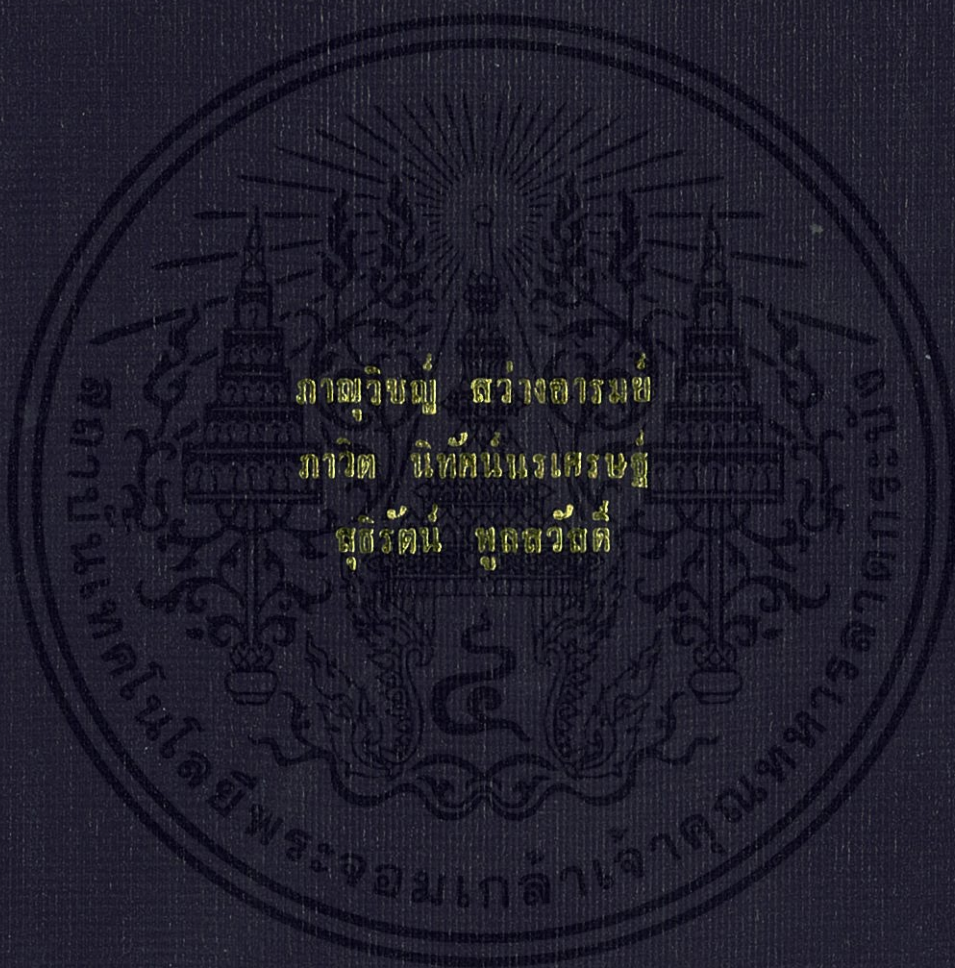


ขั้นตอนวิธีวอลุ่มออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบ
บนพื้นผิวของของไหลในระบบพิกัดฉาก

VOLUME-OF-FLUID ALGORITHMS FOR TRACKING FLUID
INTERFACES IN CARTESIAN COORDINATE



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

ขั้นตอนวิธีวอลุ่มออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบ
บนพื้นผิวของของไหลในระบบพิกัดฉาก

VOLUME-OF-FLUID ALGORITHMS FOR TRACKING FLUID
INTERFACES IN CARTESIAN COORDINATE



ภาณุวิชญ์ สว่างอารมย์
ภาวิต นิต์ศน์นรเศรษฐ์
สุธีรัตน์ พูลสวัสดิ์

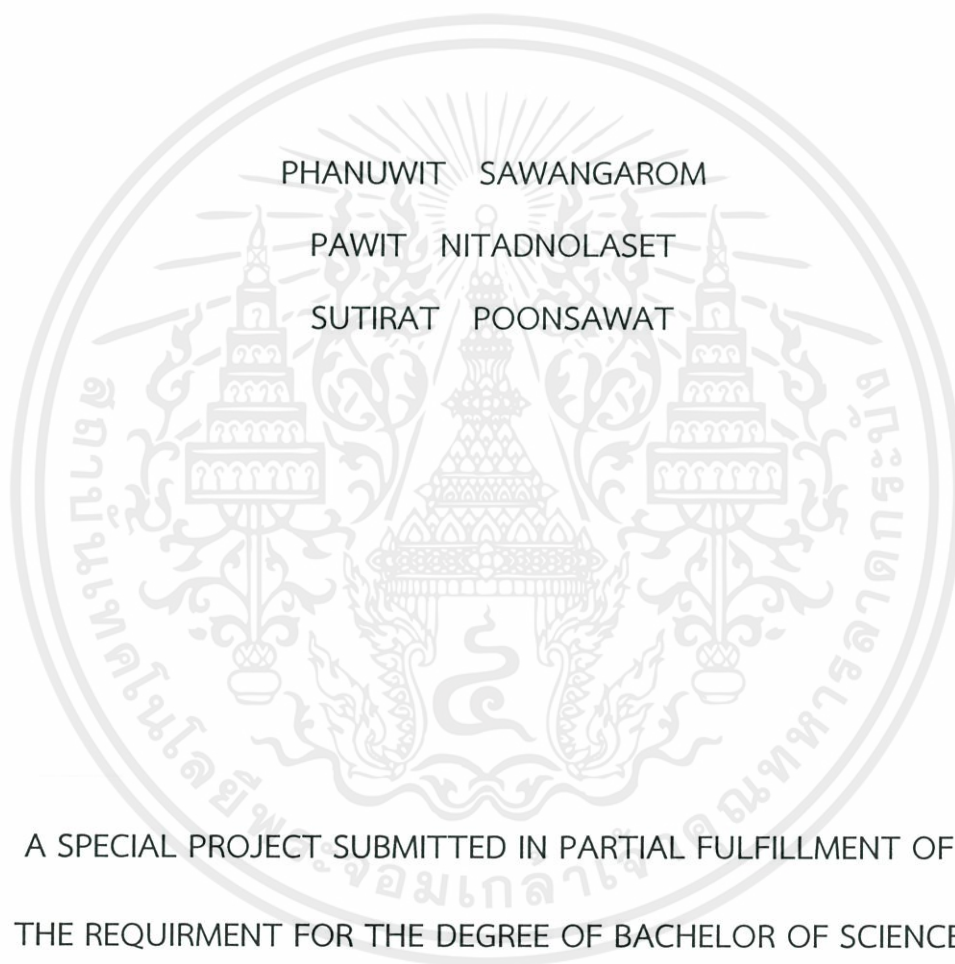
ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ส่งสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
ปีการศึกษา 2556

VOLUME-OF-FLUID ALGORITHMS FOR TRACKING FLUID
INTERFACES IN CARTESIAN COORDINATE



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลง **ACADEMIC YEAR 2013** ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ ขั้นตอนวิธีวอลลูมออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบบนพื้นผิวของของไหลในระบบพิกัดฉาก
 Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Fluid Interfaces in cartesian coordinate

ชื่อนักศึกษา นายภาณุวิชญ์ สว่างอารมณ์ 53050089
 นายภาวิต นิตศันนรเศรษฐ์ 53050091
 นางสาวสุธีรัตน์ พูลสวัสดิ์ 53050125

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต
 หลักสูตร คณิตศาสตร์ประยุกต์
 อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร.กัญญ์ณฉวีชัย แจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ประธานกรรมการ	
อาจารย์ศิริกุล ศิริธีระกุล กรรมการ	
อาจารย์ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการ	
อาจารย์ ดร.กัญญ์ณฉวีชัย แจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ ขั้นตอนวิธีวอลลุ่มออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบบนพื้นผิวของ
ของไหลในระบบพิกัดฉาก
Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Fluid Interfaces in
cartesian coordinate

ชื่อนักศึกษา นายภาณุวิชญ์ สว่างอารมย์ 53050089
นายภาวิต นีทัศน์นรเศรษฐ์ 53050091
นางสาวสุธีรัตน์ พูลสวัสดิ์ 53050125

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร.กัญญ์ณฉวี แก่มศรี

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาของไหลที่มีการเคลื่อนที่บนขอบอิสระเพื่อหารูปร่างของขอบอิสระของส่วนต่อผานที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิด และหาค่าประมาณของจุดใดๆบนขอบอิสระของส่วนต่อผานที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิดจากสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) ซึ่งเป็นสมการที่อธิบายการเคลื่อนที่ของของไหล โดยจะทำการประมาณค่าผลเฉลยของจุดใดๆบนขอบอิสระด้วยวิธีการวอลลุ่มออฟฟลูอิด (Volume-of-Fluid) หรือ SOLA-VOF ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหา หาค่าประมาณสำหรับการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่มีขอบอิสระ ที่มีความยืดหยุ่นและมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีการอื่นๆ โดยวิธี SOLA-VOF จะสร้างโครงร่างตาข่ายออยเลอร์ของเซลล์รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขึ้นมา ซึ่งสามารถนำวิธีการเชิงตัวเลขมาช่วยในการประมาณค่าได้ ซึ่งจะนำวิธีการผลต่างอันดับ (finite difference method : FDM) มาช่วยในการประมาณค่าในการหาผลเฉลยด้วย

คำสำคัญ: SOLA-VOF, ของไหล, ขอบเขตแบบอิสระ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Problem Title	Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Fluid Interfaces in cartesian coordinate	
Students	Phanuwit Sawangarom	53050089
	Pawit Nitadnolaset	53050091
	Sutirat Poonsawat	53050125
Degree	Bachelor of Science	
Major Program	Applied Mathematics	
Academic Year	2013	
Advisor	Dr. Kannanut Chamsri	

ABSTRACT

This special problem is study about the fluid motion on free boundary to find shape of free boundary or interphase between two fluids. And find the approximate values of free surface from Navier-Stokes equation that describes the motion of the fluid. Algorithm that we use to approximate solution of free boundary is Volume-of-Fluid method (SOLA-VOF). The solution depends on time. This method is more flexible and powerful than other methods. The SOLA-VOF method creates Euler rectangular mesh cells. In fact, the numerical method is used to approximate values more than other methods. We apply finite difference method (FDM) to find the approximate solutions.

Keywords : SOLA-VOF, Fluid, Free Surface

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

การทำปัญหาพิเศษเรื่องขั้นตอนวิธีวอลลุมอฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบบนพื้นผิวของของไหลสามารถทำได้สำเร็จได้ล่วงหน้าไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ดร.กัญญ์ณวัณฐ์แจ่มศรี อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นอย่างดี

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านกำลังใจจนการทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จด้วยดี ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้ในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ รวมทั้งเพื่อนๆ ทุกคนที่มีส่วนช่วยเหลือในด้านต่างๆ เกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2557



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	VII
สารบัญตาราง	IX

บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญของปัญหาพิเศษ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	2
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	3
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษ	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
1.6 ระยะเวลาการทำงาน	4

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 ของไหล (fluid)	5
2.2 ของไหลที่กดอัดได้และที่กดอัดไม่ได้ (compressible and incompressible fluid)	6
2.3 แรงตึงผิว (surface tension)	6
2.4 ความดัน (pressure)	7
2.5 ความหนาแน่น (density)	7
2.6 สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation)	8
2.7 โปรแกรมแมทแล็บ (MatLab)	9
2.7.1 การดำเนินการ	10
2.7.2 การกำหนดตัวแปร	10
2.7.3 การสร้างเมทริกซ์	10
2.7.4 การแสดงผลลัพธ์	11
2.7.5 เงื่อนไข	11
2.7.6 การซ้ำแบบ for loop	12
2.7.7 การวาดกราฟสองมิติ	12
2.7.8 การวาดกราฟสามมิติ	13
2.7.9 คำสั่ง tridiag	13
2.7.10 คำสั่ง blk tridiag	14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์การใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.8 วิธีการผลต่างอันตะ(finite difference method : FDM)	14
2.8.1 Finite-Difference Solution of Elliptic PDEs	16
2.8.2 Finite-Difference Solution of Parabolic PDEs	23
2.8.3 Finite-Difference Solution of Hyperbolic PDEs	29
2.9 ปัญหาขอบอิสระ (free boundary problems)	33
บทที่ 3 Volume of Fluid (VOF) Method	34
3.1 วิวัฒนาการของ VOF	36
3.2 สมการ Navier-Stokes	36
3.3 การใช้ Finite Difference	38
3.4 Determining interfaces within a cell	44
3.5 Surface Tension and Wall Adhesion	45
3.6 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)	47
บทที่ 4 การพัฒนาโปรแกรม	50
4.1 แผนผังการทำงานของโปรแกรม	50
4.2 ซับรูทีนของโปรแกรม (subroutines)	51
4.2.1 BC (Boundary Condition)	51
4.2.2 CAVOVO (calculates void volumes)	51
4.2.3 DELTADJ (time step adjustment)	51
4.2.4 LAVORE (label void regions)	52
4.2.5 MESHSET (meshset-up)	52
4.2.6 PARMOV (particle movement)	52
4.2.7 PETACAL (PETA interpolation factor calculation)	52
4.2.8 PRESSIT (pressure Iteration)	52
4.2.9 PRTPLT (prints and plots)	52
4.2.10 SETUP (general setup)	53
4.2.11 TILDE (temporary velocity calculation)	53
4.2.12 TMS10 (two material surface tension)	53
4.2.13 VFCONV (Volume fraction convection)	53
4.3 การกำหนดค่าเริ่มต้นที่ใช้ในโปรแกรม	53
4.4 ตัวอย่างการพิจารณา	56

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้เผยแพร่สู่สาธารณะและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ	89
5.1 สรุปผล	89
5.2 ข้อเสนอแนะ	89
เอกสารอ้างอิง	



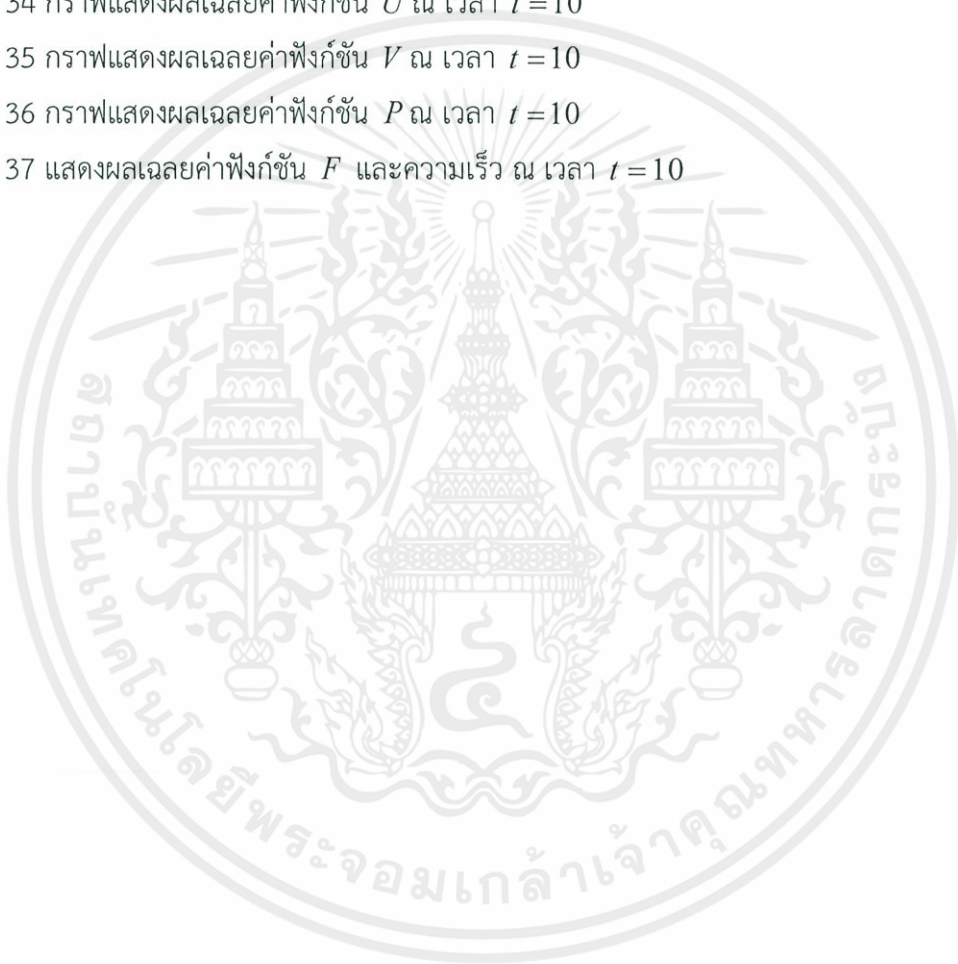
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปร่างภาพ

รูปที่	หน้า
รูปที่ 1 (a), (b) เป็นการไหลของของไหลที่เป็นอุดมคติ และ (c) การละลายของน้ำแข็งที่ทำให้เกิดปัญหาขอบอิสระ	2
รูปที่ 2 แผนภาพของวิธีการเชิงผลต่างอันดับ (FDM) ที่มีขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	17
รูปที่ 3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงวงรี	23
รูปที่ 4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงพาราโบลิค	28
รูปที่ 5 แผนภาพของวิธีการเชิงผลต่างอันดับ (FDM)	30
รูปที่ 6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงไฮเปอร์โบลิค	33
รูปที่ 7 ภาพส่วนประกอบของปัญหาการไหลของขอบอิสระ	33
รูปที่ 8 Lagrangian Coordination	34
รูปที่ 9 Eulerian Coordination	34
รูปที่ 10 แสดงพื้นที่ของของไหล	34
รูปที่ 11 ตารางผลต่างอันดับโดยเซลล์ตัวแปรแบบสี่เหลี่ยม	37
รูปที่ 12 ตำแหน่งของตัวแปรตามแบบอย่างของเซลล์โครงร่างตาข่าย	38
รูปที่ 13 แสดงความหนาแน่นในส่วนต่างๆของของไหล	41
รูปที่ 14 แสดงความหมายของปริมาณที่ใช้ในการกำหนดเงื่อนไขความดันของขอบพื้นผิวอิสระ	43
รูปที่ 15a การยึดเกาะผนังสำหรับภายในบริเวณใกล้พื้นผิวแนวนอน	46
15b การยึดเกาะผนังสำหรับภายในบริเวณใกล้พื้นผิวแนวตั้ง	46
รูปที่ 16 แผนผังการทำงานของโปรแกรม SOLA-VOF	50
รูปที่ 17 แสดงภาพจากตัวอย่าง	56
รูปที่ 18 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 0$	77
รูปที่ 19 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 0$	77
รูปที่ 20 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t = 0$	78
รูปที่ 21 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t = 0$	78
รูปที่ 22 แสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 0$	79
รูปที่ 23 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 0.2$	80
รูปที่ 24 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 0.2$	80
รูปที่ 25 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t = 0.2$	81
รูปที่ 26 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t = 0.2$	81
รูปที่ 27 แสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 0.2$	82
รูปที่ 28 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 5$	83

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่		หน้า
รูปที่ 29	กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 5$	83
รูปที่ 30	กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t = 5$	84
รูปที่ 31	กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t = 5$	84
รูปที่ 32	แสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 5$	85
รูปที่ 33	กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 10$	86
รูปที่ 34	กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 10$	86
รูปที่ 35	กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t = 10$	87
รูปที่ 36	กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t = 10$	87
รูปที่ 37	แสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 10$	88



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
ตารางที่ 1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน	4
ตารางที่ 2 แสดงผลเฉลยที่ $t = 0$	57
ตารางที่ 3 แสดงผลเฉลยที่ $t = 0.2$	62
ตารางที่ 4 แสดงผลเฉลยที่ $t = 5$	67
ตารางที่ 5 แสดงผลเฉลยที่ $t = 10$	72



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ส่วนใหญ่ค่าขอบและรูปร่างของขอบจะถูกกำหนดมาให้แล้ว แต่มีบางปัญหาในปรากฏการณ์ธรรมชาติที่ไม่ทราบแม้กระทั่งรูปร่างของขอบ เช่น รูปร่างการละลายของน้ำแข็ง ดังนั้นในโครงการวิจัยนี้เราจะแก้ปัญหาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยที่รูปร่างของขอบจะอยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิดที่ไม่ทราบค่าในระบบพิกัดฉาก เช่น ปัญหาการละลายของน้ำแข็ง หรือการพังทลายของเขื่อน ของไหลสองชนิดนั้น ก็คือ น้ำกับอากาศ

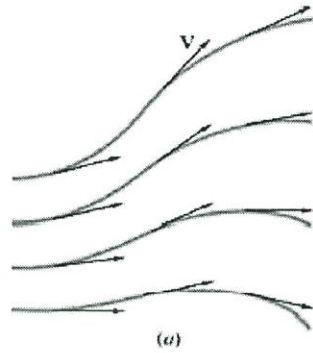
โดยการศึกษาทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับการไหลของของไหลสามารถศึกษาการไหลโดยสมมุติฐานของไหลเป็นของไหลในอุดมคติ (ideal fluid) ซึ่งของไหลในอุดมคติหมายถึง ของไหลที่ถูกสันนิษฐานว่าเป็นของไหลที่ไม่มีความหนืด ดังนั้นการไหลของของไหลแบบนี้จึงไม่มีผลกระทบอันเนื่องมาจากแรงเสียดทานระหว่างชั้นของของไหลหรือระหว่างของไหลกับผิวสัมผัส การไหลของของไหลในอุดมคติจะไม่มีเทอมของการไหลวน (eddy formation) หรือการสูญเสียพลังงานจากแรงเสียดทาน สมมุติฐานนี้สามารถทำให้พิจารณาการเคลื่อนตัวของของไหลเหมือนกับการเคลื่อนตัวของของแข็งบนแผ่นที่ไม่มีแรงต้านทาน

ของไหลอุดมคติ มีคุณสมบัติ ดังนี้

- (1) มีการไหลอย่างสม่ำเสมอ (steady flow) หมายถึง ความเร็วของทุกอนุภาค ณ ตำแหน่งบนพื้นที่หน้าตัดเดียวกันในของไหลมีค่าคงตัว
- (2) เป็นการไหลโดยไม่หมุน (irrotational flow) คือ ในบริเวณโดยรอบจุดหนึ่งๆ ในของไหลจะไม่มีอนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมรอบจุดนั้นๆเลย
- (3) เป็นการไหลที่ไม่มีแรงต้านเนื่องจากความหนืด (nonviscous flow) ไม่มีแรงต้านใดๆมากระทำต่ออนุภาคของไหล
- (4) ไม่สามารถอัดได้ (incompressible flow) ในทุกๆส่วนของของไหลมีความหนาแน่นคงตัว

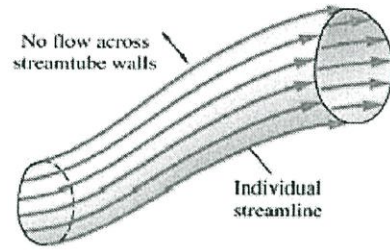
ในของไหลที่ไหลอย่างสม่ำเสมอ อนุภาคหนึ่งๆ ของของไหลจะเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางเดินเส้นหนึ่งเรียกว่า เส้นกระแส(streamline) โดยความเร็วของอนุภาคที่ตำแหน่งต่างๆ มีทิศในแนวเส้นสัมผัส ณ ตำแหน่ง ดังรูปที่ 1(a) และเส้นกระแสของอนุภาคแต่ละเส้นจะไม่ตัดกัน ถ้าเส้นกระแสจำนวนหนึ่งอยู่เรียงกันเป็นมัด ดังรูปที่ 1(b) จะเรียกมัดของเส้นกระแสนี้ว่า หลอดการไหล (tube of flow) หลอดการไหลนี้จึงเปรียบเสมือนท่อที่มีของไหลไหลเข้าทางปลายข้างหนึ่งและไหลออกอีกข้างหนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(a)

รูป (a) เส้นกระแสของอนุภาคในของไหลและความเร็วของอนุภาคขณะผ่านจุด v จะมีทิศในแนวเส้นสัมผัสกับเส้นกระแส ณ จุดนั้น



(b)

รูป (b) ในหลอดการไหลอนุภาคไม่สามารถไหลออกนอกหลอดการไหลได้ เพราะ ถ้าเส้นกระแสตัดกันอนุภาคจะพุ่งได้สองทิศทาง จึงเป็นไปได้



(c)

รูปที่ 1 (a), (b) เป็นการไหลของของไหลที่เป็นอุดมคติ และ (c) การละลายของน้ำแข็งที่ทำให้เกิดปัญหาขอบอิสระ

แต่ในโครงการนี้เราจะศึกษาของไหลแบบไม่อุดมคติ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้การไหลที่มีแรงต้านเนื่องจากความหนืด (viscous flow), ของไหลสามารถอัดได้ (compressible flow), เป็นการไหลโดยมีการหมุน (rotational flow) และ มีการไหลอย่างไม่สม่ำเสมอ (unsteady flow)

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

- 1) เพื่อศึกษาทำความเข้าใจการไหลของของไหลแบบไม่อุดมคติและเรื่องอื่นๆที่เกี่ยวข้อง
- 2) เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยมีรูปร่างของขอบเป็นแบบอิสระในระบบพิกัดฉาก
- 3) เพื่อคำนวณหารูปร่างบริเวณพื้นผิวของส่วนต่อประสานที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิดและคำนวณหาค่าประมาณของรูปร่างของขอบอิสระที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่มอบไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาดูเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

- 1) ศึกษาเกี่ยวกับของไหลแบบไม่อุดมคติ
- 2) หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ที่ขึ้นอยู่กับเวลา
- 3) ทำการศึกษาหารูปร่างของขอบอิสระแบบ 2 มิติ บนเซกต์โดเมนในระบบพิกัดฉาก
- 4) นำวิธีการผลต่างอันดับ (finite difference method) เข้ามาช่วยในการประมาณค่าการแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์
- 5) นำวิธีการ volume of fluid เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาและเป็นขอบอิสระ
- 6) ใช้โปรแกรม MatLab ช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษ

- 1) ศึกษาเรื่องการไหลของของไหลและเอกสารที่เกี่ยวข้องของกับปัญหาขอบอิสระ (free boundary problem)
- 2) ศึกษาค้นคว้าและรวบรวมเนื้อหาวิธีการวอลุ่มออฟฟลูอิด (volume of fluid)
- 3) วางแผนการดำเนินงานการทำปัญหาพิเศษ
- 4) ศึกษารูปแบบคำสั่งและวิธีการใช้โปรแกรม MatLab เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
- 5) ออกแบบระบบงาน รูปแบบรายงาน
- 6) พัฒนาโปรแกรมให้เหมาะสมตามที่ออกแบบไว้
- 7) ทดสอบโปรแกรมและพัฒนาปรับปรุงเพื่อให้โปรแกรมสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้รับความรู้เกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าขอบอิสระของของไหล และการหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลข
- 2) ได้ซอร์ฟแวร์ที่สามารถคำนวณหาขอบอิสระของสมการเชิงอนุพันธ์ในระบบพิกัดฉากได้
- 3) ได้รับความรู้เกี่ยวกับรูปแบบคำสั่งต่างๆ และวิธีการใช้โปรแกรม MatLab ขั้นสูง เช่น การวาดกราฟ 3 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

ในการดำเนินการนั้นได้ใช้เวลาในการดำเนินการทั้งสิ้น 9 เดือน
ระยะเวลาดำเนินงานตามแผนงานแสดงไว้ในตารางที่ 1

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2556							ปี 2557		
	มี.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	
1. ศึกษาค้นคว้าเรื่อง SOLA-VOF										
2. ศึกษาโปรแกรม SOLA-VOF										
3. ออกแบบและพัฒนาโปรแกรม SOLA-VOF										
4. ทดสอบโปรแกรมเพื่อหาข้อผิดพลาดและทำการปรับปรุงแก้ไข										
5. จัดทำรูปเล่มและเสนอผลงาน										

ตารางที่ 1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงนิยามความรู้เบื้องต้น สมการและวิธีการที่เกี่ยวข้องกับการไหลของของไหล อาทิเช่น ของไหล (fluid) ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็นของไหลที่กดอัดได้และที่กดอัดไม่ได้ (compressible and incompressible fluid), แรงตึงผิว (surface tension) ซึ่งมี 2 ชนิดคือแรงยึดติด (cohesive forces) และแรงเชื่อมแน่น (adhesive force), ความดัน (pressure), ความหนาแน่น (density), สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation), วิธีการผลต่างอันดับ (finite difference method) ซึ่งเป็นวิธีการเชิงตัวเลขในการประมาณค่าสำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ โดยสามารถจำแนกออกได้เป็น 3 รูปแบบ คือสมการเชิงวงรี (elliptic equation), สมการเชิงพาราโบลิก (parabolic equation), สมการเชิงไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic equation) และสุดท้ายคือปัญหาค่าขอบอิสระและการเปลี่ยนแปลงสถานะของสสาร (free boundary problems and phase transition)

2.1 ของไหล (fluid)

ในการแบ่งประเภทของสสารโดยพิจารณาจากสถานะของสสาร สามารถแบ่งสสารได้เป็น 3 ชนิด คือ ของแข็ง (solid) ของเหลว (liquid) และก๊าซ (gas) โดยเราจะเรียกของเหลวและก๊าซรวมกันว่า ของไหล โดยของไหลเป็นสสารซึ่งสามารถไหลได้ มีรูปร่างไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับภาชนะที่บรรจุ กรณีของเหลวเช่น น้ำ, น้ำมัน จะมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมาก มีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลต่ำโมเลกุลมีอิสระในการเคลื่อนที่มาก จึงสามารถเปลี่ยนรูปร่างได้ง่ายและสามารถไหลในภาชนะบรรจุได้ หรือบังคับให้ไหลไปในท่อหรือรางได้ ส่วนกรณีของก๊าซ เช่นอากาศ ออกซิเจน จะมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมาก และมีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลน้อยกว่าของเหลวจึงสามารถเปลี่ยนรูปร่างและถูกกดดันได้ง่าย จะกล่าวได้ว่าของไหลเป็นสสารที่สามารถเปลี่ยนรูปร่างได้อย่างต่อเนื่อง

กลศาสตร์ของไหลอาจแบ่งออกได้เป็น 3 สาขาคือ

- ของไหลนิ่ง (fluid statics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับของไหลที่อยู่นิ่ง
- ไคเนมาติก (kinematics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความเร็วและกระแสของของไหล โดยไม่พิจารณาถึงแรงหรือพลังงานที่ทำให้ของไหลเคลื่อนที่
- ไฮโดรไดนามิก (hydrodynamics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว

และความเร่ง พร้อมทั้งแรงที่กระทำหรือแรงที่เกิดขึ้นจากการที่ของไหลเคลื่อนที่ ซึ่งประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 ของไหลที่กดอัดได้และที่กดอัดไม่ได้ (compressible and incompressible fluid)

ของไหลที่กดอัดได้ (compressible fluid) หมายถึงของไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงปริมาตรมากเมื่อความดันเปลี่ยนแปลงหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าของไหลที่กดอัดได้คือของไหลที่มีค่าความหนาแน่นเปลี่ยนแปลงไปมากเมื่อความดันเปลี่ยนแปลงไปซึ่งโดยทั่วไปของไหลที่อัดได้คือก๊าซ

ของไหลที่กดอัดไม่ได้ (incompressible fluid) หมายถึงของไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรน้อยมากเมื่อความดันเปลี่ยนแปลงซึ่งสามารถไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรได้หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าของไหลที่กดอัดไม่ได้คือของไหลที่มีค่าความหนาแน่นคงที่หรือเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยเมื่อความดันเปลี่ยนแปลงโดยทั่วไปถือว่าของเหลวเป็นของไหลที่กดอัดไม่ได้ เช่น น้ำ (water)

2.3 แรงตึงผิว (surface tension)

แรงตึงผิวเป็นคุณสมบัติของพื้นผิวของของเหลวที่ทำให้บางส่วนของพื้นผิวของของเหลวถูกดึงดูดหรือยึดเข้าไว้ด้วยกันสู่พื้นผิวอื่น (พื้นผิวของเหลวส่วนอื่น) เช่น การรวมตัวของหยดน้ำหรือหยดปรอทที่เกาะกันเป็นลูกกลมๆ แรงตึงผิวจะถูกทำให้เกิดขึ้นด้วยการดึงดูดกันของโมเลกุลกับโมเลกุลที่เหมือนกันเมื่อโมเลกุลบนพื้นผิวของของเหลวไม่ได้ถูกล้อมรอบไปด้วยโมเลกุลที่เหมือนกันในทุกๆ ด้านแล้วโมเลกุลจะมีแรงดึงดูดกับโมเลกุลใกล้เคียงบนพื้นผิวมากขึ้นโดยแรงตึงผิวมีมิติของแรงต่อความยาวหนึ่งหน่วย หรือของพลังงานต่อพื้นที่หนึ่งหน่วย ซึ่งทั้งสองมีค่าเท่ากัน แต่พลังงานต่อพื้นที่หนึ่งหน่วยอยู่ในพจน์พลังงานพื้นผิวซึ่งเป็นพจน์ทั่วไปที่ใช้กับของแข็งไม่ค่อยใช้กับของเหลว ในวัสดุศาสตร์จะแรงตึงผิวให้อยู่ในความเค้นพื้นผิว (surface stress) หรือ พลังงานอิสระพื้นผิว (surface free energy)

อาจกล่าวได้ว่า แรงตึงผิวของของเหลวคือ แรงที่เกิดขึ้นบริเวณที่ผิวของของเหลวสัมผัสกับของเหลวอื่นหรือกับผิวของของแข็งโดยมีพลังงานเพียงพอต่อการยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลซึ่งมีขนาดสัมพันธ์กับแรงยึดติดและแรงเชื่อมแน่นทำให้เกิดเป็นลักษณะคล้ายๆ กับแผ่นบางๆ ที่สามารถต้านแรงดึงได้เล็กน้อย มีทิศทางนากับผิวของของเหลวและตั้งฉากกับเส้นขอบที่ของเหลวสัมผัส เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นความตึงผิวของเหลวจะมีค่าลดลง

ส่วนความตึงผิว คือ แรงต่อความยาวของผิวสัมผัส หรือความพยายามในการยึดผิวของของเหลว

ในของไหลทุกชนิดจะมีคุณสมบัติของแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุล 2 ชนิด คือ

1. แรงยึดติด (cohesive forces) คือแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลของของเหลวชนิดเดียวกันแรงนี้สามารถรับความเค้นดึง (tensile stress) ได้เล็กน้อย

2. แรงเชื่อมแน่น (adhesive force) คือแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลของของเหลวกับสารชนิดอื่น เช่น น้ำกับแก้วปรอทกับแก้ว เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 ความดัน (pressure)

ความดันเป็นปริมาณชนิดหนึ่งในทางฟิสิกส์ หมายถึง แรงหรือน้ำหนักที่ กระทำในทิศทางที่ตั้งฉากกับพื้นที่โดยเกิดจากของแข็ง ของเหลว หรือก๊าซต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของสารใด ๆ (ของแข็ง ของเหลว หรือก๊าซ) ความดันเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งเป็นปริมาณที่มีแต่ขนาดไม่มีทิศทางจาก ความหมายของความดันข้างต้นสามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$P = \frac{F}{A} \quad (1)$$

กำหนดให้

P คือ ความดัน

F คือ แรงที่กระทำตั้งฉากกับพื้นผิวนั้น ๆ (normal force) (นิวตัน N)

A คือ พื้นที่ (area) หรืออาจใช้ S (surface : พื้นผิว) (ตารางเมตร m^2)

ในระบบ SI เนื่องจาก F มีหน่วยเป็น นิวตัน (N) และ A มีหน่วยเป็น ตารางเมตร (m^2) ความดันจึงมีหน่วยเป็น นิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2) ในปี ค.ศ. 1971 (พ.ศ. 2514) มีการคิดค้นหน่วยของความดันขึ้นใหม่ เรียกว่า ปาสกาล (Pascal: Pa) และกำหนดให้หน่วยชนิดนี้เป็นหน่วยเอสไอสำหรับความดัน โดยให้ 1 ปาสกาลมีค่าเท่ากับ 1 นิวตันต่อตารางเมตร (หรือ แรง 1 นิวตัน กระทำตั้งฉากกับพื้นที่ขนาด 1 ตารางเมตร) เพื่อให้เห็นภาพ ความดัน 1 ปาสกาลจะมีค่าประมาณแรงกดของธนบัตรหนึ่งดอลลาร์ที่วางอยู่เฉย ๆ บนโต๊ะราบ ซึ่งนับว่าเป็นขนาดที่เล็กมาก ดังนั้นในชีวิตประจำวันความดันทั้งหลายมักมีค่าตั้งแต่กิโลปาสกาล (kPa) ขึ้นไป โดย $1 \text{ kPa} = 1000 \text{ Pa}$

หน่วยของความดันนอกจากปาสกาลแล้วยังมีหน่วยชนิดอื่นๆ เช่น บาร์, บรรยากาศ (atm), เอที, ทอร์และ ปอนด์ต่อตารางนิ้ว (psi) เป็นต้น ขึ้นอยู่กับการใช้ในแต่ละสถานการณ์ซึ่งของเหลวชนิดเดียวกัน ที่ความลึกเท่ากันจะมีความดันของของเหลวเท่ากัน โดยปัจจัยที่มีผลต่อความดัน คือ อุณหภูมิและความหนาแน่นของของเหลวหรือแก๊ส

2.5 ความหนาแน่น (density)

ความหนาแน่น เป็นการวัดมวลจากอัตราส่วนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรทั้งของแข็งและของเหลว เนื่องจาก แต่ละโมเลกุลของสารจะมีมวลคงที่ไม่ว่าจะอยู่ในสถานะของแข็ง ของเหลว หรือก๊าซ ยิ่งวัตถุมีความหนาแน่นมากมวลต่อหน่วยปริมาตรก็ยิ่งมากขึ้น กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ในกรณีที่วัตถุมีมวลเท่ากันวัตถุที่มีความหนาแน่นสูงเช่นเหล็กจะมีปริมาตรน้อยกว่าวัตถุที่มีความหนาแน่นต่ำเช่นน้ำโดยหน่วยเอสไอของความหนาแน่นคือ กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร (kg/m^3) ซึ่งเป็นสัดส่วนของจำนวนโมเลกุลของสารนั้นในหนึ่งหน่วย-ปริมาตร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยคำนวณได้จาก

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของวัตถุ (กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร)

m คือ มวลรวมของวัตถุ (กิโลกรัม)

V คือ ปริมาตรรวมของวัตถุ (ลูกบาศก์เมตร)

2.6 สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation)

สมการนาเวียร์-สโตกส์ เป็นสมการที่ตั้งตามชื่อของผู้คิดค้นสองท่าน คือ โกลด ลูอีส์ นาเวียร์ และจอร์จกาเบรียล สโตกส์ ซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหล สมการเหล่านี้ถูกสร้างขึ้นจากการประยุกต์ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันบนของไหลประกอบเข้ากับสมมติฐานว่าความเค้นบนของไหลคือผลรวมของเทอมของความหนืดของการกระจายตัว และเทอมของความดัน

สมการชุดนี้นับได้ว่าเป็นสมการชุดที่มีประโยชน์ต่อวิชากลศาสตร์ของของไหลมากที่สุด เนื่องจากมันสามารถอธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพของของไหลได้กว้างขวางที่สุด มันอาจจะใช้เพื่อการจำลองสภาพอากาศคลื่นทะเลการไหลของของไหลในท่อ การไหลของอากาศผ่านปีกเครื่องบิน หรือการเคลื่อนที่ของดาวในจักรวาลสมการชุดนี้ไม่ว่าจะในรูปแบบเต็มหรือรูปแบบที่ถูกดัดแปลงให้ง่ายขึ้นล้วนถูกนำไปใช้ในการออกแบบอากาศยานและยานยนต์ การศึกษาการไหลเวียนของโลหิตการออกแบบโรงไฟฟ้าการวิเคราะห์ผลกระทบของมลพิษเป็นต้น การนำสมการชุดนี้ไปใช้ร่วมกับสมการแมกซ์เวลล์สามารถใช้ในการศึกษาแมกนีโตโรไฮโดรไดนามิกส์ได้อีกด้วย

นอกจากนี้สมการชุดนาเวียร์-สโตกส์นับว่ามีความน่าสนใจในเชิงคณิตศาสตร์บริสุทธิ์อย่างมาก ถึงแม้ว่าสมการชุดนี้จะถูกใช้งานอย่างกว้างขวางก็ตามแต่ทว่ายังไม่มีนักคณิตศาสตร์คนใดที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าคำตอบในเชิงสามมิตินี้จะปรากฏตลอดเวลา สิ่งเหล่านี้เรียกว่าปัญหาการปรากฏและความราบเรียบของนาเวียร์-สโตกส์สถาบันคณิตศาสตร์เคลย์จัดให้ปัญหานี้เป็นหนึ่งในเจ็ดปัญหาที่สำคัญที่สุดในทางคณิตศาสตร์และตั้งเงินรางวัล 1,000,000 ดอลลาร์สหรัฐให้แก่ผู้ใดก็ตามที่สามารถแก้ปัญหานี้หรือสามารถแสดงตัวอย่างการแก้ปัญหาคำตอบได้

สมการชุดนาเวียร์-สโตกส์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งต่างจากสมการพีชคณิต โดยจะไม่มีกระบวนการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แน่นอนหรือชัดเจน หากแต่ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงแทน ตัวอย่างเช่น ในสมการนาเวียร์-สโตกส์สำหรับของไหลในอุดมคติซึ่งไม่มีความหนืดและอัดตัวไม่ได้สามารถระบุความสัมพันธ์ของความเร็วนั้นเป็นอัตราส่วนต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงความดัน (pressure gradient) สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นับเอาไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการชุดนาเวียร์-สโตกส์ไม่สามารถใช้ระบุตำแหน่งได้แต่สามารถบอกความเร็วได้ทำให้คำตอบของสมการชุดนาเวียร์-สโตกส์ถูกเรียกว่าสนามความเร็วหรือสนามการไหล ซึ่งเป็นตัวอธิบายถึง

ความเร็วของของไหล ณ ตำแหน่งและเวลาที่กำหนด และเมื่อสนามความเร็วถูกระบุแล้ว ตัวแปรอื่นๆ เช่น อัตราการไหล หรือแรงแทรกอาจจะถูกค้นพบด้วย สมการชุดนี้ต่างออกไปจากปรากฏการณ์ที่พบได้ในกลศาสตร์ดั้งเดิมซึ่งมีคำตอบในรูปของเส้นแนวโน้มตำแหน่งของอนุภาคหรือการเปลี่ยนแปลงของความต่อเนื่องสำหรับวิชากลศาสตร์ของไหลการศึกษาความเร็วในตำแหน่งนั้นควรเป็นสิ่งที่สนใจมาก แต่ทว่าสำหรับการสร้างแบบจำลองแล้ว จะใช้คอมพิวเตอร์ในการสร้างเส้นแนวโน้ม

โดยสมการนาเวียร์-สโตกส์มีรูปแบบเป็น

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

เมื่อ \mathbf{g} คือ ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational force) มีค่าประมาณ 9.8 m/s^2

\mathbf{v} คือ ความเร็วของของไหล (m/s)

ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล (kg/m^3)

μ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของความหนืด (kg/m.s)

p คือ ความดัน (N/s^2 หรือ Pa)

2.7 โปรแกรมแมทแล็บ (MatLab)

โปรแกรมแมทแล็บ (MatLab: Matrix Laboratory) เป็นซอฟต์แวร์ในการคำนวณและการเขียนโปรแกรม โปรแกรมหนึ่ง ที่มีความสามารถครอบคลุมตั้งแต่ การพัฒนาอัลกอริทึม การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการทำแบบจำลองของระบบ การสร้างระบบควบคุม และโดยเฉพาะเรื่อง image processing และ wavelet การสร้างเมตริกซ์ ผลิตโดยบริษัทแมทเวิร์คส์ (MathWorks) ตัวแทนจำหน่ายในประเทศไทยคือ บริษัท เทคซอร์ส ซิสเต็มส์ (ประเทศไทย) จำกัด (Techsource Systems (Thailand) co.,ltd.)

โปรแกรมแมทแล็บเป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในแวดวงของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกรในปัจจุบัน ได้เริ่มต้นขึ้นเพื่อต้องการให้เราสามารถแก้ปัญหาตัวแปรที่มีลักษณะเป็นเมตริกซ์ได้ง่ายขึ้น แมทแล็บเริ่มพัฒนาครั้งแรกโดย Dr. Cleve Moler ซึ่งเขียนโปรแกรมนี้ขึ้นมาด้วยภาษาฟอร์แทรน โดยโปรแกรมนี้ได้ พัฒนากายใต้โครงการ Linpack และ Eispack

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยคำสั่งหลักของโปรแกรมแมทแล็บ ที่จะใช้ในโครงงานพิเศษนี้ได้แก่

2.7.1 การดำเนินการ

การดำเนินการ	เครื่องหมาย
การบวก	+
การลบ	-
การคูณ	*
การหาร	/
การยกกำลัง	^

2.7.2 การกำหนดตัวแปร

การกำหนดค่าตัวแปร(assignment statement) จะใช้เครื่องหมาย “ = ” เป็นตัวระบุค่า
เช่น

```
>> A=1
```

```
A =
```

```
1
```

2.7.3 การสร้างเมทริกซ์

ในการสร้างเมทริกซ์จะมีลักษณะคล้ายกับการกำหนดตัวแปร เพียงแต่ค่าของเมทริกซ์ที่จะกำหนดต้องถูกกำหนดในเครื่องหมายวงเล็บใหญ่ [] โดยค่าแต่ละค่าในแถวเดียวกันจะแยกจากกันด้วยช่องว่าง (space) หรือเครื่องหมาย “ , ” (comma) และใช้เครื่องหมาย “ ; ” (semicolon) ในการแยกระหว่างแถวแต่ละแถว

เช่น

```
>> A=[1 2 3;4 5 6]
```

```
A =
```

```
1    2    3
```

```
4    5    6
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(1) เมทริกซ์เอกลักษณ์จะสร้างโดยใช้คำสั่ง eye

$Y = \text{eye}(n)$ จะเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

$Y = \text{eye}(m,n)$ จะเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $m \times n$

```
>> A=eye(3)

A =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

(2) เมทริกซ์ศูนย์จะสร้างโดยใช้คำสั่ง zeros

$B = \text{zeros}(n)$ จะเมทริกซ์ศูนย์ขนาด $n \times n$

$B = \text{zeros}(m,n)$ จะเมทริกซ์ศูนย์ขนาด $m \times n$

```
>> B=zeros(3)

B =

     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

2.7.4 การแสดงผลลัพธ์

รูปแบบคำสั่งคือ `disp('')` หรือ `fprintf('')`

เช่น

```
>> disp('Hello')
Hello
>> fprintf('Hello')
Hello>>
```

2.7.5 เงื่อนไข

(1) if จะมีรูปแบบ คือ

```
if expression
    statement
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 แม้ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2) elseif จะมีรูปแบบ คือ

```

if expression
    statement
elseif expression
    statement
else
    statement
end

```

2.7.6 การวนซ้ำแบบ for loop จะมีรูปแบบ

สำหรับคำสั่ง for นั้นก็จะเหมือนกับของภาษาอื่นๆ และเราจะใช้คำสั่ง for เมื่อทราบจำนวนรอบที่แน่นอนของลูปโดยมีโครงสร้างดังนี้

```

for m = a:b:c
    statement
end

```

[จะเป็นการทำค่า 1 เริ่มจาก a ถึง c โดยเพิ่มขึ้นครั้งละ b (step size)]
 [ชุดคำสั่งหรือการคำนวณ]
 [วนซ้ำ, สิ้นสุดการวนซ้ำเมื่อ a=c]

2.7.7 การวาดกราฟสองมิติ

คำสั่งในการสร้างกราฟแบบสองมิตินี้มีรูปแบบดังนี้

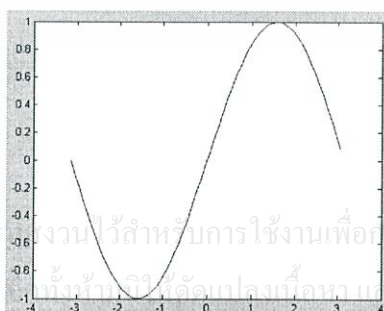
plot(x,y) เมื่อ x แทนขอบเขตในแนวแกน x
 และ y แทนฟังก์ชันที่ต้องการสร้างกราฟ

เช่น

```

>> x = -pi:.1:pi;
>> y = sin(x);
>> plot(x,y)

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น หากพบข้อผิดพลาดประการใดขออภัยและต้องอภัยถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7.10 คำสั่ง blktridiag

เป็นคำสั่งพิเศษที่ไม่มีในโปรแกรมแมทแล็บโดยคำสั่งนี้จะทำการสร้างเมทริกซ์สามแนวเฉียงที่เป็นแบบบล็อก โดยมีรูปแบบคำสั่งดังนี้

$T = \text{blktridiag}(a,b,c,n)$ โดย a เป็นบล็อกของเมทริกซ์ที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม
 b เป็นบล็อกของเมทริกซ์ที่อยู่ด้านล่างของบล็อกแนวเส้นทแยงมุม
 c เป็นบล็อกของเมทริกซ์ที่อยู่ด้านบนของบล็อกแนวเส้นทแยงมุม
 n เป็นขนาดของเมทริกซ์ที่จะทำการสร้าง

เช่น

```
>> x=[2 3 ;2 5];
>> y=eye(2);
>> a=tridiag(3,2,4,2);
>> full(blktridiag(x,y,a,2)) (fullเป็นคำสั่งที่ใช้ในการแสดงค่าของเมทริกซ์ใน
ans =                                รูปของเมทริกซ์)
     2     3     2     4
     2     5     3     2
     1     0     2     3
     0     1     2     5
```

2.8 วิธีการผลต่างอันดับ (finite difference method : FDM)

ในหัวข้อนี้เราจะแนะนำวิธีการเชิงตัวเลขที่เรียกว่า วิธีการผลต่างอันดับ (finite difference method: FDM) มาช่วยในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDEs) ในทางคณิตศาสตร์วิธีการผลต่างอันดับ เป็นวิธีการเชิงตัวเลขในการประมาณค่าสำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้สมการผลต่างอันดับในประมาณค่าอนุพันธ์โดยเราจะทำการสมมติค่าอนุพันธ์ที่จะทำการประมาณค่าโดยใช้ออนุกรมเทย์เลอร์

จาก

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n(x) \quad (4)$$

$$\text{เมื่อ } x_{i+1} = x_i + h$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 และ $R_n(x)$ คือ $O(h^{n+1})$ ซึ่งเป็นสัญกรณ์คณิตศาสตร์ที่ใช้เขียนเพื่อแทนพจน์ที่เหลือใน
 คณิตศาสตร์โดยค่า $R_n(x)$ จะมีผลต่อฟังก์ชัน f น้อย

เราสามารถทำการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f โดยการตัดพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์ได้เป็น

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + R_1(x) \quad (5)$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{R_1(x)}{h} \quad (6)$$

เนื่องจาก $R_1(x)$ คือ $O(h^2)$ ดังนั้น $\frac{R_1(x)}{h}$ คือ $O(h)$

หรือกล่าวได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (7)$$

หรือ

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \quad (8)$$

ซึ่งเราเรียกว่าการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง (central FDM) ส่วนการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางมีรูปแบบเป็น

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} \quad (9)$$

เนื่องจาก

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} \quad (*)$$

และ

$$f(x_{i-1}) \approx f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} \quad (**)$$

นำสมการ(*) + (**) จะได้

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) \approx 2f(x_i) + f''(x_i)h^2 \quad (***)$$

จะได้ว่า

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} \quad \blacksquare$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ในทำนองเดียวกันการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า (forward FDM) มี
 รูปแบบ

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \quad (10)$$

และการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้ผลต่างสี่เบื้องย้อนหลัง (backward FDM) มีรูปแบบ

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2} \quad (11)$$

โดยที่สมการ (9), (10) และ (11) มีค่า $O(h^2)$

โดยสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระสองตัวหรือมากกว่านั้น จะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations: PDEs) โดยสมการเหล่านี้อาจจะมีเงื่อนไขค่าขอบในที่นี้เราจะกล่าวถึงค่าขอบหรือสภาวะแบบคงที่ และในกรณีที่มีการกำหนดค่าขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น เรียกว่าปัญหาค่าขอบเริ่มต้น (initial boundary value problems)

ตัวอย่างเช่น การพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระ x และ y

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0 \quad (12)$$

จะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ A , B และ C สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันของ x , y และ u ได้ นอกจากนี้ในบางกรณี พารามิเตอร์ D อาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันของ x , y , $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$ และ u ได้เช่นกัน อย่างไรก็ตามในด้านวิศวกรรมสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเกิดขึ้นในรูปแบบร่วมกันน้อยเมื่อ A , B และ C เป็นค่าคงที่

ในกรณีนี้จะสามารถแบ่งโดยใช้การจำแนกทางคณิตศาสตร์ได้ดังต่อไปนี้

- ถ้า $B^2 - 4AC < 0$: สมการเชิงวงรี (elliptic equation)
- $B^2 - 4AC = 0$: สมการเชิงพาราโบลิก (parabolic equation)
- $B^2 - 4AC > 0$: สมการเชิงไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic equation)

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยบางสมการนั้นไม่สามารถใช้วิธีการวิเคราะห์ (analytical method) หาผลเฉลยได้ เช่นพวกสภาวะคงที่หรือขึ้นอยู่กับเวลาที่เรากำลังพิจารณาดังนั้นเราจึงนำวิธีการเชิงตัวเลขมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการนั้น ซึ่งวิธีการเชิงตัวเลขที่จะนำมาใช้ในที่นี้คือวิธีการเชิงผลต่างอิสระ

2.8.1 Finite-Difference Solution of Elliptic PDEs

หนึ่งในเรื่องของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงวงรีที่ง่ายที่สุดก็คือเรื่องของการกระจายอุณหภูมิแบบสภาวะคงที่ในวัตถุที่มีขนาดสองมิติ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อธิบายพฤติกรรมดังกล่าวเป็นที่รู้จักกันในนามสมการลาปลาซ (laplace equation)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้เพื่อการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ หากมีผู้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

สมการนี้ยังเกิดขึ้นในการไหลอย่างคงที่ของของไหลในงานวิศวกรรมโยธาและการกระจายแรงดันไฟฟ้าอย่างคงที่ในสื่อนำไฟฟ้าในวิศวกรรมไฟฟ้า

รูปแบบทั่วไปของสมการลาปลาซจะอยู่ในสมการที่เรียกว่าสมการปัวซอง (poisson equation)

ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ เมื่อ } f(x, y) \neq 0 \quad (14)$$

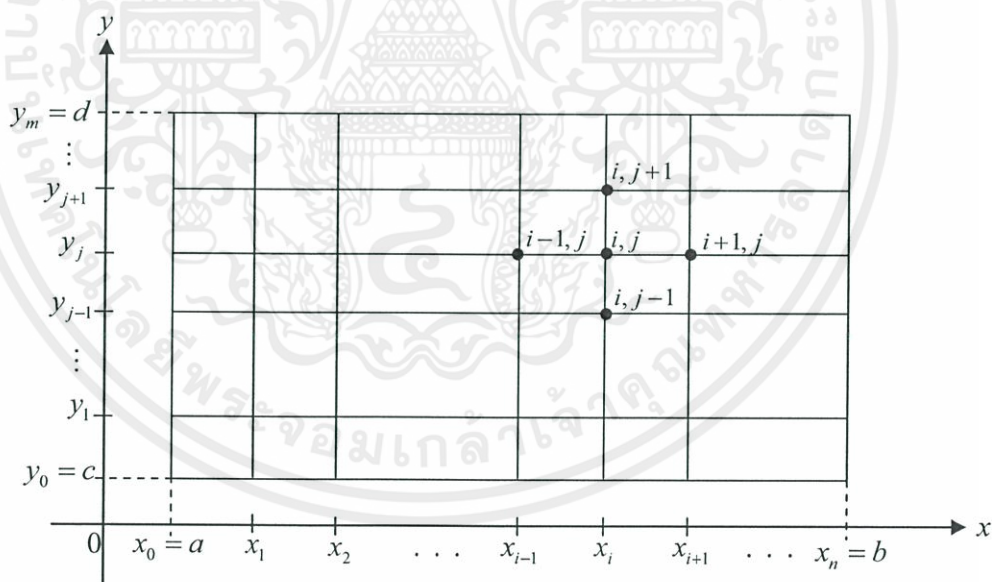
ในการแสดงการใช้วิธีการเชิงผลต่างอันดับ สำหรับการแก้สมการปัวซอง เราจะกำหนดขอบเขตภายใต้การพิจารณาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (15)$$

และเงื่อนไขขอบก็คือ

$$u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in S \quad (16)$$

เมื่อ S หมายถึงขอบเขตของ R (ดูรูปที่ 2)



รูปที่ 2 แผนภาพของวิธีการเชิงผลต่างอันดับ ที่มีขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ให้เส้น $x = x_i$ และ $y = y_j$ เป็นเส้นบนตำแหน่งตาราง (grid) และจุดที่ตารางเกิดการตัดกัน

จะเป็นจุดตัดของตาราง สำหรับแต่ละจุดตัดภายในตาราง (x_i, y_j) เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n-1$ และ $j = 1, 2, \dots, m-1$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ในตัวแปร x รอบจุด x_j สำหรับการสร้างสูตรผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางโดยมีค่าความถูกต้องอยู่ที่ $O(h^2)$ ซึ่งจะเห็นได้จากสมการ (9)

จะได้ว่า

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}), \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (17)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{k^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}), \quad k = \frac{d-c}{m} \quad (18)$$

แทนค่าสมการ (17) และ (18) ในสมการ (14) จะสามารถแสดงสมการปัวซองที่จุด (x_i, y_j) เป็น

$$\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{1}{k^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) = f(x_i, y_j), \quad (19)$$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, n-1$ และ $j = 1, 2, \dots, m-1$

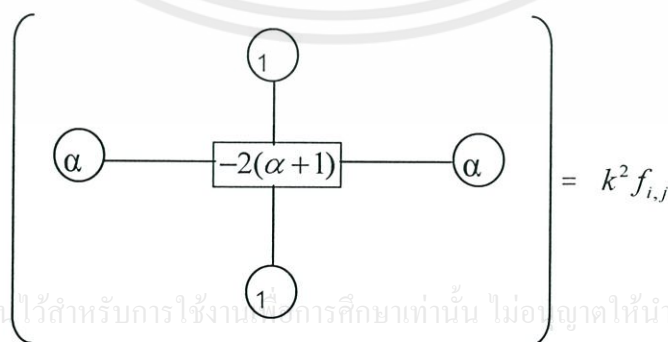
และเงื่อนไขขอบคือ

$$\left. \begin{aligned} u_{0,j} &= g(x_0, y_j), j = 0, 1, \dots, m, \\ u_{n,j} &= g(x_n, y_j), j = 0, 1, \dots, m, \\ u_{i,0} &= g(x_i, y_0), i = 0, 1, \dots, n, \\ u_{i,m} &= g(x_i, y_m), i = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

กำหนดให้ $\alpha = \left(\frac{k}{h}\right)^2$ จากสมการ (19) จะได้ว่า

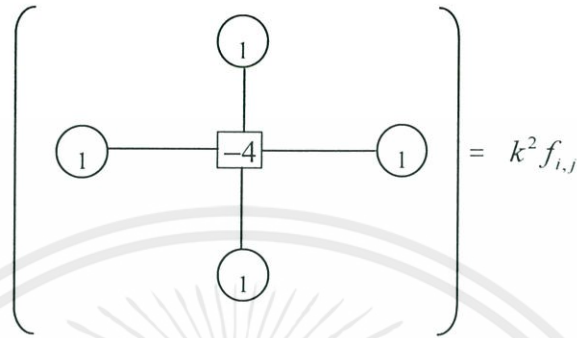
$$\alpha u_{i-1,j} - 2(\alpha+1)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = k^2 f_{i,j} \quad (21)$$

สมการ (21) สามารถแสดงให้เห็นชัดเจนมากขึ้นในรูปแบบของแผนภาพเป็น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับกรณีที่ $h = k$ จะได้ว่าค่าของ $\alpha = 1$ แผนภาพจะอยู่ในรูปแบบอย่างง่ายคือ



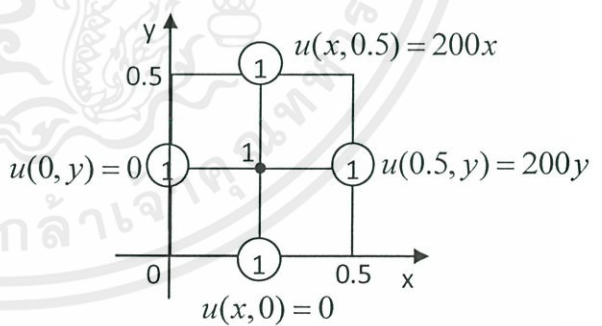
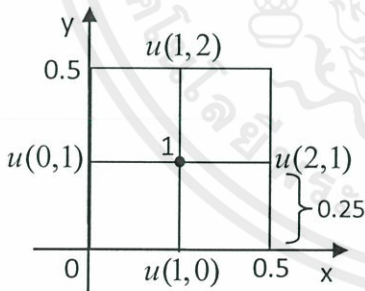
หรือ

$$u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = k^2 f_{i,j} \tag{22}$$

สมการ (22) นี้จะสามารถใช้ในการแก้ปัญหาค่าขอบ โดยค่าความถูกต้อง (accuracy) นี้มีค่า $O(k^2 + h^2)$ ดังนั้นวิธีนี้จะให้ผลที่ดีในช่วงที่มีขนาดเล็ก

ตัวอย่างที่ 1 การตรวจสอบการกระจายความร้อนคงที่ในแผ่นโลหะบาง ๆ ที่มีขนาด 0.5 เมตร \times 0.5 เมตร โดย $\alpha = 1.0$

ใส่โหนดหนึ่งโหนดที่ตำแหน่งตรงกลางของแผ่นจะได้ว่า



$$-4u_1 + u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2} = 0$$

$$4u_1 = u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2}$$

$$4u_1 = 0 + 50 + 0 + 50 = 100$$

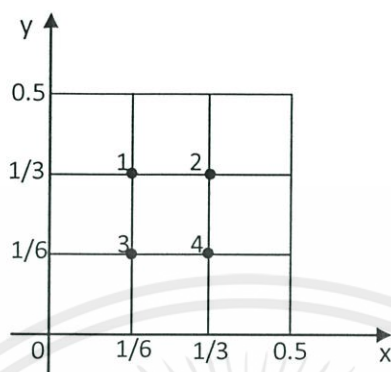
$$u_1 = 25$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ก็ตาม ผู้เขียนไม่รับผิดชอบต่อเนื้อหาและข้อมูลข้างต้นของเอกสารตลอด $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ดังนั้นข้อผิดพลาดจะเป็นศูนย์

ถ้าเราใส่โหนด4 โหนดภายในแผ่นจะได้เป็น



$$\text{node 1: } -4u_1 + u_{0,2} + u_2 + u_3 + u_{1,3} = 0$$

$$\text{node 2: } -4u_2 + u_1 + u_{3,2} + u_4 + u_{2,3} = 0$$

$$\text{node 3: } -4u_3 + u_{0,1} + u_4 + u_{1,0} + u_1 = 0$$

$$\text{node 4: } -4u_4 + u_3 + u_{3,1} + u_{2,0} + u_2 = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{4}(u_{0,2} + u_2 + u_3 + u_{1,3}) = \frac{1}{4}(u_2 + u_3 + \frac{100}{3})$$

$$u_2 = \frac{1}{4}(u_1 + u_{3,2} + u_4 + u_{2,3}) = \frac{1}{4}(u_1 + u_4 + \frac{400}{3})$$

$$u_3 = \frac{1}{4}(u_{0,1} + u_4 + u_{1,0} + u_1) = \frac{1}{4}(u_4 + u_1)$$

$$u_4 = \frac{1}{4}(u_3 + u_{3,1} + u_{2,0} + u_2) = \frac{1}{4}(u_3 + u_2)$$

(23)

หาผลเฉลยของระบบสมการ (23) เพื่อหา u_1, u_2, u_3, u_4 โดยใช้วิธี Gauss-Seidel iterative method วิธีนี้เหมาะสำหรับระบบสมการที่มีขนาดใหญ่ แต่สำหรับระบบที่มีขนาดเล็ก (ลำดับน้อยกว่า 100) เราอาจใช้เทคนิคโดยตรงเช่น Gaussian elimination

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นการแก้สมการ (23) เราจะแก้สมการจากระบบเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{3} \\ 400 \\ \frac{100}{3} \\ 0 \\ \frac{100}{3} \end{bmatrix}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.22 \\ 44.44 \\ 11.11 \\ 22.22 \end{bmatrix}$ เป็นคำตอบของระบบสมการ (23)

ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่าเราสามารถแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้จากวิธี finite difference method โดยการพิจารณาค่าที่จุด $u_{i,j}$ แล้วนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์เพื่อนำไปหาค่าต่อไป

ตัวอย่าง การประมาณค่าผลเฉลยของสมการ PDEs แบบ Elliptic ที่มีสมการเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y, \quad 0 < x < 2, 0 < y < 1$$

$$\begin{aligned} \text{โดยมีค่าขอบเขต } u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 2e^y, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = ex, \quad 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

กำหนดให้ $n=8$ และ $m=8$ และให้ค่าจริงของสมการคือ $u(x, y) = xe^y$

$$\text{จากโจทย์ จะมีค่า } h = \frac{2}{8} = 0.25 \text{ และ } k = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\text{จาก } \alpha = \left(\frac{k}{h}\right)^2 \text{ ดังนั้น } \alpha = \left(\frac{0.125}{0.25}\right)^2 = 0.25 \neq 1$$

จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} \alpha u_{i-1,j} - 2(\alpha + 1)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} &= k^2 x_i e^{y_j} \\ 0.25u_{i-1,j} - 2(0.25 + 1)u_{i,j} + 0.25u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} &= (0.125)^2 x_i e^{y_j} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} -2.5 & 0.25 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0.25 & -2.5 & 0.25 & \ddots & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0.25 & -2.5 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & & 0.25 & -2.5 & 0.25 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0.25 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,7} \\ u_{2,7} \\ \vdots \\ u_{6,1} \\ u_{7,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6702 \\ -1.3404 \\ \vdots \\ -1.4734 \\ -2.2856 \end{bmatrix}$$

ทำการคำนวณโดยใช้ MatLab จะได้คำตอบออกมาเป็น

$$\begin{bmatrix} 0.5997 & 1.1994 & 1.7992 & 2.3989 & 2.9986 & 3.5983 & 4.1980 \\ 0.5293 & 1.0585 & 1.5878 & 2.1170 & 2.6463 & 3.1755 & 3.7048 \\ 0.4671 & 0.9341 & 1.4012 & 1.8682 & 2.3353 & 2.8024 & 3.2694 \\ 0.4122 & 0.8244 & 1.2365 & 1.6487 & 2.0609 & 2.4731 & 2.8853 \\ 0.3637 & 0.7275 & 1.0912 & 1.4550 & 1.8187 & 2.1825 & 2.5462 \\ 0.3210 & 0.6420 & 0.9630 & 1.2840 & 1.6050 & 1.9260 & 2.2470 \\ 0.2833 & 0.5666 & 0.8499 & 1.1331 & 1.4164 & 1.6997 & 1.9830 \end{bmatrix}$$

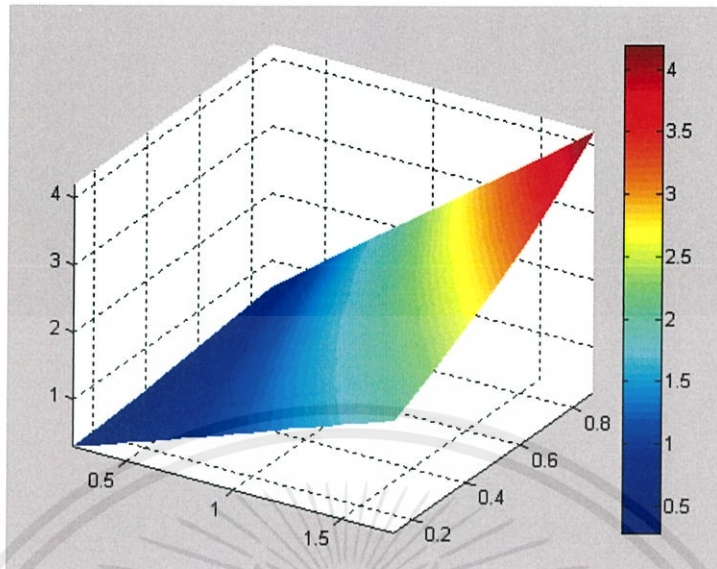
และทำการคำนวณหาค่าจริงโดยใช้ MatLab จะได้คำตอบออกมาเป็น

$$\begin{bmatrix} 0.5998 & 1.1995 & 1.7993 & 2.3990 & 2.9987 & 3.5985 & 4.1982 \\ 0.5293 & 1.0586 & 1.5879 & 2.1172 & 2.6465 & 3.1757 & 3.7049 \\ 0.4671 & 0.9343 & 1.4014 & 1.8685 & 2.3356 & 2.8027 & 3.2697 \\ 0.4122 & 0.8245 & 1.2367 & 1.6490 & 2.0612 & 2.4734 & 2.8855 \\ 0.3638 & 0.7276 & 1.0914 & 1.4552 & 1.8190 & 2.1827 & 2.5464 \\ 0.3211 & 0.6421 & 0.9632 & 1.2842 & 1.6052 & 1.9262 & 2.2472 \\ 0.2833 & 0.5666 & 0.8499 & 1.1332 & 1.4165 & 1.6998 & 1.9831 \end{bmatrix}$$

โดยมีค่าความผิดพลาดอยู่ที่ 0.0012

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สามารถแสดงค่าผลเฉลย $u_{i,j}$ ในรูปของกราฟได้เป็นดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงวงรี

จะเห็นว่า ความร้อนมีค่าสูงสุดที่จุด (2,1) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบของสมการกระจายความร้อน

2.8.2 Finite-Difference Solution of Parabolic PDEs

ในเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงพาราโบลิก (Parabolic PDEs) เราจะศึกษาเรื่องการแพร่กระจายความร้อนโดยมีสมการเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (24)$$

โดยกำหนดค่าขอบ

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

แบ่งจำนวนช่องในแนวแกน x ออกเป็น m ช่องโดย $m > 0$ ให้ระยะห่างของเวลา $k > 0$ และให้ระยะห่างของช่องในแนวแกน x เป็น $h = l/m$ โดยมีจุดตัดของเส้นแนวแกน x และ t คือ (x_i, t_j) เมื่อ $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$ และ $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$ พิจารณาที่จุด (i, j) โดยใช้อนุกรมเทเลอร์สร้างสูตรของผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางอันดับสอง(second central-difference method) จะได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังขอสงวนสิทธิ์ในเนื้อหา และต้องขออนุญาตเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + O(h^2) \quad (25)$$

และในทำนองเดียวกัน

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + O(k) \quad (26)$$

โดยที่สมการ (26) มาจากวิธีการผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (forward difference method)

แทนสมการ (25) และสมการ (26) ลงในสมการ (24) จะได้สมการเป็น

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{\alpha^2}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (27)$$

ให้ $\beta = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$ จากสมการ (27) จะได้เป็น

$$u_{i,j+1} = \beta u_{i-1,j} + (1-2\beta)u_{i,j} + \beta u_{i+1,j} \quad (28)$$

จากสมการ (28) สามารถเขียนแผนภาพได้



โดยปกติจะใช้วิธี Explicit Difference Method จะได้เมทริกซ์ขนาด $(m-1) \times (m-1)$ ที่เกี่ยวข้องกับระบบนี้ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบเมทริกซ์สามแนวเฉียง (tridiagonal)

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\beta) & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & (1-2\beta) & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & (1-2\beta) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (28) เมื่อจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปจะได้

$$\begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\beta) & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & (1-2\beta) & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & (1-2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{m-1,j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta u_{m,j} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้

$$u^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1}))^t$$

และ

$$u^{(j)} = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{m-1,j})^t, j = 1, 2, \dots$$

จะสามารถประมาณค่าผลเฉลยได้จาก

$$u^{(j)} = Au^{(j-1)}, j = 1, 2, \dots \quad (29)$$

จากสมการ (29) สามารถหาค่า $u^{(j)}$ ได้จาก $u^{(j-1)}$ ซึ่งสมการจะสามารถหาค่าได้เมื่อ $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$

ในการหาผลเฉลยจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงพาราโบลิก (parabolic PDEs) โดยการพิจารณาค่าที่จุด $u_{i,j}$ จะนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์เพื่อนำไปหาค่าผลเฉลยต่อไป

ตัวอย่าง พิจารณาสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \quad (30)$$

กำหนดให้มีค่าขอบดังนี้

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

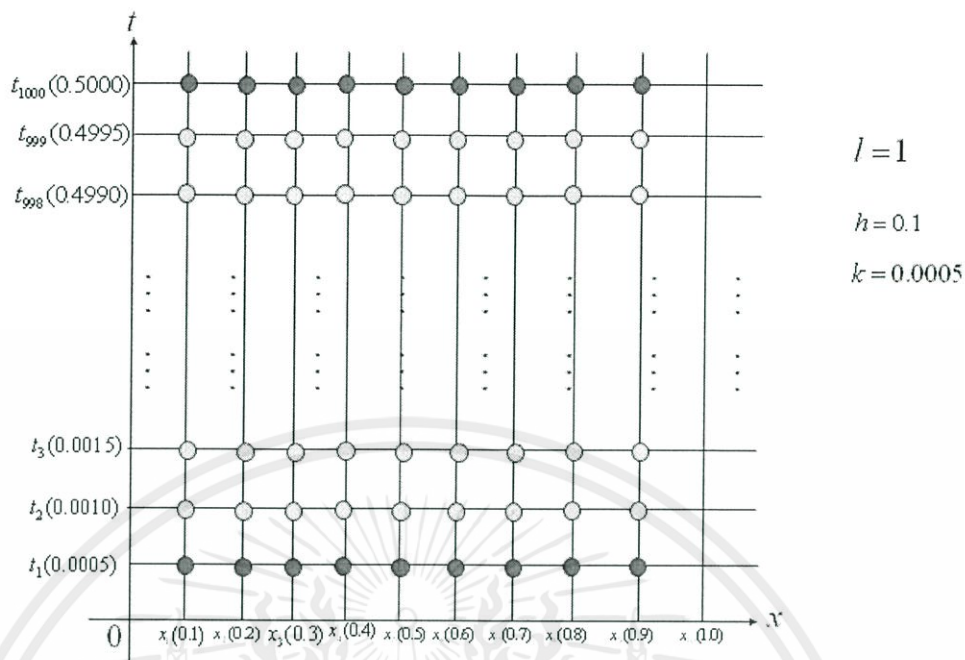
และให้ค่าเริ่มต้นเป็น $u(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$

โดยมีผลเฉลยจริงเป็น $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x \quad (31)$

ต้องการหาผลเฉลยที่เวลา $t = 0.5$ และกำหนดให้ $h = 0.1, k = 0.0005$ แล้วเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงสมการ (31)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นจะได้แผนภาพดังนี้



ดังนั้นจากสูตร $u_{(j+1)} = Au_{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

หาเมทริกซ์ A จาก $u_{(j+1)} = Au_{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$\beta = \frac{\alpha^2 k}{h^2} = \frac{(1)^2 (0.0005)}{(0.1)^2} = 0.05$$

แทนค่าสมการจากกราฟจะได้ t_1 :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \beta u_{0,0} + (1-2\beta)u_{1,0} + \beta u_{2,0}, & u_{6,1} &= \beta u_{5,0} + (1-2\beta)u_{6,0} + \beta u_{7,0} \\ u_{2,1} &= \beta u_{1,0} + (1-2\beta)u_{2,0} + \beta u_{3,0}, & u_{7,1} &= \beta u_{6,0} + (1-2\beta)u_{7,0} + \beta u_{8,0} \\ u_{3,1} &= \beta u_{2,0} + (1-2\beta)u_{3,0} + \beta u_{4,0}, & u_{8,1} &= \beta u_{7,0} + (1-2\beta)u_{8,0} + \beta u_{9,0} \\ u_{4,1} &= \beta u_{3,0} + (1-2\beta)u_{4,0} + \beta u_{5,0}, & u_{9,1} &= \beta u_{8,0} + (1-2\beta)u_{9,0} + \beta u_{10,0} \\ u_{5,1} &= \beta u_{4,0} + (1-2\beta)u_{5,0} + \beta u_{6,0} \end{aligned}$$

หาเมทริกซ์ $u_{(j)}$

จากโจทย์ให้สมการค่าเริ่มต้นคือ $u(x, 0) = \sin \pi x$, $0 \leq x \leq 1$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= \sin(0.1\pi) = 0.3090, & u_{6,0} &= \sin(0.6\pi) = 0.9510 \\ u_{2,0} &= \sin(0.2\pi) = 0.5878, & u_{7,0} &= \sin(0.7\pi) = 0.8090 \\ u_{3,0} &= \sin(0.3\pi) = 0.8090, & u_{8,0} &= \sin(0.8\pi) = 0.5878 \\ u_{4,0} &= \sin(0.4\pi) = 0.9510, & u_{9,0} &= \sin(0.1\pi) = 0.3090 \\ u_{5,0} &= \sin(0.5\pi) = 1.0 \end{aligned}$$

จากรูปแบบทั่วไปของเมทริกซ์ในการหาผลเฉลยคือ

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1} \\ u_{6,1} \\ u_{7,1} \\ u_{8,1} \\ u_{9,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\beta) & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & (1-2\beta) & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & (1-2\beta) & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & (1-2\beta) & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & (1-2\beta) & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & (1-2\beta) & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & (1-2\beta) & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & (1-2\beta) & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & (1-2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \\ u_{4,0} \\ u_{5,0} \\ u_{6,0} \\ u_{7,0} \\ u_{8,0} \\ u_{9,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta u_{0,0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta u_{10,0} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้เมทริกซ์เวลาที่ t_1 ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1} \\ u_{6,1} \\ u_{7,1} \\ u_{8,1} \\ u_{9,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3090 \\ 0.5878 \\ 0.8090 \\ 0.9510 \\ 1.0 \\ 0.9510 \\ 0.8090 \\ 0.5878 \\ 0.3090 \end{bmatrix}$$

จากนั้นเราก็ใช้ MatLab หาผลเฉลยแต่ละจุดที่เวลา t_1

จากนั้นเมื่อได้ผลเฉลยของแต่ละจุดในเวลา t_1 ก็ให้นำค่าที่ได้ไปหาผลเฉลยของจุด ณ เวลาที่ $t_2, t_3, \dots, t_{1000}$ แล้วนำผลเฉลยที่ได้มาทั้งหมดมาเทียบกับค่าจริงจากสมการผลเฉลย
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งนั้น สิ่งนี้ทำให้ต้องปรับแก้เนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$.

เมื่อใช้ MatLab คำนวณหาผลเฉลยการกระจายความร้อน ณ เวลาที่ t_{1000} เมื่อเทียบระหว่างวิธีผลต่างอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงพาราโบลิกกับค่าจริงของผลเฉลยได้ดังนี้

```
>> parabolic
```

```
ans =
```

```
0.0023    0.0022
0.0043    0.0042
0.0060    0.0058
0.0070    0.0068
0.0074    0.0072
0.0070    0.0068
0.0060    0.0058
0.0043    0.0042
0.0023    0.0022
```

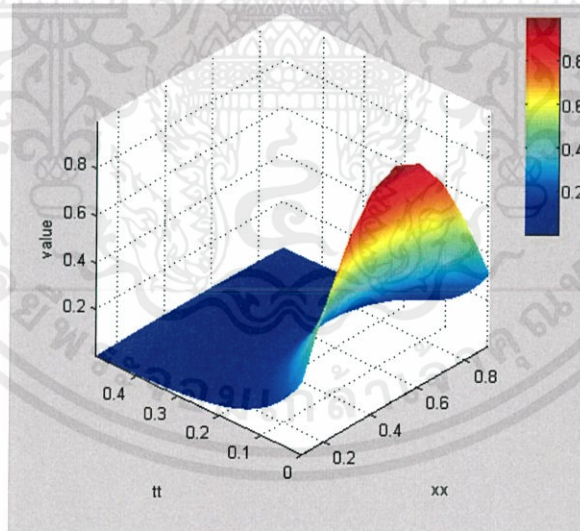
เมื่อ คอลัมน์ซ้าย เป็น FDM

คอลัมน์ขวา เป็น ผลเฉลยค่าจริง

Current plot held

โดยมีค่าความผิดพลาดอยู่ที่ 6.3566×10^{-4}

แสดงผลเฉลยที่เวลาต่างๆให้อยู่ในรูปของกราฟได้เป็นดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 ผลเฉลยเชิงของตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงพาราโบลิก

เมื่อ tt = เวลา, xx = แกน x และ value = ผลเฉลย

จะเห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพาราโบลิกเป็นสมการที่ขึ้นอยู่กับเวลา (unsteady state)

เอกสารนี้เป็นเอกสารส่วนบุคคลสงวนไว้สำหรับงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นผลเฉลยจะลู่เข้าไปหา steady state

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8.3 Finite-Difference Solution of Hyperbolic PDEs

เราจะพิจารณาคำตอบของสมการคลื่น (wave equation) ซึ่งเป็นตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic PDEs) โดยสมการคลื่นที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (32)$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(1,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

เมื่อ α เป็นค่าคงที่ในการใช้วิธีผลต่างอันดับเลือกจำนวนเต็ม m โดย $m > 0$ และระยะห่างของเวลา $k > 0$ โดย $h = l/m$ จุดบนตาข่าย (โหนด) (x_i, t_j) คือ $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, m$ และ $t_j = jk, j = 0, 1, \dots$

ใช้ finite difference method (FDM) ในการประมาณค่า (จากสูตรผลต่างสี่เบื้องตรงกลาง (central FDM)) จะได้

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} &= \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} &= \frac{1}{k^2} (u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) \end{aligned}$$

นำไปแทนในสมการ (32) จะได้

$$\frac{1}{k^2} (u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) = \alpha^2 \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (33)$$

เมื่อแทน $\beta = \frac{\alpha k}{h}$ ในสมการ (33) จะได้เป็น

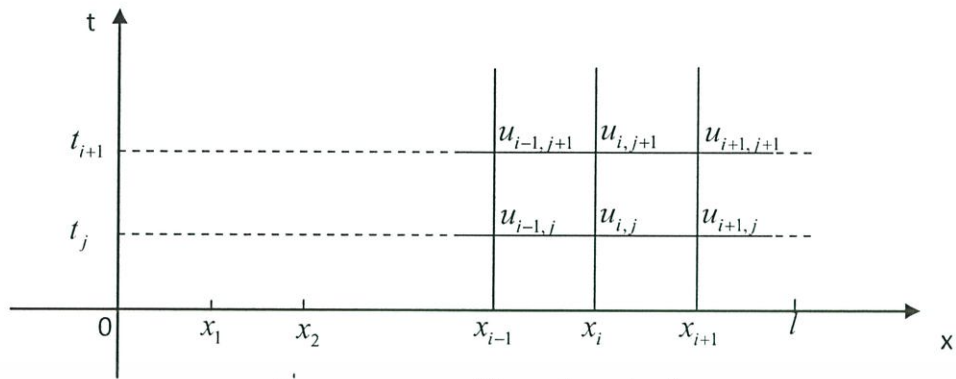
$$u_{i,j+1} = \beta^2 u_{i-1,j} + 2(1 - \beta^2) u_{i,j} + \beta^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \quad (34)$$

โดยกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเป็น

$$u_{0,j} = u_{m,j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
และเงื่อนไขค่าเริ่มต้นดังนี้

$$u_{i,0} = f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1 \quad (35)$$



รูปที่ 5 แผนภาพของวิธีการเชิงผลต่างอันดับ

นำสมการมาเขียนในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\beta) & \beta^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta^2 & 2(1-2\beta) & \beta^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta^2 & 2(1-2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

จากสมการ (36) เราสามารถหาค่าที่ตำแหน่ง $j = 0$ จากสมการ (35) แต่ค่า $j = 1$ ซึ่งมีความจำเป็นในสมการ (36) เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่า $u_{i,j}$ ต้องได้รับจากเงื่อนไขความเร็เริ่มต้น

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ตัวอย่าง การประมาณค่าสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ $u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t > 0,$

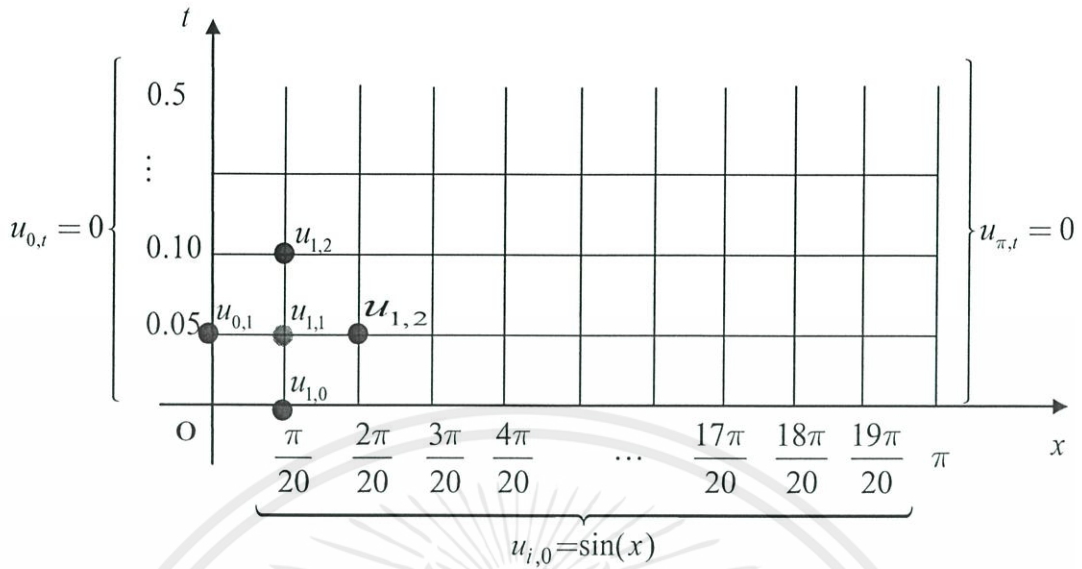
และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$

ใช้FDM ด้วย $h = \frac{\pi}{20}$ และ $k = 0.05$ แล้วเปรียบเทียบคำตอบกับค่าจริงจากสมการ

$$u(x, t) = \cos t \sin x \quad \text{ที่ } t = 0.5$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากโจทย์นำมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้



จะได้ว่า $h = \frac{\pi}{20}$, $m = 20$, $k = 0.05$, $\alpha = 1$

และค่า $\beta = \frac{\alpha k}{h}$ จะได้ $\beta = \frac{1(0.05)}{0.1571} = 0.3183$

จากสมการ $u_{i,j+1} = \beta^2 u_{i-1,j} + 2(1-\beta^2)u_{i,j} + \beta^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$

แทนค่า $\beta = 0.3183$ ลงในสมการจะได้

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= 0.3183^2 u_{i-1,j} + 2(1-0.3183^2)u_{i,j} + 0.3183^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \\ &= 0.3183^2 u_{i-1,j} + 1.7974 u_{i,j} + 0.3183^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \\ &= 0.1013 u_{i-1,j} + 1.7974 u_{i,j} + 0.1013 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \end{aligned}$$

รูปแบบเมทริกซ์ทั่วไปในการหาผลเฉลยคือ

$$\begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-2\beta) & \beta^2 & 0 & \dots & 0 \\ \beta^2 & 2(1-2\beta) & \beta^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta^2 \\ 0 & \dots & 0 & \beta^2 & 2(1-2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์คือ

$$\begin{bmatrix} 2(1-2\beta) & \beta^2 & 0 & \dots & 0 \\ \beta^2 & 2(1-2\beta) & \beta^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta^2 & 2(1-2\beta) & \beta^2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta^2 & 2(1-2\beta) & \beta^2 \\ 0 & \dots & 0 & \beta^2 & 2(1-2\beta) \end{bmatrix}$$

ทำการแทนค่าสมการดังข้างต้น แล้วนำสัมประสิทธิ์หน้า u มาแทนค่าในเมทริกซ์สัมประสิทธิ์จะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1.7974 & 0.1013 & 0 & \dots & 0 \\ 0.1013 & 1.7974 & 0.1013 & & \vdots \\ 0 & 0.1013 & 1.7974 & 0.1013 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0.1013 & 1.7974 & 0.1013 \\ 0 & \dots & 0 & 0.1013 & 1.7974 \end{bmatrix}$$

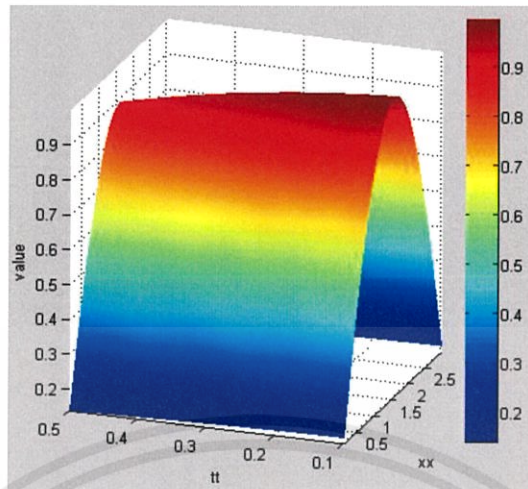
นำโจทย์มาคำนวณหาคำตอบโดยใช้ MatLab สามารถหาคำตอบที่ $t=0.5$ ได้ดังนี้

```
ans =
    0.1392    0.1373
    0.2750    0.2712
    0.4039    0.3984
    0.5230    0.5158
    0.6292    0.6205
    0.7198    0.7100
    0.7928    0.7819
    0.8462    0.8346
    0.8788    0.8668
    0.8898    0.8776
    0.8788    0.8668
    0.8462    0.8346
    0.7928    0.7819
    0.7198    0.7100
    0.6292    0.6205
    0.5230    0.5158
    0.4039    0.3984
    0.2750    0.2712
    0.1392    0.1373
```

เมื่อ คอลัมน์ซ้าย เป็น ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการ FDM
คอลัมน์ขวา เป็น ผลเฉลยค่าจริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
โดยมีค่าความผิดพลาดอยู่ที่ 0.0385
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สามารถแสดงผลเฉลย ณ เวลาต่างๆโดยใช้กราฟได้เป็นดังรูปที่ 6

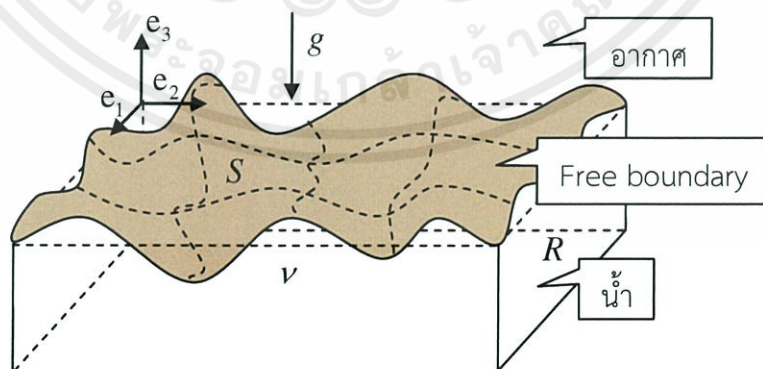


รูปที่ 6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงไฮเปอร์โบลิก เมื่อ tt แทน เวลา, xx แทน แกน x และ value แทน ผลเฉลย

2.9 ปัญหาขอบอิสระ (free boundary problems)

การไหลของของไหลที่แตกต่างกันสองชนิดที่อยู่ติดกันนั้นเกิดขึ้นในระบบทางกายภาพและในการประยุกต์ใช้ในทางวิศวกรรมอย่างกว้าง ปฏิกริยาของของไหลที่รอยต่อก่อให้เกิดปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนขึ้นในหลายกรณี โดยหนึ่งในของไหลจะออกแรงความเครียดเล็กน้อยในส่วนที่เป็นรอยต่อกันของของไหล ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาแยกความแตกต่างได้ พื้นที่ระหว่างของไหลสองชนิดนั้นจะทำหน้าที่เป็นขอบอิสระ ตัวอย่างที่ดีของการไหลของขอบอิสระได้แก่การไหลของผิวน้ำที่อยู่ในอากาศ

การคาดการณ์ความถูกต้องของพฤติกรรมการไหลของขอบอิสระเป็นสิ่งสำคัญเช่น ในการตั้งสมมติฐานและออกแบบของโครงสร้างของของไหล โดยในวิชาคณิตศาสตร์ปัญหาขอบอิสระจะถูกกำหนดในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย



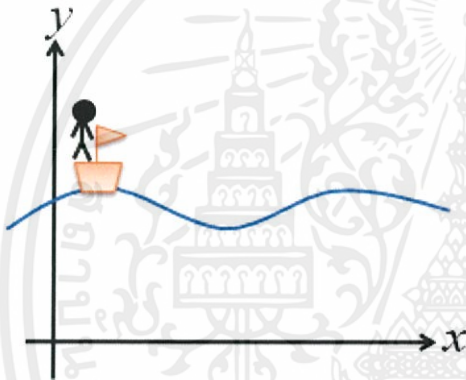
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รูปที่ 7 ภาพส่วนประกอบของปัญหาการไหลของขอบอิสระ
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

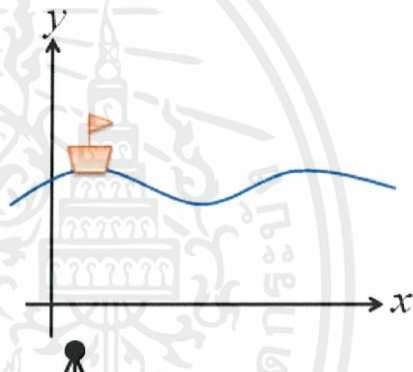
Volume of Fluid (VOF) Method

ในบทนี้จะอธิบายถึงวิธีการ volume of fluid ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาสำหรับการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาและมีขอบอิสระ ซึ่งมีความยืดหยุ่นและมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีการอื่น ๆ ในการหาผลเฉลยของปัญหาขอบอิสระ

สำหรับโครงสร้างของการเคลื่อนที่โดยทั่วไปนั้นจะใช้พิกัดลากรองจ์ (Lagrangian coordinate) และออยเลอร์ (Eulerian coordinate) โดยแต่ละวิธีก็จะมีข้อดีและข้อเสียที่ต่างกัน ซึ่งทางเลือกของการใช้งานนั้นก็ขึ้นอยู่กับลักษณะเฉพาะของปัญหาที่จะทำการหาผลเฉลย ในการศึกษาครั้งนี้จะเน้นไปที่พิกัดของออยเลอร์สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหลที่มีขอบแบบอิสระ โดยเฉพาะปัญหาที่ขอบอิสระนั้นมีขนาดใหญ่ซึ่งวิธีการลากรองจ์ไม่สามารถใช้ได้



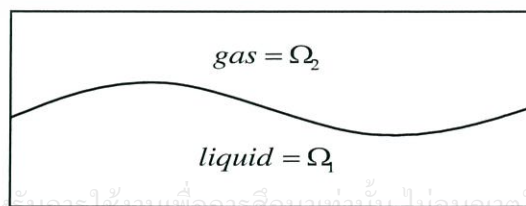
รูปที่ 8 Lagrangian Coordination



รูปที่ 9 Eulerian Coordination

จากรูปที่ 8 และ รูปที่ 9 จะเห็นว่าพิกัดลากรองจ์จะเป็นการสังเกตการเคลื่อนที่ของของไหล โดยผู้สังเกตจะอยู่ในตำแหน่งเดียวกับจุดที่จะสังเกต ส่วนพิกัดออยเลอร์นั้นจะเป็นการสังเกตการเคลื่อนที่ของของไหลโดยที่ผู้สังเกตจะมองการเคลื่อนที่ของจุดที่สังเกตที่ตำแหน่งอื่น

พื้นฐานของวิธีการ VOF เป็นปริมาณเศษส่วนของแบบแผนของของไหลสำหรับการติดตามขอบอิสระ ในเทคนิคนี้ ให้ฟังก์ชัน $F(x, y, t)$ เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่โดย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานวิจัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงรูปที่ 10 แสดงพื้นที่ของของไหล ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{ให้ } S = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega\}$$

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 1 & ; & (x, y) \in S \\ 0 & ; & (x, y) \notin S \\ \varepsilon & ; & 0 < \varepsilon < 1, (x, y) \in \partial S \end{cases} \quad (37)$$

(ขอบของ S)

ดังรูปที่ 10 เนื่องจากฟังก์ชัน F เป็นฟังก์ชันขั้นบันได (step-function) เมื่อต้องการคำนวณค่าที่อยู่ในตำแหน่งบนขอบเซลล์ ค่าของ F จะมีการเปลี่ยนแปลงมากซึ่งค่าอนุพันธ์สามารถคำนวณได้ในวิธีการพิเศษ ซึ่งจะทำการอธิบายภายหลังเมื่อคำนวณแล้ว ค่าอนุพันธ์สามารถใช้ในการกำหนดขอบปกติในที่สุดเมื่อรู้ทิศทางปกติและค่าของ F ที่เซลล์ขอบ การตัดเส้นกันของเซลล์จะสร้างขึ้นใกล้กับพื้นผิว นอกจากนี้ความโค้งของพื้นผิวสามารถคำนวณแรงตึงผิวได้

ฟังก์ชัน F จะขึ้นอยู่กับเวลาที่ถูกกำหนดโดยสมการ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (38)$$

เมื่อ u และ v เป็นความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ สถานะของสมการนี้ คือ F เป็นการเคลื่อนที่ของของไหล โดยปกติการประมาณค่าผลต่างอันดับจะทำในฟังก์ชัน F และพื้นผิวจะสูญเสียความละเอียดในการคำนวณซึ่ง F เป็น step-function ที่มีค่าของ 0 หรือ 1 ซึ่งสามารถใช้ในการประมาณค่าการไหลโดยอนุรักษัธรรมชาติแบบไม่ต่อเนื่อง การประมาณค่านี้เรียกว่า วิธี Donor-Acceptor ซึ่งจะอธิบายรายละเอียดในส่วนต่อไป

ดังนั้นเทคนิค VOF ให้ความหมายของบริเวณการติดตามของไหลผ่านตาข่ายของเซลล์ที่อยู่กับที่ วิธีการจะใช้ค่าที่ต่ำที่สุดของข้อมูลที่เก็บไว้ และเนื่องจากบริเวณการติดตามมากกว่าขอบ มันจะหลีกเลี่ยงปัญหาตรรกะทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับการตัดพื้นผิว วิธีการ VOF สามารถคำนวณเพื่อให้อยู่ในรูป 3 มิติได้ง่าย ซึ่งยังคงใช้การเก็บรักษาข้อมูลโดยเฉพาะส่วนที่เป็นประโยชน์

หลักของวิธีการ VOF ควรใช้ในการติดตามพื้นผิวใดๆที่ไม่ต่อเนื่องในคุณสมบัติของส่วนประกอบในความเร็วที่เกี่ยวข้องกับการสัมผัส หรือคุณสมบัติอื่นๆ โดยเฉพาะกรณีที่น่ามาเป็นตัวอย่าง จะกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเจาะจงซึ่งจะต้องประยุกต์กับตำแหน่งของขอบ สำหรับเหตุการณ์ที่พื้นผิวไม่ได้คงที่ในของไหล แต่มีการเพิ่มเติมความสัมพันธ์ของการเคลื่อนไหว สมการเคลื่อนที่สมการ (38) จะต้องถูกแก้ไข ตัวอย่างเช่น การใช้งานที่เป็นคลื่นความสั่นสะเทือน, การทำปฏิกิริยาของสารเคมี และขอบเขตระหว่างบริเวณของไหลระยะเดียวและสองระยะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1 วิวัฒนาการของ VOF

วิธีการผลต่างเชิงอันดับของออยเลอร์ (Eulerian finite-difference) สำหรับการคำนวณการเคลื่อนที่ของของไหลที่ไม่สามารถอัดได้ วิธีการแรกเพื่อให้สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของพื้นผิวอิสระแบบซับซ้อนคือวิธี Marker-and-Cell (MAC) วิธีการนี้จะเป็นเทคนิคแรกที่ใช้ความดันและความเร็วซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรเบื้องต้น วิธีการ MAC จะทำงานโดยการกระจายของอนุภาคเครื่องหมายเมื่อกำหนดบริเวณของของไหลและง่ายในการกำหนดค่าความดันพื้นผิวอิสระที่ตรงกลางของเซลล์ที่กำหนดเพื่อใส่ในพื้นที่ผิว โดยไม่มีการทำเพื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของความดันที่ตำแหน่งจริงของขอบเขตในพื้นที่ผิวของเซลล์ การประมาณค่าอย่างหยาบนี้ต่อมาได้ถูกปรับปรุงให้ดีขึ้นและอนุภาคเครื่องหมายนั้นถูกตัดออกในการสนับสนุนของอนุภาคลูกโซ่บนพื้นผิวอิสระ

อัลกอริทึมรุ่นที่เข้าใจง่ายในการหาผลเฉลยพื้นฐาน (SOLA) ที่ใช้ในวิธีการ MAC สามารถใช้ได้โปรแกรมที่เน้นผู้ใช้งาน (user-oriented) ที่เรียกว่า SOLA ถึงแม้ว่า SOLA จะไม่สามารถแก้ปัญหาพื้นผิวอิสระ แต่ในเวอร์ชันถัดมา SOLA-SURF ก็สามารถใช้กับวิธีการแบบฟังก์ชันพื้นที่ผิวที่สูง ความง่ายและความยืดหยุ่นของโปรแกรม SOLA ทำให้มีพื้นฐานที่ดีเยี่ยมสำหรับการพัฒนาของโปรแกรมที่มีความซับซ้อนมากขึ้น จากเหตุผลนี้ รุ่นตารางตัวแปรของโปรแกรม SOLA คือ SOLA-VARIABLE MESH (SOLA-VM) จึงถูกเลือกเป็นพื้นฐานสำหรับเทคนิค VOF ตั้งแต่นั้นมา ได้มีการปรับปรุงมากมายและเทคนิคพื้นฐานได้สำเร็จ สามารถประยุกต์เพื่อการใช้งานปัญหาในวงกว้าง ในส่วนด้านการพัฒนา McMaster, et al. ได้ทำการรวมโปรแกรมของ SOLA-SURF โดยมีเทคนิคการติดตามพื้นผิวต่างๆบนพื้นฐานของแนวคิดเหมือนกับ VOF

ในส่วนย่อยต่อไปจะเป็นรายละเอียดของวิธีการ VOF กับความสนใจในการประมาณค่าโดยวิธี finite-difference ที่มีตารางแบบไม่สม่ำเสมอ (nonuniform) และวิธีการ VOF สำหรับการหักเหการเคลื่อนที่และตำแหน่งของพื้นผิว

3.2 สมการ Navier-Stokes

วิธีการ VOF จะใช้ตารางออยเลอร์ของเซลล์รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีระยะห่างระหว่าง x_i และ x_{i-1} คือ δx_i สำหรับแถวที่ i และระยะห่างระหว่าง y_j และ y_{j-1} คือ δy_j สำหรับคอลัมน์ที่ j (รูปที่ 11) ถึงแม้ว่ามันจะไม่มี ความยืดหยุ่นเหมือนกับตารางที่มีขนาดของช่องเท่ากัน แต่จะช่วยให้มันมีข้อได้เปรียบอย่างมากสำหรับวิธีการหาผลเฉลยใหม่ของตารางที่ใช้รูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดเท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการของไหลที่จะใช้แก้ปัญหา คือ สมการ Navier-Stokes ซึ่งมีรูปทั่วไปดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \xi \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x^2} \right) \right] \quad (39)$$

และ

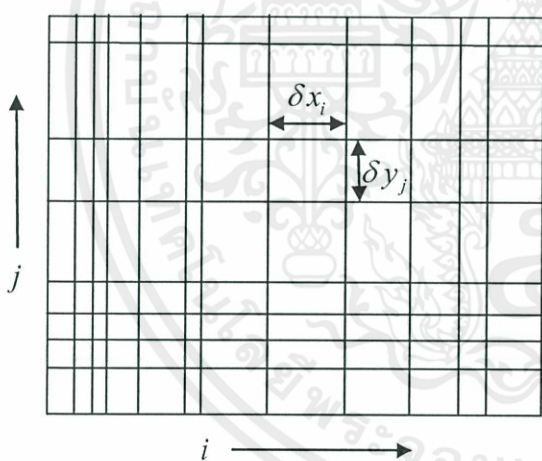
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\xi}{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (40)$$

แต่ในโครงการนี้เราจะทำการศึกษาในรูปแบบพิกัดฉาก (cartesian coordinate) ดังนั้นค่า ξ ในสมการ (39) และ (40) มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนในรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (41)$$

และ

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (42)$$



รูปที่ 11 ตารางผลต่างอันดับสองโดยเซลล์ตัวแปรแบบสี่เหลี่ยม

ความเร็ว (u, v) จะอยู่ในพิกัดฉากคาร์ทีเซียนที่เขียนที่ขนานกันในทิศทาง (x, y) ตามลำดับ ความเร่งที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงจะแสดงโดย (g_x, g_y) และ ν เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของความหนืด โดยความหนาแน่นของของไหลแทนด้วย ρ ในการคำนวณของไหลหนึ่งอย่างด้วยพื้นผิวอิสระ ρ ในสมการ (41) และ (42) จะเป็นค่าคงที่ ในการคำนวณของไหล 2 อย่าง ρ อาจจะเท่ากับผลต่างของค่าคงที่ในแต่ละของไหล จะเห็นว่าสมการ (41) และ

(42) มีสมการ 2 สมการแต่มี 3 ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า คือ u, v และ p ดังนั้นเราจะเป็นต้องเพิ่มอีก 1 สมการซึ่งหาได้จากกฎการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) คือ สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้ สมการ (41) และในสมการ (42) จะต้องเสริมเงื่อนไขการอัดไม่ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ในการค้า (43)

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

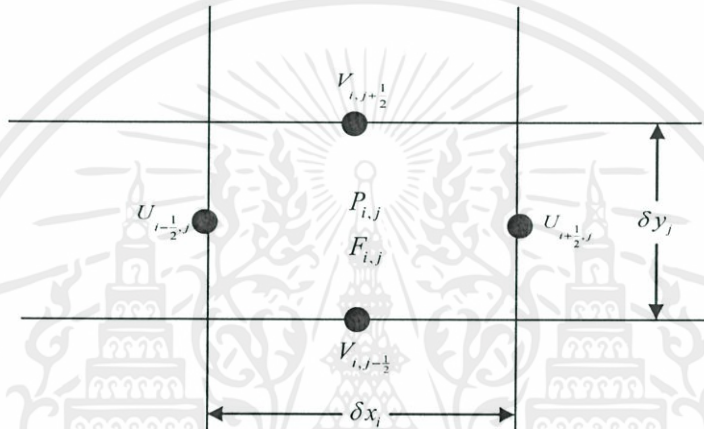
บางครั้งของไหลที่อัดได้ (เช่น คลื่นอคูสติก) ในสมการ (43) จะถูกแทนที่ด้วย

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (44)$$

เมื่อ c คือความเร็วเสียง

สมการ (44) เพิ่มความยืดหยุ่นมากขึ้นจากสมการ (43) ด้วยการเพิ่มพจน์ $\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ เข้าไปในสมการ (43) ซึ่งเป็นคุณสมบัติมาตรฐานใน VOF

ในเทคนิคของ VOF ค่าของตัวแปรที่อยู่ในรูปเชิงตัวเลขที่เซลล์เซลล์หนึ่ง จะถูกระบุตำแหน่งดังที่แสดงในรูปที่ 12



รูปที่ 12 ตำแหน่งของตัวแปรตามแบบอย่างของเซลล์โครงร่างตาข่าย

3.3 การใช้ Finite Difference

รูปทั่วไปสำหรับการประมาณค่า finite-difference ของสมการ (41) และ (42) คือ

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^n + \delta t \left[-\left(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1} \right) / \delta x_{i+1/2} + g_x - FUX - FUY + VISX \right] \quad (45)$$

และ

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^n + \delta t \left[-\left(p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1} \right) / \delta y_{j+1/2} + g_y - FVX - FVY + VISY \right]$$

เมื่อ

$$\delta p x_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j} \right] \delta x_{i+1} + \left[\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i+1,j} \right] \delta x_i \right\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
และ

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\delta p y_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j} \right] \delta y_{j+1} + \left[\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j+1} \right] \delta y_i \right\}$$

$$\delta t = t^{n+1} - t^n$$

ค่า $VISX$ จะหมายถึงเทอมของความหนืด และค่า FUX , FUY จะหมายถึงการพาของความเร่งความเร็วในทิศแกน x และแกน y โดยเทอมเหล่านี้จะประมาณผลโดยใช้ค่าที่ระดับเวลาเก่า (n) สำหรับความเร็ว และเนื่องจากที่จุดเริ่มต้นของการคำนวณในสมการ (45) ความดันที่ระดับเวลา $n+1$ นั้นยังไม่ถูกกำหนดค่า จึงไม่สามารถใช้ได้โดยตรงเพื่อประเมินค่า (u^{n+1}, v^{n+1}) แต่จะต้องรวมกับสมการความต่อเนื่องที่อธิบายด้านล่างในขั้นแรกของผลเฉลย ดังนั้นค่า ρ^{n+1} ในสมการนี้จะถูกแทนที่โดย ρ^n เพื่อเป็นการคำนวณครั้งแรกสำหรับความเร็วใหม่

โดยค่าประมาณของ FUX ที่จุด $(i + \frac{1}{2}, j)$ มีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$FUX = (u_{i+\frac{1}{2},j} / \delta x_\alpha) [\delta x_{i+1} DUL + \delta x_i DUR + \alpha \operatorname{sgn}(u) (\delta x_{i+1} DUL - \delta x_i DUR)] \quad (46)$$

$$\text{เมื่อ } DUL = (u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}) / \delta x_i \quad (47)$$

$$DUR = (u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{3}{2},j}) / \delta x_{i+1} \quad (48)$$

$$\delta x_\alpha = \delta x_{i+1} + \delta x_i + \alpha \operatorname{sgn}(u) (\delta x_{i+1} - \delta x_i) \quad (49)$$

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & ; u_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \\ 0 & ; u_{i+\frac{1}{2},j} = 0 \\ -1 & ; u_{i+\frac{1}{2},j} < 0 \end{cases} \quad (50)$$

และ

$$FUY = (v_{i,j+\frac{1}{2}} / \delta y_\alpha) [\delta y_{j+1} DUB + \delta y_j DUT + \alpha \operatorname{sgn}(v) (\delta y_{j+1} DUB - \delta y_j DUT)] \quad (51)$$

$$\text{เมื่อ } DUB = (v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}) / \delta y_j \quad (52)$$

$$DUT = (v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{3}{2}}) / \delta y_{j+1} \quad (53)$$

$$\delta y_\alpha = \delta y_{j+1} + \delta y_j + \alpha \operatorname{sgn}(v) (\delta y_{j+1} - \delta y_j) \quad (54)$$

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} > 0 \\ 0 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} = 0 \\ -1 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \quad (55)$$

สำหรับ FVX และ FVY นั้นจะทำการเปลี่ยนค่าจาก u เป็น v ในส่วนของ DUL , DUR , DUT และ DUB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$VISX = v[DUDXSQ + DUDYSQ] \quad (56)$$

เมื่อ

$$DUDXSQ = 2.0 \left[\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x_i (\delta x_i + \delta x_{i+1})} + \frac{u_{i+\frac{3}{2},j}}{\delta x_{i+1} (\delta x_i + \delta x_{i+1})} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right] \quad (57)$$

$$DUDYSQ = (DUDYT - DUDYB) / \delta y_j \quad (58)$$

โดย

$$DUDYT = \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}} \delta y_j}{\delta y_{j+1}} - \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} \delta y_{j+1}}{\delta y_j} - \left(\frac{\delta y_j u_{i,j+\frac{3}{2}} + \delta y_{j+1} u_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta y_j + \delta y_{j+1}} \right) \left[\frac{\delta y_j / \delta y_{j+1} - \delta y_{j+1} / \delta y_j}{\frac{1}{2} (\delta y_j + \delta y_{j+1})} \right] \quad (59)$$

$$DUDYB = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} \delta y_{j-1}}{\delta y_j} - \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} \delta y_j}{\delta y_{j-1}} - \left(\frac{\delta y_{j-1} u_{i,j+\frac{1}{2}} - \delta y_j u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y_j + \delta y_{j-1}} \right) \left[\frac{\delta y_{j-1} / \delta y_j - \delta y_j / \delta y_{j-1}}{\frac{1}{2} (\delta y_{j+1} + \delta y_j)} \right] \quad (60)$$

โดยค่า $VISY$ นั้น จะมีการคิดคล้ายกับค่า $VISX$ แต่จะเปลี่ยนจากค่า u เป็น v และเปลี่ยนจาก x เป็น y

และค่า α ในสมการ (49) มีค่าดังนี้

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{เมื่อ ใช้การประมาณค่าความถูกต้องอันดับสอง} \\ 1, & \text{เมื่อ ใช้รูปแบบ donor-cell ซึ่งเป็นการประมาณค่าความถูกต้องอันดับหนึ่ง} \end{cases}$$

ในการคำนวณความเร็วจากสมการ (45) ซึ่งมีรูปแบบการประมาณค่าเป็นเชิงตัวเลข ซึ่งสมการ (44) จะต้องมีความสอดคล้องกับสมการ (45) ดังนั้นความดันและความเร็วในสมการ (44) จะต้องถูกแก้ไขในการคำนวณในแต่ละเซลล์ของของไหลใหม่ โดยจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับการประมาณค่า finite-difference ได้เป็น

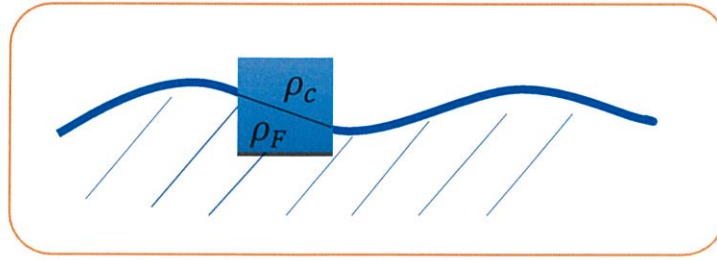
$$(p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n) / (\rho c^2 \delta t) + D_{i,j}^{n+1} = 0 \quad (61)$$

เมื่อ

$$D_{i,j}^{n+1} = (u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) / \delta x_i + (v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) / \delta y_j \quad (62)$$

หลังจากที่สมการ (61) ถูกจัดให้อยู่ในรูปสำหรับการประมาณค่า finite-difference แล้วจะได้ความหนาแน่นใหม่ คือ

$$\rho = \rho_F F_{i,j} + \rho_c (1 - F_{i,j}) \quad (63)$$



รูปที่ 13 แสดงความหนาแน่นในส่วนต่างๆของของไหล

โดยค่า c^2 ที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะมีเพียงค่าเดียว หรือกล่าวได้ว่ามีการสมมติให้ความเร็วของของไหลทั้งสองชนิดที่คำนวณนั้นมีค่าเท่ากัน

เนื่องจากความเร็วที่ปรากฏอยู่ใน D จะถูกคำนวณที่เวลาใหม่ ซึ่งขึ้นอยู่กับความดัน ณ เวลา $n+1$ ตามสมการ (45) โดยที่สมการนี้เป็นความสัมพันธ์แบบ implicit สำหรับความดันตัวใหม่ ในการคำนวณตารางจะคำนวณเป็นแถวจากแถวล่างขึ้นไปยังด้านบน ในแต่ละเซลล์ที่บรรจุของไหลอยู่นั้น (ไม่รวมส่วนที่เป็นพื้นผิวอิสระ) ความดันจะถูกเปลี่ยนจากสมการ (61) เป็น

$$\delta p = -S / (\partial S / \partial p) \quad (64)$$

โดยที่ค่า S คือค่าทางซ้ายของสมการ (61)

ซึ่งสมการ (64) สามารถเขียนในรูป finite difference method ได้ดังนี้

$$\delta p = -S \beta_{i,j} \eta_{i,j} \quad (65)$$

$$\text{เมื่อ } \beta_{i,j} = [(\omega - 1.0)\Omega + 1] / \left[xx\Omega + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\rho_F}{\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}} \right) / \delta t \right] \quad (66)$$

$$\text{โดย } xx = \frac{\delta t}{\delta x_i} \left(\frac{2.0}{RHXL} + \frac{2.0}{RHXR} \right) + \frac{\delta t}{\delta y_j} \left(\frac{2.0}{RHYT} + \frac{2.0}{RHYB} \right)$$

$$RHXL = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i-1,j}] \delta x_i + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta x_{i-1}$$

$$RHXR = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta x_{i+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i+1,j}] \delta x_i$$

$$RHYT = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta y_{j+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j+1}] \delta y_j$$

$$RHYB = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j-1}] \delta y_j + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta y_{j-1}$$

$$\text{และ } \eta_{i,j} = 1.0 / (1.0 - DFS / DMIN) \quad (67)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า

โดย $DFS = (0.5 - F_{i,j}) \delta x_i$
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คิดเบี่ยงน้อหาก และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 $DMIN = 0.5(\delta x_i + \delta x_{i+1})$

และจะได้ความดันใหม่คือ

$$p = p_{i,j} + \delta p \quad (68)$$

โดยการประมาณค่าใหม่สำหรับความเร็วของทุกด้านบนเซลล์คือ

$$\left. \begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j} + \delta t \Omega \delta p / \delta p x_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i-\frac{1}{2},j} + \delta t \Omega \delta p / \delta p x_{i-\frac{1}{2}} \\ v_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta t \Omega \delta p / \delta p y_{j+\frac{1}{2}} \\ v_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta t \Omega \delta p / \delta p y_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

โดย $\Omega = \min(\mu_0, 1.0)$

$$\mu_0 = \max(2c\delta t / \delta x_i, 2c\delta t / \delta y_j)$$

สำหรับในปัญหาของเรานั้น เราจะพิจารณาของไหลแบบอัดไม่ได้ (incompressible fluid) ดังนั้น $\Omega = 1$

ซึ่งสมการ (69) สามารถเขียนอยู่ในรูป Finite Difference ได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j} &= u_{i-\frac{1}{2},j} + 2.0\delta t \delta p / \delta p x_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i-\frac{1}{2},j} &= u_{i+\frac{1}{2},j} + 2.0\delta t \delta p / \delta p x_{i-\frac{1}{2}} \\ v_{i,j+\frac{1}{2}} &= v_{i,j-\frac{1}{2}} + 2.0\delta t \delta p / \delta p y_{j+\frac{1}{2}} \\ v_{i,j-\frac{1}{2}} &= v_{i,j+\frac{1}{2}} + 2.0\delta t \delta p / \delta p y_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \text{โดย } \delta p x_{i+\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta x_{i+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i+1,j}] \delta x_i \\ \delta p x_{i-\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i-1,j}] \delta x_i + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta x_{i-1} \\ \delta p x_{i+\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta y_{j+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j+1}] \delta y_j \\ \delta p x_{i-\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j-1}] \delta y_j + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta y_{j-1} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่สำหรับกรณีที่เป็นของไหลชนิดเดียวจะใช้

$$S = (1-\eta)p_N + \eta p_s - p_{i,j} \quad (71)$$

เมื่อ p_s คือแรงดันที่พื้นผิว (surface)

p_N คือแรงดันที่ของไหล (fluid)

และ $\eta = d_c / d$

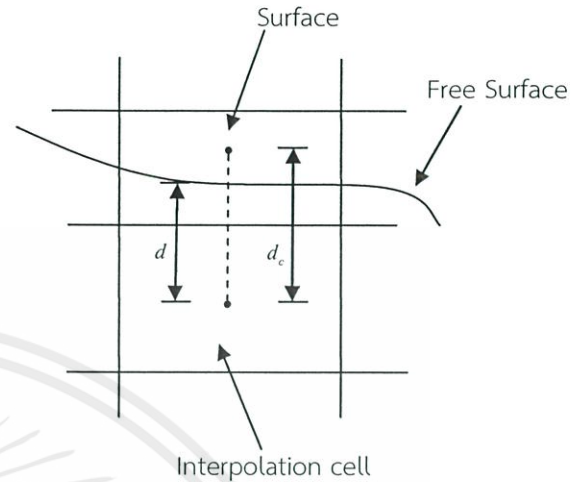
เมื่อ d_c = ระยะห่างระหว่างจุดกึ่งกลางของเซลล์ที่เป็น

ขอบอิสระกับเซลล์ที่อยู่ติดขอบอิสระ

d = ระยะห่างระหว่างที่ขอบอิสระกับจุดกึ่งกลาง

ของเซลล์เซลล์ที่อยู่ติดขอบอิสระ

ดังที่แสดงในรูปที่ 14



รูปที่ 14 แสดงความหมายของปริมาณที่ใช้ในการกำหนดเงื่อนไขความดันของขอบพื้นผิว

ซึ่งในบางกรณีการทำซ้ำเพื่อให้ลู่อู่เข้าสู่ผลเฉลยสามารถเร่งกระบวนการได้ด้วยการคูณ δp ด้วย ω ซึ่งค่าที่เหมาะสมโดยส่วนใหญ่คือ 1.8 (ซึ่งไม่มีกรณีที่ใช้เกินค่า 2.0) มิฉะนั้นแล้วผลเฉลยจากการทำซ้ำจะไม่เสถียร

ในกรณีที่มีของไหล 2 ชนิดจะได้สมการ

$$\omega \delta p = (\omega) [-S / (\partial S / \partial p)] \quad (72)$$

แต่ในกรณีของไหลชนิดเดียวจะไม่สามารถคูณด้วย ω ได้แต่จะได้สมการใหม่คือ

$$\omega \delta p = \frac{\omega}{1 - \omega(1-\eta) \delta t R} \quad (73)$$

เมื่อ
$$R = \left(\frac{\partial S}{\partial p} \Delta x d_c \right)^{-1}$$

และ Δx จะเป็นค่า δx เมื่อเป็น neighbor cell ในทิศทางแกน X แต่ในกรณีอื่น Δx จะเท่ากับ δy ของเซลล์พื้นผิว (surface cell)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 Determining interfaces within a cell

สำหรับบางปัญหาที่ต้องการหา Surface Tension เราจำเป็นต้องทราบเกี่ยวกับตำแหน่งของขอบของ เซลล์ในเทคนิคของวิธีการ VOF จะสมมติให้ขอบนั้นสามารถประมาณค่าได้โดยใช้เส้นตรงตัดผ่านระหว่างเซลล์ โดยในขั้นแรกจะกำหนดความชันของเส้นตรงนี้สามารถเคลื่อนที่ผ่านเซลล์ไปยังตำแหน่งอื่นที่เป็นจุดตัด ซึ่งเรารู้จักค่านี้ในนามของค่า F ในเซลล์

ในการกำหนดความชันของขอบ เราจะกำหนดค่าฟังก์ชันตัวใหม่คือ $Y(x)$ หรือ $X(y)$ เพื่อแทนค่าของขอบ ซึ่งค่านี้จะขึ้นอยู่กับทิศทางของมันถ้าค่าขอบถูกแทนด้วย $Y(x)$ เราจะคำนวณ $\frac{dY}{dx}$

ซึ่งค่าประมาณของ $Y(x)$ คือ

$$Y_i = Y(x_i) = F(i, j-1)\delta y_{j-1} + F(i, j)\delta y_j + F(i, j+1)\delta y_{j+1} \quad (74)$$

เมื่อ $y = 0$ จะดำเนินการเป็นเส้นด้านล่างของแถว $j-1$ ในเซลล์

ดังนั้น

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = [(Y_{i+1} - Y_i)\delta x_{i-\frac{1}{2}} / \delta x_{i+\frac{1}{2}} + (Y_i - Y_{i-1})\delta x_{i+\frac{1}{2}} / \delta x_{i-\frac{1}{2}}] / (\delta x_{i-\frac{1}{2}} + \delta x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (75)$$

โดย

$$\delta x_{i+\frac{1}{2}} = (\delta x_{i+1} + \delta x_i) / 2$$

$$\delta x_{i-\frac{1}{2}} = (\delta x_i + \delta x_{i-1}) / 2$$

ในทางเดียวกัน จะได้ว่า

$$X_j = X(y_j) = F(i-1, j)\delta x_{i-1} + F(i, j)\delta x_i + F(i+1, j)\delta x_{i+1} \quad (76)$$

และ

$$\left(\frac{dX}{dy}\right)_j = [(X_{j+1} - X_j)\delta y_{j-\frac{1}{2}} / \delta y_{j+\frac{1}{2}} + (X_j - X_{j-1})\delta y_{j+\frac{1}{2}} / \delta y_{j-\frac{1}{2}}] / (\delta y_{j+\frac{1}{2}} + \delta y_{j-\frac{1}{2}}) \quad (77)$$

ถ้า $\left|\frac{dY}{dx}\right|$ น้อยกว่า $\left|\frac{dX}{dy}\right|$ แล้วขอบจะเป็นแนวนอนมากกว่าแนวตั้ง ในทางกรณีอื่นมันจะ

ใกล้เคียงกับแนวตั้งมากกว่าค่าอนุพันธ์ที่มีขนาดเล็กที่สุดจะให้การประมาณค่าความชันที่ดีที่สุดเพราะการประมาณค่าของ y หรือ x ที่สอดคล้องกันนั้นจะมีความถูกต้องมากกว่า

สมมติให้ $\left|\frac{dY}{dx}\right|$ มีค่าน้อยสุดดังนั้นขอบจะใกล้เคียงแนวนอนมากกว่าแนวตั้ง โดยถ้า $\frac{dX}{dy}$ มีค่าเป็นลบ (เส้นของฟังก์ชันของไหล F จะอยู่ด้านล่างขอบ) และเซลล์ $(i, j-1)$ จะถูกใช้เป็น

interpolation neighbor สำหรับเซลล์ผิว (i, j) แต่ถ้า $\frac{dX}{dy}$ มีค่าเป็นบวก เซลล์ $(i, j + 1)$ จะถูกเลือกเป็น interpolation neighbor เนื่องจากของไหลอาจจะอยู่ด้านบนของขอบ

3.5 Surface Tension and Wall Adhesion

แรงตึงผิวจะถูกเพิ่มเข้ามาเป็นตัวเลือกของ SOLA-VOF โดยใช้ตัวแปรที่มีชื่อว่า ISURF10 ในโปรแกรม VOF โดยกำหนดให้มีค่าเป็น 1 เมื่อมีแรงตึงผิวและมีค่าเป็น 0 ในกรณีอื่น โดยกำหนดให้สัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน (แรงต่อหน่วยความยาว) แทนด้วย σ

ขั้นตอนในการเพิ่มแรงตึงผิวในการคำนวณนั้นจะมี 2 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 เราจะต้องคำนวณตำแหน่งของความโค้งในแต่ละเซลล์ของขอบโดยใช้ค่า $Y(x)$ หรือ $X(y)$ ที่อยู่ในสมการ (74) และ (76) ดังนั้นความดันของแรงตึงผิวจะต้องถูกคำนวณ เมื่อกำหนดค่าความโค้ง (K) ได้แล้ว จะได้ว่าค่าความดันของแรงตึงผิวคือ

$$P_s = -\sigma K \quad (78)$$

ขั้นที่ 2 เราจะต้องเพิ่มแรงความดันนี้ในขอบทั้งหมด

ค่า K ในขั้นตอนที่หนึ่ง มีค่าเป็น

$$K = K_{xy} = \frac{1}{R_{xy}} \quad (79)$$

เมื่อ R_{xy} คือ รัศมีความโค้งในพิกัดฉาก

เมื่อขอบเข้าใกล้แนวอนมากกว่าจะได้ความโค้งในพิกัดฉากเป็น

$$K_{xy} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{dY}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}} \right] \quad (80)$$

ถ้าขอบใกล้แนวตั้งมากกว่า ค่า x และ y นั้นจะถูกเปลี่ยนเป็น $X(y)$ แทน $Y(x)$

การคำนวณค่า P_s นั้นก็จะเสร็จสิ้นแล้วยกเว้นในบริเวณที่ใกล้กับผนัง เนื่องจากจะมีแรงยึดติด (adhesion) ที่ผนังที่จะต้องถูกเพิ่มเข้ามาโดยให้มุมสัมผัสนั้นแทนด้วย *CANGLE* ซึ่งเป็นค่าที่ต้องรับค่าเข้ามา ถ้าไม่มีแรงยึดติด (adhesion) กับผนังแล้วค่ามุมจะถูกกำหนดให้เป็นศูนย์ แต่ถ้ามีแรงยึดติดแล้วค่า *CANGLE* จะหมายถึงมุมระหว่างผนังกับพื้นผิวของไหล ซึ่งอยู่ในฟังก์ชัน F เพื่อที่จะกำหนดเงื่อนไขของมุมนี้ เราจะต้องปรับค่า $Y(x)$ และ $X(y)$ ที่ผนัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ใดเห็นว่าเป็นประโยชน์ในการนำ
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างเช่น ให้เซลล์ที่ขอบ (i, j) ที่แสดงในรูปที่ 15a และ 15b ที่ของไหล F ถูกสมมติให้อยู่ด้านล่างขอบ

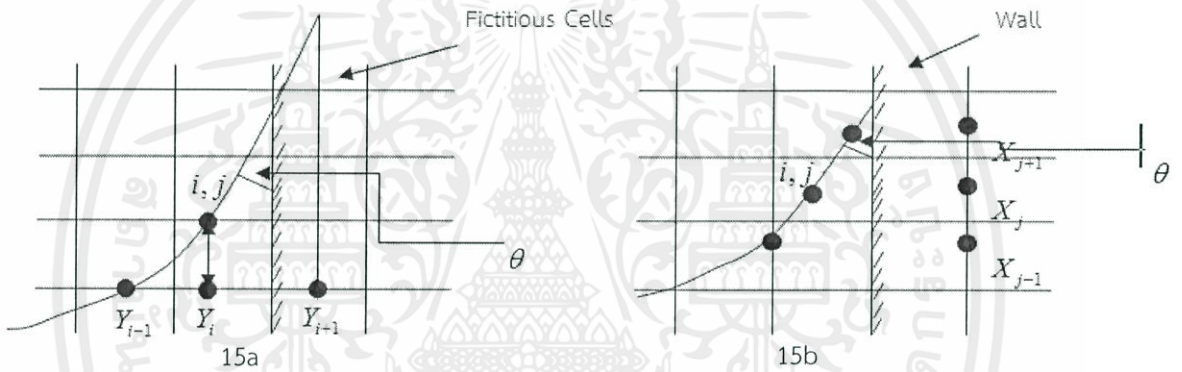
ความดันแรงตั้งผิวจะถูกคำนวณเหมือนกับวิธีที่ระบุไว้ข้างต้น ยกเว้นบริเวณที่เป็น surface จะถูกสมมติให้มีมุม $CANGLE$ ระหว่างผนังโดยปรับค่าที่จุด $i+1$ ของ $Y(x)$ และค่าที่จุด $j+1$ ของ $X(y)$ ได้เป็น

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2}(\delta x_i + \delta x_{i+1}) / TANCA \tag{81}$$

และ

$$X_{j+1} = X_j - \frac{1}{2}(\delta y_j + \delta y_{j+1}) TANCA \tag{82}$$

เมื่อ $TANCA = \tan(CANGLE)$



รูป 15a การยึดเกาะผนังสำหรับภายในบริเวณใกล้พื้นผิวแนวอนที่ถูกจำลองโดยการตั้งค่าของ Y_{i+1} ดังกล่าว $CANGLE$ เป็นระหว่างผนังกับพื้นผิวของของไหลและ 15b การยึดเกาะผนังสำหรับภายในบริเวณใกล้พื้นผิวแนวตั้งที่ถูกจำลองโดยการตั้งค่าของ X_{i+1} ดังกล่าว $CANGLE$ เป็นระหว่างผนังกับพื้นผิวของของไหล

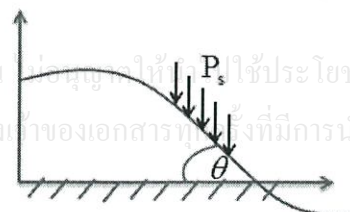
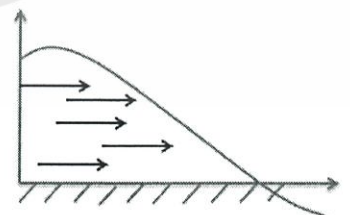
ในการเพิ่มแรง P_s ในทางใดทางหนึ่งรวมไปถึงการเพิ่มความเร่งเพราะจะมีผลต่อความเร็วบนเซลล์พื้นผิวโดย

การเพิ่มแรงในทิศแกน y

$$STFY = P_s \delta x_i$$

การเพิ่มแรงในทิศแกน x

$$STFX = P_s \delta x_i \tan \theta$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสาร
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารผู้จัดทำซึ่งมีการนำไปใช้

เราจึงนำแรงที่จะเพิ่ม ทำการบวกเพิ่มเข้าไปในทางขวาของสมการ (45) โดยจะมีผลทั้งทางด้านซ้าย ขวา บน และ ล่าง ของพื้นผิว

$$\begin{aligned}
 u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} &= \dots + \delta t \omega_R STFX (\delta y_j \delta \rho y_{i+\frac{1}{2}}) \\
 u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} &= \dots + \delta t \omega_L STFX (\delta y_j \delta \rho y_{i-\frac{1}{2}}) \\
 v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \dots + \delta t \omega_T STFY (\delta x_i \delta \rho y_{j+\frac{1}{2}}) \\
 v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= \dots + \delta t \omega_B STFY (\delta x_i \delta \rho y_{j-\frac{1}{2}})
 \end{aligned} \tag{83}$$

3.6 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)

ในการเพิ่มเงื่อนไขขอบพื้นผิวอิสระนั้นจำเป็นที่จะต้องกำหนดเงื่อนไขขอบของตารางและที่พื้นผิวของสิ่งกีดขวางภายในทั้งหมด โดยที่ความแตกต่างกันของเงื่อนไขขอบในลำดับต่างๆ อาจจะต้องสร้างขึ้นมารอบตาราง พิจารณาจากตัวอย่างขอบทางซ้ายถ้าเป็น rigid free-slip wall ความเร็วปกติจะเป็น 0 และความเร็วแนวสัมผัสควรมีความชันไม่ปกติ

ตัวอย่างเช่น

$$\left. \begin{aligned}
 u_{1,j} &= 0 \\
 v_{1,j} &= v_{2,j} \\
 p_{1,j} &= p_{2,j} \\
 F_{1,j} &= F_{2,j}
 \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

ถ้าขอบทางซ้ายเป็น rigid no-slip wall แล้วความเร็วแนวสัมผัสส่วนที่เป็นผนังควรเป็น 0 ด้วย

ตัวอย่างเช่น

$$\left. \begin{aligned}
 u_{1,j} &= 0 \\
 v_{1,j} &= -v_{2,j} \\
 p_{1,j} &= p_{2,j} \\
 F_{1,j} &= F_{2,j}
 \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

เงื่อนไขนี้จะถูกกำหนดไว้ในการคำนวณความเร็วจากสมการโมเมนตัม และหลังจากผ่านแต่ ละการของตาราง ระหว่างการทำความดันซ้ำ

เงื่อนไขขอบแบบ continuative or outflow boundaries ทำให้เกิดปัญหาของการ คำนวณความเร็วที่ต่ำ เพราะสิ่งที่กำหนดอาจส่งผลกระทบต่อกรไหลทั้งหมด ดังนั้นสิ่งที่จำเป็นคือ การกำหนดให้ของไหลออกนอกตารางได้น้อยที่สุดของผิวน้ำที่กำหนดในโปรแกรม SOLA-VOF ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขขอบแบบ continuative boundary condition ที่ถูกใช้ที่ขอบด้านซ้าย คือ

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j} &= u_{2,j} \\ v_{1,j} &= v_{2,j} \\ p_{1,j} &= p_{2,j} \\ F_{1,j} &= F_{2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

จากเงื่อนไขเหล่านี้ เราจะกำหนดหลังจากใช้สมการโมเมนตัม และไม่ทำการทำความเข้าใจด้านซ้ายแต่ละรอบ

สำหรับเงื่อนไขขอบ periodic boundary condition ในแนวแกน x ทางซ้ายและทางขวาของขอบจะต้องกำหนดการสะท้อนของระยะช่วง โดยระยะช่วงเลือกให้มีค่าเท่ากับระยะห่างจากผนังด้านซ้ายถึงขอบด้านซ้ายของเซลล์สุดท้ายในตารางด้านขวา ซึ่งคือ 2 หลัของเซลล์ ($i = \text{IMAX}$ และ $i = \text{IMAX} - 1$) ซึ่งกำหนดไว้บนด้านขวาของตาราง

สำหรับกำหนดค่าของเงื่อนไขขอบแบบ periodic boundary condition จากเงื่อนไขจะได้ฝั่งซ้ายเป็น

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j} &= u_{\text{IM}2,j} \\ v_{1,j} &= v_{\text{IM}2,j} \\ F_{1,j} &= F_{\text{IM}2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

และฝั่งขวาเป็น

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{IM}1,j} &= u_{2,j} \\ v_{\text{IM}1,j} &= v_{2,j} \\ p_{\text{IM}1,j} &= p_{2,j} \\ (p_s)_{\text{IM}1} &= (p_s)_{2,j} \\ v_{\text{IMAX},j} &= v_{3,j} \\ F_{\text{IMAX},j} &= F_{3,j} \\ F_{\text{IM}1,j} &= F_{2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

เมื่อ $\text{IM}1 = \text{IMAX} - 1$ และ $\text{IM}2 = \text{IMAX} - 2$

ในกรณีนี้ เงื่อนไขเหล่านี้จะถูกกำหนดในการคำนวณความเร็วจากสมการโมเมนตัมชัดเจน และหลังการทำความเข้าใจในแต่ละรอบ

ในโปรแกรม SOLA-VOF จะเขียนเพื่อให้สามารถใช้ได้กับเงื่อนไขค่าขอบที่กำหนดได้โดยเอกสารอัตโนมัติ โดยการรับค่าตัวเลขเข้ามำงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง สำหรับการกำหนดชนิดของเงื่อนไขขอบทางซ้าย

$$WL = \begin{cases} 1. \text{ rigid free-slip wall} \\ 2. \text{ rigid no-slip wall} \\ 3. \text{ continuative} \\ 4. \text{ periodic in } x \\ 5. \text{ specified pressure} \end{cases}$$

ในทำนองที่คล้ายกัน

WR หมายถึงเงื่อนไขขอบทางด้านขวา

WT หมายถึงเงื่อนไขขอบทางด้านบน

WB หมายถึงเงื่อนไขขอบทางด้านล่าง

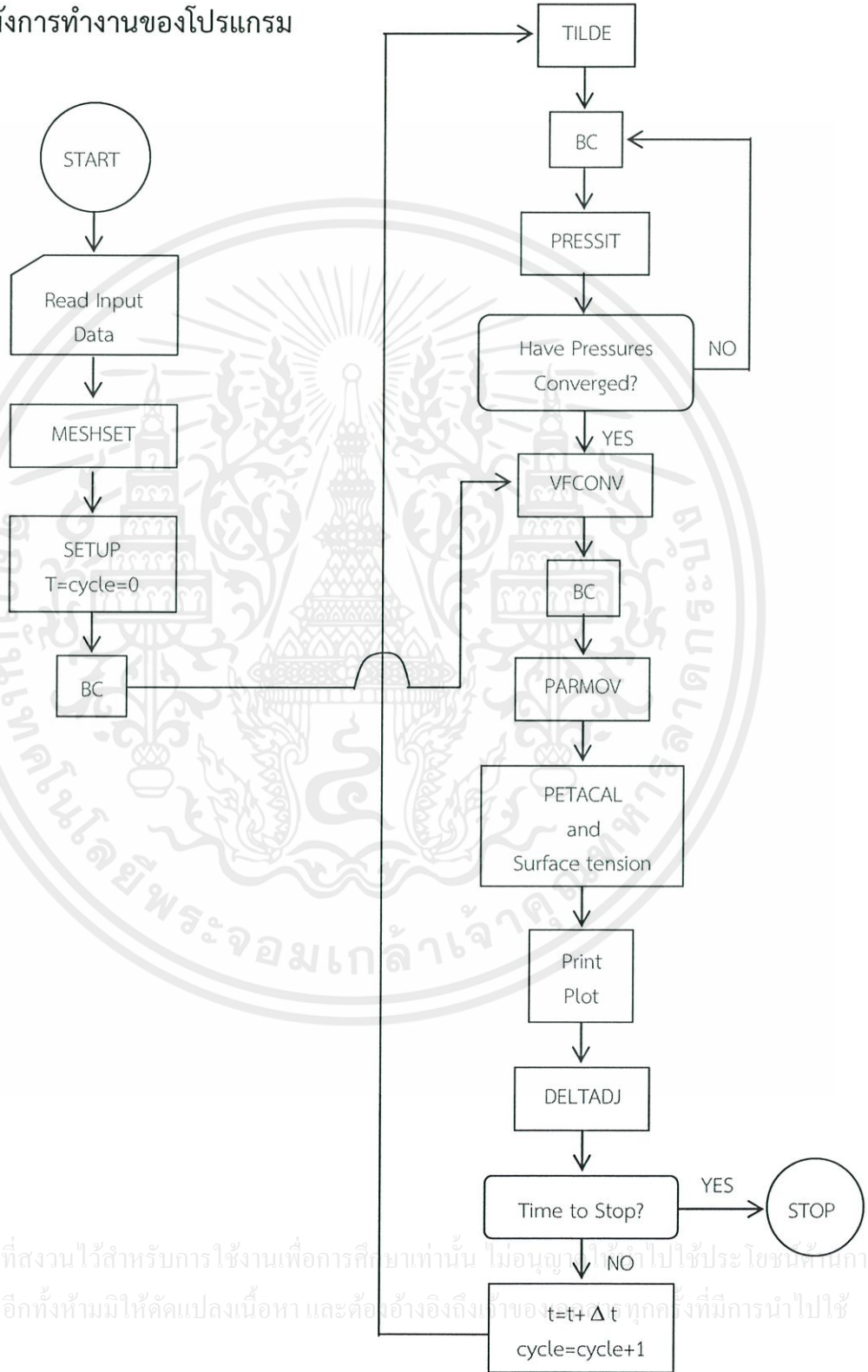
โดยที่เงื่อนไขขอบแบบ specified pressure คือ เงื่อนไขขอบค่าคงที่ของความดันที่ผนังด้านซ้าย จะกำหนดโดยให้ค่าความดันคงที่ในหลักที่ $j=2$ มิฉะนั้นจะกระทำกับขอบแบบอื่น เช่น continuative boundary condition

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การพัฒนาโปรแกรม

4.1 แผนผังการทำงานของโปรแกรม



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 16 แผนผังการทำงานของโปรแกรม SOLA-VOF

จากรูปที่ 16 เป็นแผนผังการทำงานของ main program SOLA-VOF ซึ่งมีวิธีการคำนวณดังต่อไปนี้

- (1) อ่านและพิมพ์ข้อมูลที่รับเข้าและผลลัพธ์
- (2) ทำการเรียกใช้ซับรูทีนต่างๆ ตามลำดับที่ได้ควบคุมไว้ในวงจรของการคำนวณทุกรอบ
- (3) ทำการเพิ่มเวลาในการคำนวณของแต่ละรอบจาก $t \rightarrow t + DELT$
- (4) เพิ่มจำนวนรอบหนึ่งรอบในแต่ละรอบของการคำนวณ
- (5) ปิดหรือหยุดการทำงานในกรณีที่ผลเฉลยไม่ได้เป็นที่ยอมรับกับการอนุรักษ์โดยมวลหรือได้ผลเฉลยตามเวลาที่ต้องการ

4.2 ซับรูทีนของโปรแกรม(subroutines)

โปรแกรม SOLA-VOF จะถูกเขียนอยู่ในรูปแบบของซับรูทีนโดยมีการดำเนินการของแต่ละซับรูทีนอยู่ ซึ่งแผนผังการทำงานของโปรแกรมในรูปที่ 19 จะแสดงลำดับการเรียกใช้ซับรูทีนต่างๆ โปรแกรมหลัก

โดยซับรูทีนที่ใช้งานใน SOLA-VOF จะมีดังนี้

4.2.1 BC (เงื่อนไขขอบเขต)

- (1) กำหนดค่าของตัวแปรที่เหมาะสมกับเงื่อนไขขอบแบบ rigid free-slipwall, rigid no-slip wall, continuative, periodic หรือ specified pressure
- (2) กำหนดค่าของตัวแปรที่เหมาะสมรอบขอบของพื้นผิวอิสระที่สร้าง
- (3) สำหรับเงื่อนไขขอบแบบพิเศษ เช่น ขอบที่มีการไหลเข้าจะต้องคำนวณด้วยมือของแต่ละปัญหา
- (4) กำหนดค่าเฉลี่ยของ F และ p ในเซลล์อุปสรรคที่อยู่ติดกับเซลล์ของไหล

4.2.2 CAVOVO (calculates void volumes)

- (1) คำนวณพื้นที่ส่วนที่เป็นอากาศ ($F = 0$)

4.2.3 DELTADJ (time step adjustment)

- (1) คำนวณค่าสูงสุดของ δt ที่มีความเสถียรภาพ
- (2) ปรับ δt ให้พอดีตามจำนวนของการทำซ้ำและจำนวนสูงสุดที่ยอมรับได้สำหรับ

ความเสถียรภาพ

- (3) คำนวณปัจจัยในการทำซ้ำโดยกำหนดให้เป็นตัว $BETA$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกร ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามเผยแพร่ลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.4 LAVORE (label void regions)

- (1) ตรวจสอบและระบุพื้นที่ทั้งหมดที่เป็นอากาศ ($F = 0$) โดยระบุเป็น $NF = 6, 7, 8, \dots$

4.2.5 MESHSET (meshset-up)

- (1) สร้างตารางการคำนวณ จากข้อมูลที่รับเข้ามาในชุดของตัวแปรที่ชื่อว่า MSHSET
- (2) ตรวจสอบตัวแปรทั้งหมดที่จำเป็นในการใช้ตลอดทั้งโปรแกรม

4.2.6 PARMOV (particlemovement)

- (1) คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคในความเร็วของของไหล
- (2) ทำการเก็บค่าของตัวบ่งชี้อนุภาคที่ออกจากตารางหรือถูกแทนที่ด้วยอนุภาคที่เข้ามาใหม่

4.2.7 PETACAL (PETA interpolation factor calculation)

- (1) กำหนดความชันของพื้นผิวในเซลล์ที่เป็นพื้นผิว
- (2) กำหนดค่าเซลล์ที่จุด $NF(i, j)$ เพื่อแสดงการประมาณค่าใกล้เคียงกับพื้นผิวเซลล์

$NF = 1$, ค่าใกล้เคียงทางด้านซ้าย

$NF = 2$, ค่าใกล้เคียงทางด้านขวา

$NF = 3$, ค่าใกล้เคียงทางด้านล่าง

$NF = 4$, ค่าใกล้เคียงทางด้านบน

ดังนั้น ข้อมูลข้างต้นที่กล่าวมาอธิบายถึงทิศทางของพื้นผิว (ไม่ว่าจะเป็นแนวตั้งหรือแนวนอน) และด้านข้างของพื้นผิวของของไหลที่มีอยู่แล้ว

- (3) คำนวณพื้นผิวความดัน $PS(i, j)$ ที่เกิดจากแรงตึงผิวในพื้นผิวเซลล์ ถ้ามีการกำหนดแรงตึงผิว

4.2.8 PRESSIT (pressure Iteration)

- (1) การทำซ้ำของความเร็วและความดันในเซลล์ของแต่ละตาราง
- (2) คำนวณความดันของเซลล์ที่พื้นผิวอิสระที่ปรับค่าตามความดันที่นำมาใช้ (การอนุรักษ์มวลในพื้นผิวเซลล์จะไม่มีกรวนซ้ำ) ความดันของเซลล์จะถูกกำหนดโดยการประยุกต์ใช้เงื่อนไขขอบเขตพื้นผิวอิสระ

4.2.9 PRTPLT (prints and plots)

- (1) แสดงผลข้อมูลผลเฉลยออกมา

4.2.10 SETUP (general setup)

- (1) กำหนดค่าเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณ
- (2) คำนวณการกระจายความดันเริ่มต้น โดนเริ่มต้นที่ $p(i, j)$
- (3) ทำเครื่องหมายจำนวนอนุภาคเริ่มต้น
- (4) ตั้งค่าความเร็วเริ่มต้นด้วย $U(i, j) = UI$ และ $V(i, j) = VI$ ทุกที่ในตาราง
- (5) คำนวณปัจจัย $BETA(i, j)$ ที่ใช้ในการทำซ้ำของความดัน
- (6) ตั้งค่าอุปสรรคด้วยการกำหนดเซลล์อุปสรรคมี $BETA(i, j) = -1.0$ นียามของอุปสรรคโดยทั่วไป จะต้องมีการคำนวณสำหรับแต่ละปัญหา

4.2.11 TILDE (temporary velocity calculation)

- (1) คำนวณการแก้ปัญหาที่ชัดเจนสำหรับแต่ละสมการโมเมนตัม (เช่น ค่าใหม่ของความเร็วจะได้รับจากเวลาที่ n ของความดัน, การเคลื่อนที่และการกระจายความเร็ว) ค่าต่างๆเหล่านี้จะถูกรวบรวมเข้าสู่เวลาที่ $n+1$ ในการวนซ้ำของความดัน

4.2.12 TMS10 (two material surface tension)

- (1) เพิ่มพื้นผิวสัมผัสที่มีแรงตึงผิวเพื่อความเร็วในบริเวณที่ใกล้กับอินเตอร์เฟซ

4.2.13 VFCONV (Volume fraction convection)

- (1) คำนวณวิธีการแก้สมการ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot uF = 0$$

- (2) คำนวณและจัดเก็บเพื่อพิมพ์ข้อผิดพลาดใดๆ ในปริมาณ (เช่น การสูญเสียหรือการได้รับ) ในระหว่างการคำนวณขั้นตอนที่ (1)

4.3 การกำหนดค่าเริ่มต้นที่ใช้ในโปรแกรม

ในที่นี้เราจะทำการประกาศตัวแปรที่จะใช้ในโปรแกรมแล้วทำการกำหนดค่าเริ่มต้นดังนี้

$NU=0.0$ โดย NU คือค่าสัมประสิทธิ์ของความหนืดซึ่งก็คือค่า ν

$ICYL=0$ โดย $ICYL$ คือตัวบ่งชี้ของลักษณะพิกัดของตารางที่ใช้ซึ่งก็คือค่า ξ

(กำหนดให้มีค่าเป็น 1 สำหรับพิกัดทรงกระบอก และมีค่าเป็น 0 สำหรับพิกัดฉาก)

$EPSI=1.0 \times 10^{-3}$ โดย $EPSI$ คือ เกณฑ์การลู่เข้าการวนซ้ำความดัน

$GX=0.0$ โดย GX คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวแกน x ซึ่งก็คือค่า g_x

$GY=-1.0$ โดย GY คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวแกน y ซึ่งก็คือค่า g_y

$UI=0.2$ โดย UI คือ ความเร็วเริ่มต้นในแนวแกน x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานในเชิงการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น มิใช่เพื่อเผยแพร่เป็นสาธารณะ ซึ่งหากมีการนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสาร หรือมีการดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

VI=0.0	โดย VI คือ ความเร็วเริ่มต้นในแนวแกน y
VELMX=0.2	โดย VELMX คือ ความเร็วสูงสุดที่ใช้ในการแปลงขนาดของเวกเตอร์
IMOVY=0	โดย IMOVY คือ เครื่องหมายว่าจะแสดงผลลัพธ์แบบใด
OMG=1.7	โดย OMG คือ ปัจจัยที่ใช้ในการวนซ้ำของความดัน ซึ่งก็คือค่า ω
ALPHA=1.0	โดย ALPHA คือ ตัวควบคุมปริมาตรการไหลของdormer cellซึ่งก็คือค่า α
WL=3	โดย WL คือ ตัวบอกลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตทางซ้ายของตาราง
WR=1	โดย WR คือ ตัวบอกลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตทางขวาของตาราง
WT=1	โดย WT คือ ตัวบอกลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตทางด้านบนของตาราง
WB=1	โดย WB คือ ตัวบอกลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตทางด้านล่างของตาราง
CSQ=-1.0	โดย CSQ คือ ค่าความเร็วเสียงกำลังสองซึ่งก็คือค่า c^2 (กำหนดให้เท่ากับ -

1.0 สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้)

AUTOT=0.0 โดย AUTOT คือ ตัวบอกลักษณะของเวลาที่ทำอัตโนมัติ(กำหนดให้เท่ากับ 1.0 สำหรับการปรับค่า δt แบบอัตโนมัติ และ เท่ากับ 0.0 สำหรับการปรับค่า δt แบบคงที่)

ISYMLT=0 โดย ISYMLT คือ ตัวบ่งชี้จุดที่สมมาตร (กำหนดให้ เท่ากับ 1 สำหรับจุดที่สมมาตร และ เท่ากับ 0 สำหรับจุดที่ไม่สมมาตร)

ISURF10=0 โดย ISURF10 คือ ตัวบ่งชี้แรงดึงของพื้นผิว (กำหนดให้ เท่ากับ 1 ถ้ามีแรงดึงผิว และ เท่ากับ 0 ถ้าไม่มีแรงดึงผิว)

SIGMA=0.0 โดย SIGMA คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงดึงผิว

CANGLE=90 โดย CANGLE คือ มุมสัมผัสระหว่างของไหลกับผนัง(องศา)

NMAT=1 โดย NMAT คือ จำนวนของของไหลที่คำนวณ(1 หรือ 2)

RHOF=1.0 โดย RHOF คือ ความหนาแน่นของของไหล (สำหรับบริเวณที่ $F=1$)ซึ่งก็คือค่า ρ_f

RHOFC=1.0 โดย RHOFC คือ ความหนาแน่นในบริเวณของฟังก์ชัน F ซึ่งก็คือค่า ρ_c

FLHT=1.0 โดย FLHT คือ ความสูงของของไหลในแนวแกน y

XPL=0.0 โดย XPL คือ ตำแหน่งทางด้านซ้ายของอนุภาครูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

XPR=0.0 โดย XPR คือ ตำแหน่งทางด้านขวาของอนุภาครูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

YPB=0.0 โดย YPB คือ ตำแหน่งทางด้านล่างของอนุภาครูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

YPT=0.0 โดย YPT คือ บริเวณทางด้านบนของพื้นที่อนุภาคของสี่เหลี่ยมมุมฉาก

NPX=0 โดย NPX คือ จำนวนของอนุภาคในแนวแกน x ที่เราตั้งค่าอนุภาคของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

NPY=0 โดย NPY คือ จำนวนของอนุภาคในแนวแกน y ที่เราตั้งค่าอนุภาคของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$EMF = 1.0 \times 10^{-6}$$

$$EM6 = 1.0 \times 10^{-6}$$

$$EM10 = 1.0 \times 10^{-10}$$

$$EP10 = 1.0 \times 10^{-10}$$

$$RPD = 0.0174532925$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ให้บริการใช้ฟรี constant variables ไม่อนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งนั้นขอสงวนสิทธิ์ในสิ่งที่ปรากฏและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และมีค่าที่เราต้องรับค่าเข้ามาดังนี้

NAME คือ ชื่อของปัญหาที่เราจะแก้ไข

DELT คือ δt ระยะห่างของเวลา โดยกำหนดให้ DELT = 0.2

TWFIN คือ เวลาที่สิ้นสุดการคำนวณ โดยกำหนดให้ TWFIN = 12

PRTDT คือ ระยะห่างของเวลาในการพิมพ์ลงกระดาษ โดยกำหนดให้ PRTDT = 5

NKX คือ จำนวนตารางย่อยในแกน x โดยกำหนดให้ NKX = 1

XL(N) คือ ตำแหน่งขอบซ้ายของตารางย่อยที่ N (ขอบขวาของตารางย่อยที่ N จะถูกกำหนดโดยขอบซ้ายของตารางย่อยที่ N+1) โดยกำหนดให้ XL(1) = 0, XL(2) = 12

XC(N) คือ ตำแหน่งในแกน x ที่ตัดกันในตารางย่อยที่ N โดยกำหนดให้ XC(1) = 6

NXL(N) คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง XL(N) และ XC(N) ในตารางย่อยที่ N โดยกำหนดให้ NXL(1) = 10

NXR(N) คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง XC(N) และ XL(N+1) ในตารางย่อยที่ N โดยกำหนดให้ NXR(1) = 10

DXMN(N) คือ การเพิ่มพื้นที่ที่น้อยที่สุดของตารางย่อยในแกน x โดยกำหนดให้ DXMN(1) = 0.6

NKY คือ จำนวนตารางย่อยในแกน y โดยกำหนดให้ NKY = 1

YL(N) คือ ตำแหน่งขอบด้านล่างของตารางย่อยที่ N (ขอบบนของตารางย่อยที่ N จะถูกกำหนดโดยขอบล่างของตารางย่อยที่ N+1) โดยกำหนดให้ YL(1) = 0, YL(2) = 1.6

YC(N) คือ ตำแหน่งของในแกน y ที่ตัดกันในตารางย่อยที่ N โดยกำหนดให้ YC(1) = 0.8

NYL(N) คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง YL(N) และ YC(N) ในตารางย่อยที่ N โดยกำหนดให้ NYL(1) = 4

NYR(N) คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง YC(N) และ YL(N+1) ในตารางย่อยที่ N โดยกำหนดให้ NYR(1) = 4

DYMN(N) คือ การเพิ่มพื้นที่ที่น้อยที่สุดของตารางย่อยในแกน y โดยกำหนดให้ DYMN(1) = 0.2

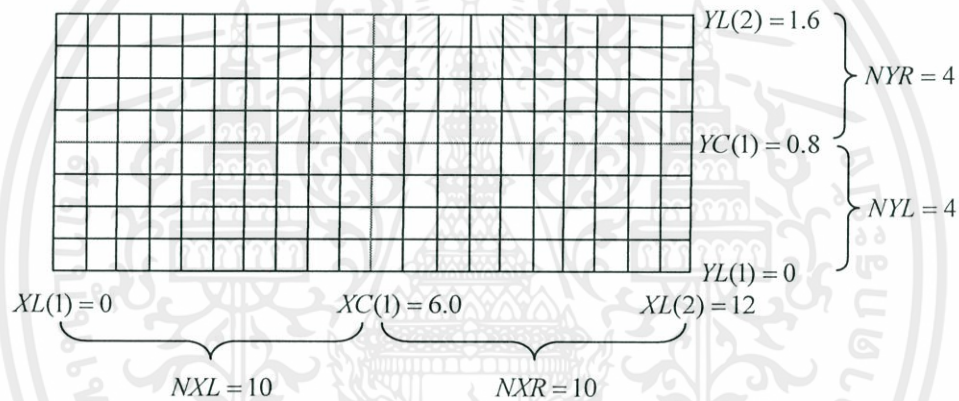
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4 ตัวอย่างการพิจารณา

ในโครงการนี้เราจะยกตัวอย่างการพิจารณาปัญหาของการเทน้ำลงในกล่องใบหนึ่ง โดยเราจะเทน้ำทางด้านซ้ายของกล่อง สังเกตการกระทบของน้ำกับผนังของกล่องที่น้ำไหลจากด้านซ้ายไปด้านขวาว่าน้ำจะมีการกระทบหรือกระเด็นไปอย่างไร ซึ่งจะแบ่งตารางการพิจารณาการเคลื่อนที่ของน้ำเท่ากับช่อง 1 ช่องใหญ่ แล้วแบ่งช่องจากตรงกลางของตารางไปทางขวา 10 ช่อง และทางซ้าย 10 ช่องตามแนวแกน x ทำการกำหนดให้ $\delta x = 0.6$ และแบ่งช่องของตารางจากตรงกลางไปด้านบน 8 ช่อง และด้านล่าง 8 ช่องตามแนวแกน y กำหนดให้ $\delta y = 0.2$ ดังนั้นจะได้ขนาดของตารางทั้งหมด 10×8 ช่อง โดยกำหนดให้ค่าในแกน x มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 12 และกำหนดให้ค่าในแกน y มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1.6 โดยมีการกำหนดค่าดังต่อไปนี้

$$NKX = 1, XL = 0.0, 12.0, XC = 6.0, NXL = 10, NXR = 10, DXMN = 0.6$$

$$NKY = 1, YL = 0.0, 1.6, YC = 0.8, NYL = 4, NYR = 4, DYMNO = 0.2$$



รูปที่ 17 แสดงภาพจากตัวอย่าง

และกำหนดให้ δt เป็นแบบค่าคงที่ และมีเงื่อนไขขอบทางซ้ายแบบ continuative ส่วนด้านอื่นเป็นแบบ rigid free-slip wall โดยมีค่าความเร็วเริ่มต้นในแนวแกน x เป็น 0.2 ซึ่งในการคำนวณจะหาผลเฉลี่ยตั้งแต่เวลา 0 ถึง 12 ดังนั้นจะสามารถกำหนดค่าได้เป็น

$$DELTA = 0.2, FLHT = 1.0, GY = -1.0, PLTDT = 1.0, PRTDT = 5.0,$$

$$TWFIN = 12.0, UI = 0.2, VELMX = 0.2, WL = 3, AUTOT = 0.0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการคำนวณหาค่าผลเฉลยจากตัวอย่างที่พิจารณาโดยใช้โปรแกรม SOLA-VOF จะได้ผลเฉลยที่เวลา $t = 0$, $t = 0.2$, $t = 5$ และ $t = 10$ ดังนี้

ผลเฉลยที่เวลา $t = 0$

Name = SOLAVOF

ITER = 0 T = 0.00 DELT=0.20 CYCLE=0 VCHGT=2.640000e-06

NREG=1

K	VOL(K)	PR(K)							
6	7.200003	0.000000							
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
2	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
2	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
3	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
3	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
4	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
4	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
5	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
19	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
20	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	0.000000	0.900000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	0.000000	0.700000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	0.000000	0.500000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	0.000000	0.300000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	0.066667	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
21	7	0.000000	0.000000	0.000000	-0.666666	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	2	0.000000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	4	0.000000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

ตารางที่ 2 ผลเฉลยที่เวลา $t = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยที่เวลา $t = 0.2$

Name = SOLAVOF

ITER = 25 T = 0.20 DELT=0.20 CYCLE=1 VCHGT=8.821031e-05

NREG=1

K	VOL(K)	PR(K)							
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
6	7.160059	0.000000							
2	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	3	0.200000	0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
2	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
3	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	3	0.200000	0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
3	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
4	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	3	0.200000	0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
4	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
5	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
5	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์อื่นใด
 หากกรณีใดๆ ทั้งสิ้น กรุณาแจ้งไปยังฝ่ายวิชาการ โทร. 0-2329-1000 หรือ 0-2329-1001

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
5	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
6	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
6	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
7	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
7	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
8	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
8	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
9	2	0.199998	-0.000000	0.900001	-0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	3	0.199998	0.000000	0.700001	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	4	0.199998	0.000000	0.500001	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	5	0.199999	0.000001	0.300001	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	6	0.200000	0.000001	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
9	7	0.199999	0.000003	0.000000	0.000010	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	8	0.199999	0.000000	0.000000	0.000010	0.333316	0.000000	6.000000	1.000000
9	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
10	2	0.199994	-0.000000	0.900006	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	3	0.199994	0.000001	0.700007	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	4	0.199995	0.000002	0.500006	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	5	0.199997	0.000003	0.300004	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	6	0.199999	0.000003	0.100001	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566574
10	7	0.199999	0.000003	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002	3.000000	1.999992

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
10	8	0.199999	0.000003	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002	3.000000	1.999992
10	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
11	2	0.199981	-0.000000	0.900024	-0.000024	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	3	0.199982	0.000003	0.700025	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	4	0.199985	0.000007	0.500021	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	5	0.199990	0.000010	0.300014	0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	6	0.199997	0.000010	0.100005	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566581
11	7	0.199997	0.000011	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000009	3.000000	1.999963
11	8	0.199997	0.000000	0.000000	-0.000059	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
12	2	0.199945	0.000002	0.900081	-0.000051	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	3	0.199948	0.000013	0.700079	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	4	0.199958	0.000023	0.500067	0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	5	0.199973	0.000030	0.300044	0.000006	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
12	6	0.199991	0.000031	0.100015	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566602
12	7	0.199991	0.000033	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000030	3.000000	1.999879
12	8	0.199991	0.000000	0.000000	-0.000176	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
13	2	0.199849	0.000013	0.900248	-0.000094	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	3	0.199861	0.000042	0.700235	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	4	0.199889	0.000067	0.500192	0.000007	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
13	5	0.199929	0.000084	0.300126	0.000012	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
13	6	0.199976	0.000089	0.100042	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566658
13	7	0.199976	0.000094	0.000000	0.000000	0.000000	0.000088	3.000000	1.999649
13	8	0.199976	0.000000	0.000000	-0.000493	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
14	2	0.199605	0.000050	0.900700	-0.000156	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	3	0.199641	0.000125	0.700650	0.000006	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
14	4	0.199714	0.000186	0.500526	0.000014	0.000000	0.999997	0.000000	1.000000
14	5	0.199817	0.000227	0.300340	0.000019	0.000000	0.999996	0.000000	1.000000
14	6	0.199939	0.000239	0.100113	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566806
14	7	0.199939	0.000252	0.000000	0.000000	0.000000	0.000238	3.000000	1.999048
14	8	0.199939	0.000000	0.000000	-0.001320	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
15	2	0.198994	0.000157	0.901884	-0.000235	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	3	0.199089	0.000344	0.701727	0.000014	0.000000	0.999997	0.000000	1.000000
15	4	0.199277	0.000494	0.501383	0.000024	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
15	5	0.199538	0.000593	0.300889	0.000030	0.000000	0.999994	0.000000	1.000000

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
15	6	0.199846	0.000624	0.100296	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.567184
15	7	0.199846	0.000655	0.000000	0.000000	0.000000	0.000623	3.000000	1.997512
15	8	0.199846	0.000000	0.000000	-0.003430	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
16	2	0.197469	0.000444	0.904902	-0.000324	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	3	0.197714	0.000907	0.704459	0.000025	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
16	4	0.198188	0.001277	0.503552	0.000035	0.000000	0.999993	0.000000	1.000000
16	5	0.198843	0.001517	0.302275	0.000041	0.000000	0.999992	0.000000	1.000000
16	6	0.199614	0.001594	0.100758	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.568136
16	7	0.199614	0.001671	0.000000	-0.000000	0.000000	0.001593	3.000000	1.993649
16	8	0.199614	0.000000	0.000000	-0.008742	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
17	2	0.193678	0.001181	0.912496	-0.000413	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	3	0.194295	0.002328	0.711315	0.000038	0.000000	0.999992	0.000000	1.000000
17	4	0.195476	0.003242	0.508987	0.000048	0.000000	0.999990	0.000000	1.000000
17	5	0.197110	0.003830	0.305745	0.000053	0.000000	0.999989	0.000000	1.000000
17	6	0.199037	0.004023	0.101915	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.570518
17	7	0.199037	0.004215	0.000000	-0.000000	0.000000	0.004022	3.000000	1.984042
17	8	0.199037	0.000000	0.000000	-0.022039	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
18	2	0.184290	0.003031	0.931462	-0.000493	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	3	0.185796	0.005874	0.728432	0.000050	0.000000	0.999990	0.000000	1.000000
18	4	0.188698	0.008145	0.522558	0.000059	0.000000	0.999988	0.000000	1.000000
18	5	0.192755	0.009609	0.314413	0.000063	0.000000	0.999987	0.000000	1.000000
18	6	0.197585	0.010093	0.104804	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.576459
18	7	0.197585	0.010577	0.000000	-0.000000	0.000000	0.010092	3.000000	1.960431
18	8	0.197585	0.000000	0.000000	-0.055304	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
19	2	0.161311	0.007549	0.978592	-0.000555	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	3	0.164739	0.014580	0.771043	0.000061	0.000000	0.999988	0.000000	1.000000
19	4	0.171532	0.020316	0.556463	0.000069	0.000000	0.999986	0.000000	1.000000
19	5	0.181450	0.024099	0.336148	0.000072	0.000000	0.999986	0.000000	1.000000
19	6	0.193817	0.025355	0.112049	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.591309
19	7	0.193817	0.026611	0.000000	0.000000	0.000000	0.025354	3.000000	1.903480
19	8	0.193817	0.000000	0.000000	-0.139336	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	0.107451	0.017834	1.094660	-0.000595	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	3	0.113404	0.034960	0.876826	0.000069	0.000000	0.999986	0.000000	1.000000

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
20	4	0.126254	0.050068	0.641866	0.000076	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000
20	5	0.148102	0.061199	0.391798	0.000078	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
20	6	0.182701	0.064904	0.130599	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.629242
20	7	0.182701	0.068610	0.000000	0.000000	0.000000	0.064903	3.000000	1.770215
20	8	0.182701	0.000000	0.000000	-0.361575	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	0.035695	1.372308	-0.000612	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	0.073511	1.136613	0.000073	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	0.115611	0.863103	0.000080	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	0.164995	0.547492	0.000081	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	0.225895	0.182497	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.732950
21	7	0.000000	0.286795	0.000000	0.000000	0.000000	0.225894	3.000000	1.476273
21	8	0.000000	0.000000	0.000000	-1.738478	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	2	0.000000	0.035695	1.372308	0.178473	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	0.073511	1.136613	0.189080	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000
22	4	0.000000	0.115611	0.863103	0.210503	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	0.164995	0.547492	0.246918	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	0.225895	0.182497	0.304501	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	0.000000	0.000000	-1.129475	0.000000	0.225894	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

ตารางที่ 3 แสดงผลเฉลยที่ $t = 0.2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยที่เวลา $t = 5$

Name = SOLAVOF

ITER = 17 T = 5.00 DELT=0.20 CYCLE=25 VCHGT=1.533542e-03

NREG=1

K	VOL(K)	PR(K)							
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
6	6.459714	0.000000							
2	2	0.205755	0.000399	0.901302	-0.000676	0.000000	0.999851	0.000000	1.000000
2	3	0.207849	0.001034	0.701153	0.000035	0.000000	0.999959	0.000000	1.000000
2	4	0.212071	0.001853	0.500759	0.000058	0.000000	0.999949	0.000000	1.000000
2	5	0.217843	0.002923	0.300083	0.000070	0.000000	0.999946	0.000000	1.000000
2	6	0.214218	0.004256	0.099083	0.000000	0.000000	0.997193	3.000000	0.667916
2	7	0.177238	0.042953	0.000000	0.125191	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	8	0.177238	0.000000	0.000000	0.080630	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	9	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
3	2	0.185091	0.006804	0.890995	-0.000420	0.000000	0.999806	0.000000	1.000000
3	3	0.186537	0.013924	0.692603	0.000078	0.000000	0.999935	0.000000	1.000000
3	4	0.189122	0.021587	0.496039	0.000068	0.000000	0.999940	0.000000	1.000000
3	5	0.189447	0.031065	0.301904	0.000059	0.000000	0.999954	0.000000	1.000000
3	6	0.178573	0.042953	0.111255	0.000033	0.000000	0.999501	0.000000	0.696396
3	7	0.177238	0.042953	-0.073960	0.000000	0.000000	0.136988	3.000000	1.569887
3	8	0.177238	0.000000	0.000000	-0.214766	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
4	2	0.143067	0.013959	0.865529	-0.000246	0.000000	0.999721	0.000000	1.000000
4	3	0.141010	0.029144	0.666090	0.000045	0.000000	0.999966	0.000000	1.000000
4	4	0.136192	0.046796	0.467352	0.000046	0.000000	0.999972	0.000000	1.000000
4	5	0.125082	0.068259	0.269700	0.000041	0.000000	0.999979	0.000000	1.000000
4	6	0.102915	0.093481	0.073842	0.000016	0.000000	0.852073	0.000000	0.485191
4	7	0.177238	0.093481	-0.119474	0.000000	0.000000	0.008339	3.000000	2.386984
4	8	0.177238	0.000000	0.000000	-0.467406	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
5	2	0.114363	0.009544	0.831674	-0.000117	0.000000	0.999666	0.000000	1.000000
5	3	0.111109	0.019516	0.628936	0.000023	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
5	4	0.104108	0.030216	0.422950	0.000027	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
5	5	0.091558	0.041396	0.212607	0.000025	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
5	6	0.071435	0.051889	-0.004193	0.000000	0.000000	0.527097	3.000000	0.973618
5	7	0.071435	0.093481	0.000000	0.031624	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	8	0.000000	0.000000	0.000000	-0.762802	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
5	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
6	2	0.113646	0.000231	0.821661	-0.000043	0.000000	0.999655	0.000000	1.000000
6	3	0.112002	-0.000065	0.619589	0.000008	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
6	4	0.108676	-0.001586	0.415332	0.000010	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
6	5	0.103359	-0.005517	0.208736	0.000011	0.000000	0.999998	0.000000	0.990926
6	6	0.095655	-0.013590	-0.000392	0.000000	0.000000	0.488172	3.000000	1.011970
6	7	0.095655	0.000000	0.000000	0.108318	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
7	2	0.127376	-0.004579	0.830474	-0.000009	0.000000	0.999680	0.000000	1.000000
7	3	0.127088	-0.009607	0.629572	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	4	0.126558	-0.015568	0.427781	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	5	0.125816	-0.023053	0.225191	0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	6	0.124466	-0.032656	0.021966	0.000000	0.000000	0.575686	3.000000	0.929639
7	7	0.124466	0.000000	0.000000	0.211301	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
8	2	0.143658	-0.005429	0.847114	-0.000009	0.000000	0.999751	0.000000	1.000000
8	3	0.144057	-0.011087	0.646904	-0.000006	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	4	0.144882	-0.017195	0.446507	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	5	0.146173	-0.023980	0.246015	0.000002	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	6	0.147571	-0.031682	0.045569	0.000000	0.000000	0.692808	3.000000	0.838358
8	7	0.147571	0.000000	0.000000	0.196919	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
9	2	0.156369	-0.004246	0.865236	-0.000044	0.000000	0.999854	0.000000	1.000000
9	3	0.157105	-0.008596	0.665266	-0.000007	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	4	0.158582	-0.013162	0.465344	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	5	0.160797	-0.018036	0.265534	0.000006	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
9	6	0.163473	-0.023337	0.065930	0.000000	0.000000	0.802803	3.000000	0.767576
9	7	0.163473	0.000000	0.000000	0.143186	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
10	2	0.162434	-0.002045	0.882852	-0.000114	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	3	0.163443	-0.004158	0.682806	-0.000002	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	4	0.165519	-0.006468	0.482731	0.000008	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
10	5	0.168778	-0.009126	0.282676	0.000015	0.000000	0.999991	0.000000	1.000000
10	6	0.173322	-0.012409	0.082722	0.000000	0.000000	0.897034	3.000000	0.715802
10	7	0.166051	0.007287	0.000000	0.102776	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
10	8	0.166051	0.000000	0.000000	0.240315	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
11	2	0.159325	0.000994	0.900811	-0.000212	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	3	0.160140	0.002097	0.700454	0.000011	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
11	4	0.161717	0.003368	0.499735	0.000020	0.000000	0.999987	0.000000	1.000000
11	5	0.163916	0.004995	0.298613	0.000026	0.000000	0.999986	0.000000	1.000000
11	6	0.166452	0.007287	0.097005	0.000014	0.000000	0.995001	0.000000	0.542835
11	7	0.166051	0.007287	-0.105220	0.000000	0.000000	0.003064	3.000000	2.100891
11	8	0.166051	0.000000	0.000000	-0.036436	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
12	2	0.148808	0.003442	0.921888	-0.000317	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	3	0.149962	0.006839	0.721343	0.000020	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
12	4	0.152298	0.009985	0.520284	0.000032	0.000000	0.999962	0.000000	1.000000
12	5	0.155884	0.012670	0.318745	0.000040	0.000000	0.999939	0.000000	1.000000
12	6	0.160848	0.014543	0.116803	0.000024	0.000000	0.999958	0.000000	0.653384
12	7	0.166964	0.014238	-0.085390	-0.000000	0.000000	0.090509	3.000000	1.693455
12	8	0.166964	0.000000	0.000000	-0.069671	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
13	2	0.127885	0.006890	0.947573	-0.000423	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	3	0.129115	0.013847	0.746698	0.000042	0.000000	0.999946	0.000000	1.000000
13	4	0.131595	0.020758	0.544958	0.000049	0.000000	0.999916	0.000000	1.000000
13	5	0.135400	0.027596	0.342298	0.000050	0.000000	0.999901	0.000000	1.000000
13	6	0.140637	0.034340	0.138633	0.000034	0.000000	0.999951	0.000000	0.759186
13	7	0.147359	0.040875	-0.066166	0.000000	0.000000	0.206894	3.000000	1.414640
13	8	0.147359	0.000000	0.000000	-0.237050	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
14	2	0.095992	0.010536	0.980233	-0.000475	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	3	0.096949	0.021267	0.779254	0.000045	0.000000	0.999916	0.000000	1.000000
14	4	0.098894	0.032177	0.577241	0.000048	0.000000	0.999899	0.000000	1.000000
14	5	0.101953	0.043337	0.374089	0.000056	0.000000	0.999861	0.000000	1.000000
14	6	0.106325	0.054784	0.169638	0.000049	0.000000	0.999917	0.000000	0.901467
14	7	0.112244	0.066489	-0.036328	-0.000000	0.000000	0.374983	3.000000	1.142879
14	8	0.112244	0.000000	0.000000	-0.390967	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
15	2	0.055701	0.013329	1.020084	-0.000508	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	3	0.055811	0.027051	0.819387	0.000049	0.000000	0.999884	0.000000	1.000000
15	4	0.056052	0.041344	0.617946	0.000060	0.000000	0.999842	0.000000	1.000000
15	5	0.056570	0.056483	0.415603	0.000057	0.000000	0.999811	0.000000	1.000000

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
15	6	0.057607	0.072733	0.212088	0.000054	0.000000	0.999891	0.000000	1.000000
15	7	0.059450	0.090331	0.007027	0.000000	0.000000	0.608512	3.000000	0.902110
15	8	0.059450	0.000000	0.000000	-0.539646	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
16	2	0.014695	0.013571	1.063038	-0.000486	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	3	0.013318	0.027744	0.863297	0.000040	0.000000	0.999871	0.000000	1.000000
16	4	0.010518	0.042932	0.663732	0.000048	0.000000	0.999853	0.000000	1.000000
16	5	0.006292	0.059702	0.464171	0.000053	0.000000	0.999802	0.000000	1.000000
16	6	0.000698	0.078682	0.264323	0.000052	0.000000	0.999865	0.000000	1.000000
16	7	-0.006232	0.100576	0.063721	-0.000000	0.000000	0.908607	3.000000	0.709921
16	8	-0.150156	0.078524	0.000000	-0.459605	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	9	-0.150156	0.000000	0.000000	-0.642879	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	10	-0.150156	0.000000	0.000000	-0.250260	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
17	2	-0.013965	0.009465	1.100285	-0.000444	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	3	-0.016786	0.019509	0.901911	0.000052	0.000000	0.999862	0.000000	1.000000
17	4	-0.022655	0.030576	0.705232	0.000047	0.000000	0.999829	0.000000	1.000000
17	5	-0.032062	0.043369	0.510375	0.000039	0.000000	0.999774	0.000000	1.000000
17	6	-0.045744	0.058857	0.317445	0.000036	0.000000	0.999865	0.000000	1.000000
17	7	-0.065218	0.078524	0.126499	0.000026	0.000000	1.000000	0.000000	0.807115
17	8	-0.150156	0.078524	-0.063833	0.000000	0.000000	0.261966	3.000000	1.312394
17	9	-0.150156	0.000000	0.000000	-0.392619	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	10	-0.150156	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
18	2	-0.017818	0.001214	1.120475	-0.000351	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	3	-0.019909	0.002260	0.922726	0.000022	0.000000	0.999887	0.000000	1.000000
18	4	-0.024264	0.002801	0.727421	0.000027	0.000000	0.999862	0.000000	1.000000
18	5	-0.031215	0.002525	0.534975	0.000030	0.000000	0.999809	0.000000	1.000000
18	6	-0.041345	0.001067	0.346054	0.000041	0.000000	0.999843	0.000000	1.000000
18	7	-0.056949	-0.001683	0.161624	0.000031	0.000000	0.999974	0.000000	0.916471
18	8	-0.103955	-0.017084	-0.017678	0.000000	0.000000	0.393544	3.000000	1.119139
18	9	-0.103955	0.000000	0.000000	0.162421	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	10	-0.103955	0.000000	0.000000	0.077003	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
19	2	-0.003217	-0.004923	1.120235	-0.000282	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	3	-0.002584	-0.010694	0.921119	0.000020	0.000000	0.999886	0.000000	1.000000
19	4	-0.001074	-0.018419	0.722972	0.000023	0.000000	0.999855	0.000000	1.000000
19	5	0.002020	-0.029493	0.525899	0.000025	0.000000	0.999808	0.000000	1.000000
19	6	0.007735	-0.045846	0.330117	0.000031	0.000000	0.999848	0.000000	1.000000
19	7	0.006233	-0.066902	0.136024	0.000024	0.000000	0.999934	0.000000	0.689155
19	8	-0.103955	-0.066902	-0.055526	0.000000	0.000000	0.129332	3.000000	1.589610
19	9	-0.103955	0.000000	0.000000	0.334511	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	10	-0.103955	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	0.005550	-0.002970	1.111497	-0.000238	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	3	0.007198	-0.006226	0.910357	0.000022	0.000000	0.999891	0.000000	1.000000

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
20	4	0.010621	-0.010121	0.707735	0.000022	0.000000	0.999873	0.000000	1.000000
20	5	0.016439	-0.014923	0.502763	0.000022	0.000000	0.999836	0.000000	1.000000
20	6	0.025597	-0.020871	0.293789	0.000027	0.000000	0.999853	0.000000	1.000000
20	7	0.039427	-0.031936	0.077820	0.000000	0.000000	0.829943	3.000000	0.751912
20	8	0.000000	0.034918	0.000000	0.507529	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	9	0.000000	0.000000	0.000000	-0.001333	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.173258	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	0.001808	1.112389	-0.000210	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	0.004208	0.912453	0.000006	0.000000	0.999908	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	0.007752	0.712738	0.000016	0.000000	0.999872	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	0.013236	0.513534	0.000020	0.000000	0.999845	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	0.021773	0.315395	0.000023	0.000000	0.999847	0.000000	1.000000
21	7	0.000000	0.034918	0.119294	0.000015	0.000000	0.998015	0.000000	0.728545
21	8	0.000000	0.034918	-0.072244	0.000000	0.000000	0.235571	3.000000	1.487057
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	-0.174591	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	2	0.000000	0.001808	1.112389	0.009039	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	0.004208	0.912453	0.012003	0.000000	0.999908	0.000000	1.000000
22	4	0.000000	0.007752	0.712738	0.017718	0.000000	0.999872	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	0.013236	0.513534	0.027420	0.000000	0.999845	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	0.021773	0.315395	0.042685	0.000000	0.999847	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	0.034918	0.119294	0.065727	0.000000	0.998015	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	0.034918	-0.072244	0.000000	0.000000	0.235571	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	-0.174591	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

ตารางที่ 4 แสดงผลเฉลยที่ $t = 5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
6	2	0.006142	0.006647	0.866185	-0.000306	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	3	0.005782	0.012664	0.663298	0.000031	0.000000	0.999920	0.000000	1.000000
6	4	0.004979	0.016939	0.457550	0.000041	0.000000	0.999867	0.000000	1.000000
6	5	0.003481	0.017691	0.249000	0.000044	0.000000	0.999867	0.000000	1.000000
6	6	0.011474	0.010934	0.037892	0.000000	0.000000	0.692587	3.000000	0.838513
6	7	-0.021096	0.054752	0.000000	0.198596	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	8	-0.021096	0.000000	0.000000	-0.308919	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
7	2	-0.016196	0.007367	0.916635	-0.000397	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	3	-0.017987	0.015298	0.713865	0.000041	0.000000	0.999891	0.000000	1.000000
7	4	-0.022263	0.024389	0.507935	0.000050	0.000000	0.999871	0.000000	1.000000
7	5	-0.030757	0.035812	0.297916	0.000054	0.000000	0.999870	0.000000	1.000000
7	6	-0.045334	0.054752	0.082085	0.000019	0.000000	0.998641	0.000000	0.586453
7	7	-0.021096	0.054752	-0.142768	0.000000	0.000000	0.065278	3.000000	1.921787
7	8	-0.021096	0.000000	0.000000	-0.273759	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
8	2	-0.025348	0.002961	0.991425	-0.000446	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	3	-0.024587	0.005175	0.792459	0.000067	0.000000	0.999813	0.000000	1.000000
8	4	-0.023030	0.005441	0.594776	0.000052	0.000000	0.999797	0.000000	1.000000
8	5	-0.020458	0.002017	0.398821	0.000044	0.000000	0.999767	0.000000	1.000000
8	6	-0.016351	-0.007636	0.205414	0.000040	0.000000	0.999925	0.000000	1.000000
8	7	0.036680	-0.026895	0.016206	0.000000	0.000000	0.566740	3.000000	0.937436
8	8	-0.040599	0.048736	0.000000	0.345650	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	9	-0.040599	0.000000	0.000000	-0.311345	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	10	-0.040599	0.000000	0.000000	-0.067665	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
9	2	-0.042228	0.005555	1.056053	-0.000360	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	3	-0.040956	0.011019	0.859268	0.000038	0.000000	0.999837	0.000000	1.000000
9	4	-0.038113	0.016054	0.665976	0.000036	0.000000	0.999812	0.000000	1.000000
9	5	-0.032993	0.020240	0.476662	0.000040	0.000000	0.999684	0.000000	1.000000
9	6	-0.024528	0.022974	0.292111	0.000040	0.000000	0.999922	0.000000	1.000000
9	7	-0.040594	0.048736	0.113393	0.000023	0.000000	0.994861	0.000000	0.755527
9	8	-0.040599	0.048736	-0.058445	0.000000	0.000000	0.202751	3.000000	1.422979
9	9	-0.040599	0.000000	0.000000	-0.243680	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	10	-0.040599	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
10	2	-0.070499	0.009379	1.089750	-0.000222	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	3	-0.071644	0.019613	0.892922	0.000019	0.000000	0.999812	0.000000	1.000000
10	4	-0.073913	0.031552	0.699388	0.000031	0.000000	0.999764	0.000000	1.000000
10	5	-0.077480	0.046389	0.509259	0.000037	0.000000	0.999785	0.000000	1.000000
10	6	-0.082757	0.065804	0.322622	0.000031	0.000000	0.999816	0.000000	1.000000
10	7	-0.100429	0.085752	0.139291	0.000014	0.000000	0.999993	0.000000	0.896134
10	8	-0.138130	0.118263	-0.040724	0.000000	0.000000	0.368426	3.000000	1.151509

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
10	9	-0.138130	0.000000	0.000000	-0.753865	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	10	-0.138130	0.000000	0.000000	-0.162552	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
11	2	-0.088576	0.006012	1.091770	-0.000070	0.000000	0.999951	0.000000	1.000000
11	3	-0.091235	0.012549	0.893895	0.000033	0.000000	0.999872	0.000000	1.000000
11	4	-0.096737	0.020161	0.698179	0.000020	0.000000	0.999810	0.000000	1.000000
11	5	-0.105628	0.029546	0.504612	0.000013	0.000000	0.999728	0.000000	1.000000
11	6	-0.118874	0.041586	0.313122	0.000007	0.000000	0.999889	0.000000	1.000000
11	7	-0.141237	0.055189	0.123409	0.000000	0.000000	0.996165	0.000000	0.748978
11	8	-0.138130	0.055189	-0.064981	0.000000	0.000000	0.195358	3.000000	1.438109
11	9	-0.138130	0.000000	0.000000	-0.275946	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	10	-0.138130	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
12	2	-0.082060	-0.002156	1.073459	0.000077	0.000000	0.999880	0.000000	1.000000
12	3	-0.083547	-0.004719	0.874162	0.000002	0.000000	0.999761	0.000000	1.000000
12	4	-0.086566	-0.008109	0.675558	0.000001	0.000000	0.999790	0.000000	1.000000
12	5	-0.091278	-0.012893	0.477595	-0.000003	0.000000	0.999763	0.000000	1.000000
12	6	-0.098522	-0.019678	0.280156	-0.000006	0.000000	0.999843	0.000000	1.000000
12	7	-0.109312	-0.030319	0.082980	0.000000	0.000000	0.882124	3.000000	0.723524
12	8	-0.109312	0.055189	0.000000	0.475574	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	9	0.000000	0.000000	0.000000	-0.045729	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.230217	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
13	2	-0.060488	-0.007157	1.048616	0.000166	0.000000	0.999639	0.000000	1.000000
13	3	-0.059805	-0.015077	0.847804	-0.000026	0.000000	0.999857	0.000000	1.000000
13	4	-0.058232	-0.024525	0.646113	-0.000016	0.000000	0.999820	0.000000	1.000000
13	5	-0.055858	-0.036333	0.443418	-0.000009	0.000000	0.999798	0.000000	1.000000
13	6	-0.055716	-0.050605	0.239538	-0.000013	0.000000	0.999900	0.000000	1.000000
13	7	-0.060604	-0.066840	0.034309	-0.000000	0.000000	0.601632	3.000000	0.907744
13	8	-0.060604	0.000000	0.000000	0.415381	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
14	2	-0.043484	-0.005629	1.029940	0.000197	0.000000	0.999499	0.000000	1.000000
14	3	-0.041709	-0.011666	0.827877	-0.000028	0.000000	0.999907	0.000000	1.000000
14	4	-0.037952	-0.018430	0.623556	-0.000017	0.000000	0.999853	0.000000	1.000000
14	5	-0.032997	-0.026053	0.416588	-0.000018	0.000000	0.999737	0.000000	1.000000
14	6	-0.033537	-0.033450	0.206387	-0.000019	0.000000	0.999903	0.000000	0.944110
14	7	-0.045223	-0.038578	-0.007771	-0.000000	0.000000	0.428174	3.000000	1.077384
14	8	-0.045223	0.000000	0.000000	0.218524	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
15	2	-0.040788	-0.000856	1.028956	0.000212	0.000000	0.999286	0.000000	1.000000
15	3	-0.039773	-0.001504	0.827098	-0.000014	0.000000	0.999805	0.000000	1.000000
15	4	-0.037659	-0.001604	0.623232	-0.000012	0.000000	0.999800	0.000000	1.000000
15	5	-0.035453	-0.000790	0.417075	-0.000024	0.000000	0.999838	0.000000	1.000000
15	6	-0.041636	0.001904	0.208244	-0.000027	0.000000	0.999942	0.000000	0.994544

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
15	7	-0.067971	0.009486	-0.003656	-0.000000	0.000000	0.492880	3.000000	1.007171
15	8	-0.067971	0.000000	0.000000	-0.085346	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
16	2	-0.045627	0.001665	1.044672	0.000262	0.000000	0.999253	0.000000	1.000000
16	3	-0.046205	0.003807	0.844163	-0.000011	0.000000	0.999909	0.000000	1.000000
16	4	-0.047439	0.007064	0.643153	-0.000016	0.000000	0.999870	0.000000	1.000000
16	5	-0.050295	0.012006	0.441664	-0.000023	0.000000	0.999823	0.000000	1.000000
16	6	-0.060980	0.018448	0.239718	-0.000030	0.000000	0.999943	0.000000	1.000000
16	7	-0.095121	0.027498	0.037324	0.000000	0.000000	0.716427	3.000000	0.822079
16	8	-0.095121	0.000000	0.000000	-0.182741	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
17	2	-0.044146	-0.000427	1.064953	0.000335	0.000000	0.999183	0.000000	1.000000
17	3	-0.045148	-0.000778	0.865672	0.000002	0.000000	0.999904	0.000000	1.000000
17	4	-0.047269	-0.000838	0.667241	-0.000015	0.000000	0.999895	0.000000	1.000000
17	5	-0.050983	-0.000614	0.469943	-0.000028	0.000000	0.999830	0.000000	1.000000
17	6	-0.060167	-0.000893	0.274236	-0.000037	0.000000	0.999938	0.000000	1.000000
17	7	-0.089406	-0.002798	0.080694	0.000000	0.000000	0.915756	3.000000	0.706337
17	8	-0.089406	0.000000	0.000000	0.023512	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
18	2	-0.033409	-0.003485	1.078739	0.000469	0.000000	0.999166	0.000000	1.000000
18	3	-0.033420	-0.007397	0.879476	-0.000013	0.000000	0.999912	0.000000	1.000000
18	4	-0.033307	-0.012059	0.681013	-0.000040	0.000000	0.999909	0.000000	1.000000
18	5	-0.032888	-0.018100	0.483432	-0.000044	0.000000	0.999877	0.000000	1.000000
18	6	-0.033908	-0.026862	0.286831	-0.000045	0.000000	0.999951	0.000000	1.000000
18	7	-0.031217	-0.046258	0.091191	-0.000000	0.000000	0.920521	3.000000	0.703967
18	8	-0.031217	-0.031095	0.000000	0.172798	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	9	0.119311	0.000000	0.000000	0.354327	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	10	0.119311	0.000000	0.000000	0.198851	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
19	2	-0.022733	-0.003451	1.085582	0.000541	0.000000	0.999228	0.000000	1.000000
19	3	-0.022559	-0.007077	0.885897	-0.000030	0.000000	0.999940	0.000000	1.000000
19	4	-0.022079	-0.010825	0.686529	-0.000026	0.000000	0.999896	0.000000	1.000000
19	5	-0.020926	-0.014820	0.487429	-0.000042	0.000000	0.999858	0.000000	1.000000
19	6	-0.018537	-0.019956	0.288514	-0.000059	0.000000	0.999951	0.000000	1.000000
19	7	0.002184	-0.031089	0.089590	-0.000000	0.000000	0.853113	3.000000	0.739037
19	8	0.025815	-0.000171	0.000000	0.249645	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	9	0.025815	0.000000	0.000000	-0.154971	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	10	0.119311	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	-0.013809	-0.002847	1.089209	0.000639	0.000000	0.999167	0.000000	1.000000
20	3	-0.014302	-0.005606	0.889283	-0.000033	0.000000	0.999956	0.000000	1.000000
20	4	-0.015579	-0.007784	0.689423	-0.000055	0.000000	0.999957	0.000000	1.000000

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
20	5	-0.017949	-0.008789	0.489540	-0.000063	0.000000	0.999915	0.000000	1.000000
20	6	-0.021671	-0.007758	0.289478	-0.000066	0.000000	0.999939	0.000000	1.000000
20	7	-0.020593	-0.000171	0.089001	-0.000029	0.000000	0.732474	0.000000	0.506265
20	8	0.025815	-0.000171	-0.112798	0.000000	0.000000	0.000006	3.000000	2.274835
20	9	0.025815	0.000000	0.000000	0.000855	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.025815	0.000000	0.000000	-0.155826	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	-0.004469	1.091738	0.000669	0.000000	0.999211	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	-0.009245	0.891950	-0.000041	0.000000	0.999942	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	-0.014449	0.692418	-0.000056	0.000000	0.999932	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	-0.020445	0.493171	-0.000066	0.000000	0.999922	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	-0.027682	0.294260	-0.000070	0.000000	0.999934	0.000000	1.000000
21	7	0.000000	-0.034554	0.095796	-0.000034	0.000000	0.999930	0.000000	0.474650
21	8	0.000000	-0.025949	-0.101725	-0.000000	0.000000	0.099743	3.000000	2.446820
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.086717	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	-0.043025	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	2	0.000000	-0.004469	1.091738	-0.022346	0.000000	0.999211	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	-0.009245	0.891950	-0.023877	0.000000	0.999942	0.000000	1.000000
22	4	0.000000	-0.014449	0.692418	-0.026020	0.000000	0.999932	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	-0.020445	0.493171	-0.029981	0.000000	0.999922	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	-0.027682	0.294260	-0.036188	0.000000	0.999934	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	-0.034554	0.095796	-0.034356	0.000000	0.999930	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	-0.025949	-0.101725	0.043025	0.000000	0.099743	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.129743	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

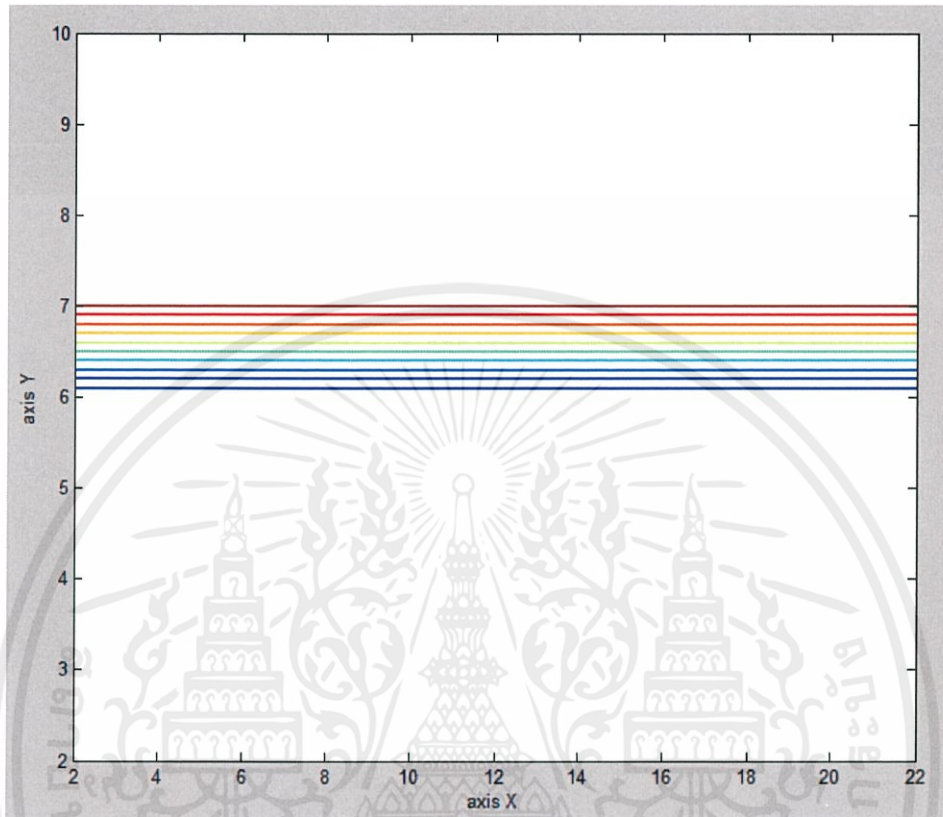
ตารางที่ 5 แสดงผลเฉลยที่ $l = 10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลเฉลยที่คำนวณโดยโปรแกรม SOLA-VOF นั้น สามารถแสดงค่าต่างๆโดยใช้กราฟดังนี้

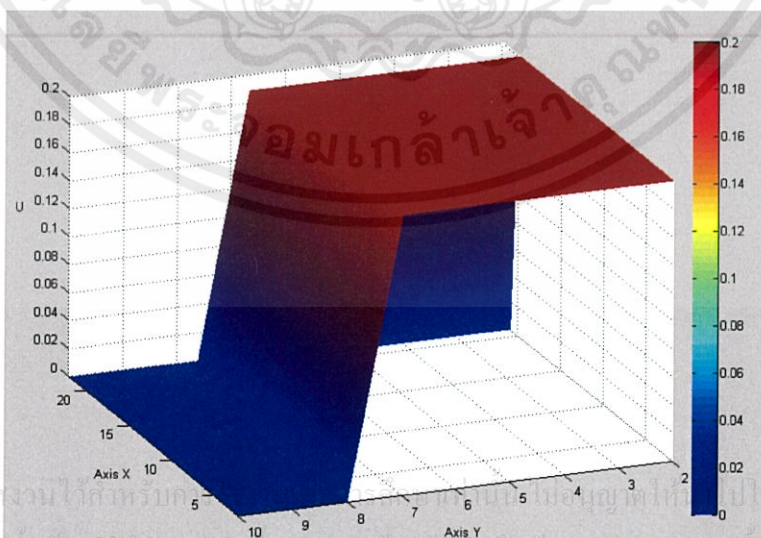
ที่เวลา $t = 0$

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F



รูปที่ 18 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 0$

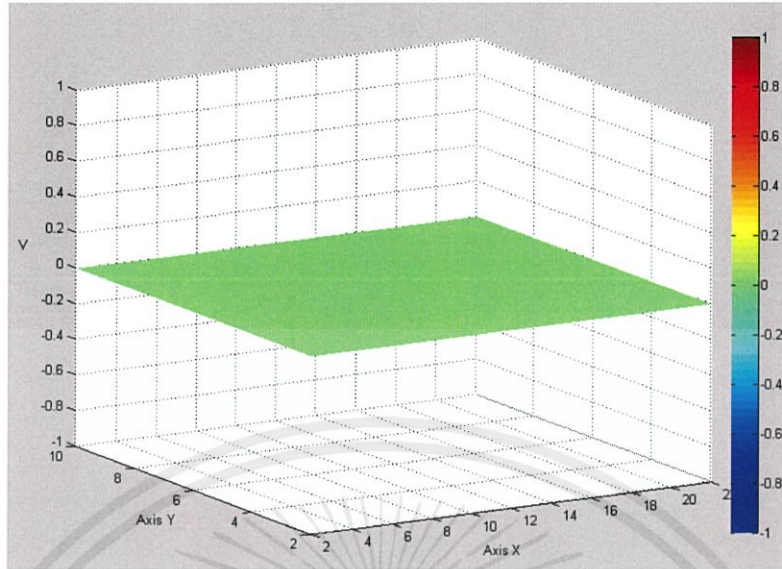
ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U



รูปที่ 19 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 0$

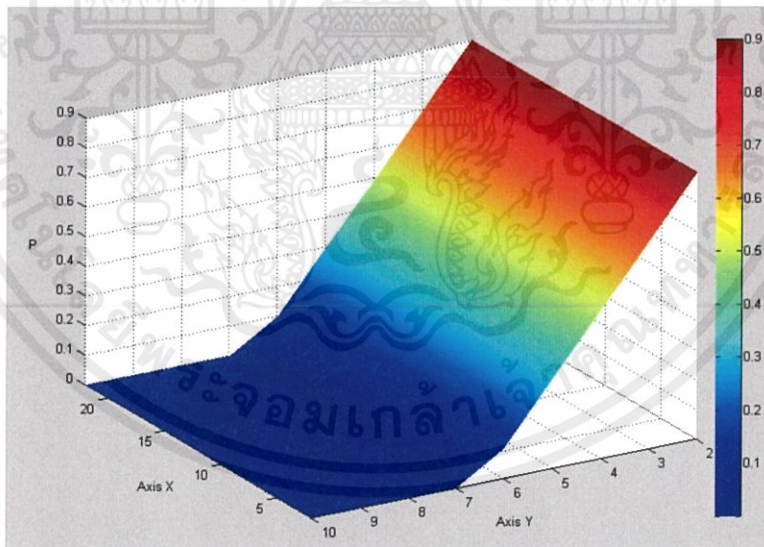
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับนักศึกษาในหลักสูตรเท่านั้น ไม่สามารถนำออกนอกห้องเรียนได้
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V



รูปที่ 20 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t=0$

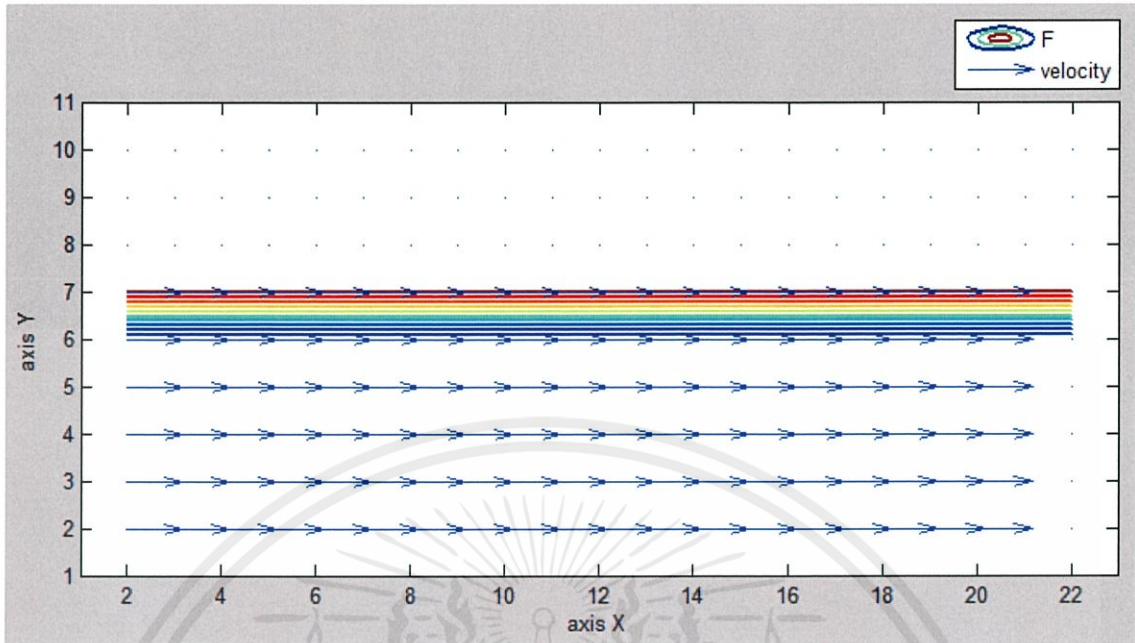
ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P



รูปที่ 21 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเราสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชัน F ร่วมกับกราฟของความเร็ว (u, v) ได้ดังรูป



รูปที่ 22 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 0$

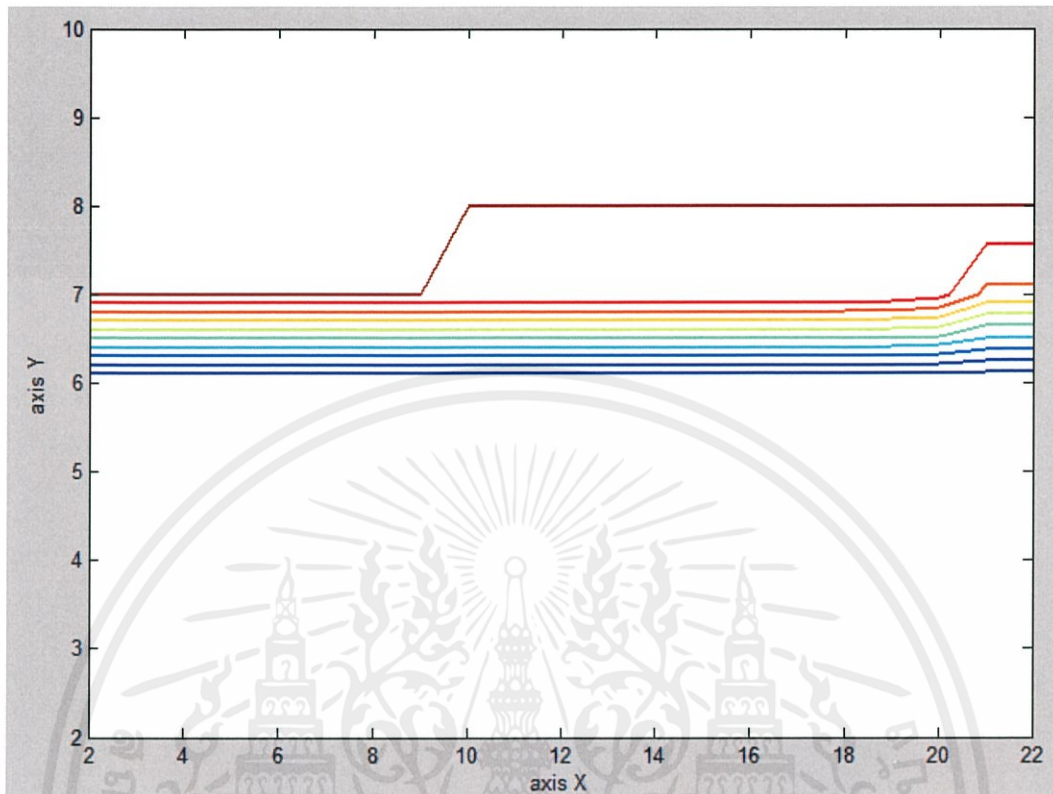
จากกราฟเส้น \rightarrow จะหมายถึงทิศทางของความเร็วของของไหล และกราฟเส้นตรง จะหมายถึงค่าของฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นค่าของของไหล

ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าค่าความเร็วนั้นจะมีลักษณะคงที่ โดยของไหลจะเคลื่อนที่จากด้านซ้ายไปขวา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

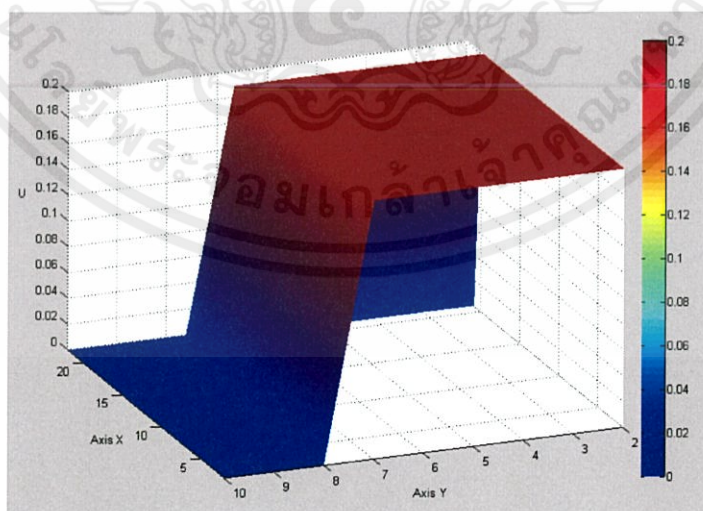
ที่เวลา $t = 0.2$

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F



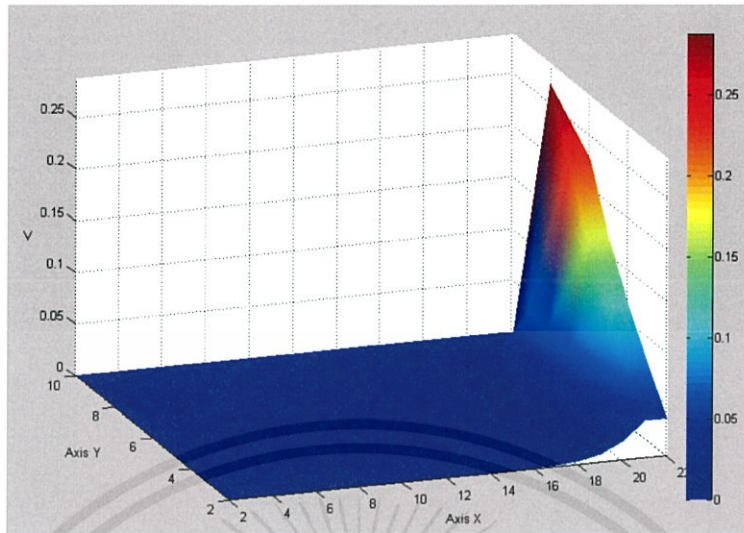
รูปที่ 23 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 0.2$

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U



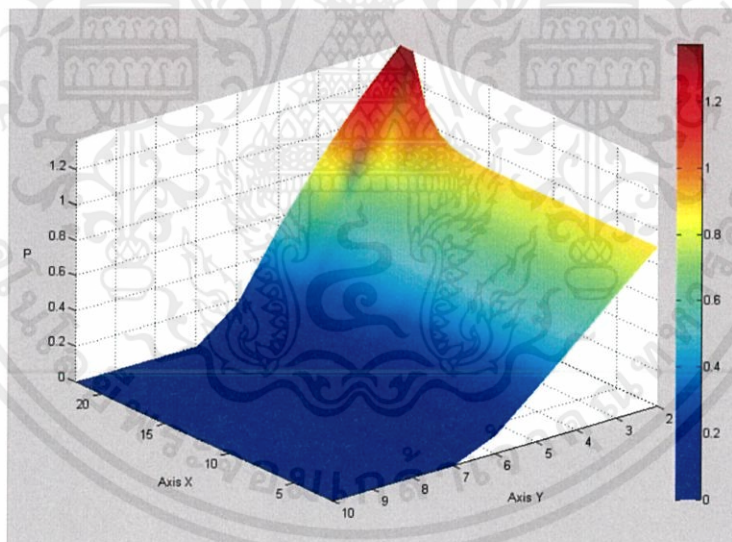
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รูปที่ 24 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 0.2$
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามเผยแพร่ลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V



รูปที่ 25 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t = 0.2$

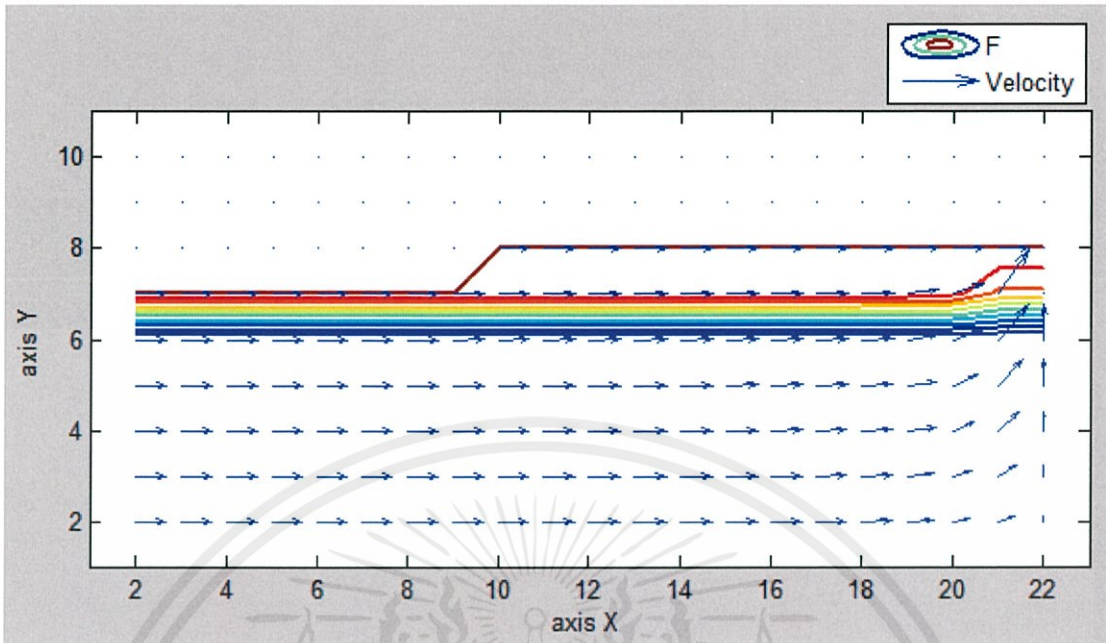
ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P



รูปที่ 26 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t = 0.2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเราสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชัน F ร่วมกับกราฟของความเร็ว (u, v) ได้ดังรูป



รูปที่ 27 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 0.2$

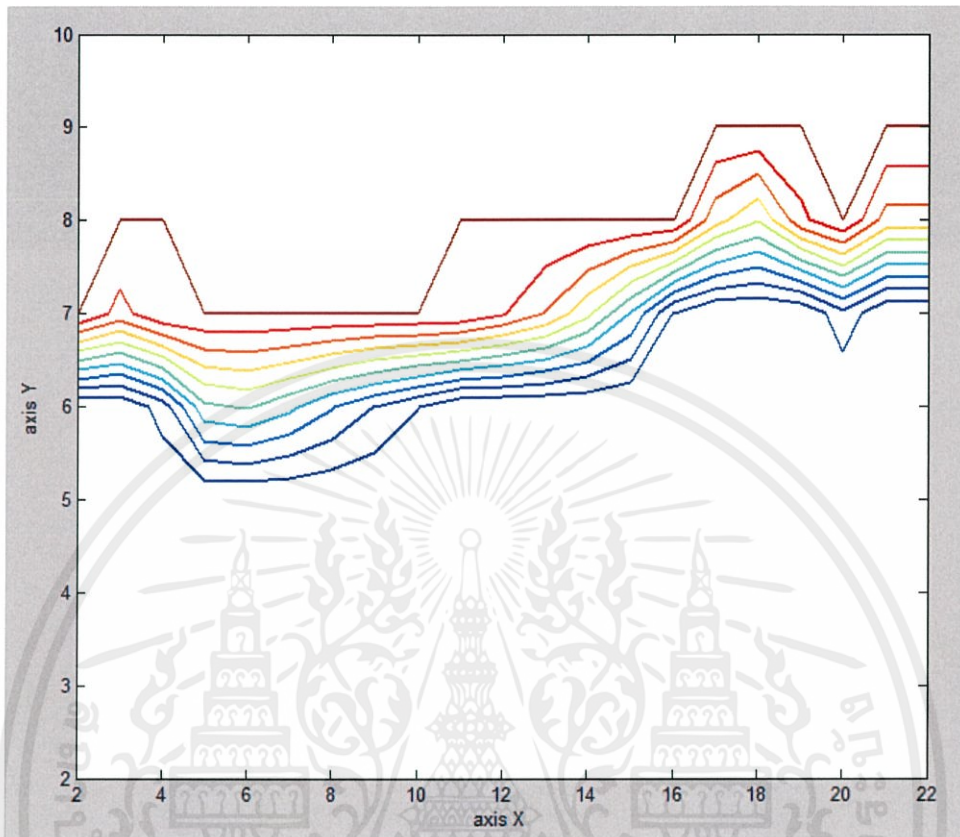
จากกราฟเส้น \rightarrow จะหมายถึงทิศทางของความเร็วของของไหล และกราฟเส้นตรง จะหมายถึงค่าของฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นค่าของของไหล

ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าค่าความเร็วนั้นจะมีลักษณะคงที่จนกระทั่งของไหลเคลื่อนที่ไปชนที่ขอบด้านขวาจะเห็นว่าความเร็วมีทิศทางที่เปลี่ยนไปและลักษณะของของไหลก็มีการเปลี่ยนแปลงไปด้วยโดยจะมีลักษณะคล้ายกับคลื่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

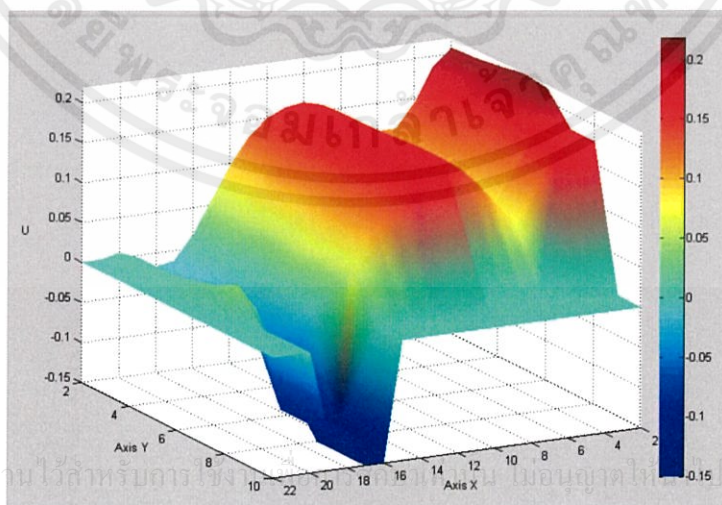
เวลา $t = 5$

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F



รูปที่ 28 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 5$

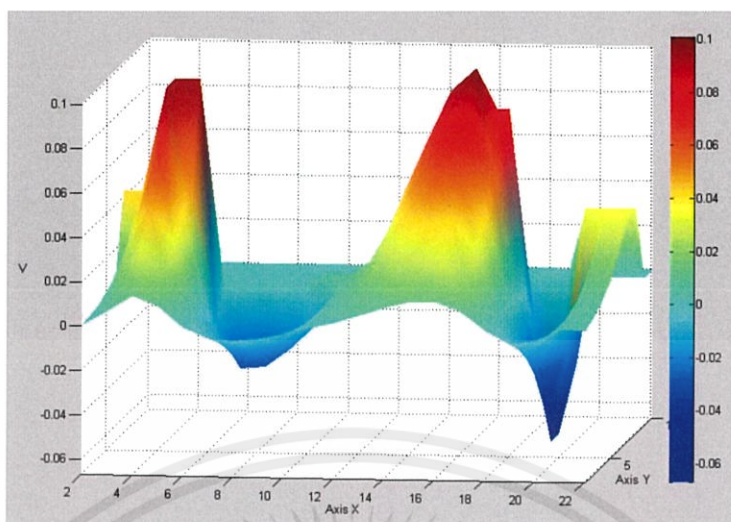
ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U



รูปที่ 29 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 5$

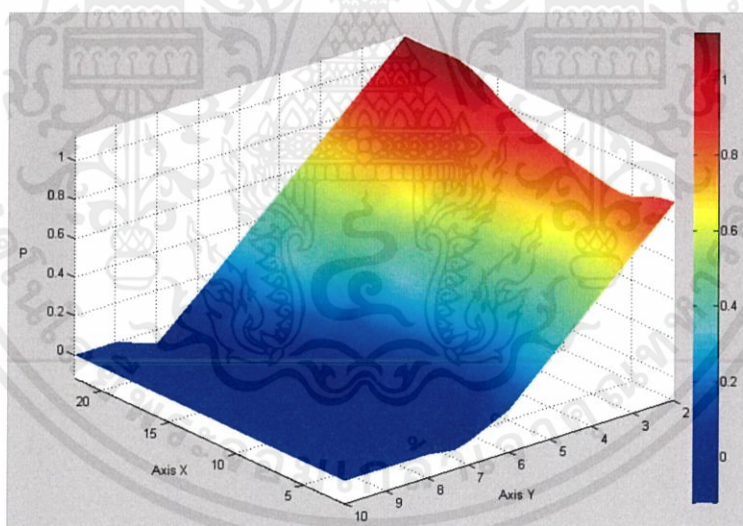
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานภายในเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V



รูปที่ 30 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t = 5$

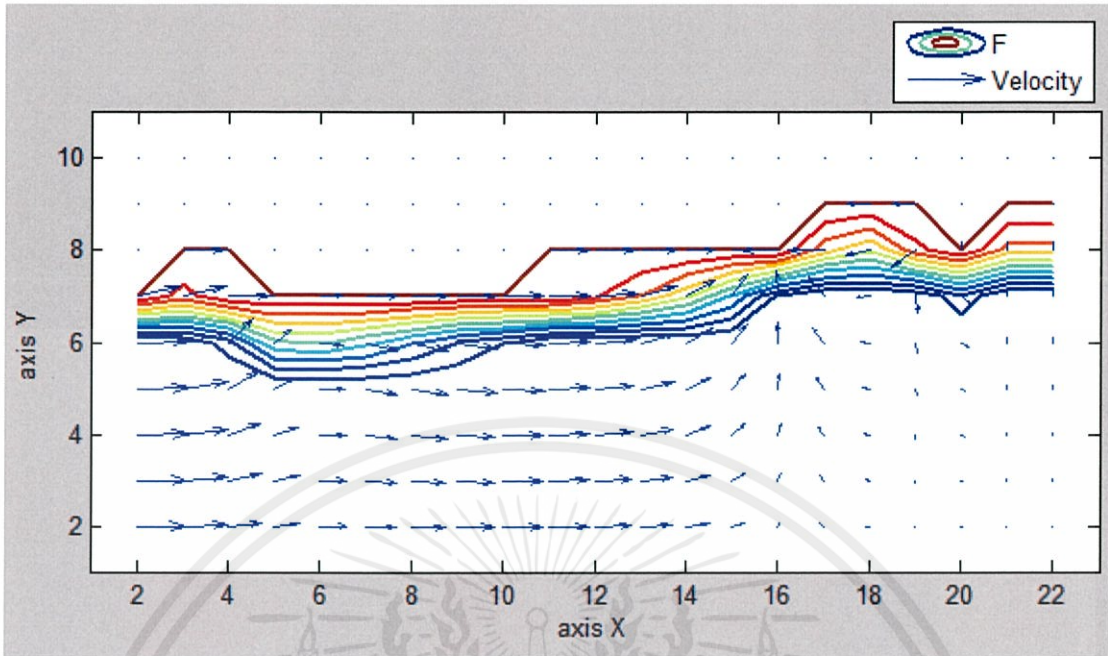
ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P



รูปที่ 31 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t = 5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเราสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชัน F ร่วมกับกราฟของความเร็ว (u, v) ได้ดังรูป



รูปที่ 32 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 5$

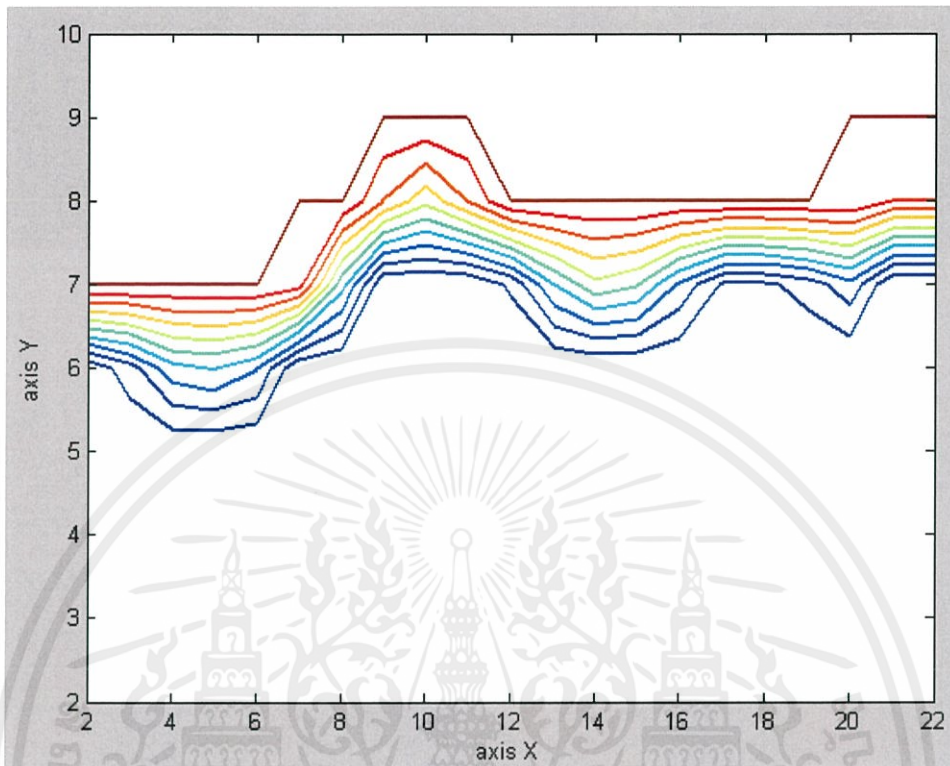
จากกราฟเส้น \rightarrow จะหมายถึงทิศทางของความเร็วของของไหล และกราฟเส้นตรง จะหมายถึงค่าของฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นค่าของของไหล

ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าค่าความเร็วนั้นจะมีลักษณะทิศทางที่เปลี่ยนไปและลักษณะของของไหลก็มีการเปลี่ยนแปลงไปด้วยโดยจะมีลักษณะคล้ายกับคลื่นโดยมีการสะท้อนกลับของคลื่นด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

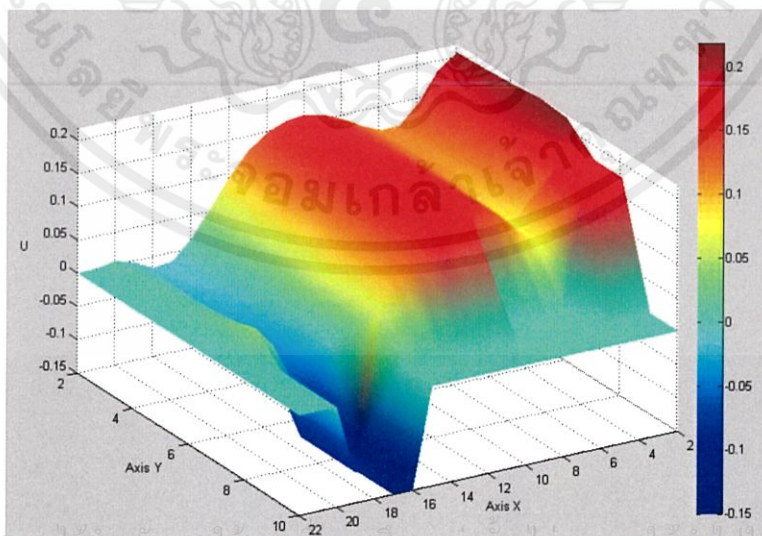
ที่เวลา $t = 10$

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F



รูปที่ 33 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F ณ เวลา $t = 10$

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U

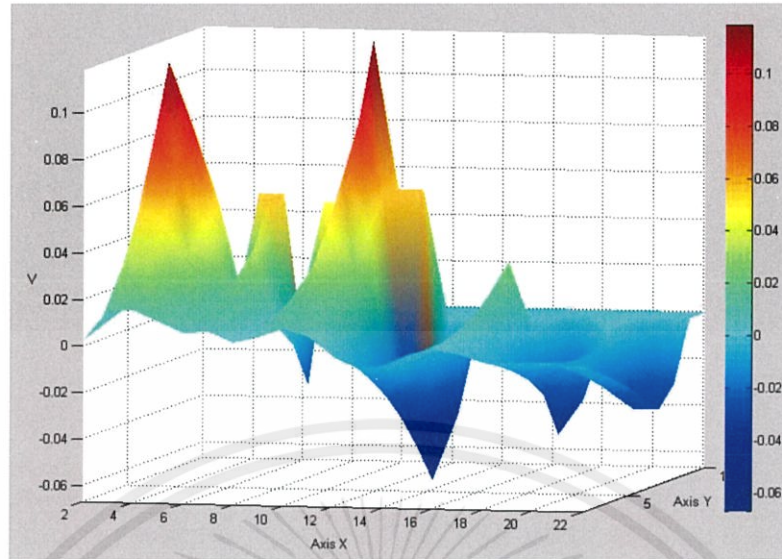


รูปที่ 34 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน U ณ เวลา $t = 10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

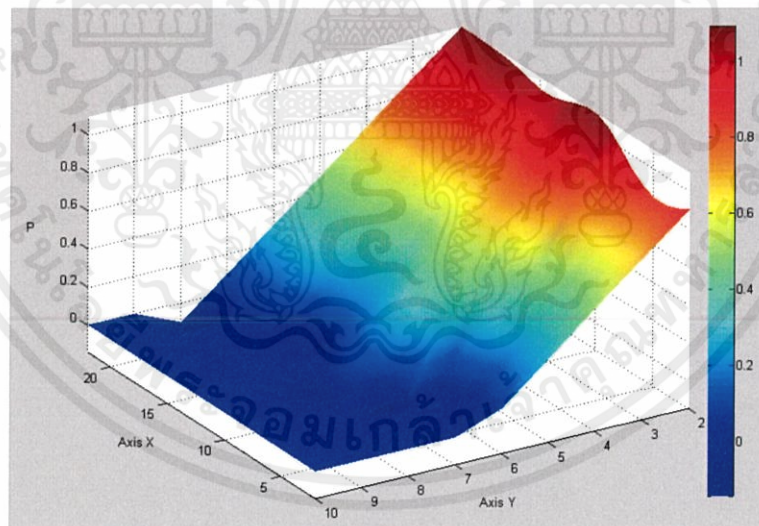
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้นำเอกสารฉบับนี้ไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจากคณะกรรมาธิการฯ

ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V



รูปที่ 35 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน V ณ เวลา $t=10$

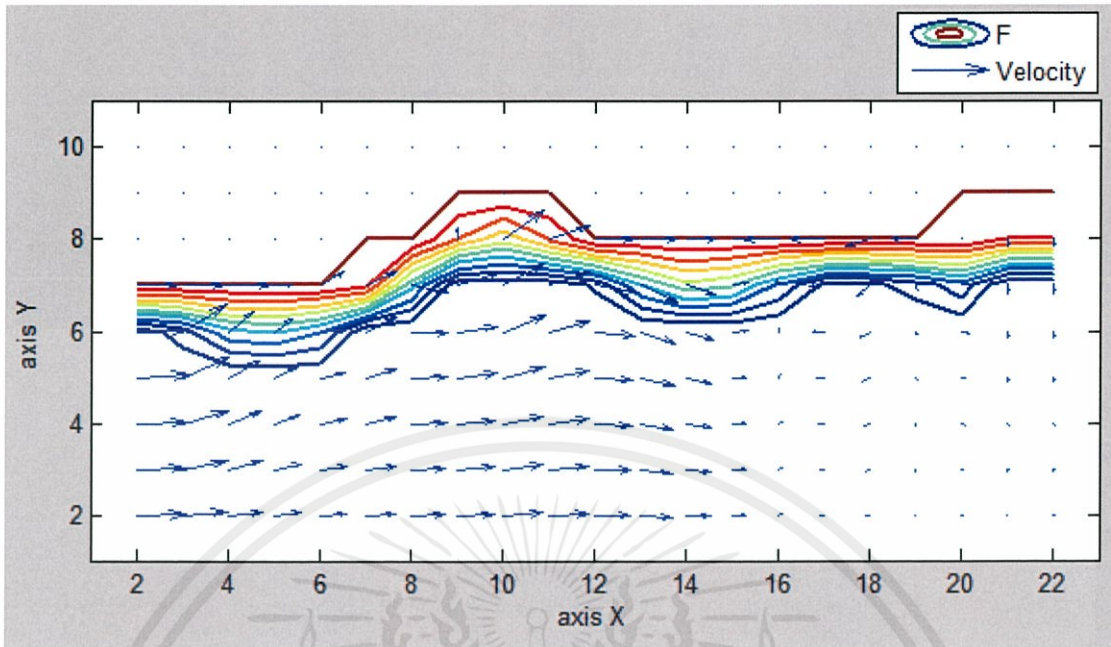
ผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P



รูปที่ 36 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน P ณ เวลา $t=10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเราสามารถแสดงกราฟของฟังก์ชัน F ร่วมกับกราฟของความเร็ว (u, v) ได้ดังรูป



รูปที่ 37 กราฟแสดงผลเฉลยค่าฟังก์ชัน F และความเร็ว ณ เวลา $t = 10$

จากกราฟเส้น \rightarrow จะหมายถึงทิศทางของความเร็วของของไหล และกราฟเส้นตรง จะหมายถึงค่าของฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นค่าของของไหล

ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าค่าความเร็วนั้นจะมีลักษณะทิศทางที่เปลี่ยนไปและลักษณะของของไหลก็มีการเปลี่ยนแปลงไปด้วยโดยจะมีลักษณะคล้ายกับคลื่นโดยมีการสะท้อนกลับของคลื่นด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

ในโครงการปัญหาพิเศษนี้เราได้ศึกษาเรื่องการไหลของของไหลแบบไม่อุดมคติในระบบพิกัดฉาก เพื่อหารูปร่างของขอบอิสระของพื้นที่ที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิด และคำนวณหาค่าประมาณต่างๆบนขอบอิสระ โดยสมการที่เราจะนำมาใช้คือ สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) รวมเข้ากับเงื่อนไขของการอัดได้และอัดไม่ได้ของของไหล จากนั้นแปลงสมการให้อยู่ในรูปผลต่างอันดับ (finite difference) โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ เพื่อใช้ในการประมาณค่าอนุพันธ์ของจุดต่างๆ บนขอบอิสระ ซึ่งอัลกอริทึมที่เราจะนำมาใช้คือวิธีการวอลุ่มออฟฟลูอิด (Volume- of-Fluid) หรือ SOLA-VOF ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาที่มีการแบ่งตารางที่พื้นผิวให้แต่ละช่องมีขนาดไม่เท่ากัน และหาค่าประมาณสำหรับการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ขึ้นกับขอบอิสระ หลังจากที่เราสามารถแปลงสมการให้อยู่ในรูปผลต่างอันดับได้แล้ว นำค่ามาคำนวณโดยใช้โปรแกรมซึ่งพัฒนามาจากโปรแกรม MATLAB จะได้ผลเฉลยที่มีค่าความผิดพลาดของค่า F ที่เวลา $t = 0.2$ อยู่ที่ 8.5394×10^{-7} (เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจริงกับ SOLA-VOF : A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries)^[13] แล้วนำค่า u, v, p, F ณ เวลาต่างๆ ที่คำนวณได้จากโปรแกรมมาทำการพล็อตกราฟเพื่อแสดงค่า u, v, p, F ที่พื้นผิวของของไหลดังที่ได้แสดงในบทที่ 4

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการศึกษาทำความเข้าใจเนื้อหามุ่งถึงการเขียนและพัฒนาโปรแกรมเพื่อคำนวณหารูปร่างของขอบบนพื้นผิวของของไหลในระบบพิกัดฉาก เนื่องด้วยคณะผู้จัดทำได้สังเกตเห็นปัญหาหลายประการจึงได้มาเสนอแนะเพื่อก่อให้เกิดประโยชน์แก่ผู้ที่สนใจศึกษาและนำโปรแกรมนี้ออกไปพัฒนาต่อไป

5.2.1 ควรศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation), วิธีการวอลุ่มออฟฟลูอิด (Volume- of-Fluid), และวิธีการผลต่างอันดับ (finite difference method) เพื่อจะได้สามารถทำความเข้าใจ และหาที่มาที่ไปของสมการและการดำเนินการต่างๆในโปรแกรมได้ถูกต้อง

5.2.2 ควรใช้คอมพิวเตอร์ที่มีความเร็วสูงมาใช้ในการประมวลผล เนื่องจากปริมาณที่คำนวณมีจำนวนมากและมีขั้นตอนในการดำเนินการในโปรแกรมซับซ้อนหลายขั้นตอน

5.2.3. ในการแบ่งตารางย่อยบนพื้นผิวเซลล์ หากมีการแบ่งอย่างละเอียดหรือระยะห่างระหว่างช่องมีขนาดเล็ก จะสามารถช่วยให้การคำนวณค่าออกมามีความละเอียดและความแม่นยำมากขึ้น

5.3.4 ควรศึกษาหลักการเขียนโปรแกรม และรูปแบบวิธีการใช้คำสั่งต่างๆในภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ในโปรแกรมต้นแบบ เพื่อที่จะได้เข้าใจการดำเนินการต่างๆภายในโปรแกรมมากขึ้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] กลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics). (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก: http://www.sci.rmuti.ac.th/physics/physics1/Phys1_Chapter_08.pdf (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [2] ของไหลที่อัดได้และที่อัดไม่ได้ (Compressible and Incompressible Fluid). (ม.ป.ด.). เข้าถึงได้จาก : <http://app.eng.ubu.ac.th/~e-thesis/upload/c2/865ch2.pdf> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [3] ความดัน. (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://th.wikipedia.org/wiki/> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [4] ความดัน (pressure). (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://www.neutron.rmutphysics.com/physics-glossary/index.php> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [5] ความตึงผิว (surface tension). (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://wirunyacream.blogspot.com/2012/02/surface-tension.html> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [6] ความหนาแน่น. (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://th.wikipedia.org/wiki/> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [7] นิยามของของไหล (Definition of a Fluid). (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://44116720077.tripod.com/definition.htm> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [8] พลศาสตร์ของไหล (Fluid Dynamic). (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://www.kasetpibul.net/lms/claroline/backends/download.php> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [9] พลศาสตร์ของไหล (Fluid Dynamic). (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://www.rmutphysics.com/charud/oldnews/0/286/15/9/Fluid/fluiddynamic.htm> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [10] แรงตึงผิว. (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://th.wikipedia.org/wiki/> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [11] สมการนาเวียร์-สโตกส์. (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : <http://th.wikipedia.org/wiki/> (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).
- [12] Aerospace, Mechanical & Mechatronic Engg ! (ม.ป.ป.). เข้าถึงได้จาก : http://www.mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/aerothermal_dvd_only/aero/fprops/propsoffluids/node2.html (วันที่ค้นข้อมูล: 20 พฤศจิกายน 2556).

เอกสารอ้างอิง (ต่อ)

[13] Nichols, B.D. ; Hirt , C.W. ; and Hotchkiss, R.S...SOLA-VOF:A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries, 1980

[14] Wijitta DevilTeacher. (ม.ป.ป.). พลศาสตร์ ของไหล (Fluid dynamic) เข้าถึงได้จาก : <http://indyteacher.wordpress.com/> (วันที่ค้นข้อมูล:20 พฤศจิกายน 2556).



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้