเล็ตกรณีตั้งฉากกัน

ตัวอย่างเช่น เวฟเล็ตแบบ Haar ค่าสัมประสิทธิ์ของเวฟเล็ตตามสมการ (2.22) คือ

$$h_1(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ สำหรับเวฟเล็ตสามเหลี่ยมค่าสัมประสิทธิ์ } h_1(n) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

แสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 เวฟเล็ตแบบ Haar และแบบสามเหลี่ยม

(a) เวฟเล็ตแบบ Haar (b) เวฟเล็ตแบบสามเหลี่ยม

หลังจากนิยามเซตของฟังก์ชัน $\phi_k(t)$ และ $\varphi_{j,k}(t)$ ที่แผ่ทั่วปริภูมิ $L^2(R)$ แล้ว ดังนั้นสำหรับฟังก์ชัน $g(t)$ อยู่ใน $L^2(R)$ จะสามารถเขียนตามสมการที่ (2.24) ได้

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \phi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(j,k) \varphi_{j,k}(t) \quad (2.24)$$

เทอมแรกของสมการ (2.24) แสดงส่วนประมาณของฟังก์ชัน $g(t)$ ส่วนเทอมที่สองจะแสดงรายละเอียดของฟังก์ชันซึ่งเมื่อรวมกับส่วนประมาณจะทำให้ได้รับส่วนประมาณที่ระดับความละเอียดสูงขึ้น ในกรณีเป็นระบบเวฟเล็ตออร์ทอนัลค่าสัมประสิทธิ์ $c(k)$ และ $h(j,k)$ คำนวณจากผลคูณภายใน

$$c(k) = \langle g(t), \phi_k(t) \rangle = \int_R g(t) \phi_k(t) dt \quad (2.25)$$

และ

$$h(j,k) = \langle g(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = \int_R g(t) \varphi_{j,k}(t) dt \quad (2.26)$$

2.3 ระบบเวฟเล็ตแบบออร์ทอนัล เซมิโอออร์ทอนัล และไบออร์ทอนัล

2.3.1 ฟังก์ชันมูลฐานแบบออร์ทอนัลและไบออร์ทอนัล

เซตของฟังก์ชันหรือเวกเตอร์ $f_k(t)$ ที่แผ่ทั่วปริภูมิ S ทุกเวกเตอร์หรือฟังก์ชันใน S จะสามารถเขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $f_k(t)$ ได้ดังสมการ (2.27)

$$g(t) = \sum_k a_k f_k(t) \quad (2.27)$$

เมื่อ $k \in Z$ (เซตของจำนวนเต็ม) และ $t \in R$, $a \in R$ (เซตจำนวนจริง) นิยามผลคูณภายในสำหรับปริภูมิ S ด้วย $\langle f(t), g(t) \rangle$ นอร์มของฟังก์ชันแทนด้วยสัญลักษณ์ $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

$f_k(t)$ เป็นฟังก์ชันมูลฐานแบบออร์ทอนัล ถ้า $\langle f_k(t), g(t) \rangle = 0$ สำหรับทุกค่า $k \neq l$ และเรียกว่าเป็นเซตฟังก์ชันมูลฐานแบบออร์ทอนัล ถ้าเพิ่มเงื่อนไข

เอกสารนี้เป็นเอกสารต้นฉบับที่ได้รับการแก้ไขและปรับปรุงให้ถูกต้องตามเนื้อหาและรูปแบบการนำเสนอของเอกสารฉบับนี้
ไม่ว่ากรณีใดๆก็ตาม ผู้ใช้เอกสารฉบับนี้จะต้องปฏิบัติตามเงื่อนไขการใช้งานของเอกสารฉบับนี้

$$\langle f_k(t), g(t) \rangle = \delta(k-l) \quad (2.28)$$

$$\delta(k-l) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } k=l \\ 0 & \text{สำหรับ } k \neq l \end{cases}$$

จากการนิยามข้างต้น $f_k(t)$ มีคุณสมบัติแบบออร์โธโนมัลแล้ว การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ a_k ในสมการ (2.27) จะสามารถกระทำได้ง่ายดังนี้ จากสมการ (2.27)

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_k a_k f_k(t) \\ \int g(t) f_k(t) dt &= \int f_k(t) \left(\sum_k a_k f_k(t) \right) dt \\ \int g(t) f_k(t) dt &= a_k \\ \text{หรือ } \langle g(t), f_k(t) \rangle &= a_k \end{aligned} \quad (2.29)$$

กรณีเซตของฟังก์ชันมูลฐาน $f_k(t)$ ที่ไม่สามารถทำให้เป็นระบบออร์โธโนมัลได้สมการที่ (2.27) ก็ยังมีค่า a_k ที่ทำให้สมการเป็นจริงได้ เพราะว่าจะมีเซตฟังก์ชัน $\tilde{f}_k(t)$ ซึ่งเรียกว่า เซตฟังก์ชันมูลฐานแบบคู่ที่มีคุณสมบัติ

$$\langle f_l(t), \tilde{f}_k(t) \rangle = \delta(l-k) \quad (2.30)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ a_k คำนวณจากสมการ (2.31)

$$a_k = \langle g(t), \tilde{f}_k(t) \rangle \quad (2.31)$$

เนื่องจากการคำนวณตามสมการ (2.27) จะต้องใช้ฟังก์ชันมูลฐานสองชุด ดังนั้นจึงเรียกระบบนี้ว่าระบบไบออร์โธโนมัล

การคำนวณค่าผลคูณภายในเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ a_k ในสมการ (2.29) และ (2.31) เรียกว่า การวิเคราะห์และการคำนวณค่า $g(t)$ ตามสมการ (2.27) เรียกว่า การสังเคราะห์ ถ้าเป็นระบบที่มีมิติจำกัดการวิเคราะห์และการสังเคราะห์จะเป็นการคูณของเมตริกซ์ที่มีค่าภายในเป็นเวกเตอร์ คือเมื่อสมการ (2.27) มีเวกเตอร์เป็นเซตพื้นฐาน เมตริกซ์สังเคราะห์จะมีแต่ละหลักเป็นเซตของเวก

เวกเตอร์มูลฐาน เมตริกซ์สังเคราะห์จะเป็นเมตริกซ์จัตุรัสและมีค่าดีเทอร์มิแนนซ์ไม่เท่ากับศูนย์ กรณีเป็นระบบที่มีสมบัติเชิงตั้งฉากเมตริกซ์สังเคราะห์จะเป็นออร์ทोगอนัลเมตริกซ์ สำหรับระบบไบออร์ทोगอนัลจะสามารถหาค่าอินเวอร์สของเมตริกซ์สังเคราะห์ได้โดยผลลัพธ์จะเป็นเมตริกซ์ที่มีแต่ละแถวเป็นเซตเวกเตอร์มูลฐานคู่คู่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 จากสมการ $g(t) = \sum_k a_k f_k(t)$ กำหนดให้เป็นปริภูมิสี่มิติดังนี้

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} f_3(0) \\ f_3(1) \\ f_3(2) \\ f_3(3) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

เขียนในรูปแบบเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(0) & f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_0(1) & f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_0(2) & f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \\ f_0(3) & f_1(3) & f_2(3) & f_3(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

หรือ

$$g = Fa \quad (2.34)$$

เวกเตอร์ g เป็นเวกเตอร์สัญญาณเมตริกซ์ F มีแต่ละหลักประกอบด้วยเวกเตอร์มูลฐาน f_k ส่วน a เป็นเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ a_k

พิจารณากรณีทั่วไปใช้ สมการ (2.31) หาค่าสัมประสิทธิ์ a_k

$$a_k = \langle g(t), \tilde{f}_k(t) \rangle = \tilde{f}_k^T g \quad (2.35)$$

เอกสารนี้ **ในรูปเมตริกซ์** สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0(0) & \tilde{f}_0(1) & \tilde{f}_0(2) & \tilde{f}_0(3) \\ \tilde{f}_1(0) & \tilde{f}_1(1) & \tilde{f}_1(2) & \tilde{f}_1(3) \\ \tilde{f}_2(0) & \tilde{f}_2(1) & \tilde{f}_2(2) & \tilde{f}_2(3) \\ \tilde{f}_3(0) & \tilde{f}_3(1) & \tilde{f}_3(2) & \tilde{f}_3(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

หรือ
$$\mathbf{a} = \tilde{F}^T \mathbf{g} \quad (2.36)$$

เมื่อ $\tilde{F}$ คือเมตริกซ์คู่อัล

จากสมการ (2.34) แก้สมการเพื่อหาค่าเวกเตอร์ $\mathbf{a}$ จะได้

$$\mathbf{a} = \tilde{F}^{-1} \mathbf{g} \quad (2.37)$$

เทียบสมการ (2.36) และ (2.37) จะได้ $\tilde{F} = \tilde{F}^{-1}$ ซึ่งมีแต่ละแถวเป็นเซตเวกเตอร์มูลฐานคู่อัล ถ้าแต่ละหลักของ $\tilde{F}$ มีสมบัติเชิงตั้งฉากและนอร์มาไลซ์ ดังนั้น $\tilde{F}\tilde{F}^T = \mathbf{I}$ หรือเมตริกซ์คู่อัล ($\tilde{F}$) ก็คือ $\tilde{F}^T$ นั่นเอง ซึ่งจะเห็นว่าอยู่ในรูปแบบที่ง่ายต่อการคำนวณ

2.3.2 ระบบเวฟเลิตแบบอโทกอนัล

ระบบเวฟเลิตแบบอโทกอนัลปริภูมิย่อย V_j และ W_j จะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$V_j \perp W_j \text{ และ } V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

พิจารณาเงื่อนไขของฟังก์ชันมูลฐานในแต่ละปริภูมิย่อย

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\ \langle \phi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \end{aligned} \quad (2.38)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
สำหรับทุก j, k และ l ที่เป็นจำนวนเต็ม เวฟเลิตแบบอโทกอนัลค่าพลังงานของฟังก์ชัน $f(t)$
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น ยกเว้นที่มีเหตุผลพิเศษเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
พิจารณาจาก คุณสมบัติของ Parseval's theorem ดังนี้

$$\int |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_j(j,n)|^2 \quad (2.39)$$

เมื่อ $f(t)$ ฟังก์ชันในปริภูมิ $L^2(R)$
 $h(k)$ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับ $j=0$
 $h_j(j,n)$ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเวฟเลตเริ่มที่ระดับ $j=0$

2.3.3 ระบบเวฟเลตแบบไบออร์ทogonal

ระบบเวฟเลตแบบไบออร์ทogonal จะมีคุณสมบัติดังนี้ ฟังก์ชันมูลฐานในแต่ละปริภูมิย่อย V_j และ W_j จะไม่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก และปริภูมิ V_j กับปริภูมิ W_j ก็ไม่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากด้วย แต่จะมีปริภูมิ $\tilde{V}_j$ ตั้งฉากกับ W_j และมีปริภูมิ $\tilde{W}_j$ ตั้งฉากกับปริภูมิ V_j ดังนี้

$$V_j \perp \tilde{W}_j \text{ และ } W_j \perp \tilde{V}_j$$

$$V_j + W_j = V_{j+1} \text{ และ } \tilde{V}_j + \tilde{W}_j = \tilde{V}_{j+1}$$

พิจารณาฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อย V_j และ W_j

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\ \langle \varphi_{j,k}(t), \tilde{\varphi}_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\ \langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\varphi}_{j,l}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \varphi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,l}(t) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

สำหรับทุก j, k และ l ที่เป็นจำนวนเต็ม และเรียกเซตของ $\phi_{j,k}$ และ $\varphi_{j,k}$ ว่า Primal basis และเรียกเซต $\tilde{\phi}_{j,k}$ และ $\tilde{\varphi}_{j,k}$ ว่า Dual basis

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

2.3.4 ระบบเวฟเลตแบบเซมิออร์ทogonal

พิจารณาปริภูมิย่อย V_0 ที่มีเซตฟังก์ชันมูลฐาน $\phi(t-k)$ โดย $\phi(t-k)$ ไม่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกันและต้องการจะหาปริภูมิ W_0 ที่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากกับปริภูมิ V_0 ซึ่งปริภูมิย่อย W_0 มี

กลุ่มของ $\varphi(t-l)$ เป็นฟังก์ชันมูลฐาน กล่าวคือ เวฟเล็ตแบบเซมิโอโทกอนัลจะเป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$V_0 \perp W_0 \text{ และ } V_0 \oplus W_0 = V_1$$

ฟังก์ชันในเซตของ $\phi(t-k)$ หรือในเซตของ $\varphi(t-l)$ ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากซึ่งกันและกัน เงื่อนไขนี้เป็นจริงทุกระดับความละเอียดคือ $V_j \perp W_j$ เมื่อ $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ เวฟเล็ตแบบเซมิโอโทกอนัลจะมีคุณสมบัติอันหนึ่งคือ $\varphi(2^j t - l_1)$ และ $\varphi(2^j t - l_2)$ จะมีลักษณะสมบัติเชิงตั้งฉาก ซึ่งกันและกัน ที่ทุก $j \neq j$ สำหรับที่ระดับความละเอียดเดียวกันปกติจะไม่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก

2.4 สรุป

การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดนั้นเริ่มจากการนิยามปริภูมิย่อยที่มีลักษณะซ้อนทับกัน ซึ่งทำให้เกิดสมการการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด(2.14) และผลต่างของปริภูมิย่อยที่อยู่ติดจากกันหนึ่งระดับทำให้เกิดสมการที่เรียกว่าสมการเวฟเล็ต(2.22) สำหรับการเกิดเวฟเล็ตระบบต่างๆ โดยพื้นฐานจะพิจารณาจากคุณสมบัติของเซตฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อย V_j และ W_j ระบบเวฟเล็ตแบ่งออกเป็นกลุ่มใหญ่ๆ ได้ดังนี้

1. ระบบเวฟเล็ตแบบอโทกอนัล
2. ระบบเวฟเล็ตแบบไบอโทกอนัล
3. ระบบเวฟเล็ตแบบเซมิโอโทกอนัล

สำหรับระบบเวฟเล็ตที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือระบบเวฟเล็ตแบบเซมิโอโทกอนัล ซึ่งจะกล่าวอย่างละเอียดในบทถัดไป

บทที่ 3

การแปลงเวฟเลตบนขอบเขตจำกัด

3.1 บทนำ

จากบทที่ผ่านมาได้กล่าวถึงลักษณะทั่วไปของการเกิดคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับ ความละเอียดและการเกิดขึ้นของระบบเวฟเลตต่างๆ ตามคุณสมบัติเซตฟังก์ชันมูลฐาน สำหรับระบบเวฟเลตแบบแบ่งช่วง (Discrete wavelet transforms) ที่นิยามบนขอบเขตจำกัด (Bounded real line) แล้วคุณสมบัติต่างๆ ดังที่กล่าวในบทที่ 2 จะสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ต่างๆ อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังจะกล่าวละเอียดขึ้นในบทนี้และอธิบายถึงที่มาของสมการกระจายข้อมูล (Decomposition) และสมการรวมกลับข้อมูล (Reconstruction) ที่ทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันมูลฐานแต่ละระดับความละเอียด ซึ่งจะนำไปใช้งานจริงสำหรับการแปลงเวฟเลตหนึ่งมิติ

3.2 การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด

จากบทที่ผ่านมาทำให้ทราบว่าจุดเริ่มต้นของการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดเริ่มจากการทับซ้อนกันแบบเชิงเส้นของปริภูมิย่อยสเกลลิง $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j$ และผลต่างของปริภูมิย่อยสเกลลิงจะทำให้เกิดปริภูมิย่อยที่เรียกว่าปริภูมิเวฟเลต (W_j) ฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อย W_j จะเรียกว่าฟังก์ชันเวฟเลต ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิย่อยสเกลลิงและปริภูมิย่อยเวฟเลตแสดงดังสมการ (3.1)

$$V_{j+1} = V_j + W_j \quad \text{หรือ} \quad V_j = V_{j-1} + W_{j-1} \quad (3.1)$$

จากสมการ (3.1) ถ้ามีฟังก์ชัน $f(t)$ อยู่ในปริภูมิย่อย V_{j+1} ดังนั้นฟังก์ชัน $f(t)$ จะสามารถเขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิ V_j บวกกับผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิ W_j ได้แบบเดียว(unique) สำหรับระบบเวฟเลตที่นิยามบนขอบเขตจำกัด (Bounded real line) แต่ละปริภูมิ V_j และ W_j จะมีมิติจำกัดเพราะฉะนั้นการพิจารณาคูสมบัติต่างๆ ของระบบ

เวฟเลตจะสามารถ อธิบายอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้

3.2.1 การยืดและการหดของฟังก์ชันมูลฐาน

การเพิ่มและลดความละเอียดของฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิสเกลลิง (V_j) และปริภูมิเวฟเลต (W_j) สามารถแสดงอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\Phi_j(t) = [\phi_{j,0}(t) \dots \phi_{j,vj-1}(t)] \quad (3.2)$$

$$\Psi_j(t) = [\phi_{j,0}(t) \dots \phi_{j,wj-1}(t)] \quad (3.3)$$

โดยปริภูมิ $\Phi_j(t)$ เป็นเวกเตอร์แถว ซึ่งภายในเป็นฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับความละเอียด j

$\Psi_j(t)$ เป็นเวกเตอร์แถว ซึ่งภายในเป็นฟังก์ชันเวฟเลตที่ระดับความละเอียด j

$v(j)$ แทนมิติของ V_j

$w(j)$ แทนมิติของ W_j

จากเงื่อนไข $V_{j+1} = V_j + W_j$ มิติของปริภูมิ V_{j+1} จะเป็นตามสมการ (3.4)

$$v(j+1) = v(j) + w(j) \quad (3.4)$$

การที่ปริภูมิ V_j ซ้อนทับกันทุกๆ ระดับความละเอียดจะต้องมีเมตริกซ์ P_j ที่ทำให้สมการ (3.5) เป็นจริง

$$\Phi_{j+1}(t) = \Phi_j(t) P_j \quad (3.5)$$

สมการ (3.5) พบว่าปริภูมิ V_j และ V_{j-1} มีมิติ $v(j)$ และ $v(j-1)$ ตามลำดับ ดังนั้นเมตริกซ์ P_j จะมีมิติเป็น $v(j) \times v(j-1)$

พิจารณาปริภูมิเวฟเลต W_{j-1} ก็เป็นปริภูมีย่อยของ V_j ด้วยเพราะฉะนั้นจะสามารถแสดงแต่ละฟังก์ชันเวฟเลตในปริภูมิ W_{j-1} ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันสเกลลิงในปริภูมิ V_j ได้โดยจะมีเมตริกซ์ Q_j ที่มีคุณสมบัติดังสมการ (3.6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Psi_{j-1}(t) = \Phi_j(t) Q_j \quad (3.6)$$

เมตริกซ์ Q_j มีมิติเท่ากับ $v(j) \times w(j-1)$ สมการ (3.5) และสมการ (3.6) สามารถรวมในรูปเมตริกซ์ได้ตามสมการ (3.7)

$$[\Phi_{j-1}(t) \mid \Psi_{j-1}(t)] = \Phi_j(t) [P_j \mid Q_j] \quad (3.7)$$

เมตริกซ์ P_j และเมตริกซ์ Q_j เรียกว่าเมตริกซ์สังเคราะห์ $[P_j \mid Q_j]$ เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากการนำเมตริกซ์ P_j และเมตริกซ์ Q_j มาเรียงต่อกันมีมิติเท่ากับ $v(j) \times v(j)$

3.3 การแปลงเวฟเล็ตโดยใช้หลักการ Synthesis Filter Banks

เนื้อหาส่วนนี้จะแสดงการพิจารณาหาสมการสำหรับรวมกลับ (Reconstruction) ข้อมูล หรือ สัญญาณจากระดับความละเอียดที่ต่ำกว่าสู่ระดับความละเอียดที่สูงกว่า กำหนดฟังก์ชัน $f(t)$ ใดๆ อยู่ในปริภูมิ V_j

จากความสัมพันธ์ $V_j = V_{j-1} + W_{j-1}$ ดังนั้น

$$f(t) = \Phi_{j-1}(t) C_{j-1} + \Psi_{j-1}(t) D_{j-1} = \Phi_j(t) C_j \quad (3.8)$$

โดย $\Phi_j(t)$ และ $\Psi_j(t)$ กำหนดตามสมการ (3.2) และสมการ (3.3) ตามลำดับ

C_j และ D_j เป็นเวกเตอร์หลักเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียด j ตามลำดับ

แทนสมการ (3.5) และสมการ (3.6) ลงในสมการ (3.8) จะได้

$$f(t) = \Phi_j(t) P_j C_{j-1} + \Phi_j(t) Q_j D_{j-1} = \Phi_j(t) C_j \quad (3.9)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \Phi_j(t) (P_j C_{j-1} + Q_j D_{j-1}) = \Phi_j(t) C_j \quad (3.10)$$

ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ C_j กับเมตริกซ์ P_j และ Q_j คือ

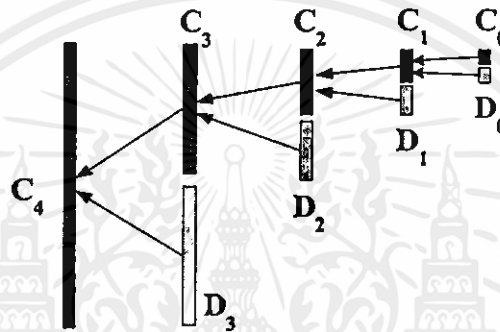
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C_j = P_j C_{j-1} + Q_j D_{j-1} \quad (3.11)$$

รวมสมการ (3.11) ในรูปเมตริกซ์

$$C_j = [P_j | Q_j] \begin{bmatrix} C_H \\ D_H \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

การรวมกลับของเวกเตอร์ C_j จากเวกเตอร์ C_{j-1} และเวกเตอร์ D_{j-1} เรียกว่า การสังเคราะห์หรือ การสร้างขึ้นใหม่ รูปที่ 3.1 แสดงแผนภูมิการสร้างขึ้นใหม่



รูปที่ 3.1 แผนภูมิการสังเคราะห์ หรือการสร้างขึ้นใหม่จากข้อมูลที่ระดับความละเอียดต่ำสู่ระดับความละเอียดสูง

3.4 การแปลงเวฟเล็ตโดยใช้หลักการ Analysis Filter Banks

การกระจาย (Decomposition) สัญญาณ หรือข้อมูลจากระดับความละเอียดสูงสู่ระดับความละเอียดต่ำทำได้โดยการพิจารณาย้อนกลับการสังเคราะห์

จากสมการ (3.12)

$$C_j = [P_j | Q_j] \begin{bmatrix} C_H \\ D_H \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

คูณสมการ (3.13) ทั้งสองข้างด้วยเมตริกซ์ $[P_j | Q_j]^{-1}$ จะได้

$$\begin{bmatrix} C_H \\ D_H \end{bmatrix} = [P_j | Q_j]^{-1} C_j$$

$$\begin{bmatrix} C_H \\ D_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} C_j \quad (3.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
หรือ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเอกสารนี้และข้อมูลใดๆ ไปเผยแพร่หรือแจ้งถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำเอกสาร

โดย

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = [P_j | Q_j]^{-1} \quad (3.15)$$

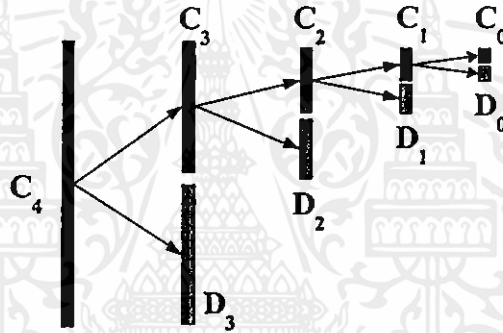
A_j เมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $v(j-1) \times v(j)$

B_j เมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ $w(j-1) \times v(j)$

C_{j-1} เวกเตอร์หลักเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิงที่มีมิติเท่ากับ $v(j-1) \times 1$

D_{j-1} เวกเตอร์หลักเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเวฟเลตที่มีมิติเท่ากับ $w(j-1) \times 1$

เมตริกซ์ A_j และ B_j ถูกเรียกว่าเมตริกซ์วิเคราะห์ สมการ (3.14) เรียกว่าขั้นตอนการกระจายข้อมูล (Decomposition) หรือการวิเคราะห์ รูปที่ 3.2 แสดงแผนภูมิการกระจายข้อมูลจากระดับความละเอียดสูงสู่ระดับความละเอียดต่ำกว่า



รูปที่ 3.2 แผนภูมิการกระจายข้อมูลจากระดับความละเอียดสูงกว่าสู่ระดับความละเอียดต่ำ

3.5 เวกเตอร์ออร์ทोगอนัลในรูปแบบเมตริกซ์

จากบทที่ 2 ระบบเวฟเลตออร์ทोगอนัลจะมีเซตของฟังก์ชันมูลฐาน (หมายถึงฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเลต) มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\ \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{i,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \quad j, k, l \in \mathbb{Z} \\ \langle \phi_{j,k}(t), \psi_{i,l}(t) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

เพื่อที่จัดการกับผลคูณภายในตามสมการ (3.16) จะกำหนดให้เมตริกซ์ $F(t) = [f_0(t) \ f_1(t) \ \dots]$ และเมตริกซ์ $G(t) = [g_0(t) \ g_1(t) \ \dots]$ ผลคูณภายใน $\langle F, G \rangle$ จะมีสมาชิก (k, l) เป็น $\langle f_k(t), g_l(t) \rangle$ เมตริกซ์ F เมตริกซ์ G และเมตริกซ์คงที่ M ใดๆ จะมีคุณสมบัติดังนี้

$$\begin{aligned}
[\langle F, G \rangle] &= [\langle G, F \rangle]^T \\
[\langle F, GM \rangle] &= [\langle F, G \rangle] M \\
[\langle FM, G \rangle] &= M^T [\langle F, G \rangle]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

กำหนดให้ I แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ และศูนย์ (0) แทนเมตริกซ์ศูนย์หรือเวกเตอร์ศูนย์ จากสมการ (3.16) จะได้

$$\begin{aligned}
[\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle] &= I \\
[\langle \Psi_j, \Psi_j \rangle] &= I \\
[\langle \Phi_j, \Psi_j \rangle] &= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

พิจารณาผลกระทบท่อเมตริกซ์ P และเมตริกซ์ Q ของระบบเวฟเล็ตออร์ทอโกนัลได้โดยพิจารณาเงื่อนไขผลคูณภายในดังต่อไปนี้

$$[\langle [\Phi_j | \Psi_j], [\Phi_j | \Psi_j] \rangle] = \left[\frac{[\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle] [\langle \Phi_j, \Psi_j \rangle]}{[\langle \Psi_j, \Phi_j \rangle] [\langle \Psi_j, \Psi_j \rangle]} \right] = I \tag{3.19}$$

ที่ระดับความละเอียด $j-1$ เงื่อนไขตามสมการ (3.19) ก็เป็นจริง

$$[\langle [\Phi_{j-1} | \Psi_{j-1}], [\Phi_{j-1} | \Psi_{j-1}] \rangle] = I \tag{3.20}$$

แทนสมการ (3.7) ในสมการ (3.20)

$$[\langle \Phi_j [P_j | Q_j], \Phi_j [P_j | Q_j] \rangle] = I$$

ใช้คุณสมบัติตามสมการ (3.17) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเอกสารทุกครั้งที่มีการนำ (3.21)

หรือ

$$[P_j | Q_j]^T = [P_j | Q_j]^{-1}$$

แสดงว่าเวฟเลิตอโทกอนัลเมตริกซ์สังเคราะห์จะเป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉากและเมตริกซ์วิเคราะห์ A_j และ B_j หาได้จาก

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = [P_j | Q_j]^T$$

หรือ

$$A_j = (P_j)^T ; B_j = (Q_j)^T$$

3.6 เวฟเลิตเซมิอโทกอนัลในรูปแบบเมตริกซ์

เงื่อนไขของฟังก์ชันมูลฐานที่ทำให้ เกิดระบบเวฟเลิตเซมิอโทกอนัลคือ

$$\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \rangle = 0 \quad j, k, l \in \mathbb{Z} \quad (3.22)$$

จากสมการ (3.22) พบว่าเวฟเลิตอโทกอนัลก็อยู่ในเงื่อนไขของเวฟเลิตเซมิอโทกอนัลด้วย สมการ (3.22) แสดงในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$[\langle \Phi_j, \Psi_j \rangle] = 0 \quad (3.23)$$

เงื่อนไขของสมการ(3.23) เป็นจริงทุกๆระดับความละเอียด พิจารณาที่ระดับความละเอียด $j-1$ จากนั้น แทนด้วยสมการ (3.5) และสมการ (3.6)

$$[\langle \Phi_j P_j, \Phi_j Q_j \rangle] = 0$$

ใช้คุณสมบัติตามสมการ (3.17) จะได้สมการสำหรับใช้หาเมตริกซ์สังเคราะห์ Q ตามสมการ (3.24) ซึ่งเป็นระบบสมการเอกพันธ์

$$(P_j)^T [\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle] Q_j = 0 \quad (3.24)$$

3.6.1 สรุปขั้นตอนการออกแบบเวฟเลิตเซมิอโทกอนัล

1. เลือกฟังก์ชันสเกลลิง Φ_j โดยตรงหรือผ่านทางขั้นตอนการแบ่งย่อย[5](Subdivision)ซึ่งจะได้เมตริกซ์สังเคราะห์ P_j

2. เลือกรูปแบบผลคูณภายในระหว่างฟังก์ชันในปริภูมิย่อย $V_0, V_1, \dots$ โดยทั่วไปจะใช้

$$\int_a^b f(t)g(t) dt$$

3. แก่ระบบสมการเอกพันธ์ หาเมตริกซ์สังเคราะห์ Q_j จาก

$$(P_j)^T [\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle] Q_j = 0$$

ขั้นตอนการหาเมตริกซ์ Q_j อาจพิจารณาได้ว่าเป็นขั้นตอนการหาฟังก์ชันเวฟเลตที่แผ่ทั่วปริภูมิ W_j ด้วยเพราะว่าเมตริกซ์ Q_j ที่ได้สามารถนำไปหารูปร่างของฟังก์ชันเวฟเลตได้ สำหรับเมตริกซ์วิเคราะห์ A_j และ B_j พิจารณาสมการ (3.15) คือ

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = [P_j | Q_j]^{-1}$$

3.7 เวฟเลตไบออโทกอนัลในรูปแบบเมตริกซ์

เวฟเลตไบออโทกอนัลและเซมิไบออโทกอนัลจะมีลักษณะที่เหมือนกันอันหนึ่งคือ ต้องการปริภูมิ V_j และปริภูมิ W_j มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก ซึ่งเป็นผลให้เมตริกซ์สังเคราะห์ต้องเป็นปริภูมิว่างของโทม $(P_j)^T [\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle]$ และเมตริกซ์วิเคราะห์พิจารณาจากสมการ (3.15) ซึ่งบางครั้งไม่สามารถปรับปรุงประสิทธิภาพได้ [5] เช่น

1. ระบบเวฟเลตเซมิไบออโทกอนัลโดยปกติเมตริกซ์สังเคราะห์ สามารถสร้างขึ้นให้มีลักษณะเป็น sparse ได้แต่ไม่ได้รับรองว่าเมตริกซ์วิเคราะห์จะมีลักษณะเป็น sparse ด้วย ดังนั้นในการกระจายข้อมูล อาจใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าการรวมกลับข้อมูล

2. โดยทั่วไปจะไม่ทราบเทคนิคมาตรฐานในการปรับปรุงระบบเวฟเลตไบออโทกอนัลหรือระบบเซมิไบออโทกอนัล โดยที่ยังคงคุณสมบัติเบื้องต้น

ระบบเวฟเลตแบบไบออโทกอนัลไม่จำเป็นต้องมี เมตริกซ์สังเคราะห์ Q_j เป็นปริภูมิว่างของ $(P_j)^T [\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle]$ แต่เงื่อนไขที่สำคัญคือเมตริกซ์ $[P_j | Q_j]$ ต้องหาอินเวอร์สได้นั้นคือจะต้องหาค่าเมตริกซ์ A_j และ B_j ได้ ดังนั้นระบบนี้จึงสามารถสร้างเมตริกซ์วิเคราะห์และเมตริกซ์สังเคราะห์ได้ยืดหยุ่นกว่า เช่นสามารถสร้างเมตริกซ์วิเคราะห์และสังเคราะห์ที่มีลักษณะเป็น sparse ได้ ซึ่งทำให้การแปลงเวฟเลตแบบนี้รวดเร็วได้ ระบบเวฟเลตแบบไบออโทกอนัลนี้ผู้พัฒนาค้นคนแรกคือ

Cohen et al [6]

พิจารณาฟังก์ชันในปริภูมิย่อย V_j และ W_j จะมีคุณสมบัติดังนี้

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\ \langle \varphi_{j,k}(t), \tilde{\varphi}_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\ \langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\varphi}_{j,l}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \varphi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,l}(t) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

สำหรับทุก $j, k, l \in \mathbb{Z}$ เซตฟังก์ชันมูลฐาน $\phi_{j,k}$ และ $\varphi_{j,k}$ เรียก primal basis และเซตฟังก์ชัน $\tilde{\phi}_{j,l}$ และ $\tilde{\varphi}_{j,l}$ เรียก dual basis สมการ (3.25) แสดงในรูปแบบเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{aligned} [\langle \Phi_j, \tilde{\Phi}_j \rangle] &= I \\ [\langle \Psi_j, \tilde{\Psi}_j \rangle] &= I \\ [\langle \Phi_j, \tilde{\Psi}_j \rangle] &= 0 \\ [\langle \Psi_j, \tilde{\Phi}_j \rangle] &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

จากสมการ (3.26) พิจารณาเงื่อนไขผลคูณภายใน

$$[\langle \Phi_j | \Psi_j \rangle, [\tilde{\Phi}_j | \tilde{\Psi}_j \rangle]] = \left[\frac{[\langle \Phi_j, \tilde{\Phi}_j \rangle] [\langle \Phi_j, \tilde{\Psi}_j \rangle]}{[\langle \Psi_j, \tilde{\Phi}_j \rangle] [\langle \Psi_j, \tilde{\Psi}_j \rangle]} \right] = I \quad (3.27)$$

สำหรับฟังก์ชัน primal basis พบว่าจะมีเมตริกซ์สังเคราะห์ที่ทำให้เกิดการลดระดับความละเอียด

$$[\Phi_{j-1} | \Psi_{j-1}] = \Phi_j [P_j | Q_j] \quad (3.28)$$

และสำหรับฟังก์ชัน dual basis จะมีชุดเมตริกซ์ตามสมการ (3.29)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$[\tilde{\Phi}_{j-1} | \tilde{\Psi}_{j-1}] = \tilde{\Phi}_j [\tilde{P}_j | \tilde{Q}_j] \quad (3.29)$$

เงื่อนไขตามสมการ (3.25) ถึงสมการ (3.29) เป็นกรณี normalize สำหรับเงื่อนไขที่ยังไม่ normalize จะแทนสัญลักษณ์ด้วย $\Phi, \Psi, \bar{P}$ และ $\bar{Q}$ ดังนั้นสมการ (3.27) จะมีค่าคงที่คูณอยู่ดังสมการ (3.30)

$$[\langle [\Phi_j | \Psi_j], [\bar{\Phi}_j | \bar{\Psi}_j] \rangle] = 2^j \mathbf{I} \quad (3.30)$$

การหาเมตริกซ์ $\bar{P}_j$ และ $\bar{Q}_j$ พิจารณาที่ระดับความละเอียด $j-1$

$$[\langle [\Phi_{j-1} | \Psi_{j-1}], [\bar{\Phi}_{j-1} | \bar{\Psi}_{j-1}] \rangle] = 2^{-(j-1)} \mathbf{I} \quad (3.31)$$

แทนสมการ (3.28) และสมการ (3.29) ในสมการ (3.31) จากนั้นใช้คุณสมบัติตามสมการ (3.17) จะได้

$$\begin{aligned} [P_j | Q_j]^T [\langle \Phi_j, \bar{\Phi}_j \rangle] [\bar{P}_j | \bar{Q}_j] &= 2^{-(j-1)} \mathbf{I} \\ [\bar{P}_j | \bar{Q}_j]^T [P_j | Q_j] &= \frac{2^{-(j-1)}}{2^{-j}} \mathbf{I} = 2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.32)$$

นั่นคือ

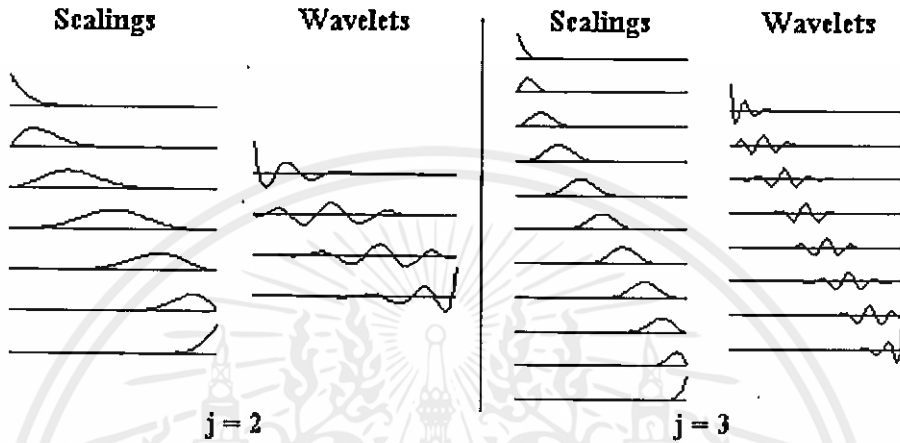
$$\begin{aligned} [\bar{P}_j | \bar{Q}_j]^T &= 2[P_j | Q_j]^T = 2 \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} \\ \bar{P}_j &= 2(A_j)^T \\ \bar{Q}_j &= 2(B_j)^T \end{aligned} \quad (3.33)$$

จากสมการ (3.33) แสดงว่า เมตริกซ์สังเคราะห์ที่ทำให้เกิดการลดระดับความละเอียดของ dual basis จะมีความสัมพันธ์กับเมตริกซ์วิเคราะห์ของ primal basis การหารูปร่างของ dual basis $\bar{\Phi}_j(t)$ และ $\bar{\Psi}_j(t)$ นั้นสามารถสร้างขึ้นจากเมตริกซ์ $\bar{P}_j$ และ $\bar{Q}_j$ ตามลำดับ โดยการกำหนดค่าในเวกเตอร์หลักเป็น 1 ที่เหลือเป็นศูนย์ แล้วใช้เมตริกซ์ $\bar{P}$ หรือ $\bar{Q}$ คูณซ้ำๆ อย่างต่อเนื่อง แต่ละระดับความละเอียดต้องคูณฟังก์ชันที่ได้รับด้วย 2^j เพื่อที่จะทำได้ normalized $\bar{\Phi}_j$ หรือ $\bar{\Psi}_j$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.1 เวฟเล็ตเซมิโอโทกอนัล

ตัวอย่างเวฟเล็ตเซมิโอโทกอนัลเช่น เวฟเล็ต B-spline ที่มีการประมาณในช่วงบริเวณข้อมูล เริ่มต้นและข้อมูลสุดท้ายแสดงดังรูปที่ 3.3 ที่อันดับชั้นที่ 3 ความละเอียด $j=3$ ปริภูมิ V_3 มีจำนวน ฟังก์ชันมูลฐานเท่ากับ 2^3+3 และปริภูมิ W_3 มีจำนวนของฟังก์ชันมูลฐาน 2^3



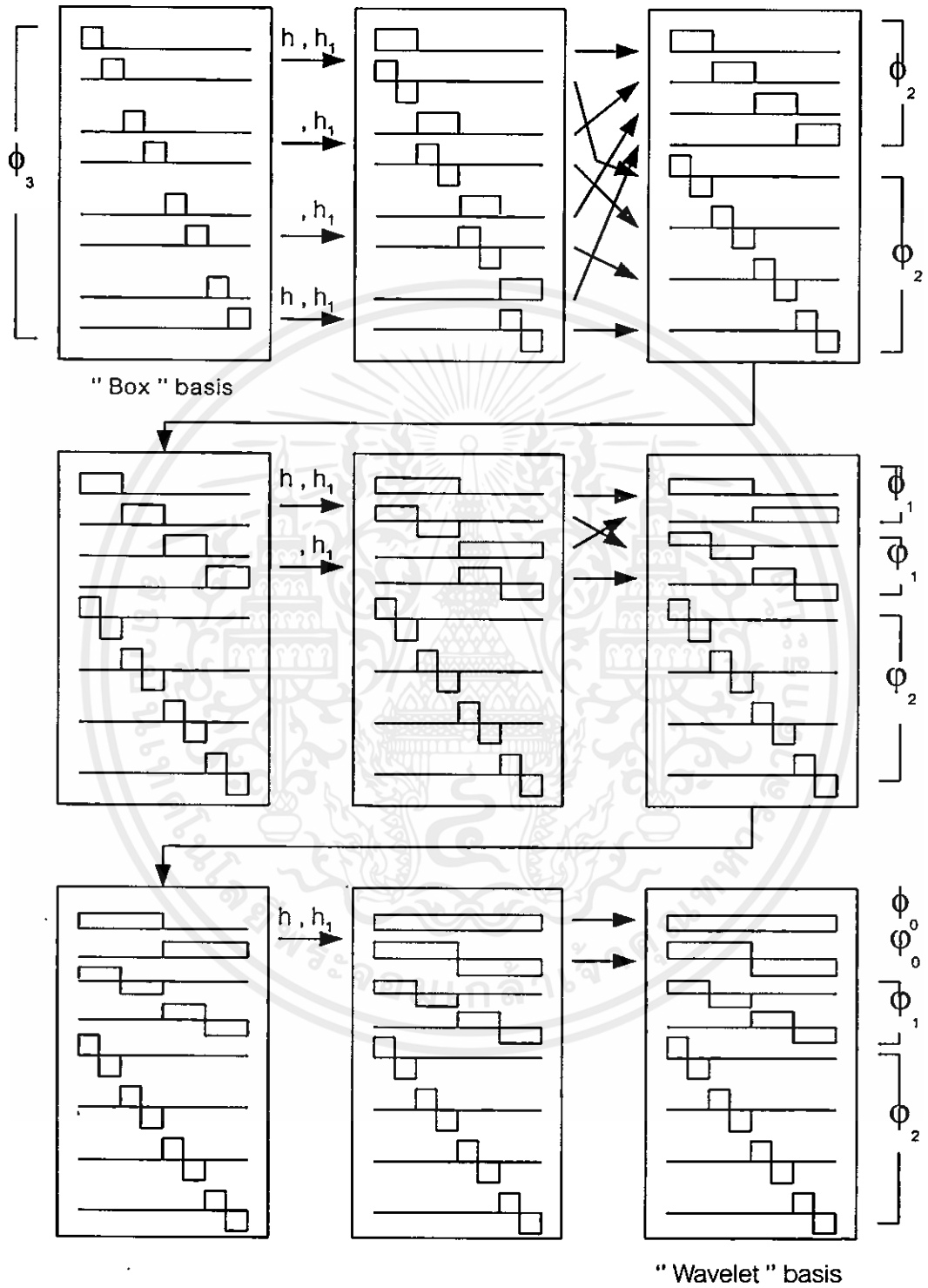
รูปที่ 3.3 เวฟเล็ตแบบ B-spline

ตัวอย่างที่ 3.2 เวฟเล็ตอโทกอนัล

เวฟเล็ตอโทกอนัลง่ายสุดได้แก่เวฟเล็ตแบบ Haar ซึ่งมีฟังก์ชันสเกลลิงมีลักษณะสี่เหลี่ยม และมีฟังก์ชันเวฟเล็ตลักษณะสี่เหลี่ยมทั้งทางด้านบวกและลบดังรูปที่ 3.4 ซึ่งแสดงการทับซ้อนกันของปริภูมีย่อยคือ $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3$ และ $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ เมตริกซ์สังเคราะห์ ตามสมการ (3.7) คือ

$$P_j = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad Q_j = \sqrt{\frac{2}{2^j}} \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . \\ -1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

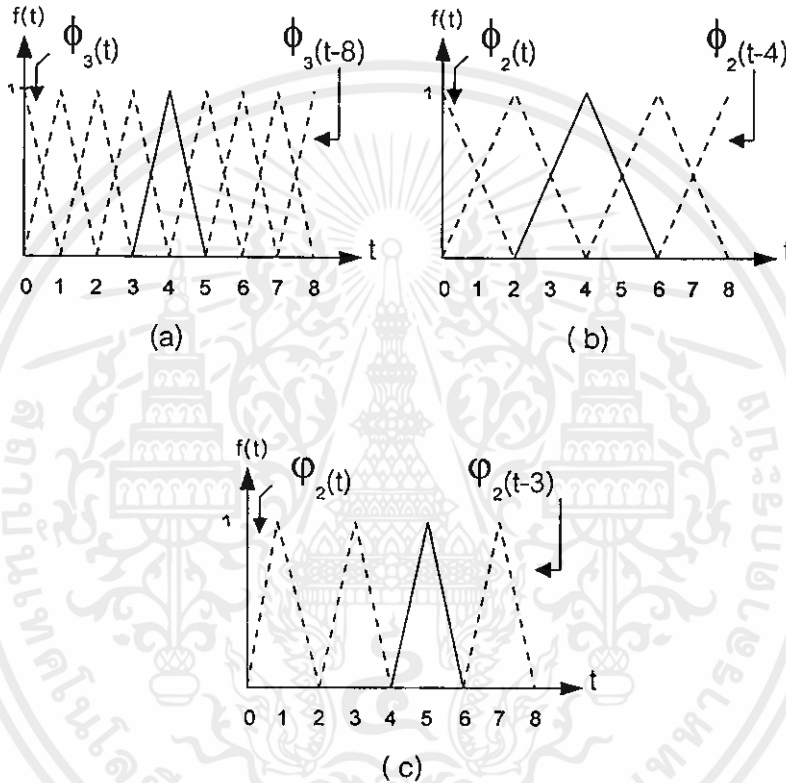


รูปที่ 3.4 เวก์เลตแบบ Haar

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.3 เวก์เลตไบอโทกอนัล

ตัวอย่างนี้แสดงเวก์เลตไบอโทกอนัลอย่างง่าย ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสามารถสร้างเมตริกซ์สังเคราะห์ และเมตริกซ์วิเคราะห์ที่มีลักษณะ sparse ได้ โดยปริภูมิย่อย V_3 ประกอบด้วยฟังก์ชันสามเหลี่ยม นิยามในช่วงปิดศูนย์ถึงแปด ปริภูมิ V_2 กับปริภูมิ W_2 ก็ประกอบด้วยฟังก์ชันสามเหลี่ยมเช่นกัน ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ไบอโทกอนัลเวก์เลตแบบสามเหลี่ยม (a) ปริภูมิ V_3 (b) ปริภูมิ V_2 (c) ปริภูมิ W_2

จากรูปที่ 3.5 จะได้ความสัมพันธ์ $V_3 = V_2 + W_2$ และจากสมการ (3.28) จะได้

$$[\Phi_2 | \Psi_2] = \Phi_3 [P_3 | Q_3]$$

โดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$[P_3 | Q_3] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & . & 2 & . & . & . \\ . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . & 2 & . & . \\ . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 2 & . \\ . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . \end{array} \right]$$

เมตริกซ์วิเคราะห์ หาได้จาก inverse ของ $[P_3 | Q_3]$ คือ

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 2 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 2 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 & 2 & -1 & . \end{array} \right]$$

จะเห็นว่าเมตริกซ์สังเคราะห์และเมตริกซ์วิเคราะห์มีลักษณะเป็นเมตริกซ์ sparse

3.8 สรุป

การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดที่กล่าวในบทนี้จะเป็นทฤษฎีพื้นฐานทั่วไปซึ่งพิจารณาในรูปเมตริกซ์ได้โดยคุณสมบัติต่างๆของการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดสรุปได้ดังตารางที่ 3.1

สำหรับระบบเวฟเล็ตแบบต่างๆ ที่กล่าวในบทนี้คือออกโทกอนัลเวฟเล็ต เซมิโอโทกอนัลเวฟเล็ต และไบออกโทกอนัลเวฟเล็ตจะมีเงื่อนไขของฟังก์ชันมูลฐานในปริภูมิย่อยสเกลลิงและปริภูมิย่อยเวฟเล็ตที่แตกต่างกัน สรุปได้ดังตารางที่ 3.2 การที่ฟังก์ชันมูลฐานมีเงื่อนไขแตกต่างกันเป็นผลให้ลักษณะเมตริกซ์สังเคราะห์มีคุณสมบัติและเงื่อนไขแตกต่างกันด้วยสังเกตได้จากหลักที่สามของตา

รางที่3.2พบว่าระบบอโทกอนัลจะเป็นกรณีพิเศษของระบบเซมิอโทกอนัลและระบบเซมิอโทกอนัลจะเป็นกรณีพิเศษของระบบไบอโทกอนัล

ตารางที่ 3.1 สมการที่ได้จากการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด

Process	Definition	Block-Matrix Form	Equation
Refinement	$\Phi_{j-1}(t) = \Phi_j(t)P_j$ $\Psi_{j-1}(t) = \Phi_j(t)Q_j$	$[\Phi_{j-1} \Psi_{j-1}] = \Phi_j[P_j Q_j]$	(3.7)
Analysis	$C_{j-1} = A_jC_j$ $D_{j-1} = B_jC_j$	$[C_{j-1} D_{j-1}]^T = [A_j B_j]^T C_j$	(3.14)
Synthesis	$C_j = P_jC_{j-1} + Q_jD_{j-1}$	$C_j = [P_j Q_j][C_{j-1} D_{j-1}]^T$	(3.12)
Invertibility	$A_jP_j = B_jQ_j = I$ $A_jQ_j = B_jP_j = 0$ $P_jA_j + Q_jB_j = I$	$[A_j B_j]^T = [P_j Q_j]^{-1}$	(3.15)

ตารางที่ 3.2 เงื่อนไขของระบบเวฟเล็ตแบบต่างๆ

Property	Basis function Constraints	Matrix Constraints	Equation
Orthogonality	$[<\Phi_j, \Phi_j>] = I$ $[<\Psi_j, \Psi_j>] = I$ $[<\Phi_j, \Psi_j>] = 0$	$[P_j Q_j]$ invertible and orthogonal	(3.18)
Semiorthogonality	$[<\Phi_j, \Psi_j>] = 0$	$[P_j Q_j]$ invertible and $(P_j)^T [<\Phi_j, \Phi_j>] Q_j = 0$	(3.23)
Biorthogonality	$[<\Phi_j, \tilde{\Phi}_j>] = I$ $[<\Psi_j, \tilde{\Psi}_j>] = I$ $[<\Phi_j, \tilde{\Psi}_j>] = 0$ $[<\Psi_j, \tilde{\Phi}_j>] = 0$	$[P_j Q_j]$ invertible	(3.26)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ท่านไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

เส้นโค้งแบบ B-spline และเวฟเล็ตแบบ B-spline

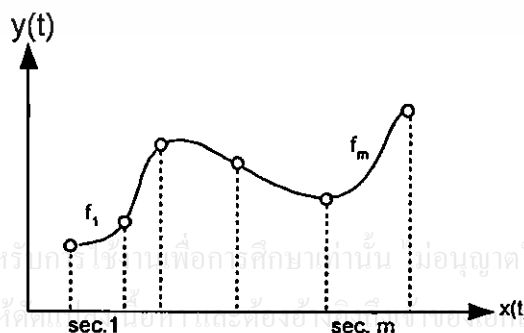
4.1 บทนำ

เนื้อหาบทนี้แบ่งออกเป็นสองส่วน โดยส่วนแรกจะกล่าวถึงการสร้างเส้นโค้ง B-spline ตลอดจนอธิบายถึงคุณสมบัติต่างๆ ของเส้นโค้ง ในการสร้างเส้นโค้ง B-spline จะใช้วิธีการทำซ้ำ โดยเฉพาะวิธีการแทรก knot จะถูกนำไปใช้กำหนดเมตริกซ์สังเคราะห์ P_i และใช้ในการเปลี่ยนรูปฟังก์ชันมูลฐานของเส้นโค้ง B-spline ให้อยู่ในรูปผลรวมฟังก์ชัน Bernstein ทำให้การหาค่าเมตริกซ์ผลคูณภายใน (Inner product) ในขั้นตอนการออกแบบเวฟเล็ต B-spline แสดงออกมาเป็นสูตรที่แน่นอนได้[8] เนื้อหาส่วนที่สองอธิบายถึงการออกแบบเวฟเล็ต B-spline โดยใช้ฟังก์ชันมูลฐาน B-spline แบบ open knot vector เป็นฟังก์ชันสเกลลิง เมตริกซ์สังเคราะห์ P_i พิจารณาจากกระบวนการแทรก knot หลังจากนั้นจะให้เงื่อนไขเซมิออร์ทोगอนัลหาค่าเมตริกซ์ Q_i เวฟเล็ตที่ได้กล่าวในบทนี้เป็นเวฟเล็ต B-spline 1 มิติ ใช้สำหรับเส้นโค้ง (การประมาณเส้นโค้งและแก้ไขเส้นโค้งแบบหลายระดับความละเอียด[7]) แต่สามารถขยายเป็นพื้นผิวแบบหลายระดับความละเอียดได้ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 5

4.2 เส้นโค้ง spline

ความหมายของเส้นโค้ง spline จะหมายถึงเส้นโค้งที่มีลักษณะแบ่งเป็นช่วงๆ แต่ละช่วงประกอบด้วยสมการโพลิโนเมียล อันดับชั้น n เช่นเส้นโค้ง spline กำลังสอง แต่ละช่วงสามารถแสดงดังสมการ (4.1)

$$\begin{aligned}x(u) &= a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \\ y(u) &= b_2 u^2 + b_1 u + b_0\end{aligned}\tag{4.1}$$



รูปที่ 4.1 ลักษณะเส้นโค้ง spline

ค่าตัวแปร a_2, a_1, a_0, b_2, b_1 และ b_0 เป็นค่าคงที่ ปกติเส้นโค้ง spline จะระบุค่าจุดควบคุม แทนค่าสัมประสิทธิ์ การแก้ไขเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเส้นโค้งสามารถทำได้โดยการเคลื่อนย้ายจุดควบคุม โดยผลกระทบต่อรูปร่างเส้นโค้งจะมีค่าสูงตรงบริเวณใกล้เคียงจุดควบคุมที่ถูกเคลื่อนย้าย สำหรับ B-spline ผลกระทบต่อรูปร่างเส้นโค้งในกรณีจุดควบคุมหนึ่งถูกเคลื่อนย้ายจะมีลักษณะเฉพาะที่ตรงบริเวณใกล้จุดควบคุมนั้น เนื่องจากฟังก์ชันมูลฐานแบบ B-spline จะมีคุณสมบัติที่เรียกว่า local support

ลักษณะของแต่ละส่วนเส้นโค้งจะมีความสัมพันธ์กับจำนวนจุดควบคุมคือ

$$\begin{aligned} x(u) &= \sum C_{ix} B_i(u) \\ y(u) &= \sum C_{iy} B_i(u) \end{aligned} \quad (4.2)$$

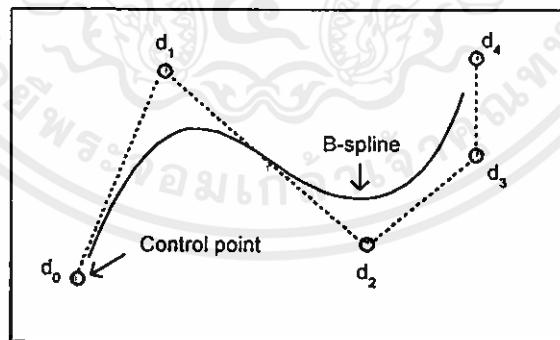
โดย $B_i(u)$ เป็นสมการโพลิโนเมียลอันดับชั้น n

C_i แทนจุดควบคุม

สมการ (4.2) เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม u

4.3 เส้นโค้ง B-spline [7][8]

เส้นโค้ง B-spline เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากเส้นโค้งช่วงย่อยๆ มาประกอบกันโดยลักษณะการโค้งของลายเส้นเหล่านี้จะถูกควบคุมโดยจุดควบคุม(control point) ดังแสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 การเกิดลายเส้นแบบB-spline

เส้นโค้งย่อยๆ เหล่านี้จะถูกควบคุมให้เกิดขึ้นภายในจุดควบคุม ซึ่งจะใช้จำนวนจุดควบคุมเท่าใดนั้นขึ้นอยู่กับความต้องการให้เส้นโค้งมีความต่อเนื่องหรือมีความราบเรียบเท่าใด สมการของเส้นโค้งย่อยในแต่ละส่วนจะเป็นสมการโพลิโนเมียลอันดับชั้น n ซึ่งค่า n นี้จะมีความสัมพันธ์กับระดับความต่อเนื่องของเส้นโค้งย่อยๆเหล่านี้ และจะใช้แสดงอันดับชั้นของฟังก์ชันมูลฐาน B-

spline เช่นอันดับขั้นที่สามจะให้ส่วนโค้งย่อยมีความต่อเนื่องระดับที่สอง (C^2) หมายความว่า ถ้าทำการหาค่าอนุพันธ์สมการเส้นโค้ง เพื่อตรวจสอบความต่อเนื่องจะทำการหาค่าอนุพันธ์ได้เพียงสองครั้งเท่านั้น

กระบวนการสร้างเส้นโค้ง B-spline ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ จะใช้การทำซ้ำ (Recurrence) ซึ่งมีอยู่สองวิธีคือ ใช้การแทรก knot และวิธีการของ de Boor โดยเฉพาะวิธีการแทรก knot จะทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันมูลฐาน B-spline กับโพลิโนเมียล Bernstein ได้ ซึ่งจะนำไปใช้หาค่าผลคูณภายในระหว่างฟังก์ชันมูลฐานในส่วนของการออกแบบเวฟเล็ตแบบ B-spline

4.4 การหาค่าบนเส้นโค้ง B-spline โดยใช้กระบวนการแทรก knot

วิธีการแทรก knot จะเป็นวิธีการทำซ้ำเพื่อหาค่าบนเส้นโค้ง B-spline ในลักษณะทำซ้ำการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นระหว่างจุดควบคุมสองจุดเมื่อกำหนดจุดควบคุมเริ่มแรกเป็นจุดควบคุมของ B-spline ผู้คิดค้นวิธีการนี้คือ Boehm [9]

กำหนดให้ n แทนอันดับขั้นเส้นโค้ง B-spline , L มีความสัมพันธ์กับจำนวนช่วงของเส้นโค้งย่อย และกำหนดลำดับ knot vector ที่มีค่าไม่ลดลงดังนี้

$$\{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\}$$

ย่านของ knot vector ที่มีผลต่อรูปร่างของเส้นโค้ง B-spline คือ $[u_{n-1}, \dots, u_{L+n-1}]$ เรียกว่าโดเมน knot ไม่จำเป็นต้องมีค่าต่างกันทั้งหมด ถ้าภายใน knot vector มี $u_i = \dots u_{i+r-1}$ โดย r แทนจำนวนลำดับต่อเนื่องของ knot ที่ซ้ำกัน จะเรียก u_i มีการซ้ำ r ลำดับ knot vector ที่ไม่ซ้ำกันเลยจะได้ r เท่ากับหนึ่งและ L จะเท่ากับจำนวนช่วงของโดเมน กรณีค่าแต่ละค่าภายในโดเมน knot มีการซ้ำหนึ่งค่าจำนวนช่วงของโดเมนก็จะลดลงครึ่งละหนึ่งเช่นกัน ผลรวมของทุกๆ โดเมน knot ที่มีการซ้ำ r มีความสัมพันธ์กับ L ตามสมการ (4.3)

$$\sum_{i=n-1}^{L+n-1} r_i = L + 1 \quad (4.3)$$

ตัวอย่างเช่นอันดับขั้นที่สาม ($n = 3$) $L = 3$ มี knot vector ดังนี้

$$\{u_0, \dots, u_7\} = \{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7\}$$

จะพบว่าทุกๆ u_i มีการซ้ำหนึ่งครั้ง ดังนั้นจำนวนช่วงของโดเมน knot เท่ากับ L คือสาม ถ้า n และ L ไม่เปลี่ยนแปลงแต่ลำดับ knot vector เปลี่ยนเป็น

$$\{u_0, \dots, u_7\} = \{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 6 \ 7\}$$

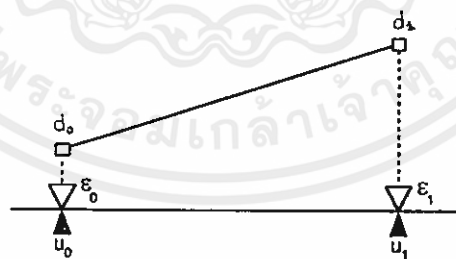
สังเกตพบว่า $u_3 = u_4$ ดังนั้น จำนวนช่วงของโดเมน knot เท่ากับสอง สำหรับ knot vector ที่มีการซ้ำที่จุดเริ่ม และจุดสุดท้ายจำนวน n ครั้ง จำนวนช่วงของโดเมน knot จะไม่เปลี่ยนแปลงคือเท่ากับ $L=3$ เช่น

$$\{u_0, \dots, u_7\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 4 \ 7 \ 7 \ 7\}$$

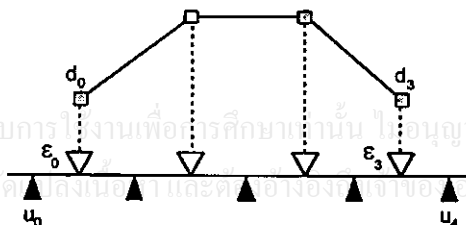
ต่อไปจะนิยามตำแหน่งพิกัดตามขวาง (ε_i) แต่ละตำแหน่งดังนี้

$$\varepsilon_i = (u_i + \dots + u_{i+n-1}) / n \quad ; \quad i = 0, \dots, L+n-1 \quad (4.4)$$

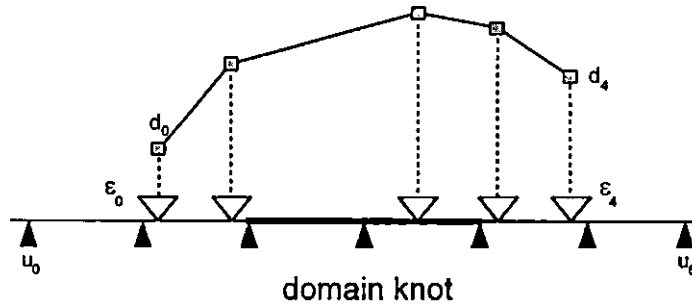
สมการ (4.4) ค่าพิกัดตามขวางก็คือค่าเฉลี่ยของ knot vector นั้นเอง ที่แต่ละตำแหน่งพิกัดตามขวาง ε_i กำหนดให้มีค่าตรงกับจุดควบคุมของเส้นโค้ง B-spline d_i ซึ่งจะทำให้ได้คู่ลำดับ (ε_i, d_i) เมื่อ $i = 0, \dots, L+n-1$ ค่าทุกค่าระหว่างคู่ลำดับเหล่านี้จะได้จากการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นระหว่าง d_i และ d_{i+1} โดยมีตำแหน่งพิกัดตามขวางคือ ε_i กับ ε_{i+1} เช่น กรณี $n=1$ $L=1$ แสดงดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง u_i ε_i และ d_i กรณี $n = 1$ และ $L = 1$



รูปที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง u_i ε_i และ d_i กรณี $n = 2$ และ $L = 2$



รูปที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง u , ϵ และ d , กรณี $n = 3$ และ $L = 2$

ข้อสังเกต จุดควบคุมของเส้นโค้ง B-spline ไม่ได้นิยามบน knot vector เริ่มแรก u แต่จะนิยามบน พิกัดตามขวาง ϵ ลำดับต่อไปจะแสดงถึงวิธีการจัดการกับจุดคู่ลำดับ ϵ_i และ d_i ที่เรียกว่าการแทรก knot ซึ่งจะต้องแทรกค่า knot ใหม่ $u \in [u_{n-1}, u_{n+L-1}]$ ในลำดับ knot vector เริ่มแรก หลังจากแทรก ค่า knot ใหม่แล้วจะได้ลำดับ knot vector ใหม่และคู่อันดับใหม่ (ϵ_i'', d_i'') ซึ่งค่า (ϵ_i'') หาจากสมการ (4.4) $d_i'' = P''(\epsilon_i'')$ จะได้จากการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นระหว่างจุดควบคุม d_i กับ d_{i+1}

4.4.1 วิธีการแทรก knot

การแทรก knot เพื่อหาค่าบนเส้นโค้ง B-spline อันดับขั้นที่ n ต้องทำการแทรกค่า knot ใหม่ที่อยู่ใน โดเมน knot จำนวน n ครั้งดังนี้ กำหนดลำดับ knot vector และค่า knot ใหม่ที่จะแทรก $u \in [u_{n-1}, u_{n+L-1}]$ การแทรก knot ทำตาม 7 ขั้นตอนนี้

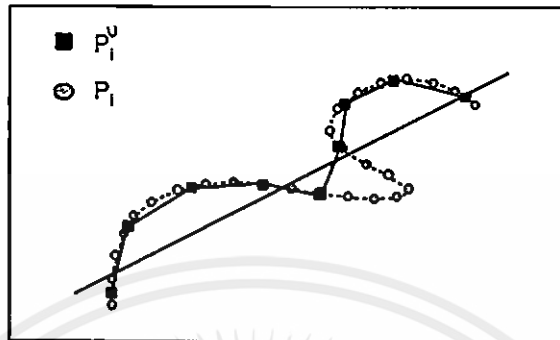
1. หาค่า I สูงสุดซึ่ง $u_i \leq u < u_{i+1}$ ถ้า $u = u_i$ และ u_i มีการซ้ำ n ครั้งให้หยุดขบวนการแทรก ค่า จุดควบคุมครั้งหลังสุด d_i'' จะเป็นค่าบนเส้นโค้ง B-spline อันดับขั้นที่ n ณ ตำแหน่ง ค่า knot u
2. สำหรับ $i = 0, \dots, I-n+1$ กำหนด $\epsilon_i'' = \epsilon_i$
3. สำหรับ $i = I-n+2, \dots, I+1$ กำหนด $\epsilon_i'' = \frac{1}{n}(u_i + \dots + u_{i+n-2}) + \frac{u}{n}$
4. สำหรับ $i = I+2, \dots, L+n$ กำหนด $\epsilon_i'' = \epsilon_{i-1}$
5. สำหรับ $i = 0, \dots, L+n$ กำหนด $d_i'' = P(\epsilon_i'')$
6. เรียงลำดับ knot vector ใหม่โดยรวม u เข้าไปด้วยและ กำหนด u ใหม่เป็น u_{i+1}
7. แทนค่า L ด้วย $L+1$

สำหรับขั้นตอนที่ 5 จำเป็นต้องคำนวณจุดควบคุม $P(\epsilon_i'')$ เฉพาะ $i = I-n+2, \dots, I+1$ เท่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4.2 คุณสมบัติการแทรก knot

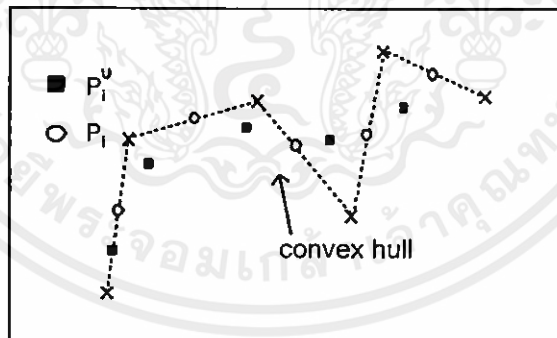
1. จุดควบคุม P'' จะได้จากการประมาณในช่วงแบบเชิงเส้นจากจุดควบคุม P
2. ระยะเวลาที่ผ่านจุดควบคุม P จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับผ่านจุด P'' ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 คุณสมบัติ variation diminishing process[8]

3. การแทรก knot มีคุณสมบัติ local process จุดควบคุม P'' จะต่างจากจุดควบคุม P เฉพาะบริเวณใกล้เคียง u ถ้าแทรก knot $u \in (u_{i-1}, u_{i+1})$ จุดควบคุมเริ่มแรกที่มีผลกระทบคือ d_{i-n+1} ถึง d_{i+1}

4. ถ้าจุดควบคุม P มีคุณสมบัติที่เรียกว่า convexity preserving แล้ว P'' ก็มีคุณสมบัตินี้ด้วย คือถ้าจุด P อยู่ภายใน convex hull ของจุดควบคุม P'' ก็อยู่ภายใน convex hull ด้วย ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 คุณสมบัติ convexity preserving[8]

ลักษณะเส้นโค้งที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับการกำหนดคุณสมบัติ knot vector เริ่มแรก ลักษณะ knot vector ที่มีการซ้ำค่า knot ที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเท่ากับ n ครั้ง ค่า knot ที่อยู่ระหว่างตำแหน่ง $u_{(n-1)}$ ถึง $u_{(L+n-1)}$ มีลักษณะเพิ่มขึ้นโดยใช้ระยะเท่าๆ กัน เช่นกรณี $L = 3$ $n = 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\{u_0, \dots, u_5\} = \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3\}$$

หรือ

$$\{u_0, \dots, u_5\} = \{0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1\}$$

กรณี $L = 5 \ n = 3$ เช่น

$$\{u_0, \dots, u_9\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5\}$$

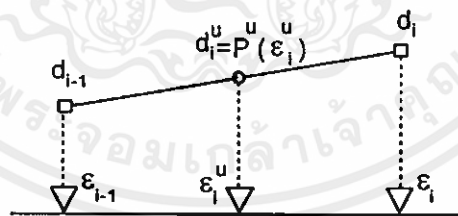
หรือ

$$\{u_0, \dots, u_9\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1/5 \ 2/5 \ 3/5 \ 4/5 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

รูปร่างของเส้นโค้งที่เกิดขึ้นจะมีขอบเขตของเส้นโค้งอยู่ที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของจุดควบคุมเริ่มแรก knot vector ลักษณะนี้เรียกว่า open knot vector การกำหนด knot vector ลักษณะนี้เป็นที่นิยมใช้กันมากและเหมาะสมกับงานที่ต้องแก้ไขเปลี่ยนแปลงเส้นโค้ง เพราะจะทราบขอบเขตของเส้นโค้งแน่นอนคือจะยึดอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของจุดควบคุมเริ่มแรกเสมอ ไม่แปรผันตามอันดับขั้นที่ i ที่ใช้ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้จากการแทรก knot ที่ตำแหน่ง $u_{(i-1)}$ และที่ $u_{(L+n-1)}$ จำนวน n ครั้ง จะได้ค่าบนเส้นโค้งเป็นจุดควบคุม d_0 และจุดควบคุม d_{L+n-1} ตามลำดับ ลักษณะของเส้นโค้งที่เกิดจากการกำหนด knot vector ต่างกัน แสดงในตัวอย่างที่ 4.3

4.4.3 การหาค่าจุดควบคุม $P^u(\varepsilon_i^u)$

กำหนด $u \in [u_i, u_{i+1}]$ และ $\varepsilon_{i-1} \leq \varepsilon_i^u \leq \varepsilon_i$ ดังนั้น จุดควบคุม $d_i^u = P^u(\varepsilon_i^u)$ สามารถหาได้จากการประมาณในช่วงแบบเชิงเส้นระหว่างจุดควบคุม d_{i-1} และจุด d_i ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 การหาค่าจุดควบคุม d_i^u

$$\text{จากรูปที่ 4.8} \quad d_i^u = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^u}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}} d_{i-1} + \frac{\varepsilon_i^u - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}} d_i \quad ; i = I-n+2, \dots, I+1 \quad (4.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ใช้เงื่อนไข $\varepsilon_i = -(u_i + \dots + u_{i+n-1})$; $i = 0, \dots, L+n-1$ จะได้
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$d_i^u = \frac{(\sum_{j=i}^{i+n-1} u_j - (\sum_{j=i}^{i+n-2} u_j) - u) d_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} + \frac{((\sum_{j=i}^{i+n-2} u_j) + u - (\sum_{j=i-1}^{i+n-2} u_j)) d_i}{u_{i+n-1} - u_{i-1}}$$

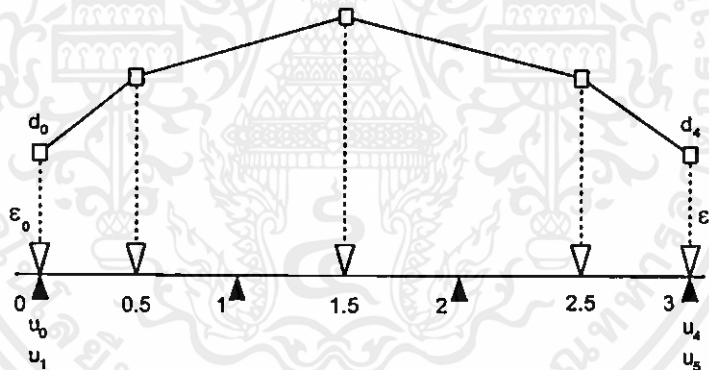
หรือ

$$d_i^u = \left[\frac{u_{i+n-1} - u}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} \right] d_{i-1} + \left[\frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} \right] d_i ; i = I-n+2, \dots, I+1 \quad (4.6)$$

ตัวอย่างที่ 4.1 การใช้วิธีการแทรก knot หาค่าบนเส้นโค้ง B-spline ที่ $u = 1.75$ กรณี $n = 2$ $L = 3$ เมื่อ knot vector $\{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3\}$ และจุดควบคุมเริ่มแรกเป็น $\{d_0 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4\}$ จะต้องแทรก knot ที่ $u = 1.75$ สองครั้ง จาก knot vector เริ่มแรกสามารถหาพิกัดตามขวาง (ε_i) ดังนี้

$$\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_4\} = \{0 \ 0.5 \ 1.5 \ 2.5 \ 3\}$$

ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 ความสัมพันธ์ของ knot vector (u_i) และพิกัดตามขวาง (ε_i)

การแทรก knot ครั้งแรก ($u = 1.75$)

ขั้นตอนที่ 1 จะได้ $I = 2$

ขั้นตอนที่ 2 $\varepsilon_0^u = 0, \varepsilon_1^u = 0.5$

ขั้นตอนที่ 3 $\varepsilon_2^u = \frac{1+1.75}{2} = 1.375, \varepsilon_3^u = \frac{2+1.75}{2} = 1.875$

ขั้นตอนที่ 4 $\varepsilon_4^u = 2.5, \varepsilon_5^u = 3.0$

จากขั้นตอนที่ 2 ถึงขั้นตอนที่ 4 จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\{\varepsilon_0^u, \dots, \varepsilon_5^u\} = \{0 \ 0.5 \ 1.375 \ 1.875 \ 2.5 \ 3\}$$

$$\{u_0^u, \dots, u_6^u\} = \{0 \ 0 \ 1 \ 1.75 \ 2 \ 3 \ 3\},$$

ขั้นตอนที่ 5 หาค่า d_i^u จากสมการ (4.5) หรือสมการ (4.6)

$$d_0^u = P^u(\varepsilon_0^u), d_1^u = P^u(\varepsilon_1^u)$$

$$d_2^u = P^u(\varepsilon_2^u), d_3^u = P^u(\varepsilon_3^u)$$

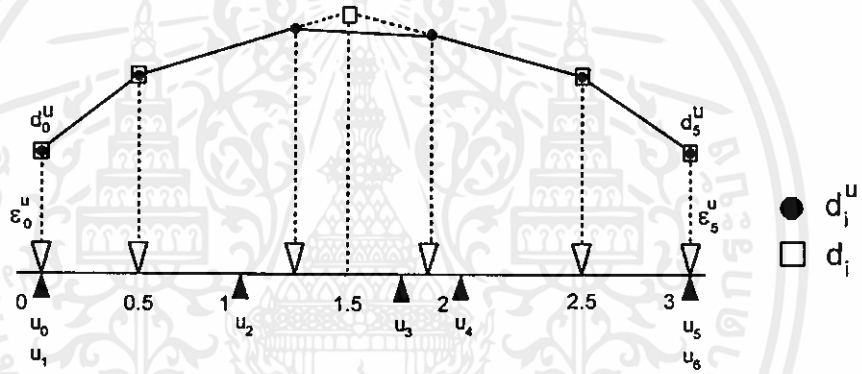
$$d_4^u = P^u(\varepsilon_4^u), d_5^u = P^u(\varepsilon_5^u)$$

ขั้นตอนที่ 6 เรียง knot vector ใหม่โดยรวม u เข้าไปด้วย

$$\{u_0^u, \dots, u_6^u\} = \{0, 0, 1, 1.75, 2, 3, 3\}$$

จากขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 6 แสดงในรูปที่ 4.10

ขั้นตอนที่ 7 $L = L+1 = 4$



รูปที่ 4.10 ความสัมพันธ์ knot vector u_i^u พิกัดขวาง ε_i^u และจุดควบคุม d_i^u

การแทรก knot ครั้งที่สอง ($u = 1.75$)

ขั้นตอนที่ 1 จะได้ $l = 3$

ขั้นตอนที่ 2

$$\varepsilon_0^{u^2} = \varepsilon_0^u = 0, \varepsilon_1^{u^2} = \varepsilon_1^u = 0.5$$

$$\varepsilon_2^{u^2} = \varepsilon_2^u = 1.375$$

ขั้นตอนที่ 3

$$\varepsilon_3^{u^2} = \frac{1}{2}(1.75 + 1.75) = 1.75$$

$$\varepsilon_4^{u^2} = \frac{1}{2}(2 + 1.75) = 1.875$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 4 $\varepsilon_5^{u^2} = \varepsilon_4^{u^2} = 2.5$, $\varepsilon_6^{u^2} = \varepsilon_5^{u^2} = 3$

ดังนั้น

$$\{\varepsilon_0^{u^2}, \dots, \varepsilon_6^{u^2}\} = \{0 \ 0.5 \ 1.375 \ 1.75 \ 1.875 \ 2.5 \ 3\}$$

ขั้นตอนที่ 5 หาค่า $d_i^{u^2}$ จากสมการ (4.5) หรือสมการ (4.6)

$$d_0^{u^2} = P^u(\varepsilon_0^{u^2}), d_1^{u^2} = P^u(\varepsilon_1^{u^2})$$

$$d_2^{u^2} = P^u(\varepsilon_2^{u^2}), d_3^{u^2} = P^u(\varepsilon_3^{u^2})$$

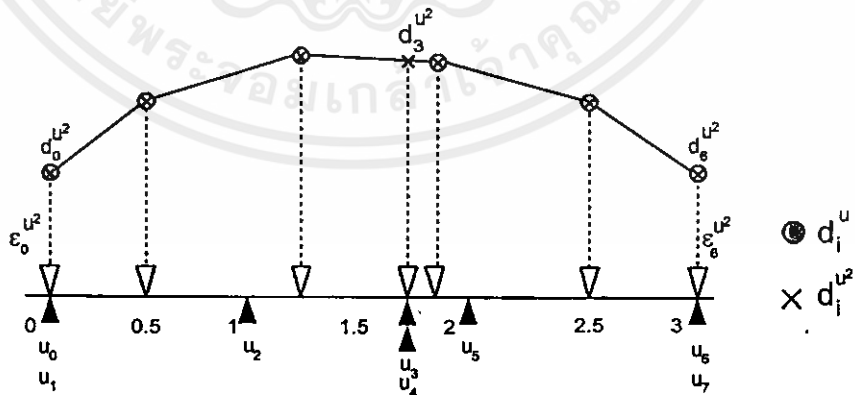
$$d_4^{u^2} = P^u(\varepsilon_4^{u^2}), d_5^{u^2} = P^u(\varepsilon_5^{u^2})$$

$$d_6^{u^2} = P^u(\varepsilon_6^{u^2})$$

ขั้นตอนที่ 6 เรียง knot vector ใหม่จะได้

$$u_i^{u^2} = \{u_0, \dots, u_7\} = \{0 \ 0 \ 1 \ 1.75 \ 1.75 \ 2 \ 3 \ 3\}$$

ดังนั้นจุดบนเส้นโค้ง B-spline อันดับชั้นที่สองที่ค่าพารามิเตอร์ $u = 1.75$ คือค่า $d_3^{u^2}$ ผลการแทรก knot ครั้งที่สองแสดงในรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 ความสัมพันธ์ knot vector $u_i^{u^2}$ พิกัดขวาง $\varepsilon_i^{u^2}$ และจุดควบคุม $d_i^{u^2}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

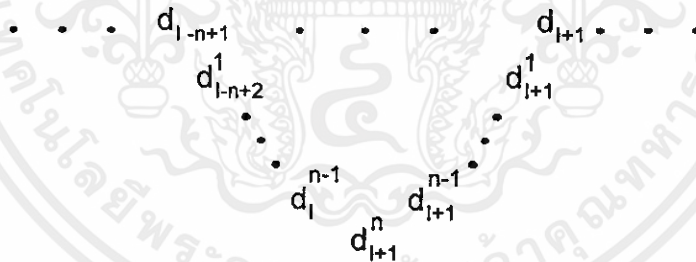
4.5 การสร้างเส้นโค้ง B-spline โดยวิธีการของ de Boor

ในการสร้างเส้นโค้ง B-spline ด้วยวิธีการแทรก knot ถ้าต้องการ B-spline อันดับชั้นที่ n จะต้องทำการแทรก knot ที่พารามิเตอร์ u ที่อยู่ในโดเมน knot จำนวน n ครั้ง ซึ่งแต่ละครั้งจะต้องทำการเรียง knot vector ใหม่ และต้องคำนวณหาค่าจุดควบคุม d_i^k ตามสมการ (4.5) ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นค่าบนเส้นโค้งที่ตรงกับพารามิเตอร์ u ที่แทรก โดยวิธีการของ de Boor [8] จะไม่ต้องเรียง knot vector ใหม่และการแทรก knot ใหม่ จะแทรกจำนวนเท่ากับ $n-r$ ครั้ง ถ้าค่าพารามิเตอร์ u มีอยู่แล้วใน knot vector ดังนี้

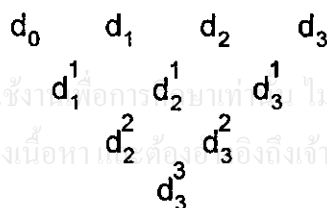
กำหนดลำดับ d_i เป็นจุดควบคุมของเส้นโค้ง B-spline อันดับชั้นที่ n และต้องการหาค่าบนเส้นโค้ง ณ พารามิเตอร์ $u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_{n-1}, u_{L+n-1}]$ ได้จากสมการ (4.7)

$$d_i^k(u) = \left[\frac{u_{i+n-k} - u}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} \right] d_{i-1}^{k-1}(u) + \left[\frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} \right] d_i^{k-1}(u) \quad (4.7)$$

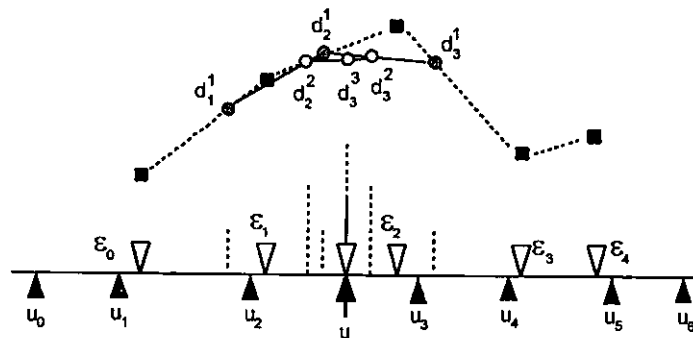
สำหรับ $k=1, \dots, n-r$ และ $i = I-n+k+1, \dots, I+1$ ตัวแปร r ใช้แทนค่าซ้ำใน knot vector ถ้าไม่มีการซ้ำกำหนด $r=0$ และ $d_i^0(u) = d_i$ จากสมการ (4.7) ค่า $d_i^k(u)$ ก็คือค่าบนเส้นโค้ง B-spline ที่พารามิเตอร์ u และเขียนเป็นแผนภูมิได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 4.2 แสดงการหาค่าบนเส้นโค้ง B-spline ที่มี $n=3$ $L=2$ ด้วยวิธีการของ de Boor กำหนด knot vector ที่ไม่มีการซ้ำ $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ และ $I=2$ พิจารณาสมการ (4.7) สามารถเขียนแผนภูมิได้ดังนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาเอกสารนี้ และต้องแจ้งถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

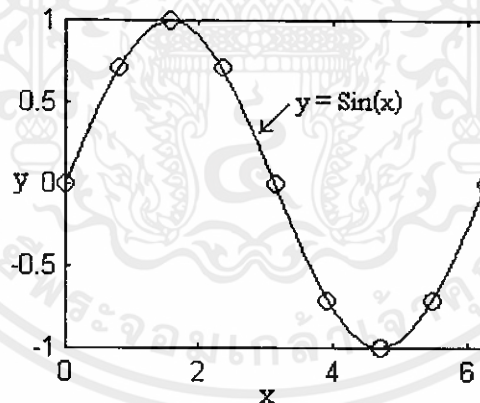


รูปที่ 4.12 การหาจุดบนเส้นโค้ง B-spline $n=3$ $L=2$ ด้วยวิธีการ de Boor

ตัวอย่างที่ 4.3 แสดงการสร้างเส้นโค้ง B-spline อันดับชั้นที่ 3 $L=6$ กำหนด knot vector $\{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6\}$ เมื่อจุดควบคุมของ B-spline เป็นค่าที่สุ่มมาจากฟังก์ชัน $\sin(x)$ จำนวน 9 ค่า ดังรูปที่ 4.13 พิกัดของ x และพิกัดของ y แสดงดังตาราง 4.1

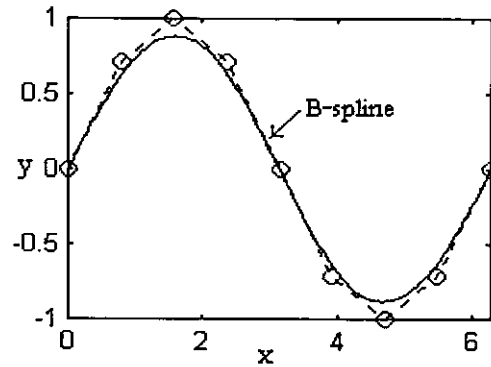
ตารางที่ 4.1 แสดงพิกัดของ x และพิกัดของ y

x	0	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$	$4\pi/4$	$5\pi/4$	$6\pi/4$	$7\pi/4$	$8\pi/4$
y	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0



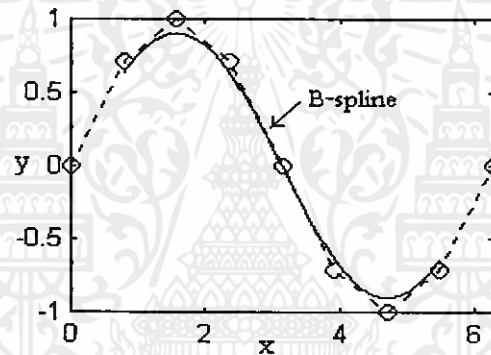
รูปที่ 4.13 การสุ่มค่าจากฟังก์ชันไซน์

โดเมน knot ในที่นี้คือ $[0, 6]$ การหาเส้นโค้งจะเริ่มจาก ครั้งแรกใช้พิกัดของ x ทั้งหมดเป็นจุดควบคุม $\{d_0, \dots, d_9\} = \{0 \ \pi/4 \ \pi/2 \ 3\pi/4 \ \pi \ 5\pi/4 \ 3\pi/2 \ 7\pi/4 \ 2\pi\}$ จากนั้นใช้วิธีการแทรก knot หรือวิธีการของ de Boor หาค่าบนเส้นโค้ง ณ พารามิเตอร์ $u \in [0, 6]$ ค่าที่ได้ใหม่นี้จะเป็นค่าพิกัด x ใหม่ ครั้งที่ 2 ใช้ค่าพิกัดของ y เป็นจุดควบคุม $\{d_0, \dots, d_9\}$ และหาค่าจุดบนเส้นโค้งที่อยู่ในโดเมน knot เช่นกัน นำคู่ลำดับพิกัด x ใหม่ และพิกัด y ใหม่มาพล็อตดังรูปที่ 4.14



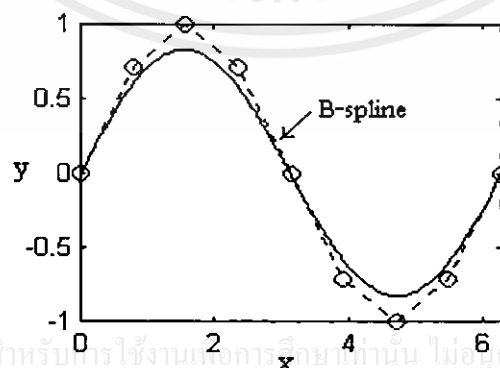
รูปที่ 4.14 เส้นโค้ง B-spline แบบ Open knot vector เมื่อ $n = 3$ $L = 6$

กำหนด n , L และจุดควบคุมไม่เปลี่ยนแปลงแต่เปลี่ยน knot vector เป็น $\{-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8\}$ ทำการหาค่าเส้นโค้ง B-spline ที่ตำแหน่งพารามิเตอร์ $u \in [0, 6]$ จะได้ดังรูปที่ 4.15



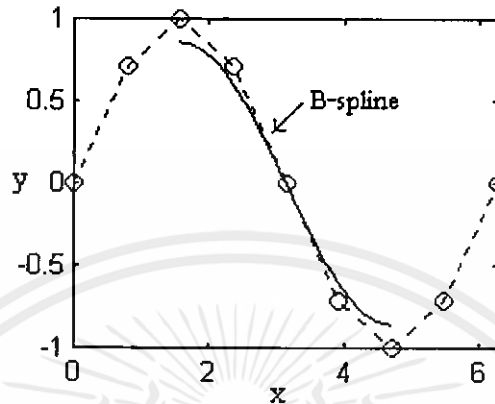
รูปที่ 4.15 เส้นโค้ง B-spline แบบ Uniform knot vector เมื่อ $n = 3$ $L = 6$

ทดลองเปลี่ยนค่าอันดับขึ้นเป็น $n = 5$ และ $L = 4$ กำหนด knot vector เป็น $\{0 0 0 0 0 1 2 3 4 4 4 4 4\}$ ทำการหาค่าเส้นโค้ง B-spline จะได้ดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 เส้นโค้ง B-spline แบบ Open knot vector เมื่อ $n = 5$ $L = 4$

ถ้าเปลี่ยน knot vector เป็น $\{-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8\}$ และใช้ค่าอันดับชั้น $n=5$
 $L=4$ หาค่าเส้นโค้ง B-spline ดังรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 เส้นโค้ง B-spline แบบ Uniform knot vector เมื่อ $n=5$ $L=4$

knot vector ที่มีการเพิ่มค่า knot โดยใช้ระยะเท่าๆ กันทั้งหมด จะเรียกว่า Uniform knot vector เช่น $n=2$ $L=2$ $\{0 1 2 3 4\}$ หรือ $\{-0.2 -0.1 0 0.1 0.2\}$

เส้นโค้ง B-spline ที่เกิดจาก knot vector แบบนี้จะไม่ผ่านจุดควบคุมเริ่มแรกกับจุดควบคุมสุดท้ายและตำแหน่งการเกิดของเส้นโค้งจะขึ้นอยู่กัับอันดับชั้นของ B-spline (n) ซึ่งตรวจสอบได้จากกระบวนการแทรก knot หรือสังเกตจากตัวอย่างที่ผ่านมา

4.6 การพิจารณาลักษณะรูปร่างฟังก์ชันมูลฐานของเส้นโค้ง B-spline

เส้นโค้ง B-spline อันดับชั้นที่ n เกิดจากการใช้ open knot vector นิยามบนโดเมน knot $u(n-1)$ ถึง $u(L+n-1)$ จะมีเซตของฟังก์ชันมูลฐานเรียกว่าฟังก์ชันมูลฐาน B-spline $N_i^n(u)$ ที่นิยามบนโดเมน knot นี้เช่นกัน ซึ่งหาได้โดยใช้วิธีการแทรก knot หรือวิธีการของ de Boor เมื่อกำหนดจุดควบคุมเริ่มต้นของ B-spline เป็น $d_i = 1$ $d_j = 0$ สำหรับ $i \neq j$

ตัวอย่างที่ 4.4 แสดงการพิจารณารูปร่างฟังก์ชันมูลฐาน B-spline อันดับชั้นที่สอง ($n=2$) $L=4$ มี open knot vector $\{0 0 1 2 3 4 4\}$

สำหรับ $N_0^2(u)$ กำหนดจุดควบคุมเริ่มต้น $\{d_0, \dots, d_{L+n-1}\} = \{1 0 0 0 0 0\}$ จากนั้นใช้วิธีการของ de Boor พิจารณาค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่งในโดเมน knot คือใช้ $u \in [u_{n-1}, u_{L+n-1}]$ ก็จะได้รูปร่างของ $N_0^2(u)$ สำหรับฟังก์ชันอื่นๆ ก็ใช้วิธีการลักษณะเดียวกัน

$N_1^2(u)$ ใช้จุดควบคุม $\{0 1 0 0 0 0\}$

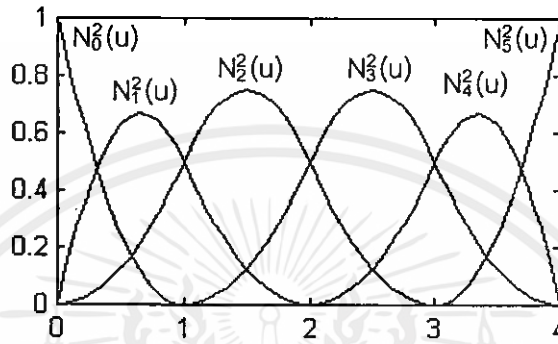
$N_2^2(u)$ ใช้จุดควบคุม $\{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}$

$N_3^2(u)$ ใช้จุดควบคุม $\{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}$

$N_4^2(u)$ ใช้จุดควบคุม $\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0\}$

$N_5^2(u)$ ใช้จุดควบคุม $\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}$

รูปร่างของทุกๆ ฟังก์ชัน $N_i^2(u)$ แสดงดังรูปที่ 4.18



รูปที่ 4.18 ลักษณะฟังก์ชันมูลฐาน B-spline $n=2$, $L=4$ ใช้ Open knot vector

ขบวนการสร้างเส้นโค้ง B-spline ที่กล่าวผ่านมาสองวิธีคือการแทรก knot และวิธีการของ de Boor จะเป็นการทำซ้ำเพื่อหาค่าเส้นโค้งบนโดเมน knot $[u_{n-1}, u_{L+n-1}]$ ซึ่งจะไม่ทราบรูปแบบสมการของฟังก์ชันมูลฐาน สำหรับการพิจารณาหาสมการฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ใช้ open knot vector ที่นิยามบนโดเมนนี้จะมีความสัมพันธ์กับโพลิโนเมียล Bernstein[8] คือ ถ้าเริ่มต้นกำหนดจุดควบคุม B-spline เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $(n+L) \times (n+L)$ จากนั้นใช้กระบวนการแทรก knot แทรกค่า knot ตำแหน่งที่มีอยู่แล้วใน open knot vector $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{L+n-2}$ ตามแนวหลักให้แต่ละค่ามีการซ้ำเท่ากับ n ตามลำดับ เมตริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้แต่ละหลักจะสามารถนำไปสร้างฟังก์ชันมูลฐาน B-spline $N_i^1(u)$ หนึ่งฟังก์ชัน และแต่ละแถวแทนค่าสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียล Bernstein ที่นิยามเป็นช่วงๆ บนโดเมน knot

ความสัมพันธ์ของเส้นโค้ง B-spline อันดับขั้นที่ n กับฟังก์ชันมูลฐาน B-spline แสดงตามสมการ (4.8)

$$s^n(u) = \sum_{i=0}^{L+n-1} d_i N_i^n(u) \quad u \in [u_{n-1}, u_{L+n-1}] \quad (4.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า โดย $S^n(u)$ เส้นโค้ง B-spline อันดับขั้น n ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น นอกเหนือจากนี้ หากมีข้อผิดพลาดประการใด ขออภัยเป็นอย่างสูง และต้องอภัยถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

d_i จุดควบคุมของ B-spline

$N_i^n(u)$ ฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ลำดับชั้นที่ n

n ลำดับชั้นของฟังก์ชันมูลฐาน

u_i เรียก knot vector

สมการ (4.8) สำหรับ open knot vector จำนวนช่วงโดเมน knot ต่ำสุดคือ $L = 1$ ดังนั้น B-spline ลำดับชั้น n จะต้องมีจำนวนจุดควบคุมอย่างน้อย $n+1$ จุด ฟังก์ชันมูลฐานแต่ละฟังก์ชันแสดงอยู่ในรูปผลรวมของโพลิโนเมียล Bernstein

$$N_i^n(u) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t) \quad (4.9)$$

โดย b_j จุดควบคุมของโพลิโนเมียล Bernstein พิจารณาจากกระบวนการแทรก knot

n ลำดับชั้นของฟังก์ชันโพลิโนเมียล Bernstein และเป็นลำดับชั้นของฟังก์ชัน B-spline

$B_j^n(t)$ เรียกว่าโพลิโนเมียล Bernstein

t จะเป็นค่าที่ได้จากการส่ง (map) ค่าในแต่ละช่วงภายในโดเมน knot ให้มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$$

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} \frac{n!}{j!(n-j)!} & \text{ถ้า } 0 \leq j \leq n \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases} \quad (4.10)$$

โพลิโนเมียล Bernstein จะมีคุณสมบัติ recursion

$$B_j^n(t) = (1-t) B_j^{n-1}(t) + t B_{j-1}^{n-1}(t) \quad (4.11)$$

เมื่อ $B_0^0(t) = 1$ และ $B_j^n(t) = 0$ สำหรับ $j \notin \{0, \dots, n\}$ (4.12)

ตัวอย่างที่ 4.5 การหาเซตฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ลำดับชั้นที่สาม ($n = 3$) $L = 2$ ในรูปผลรวมของฟังก์ชันโพลิโนเมียล Bernstein กำหนด knot vector $\{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2\}$

เริ่มต้นกำหนดจุดควบคุมเริ่มต้นเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 5×5 ใช้ขบวนการแทรก knot ที่ตำแหน่งค่าหนึ่ง จำนวนสามครั้งตามแนวหลัก จะได้เมตริกซ์จุดควบคุมครั้งสุดท้ายดังนี้

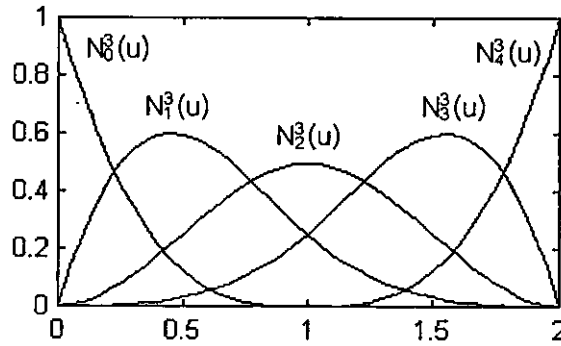
$$D^{v^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} N_0^3(u) &= \begin{cases} 1B_0^3(u) + 0B_1^3(u) + 0B_2^3(u) + 0B_3^3(u) & 0 \leq u \leq 1 \\ 0B_0^3(u-1) + 0B_1^3(u-1) + 0B_2^3(u-1) + 0B_3^3(u-1) & 1 \leq u \leq 2 \end{cases} \\ N_1^3(u) &= \begin{cases} 0B_0^3(u) + 1B_1^3(u) + \frac{1}{2}B_2^3(u) + \frac{1}{4}B_3^3(u) & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{4}B_0^3(u-1) + 0B_1^3(u-1) + 0B_2^3(u-1) + 0B_3^3(u-1) & 1 \leq u \leq 2 \end{cases} \\ N_2^3(u) &= \begin{cases} 0B_0^3(u) + 0B_1^3(u) + \frac{1}{2}B_2^3(u) + \frac{1}{2}B_3^3(u) & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{2}B_0^3(u-1) + \frac{1}{2}B_1^3(u-1) + 0B_2^3(u-1) + 0B_3^3(u-1) & 1 \leq u \leq 2 \end{cases} \\ N_3^3(u) &= \begin{cases} 0B_0^3(u) + 0B_1^3(u) + 0B_2^3(u) + \frac{1}{4}B_3^3(u) & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{4}B_0^3(u-1) + \frac{1}{2}B_1^3(u-1) + 1B_2^3(u-1) + 0B_3^3(u-1) & 1 \leq u \leq 2 \end{cases} \\ N_4^3(u) &= \begin{cases} 0B_0^3(u) + 0B_1^3(u) + 0B_2^3(u) + 0B_3^3(u) & 0 \leq u \leq 1 \\ 0B_0^3(u-1) + 0B_1^3(u-1) + 0B_2^3(u-1) + 1B_3^3(u-1) & 1 \leq u \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ค่า $B_i^n(t)$ ใช้ตามสมการ (4.10) ลักษณะของทุกๆ ฟังก์ชันมูลฐาน $N_i^3(u)$ แสดงดังรูปที่ 4.19 การกระทำดังกล่าวนี้จากกล่าวได้ว่าเป็นการแปลงจุดควบคุมของ B-spline ให้เป็นจุดควบคุมของ ฟังก์ชันโพลิโนเมียล Bernstein

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.19 ฟังก์ชันมูลฐานของ B-spline กรณี $L = 2$ $n = 3$

นอกจากเส้นโค้ง B-spline จะมีคุณสมบัติตามการแทรก knot แล้ว ถ้าพิจารณาในเทอมของฟังก์ชันมูลฐานจะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. ทุกๆฟังก์ชันมูลฐาน $N_i^n(u)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

$$\sum_{i=0}^{L+n-1} c_i N_i^n(u) = 0$$

2. ฟังก์ชันมูลฐานมีลักษณะการเกิดเฉพาะที่ $N_i^n(u) > 0$ สำหรับ $u \in [u_{i-1}, u_{i+n}]$ บริเวณอื่นๆ $N_i^n(u) = 0$

3. ผลรวมทางเรขาคณิตของฟังก์ชันมูลฐานในบริเวณโดเมน knot เท่ากับหนึ่ง

$$\sum_{i=0}^{L+n-1} N_i^n(u) = 1 \quad \text{สำหรับ } u \in [u_{n-1}, u_{L+n-1}]$$

4. ฟังก์ชันมูลฐานมีความต่อเนื่อง C^{n-r} โดยเฉพาะใช้ open knot vector ฟังก์ชันมูลฐานมีความต่อเนื่อง C^{n-1}

4.7 อนุพันธ์เส้นโค้ง B-spline

เส้นโค้ง B-spline อันดับชั้น n สามารถแสดงอยู่ในรูปของโพลิโนเมียล Bernstein ได้ โดยจุดควบคุมของโพลิโนเมียล Bernstein ได้จากการกำหนดจุดควบคุมเริ่มต้นเป็นของเส้นโค้ง B-spline แล้วใช้กระบวนการแทรก knot แทรกค่า knot ใน open knot vector ให้มีการซ้ำ n ครั้ง ดังที่กล่าวในหัวข้อที่ 4.6 การแสดงเส้นโค้ง B-spline ($s^n(u)$) ด้วยโพลิโนเมียล Bernstein จะทำให้เกิดการแบ่งเส้นโค้งภายในโดเมน knot ออกเป็นส่วนย่อยๆ $s_1^n(u), \dots, s_L^n(u)$ ดังนั้นการหาค่าอนุพันธ์ตลอดทั้งเส้นโค้ง จะพิจารณาได้จากการหาค่าอนุพันธ์ของเส้นโค้งส่วนย่อยๆ เหล่านี้

พิจารณาเส้นโค้ง B-spline ลำดับชั้นที่ n ในรูปโพลิโนเมียล Bernstein

$$s^n(u) = \begin{cases} s_1^n(u) = \sum_{j=0}^n b_{1,j} B_j^n(t) & t = \frac{u - u_{n-1}}{u_n - u_{n-1}}, u_{n-1} \leq u \leq u_n \\ \vdots \\ s_L^n(u) = \sum_{j=0}^n b_{L,j} B_j^n(t) & t = \frac{u - u_{L+n-2}}{u_{L+n-1} - u_{L+n-2}}, u_{L+n-2} \leq u \leq u_{L+n-1} \end{cases} \quad (4.13)$$

โดย $s_i^n(u)$ เส้นโค้ง B-spline ย่อยที่ i

$b_{i,j}$ จุดควบคุมของโพลิโนเมียล Bernstein ช่วงย่อย i ตำแหน่ง j

$B_j^n(t)$ โพลิโนเมียล Bernstein อันดับชั้น n

t ตัวแปรเดิรมีค่าอยู่ระหว่างศูนย์ถึงหนึ่ง

ค่าอนุพันธ์โพลิโนเมียล Bernstein

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_j^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\ &= \frac{jn!}{j!(n-j)!} t^{j-1} (1-t)^{n-j} - \frac{(n-j)n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} t^{j-1} (1-t)^{n-j} - \frac{n(n-1)!}{j!(n-j-1)!} t^j (1-t)^{n-j-1} \\ \frac{d}{dt} B_j^n(t) &= n(B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

ทุกๆ เส้นโค้งย่อยจะอยู่ในรูปแบบ

$$F^n(t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.15)$$

$$\frac{dF^n(t)}{dt} = n \sum_{j=0}^n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) b_j$$

เอกสารนี้ใช้เสรีตามสมควร (4.12) จะได้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{dF^n(t)}{dt} = n \sum_{j=1}^n B_{j-1}^{n-1}(t) b_j - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) b_j$$

โดยการจัดเรียงตัวที่ j ในผลรวมเทอมแรกด้านขวาใหม่

$$\begin{aligned} \frac{dF^n(t)}{dt} &= n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) b_{j+1} - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) b_j \\ \text{หรือ} \quad \frac{dF^n(t)}{dt} &= n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_j^{n-1}(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

กำหนด $\Delta b_j = b_{j+1} - b_j$ ดังนั้น

$$\frac{dF^n(t)}{dt} = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta b_j B_j^{n-1}(t) \quad (4.17)$$

สมการ (4.17) ค่าอนุพันธ์อันดับแรกของเส้นโค้ง B-spline อันดับชั้นที่ n บนโดเมน knot แต่ ละช่วงจะเป็นเส้นโค้ง B-spline อีกเส้นโค้งหนึ่ง ที่มีจุดควบคุมของโพลีโนเมียล Bernstein เป็น Δb_j สำหรับการหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นสามารถใช้วิธีทำซ้ำสมการ (4.17) ซึ่งสรุปได้เป็นสมการ (4.18)

$$\begin{aligned} \frac{d^r F^n(t)}{dt^r} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r b_j B_j^{n-r}(t) \\ \Delta^r b_j &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} b_{j+i} \end{aligned} \quad (4.18)$$

โดย

r แทนอันดับชั้นอนุพันธ์

พิจารณาค่าอนุพันธ์ที่พารามิเตอร์จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของเส้นโค้ง $t=0$ และ $t=1$

$$B_j^n(0) = \delta(j-0)$$

$$B_j^n(1) = \delta(j-n)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
จากสมการ (4.18) จะได้

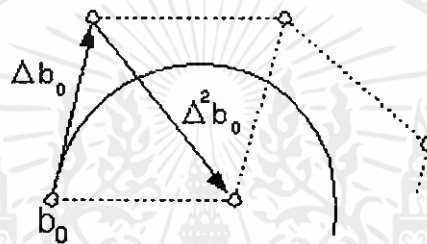
ไม่ว่ากรณีใดๆ ก็ตาม ไม่สงวนลิขสิทธิ์ และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^r F^n(0)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0 \quad (4.19)$$

และ

$$\frac{d^r F^n(1)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_{n-r} \quad (4.20)$$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์อันดับที่ r ของเส้นโค้ง B-spline แต่ละช่วงที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของเส้นโค้ง จะขึ้นอยู่กับจำนวนจุดควบคุม $r+1$ จุดบริเวณใกล้เคียงจุดเริ่มและจุดปลาย เช่น กรณี $r = 1$ จะได้ b_1 กับ b_0 กำหนดเส้นสัมผัสที่ $t = 0$ และจุดควบคุม b_n กับ b_{n-1} จะกำหนดเส้นสัมผัสที่ $t = 1$ รูปที่ 4.20 แสดงกรณี $r = 1$ และ $r = 2$



รูปที่ 4.20 ค่าอนุพันธ์ที่จุดปลายของเส้นโค้ง B-spline กรณี $r = 1$ และ $r = 2$

4.8 เวฟเล็ตแบบ B-spline

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการออกแบบเวฟเล็ต B-spline โดยเลือกฟังก์ชันมูลฐานของ B-spline แบบ open knot vector (มีโดเมน knot อยู่ในช่วงศูนย์ถึงหนึ่ง) เป็นฟังก์ชันสเกลลิงและเนื่องจากเซตฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ไม่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากดังนั้นการหากลุ่มฟังก์ชันเวฟเล็ตจะใช้เงื่อนไขเซมิออร์ทोगอนัล (Semiorthogonal) ดังที่กล่าวในส่วนที่ 3.6 คือ

$$(P_j)^T [\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle] Q_j = 0 \quad (4.21)$$

กำหนดให้ปริภูมิสเกลลิง $V_j(n)$ มีจำนวนฟังก์ชันมูลฐานเท่ากับ $2^j + n$ เมื่อ n แทนอันดับขั้นของฟังก์ชันมูลฐานและค่า j แสดงระดับความละเอียดของปริภูมิ ขั้นตอนการออกแบบเวฟเล็ต B-spline แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนคือ

1. กำหนดเมตริกซ์สังเคราะห์ P_j

เอกสารนี้เป็น 2. กำหนดเมตริกซ์ผลคูณภายในของฟังก์ชันมูลฐาน $[\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle]$ นำไปใช้ประโยชน์ด้านการคำนวณ

ไม่ว่ากรณีใดๆ 3. แก้มการหาเมตริกซ์สังเคราะห์ Q_j จากสมการ (4.21) ในขั้นตอนนี้จะหมายถึงการพิจารณาหาฟังก์ชันเวฟเล็ตด้วย

4.8.1 กำหนดเมตริกซ์สังเคราะห์ P_j

เมตริกซ์สังเคราะห์ P_j เป็นเมตริกซ์ขนาด $(2^{j+1}+n) \times (2^{j+1}+n)$ ใช้ลดระดับความละเอียดของฟังก์ชันสเกลลิงจากปริภูมิ $V_j(n)$ ไปสู่ปริภูมิ $V_{j-1}(n)$ ซึ่งจะได้จากวิธีการแทรก knot โดยกำหนด L เท่ากับ 2^{j-1} และ open knot vector ใช้ตามสมการ (4.22)

$$\{u_0, \dots, u_{L+2n-2}\} = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n \text{ ครั้ง}}, \underbrace{\{1, 2, \dots, 2^{j-1}-2, 2^{j-1}-1, 2^{j-1}, \dots, 2^{j-1}\}}_{n \text{ ครั้ง}} / 2^{j-1} \quad (4.22)$$

การแทรก knot ให้แทรก knot หนึ่งครั้ง ตำแหน่ง $(2k+1)/2^j$; $k=0, \dots, 2^{j-1}-1$ จุดควบคุม B-spline เริ่มแรกกำหนดเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $(2^{j+1}+n) \times (2^{j+1}+n)$ เมตริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความสัมพันธ์ตามสมการ (3.5) ซึ่งสามารถตรวจสอบได้โดยพิจารณาแต่ละหลักของเมตริกซ์ P_j เป็นจุดควบคุมของฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ที่ระดับความละเอียด j (โดเมน knot ศูนย์ถึงหนึ่ง) ตามสมการ (4.8) จากนั้นหาค่าเส้นโค้งก็จะได้ ฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ที่ระดับความละเอียด $j-1$

ตัวอย่างที่ 4.6 แสดงการหาเมตริกซ์ P_j เมื่อ $j=2$, $n=3$ โดยการใช้จุดควบคุม B-spline เริ่มต้น เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 5×5

$$d^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ลำดับ knot vector ตามสมการ (4.22) คือ

$$u_i = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2\} / 2$$

ค่าพิกิตตามขวาง ξ_i คำนวณจากลำดับ knot u_i คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 $\xi_i = \{0 \ 1/3 \ 1 \ 5/3 \ 2\} / 2$
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการแทรก knot ครั้งหนึ่ง ที่ $u = 1/4$ ใน u_i จะได้

$$u_1^1 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2\}/2$$

$$\varepsilon_1^1 = \{0 \ 1/6 \ 1/2 \ 7/6 \ 5/3 \ 2\}/2$$

และ

$$d^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากการแทรก knot ครั้งที่สองที่ $u = 3/4$ ใน u_1^1 และใช้จุดควบคุม d^1 จะได้

$$u_1^2 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2 \ 2 \ 2\}/2$$

$$\varepsilon_1^1 = \{0 \ 1/6 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 11/6 \ 2\}/2 \text{ และ}$$

$$d^2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมตริกซ์ $P_2 = d^2$

ตัวอย่างที่ 4.7 การหาเมตริกซ์ P_j เมื่อ $j = 3$, $n = 3$ กำหนดจุดควบคุม B-spline เริ่มต้น เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 7×7 ลำดับ open knot vector ตามสมการ (4.22) คือ

$$u_1 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4\}/4, \quad \varepsilon_1 = \{0 \ 1/3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 11/3 \ 4\}/4$$

จากการแทรก knot ครั้งที่สองค่า $u = 1/8$ ที่ u_1

$$u_1^1 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4\}/4, \quad \varepsilon_1^1 = \{0 \ 1/6 \ 1/2 \ 7/6 \ 2 \ 3 \ 11/3 \ 4\}/4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$d^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากการแทรก knot ครั้งที่สองค่า $u = 3/8$ ใน u_i^1 และใช้จุดควบคุม d^1 จะได้

$$u_i^2 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4\}/4$$

$$e_i^2 = \{0 \ 1/6 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 13/6 \ 3 \ 11/3 \ 4\}/4$$

$$d^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/16 & 11/16 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากการแทรก knot ครั้งที่สาม ค่า $u = 5/8$ ใน u_i^2 และใช้จุดควบคุม d^2 จะได้

$$u_i^3 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2 \ 5/2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4\}/4$$

$$e_i^3 = \{0 \ 1/6 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2 \ 5/2 \ 19/6 \ 11/3 \ 12/3\}/4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$d^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/16 & 11/16 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 6/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากการแทรก knot ครั้งที่สี่ ค่า $u = 7/8$ ใน u_i^3 และใช้จุดควบคุม d^3 จะได้

$$u_i^4 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2 \ 5/2 \ 3 \ 7/2 \ 4 \ 4 \ 4\}/4$$

$$\varepsilon_i^4 = \{0 \ 1/6 \ 1/2 \ 1 \ 3/2 \ 2 \ 5/2 \ 3 \ 7/2 \ 23/6 \ 4\}/4$$

$$d^4 = 1/16 \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 11 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใด ดังนั้นเมตริกซ์ $P_3 = d^4$ ให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลักษณะของเมตริกซ์ Q_j จะคล้ายกับเมตริกซ์ P_j คือ n หลักแรก และ n หลักสุดท้ายจะเป็นค่าตัวเลขชุดเดียวกันแต่จะกลับตำแหน่งกันสำหรับหลักที่ $n+2$ เป็นต้นไปจะเป็นค่าตัวเลขที่ซ้ำกับหลัก $n+1$ แต่จะเลื่อนลงครึ่งละสองแถว ค่า x ในเมตริกซ์ Q_j คือค่าที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ตำแหน่งว่างแสดงถึงค่าศูนย์ และ β ใช้แทนค่า normalization เมตริกซ์ที่ระดับความละเอียดและอันดับขั้นอื่นๆ แสดงในภาคผนวก ก.

4.9 การพิจารณาหาเมตริกซ์วิเคราะห์ A_j และ B_j ในการกระจายเส้นโค้ง

การหาเมตริกซ์ A_j และ B_j ที่ใช้กระจายเส้นโค้งจากระดับความละเอียดสูงสู่ระดับความละเอียดละเอียดที่ต่ำกว่าพิจารณาจากสมการ (3.15) คือ

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = [P_j | Q_j]^{-1}$$

ในการใช้งานเวฟเลต B-spline ที่ได้ออกแบบตามที่กล่าวมาในการกระจายเส้นโค้งและรวมกลับเส้นโค้งจะใช้สมการ (4.25) และ (4.26)

$$\begin{bmatrix} C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} C_j \quad (\text{Decomposition}) \quad (4.25)$$

$$C_j = [P_j | Q_j] \begin{bmatrix} C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{bmatrix} \quad (\text{Reconstruction}) \quad (4.26)$$

เมื่อ A_j, B_j เรียกว่าเมตริกซ์วิเคราะห์ มีมิติ $(2^{j+1}+n) \times (2^j+n)$ และ $(2^{j+1}) \times (2^j+n)$ ตามลำดับ

P_j, Q_j เรียกว่าเมตริกซ์สังเคราะห์มีมิติ $(2^j+n) \times (2^{j+1}+n)$ และ $(2^j+n) \times (2^{j+1})$ ตามลำดับ

C_j เวกเตอร์หลักเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิ่งมีมิติเท่ากับ $(2^j+n) \times (1)$

C_{j-1} เวกเตอร์หลักเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันสเกลลิ่งที่ระดับความละเอียด $j-1$ มีมิติเท่ากับ $(2^{j+1}+n) \times (1)$

D_{j-1} เวกเตอร์หลักเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเวฟเลต มีมิติเท่ากับ $(2^{j+1}) \times (1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์หรือการสงวนเพื่อการค้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ผู้อื่นใช้หรือเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.10 ตัวอย่างการใช้เวฟเล็ต B-spline

พิจารณาเส้นโค้ง B-spline บนระนาบในรูปแบบอิงตัวแปรเสริมที่ระดับความละเอียด j ตามสมการ (4.27) และสมการ (4.28)

$$y_j(t) = \Phi_j(t) C_j^y \quad (4.27)$$

$$x_j(t) = \Phi_j(t) C_j^x \quad (4.28)$$

และเส้นโค้งที่ระดับความละเอียดต่ำกว่า $j-1$

$$x_{j-1}(t) = \Phi_{j-1}(t) C_{j-1}^x \quad (4.29)$$

$$y_{j-1}(t) = \Phi_{j-1}(t) C_{j-1}^y \quad (4.30)$$

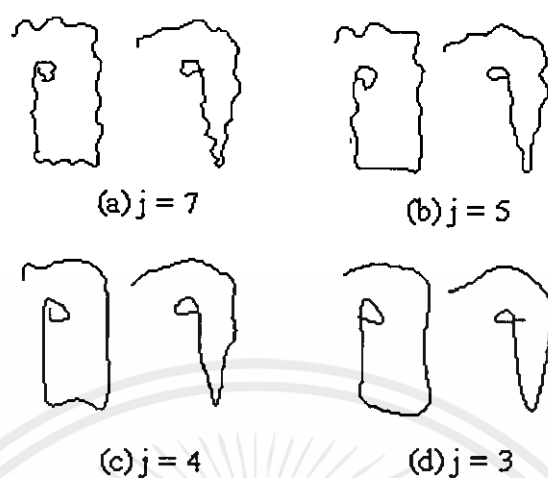
เมื่อ C_j^x, C_j^y เวกเตอร์หลักเก็บค่าจุดควบคุมของเส้นโค้ง B-spline ได้จากพิกัดตามแกน x และตามแกน y ตามลำดับที่ระดับความละเอียด j (จำนวนเท่ากับ 2^{j+n})

$\Phi_j(t)$ เวกเตอร์แถวเก็บค่าฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ที่ตำแหน่งพารามิเตอร์ t

ความสัมพันธ์ของจุดควบคุมที่ระดับความละเอียด j และ $j-1$ พิจารณาจากสมการ (4.25) ซึ่งเส้นโค้ง B-spline ที่ระดับความละเอียด $j-1$ จะเป็นการประมาณของเส้นโค้ง B-spline ที่ระดับความละเอียด j จะเห็นว่าการใช้งานจะต้องการเพียงจุดควบคุมที่ระดับความละเอียดต่างๆ เท่านั้น จากนั้นขั้นตอนการหารูปร่างเส้นโค้งจริงอาจใช้วิธีการต่างกัน เช่น ใช้วิธีการแทรก knot วิธีการของ de Boor หรือจะใช้วิธีการคำนวณหาฟังก์ชันมูลฐานก็ได้

ขั้นตอนการกระจายข้อมูลตามสมการ (4.25) จะได้จุดควบคุมสองส่วนคือ C_{j-1} และ D_{j-1} ส่วนของ D_{j-1} ถูกเรียกว่ารายละเอียดของเส้นโค้ง ประโยชน์ของรายละเอียดเส้นโค้งนี้ถูกนำไปใช้ในเรื่องการแก้ไขเส้นโค้ง [7]

ตัวอย่างที่ 4.8 แสดงการประมาณตัวอักษรภาษาไทยแสดงดังรูปที่ 4.21(a) ตัวอักษรต้นฉบับมีจุดควบคุมเท่ากับ 131 จุดหรือระดับความละเอียด $j = 7$ ผลการประมาณที่ระดับความละเอียดต่างๆ แสดงดังรูป



รูปที่ 4.21 การประมาณตัวอักษรภาษาไทยที่ระดับความละเอียดต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

พื้นผิวภาพสามมิติหลายระดับความละเอียด

5.1 บทนำ

การสร้างพื้นผิวภาพสามมิติในทางคอมพิวเตอร์กราฟฟิกส์วิธีหนึ่งที่ยอมรับใช้คือ วิธีการ tensor product พื้นผิวที่ได้รับจะมีคุณสมบัติอย่างไรนั้นจะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของฟังก์ชันมูลฐานที่เลือกใช้ ฟังก์ชัน B-spline เป็นฟังก์ชันมูลฐานที่ยอมรับนำมาใช้ในการทำ tensor product เนื่องจากมีคุณสมบัติเด่นหลายประการเช่น ประการแรกฟังก์ชันมูลฐานแต่ละฟังก์ชันมีลักษณะการเกิดเฉพาะที่ คุณสมบัติอันนี้จะทำให้การแก้ไขพื้นผิวที่จุดใดจุดหนึ่งมีผลกระทบเฉพาะบริเวณใกล้เคียงที่แก้ไขเท่านั้น และพื้นผิวจะมีความต่อเนื่องเท่าเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ประการที่สองลักษณะการเกิดของพื้นผิวภาพสามมิติ B-spline จะอยู่ภายใน convex hull เสมอทำให้ควบคุมลักษณะการโค้งของพื้นผิวได้ง่ายขึ้น สำหรับเนื้อหาในบทนี้แบ่งออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกจะกล่าวถึงการสร้างพื้นผิว B-spline ด้วยวิธีการ Tensor product ที่ใช้ทั่วไป พื้นผิวภาพสามมิติที่ได้จะไม่มีคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียด ส่วนที่สองเป็นการนำเวฟเล็ต B-spline หนึ่งมิติ(ในบทที่4) มาสร้างเป็นพื้นผิวภาพสามมิติ B-spline ที่มีคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยใช้วิธีการ Standard tensor product หรือ Nonstandard tensor product จะทำให้ทราบความสัมพันธ์ของ control mesh ที่ระดับความละเอียดสูงกว่ากับ control mesh ที่ระดับความละเอียดต่ำกว่า ซึ่งใช้เป็นสมการกระจายข้อมูลและรวมกลับข้อมูลในกรณีพื้นผิว พื้นผิวที่ระดับความละเอียดใดๆ จะประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนประมาณพื้นผิวหรือโครงพื้นผิว และส่วนรายละเอียดของพื้นผิว พื้นผิวทั้งสองส่วนนี้สามารถแก้ไขและเปลี่ยนแปลงได้ดังจะกล่าวในการทดลองบทที่6

5.2 การสร้างพื้นผิวภาพสามมิติ B-spline โดยวิธีการ Tensor product

พื้นผิว B-spline สามารถสร้างขึ้นด้วยวิธีการ Tensor product นิยามดังสมการ (5.1)

$$S(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^{L_1+n_1-1} \sum_{p=0}^{L_2+n_2-1} d_{p,q} N_p^{n_1}(x_1) N_q^{n_2}(x_2) \quad (5.1)$$

เมื่อ $S(x_1, x_2)$ พื้นผิว B-spline ทิศทาง x_1 มีอันดับชั้น n_1 และทิศทาง x_2 มีอันดับชั้น n_2 ค่าของ x_1 และ x_2 จะอยู่ในโดเมน knot ของแต่ละทิศทาง $x_1 \in [u_{n_1-1}, u_{n_1+L_1-1}]$
 $x_2 \in [u_{n_2-1}, u_{n_2+L_2-1}]$

$N_p^{n_1}(x_1), N_q^{n_2}(x_2)$ ฟังก์ชันมูลฐาน B-spline หนึ่งมิติอันดับชั้น n_1, n_2 อิงตัวแปรเสริม x_1, x_2 ตามลำดับ

$d_{p,q}$ เรียกว่า control mesh หรือจุดควบคุมพื้นผิวที่דרชนี p และ q

การหาค่าจุดใด ๆ บนพื้นผิวตามสมการ (5.1) นั้นอาจใช้วิธีการหาค่าจากฟังก์ชันมูลฐานโดยตรงหรือจะใช้วิธีการของ de Boor ในบทที่ 4 ก็ได้ ซึ่งแบ่งออกเป็นสองขั้นตอน

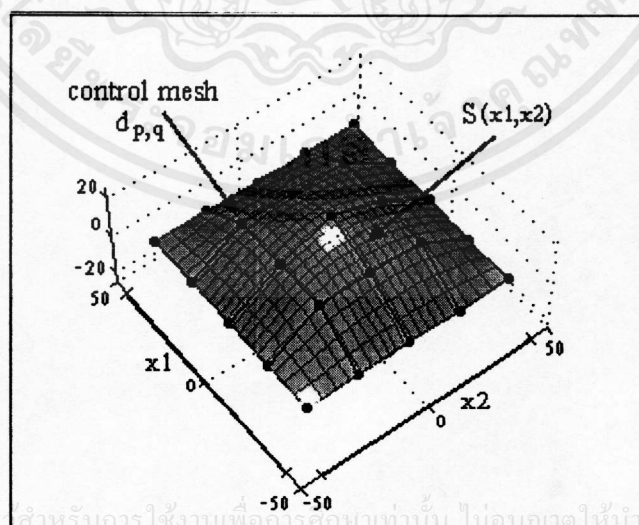
1. คำนวณจุด $d_p(x_2)$ จาก

$$d_p(x_2) = \sum_{q=0}^{L_2+n_2-1} d_{p,q} N_q^{n_2}(x_2) \quad (5.2)$$

2. คำนวณค่าบนพื้นผิว $S(x_1, x_2)$ จาก

$$S(x_1, x_2) = \sum_{p=0}^{L_1+n_1-1} d_p(x_2) N_p^{n_1}(x_1) \quad (5.3)$$

ดังนั้นจะต้องกำหนดค่า knot vector สองทิศทางคือ ในทิศทาง x_1 และในทิศทาง x_2 ถ้าพิจารณารูปร่างฟังก์ชันมูลฐานกรณีพื้นผิวจะมีขอบเขตเป็นสี่เหลี่ยม พื้นผิว B-spline และพารามิเตอร์ต่างๆ แสดงดังรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 พื้นผิว B-spline และพารามิเตอร์ต่างๆ

จะเห็นว่าพื้นผิว B-spline จะเกิดจากฟังก์ชัน B-spline หนึ่งมิติในแต่ละทิศทาง x_1, x_2 ดังนั้นพื้นผิวแบบนี้จะมีคุณสมบัติคล้ายคลึงกับเส้นโค้ง B-spline คุณสมบัติเด่นๆ เช่น การเกิดขึ้นของพื้นผิวจะอยู่ภายใน convex hull ที่พิจารณาในทิศทาง x_1 และ x_2 เท่านั้น และผลกระทบของพื้นผิวต่อการเปลี่ยนแปลง control mesh จุดใดจุดหนึ่งจะมีลักษณะเฉพาะก็คือ พื้นผิวจะเปลี่ยนแปลงเฉพาะบริเวณใกล้เคียงจุด control mesh ที่ถูกเคลื่อนย้ายแสดงดังรูปที่ 5.2 และพื้นผิวจะมีความต่อเนื่องเท่าเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ทั้งนี้เนื่องมาจากฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ในแต่ละทิศทางมีลักษณะการเกิดเฉพาะที่ สมการ (5.1) พิจารณาในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$S(x_1, x_2) = \Phi(x_1) H (\Phi(x_2))^T \quad (5.4)$$

เมื่อ $\Phi(x_1)$ เวกเตอร์แถวเก็บค่าฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ในทิศทางตัวแปรเสริม x_1 อยู่ในรูปแบบ

$$[N_0^{n_1}(x_1), \dots, N_p^{n_1}(x_1)]$$

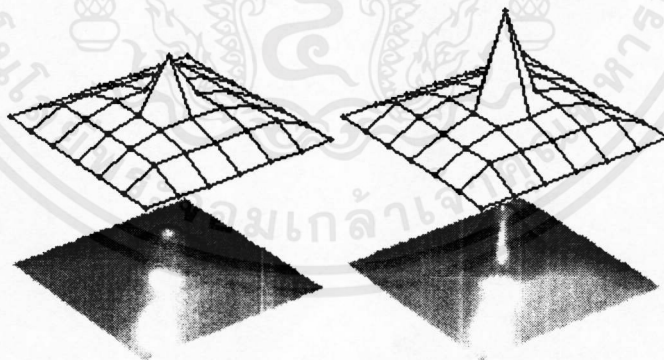
$\Phi(x_2)$ เวกเตอร์แถวเก็บค่าฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ในทิศทางตัวแปรเสริม x_2 อยู่ในรูปแบบ

$$[N_0^{n_2}(x_2), \dots, N_q^{n_2}(x_2)]$$

p เท่ากับ $0, \dots, L_1 + n_1 - 1$

q เท่ากับ $0, \dots, L_2 + n_2 - 1$

H เมตริกซ์เก็บค่า control mesh ทั้งหมดมีขนาด $(L_1 + n_1) \times (L_2 + n_2)$



รูปที่ 5.2 ผลกระทบต่อพื้นผิว B-spline อันดับขั้นที่ 2 (biquadratic) เมื่อ control mesh ถูกเคลื่อนย้าย

5.3 พื้นผิวภาพสามมิติ B-spline หลายระดับความละเอียด

การสร้างพื้นผิว B-spline หลายระดับความละเอียดสามารถสร้างขึ้นจากการนำเวฟเล็ต B-spline หนึ่งมิติมาทำ Standard tensor product หรือ Nonstandard tensor product โดยผลลัพธ์

$$V_m \times V_m' = V_0 \times V_0' \oplus \sum_{i=1}^m (V_i \times V_i' - V_{i-1} \times V_{i-1}')$$

$$V_m \times V_m' = V_0 \times V_0' \oplus \sum_{i=1}^m (V_{i-1} \times W_{i-1}' \oplus V_{i-1}' \times W_{i-1} \oplus W_{i-1} \times W_{i-1}')$$
 (5.6)

สมการ (5.6) จะหมายถึงการฉายพิกัดของ control mesh เริ่มต้น ($l_m \in V_m \times V_m'$) ไปเป็นเซตของฟังก์ชันมูลฐานดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{c|c} \phi_{00}(x_1) & \phi_{00}(x_2) \\ \hline \phi_{jk}(x_1) & \phi_{jk}(x_2) \end{array}$$

เมื่อ $j=0, \dots, m-1$ (j แทนระดับความละเอียดในทิศทาง x_1 และ x_2)

$k=0, \dots, 2^j+n-1$ (n แทนอันดับขั้นของฟังก์ชัน B-spline)

$k'=0, \dots, 2^j-1$

ผลของการทำ standard tensor product จะทำให้ขอบเขตของแต่ละฟังก์ชันมูลฐาน มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า และผลของการกระทำ nonstandard tensor product จะทำให้ขอบเขตของแต่ละฟังก์ชันมูลฐานมีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส พิจารณาสมการที่ (5.5) เทียบกับสมการที่ (5.6) พบว่าสมการที่ (5.6) จะให้ผลลัพธ์การทราנסฟอร์มที่เร็วกว่าและมีรูปสมการซับซ้อนกว่า ในการใช้งานจากการทดลองพบว่าให้ผลลัพธ์ไม่แตกต่างกัน

ต่อไปพิจารณาหาความสัมพันธ์ของ control mesh ที่ระดับความละเอียด j (ทิศทาง x_1) และ i (ทิศทาง x_2) แทนด้วย $C_{j,i}$ มีขนาด $(2^j+n) \times (2^i+n)$ กับ control mesh ที่ระดับความละเอียด $j-1$ และ $i-1$ แทนด้วย $C_{j-1,i-1}$ ของวิธี nonstandard tensor product

พื้นผิวที่ระดับความละเอียด j,i แทนด้วยสมการ (5.7) และพื้นผิวที่ระดับความละเอียด $j-1, i-1$ แทนด้วยสมการ (5.8)

$$S_{j,i}(x_1, x_2) = \Phi_j(x_1) C_{j,i} (\Phi_i(x_2))^T$$
 (5.7)

$$S_{j-1,i-1}(x_1, x_2) = \Phi_{j-1}(x_1) C_{j-1,i-1} (\Phi_{i-1}(x_2))^T + \Phi_{j-1}(x_1) D_{j-1,i-1}^1 (\Psi_{i-1}(x_2))^T + \Psi_{j-1}(x_1) D_{j-1,i-1}^2 (\Phi_{i-1}(x_2))^T + \Psi_{j-1}(x_1) D_{j-1,i-1}^3 (\Psi_{i-1}(x_2))^T$$
 (5.8)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในการศึกษาเท่านั้น, ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า โดยการแทนสมการที่ (3.5) และ (3.6) ในสมการที่ (5.8) จากนั้นพิจารณาสมการที่ (5.7) ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เท่ากับสมการที่ (5.8) เนื่องจากเป็นพื้นผิวเดียวกันแต่อยู่ในปริภูมิต่างกันจะได้ความสัมพันธ์

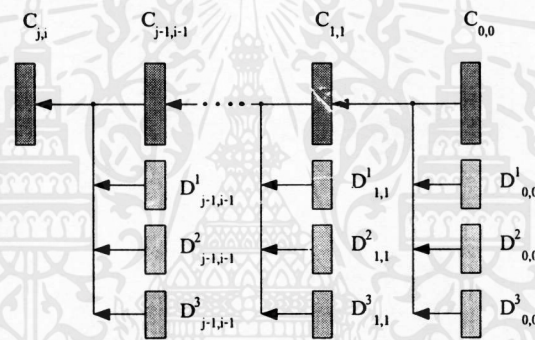
$$C_{j,i} = P_j C_{j-1,i-1} (P_i)^T + P_j D_{j-1,i-1}^1 (Q_i)^T + Q_j D_{j-1,i-1}^2 (P_i)^T + Q_j D_{j-1,i-1}^3 (Q_i)^T \quad (5.9)$$

เมื่อ $C_{j-1,i-1}$ เป็น control mesh ของพื้นผิวที่ระดับความละเอียด $j-1, i-1$ ซึ่งจะเป็นพื้นผิวประมาณของพื้นผิวที่มี $C_{j,i}$ เป็น control mesh

$D_{j-1,i-1}^1, D_{j-1,i-1}^2, D_{j-1,i-1}^3$ เป็น control mesh ส่วนรายละเอียดของพื้นผิวที่ระดับความละเอียด $j-1, i-1$

P, Q เมตริกซ์สังเคราะห์

สมการที่(5.9)จะใช้เป็นสมการรวมกลับข้อมูลกรณีพื้นผิวหลายระดับความละเอียดเขียนแผนภาพได้ดังรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 การรวมกลับข้อมูลกรณีพื้นผิวหลายระดับความละเอียด

สมการกระจายข้อมูลกรณีพื้นผิวหลายระดับความละเอียดจะพิจารณาย้อนกลับสมการ (5.9) โดยใช้คุณสมบัติ invertibility ตามตารางที่ (3.1) เข้าช่วยคือ

$$A_j P_j = B_j Q_j = I$$

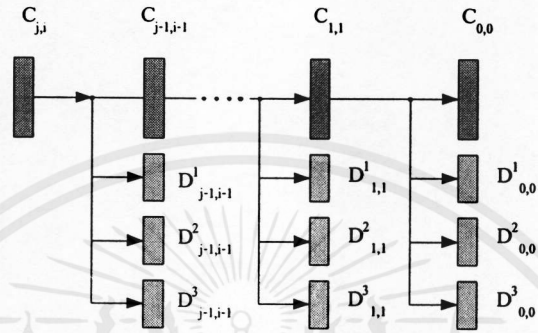
$$A_j Q_j = B_j P_j = 0$$

$$P_j A_j = Q_j B_j = I$$

ผลสุดท้ายจะได้สมการการกระจายข้อมูลดังนี้

$$\begin{array}{c|c} C_{j-1,i-1} = A_j C_{j,i} (A_i)^T & D_{j-1,i-1}^1 = A_j C_{j,i} (B_i)^T \\ \hline D_{j-1,i-1}^2 = B_j C_{j,i} (A_i)^T & D_{j-1,i-1}^3 = B_j C_{j,i} (B_i)^T \end{array} \quad (5.10)$$

สมการ (5.10) ใช้สำหรับแตกกระจายข้อมูลกรณีพื้นผิวหลายระดับความละเอียด ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 5.4 พื้นผิวส่วนต่างๆ ที่ได้จะอยู่ในปริภูมิเวฟเล็ต หลังจากทราบ control mesh ที่ระดับความละเอียดต่างๆ จะสามารถสร้างพื้นผิวได้ตามสมการ (5.1)



รูปที่ 5.4 การแตกกระจายข้อมูลกรณีพื้นผิวหลายระดับความละเอียด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

การทดลองแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติ

6.1 บทนำ

ในบทนี้จะนำหลักการที่ได้กล่าวในบทที่ 5 มาประยุกต์ใช้ในการแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติ เพื่อที่จะเปลี่ยนแปลงลักษณะของพื้นผิวให้เป็นไปตามที่ต้องการ โดยจะแบ่งการทดลองออกเป็น 3 ส่วนใหญ่ๆ ส่วนแรกจะเป็นการทดลองแตกกระจายพื้นผิวหรือประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ ซึ่งจะแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของส่วนประมาณพื้นผิวและส่วนรายละเอียดของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ ส่วนที่สองเป็นการทดลองแก้ไขส่วนประมาณของพื้นผิวหรืออาจจะเรียกว่าโครงของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆกัน ส่วนนี้จะทำให้เห็นถึงผลของการเคลื่อนย้าย control mesh ที่ระดับความละเอียดหนึ่งแต่จะมีผลกระทบต่อระดับความละเอียดอื่นๆด้วย ส่วนที่สามเป็นการทดลองแก้ไขเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของพื้นผิวเดิมให้เป็นรายละเอียดพื้นผิวแบบใหม่ ส่วนท้ายของบทนี้ได้กล่าวถึงการแก้ไขพื้นผิวด้วยวิธีการ Free form deformation ซึ่งเป็นการแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุด ที่สามารถนำมาใช้ร่วมกับวิธีที่นำเสนอ

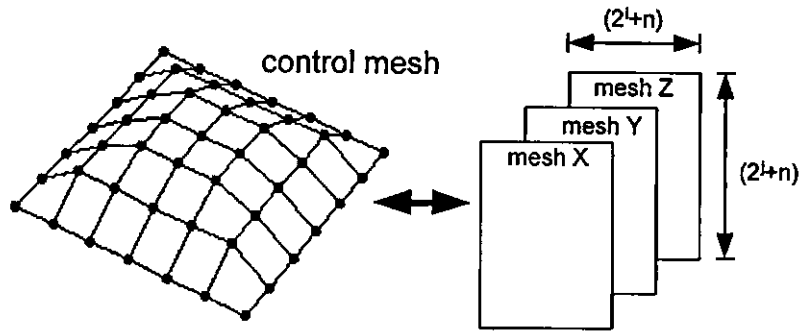
6.2 การแตกกระจายพื้นผิวและรวมกลับพื้นผิว

ลักษณะพื้นผิวที่ใช้ในการทดลองนี้เป็นพื้นผิว B-spline อันดับชั้นที่ 3 (bicubic B-spline) ลักษณะ knot vector ใช้แบบ open knot vector ในทิศทาง x_1 และทิศทาง x_2 (ตามสมการ 5.1) ซึ่งจะสอดคล้องกับเวฟเล็ต B-spline ที่ใช้คือมีฟังก์ชันสเกลลิงเป็นฟังก์ชัน B-spline อันดับชั้นที่ 3 เกิดจากการใช้ open knot vector เช่นกัน เนื่องจาก control mesh ที่ใช้ทดลองมีจำนวนค่อนข้างสูง ดังนั้นพื้นผิว B-spline จากสมการ(5.1)จะถูกนำไปกำหนดปริมาณความเข้มของแสงบนพื้นผิววัตถุหรือที่เรียกกันว่า Shading ซึ่งใช้แบบ Gouraud [12] [13] [14]

6.2.1 การแตกกระจายพื้นผิว (Decomposition)

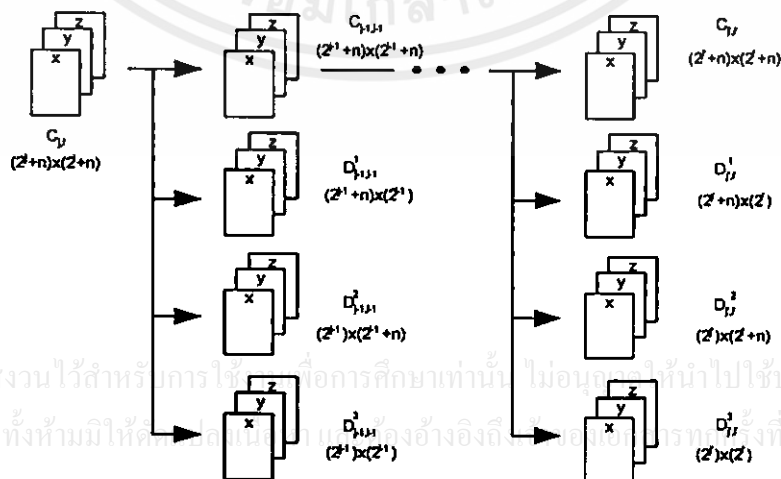
จากบทที่ 5 พบว่า control mesh ของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุด (C_u) ก่อนการแปลงเวฟเล็ต B-spline แต่ละ control mesh ด้านแกน X (mesh X), control mesh ด้านแกน Y (mesh Y) และ control mesh ด้านแกน Z (mesh Z) จะต้องมีความสอดคล้องเท่ากับ $(2^l + n_1) \times (2^l + n_2)$ โดยค่า j, i เป็นค่าจำนวนเต็มกรณีที่ใช้อันดับชั้นเดียวกันทั้งทิศทาง x_1 และ x_2 จะใช้ขนาดเท่ากับ $(2^l + n) \times (2^l + n)$ ดังรูปที่ 6.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.1 ขนาดของ control mesh ก่อนแปลงเวฟเล็ต

ในการแตกกระจายพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุด j, i เป็นพื้นผิวหลายระดับความละเอียด สามารถทำได้โดยนำ mesh X, mesh Y และ mesh Z แปลงเวฟเล็ตโดยใช้สมการ (5.10) สำหรับระดับความละเอียดที่ต่ำกว่า j', i' ซึ่งเป็นตัวเลขจำนวนเต็ม ผลลัพธ์ที่ได้จะประกอบด้วย control mesh สองส่วนคือ ส่วนประมาณของพื้นผิวใช้สัญลักษณ์ $C_{j',i'}$ ซึ่งมี mesh X, mesh Y และ mesh Z เป็นเมตริกซ์ขนาด $(2^{j'}+n) \times (2^{i'}+n)$ และส่วนรายละเอียดของพื้นผิว ส่วนรายละเอียดพื้นผิวนี้นแบ่งย่อยออกเป็นสามส่วนดังนี้ ส่วน $D_{j',i'}^1$ มีขนาดเมตริกซ์เป็น $(2^{j'}+n) \times (2^{i'})$ ส่วน $D_{j',i'}^2$ มีขนาดเมตริกซ์เป็น $(2^{j'}) \times (2^{i'}+n)$ และส่วน $D_{j',i'}^3$ มีขนาดเมตริกซ์ $(2^{j'}) \times (2^{i'})$ แสดงในรูปที่ 6.2 ระดับความละเอียดต่ำสุดที่สามารถแตกกระจายพื้นผิว ในกรณีที่ใช้จำนวน control mesh ที่ระดับความละเอียดสูงสุดเท่ากันทั้งสองทิศทางคือ ระดับศูนย์ ($j'=0, i'=0$) ตัวอย่างเช่น สมมติมี control mesh ที่ระดับความละเอียดสูงสุด $j=5, i=5$ ใช้เวฟเล็ต B-spline อันดับชั้นที่ 3 ดังนั้น control mesh เป็นเมตริกซ์ขนาด (35×35) หลังจากแตกกระจายพื้นผิวไปที่ระดับ $j'=0, i'=0$ จะได้ control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{0,0}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด (4×4) ส่วน $D_{0,0}^1$ เป็นเมตริกซ์ขนาด (4×1) ส่วน $D_{0,0}^2$ เป็นเมตริกซ์ (1×4) และ $D_{0,0}^3$ เป็นเมตริกซ์ขนาด (1×1)



รูปที่ 6.2 การแตกกระจาย control mesh ของพื้นผิว

control mesh ในส่วนประมาณพื้นผิวหรือโครงพื้นผิวที่ระดับใดๆ $C_{j,r}$ จะถูกนำไปสร้างพื้นผิว B-spline โดยใช้สมการ(5.1) สำหรับส่วนของรายละเอียดพื้นผิว ($D^1_{j,r}, D^2_{j,r}, D^3_{j,r}$) อธิบายได้ว่าเป็นส่วนเก็บผลต่างระหว่าง control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{j+1,r+1}$ กับ $C_{j,r}$ ดังนั้นค่า control mesh ภายในเมตริกซ์เหล่านี้จะเป็นค่าน้อยๆ ซึ่งจะไม่สามารถแสดงรูปทรงของพื้นผิวที่ถูกต้องได้ แต่จะสามารถสังเกตเห็นอิทธิพลของรายละเอียดพื้นผิวเหล่านี้ได้ ดังจะกล่าวในส่วนของการทดลองประมาณพื้นผิว

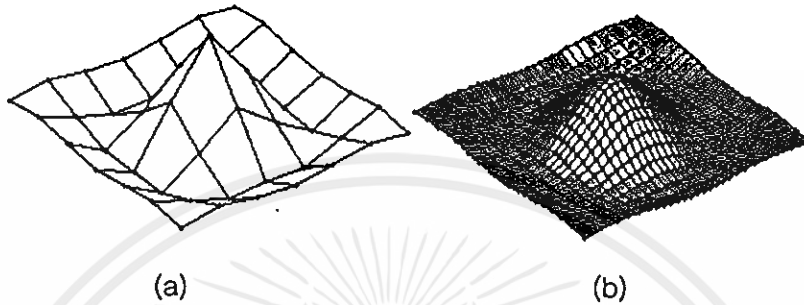
ตัวอย่างที่6.1 แสดงการแตกกระจายพื้นผิวกำหนดให้ control mesh ที่ระดับความละเอียดสูงสุด $C_{j,i}$ เป็น $j=2, i=2$ ใช้เวฟเลต B-spline อันดับขั้นที่ 3 ดังนั้น mesh X, mesh Y และ mesh Z จะเป็นเมตริกซ์ขนาด(7x7)ค่า mesh Z เก็บค่าความสูงได้จากการสุ่มฟังก์ชัน $f(x,y) = \frac{4 \sin(t)}{t}$ เมื่อ $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ ในทิศทาง x และ y เป็นการสุ่มลักษณะ uniform มีตำแหน่งค่าสุ่มดังนี้ [-6.2832 -4.1888 -2.0944 0 2.0944 4.1888 6.2832] ค่า mesh X, mesh Y และ mesh Z มีค่า ดังนี้

$$\text{mesh X} = \begin{bmatrix} -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \\ -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \\ -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \\ -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \\ -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \\ -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \\ -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Y} = \begin{bmatrix} -6.28 & -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 \\ -4.18 & -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 & 6.28 \\ -2.09 & 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 & 6.28 & 6.28 \\ 0 & 2.09 & 4.18 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 \\ 2.09 & 4.18 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 \\ 4.18 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 \\ 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 & 6.28 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Z} = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.50 & 0.20 & -0.00 & 0.20 & 0.50 & 0.23 \\ 0.50 & -0.23 & -0.85 & -0.82 & -0.85 & -0.23 & 0.50 \\ 0.20 & -0.85 & 0.24 & 1.65 & 0.24 & -0.85 & 0.20 \\ -0.00 & -0.82 & 1.65 & 4.00 & 1.65 & -0.82 & -0.00 \\ 0.20 & -0.85 & 0.24 & 1.65 & 0.24 & -0.85 & 0.20 \\ 0.50 & -0.23 & -0.85 & -0.82 & -0.85 & -0.23 & 0.50 \\ 0.23 & 0.50 & 0.20 & -0.00 & 0.20 & 0.50 & 0.23 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกตกรณีนี้ที่ $x=y=0$ จะได้ $f(0,0)=0/0$ ในที่นี้กำหนดให้เท่ากับ 4 โดยการนำเมตริกซ์ control mesh เหล่านี้ไปหารูปร่างของพื้นผิว B-spline ตามสมการ (5.1) แต่ละทิศทาง x_1, x_2 ใช้ open knot vector $n = 3, L = 4$ จะได้ดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 control mesh ที่ได้จากการสุ่มฟังก์ชัน $f(x,y) = 4 \sin(t)/t$

(a) control mesh $C_{2,2}$

(b) พื้นผิว B-spline อันดับชั้นที่ 3 จากการใช้ control mesh $C_{2,2}$

ต่อไปแสดงการแตกกระจายพื้นผิวจากระดับความละเอียด $j=2, i=2$ ลงหนึ่งระดับ $j=1, i=1$ จากสมการ (5.10) จะได้

$$\begin{array}{c|c} C_{1,1} = A_2 C_{2,2} (A_2)^T & D_{1,1}^1 = A_2 C_{2,2} (B_2)^T \\ \hline D_{1,1}^2 = B_2 C_{2,2} (A_2)^T & D_{1,1}^3 = B_2 C_{2,2} (B_2)^T \end{array}$$

ลักษณะเมตริกซ์สี่เหลี่ยม A_j และ B_j จะได้จากความสัมพันธ์

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = [P_j | Q_j]^{-1}$$

เมตริกซ์ P_j มีขนาด $(2^j+n) \times (2^{j+1}+n)$

เมตริกซ์ Q_j มีขนาด $(2^j+n) \times (2^{j+1})$

เมตริกซ์ A_j มีขนาด $(2^{j+1}+n) \times (2^j+n)$

เมตริกซ์ B_j มีขนาด $(2^{j+1}) \times (2^j+n)$

ค่าของเมตริกซ์สี่เหลี่ยม P_2 และ Q_2 ในภาคผนวก ก. มีค่าดังนี้

$$[P_2 | Q_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.3470 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -6.5586 & -0.7626 \\ 0 & 0.75 & 0.250 & 0 & 0 & 5.6975 & 2.1957 \\ 0 & 0.1875 & 0.625 & 0.1875 & 0 & -3.3460 & -3.3460 \\ 0 & 0 & 0.250 & 0.750 & 0 & 2.1957 & 5.6975 \\ 0 & 0 & 0 & 0.500 & 0.5 & -0.7626 & -6.5586 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4.3470 \end{bmatrix}$$

โดยการหาอินเวอร์สของ $[P_2 | Q_2]$ จะได้

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.8352 & 0.3297 & -0.2396 & 0.0792 & 0.0417 & -0.0922 & 0.0461 \\ -0.3539 & 0.7078 & 0.9479 & -0.3458 & -0.0833 & 0.2547 & -0.1273 \\ 0.2906 & -0.5813 & -0.0156 & 1.6125 & -0.0156 & -0.5812 & 0.2906 \\ -0.1273 & 0.2547 & -0.0833 & -0.3458 & 0.9479 & 0.7078 & -0.3539 \\ 0.0461 & -0.0922 & 0.0417 & 0.0792 & -0.2396 & -0.3297 & 0.8352 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.0379 & -0.0758 & 0.0551 & -0.0182 & -0.0096 & 0.0212 & -0.0106 \\ -0.0106 & 0.0212 & -0.0096 & -0.0182 & 0.0551 & -0.0758 & 0.0379 \end{bmatrix}$$

คำนวณตามสมการ (5.10) จะได้ control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{1,1}$ ดังนี้

$$\text{mesh X } C_{1,1} = \begin{bmatrix} -6.1359 & -2.6344 & 0 & 2.6344 & 6.1359 \\ -6.1359 & -2.6344 & 0 & 2.6344 & 6.1359 \\ -6.1359 & -2.6344 & 0 & 2.6344 & 6.1359 \\ -6.1359 & -2.6344 & 0 & 2.6344 & 6.1359 \\ -6.1359 & -2.6344 & 0 & 2.6344 & 6.1359 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Y } C_{1,1} = \begin{bmatrix} -6.1359 & -6.1359 & -6.1359 & -6.1359 & -6.1359 \\ -2.6344 & -2.6344 & -2.6344 & -2.6344 & -2.6344 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.6344 & 2.6344 & 0 & 2.6344 & 2.6344 \\ 6.1359 & 6.1359 & 6.1359 & 6.1359 & 6.1359 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{mesh Z } C_{1,1} = \begin{bmatrix} 0.3393 & 0.4592 & -0.7435 & 0.4592 & 0.3393 \\ 0.4592 & -2.0031 & 0.2254 & -2.0031 & 0.4592 \\ -0.7435 & 0.2254 & 12.3391 & 0.2254 & -0.7435 \\ 0.4592 & -2.0031 & 0.2254 & -2.0031 & 0.4592 \\ 0.3393 & 0.4592 & -0.7435 & 0.4592 & 0.3393 \end{bmatrix}$$

ส่วน control mesh รายละเอียดพื้นผิว $D'_{1,1}$

$$\text{mesh X } D'_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.0339 & 0.0339 \\ -0.0339 & 0.0339 \\ -0.0339 & 0.0339 \\ -0.0339 & 0.0339 \\ -0.0339 & 0.0339 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Y } D'_{1,1} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Z } D'_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.0128 & -0.0128 \\ 0.0208 & 0.0208 \\ 0.0653 & 0.0653 \\ 0.0208 & 0.0208 \\ -0.0128 & -0.0128 \end{bmatrix}$$

ส่วน control mesh รายละเอียดพื้นผิว $D^2_{1,1}$

$$\text{mesh X } D^2_{1,1} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Y } D^2_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.0339 & -0.0339 & -0.0339 & -0.0339 & -0.0339 \\ 0.0339 & 0.0339 & 0.0339 & 0.0339 & 0.0339 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Z } D^2_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.0128 & 0.0208 & 0.0653 & 0.0208 & -0.0128 \\ -0.0128 & 0.0208 & 0.0653 & 0.0208 & -0.0128 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้เผยแพร่ข้อมูลนี้ไปยังผู้อื่นโดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสาร

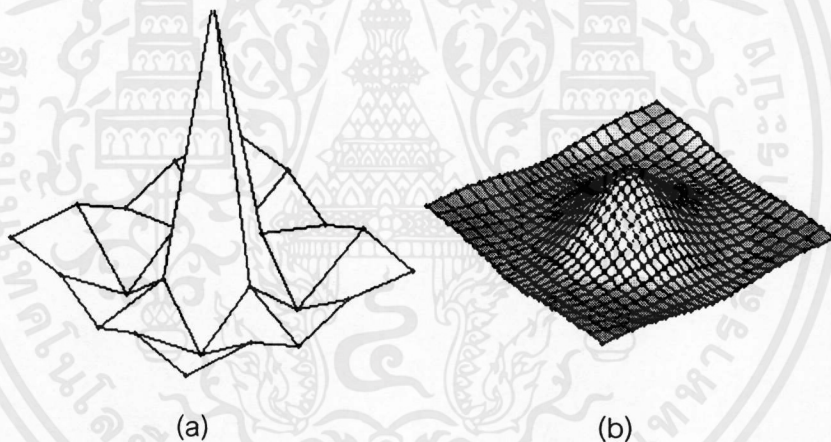
ส่วน control mesh รายละเอียดพื้นผิว $D_{1,1}^3$

$$\text{mesh X } D_{1,1}^3 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Y } D_{1,1}^3 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\text{mesh Z } D_{1,1}^3 = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

ค่าเมตริกซ์ control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{1,1}$ นำไปสร้างพื้นผิว B-spline ตามสมการ (5.1) โดยใช้ open knot vector $n = 3$, $L = 2$ แสดงในรูปที่ 6.4



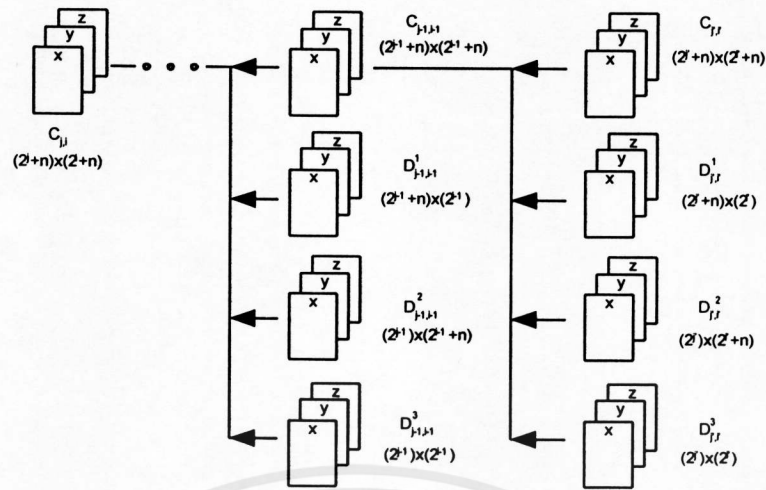
รูปที่ 6.4 control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียด $j=1$, $i=1$

(a) control mesh $C_{1,1}$

(b) พื้นผิว B-spline อันดับขั้นที่ 3 จากการใช้ control mesh $C_{1,1}$

6.2.2 การรวมกลับพื้นผิว (Reconstruction)

หลังจากทราบหลักการแตกกระจายพื้นผิวจากระดับความละเอียดสูงสู่ระดับความละเอียดที่ต่ำกว่าดังที่กล่าวในหัวข้อที่ผ่านมา จะต้องทำการแตกกระจาย mesh X, mesh Y และ mesh Z ดังนั้นในการรวมกลับพื้นผิวก็ต้องรวมกลับของแต่ละ mesh เช่นกัน จากระดับความละเอียดต่ำสู่ระดับความละเอียดที่สูงกว่าตามสมการ(5.9) ซึ่งเขียนแสดงในรูปที่6.5 ค่าเมตริกซ์วิเคราะห์ P และ Q พิจารณาจากภาคผนวก ก

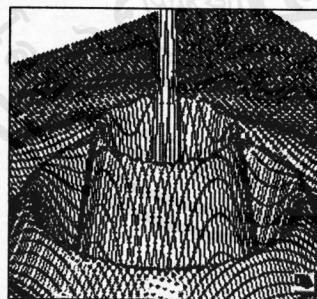


รูปที่ 6.5 การรวมกลับ control mesh ของพื้นผิว

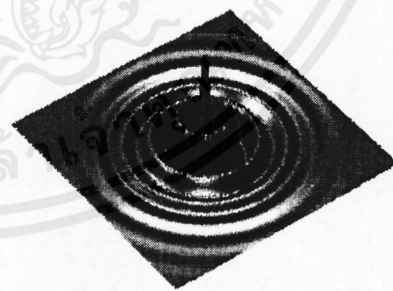
6.3 การทดลองแตกกระจายพื้นผิวและประมาณพื้นผิว

6.3.1 การทดลองประมาณพื้นผิวที่มี control mesh ได้จากการสุ่มตัวอย่างจากสมการคณิตศาสตร์

กำหนด control mesh ของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดเป็น $C_{7,7}(131 \times 131)$ ได้จากการสุ่มตัวอย่างในลักษณะ uniform จากสมการ $f(x,y) = e^{-r} \cos(5r)$ เมื่อ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ในทิศทาง x และ y มีขอบเขตอยู่ระหว่าง $[-2\pi, 2\pi]$ นำ control mesh นี้ไปสร้างพื้นผิว B-spline แสดงดังรูปที่ 6.6



(a)



(b)

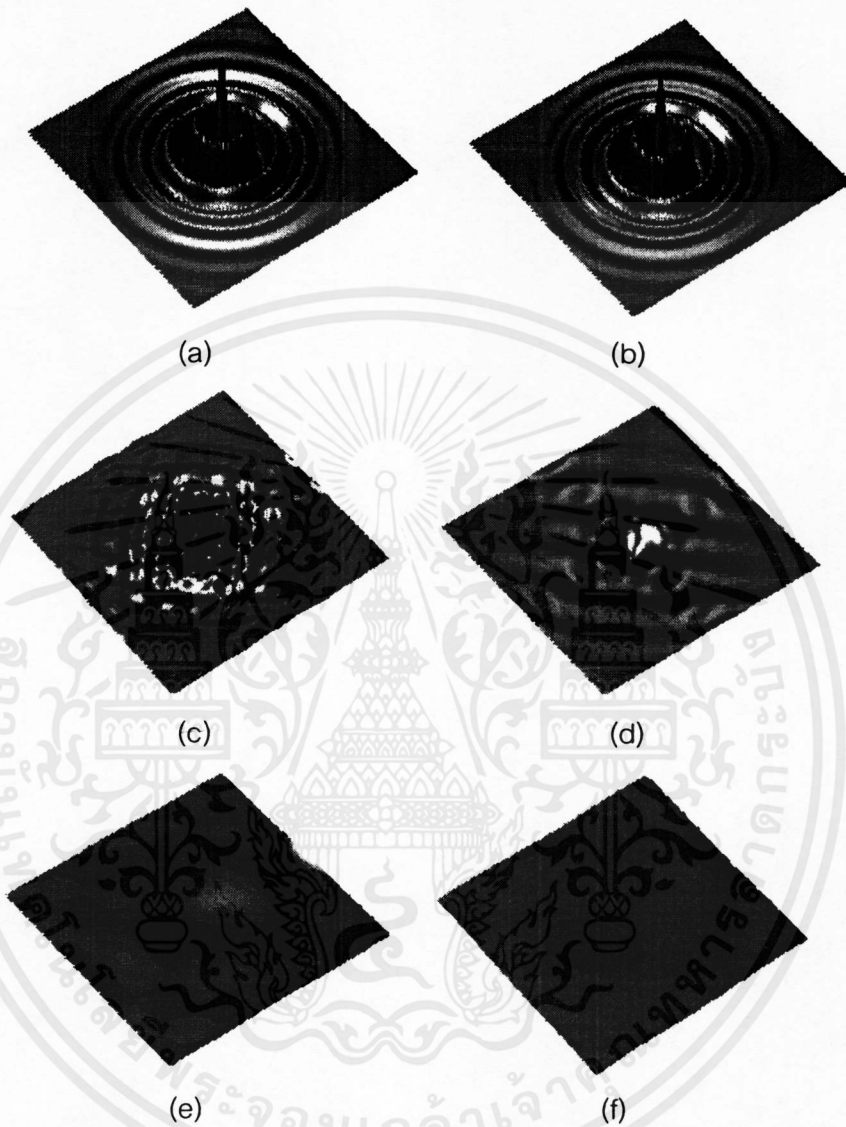
รูปที่ 6.6 control mesh ที่ได้จากการสุ่มจากฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{-r} \cos(5r)$

(a) ภาพระยะใกล้ของ control mesh $C_{7,7}$

(b) พื้นผิว B-spline ที่ใช้ $C_{7,7}$ เป็น control mesh

ผลการแตกกระจายพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ ส่วนประมาณพื้นผิว B-spline แสดงดังรูปที่ 6.7 และ control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{2,2}$, $C_{1,1}$ ดังรูปที่ 6.8

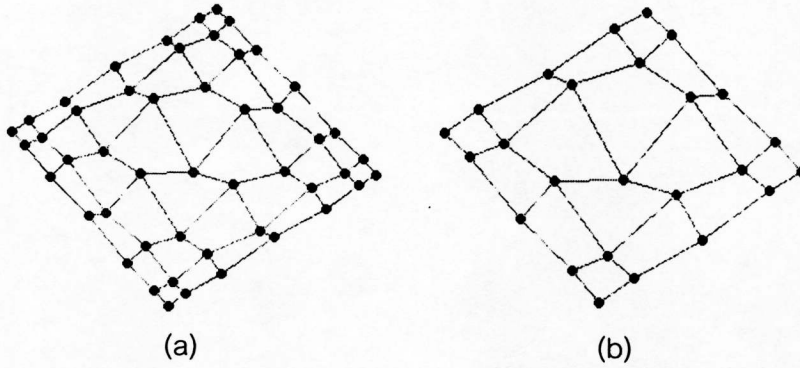
หมายเหตุ การกล่าวว่า พื้นผิวB-splineที่ระดับความละเอียด j ,ในที่นี้จะหมายถึงพื้นผิวB-spline ที่ได้รับการใช้ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{j,i}$ เป็นcontrol mesh



รูปที่ 6.7 พื้นผิวB-splineที่เกิดจากcontrol meshส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ

- (a) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=6, i=6$
- (b) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=5, i=5$
- (c) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=4, i=4$
- (d) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=3, i=3$
- (e) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=2, i=2$
- (f) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=1, i=1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.8 control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ

(a) control mesh $C_{2,2}$

(b) control mesh $C_{1,1}$

จากรูปที่ 6.7 จะพบว่าพื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียดต่ำๆ จะมีลักษณะราบเรียบกว่าพื้นผิวระดับความละเอียดที่สูงกว่า หรืออาจกล่าวได้ว่าการแตกกระจายพื้นผิวเป็นการทำให้พื้นผิวราบเรียบ ทั้งนี้เนื่องจาก control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่ำๆ จะมีจำนวนน้อยเช่นระดับ $j=2, i=2$ $C_{2,2}$ จะเป็นเมตริกซ์ขนาดเท่ากับ (7×7) ระดับความละเอียด $j=1, i=1$ $C_{1,1}$ มีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ (5×5) เมื่อนำไปสร้างพื้นผิว B-spline จึงมีลักษณะราบเรียบ ที่ระดับความละเอียด j, i ใดๆ ส่วนรายละเอียดพื้นผิว $D^1_{j,i}, D^2_{j,i}, D^3_{j,i}$ จะเก็บผลต่างระหว่าง control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{j+1,i+1}$ กับ $C_{j,i}$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับเมตริกซ์โคเวอเรียนซ์ตามสมการ (5.10)

พื้นผิวในการทดลองนี้เป็นพื้นผิวที่มีลักษณะวางอยู่บนระนาบ X-Y ดังนั้นการพิจารณาผลกระทบของส่วนรายละเอียดพื้นผิวต่อทิศทางความสูง (แกน Z) ทำได้ดังนี้

พิจารณาการรวมกลับ control mesh ของพื้นผิวจากระดับความละเอียด $j-1, i-1$ สู่ระดับความละเอียด j, i ตามสมการ (6.1)

$$C_{j,i} = P_j C_{j-1,i-1} (P_i)^T + P_j D^1_{j-1,i-1} (Q_i)^T + Q_j D^2_{j-1,i-1} (P_i)^T + Q_j D^3_{j-1,i-1} (Q_i)^T \quad (6.1)$$

$$\text{กำหนด } C^{\text{App}}_{j,i} = P_j C_{j-1,i-1} (P_i)^T$$

$$C^1_{j,i} = P_j D^1_{j-1,i-1} (Q_i)^T$$

$$C^2_{j,i} = Q_j D^2_{j-1,i-1} (P_i)^T$$

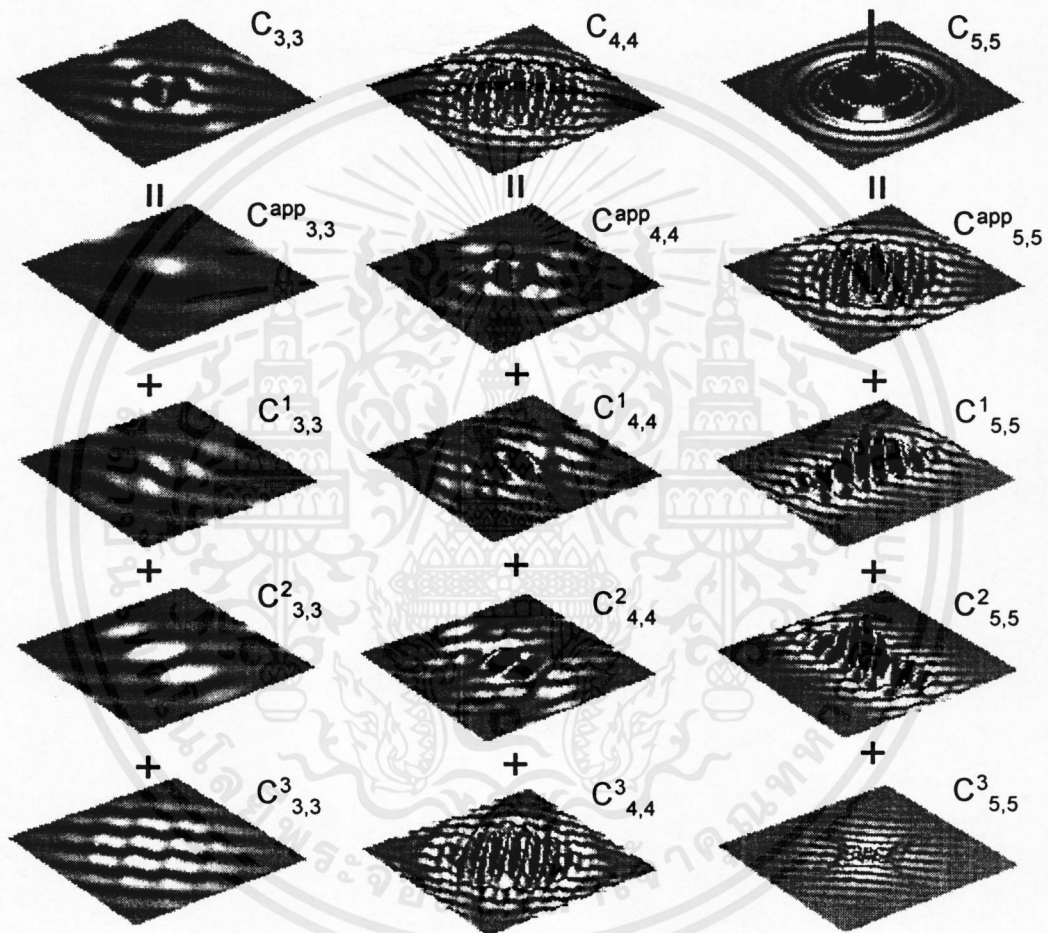
$$C^3_{j,i} = Q_j D^3_{j-1,i-1} (Q_i)^T$$

ซึ่งจะพบว่า control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{j,i}$ จะถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนด้วยกัน

$$C_{j,i} = C^{\text{App}}_{j,i} + C^1_{j,i} + C^2_{j,i} + C^3_{j,i} \quad (6.2)$$

การตัด control mesh ส่วนใดส่วนหนึ่งทิ้งไป(การกำหนดให้เป็นเมตริกซ์ศูนย์) ที่ระดับ $j-1$, $i-1$ ก็จะมีผลกระทบต่อ control mesh ส่วนประมาณที่ระดับ j,i ($C_{j,i}$) เช่น สมมุติที่ระดับความละเอียด $j-1$, $i-1$ กำหนดให้ $D^3_{j-1,i-1}$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์ ผลกระทบต่อ control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียด j,i คือเทอม $C^3_{j,i}$ จะหายไปจากสมการ(6.2)

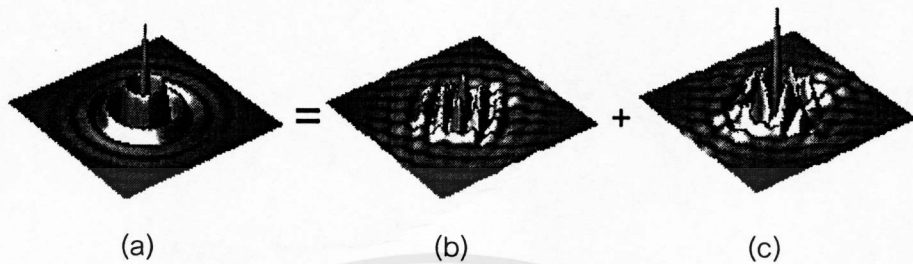
สำหรับพื้นผิวในการทดลองนี้จะใช้วิธีการที่กล่าวมากับ mesh Z เท่านั้น เพื่อสังเกตผลกระทบของรายละเอียดพื้นผิวต่อความสูง(แกน Z) ของพื้นผิว ผลการทดลองแสดงดังรูปที่ 6.9



รูปที่ 6.9 พื้นผิวB-splineแสดงอิทธิพลของรายละเอียดพื้นผิวต่อส่วนประมาณของพื้นผิว

ต่อไปพิจารณาผลกระทบเฉพาะรายละเอียดพื้นผิวดั้งแต่ระดับความละเอียด $j=4, i=4$ จนถึงระดับความละเอียด $j=6, i=6$ ต่อระดับความละเอียดสูงสุด โดยการกำหนดให้เมตริกซ์ control mesh Z ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{4,4}$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์ จากนั้นรวมกลับ control mesh สู่ระดับความละเอียดสูงสุด และผลกระทบเฉพาะส่วนประมาณพื้นผิว $C_{4,4}$ ต่อระดับความละเอียดสูงสุดทำได้โดยกำหนด control mesh Z ส่วนรายละเอียดพื้นผิว (D^1, D^2, D^3) ทุกระดับความละเอียดเป็น

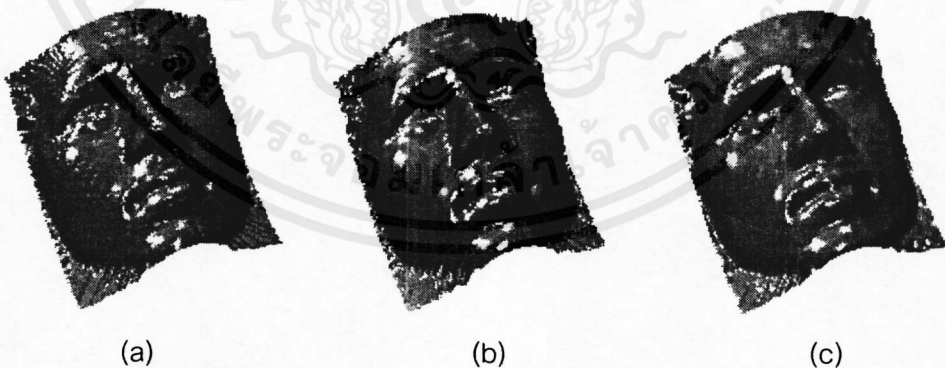
เมตริกซ์ศูนย์ จากนั้นรวม control mesh กลับสู่ระดับความละเอียดสูงสุด ผลการทดลองแสดงในรูปที่ 6.10



รูปที่ 6.10 อิทธิพลของส่วนประมาณพื้นผิวและรายละเอียดพื้นผิวต่อพื้นผิวระดับความละเอียดสูงสุด (a)พื้นผิว B-spline ต้นฉบับ (b)-(c)พื้นผิว B-splineระดับความละเอียดสูงสุด ได้จากการรวมกลับเฉพาะ control mesh $C_{4,4}$ และการรวมกลับเฉพาะ control mesh ส่วนรายละเอียดพื้นผิวเริ่มจากระดับ $j=4, i=4$ ถึง $j=6, i=6$ ตามลำดับ

6.3.2 การทดลองประมาณพื้นผิวรูปหน้า

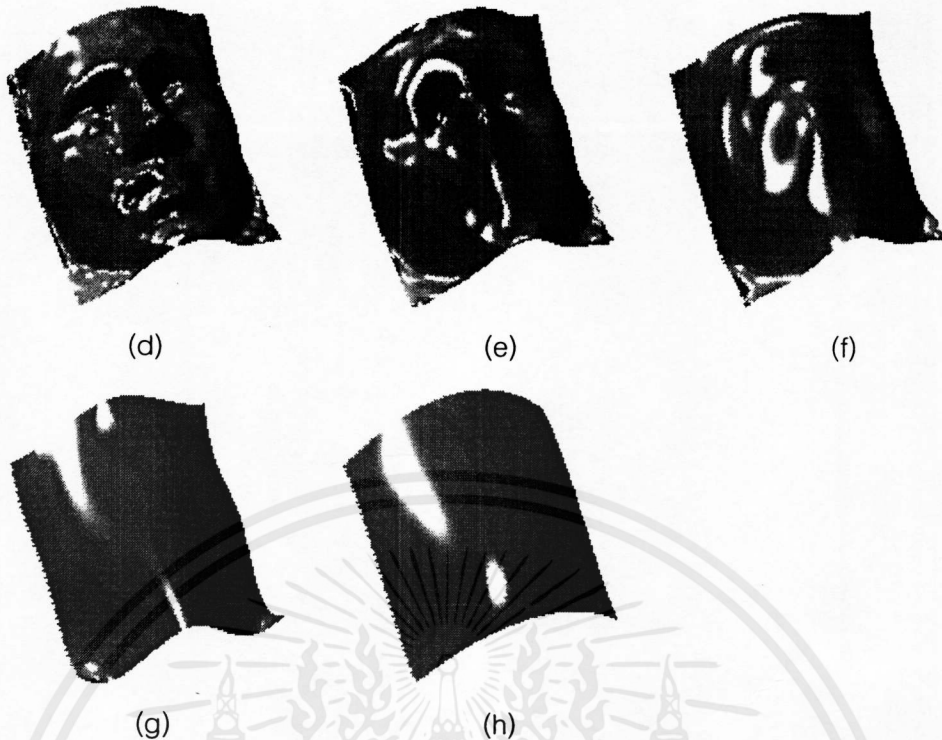
การทดลองประมาณพื้นผิวรูปหน้าที่มีระดับความละเอียด $C_{7,7}$ control mesh มีขนาด (131×131) ผลการทดลองประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆแสดงดังรูปที่ 6.11 ผลกระทบของส่วนประมาณพื้นผิว $C_{3,3}$ และส่วนรายละเอียดของพื้นผิวดังแต่ระดับความละเอียด $j=3, i=3$ ถึงระดับความละเอียด $j=6, i=6$ ต่อระดับความละเอียดสูงสุดแสดงดังรูปที่ 6.12



รูปที่ 6.11 การประมาณพื้นผิวรูปหน้าที่ระดับความละเอียดต่างๆ

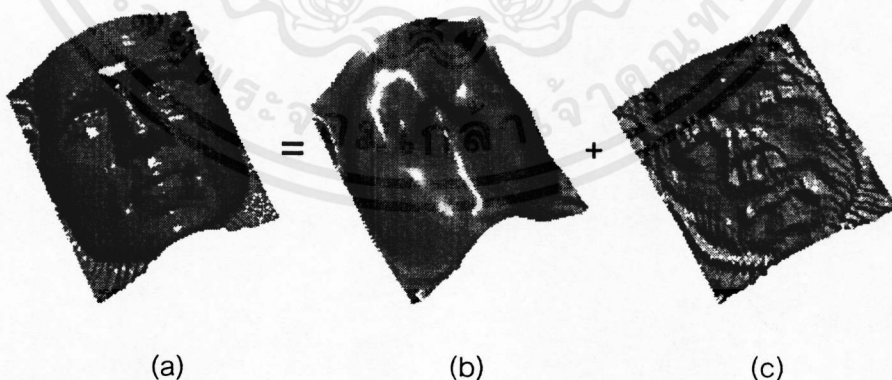
(a)พื้นผิว B-spline ต้นฉบับที่ระดับความละเอียด $j=7, i=7$ (b) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=6, i=6$ (c) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=5, i=5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาวิจัยเท่านั้น ไม่ควรนำเอกสารนี้ไปใช้ในการค้าหรือการโฆษณาอื่นใดโดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสาร



รูปที่ 6.11 (ต่อ) การประมาณพื้นผิวรูปหน้าที่ระดับความละเอียดต่างๆ

- (d) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=4, i=4$
- (e) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=3, i=3$
- (f) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=2, i=2$
- (g) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=1, i=1$
- (h) พื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด $j=0, i=0$



รูปที่ 6.12 อิทธิพลของส่วนประมาณพื้นผิวและส่วนรายละเอียดพื้นผิวต่อพื้นผิวรูปหน้าที่ระดับความ

ละเอียดสูงสุด (a) พื้นผิว B-spline ต้นฉบับ (b) พื้นผิว B-spline ได้จากการรวมกลับ

เฉพาะ control mesh $C_{3,3}$ (c) พื้นผิว B-spline ได้จากการรวมกลับเฉพาะ control

mesh ส่วนรายละเอียดพื้นผิวเริ่มจากระดับ $j=3, i=3$ ถึง $j=6, i=6$

6.3.3 การประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดทศนิยม

จากการทดลองที่ผ่านมาจะเป็นการประมาณพื้นผิวภาพสามมิติที่ระดับความละเอียดจำนวนเต็ม เช่น $(j=6, i=6)$, $(j=5, i=5)$, ..., $(j=0, i=0)$ ซึ่งจะพบว่าการลดลงของ control mesh ครั้งละสองเท่าในลักษณะของ Octave (ในแต่ละทิศทาง) ซึ่งค่อนข้างจะหายากเกินไปทำให้พื้นผิวระหว่างระดับความละเอียดจำนวนเต็มไม่สามารถแสดงได้ ในการแสดงพื้นผิวระหว่างระดับความละเอียดจำนวนเต็มในทางปฏิบัติ สามารถใช้หลักการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น เข้ามาช่วยดังนี้

กำหนดให้พื้นผิวที่ระดับความละเอียด $j'+u$, $i'+u$ เป็นพื้นผิวที่เกิดจากการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นระหว่างพื้นผิวระดับความละเอียด j', i' และ $j'+1, i'+1$ ดังนี้

$$S_{j'+u, i'+u}(x_1, x_2) = (1-u)S_{j', i'}(x_1, x_2) + uS_{j'+1, i'+1}(x_1, x_2) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j'+1}(x_1)C_{j'+u, i'+u}(\Phi_{i'+1}(x_2))^T &= (1-u)\Phi_{j'}(x_1)C_{j', i'}(\Phi_{i'}(x_2))^T + u\Phi_{j'+1}(x_1)C_{j'+1, i'+1}(\Phi_{i'+1}(x_2))^T \\ &= (1-u)\Phi_{j'+1}(x_1)P_{j'+1}C_{j', i'}(\Phi_{i'+1}(x_2)P_{i'+1})^T + u\Phi_{j'+1}(x_1)C_{j'+1, i'+1}(\Phi_{i'+1}(x_2))^T \end{aligned} \quad (6.4)$$

ดังนั้นจะได้
$$C_{j'+u, i'+u} = (1-u)P_{j'+1}C_{j', i'}(P_{i'+1})^T + uC_{j'+1, i'+1} \quad (6.5)$$

โดยการเปลี่ยนดัชนี j, i ในสมการ (5.9) เป็น $j'+1$ และ $i'+1$ ตามลำดับ จากนั้นแทนลงในสมการ (6.5)

$$\begin{aligned} C_{j'+u, i'+u} &= (1-u)P_{j'+1}C_{j', i'}(P_{i'+1})^T + u(P_{j'+1}C_{j', i'}(P_{i'+1})^T + P_{j'+1}D^1_{j', i'}(Q_{i'+1})^T \\ &\quad + Q_{j'+1}D^2_{j', i'}(P_{i'+1})^T + Q_{j'+1}D^3_{j', i'}(Q_{i'+1})^T) \end{aligned}$$

หรือ
$$C_{j'+u, i'+u} = P_{j'+1}C_{j', i'}(P_{i'+1})^T + u(P_{j'+1}D^1_{j', i'}(Q_{i'+1})^T + Q_{j'+1}D^2_{j', i'}(P_{i'+1})^T + Q_{j'+1}D^3_{j', i'}(Q_{i'+1})^T) \quad (6.6)$$

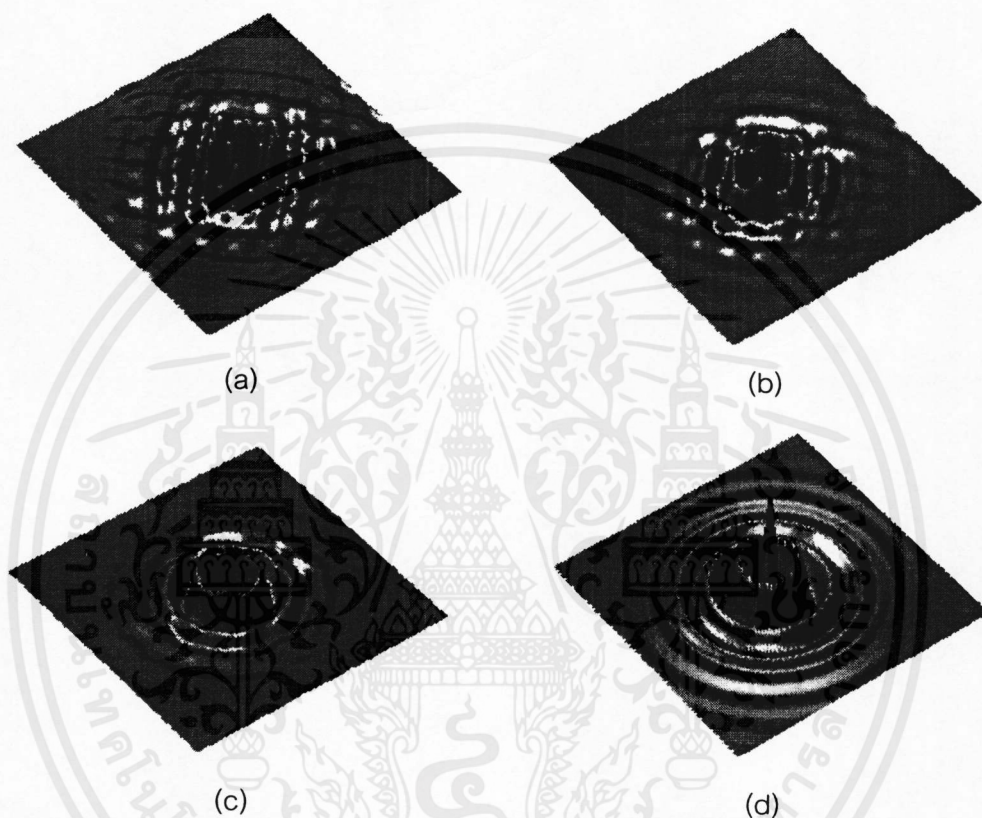
โดย $C_{j'+u, i'+u}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $(2^{i'+1}+n) \times (2^{i'+1}+n)$

u ตัวเลขจำนวนจริง มีค่าอยู่ระหว่างศูนย์ถึงหนึ่ง

6.3.4 การทดลองประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดทศนิยม

การแสดงผลการเปลี่ยนแปลงของพื้นผิวอย่างต่อเนื่อง ที่อยู่ระหว่างสองระดับความละเอียดจำนวนเต็มใดๆ ทำได้โดยใช้สมการ(6.6) ซึ่งจะให้ค่า control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดทศนิยม หลังจากได้ control mesh ก็จะสามารถสร้างพื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด

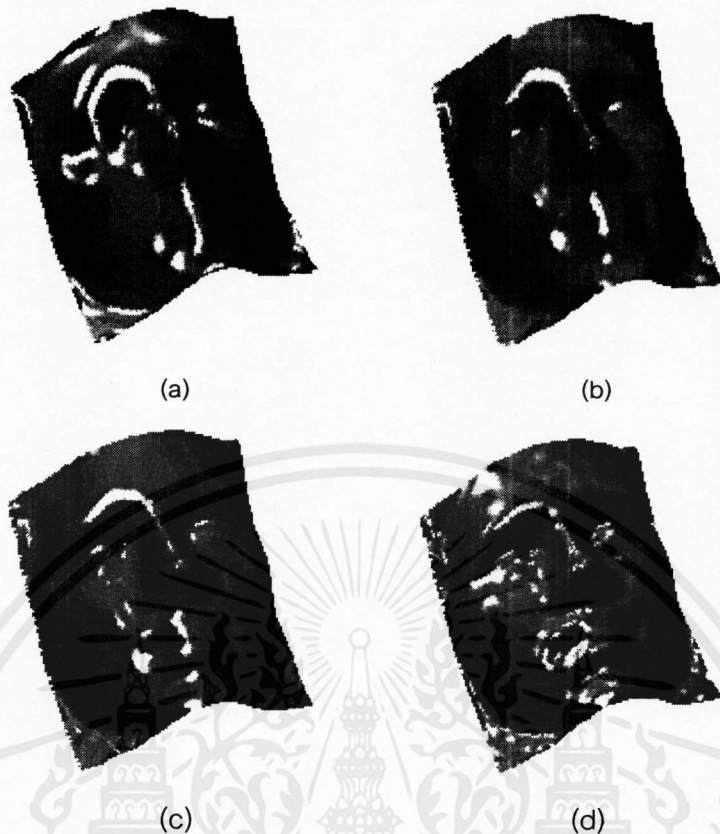
ทศนิยมได้ การทดลองนี้จะแสดงการหาพื้นผิว B-spline ระดับความละเอียดทศนิยม 4.3 , 4.7 ซึ่งเป็นพื้นผิวที่อยู่ระหว่างพื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j=5, i=5$ กับ $j=4, i=4$ control mesh ต้นฉบับ ใช้ตามการทดลอง 6.3.1 และหาพื้นผิว B-spline ที่ระดับความละเอียด 3.5 , 3.75 ซึ่งเป็นพื้นผิวที่อยู่ระหว่างพื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j=4, i=4$ กับ $j=3, i=3$ control mesh ต้นฉบับใช้ตามการทดลอง 6.3.2 ผลการทดลอง แสดงในรูปที่ 6.13 และรูปที่ 6.14



รูปที่ 6.13 พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียดทศนิยม 4.3 และ 4.7

- (a) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j=4, i=4$
- (b) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j=4.3, i=4.3$
- (c) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j=4.7, i=4.7$
- (d) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j=5, i=5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



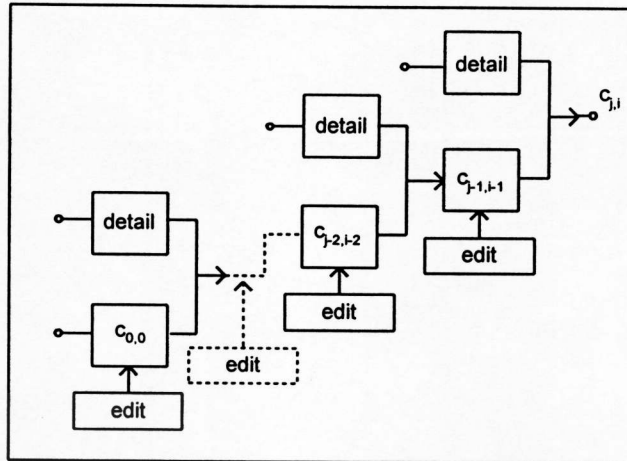
รูปที่ 6.14 พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียดทศนิยม 3.5 และ 3.75

- (a) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j = 3, i = 3$
- (b) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j = 3.5, i = 3.5$
- (c) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j = 3.75, i = 3.75$
- (d) พื้นผิว B-spline ระดับความละเอียด $j = 4, i = 4$

6.4 การทดลองแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิว

การแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวจะเป็นการเปลี่ยนโครงสร้างรวมของพื้นผิวให้เป็นไปตามที่ต้องการโดยยังคงรายละเอียดของพื้นผิวอยู่ จากวิธีการเดิมที่ต้องหาสมการประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดใหม่แล้วรวมเข้ากับสมการรายละเอียดของพื้นผิวเดิม แต่วิธีเวฟเล็ตจะมีรูปแบบการแก้ไขส่วนประมาณของพื้นผิวหรือโครงพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ แสดงในรูปที่ 6.15 ซึ่งจะเห็นว่าส่วนรายละเอียดพื้นผิวจะไม่ถูกแก้ไขแต่จะเป็นการแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆแทน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.15 รูปแบบการแก้ไขส่วนประมาณของพื้นผิว

หลังจากแตกกระจาย control mesh ของพื้นผิวจากระดับความละเอียดสูงสุด $C_{j,i}$ สู่ระดับความละเอียดที่ต่ำกว่า j', i' จะได้ $C_{j',i'}, D_{j',i'}^1, D_{j',i'}^2, D_{j',i'}^3$ ถ้า control mesh ของส่วนประมาณพื้นผิว $C_{j',i'}$ มีการแก้ไขเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม กำหนดให้เป็น $C_{j',i'} + \Delta C_{j',i'}$ ผลกระทบต่อ control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงกว่าพิจารณาดังนี้

จากสมการรวมกลับ control mesh ของพื้นผิว พิจารณาการรวมกลับจากระดับความละเอียด j', i' สู่ระดับความละเอียด $j'+1, i'+1$ จะได้ control mesh ใหม่ ใช้สัญลักษณ์ $\hat{C}_{j'+1,i'+1}$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{j'+1,i'+1} &= P_{j'+1}(C_{j',i'} + \Delta C_{j',i'})(P_{j'+1})^T + P_{j'+1}D_{j',i'}^1(Q_{j'+1})^T + Q_{j'+1}D_{j',i'}^2(P_{j'+1})^T + Q_{j'+1}D_{j',i'}^3(Q_{j'+1})^T \\ &= C_{j'+1,i'+1} + P_{j'+1}(\Delta C_{j',i'})(P_{j'+1})^T\end{aligned}\quad (6.7)$$

จะเห็นได้ว่าการแก้ไข control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับ j', i' จะมีผลกระทบต่อ control mesh ที่ระดับความละเอียดสูงกว่าด้วยเทอม $P_{j'+1}\Delta C_{j',i'}(P_{j'+1})^T$ และจะมีผลกระทบต่อ control mesh ที่ระดับความละเอียดสูงสุด $C_{j,i}$ กำหนดเป็น $\hat{C}_{j,i}$

$$\hat{C}_{j,i} = C_{j,i} + P_j \dots P_{j+2}P_{j+1}(\Delta C_{j',i'})(P_{j'+1})^T(P_{j'+2})^T \dots (P_j)^T \quad (6.8)$$

6.4.1 การทดลองแก้ไข control mesh ที่อยู่บนระนาบเดียวกัน

กำหนด control mesh ของพื้นผิวอยู่บนระนาบ X-Y มีระดับความละเอียดสูงสุด $j=4, i=4$

ลักษณะ control mesh แสดงดังรูปที่ 6.16 การทดลองแบ่งออกเป็น 4 รูปแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาวิจัยเท่านั้น ไม่ควรนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. แดกกระจาย control mesh สู่ระดับความละเอียด $j=0$, $i=0$ และเคลื่อนย้าย control mesh บางส่วนของส่วนประมาณพื้นผิว $C_{0,0}$ ไปยังตำแหน่งใหม่ จากนั้นรวม control mesh กลับสู่ระดับความละเอียดสูงสุด

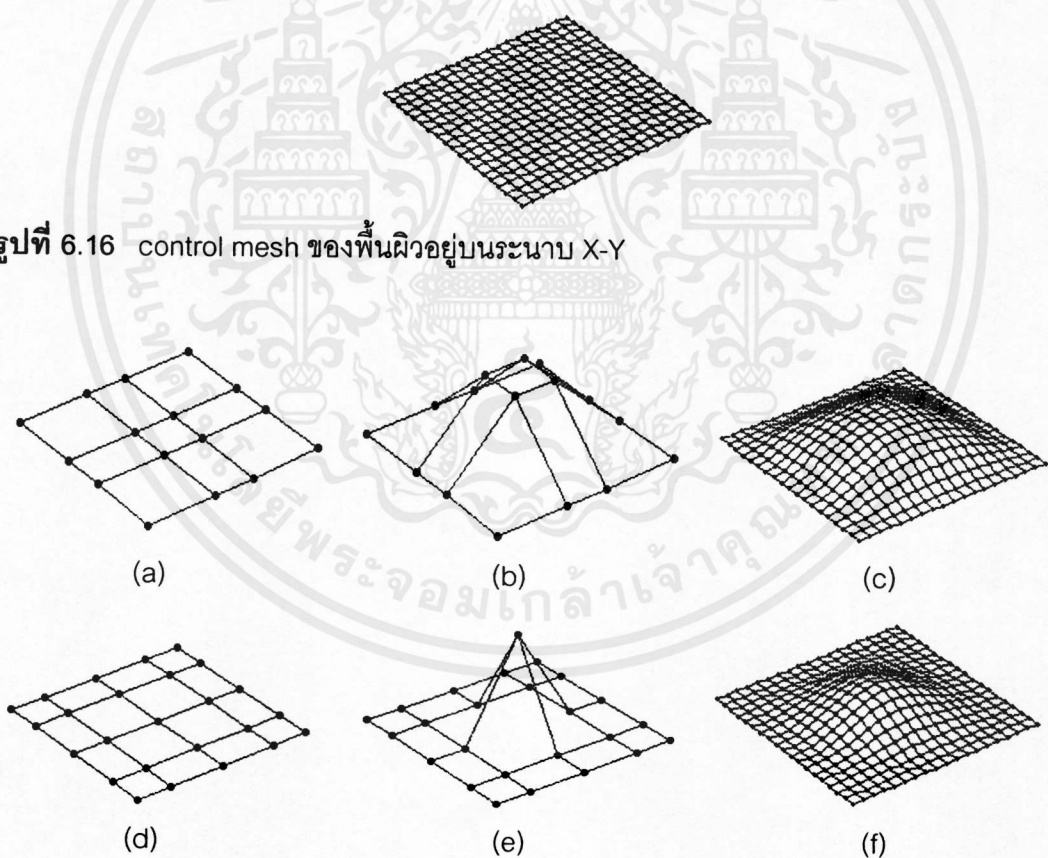
2. แดกกระจาย control mesh สู่ระดับความละเอียด $j=1$, $i=1$ และเคลื่อนย้าย control mesh ส่วนประมาณพื้นผิว $C_{1,1}$ บริเวณกึ่งกลางพื้นผิวไปยังตำแหน่งใหม่ จากนั้นรวม control mesh กลับสู่ระดับความละเอียดสูงสุด

3. แดกกระจาย control mesh สู่ระดับความละเอียด $j=2$, $i=2$ หลังจากนั้นทำเช่นเดียวกับข้อ 2

4. แดกกระจาย control mesh สู่ระดับความละเอียด $j=3$, $i=3$ หลังจากนั้นทำเช่นเดียวกับข้อ 2

ผลการทดลองแสดงดังรูปที่ 6.17

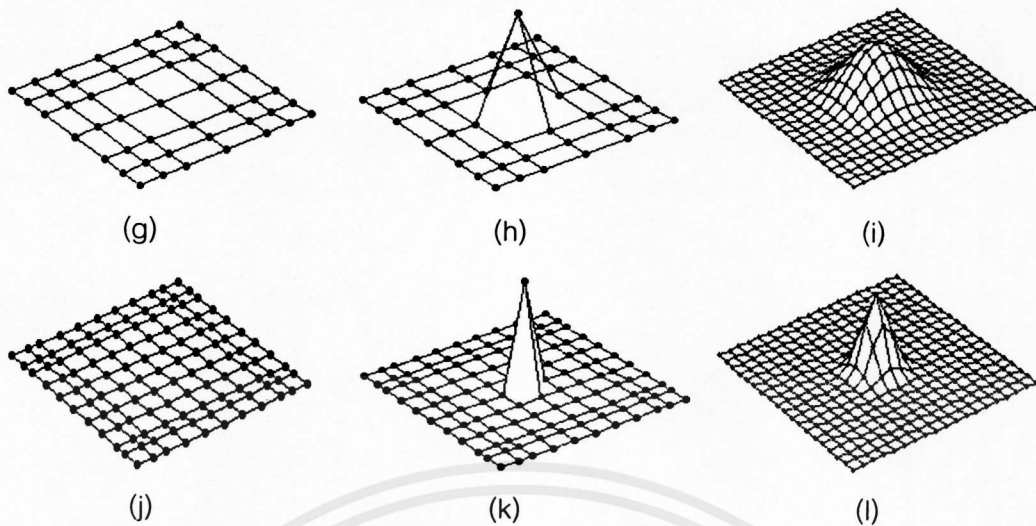
รูปที่ 6.16 control mesh ของพื้นผิวอยู่บนระนาบ X-Y



รูปที่ 6.17 การแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิว

เอกสารนี้เป็นเอกสารเพื่อการศึกษานานาชาติ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น

(a) control mesh $C_{0,0}$ (b) $C_{0,0}$ ถูกแก้ไข (c) control mesh ระดับความละเอียดสูงสุด
(d) control mesh $C_{1,1}$ (e) $C_{1,1}$ ถูกแก้ไข (f) control mesh ระดับความละเอียดสูงสุด



รูปที่ 6.17 (ต่อ)การแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิว

(g) control mesh $C_{2,2}$ (h) $C_{2,2}$ ถูกแก้ไข (i) control mesh ระดับความละเอียดสูงสุด

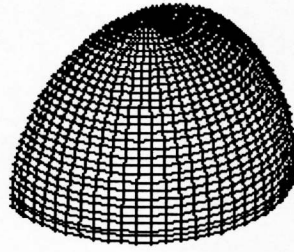
(j) control mesh $C_{3,3}$ (k) $C_{3,3}$ ถูกแก้ไข (l) control mesh ระดับความละเอียดสูงสุด

จากผลการทดลองรูปที่ 6.17 สรุปได้ว่าการแก้ไข control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ จะส่งผลกระทบต่อโครงร่างโดยรวมของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงกว่า ในขณะที่การแก้ไขที่ระดับความละเอียดสูงๆ จะมีผลกระทบต่อรายละเอียดพื้นผิวรอบๆ บริเวณจุดที่แก้ไข ดังนั้นถ้าต้องการเปลี่ยนลักษณะโครงร่างโดยรวมของพื้นผิว(โดยที่มีผลกระทบต่อรายละเอียดพื้นผิวน้อยที่สุด) ก็เพียงแค่แตกกระจายพื้นผิวสู่ระดับความละเอียดต่ำๆ(ซึ่งจะมีจำนวน control mesh น้อย)และแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิว จากนั้นรวมกลับ control mesh สู่ระดับความละเอียดที่สูงกว่า ก็จะได้โครงร่างโดยรวมของพื้นผิวเปลี่ยนแปลงไป จะเห็นว่าสะดวกกว่าการแก้ไข control mesh ที่ระดับความละเอียดสูงสุดโดยตรงเพราะสามารถเลือกแก้ไขที่ระดับความละเอียดต่างๆ ได้และไม่ต้องหาสมการพื้นผิว

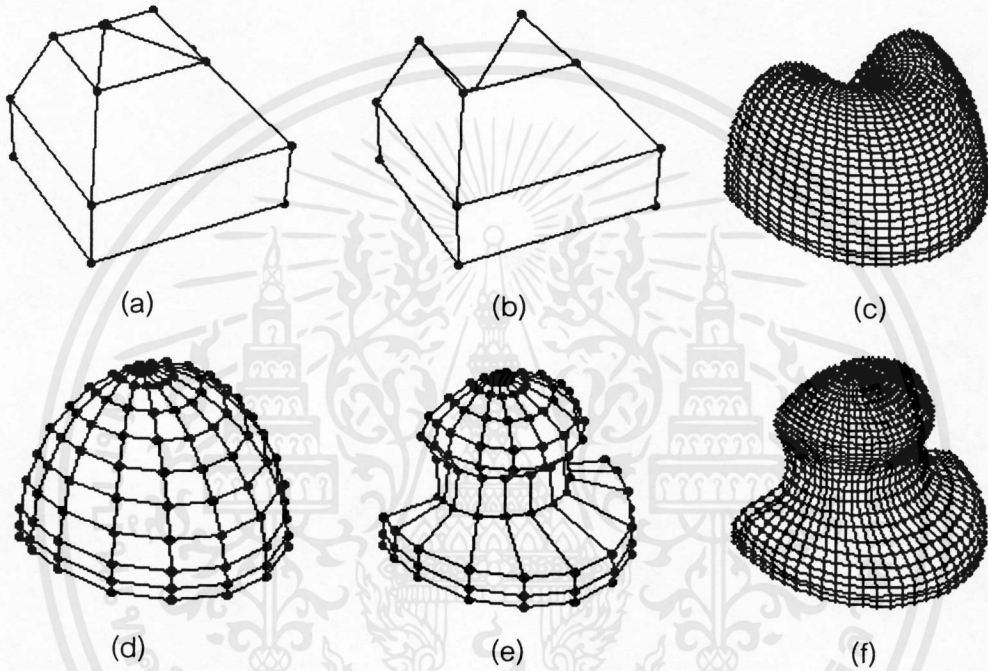
6.4.2 การทดลองแก้ไข control mesh ที่มีลักษณะโค้ง

control mesh ลักษณะโค้งมีระดับความละเอียดสูงสุดเป็น $j=5, i=5$ (35×35) แสดงดังรูปที่ 6.18 ผลการทดลองแก้ไข control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียด $j=0, i=0$ และ $j=3, i=3$ แสดงดังรูปที่ 6.19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.18 control mesh ลักษณะโค้งตันฉบับ

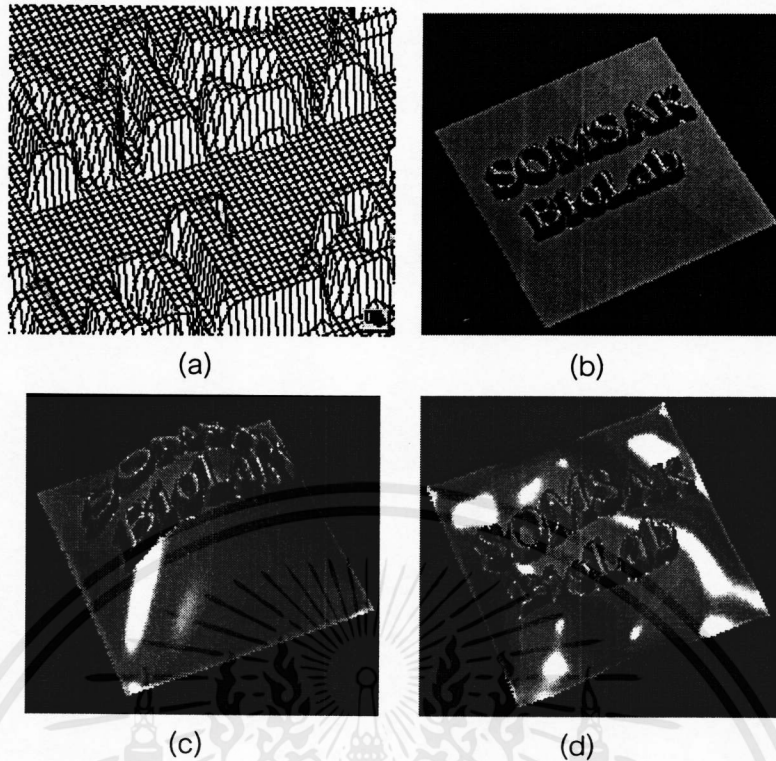


รูปที่ 6.19 ผลการแก้ไข control mesh ลักษณะโค้ง

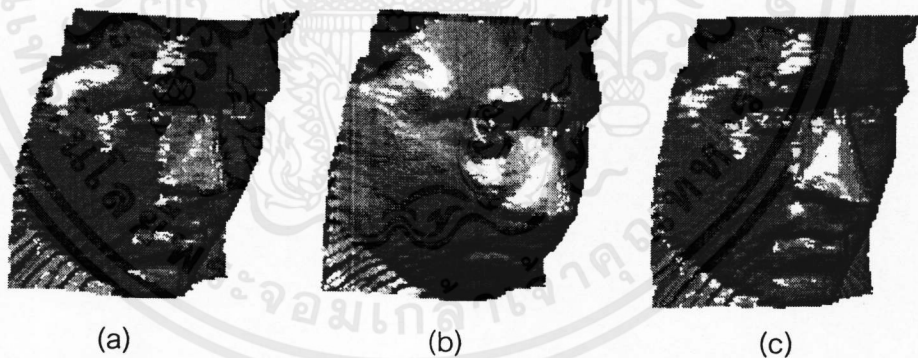
- (a) control mesh $C_{0,0}$ (b) $C_{0,0}$ ถูกแก้ไข (c) control mesh ระดับความละเอียดสูงสุด
(d) control mesh $C_{3,3}$ (e) $C_{3,3}$ ถูกแก้ไข (f) control mesh ระดับความละเอียดสูงสุด

ตัวอย่างพื้นผิวที่ได้จากการแก้ไข control mesh ส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ แสดงในรูปที่ 6.20 ซึ่งแสดงถึงการแก้ไขเฉพาะโครงร่างโดยรวมพื้นผิวในขณะที่มีผลกระทบต่อยาละเอียดพื้นผิวน้อยมาก และรูปที่ 6.21 แสดงการแก้ไขพื้นผิวรูปหน้าที่ระดับความละเอียดจำนวนเต็มและระดับความละเอียดทศนิยม โดยแก้ไขที่ระดับความละเอียดต่ำจะมีผลต่อโครงร่างรวมพื้นผิว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.20 การแก้ไขพื้นผิวข้อความ (a) ภาพระยะใกล้ของ control mesh $C_{7,7}$ (b) พื้นผิว B-spline ต้นฉบับ (c) พื้นผิว B-spline ได้จากการแก้ไข $C_{0,0}$ (d) พื้นผิว B-spline จากการแก้ไข $C_{3,3}$

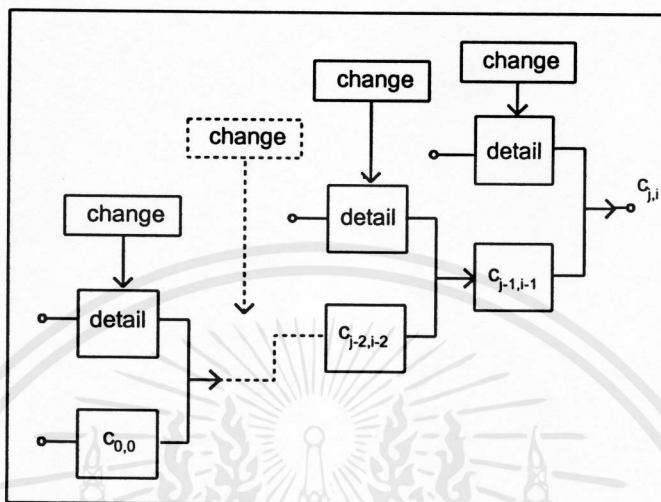


รูปที่ 6.21 การแก้ไขพื้นผิวรูปหน้า (a) พื้นผิว B-spline ต้นฉบับ (b) พื้นผิว B-spline ได้จากการแก้ไข $C_{0,0}$ (c) พื้นผิว B-spline ได้จากการแก้ไข $C_{4,8,4,8}$

6.5 การทดลองแก้ไขเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของพื้นผิว

การแก้ไขเปลี่ยนแปลงรายละเอียดพื้นผิวจะเป็นการเปลี่ยนรายละเอียดของพื้นผิวเดิมให้เป็นแบบใหม่โดยยังคงโครงสร้างโดยรวมของพื้นผิวเดิมอยู่ จากวิธีการเดิมที่ต้องหาสมการรายละเอียดพื้นผิวใหม่จากนั้นรวมกับสมการส่วนประมาณพื้นผิวเดิม แต่วิธีการแปลงเวฟเล็ตจากกระบวนการแตกกระจายพื้นผิวที่ระดับความละเอียดใดๆ จะได้ส่วนประมาณพื้นผิวและส่วนรายละเอียดของ

พื้นผิว $D1, D2, D3$ ทำให้สามารถเปลี่ยนรายละเอียดของพื้นผิวได้ง่ายขึ้น โดยทำการเปลี่ยนกลุ่ม control mesh ส่วนรายละเอียดของพื้นผิวเดิมด้วย control mesh ส่วนรายละเอียดของพื้นผิวใหม่ที่มีการเตรียมไว้ก่อน บล็อกไดอะแกรมการเปลี่ยนรายละเอียดของพื้นผิวแสดงในรูปที่ 6.22



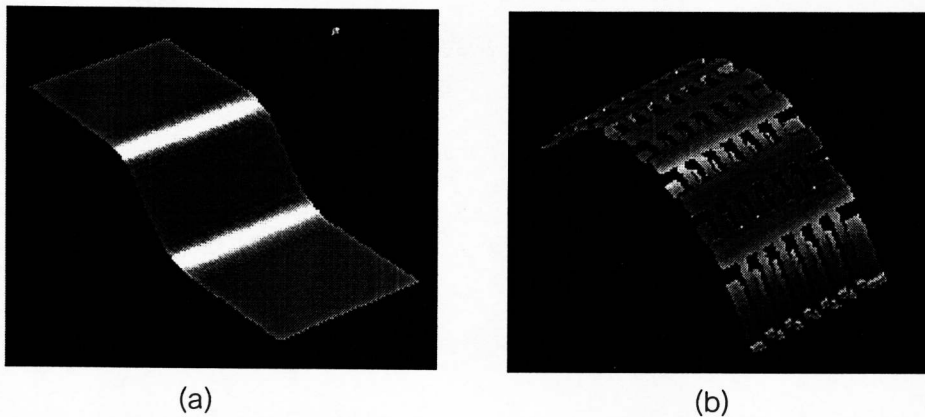
รูปที่ 6.22 รูปแบบการแก้ไขรายละเอียดของพื้นผิว

จากรูปที่ 6.22 การเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดใดๆ จะเป็นการกระทำที่เมตริกซ์ D^1, D^2, D^3 ในกรณีต้องการเปลี่ยนรายละเอียดของพื้นผิวเดิมให้เป็นแบบใหม่ทั้งหมดจะต้องเปลี่ยนค่าในเมตริกซ์ D^1, D^2, D^3 ทุกๆระดับความละเอียดให้เป็นค่าใหม่ สำหรับกรณีมีการเปลี่ยนเฉพาะบางระดับ ผลลัพธ์ที่ได้จะมีลักษณะเป็นการรวมกันระหว่างรายละเอียดของพื้นผิวเดิมกับรายละเอียดของพื้นผิวใหม่ความสัมพันธ์ตามสมการ(6.2)ขั้นตอนการเตรียมรายละเอียดของพื้นผิวใหม่จะได้จากขบวนการแตกกระจาย control mesh โดยจะเก็บ control mesh ส่วนรายละเอียดพื้นผิวไว้เป็นฐานข้อมูล

6.5.1 การทดลองเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวรูปพาราโบลา

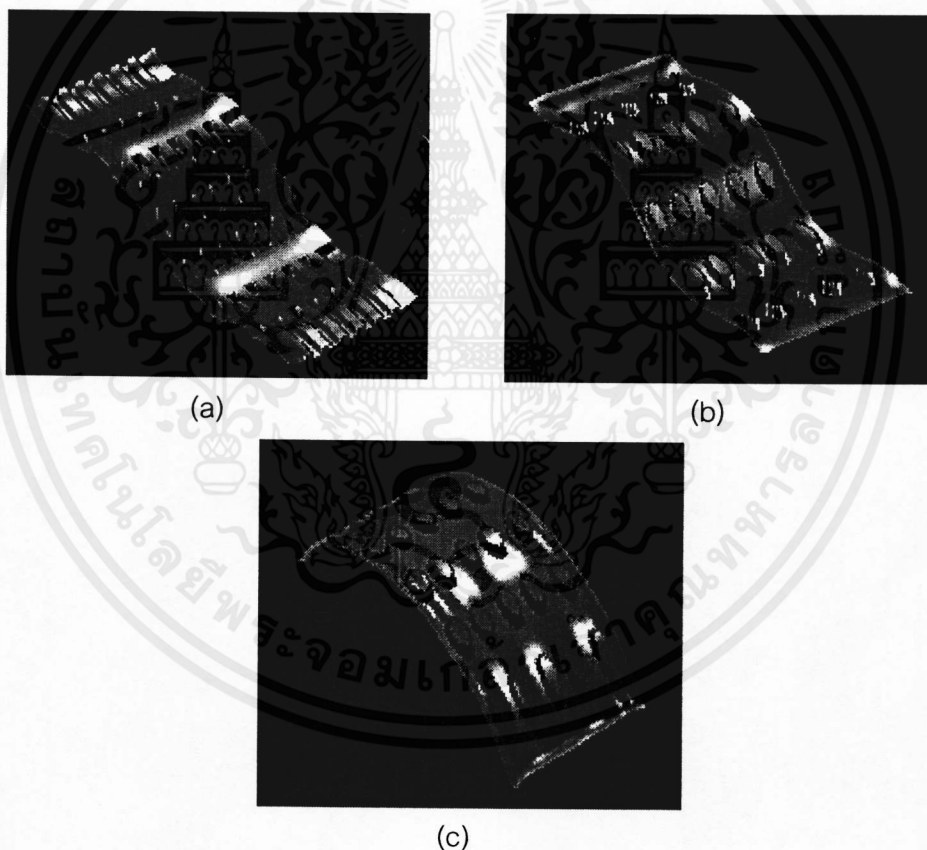
พื้นผิว B-spline ดันฉบับสองพื้นผิวมี control mesh ที่ระดับความละเอียด $j=7, i=7$ พื้นผิวแรกมีลักษณะรายละเอียดพื้นผิวราบเรียบ พื้นผิวที่สองมีลักษณะโค้งเป็นรูปพาราโบลาแสดงดังรูปที่ 6.23 ทำการแตกกระจาย control mesh ของพื้นผิวทั้งสองสู่ระดับความละเอียด $j=3, i=3$ จากนั้นเปลี่ยน control mesh ส่วนรายละเอียดพื้นผิวของพื้นผิวแรก D^1, D^2, D^3 จากระดับ $j=3, i=3$ ถึงระดับ $j=6, i=6$ ให้เป็น control mesh ส่วนรายละเอียดพื้นผิวของพื้นผิวที่สอง และรวมกับ control mesh สู่ระดับความละเอียดสูงสุดนำไปสร้างพื้นผิว B-spline แสดงดังรูปที่ 6.24

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ใช้สำหรับงานวิจัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.23 พื้นผิวB-spline ดัชนีบั๊บก่อนการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว

- (a) พื้นผิว B-spline ลักษณะรายละเอียดพื้นผิวราบเรียบ
(b) พื้นผิว B-spline ลักษณะโค้งเป็นรูปพาราโบลา



รูปที่ 6.24 พื้นผิวB-spline หลังการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว

- (a) พื้นผิว B-splineแรกที่มีรายละเอียดพื้นผิวเป็นของพื้นผิวที่สอง
(b) พื้นผิว B-splineแรกที่ได้รับการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวแบบอื่น
(c) พื้นผิว B-splineที่สองได้รับการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวแบบอื่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงชื่อของเอกสารที่นำมาใช้

6.5.2 การทดลองเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวรูปขวด

พื้นผิวB-spline ต้นฉบับสองพื้นผิวมี control mesh ที่ระดับความละเอียด $j=6, i=6$ พื้นผิวแรกเป็นรูปขวด พื้นผิวที่สองมีลักษณะเป็นรูปคล้ายสปริงแสดงดังรูปที่6.25 ทำการแตกกระจาย control mesh ของพื้นผิวทั้งสองสู่ระดับความละเอียด $j=3, i=3$ จากนั้นเปลี่ยนcontrol mesh ส่วนรายละเอียดพื้นผิวรูปขวด D^1, D^2, D^3 (เฉพาะmesh X ,mesh Y) จากระดับ $j=3, i=3$ ถึงระดับ $j=5, i=5$ ให้เป็น control mesh ส่วนรายละเอียดพื้นผิวของพื้นผิวคล้ายสปริง และรวมกับcontrol meshสู่ระดับความละเอียดสูงสุ่นำไปสร้างพื้นผิวB-spline แสดงดังรูปที่6.26



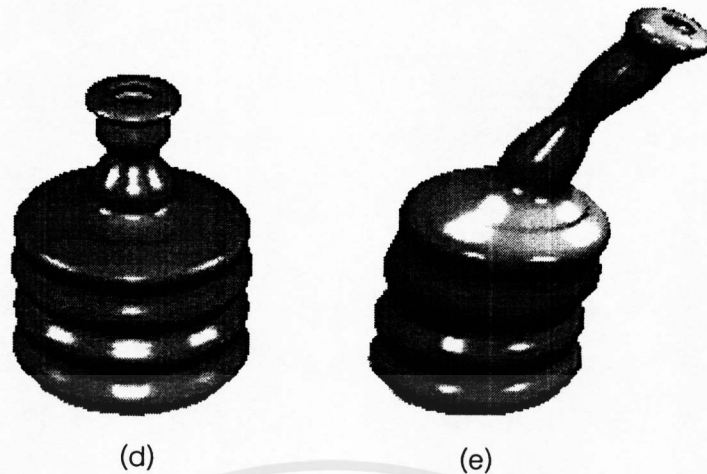
รูปที่ 6.25 พื้นผิวB-spline ต้นฉบับรูปขวดและรูปคล้ายสปริงระดับความละเอียด $j=6, i=6$



รูปที่ 6.26 ผลลัพธ์พื้นผิวB-spline รูปขวดหลังการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว

(a) พื้นผิวB-spline ระดับ $j=3, i=3$ (b) พื้นผิวB-spline ระดับ $j=4, i=4$ (c) พื้นผิวB-spline ระดับ $j=5, i=5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.26 (ต่อ)ผลลัพธ์พื้นผิวB-spline รูปวาดหลังการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว
(d) พื้นผิวB-spline ระดับ $j=6, i=6$ (e) พื้นผิวB-spline ระดับ $j=6, i=6$ (มีการแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวร่วมด้วย)



รูปที่ 6.27 ตัวอย่างพื้นผิวB-spline รูปแก้วหลังการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิว

จากการทดลองแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติทั้งหมดที่กล่าวมาจะแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้คุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดของเวฟเล็ตช่วยในการแก้ไขพื้นผิว อาจกล่าวได้ว่าเป็นการเปลี่ยนปัญหาจากการที่ต้องแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดโดยตรงมาเป็นการแก้ไขพื้นผิวส่วนย่อยๆที่ระดับความละเอียดต่ำกว่าในปริภูมิเวฟเล็ต ทำให้สามารถแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดใด ๆ ก็ได้จะเห็นว่ามีความยืดหยุ่นและสะดวกมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.6 การแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติโดยวิธี Free form deformation (FFD) [8][11][15]

วิธี FFD จะเป็นการแก้ไขเปลี่ยนแปลงรูปร่างของพื้นผิว ในลักษณะโดยรวมโดยจะจัดการกับจุด control mesh เป็นกลุ่มๆ โดยใช้อันดับขั้นของฟังก์ชันมูลฐานเดียวกัน พิจารณาลักษณะการ FFD สำหรับการเปลี่ยนรูปร่างเส้นโค้งบนระนาบ กำหนดเส้นโค้ง $Q(t)$ มีจุด $P_i(u,v)$ เป็น control point และกำหนดกรอบสี่เหลี่ยมรอบเส้นโค้ง $Q(t)$ มีขนาดกว้างหนึ่งหน่วย ยาวหนึ่งหน่วยแบ่งกรอบสี่เหลี่ยมเป็น grid ที่มีระยะห่างเท่าๆ กัน(regular grid)แทนด้วย $b_{j,i} = [J/m, I/n]^T$, $J = 0, \dots, m$; $I = 0, \dots, n$ แสดงดังรูปที่ 6.28(a) จุด grid ที่พารามิเตอร์ (u,v) ภายในกรอบสี่เหลี่ยมจะเป็นไปตามสมการ (6.9)

$$(u,v) = \sum_{J=0}^m \sum_{I=0}^n b_{j,i} B_J^m(u) B_I^n(v) \quad (6.9)$$

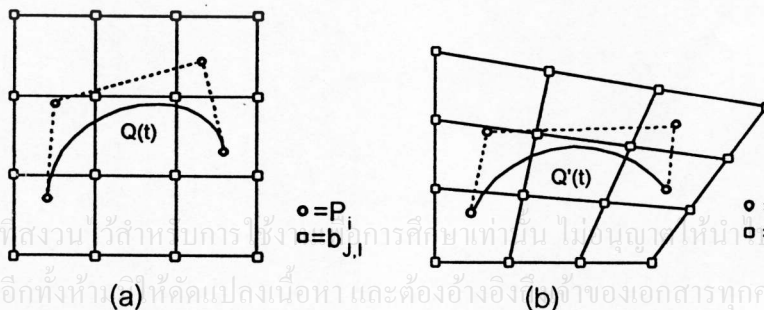
สมการ(6.9) มีพื้นฐานมาจากคุณสมบัติ linear precision ของโพลิโนเมียล Bernstein คือ

$$\sum_{J=0}^m J B_J^m(t) / m = t$$

ถ้าจุด $b_{j,i}$ ถูกแก้ไขเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม $\hat{b}_{j,i}$ ดังรูปที่ 6.28(b) จุดที่พารามิเตอร์ (u,v) จะถูกส่งไปเป็นจุดใหม่ที่พารามิเตอร์ $(\hat{u}, \hat{v})$ ตามสมการ (6.10)

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \sum_{J=0}^m \sum_{I=0}^n \hat{b}_{j,i} B_J^m(u) B_I^n(v) \quad (6.10)$$

ซึ่งจะเห็นว่าเป็นการเปลี่ยนรูปร่างของเส้นโค้งทางอ้อมคือ การเคลื่อนย้ายจุด grid $b_{j,i}$ จะทำให้รูปร่างโดยรวมของเส้นโค้งเปลี่ยนแปลงไปด้วย

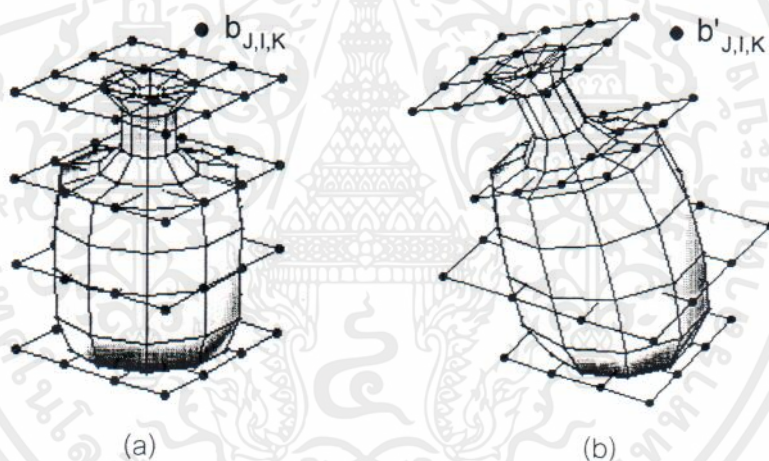


รูปที่ 6.28 FFD สำหรับการเปลี่ยนรูปร่างเส้นโค้ง (a) ก่อนการทำ FFD (b) หลังการทำ FFD

สำหรับ FFD กรณีพื้นผิวภาพสามมิติ จะต้องกำหนดลูกบาศก์รอบพื้นผิวที่จะแก้ไข การเปลี่ยนรูปร่างของพื้นผิวจะเป็นการเคลื่อนย้าย grid $b_{j,i,k}$ ของลูกบาศก์ดังรูปที่ 6.29 จากนั้นคำนวณตำแหน่ง control mesh ใหม่ ของพื้นผิวที่เปลี่ยนแปลงไป จากสมการ (6.11)

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^l \hat{b}_{j,i,k} B_j^m(u) B_i^n(v) B_k^l(w) \quad (6.11)$$

โดย $\hat{b}_{j,i,k}$ ค่า grid ของลูกบาศก์ที่ค่าดัชนี j, i, k หลังจากถูกเปลี่ยนแปลง $B_j^m(u), B_i^n(v), B_k^l(w)$ ฟังก์ชันมูลฐานโพลิโนเมียล Bernstein หรือฟังก์ชันมูลฐาน B-spline อันดับชั้นที่ m, n, l ตามลำดับ $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ ตัวแปรใช้อ้างถึงตำแหน่งภายในลูกบาศก์หลังการเปลี่ยนแปลง u, v, w ตัวแปรใช้อ้างถึงตำแหน่งภายในลูกบาศก์ก่อนการเปลี่ยนแปลง



รูปที่ 6.29 FFD สำหรับการเปลี่ยนพื้นผิวภาพสามมิติ

(a) ก่อนการทำ FFD (b) หลังการทำ FFD

การแก้ไขพื้นผิว FFD เป็นการแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุด ซึ่งจะต่างกับการแก้ไขพื้นผิวแบบหลายระดับความละเอียดที่จะทำการแตกกระจายพื้นผิวสู่ระดับความละเอียดที่ต่ำกว่า ซึ่งจะประกอบด้วยส่วนประมาณและส่วนรายละเอียดพื้นผิวจากนั้นจึงแยกแก้ไขเฉพาะแต่ละส่วนอย่างอิสระแล้วรวมกลับสู่ระดับความละเอียดที่สูงกว่าซึ่งจะสะดวกและรูปแบบการแก้ไขพื้นผิวมี

หลายลักษณะกว่าการแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดโดยตรง เค้าให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการทดลองแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ พบว่าต้องมีการเคลื่อนย้าย control mesh ที่ละจุด กรณีที่ต้องการเคลื่อนย้าย control mesh เป็นกลุ่มๆ ก็สามารถใช้วิธี FFD ช่วยในการเคลื่อนย้ายได้ ซึ่งจะทำให้การแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ สะดวกขึ้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 7

สรุปและวิจารณ์

7.1 สรุป

จากคุณสมบัติการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดของเวฟเล็ต B-spline สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการแก้ไขพื้นผิวภาพสามมิติในทางคอมพิวเตอร์กราฟิกส์ได้โดยแปลง(การแตกกระจาย)พื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดออกเป็นพื้นผิวย่อยที่ระดับความละเอียดต่ำกว่าแต่ละระดับความละเอียดจะประกอบด้วยพื้นผิวสองส่วนคือ ส่วนประมาณพื้นผิวและส่วนรายละเอียดพื้นผิว ดังนั้นจากการที่ต้องแก้ไขพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดก็เปลี่ยนมาเป็นการแก้ไขพื้นผิวย่อยๆที่ระดับความละเอียดต่างๆในปริภูมิเวฟเล็ตแทน ในการทดลองจะแสดงถึงรูปแบบต่างๆและประสิทธิภาพของการแก้ไขพื้นผิวในปริภูมิเวฟเล็ตซึ่งสามารถสรุปดังนี้

7.1.1 การประมาณพื้นผิวภาพสามมิติ

เนื่องจากบางครั้งพื้นผิวที่ได้มามีความละเอียดมากเกินไปซึ่งแสดงถึงการที่มีรายละเอียดมากเกินไปเช่น พื้นผิวที่ดูไม่ราบเรียบก็สามารถใช้หลักการเวฟเล็ต B-splineทำการแตกกระจายพื้นผิวสู่ระดับความละเอียดที่ต่ำกว่าใดๆก็ได้พื้นผิวที่มีลักษณะราบเรียบกว่าจากจุดควบคุมส่วนประมาณพื้นผิว ในการนำส่วนประมาณพื้นผิวไปใช้งานอาจจะตัดส่วนรายละเอียดพื้นผิวทั้งหมดทิ้งไป(ใช้ที่ระดับความละเอียดจำนวนเต็ม)หรือเลือกตัดเฉพาะบางส่วนของรายละเอียด D^1 , D^2 , D^3 หรือจะใช้วิธีการประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดทศนิยมก็ได้ วิธีหลังนี้จะทำให้สามารถประมาณพื้นผิวได้อย่างต่อเนื่องจากระดับความละเอียดต่ำสุดจนถึงระดับความละเอียดสูงสุดซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมาก

7.1.2 การแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวภาพสามมิติ

การแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวจะเป็นการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างโดยรวมของพื้นผิวให้เป็นไปตามที่ต้องการในขณะที่มีผลกระทบต่อรายละเอียดของพื้นผิวน้อยที่สุด จากวิธีการเดิมที่ต้องหาสมการส่วนประมาณพื้นผิวใหม่ จากนั้นเคลื่อนย้ายจุดทุกจุดในส่วนรายละเอียดพื้นผิวไปตามสมการส่วนประมาณพื้นผิวใหม่นี้ ซึ่งการแก้ไขแต่ละครั้งจะต้องจัดการกับจุดควบคุมพื้นผิวจำนวนมากที่ระดับความละเอียดสูงสุดโดยตรงทำให้ไม่ยืดหยุ่นและเสียเวลามาก แต่โดยวิธีการแปลงเวฟเล็ต B-spline จะไม่ต้องหาสมการส่วนประมาณพื้นผิว วิธีการคือ จะนำจุดควบคุมพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูงสุดมาแตกกระจายออกเป็น จุดควบคุมส่วนประมาณพื้นผิวและส่วนรายละเอียด

พื้นผิว ซึ่งจะมีจำนวนจุดน้อยกว่าที่ระดับความละเอียดสูงสุด การแก้ไขโครงสร้างโดยรวมของพื้นผิว จะได้จากการแก้ไขส่วนประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่างๆ การแก้ไขจะเป็นไปได้อย่างรวดเร็วโดยเฉพาะที่ระดับความละเอียดต่ำๆ ในการแก้ไขบางครั้งจุดควบคุมพื้นผิวที่สนใจจะแก้ไข ไม่ปรากฏที่ระดับความละเอียดจำนวนเต็มกรณีนี้จะใช้การประมาณพื้นผิวที่ระดับความละเอียด ทศนิยมช่วยให้ได้รับจุดควบคุมพื้นผิวบริเวณที่จะแก้ไขได้ หลังจากแก้ไขเสร็จแล้วก็รวมพื้นผิว กลับสู่ระดับความละเอียดที่สูงสุด ข้อดีของการแก้ไขพื้นผิวดังวิธีนี้สรุปได้ดังนี้

1. ไม่ต้องหาสมการส่วนประมาณของพื้นผิวเพราะว่าผลจากการแปลงเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดใด ๆ จะได้ส่วนประมาณของพื้นผิวออกมาโดยอัตโนมัติ
2. สามารถช่วยให้ผู้แก้ไขพื้นผิวเปลี่ยนแปลงโครงสร้างโดยรวมของพื้นผิวได้สะดวกและรวดเร็วขึ้นเพราะผู้แก้ไขเปลี่ยนแปลงจุดควบคุมของพื้นผิวเพียงเล็กน้อยที่ระดับความละเอียดต่ำๆ ก็สามารถเปลี่ยนแปลงจุดควบคุมของพื้นผิวเป็นบริเวณกว้างที่ระดับความละเอียดสูงกว่าได้
3. การแก้ไขจุดควบคุมพื้นผิวที่ระดับความละเอียดใดๆ ไม่จำเป็นต้องดูผลกระทบที่ระดับความละเอียดสูงสุดเสมออาจใช้วิธีตรวจสอบจากระดับความละเอียดที่สูงกว่าหนึ่งถึงสองระดับก็สามารถทราบรูปร่างพื้นผิวที่จะเปลี่ยนแปลงไปได้ดังนั้นก็ลดเวลาการแสดงผลของคอมพิวเตอร์ให้น้อยลงได้
4. การแก้ไขส่วนประมาณของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดต่ำๆ จะมีผลกระทบต่อส่วนรายละเอียดพื้นผิวน้อยมากในขณะที่การแก้ไขส่วนประมาณของพื้นผิวที่ระดับความละเอียดสูง ๆ จะมีผลกระทบต่อส่วนรายละเอียดพื้นผิวมากกว่า

7.1.3 การแก้ไขส่วนรายละเอียดของพื้นผิวภาพสามมิติ

การเปลี่ยนแปลงส่วนรายละเอียดของพื้นผิวจะเป็นการเปลี่ยนแปลงรายละเอียดของพื้นผิวเดิมให้เป็นแบบใหม่โดยยังคงโครงร่างเดิมอยู่ โดยทั่วไปจะเป็นการหาสมการส่วนรายละเอียดพื้นผิวใหม่แล้วรวมเข้ากับส่วนประมาณพื้นผิวเดิมซึ่งจะมีปัญหาเกี่ยวกับการที่ต้องจัดการกับจุดควบคุมจำนวนมากเช่นกัน สำหรับวิธีเวฟเล็ตจะสามารถแยกส่วนรายละเอียดของพื้นผิวออกมาที่ระดับความละเอียดต่างๆ ได้โดยไม่ต้องหาสมการ ทำให้สามารถทำการเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวที่ระดับความละเอียดใดๆ ได้อย่างอิสระ ง่ายและยืดหยุ่นกว่าการเปลี่ยนแปลงที่ระดับความละเอียดสูงสุดโดยตรง วิธีการคือจะเปลี่ยนจุดควบคุมส่วนรายละเอียดพื้นผิวเดิมที่ระดับความละเอียดใด ๆ ด้วยจุดควบคุมส่วนรายละเอียดพื้นผิวใหม่ที่มีการเตรียมไว้ก่อนในลักษณะเป็นฐานข้อมูล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7.2 ปัญหาและข้อเสนอนแนะ

จากการทดลองจะพบว่าพื้นผิวภาพสามมิติที่จะนำมาแก้ไขด้วยวิธีที่เสนอจะต้องมีจุดควบคุมพื้นผิวเป็น $(2^l+n) \times (2^l+n)$ เสมอ (j, i เป็นตัวเลขจำนวนเต็ม) ดังนั้นถ้าพื้นผิวด้านฉบับมีขนาดไม่ตรงจะต้องนำไปทำการประมวลผลก่อน(Preprocessing)ซึ่งอาจจะใช้วิธีการประมาณค่าในช่วง (Interpolation)[8][11] หรือวิธีอื่นๆเพื่อปรับขนาดจุดควบคุมพื้นผิวให้ได้ตามต้องการ หลังจากนั้นจึงนำไปแก้ไข

ส่วนการทดลองเปลี่ยนรายละเอียดพื้นผิวจะต้องใช้พื้นผิวด้านฉบับสองพื้นผิว ข้อควรพิจารณา คือ พื้นผิวทั้งสองนี้จะต้องมีขนาด รูปร่างและทิศทางที่สอดคล้องกันจึงจะได้รับผลการเปลี่ยนพื้นผิวที่ถูกต้องซึ่งอาจต้องใช้กระบวนการแปลงเรขาคณิต(Geometric transformation)[11] เช่น การหมุนวัตถุ(Rotate) การเลื่อนวัตถุ(Translate) และ การเปลี่ยนขนาดวัตถุ(Scale) ปรับพื้นผิวทั้งสองให้เหมาะสมก่อน

สำหรับแนวทางในการพัฒนาต่อไปโดยใช้ความรู้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นพื้นฐาน เช่นการประมาณพื้นผิวสามารถนำไปใช้ลดสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับข้อมูลภาพสองมิติหรือสามมิติได้ และเนื้อหาที่กล่าวถึงทั้งหมดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเห็นว่าเริ่มตั้งแต่ความรู้พื้นฐานการแปลงเวฟเลตเส้นโค้งจนถึงการแปลงเวฟเลตพื้นผิว ผู้เขียนคิดว่าเป็นทฤษฎีพื้นฐานเพียงพอที่จะขยายมิติของการแปลงเวฟเลตให้สูงขึ้น เช่น การแปลงเวฟเลตสำหรับข้อมูลเชิงปริมาตร(volume)ที่สามารถประยุกต์ใช้กับข้อมูลภาพทางการแพทย์ MRI (Magnetic Resonance Imaging) หรือ CT (Computed Tomography) ได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Hiroaki Chiyokura, "Solid Modelling with DESIGNBASE Theory and Implementation", Addison-Wesley Publishing Company, 1988.
- [2] J. Hoschek and D. Lasser, "Fundamentals of Computer Aided Geometric Design", A K Peters, 1993.
- [3] G. Strang and T. Nguyen, "Wavelets and Filter Banks", Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [4] C. Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath, and Haitao Guo, "Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms", Prentice-Hall International, 1998.
- [5] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose and David H. Salesin, "Wavelets for Computer Graphics Theory and Applications", Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco California, 1996.
- [6] A. Cohen, I. Daubechies, and J. C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 45(5):485-500, June 1992.
- [7] C.Makkun,P.Koosirivanichakorn,K. Chitsakul and M. Sangworasilp,"Editing Character of curve by Wavelet Transforms", Proceeding of the REGIONAL SYMPOSIUM ON TELECOMMUNICATIONS ELECTRONICS CIRCUIT AND SYSTEMS, KMITL Bangkok, July 1996, pp. C49-54.
- [8] G. Farin, "Curve and Surfaces for Computer Aided Geometric Design", Academic Press, Boston, third edition, 1993.
- [9] W. Boehm. Inserting new knots into B-spline curves. Computer Aided Design, 12(4):199-201, 1980.
- [10] Adam Finkelstein and David H. Salesin. Multiresolution curves . In Proceedings of SIGGRAPH'94, pages261-268. ACM, New York, 1994.
- [11] Alan Watt, "3D Computer Graphics", Addison Wesley.
- [12] David F. Rogers, "Procedural Elements For Computer Graphics", McGraw-Hill Book Company, 1988.

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น หากมีผู้พบเห็นให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [13] Lan O. Angell and Gareth Griffith, " High - resolution Computer Graphics Using FORTRAN77 ", John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [14] Patrick Marchand, "Graphics and GUIs with Matlab", CRC Press, 1996.
- [15] Yu-Kuang Chang and Alyn P. Rockwood, "A Generalized de Casteljau Appro to 3D Free form Deformation", In Proceedings of SIGGRAPH'94, pages257-260. ACM, New York, 1994.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก.

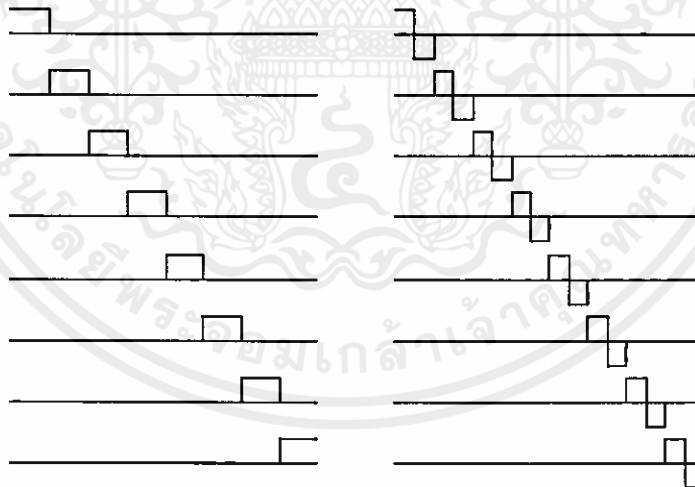
เมตริกซ์สังเคราะห์ P_j และ Q_j

เมตริกซ์สังเคราะห์ P_j และ Q_j ของเวฟเล็ต B-spline อันดับชั้นต่างๆ รูปร่างของฟังก์ชันสเกลลิง และ ฟังก์ชันเวฟเล็ตถูกสร้างขึ้นจากความสัมพันธ์ตามสมการ(3.5)และสมการ(3.6)ตามลำดับดังนี้

-สำหรับฟังก์ชันสเกลลิง พิจารณาแต่ละหลักของเมตริกซ์ P_j เป็นจุดควบคุมของฟังก์ชันมูลฐาน B-spline ที่ระดับความละเอียด j (ใช้โดเมน knot ศูนย์ถึงหนึ่ง)ตามสมการ(4.8) จากนั้นหาค่าเส้นโค้งจะได้รูปร่างของฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับความละเอียด $j-1$

-สำหรับการสร้างรูปร่างฟังก์ชันเวฟเล็ตจะเหมือนกับการสร้างรูปร่างฟังก์ชันสเกลลิงโดยเปลี่ยนเมตริกซ์ P_j เป็น Q_j

Haar Wavelets

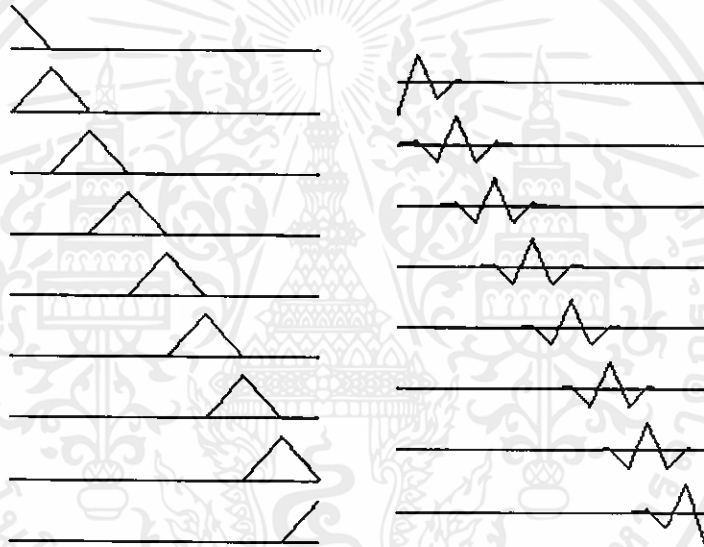


รูปที่ ก.1 ฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเล็ตแบบ Haar สำหรับ $j=3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad Q_j = \sqrt{\frac{2^j}{2}} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Endpoint-interpolating linear B-spline Wavelets



รูปที่ ก.2 ฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเลตแบบ B-spline อันดับชั้นที่ 1 สำหรับ $j=3$

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \sqrt{3} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \sqrt{\frac{3}{64}} \begin{bmatrix} -12 & & \\ 11 & 1 & \\ -6 & -6 & \\ 1 & 11 & \\ & & -12 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \sqrt{\frac{5}{4}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 2 & 2 & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{3}{4936}} \begin{bmatrix} -144 & & & \\ & 177 & 21 & \\ & -109 & -53 & \\ & 53 & 109 & \\ & -21 & -177 & 144 \end{bmatrix} \quad P_{23} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 2 & 2 & \\ & & 3 & 1 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 3 & 1 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 3 \\ & & & & & 2 & 2 \\ & & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{1}{713568}} \begin{bmatrix} -4283.828550 & & & & \\ 5208.746077 & 780 & & & \\ -3099.909150 & -1949 & -11 & & \\ 1300.002166 & 3481 & 319 & & \\ -253.384964 & -3362 & -1618 & -8.737413 & \\ 8.737413 & 1618 & 3362 & 253.384964 & \\ & -319 & -3481 & -1300.002166 & \\ & & 11 & 1949 & 3099.909150 \\ & & & -780 & -5208.746077 \\ & & & & 4283.828550 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ไปประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \sqrt{7} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & & & & \\ & 8 & 8 & & \\ & & 12 & 4 & \\ & & & 3 & 10 & 3 \\ & & & & 4 & 12 \\ & & & & & 8 & 8 \\ & & & & & & 16 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{315}{31196288}} \begin{bmatrix} 1368 & & \\ -2064 & -240 & \\ 1739 & 691 & \\ -1053 & -1053 & \\ 691 & 1793 & \\ -240 & -2064 & \\ 1368 & & \end{bmatrix}$$

$$P_{j \geq 3} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & & & & & & & & \\ & 8 & 8 & & & & & & \\ & & 12 & 4 & & & & & \\ & & & 3 & 11 & 2 & & & \\ & & & & 8 & 8 & & & \\ & & & & 2 & 12 & 2 & & \\ & & & & & 8 & 8 & & \\ & & & & & 2 & 12 & & \\ & & & & & & 8 & & \\ & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & & 8 \\ & & & & & & & & & 12 & 2 \\ & & & & & & & & & & 8 & 8 \\ & & & & & & & & & & 2 & 11 & 3 \\ & & & & & & & & & & & 4 & 12 \\ & & & & & & & & & & & & 8 & 8 \\ & & & & & & & & & & & & & 16 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 6.311454 \\ -9.189342 & -1.543996 \\ 7.334627 & 4.226722 & 0.087556 \\ -3.514553 & -5.585477 & -0.473604 & -0.000155 \\ 1.271268 & 6.059557 & 1.903267 & 0.019190 \\ -0.259914 & -4.367454 & -4.367454 & -0.259914 \\ 0.019190 & 1.903267 & 6.059557 & 1.271268 \\ -0.000155 & -0.473604 & -5.585477 & -3.514553 \\ & 0.087556 & 4.226722 & 7.334627 \\ & & -1.543996 & -9.189342 \\ & & & 6.311454 \end{bmatrix}$$

$$Q_{\beta 4} = \beta \begin{bmatrix} 25931.200710 \\ -37755.271723 & -6369.305453 \\ 30135.003012 & 17429.266054 & 385.797044 \\ -14439.869635 & -23004.252368 & -2086.545605 & -1 \\ 5223.125428 & 24848.487871 & 8349.373420 & 124 \\ -1067.879425 & -17678.884301 & -18743.473059 & -1677 & -1 \\ 78.842887 & 7394.685374 & 24291.795239 & 7904 & 124 \\ -0.635830 & -1561.868558 & -18420.997597 & -18482 & -1677 \\ & 115.466347 & 7866.732009 & 24264 & 7904 \\ & -0.931180 & -1668.615872 & -18482 & -18482 \\ & & 123.378671 & 7904 & 24264 \\ & & -0.994989 & -1677 & -18482 \\ & & & 124 & 7904 \\ & & & -1 & -1677 \\ & & & & 124 \\ & & & & -1 \\ & & & & -18482 \\ & & & & -1668.615872 \\ & & & & -0.931180 \\ & & & & 115.466347 \\ & & & & -1561.868558 \\ & & & & -18420.997597 \\ & & & & 7394.685374 \\ & & & & 78.842887 \\ & & & & -1067.879425 \\ & & & & -17678.884301 \\ & & & & -18743.473059 \\ & & & & -23004.252368 \\ & & & & -2086.545605 \\ & & & & 385.797044 \\ & & & & 17429.266054 \\ & & & & 30135.003012 \\ & & & & -6369.305453 \\ & & & & -37755.271723 \\ & & & & 25931.200710 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{5 \cdot 2^j}{675221664}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

นายสมศักดิ์ เหมวิจิตร เกิดเมื่อวันที่ 10 กรกฎาคม 2516 ที่จังหวัดนครราชสีมา สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปีการศึกษา 2539 ระดับ ปวส. สาขาอิเล็กทรอนิกส์ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคลวิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ ปีการศึกษา 2535

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

สมศักดิ์ เหมวิจิตร , มนัส สังวรศิลป์, สุรพันธุ์ เชื้อไพบูลย์, กิตติพล ชิตสกุล, "การแก้ไขพื้นผิวแบบหลายระดับความละเอียดโดยใช้การแปลงเวฟเล็ต", การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 21 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 557-560, 2541



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้