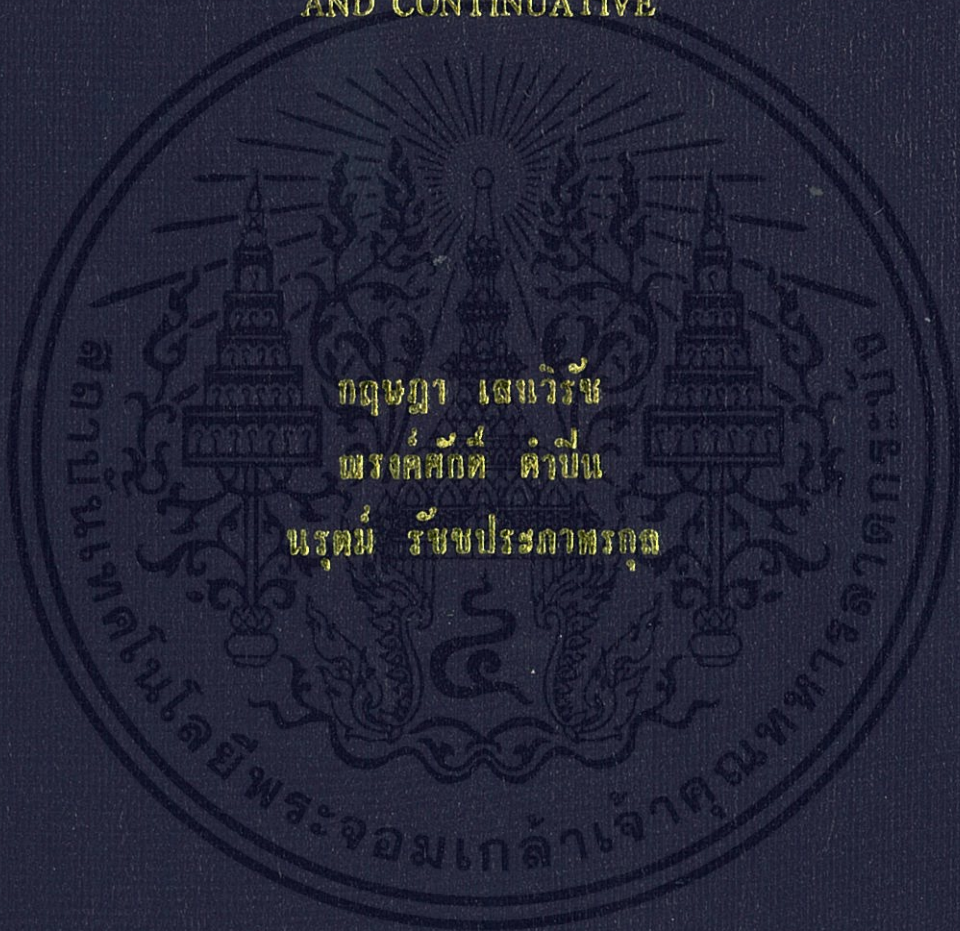


ขั้นตอนวิธีวอลุ่มออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบเขตอิสระบนพื้นที่  
ของของไหลที่สัมผัสกับขอบเป็น rigid free-slip wall , rigid no-slip wall

และ continuative

VOLUME-OF-FLUID ALGORITHMS FOR TRACKING FLUID  
INTERFACES FOR RIGID FREE-SLIP WALL, RIGID NO-SLIP WALL  
AND CONTINUATIVE



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยที่ดำเนินการตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

ขั้นตอนวิธีวอลุ่มออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบเขตอิสระบนพื้นที่  
ของของไหลที่มีเงื่อนไขขอบเป็น rigid free-slip wall , rigid no-slip wall  
และ continuative

VOLOME-OF-FLUID ALGORITHMS FOR TRACKING FLUID  
INTERFACES FOR RIGID FREE-SLIP WALL , RIGID NO-SLIP WALL  
AND CONTINUATIVE



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต  
หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

VOLOME-OF-FLUID ALGORITHMS FOR TRACKING FLUID  
INTERFACES FOR RIGID FREE-SLIP WALL , RIGID NO-SLIP WALL  
AND CONTINUATIVE



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF  
THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ      ขั้นตอนวิธีวอลุ่มออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบเขตอิสระบนพื้นที่  
 ของของไหล ที่มีเงื่อนไขขอบเป็น rigid free-slip wall rigid no-slip wall  
 และ continuative  
 Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Fluid Interfaces for rigid  
 free-slip wall ,rigid no-slip wall and continuative

ชื่อนักศึกษา                      นายกฤษฎา      เสนวิรัช                      53050003  
    นายณรงค์ศักดิ์      คำปิ่น                      53050028  
    นางนรุตม์      รัชชประภาพรกุล                      53050057

ปริญญา                              วิทยาศาสตร์บัณฑิต  
 หลักสูตร                              คณิตศาสตร์ประยุกต์  
 อาจารย์ที่ปรึกษา                      อาจารย์ ดร.กัญญ์ณัฏฐ์      แจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหา  
 พิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)  
 ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.เทิดขวัญ ช้างเผือก ประธานกรรมการ	
ดร.กัมปนาท นามงาม กรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการ	
ดร.กัญญ์ณัฏฐ์ แจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอก ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์ เจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ชื่อโครงการพิเศษ	ขั้นตอนวิธีวอลุ่มออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบเขตอิสระบนพื้นที่ของของไหลที่มีเงื่อนไขขอบเป็น rigid free-slip wall , rigid no-slip wall และ continuative Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Fluid Interfaces for rigid free-slip wall , rigid no-slip wall and continuative	
ชื่อนักศึกษา	นายกฤษฎา เสนวิรัช	53050003
	นายณรงค์ศักดิ์ คำป็น	53050028
	นายนรุตม์ รัชชประภาพรกุล	53050057
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต	
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.กัญญ์ณภรณ์ แจ่มศรี	

### บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาเรื่องของไหลที่มีการเคลื่อนที่แบบขอบอิสระเพื่อต้องการหารูปร่างของขอบอิสระและหาค่าประมาณของจุดใดบนขอบเขตอิสระที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิด โดยนำสมการนาเวียร์-สโตกส์(Navier-Stokes equation) มาใช้เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของไหลและใช้วิธีการวอลุ่มออฟฟลูอิด(Volume-of-Fluid:VOF) ในการประมาณค่าหาผลเฉลยของจุดใดๆบนขอบอิสระที่ขึ้นอยู่กับเวลา โดยวิธีการนี้เป็นวิธีการที่เหมาะสมกว่าวิธีอื่นโดยวิธีวอลุ่มออฟฟลูอิดจะสร้างตารางออยเลอร์ของเซลล์รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งสามารถนำวิธีการเชิงตัวเลข(Numerical Method) มาประมาณค่าโดยนำวิธีการผลต่างอันดับ(Finite Difference Method) มาใช้ในการหาผลเฉลย

คำสำคัญ: SOLA-VOF,ของไหล,ขอบอิสระ,ตาราง

Title	Volume-of-Fluid Algorithms for Tracking Fluid Interfaces for rigid free-slip wall , rigid no-slip wall and continuative	
Students	Mr.Krisada Senwirat	53050003
	Mr.Narongsak Dampin	53050028
	Mr.Narut Rutchapaprapornkul	53050057
Degree	Bachelor of Science	
Major Program	Applied Mathematics	
Academic Year	2013	
Adviser	Dr.Kannanut Chamsri	

### ABSTRACT

This a special problem is study free boundary of fluids for find require free boundary shape and calculate approximate of any point on the free boundary between both fluids. By Navier-Stokes equation used to describe movement of fluids and practice Volume-of-Fluid approximation calculate solution of any point on the free boundary that depends time. By This method is appropriate more than other method by Volume-of-Fluid will make mesh Euler of orthogonal rectangular cell which Numerical Method can be approximate by the Finite Difference Method used to find solution.

Keywords : SOLVA-VOF,fluids,free boundary,mesh

## กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องวิธีการवलลุมออฟฟลูอิดสำหรับการหารูปร่างของขอบอิสระของของไหลสามารถทำสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ดร.กัญญ์ณัฏฐ์แจ่มศรี อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ให้คำปรึกษาและชี้แนวทางในการแก้ปัญหาต่างๆรวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องและแก้ไขของปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นอย่างดี คณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และญาติๆทุกท่านที่เป็นกำลังใจที่สำคัญอย่างยิ่งที่ทำให้คณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จด้วยดี

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้ในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ รวมทั้งเพื่อนๆรวมโปรเจกทุกคนที่มีส่วนช่วยเหลือในด้านต่างๆเกี่ยวกับปัญหาพิเศษและแจ้งข่าวสารที่เกี่ยวข้องกับโปรเจก อีกทั้งคอยสอบถามความคืบหน้าของโปรเจกอยู่เสมอ

คณะผู้จัดทำ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูปภาพ	VII
สารบัญตาราง	VIII
บทที่1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญของปัญหาพิเศษ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	1
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษ	1
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน	2
บทที่2 แนวคิดทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 กลศาสตร์ของของไหล	3
2.1.1 นิยามของของไหล	3
2.1.2 ความหนาแน่น	4
2.1.3 ความสามารถในการบีบอัดตัวของของไหล	4
2.1.4 แรงตึงผิว	5
2.1.5 ความดัน	6
2.1.6 การจำแนกประเภทของการไหล	6
2.1.7 กฎการอนุรักษ์มวล	9
2.1.8 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม	9
2.2 ปัญหาขอบอิสระ	9
2.3 สมการนาเวียร์-สโตกส์	10
2.4 วิธีการผลต่างเชิงอันดับ	11
2.4.1 การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	11
2.4.2 การหาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยม	13
2.6 การใช้งาน MATLAB เบื้องต้น	17
2.6.1 การกำหนดตัวแปร	17
2.6.2 ตัวดำเนินการ	18
2.6.3 ตัวดำเนินการเปรียบเทียบ	18
2.6.4 เครื่องหมายพิเศษ	19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
2.6.5 ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าทางตรีโกณมิติ	19
2.6.6 ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่า Logarithm	20
2.6.7 การสร้างอาร์เรย์	20
2.6.8 อาร์เรย์มาตรฐาน	21
2.6.9 การหาอนุพันธ์	22
2.6.10 การอินทิเกรต	23
2.6.11 หาค่าตอบอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง	23
2.6.12 การสร้างกราฟ	24
2.6.13 M-file	26
<b>บทที่3 Volume of Fluid (VOF) Method</b>	<b>27</b>
3.1 วิวัฒนาการของ VOF	29
3.2 สมการ Navier-Stokes	30
3.3 การใช้ Finite Difference	32
3.4 Determining Interfaces Within a Cell	37
3.5 Surface Tension and Wall Adhesion	38
3.6 เงื่อนไขขอบเขต	41
<b>บทที่4 การพัฒนาโปรแกรม</b>	<b>43</b>
4.1 ซับรูทีนของโปรแกรม	44
4.1.1 BC	44
4.1.2 CAVOVO	44
4.1.3 DELTADJ	44
4.1.4 LAVORE	44
4.1.5 MESHSET	44
4.1.6 PARMOV	45
4.1.7 PETACAL	45
4.1.8 PLTPT	45
4.1.9 PRESSIT	45
4.1.10 SETUP	45
4.1.11 TILDE	46
4.1.12 TMS10	46
4.1.13 VFCONV	46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
4.2 การกำหนดค่าเริ่มต้นที่ใช้ในโปรแกรม	46
4.3 การตรวจสอบโปรแกรม SOLA-VOF	48
<b>บทที่5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ</b>	<b>74</b>
5.1 สรุปผลการศึกษา	74
5.2 ข้อเสนอแนะ	74

## เอกสารอ้างอิง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูปภาพ

รูปที่	หน้า
รูปที่ 2.1 ความแตกต่างระหว่างของเหลวกับก๊าซ	3
รูปที่ 2.2 ความแตกต่างระหว่าง Incompressible fluid กับ Compressible fluid	5
รูปที่ 2.3 ตัวอย่างปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแรงตึงผิว	5
รูปที่ 2.4 ลักษณะของความดันที่กระทำบนพื้นที่	6
รูปที่ 2.5 (ก) ของไหลอุดมคติ (ข) ของไหลจริง	7
รูปที่ 2.6 ของไหลที่อัดตัวได้และไม่ได้ภายในสนามการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงความดัน	7
รูปที่ 2.7 การไหลแบบ Steady flow และ Unsteady flow	8
รูปที่ 2.8 การไหลแบบราบเรียบ และการไหลแบบปั่นป่วน	8
รูปที่ 2.9 (ก) การไหลแบบหมุน และ (ข) การไหลแบบไม่หมุน	9
รูปที่ 2.10 ส่วนประกอบของปัญหาการไหลของพื้นผิวอิสระ	10
รูปที่ 3.1 Lagrangian Coordination	27
รูปที่ 3.2 Eulerian Coordination	27
รูปที่ 3.3 แสดงพื้นที่ของของไหล	28
รูปที่ 3.4 ตารางผลต่างอันดับโดยเซลล์ตัวแปรแบบสี่เหลี่ยม	30
รูปที่ 3.5 ตำแหน่งของตัวแปรตามแบบอย่างของเซลล์โครงสร้างตาข่าย	31
รูปที่ 3.6 แสดงความหนาแน่นในส่วนต่างๆของของไหล	34
รูปที่ 3.7 แสดงความหมายของปริมาณที่ใช้ในการกำหนดเงื่อนไขความดันของขอบพื้นผิวอิสระ	36
รูปที่ 3.8 a	39
รูปที่ 3.8 b	39
รูปที่ 4.1 แสดงแผนผังการทำงานของโปรแกรม	43
รูปที่ 4.2 แสดงภาพจากตัวอย่าง	49
รูปที่ 4.3 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา $t = 0$	50
รูปที่ 4.4 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา $t = 0.2$	56
รูปที่ 4.5 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา $t = 5$	62
รูปที่ 4.6 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา $t = 10$	68

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
ตารางที่ 1.1	ตารางแสดงระยะเวลาแผนการดำเนินงาน	2
ตารางที่ 4.1	แสดงผลเวลาที่ $t = 0$	50
ตารางที่ 4.2	แสดงผลเวลาที่ $t = 0.2$	56
ตารางที่ 4.3	แสดงผลเวลาที่ $t = 5$	62
ตารางที่ 4.4	แสดงผลเวลาที่ $t = 10$	68



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ส่วนใหญ่ค่าขอบและรูปร่างของขอบถูกกำหนดมาให้แล้ว แต่มีบางปัญหาในปรากฏการณ์ธรรมชาติที่ไม่ทราบแม้กระทั่งรูปร่างของขอบ เช่น รูปร่างการละลายของน้ำแข็ง ดังนั้น ในโครงการวิจัยนี้ เราจะแก้ปัญหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เราโดยที่รูปร่างขอบระหว่างของไหล 2 ชนิดไม่ทราบค่า เช่น ปัญหาการละลายของน้ำแข็ง หรือการพังทลายของเขื่อน ของไหล 2 ชนิดนั้นก็คือน้ำและอากาศ

### 1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

เพื่อกำหนดหารูปร่างบริเวณพื้นผิวของส่วนต่อประสานที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิดและคำนวณหาค่าประมาณของรูปร่างของขอบอิสระที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิด

### 1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

- 1) ศึกษาเกี่ยวกับของไหลแบบไม่อัดมคติ
- 2) หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ที่ขึ้นอยู่กับเวลา
- 3) ทำการศึกษาหารูปร่างของขอบอิสระแบบ 2 มิติ บนเซลล์โดเมนในระบบพิกัดฉาก
- 4) นำวิธีการผลต่างอันดับ (finite difference method) เข้ามาช่วยในการประมาณค่าการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์
- 5) นำวิธีการ volume of fluid เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาและเป็นขอบอิสระ
- 6) ใช้โปรแกรม MatLab ช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย

### 1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษ

- 1) ศึกษาเรื่องการไหลของของไหลของปัญหาที่เกี่ยวข้องกับ Free Boundary Problem
- 2) ศึกษาค้นคว้าและรวบรวมเนื้อหา เรื่อง วิธีการวอลุ่มออฟฟลูอิด (Volume-of-Fluid)
- 3) ศึกษาโปรแกรม MATLAB ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
- 4) ออกแบบรายงานและรูปแบบรายงาน
- 5) พัฒนาโปรแกรมให้เหมาะสมตามที่ออกแบบไว้
- 6) ทดสอบโปรแกรมและปรับปรุงเพิ่มเติมให้สมบูรณ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้ความรู้เกี่ยวกับวิธีการประมาณของอิสระและการหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลข
- 2) ได้โปรแกรมที่สามารถหาขอบอิสระของสมการเชิงอนุพันธ์ได้
- 3) ได้ความรู้เกี่ยวกับรูปแบบคำสั่งต่างๆ และวิธีการใช้โปรแกรม MatLab ขั้นสูง

### 1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

ตารางที่ 1 ตารางแสดงระยะเวลาแผนการดำเนินงาน

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2556							ปี 2557		
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	
1.ศึกษาค้นคว้าเรื่อง SOLA-VOF										
2.ศึกษาโปรแกรม SOLA-VOF										
3.พัฒนาและออกแบบโปรแกรม SOLA-VOF										
4.ทดสอบโปรแกรมเพื่อหาข้อผิดพลาดและทำการปรับปรุงแก้ไข										
5.จัดทำรูปเล่มและเสนอผลงาน										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

# แนวคิดทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

### 2.1 กลศาสตร์ของของไหล

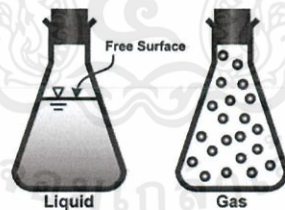
#### 2.1.1 นิยามของของไหล

ของไหล(Fluid) หมายถึง สสารที่สามารถเปลี่ยนรูปร่างได้อย่างต่อเนื่อง เมื่อถูกกระทำด้วยแรงเค้นเฉือน (shearing stress) ซึ่งนั่นหมายความว่า เมื่อใดที่มีแรงเค้นเฉือนมากกระทำของไหลจะเกิดการขยับตัวและเปลี่ยนรูปร่างไป เช่นเมื่อเทของไหลลงในภาชนะ ของไหลจะเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างต่อเนื่องไปชั่วขณะหนึ่ง เป็นเพราะรูปร่างของของไหลในขณะนั้นไม่สอดคล้องกับรูปร่างของภาชนะ จึงทำให้เกิดแรงเค้นเฉือนขึ้นภายในของเหลว กระบวนการปรับตัวนี้จะดำเนินต่อเนื่องไปจนกระทั่งแรงเค้นเฉือนหายไป ซึ่งก็คือสถานะที่ของไหลมีรูปร่างเหมือนกับภาชนะบริเวณผิวสัมผัสระหว่างของไหลกับภาชนะจะมีแต่แรงเค้นตั้งฉากเท่านั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ในขณะที่ของไหลเคลื่อนที่จะต้องมีแรงเค้นเฉือนเกิดขึ้นในทางตรงกันข้าม หากของไหลไม่มีการเคลื่อนที่สถานะนั้นจะไม่มีแรงเค้นเฉือนกระทำอยู่เลย

ของไหลสามารถคงรูปร่างได้ในสองสถานะ

ของเหลว (Liquid) มีรูปร่างไม่แน่นอนเปลี่ยนแปลงได้ ตามภาชนะที่บรรจุ แต่จะมีขอบเขตแบ่งระหว่างตัวมันเองกับของไหลอื่นอย่างชัดเจน เรียกว่า“ผิวอิสระ” (Free surface) ตัวอย่างเช่น ถ้านำของเหลวที่บรรจุอยู่ในภาชนะแล้วตั้งไว้บนโลก ของเหลวชนิดนั้นจะมี ผิวอิสระที่แบ่งระหว่างตัวมันเองกับอากาศ และผิวอิสระนั้นจะวางตัวในแนวราบเสมอ นอกจากนี้ของเหลวยังมีคุณสมบัติที่ยากต่อการบีบอัด เนื่องจากระยะห่างระหว่างโมเลกุลค่อนข้างน้อย (มากกว่าของแข็ง แต่น้อยกว่า ก๊าซ)

ก๊าซ (Gas) มีรูปร่างไม่แน่นอนเปลี่ยนแปลงได้ตามภาชนะที่บรรจุโดยมี ลักษณะแพร่ กระจายไปทั่วภาชนะไม่มีผิวอิสระและถูกบีบอัดได้ ง่ายกว่าของเหลว เนื่องจากมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมากกว่าของเหลว



รูปที่ 2.1 ความแตกต่างระหว่างของเหลวกับก๊าซ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.2 ความหนาแน่น (Density or Mass Density)

ความหนาแน่น หมายถึง มวลของของไหล (mass) ในหนึ่งหน่วยปริมาตร (Volume) สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคือ “ $\rho$ ” (อ่านว่า โร-rho)

$$\rho = \frac{\text{Mass}}{\text{Volume}} = \frac{m}{V} \quad \text{หน่วยของความหนาแน่นคือ } M/L^3 \quad (2.1)$$

ความหนาแน่นของของไหลจะไม่คงที่โดยจะเปลี่ยนแปลงไปตามอุณหภูมิและความดัน เช่นที่อุณหภูมิ  $4^{\circ}C$  ความดัน 1 บรรยากาศ น้ำในสถานะของเหลวจะมีความหนาแน่นเท่ากับ 1,000 กก./ลบ.ม. ซึ่งเป็นสถานะที่น้ำมีความหนาแน่นมากที่สุดเมื่อเทียบกับที่อุณหภูมิ และความดันอื่น

### 2.1.3 ความสามารถในการบีบอัดตัวของของไหล (Compressibility)

ในสภาพความเป็นจริงสารทุกชนิดจะมีความยืดหยุ่น นั่นหมายความว่าสามารถขยายตัวหรือหดตัวภายใต้ สภาวะที่แตกต่างกัน ซึ่งในของไหล เมื่อถูกบีบอัด (มีการเปลี่ยนแปลงความดัน) ปริมาตรของของไหลจะเปลี่ยนแปลงไป ส่งผลให้ความหนาแน่นเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ความสามารถในการเปลี่ยนแปลงปริมาตรนี้ถูกเรียกว่า Compressibility ซึ่งเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของของไหลแต่ละชนิด โดยจะเปรียบได้กับค่าความยืดหยุ่นในของแข็ง (Modulus) แต่ในของเหลวนั้นค่าความยืดหยุ่น (ความสามารถในการบีบอัดตัว) จะอยู่ในรูปของค่า “Bulk Modulus” ( $k$ ) โดยหาได้จาก

$$k = - \left( \frac{dp}{dV/V} \right) \quad (2.2)$$

เมื่อ  $dp$  = การเปลี่ยนแปลงความดัน

$dV$  = การเปลี่ยนแปลงปริมาตร

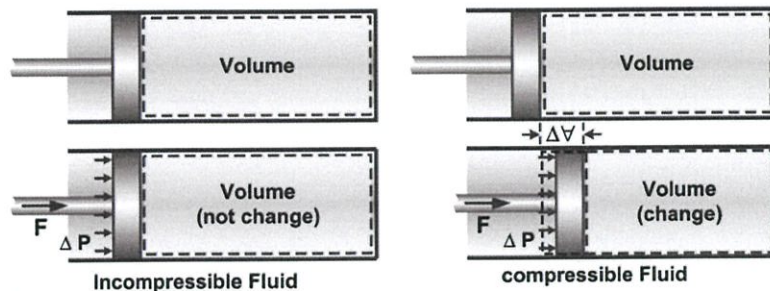
$V$  = ปริมาตร

ในกลศาสตร์ของของไหล หากพิจารณาความสามารถในการบีบอัดตัวของของไหล เราจะสามารถจำแนกของไหลออกเป็น 2 ประเภทคือ

- ของไหลที่บีบอัดตัวไม่ได้ หรือบีบอัดตัวได้น้อยมาก (Incompressible fluid) เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของความดัน ความหนาแน่นของของไหลประเภทนี้จะมี การเปลี่ยนแปลงน้อยมากจนสามารถละทิ้งได้ ของไหลประเภทนี้ส่วนใหญ่อยู่ในสถานะของเหลว

- ของไหลที่บีบอัดตัวได้ (Compressible fluid) คือของไหลที่มีความหนาแน่นไม่คงที่เมื่อความดันเปลี่ยนแปลงไป ของไหลประเภทนี้ส่วนใหญ่อยู่ในสถานะก๊าซ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



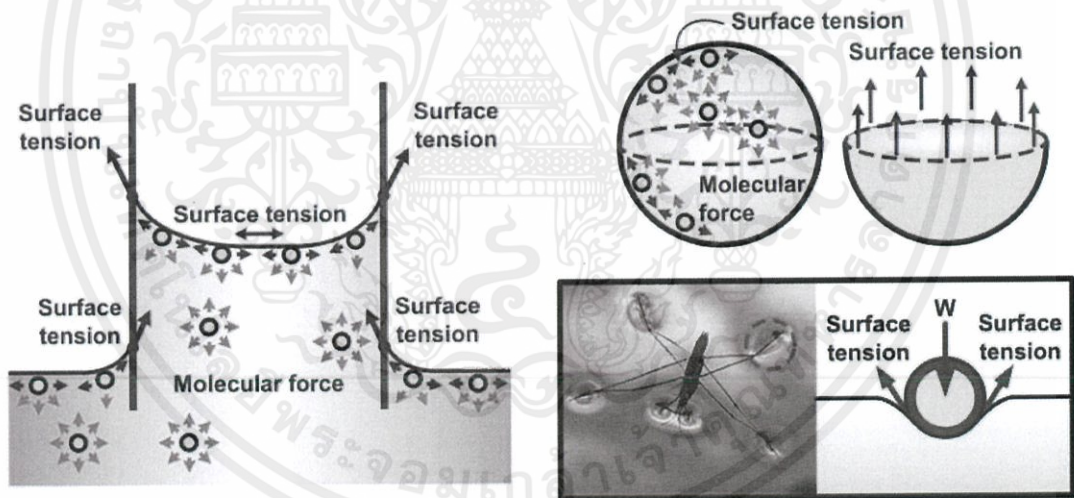
รูปที่ 2.2 ความแตกต่างระหว่าง Incompressible fluid กับ Compressible fluid

#### 2.1.4 แรงตึงผิว (Surface tension)

แรงตึงผิว คือแรงที่เกิดจากการปรับสภาพสมดุลของแรงยึดเหนี่ยวระหว่างอนุภาคของของเหลวที่อยู่บริเวณผิว หรือแรงที่เกิดขึ้นบริเวณขอบของผิวอิสระของของเหลวกับวัตถุที่อยู่ติดกัน ซึ่งจะเกิดกับของไหลที่อยู่ ในสถานะของเหลวเท่านั้น

$$F_s = \sigma L_w \quad (2.3)$$

เมื่อ  $F_s$  = แรงตึงผิว (N)  
 $\sigma$  = ความตึงผิว หรือ หน่วยแรงตึงผิว (N/m)(แรงตึงผิวต่อความยาวขอบผิวอิสระ)  
 $L_w$  = ความยาวเส้นขอบผิวอิสระ (m)



รูปที่ 2.3 ตัวอย่างปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแรงตึงผิว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.5 ความดัน (Pressure)

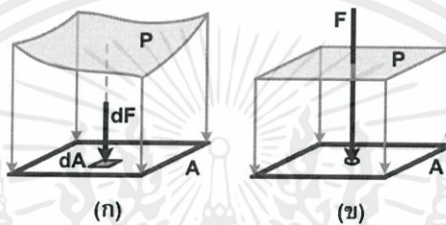
ความดัน หมายถึง แรงที่กระทำในหนึ่งหน่วยพื้นที่ (หน่วย คือ  $FL^{-2}$  หรือ  $ML^{-1}T^{-2}$ ) เมื่อ  $F$  คือแรง (force)  $L$  คือความยาว (length)  $T$  คือเวลา (Time) ดังนั้นถ้า  $dF$  คือแรงที่กระทำบนพื้นที่เล็กๆ  $dA$  บนพื้นที่  $A$  ความดันจะมีค่าเป็น

$$P = \frac{dF}{dA} \quad (2.4)$$

แต่ถ้าความดันที่กระทำมีค่าสม่ำเสมอเท่ากันทั้งพื้นที่  $A$  ความดันจะมีค่าเป็น

$$P = \frac{F}{A} \quad (2.5)$$

หน่วยของความดันในระบบ SI คือ นิวตัน/ตารางเมตร ( $N/m^2$ )



รูปที่ 2.4 ลักษณะของความดันที่กระทำบนพื้นที่

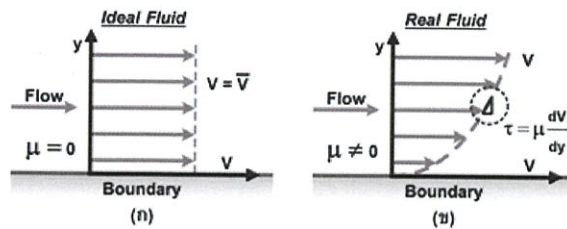
### 2.1.6 การจำแนกประเภทของการไหล (Flow classification)

เนื่องจากคุณสมบัติหลายประการของของไหลสามารถเปลี่ยนแปลงได้ ตามสภาพแวดล้อม (เช่น อุณหภูมิ ความดัน เป็นต้น) และเวลา ในสภาพปัญหาหนึ่งๆ ถึงแม้ การไหลจะเกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน แต่พฤติกรรมของการไหลอาจไม่เหมือนกัน ดังนั้นการวิเคราะห์ จึงจำเป็นต้องคำนึงถึงสมมติฐานที่สอดคล้องกับสภาพปัญหานั้นๆ จากพฤติกรรมการไหลที่แตกต่างกันนี้เราสามารถแบ่งประเภทของการไหลโดยพิจารณาได้ จากหลายหลักเกณฑ์ แต่ในเรื่องนี้จะกล่าวถึงการแบ่งประเภทการไหลโดยพิจารณาใน 5 หลักเกณฑ์ ดังนี้

#### - ของไหลจริง และของไหลอุดมคติ (Real Fluid and Ideal Fluid)

ในสนามการไหลของของไหลจริง (Real Fluid) จะมี ผลกระทบจากความหนืด ซึ่งจะทำให้เกิดแรงเค้นเฉือนขึ้นระหว่างอนุภาคของของไหลเมื่ออนุภาคของไหลมี ความเร็วแตกต่างกัน ส่วนของไหลอุดมคติ (Ideal Fluid) เป็นการไหลที่สมมุติให้ของไหลไม่มีผลกระทบเนื่องจากความหนืด (การไหลที่ไม่เกิดขึ้นจริง) ดังนั้นในสนามการไหลจะไม่เกิดแรงเค้นเฉือนระหว่างอนุภาคของของไหล และความเร็วของอนุภาคของไหลจะเท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

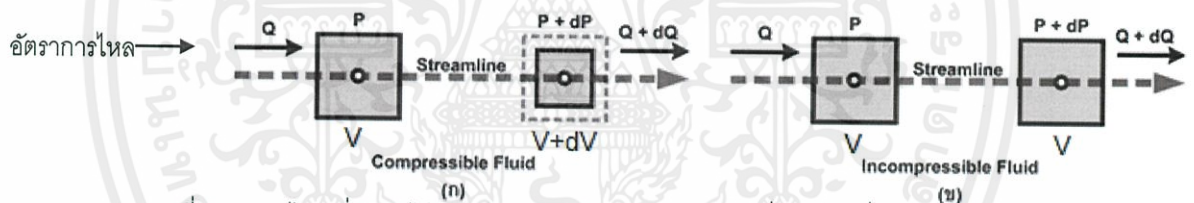


รูปที่ 2.5 (ก) ของไหลอุดมคติ (ข) ของไหลจริง

เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์โดยส่วนมากเมื่อกล่าวถึงการไหล จะหมายถึงการไหลอุดมคติที่ไม่มีผลกระทบเนื่องจากความหนืด และความเร็วคงที่ในบริเวณที่พิจารณา

- พิจารณาจากคุณสมบัติ ในการบีบอัดของของไหล (Compressibility)

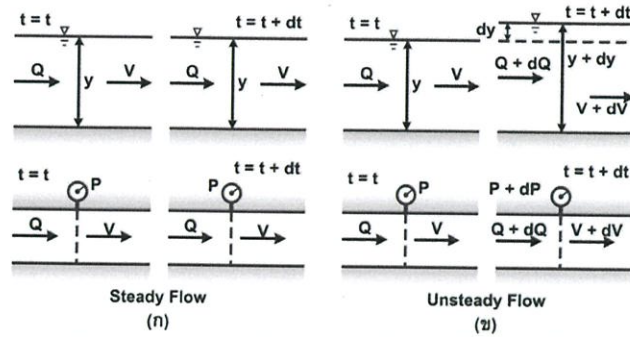
หากของไหลอัดตัวได้ (Compressible Fluid) เคลื่อนที่ในสนามการไหลเมื่อความดันเปลี่ยนแปลงไปปริมาตรของของไหลจะเกิดการเปลี่ยนแปลง การวิเคราะห์อัตราการไหลจึงมีความซับซ้อนมากขึ้น ดังรูป 6 (ก) ในทางตรงกันข้ามหากของไหลอัดตัวไม่ได้ (Incompressible Fluid) เคลื่อนที่ในสนามการไหล ของไหลจะมีปริมาตรคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของความดัน ในการวิเคราะห์อัตราการไหลจะมีความซับซ้อนน้อยลง ดังรูป 6 (ข) โดยส่วนมากของไหลมีสถานะเป็นของเหลว จะถือว่าของไหลนั้นเป็นของไหลที่อัดตัวไม่ได้



รูปที่ 2.6 ของไหลที่อัดตัวได้ และไม่ได้ภายในสนามการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงความดัน

- พิจารณาจากการเปรียบเทียบกับเวลา

เมื่อพิจารณาที่จุดใดจุดหนึ่งในสนามการไหล หากในช่วงเวลาที่วิเคราะห์ ค่าของตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องไม่มีการเปลี่ยนแปลงจะถือว่า การไหลนั้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา หรือที่เราเรียกว่า Steady Flow ในทางตรงกันข้าม หากในช่วงเวลาที่วิเคราะห์ ค่าของตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องมีการเปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัดจะถือว่า การไหลนั้นแปรเปลี่ยนตามเวลา หรือที่เราเรียกว่า Unsteady Flow

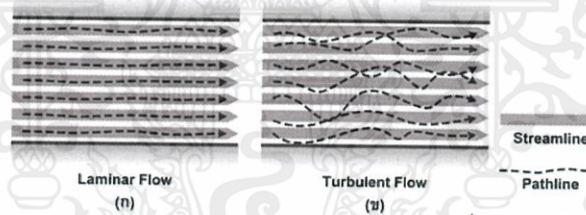


รูปที่ 2.7 การไหลแบบ Steady flow และ Unsteady flow

- พิจารณาจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหล

หากพิจารณาจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหลในสนามการไหล เราสามารถแบ่งประเภทการไหลได้เป็น 2 ลักษณะคือ

- การไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) อนุภาคของของไหลจะเคลื่อนที่อย่างเป็นระเบียบไปตามเส้นทางที่แน่นอน (เคลื่อนที่ไปตาม Streamline) สภาพการไหลไม่มีความปั่นป่วนการไหลประเภทนี้มักเกิดกับการไหลของของไหลที่มีความหนืดสูง หรือ การไหลที่มีความเร็วต่ำมากๆ (ก)
- การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) อนุภาคของของไหลเคลื่อนที่อย่างไม่เป็นระเบียบ อนุภาคของของไหลมีเส้นทางการเคลื่อนที่ไม่แน่นอน สภาพการไหลในสนามการไหลมีความปั่นป่วนการไหลประเภทนี้มักเกิดกับของไหลที่มีความหนืดต่ำ หรือการไหลที่มีความเร็วสูง (ข)



รูปที่ 2.8 การไหลแบบราบเรียบ และการไหลแบบปั่นป่วน

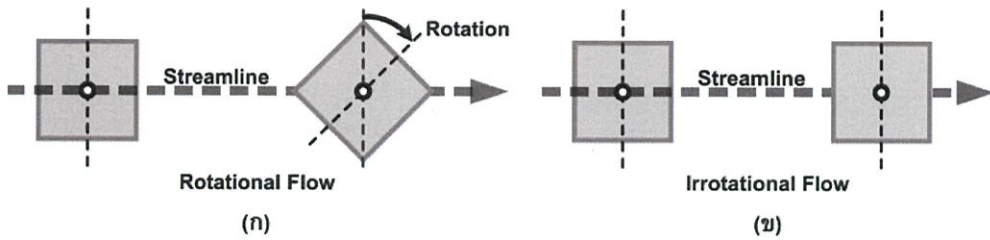
- พิจารณาจากลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหล

หากพิจารณาจากลักษณะของการเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหล สามารถแบ่งได้ 2 ลักษณะคือ

- การไหลแบบหมุน (Rotational Flow) คือการไหลที่อนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ไปพร้อมกับการหมุน
- การไหลแบบไม่หมุน (Irrotational Flow) คือการไหลที่อนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ไปแต่ไม่มีการหมุน

โดยส่วนมากในการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหลจะสมมติให้การไหลเป็นแบบ Irrotational Flow

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.9 (ก) การไหลแบบหมุน และ (ข) การไหลแบบไม่หมุน

### 2.1.7 กฎการอนุรักษ์มวล (Conservation Laws of mass)

ระบุว่าสำหรับระบบปิดใด ๆ การโอนทั้งหมดของสสารและพลังงาน (ซึ่งทั้งสองมีมวล), มวลของระบบต้องคงที่เมื่อเวลาผ่านไปเป็นมวลระบบไม่สามารถเปลี่ยนแปลงปริมาณหากยังไม่ได้เพิ่มหรือลบออก ดังนั้นปริมาณของมวลคือ

"การอนุรักษ์" กล่าวคือ มวลรวมของสารตั้งต้นหรือวัสดุเริ่มต้นจะต้องเท่ากับมวลรวมของผลิตภัณฑ์

### 2.1.8 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation laws of momentum)

โมเมนตัมมีสมบัติพิเศษนั่นก็คือจะถูกอนุรักษ์อยู่เสมอ (ไม่เพิ่มขึ้น และในขณะเดียวกันก็ไม่ลดหายไป) แม้แต่ในการชน พลังงานจลน์นั้นจะไม่ถูกอนุรักษ์ในการชน ถ้าการชนนั้นเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่น เนื่องจากการคงตัวของโมเมนตัมที่กล่าวมาแล้ว จึงทำให้สามารถนำไปคำนวณความเร็วที่ไม่ทราบค่าภายหลังการชนได้

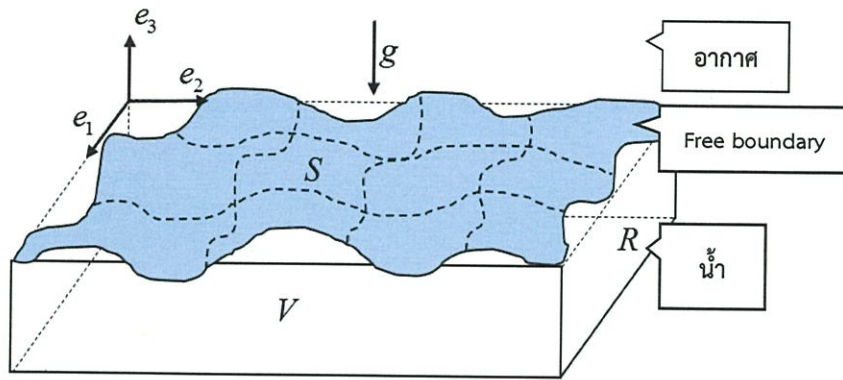
กล่าวคือการชนกันของสองอนุภาค โดยผลรวมของโมเมนตัมก่อนการชนจะต้องเท่ากับผลรวมของโมเมนตัมหลังการชนเสมอ

## 2.2 ปัญหาขอบอิสระ (free boundary problems)

การไหลของของไหลที่แตกต่างกันสองชนิดที่อยู่ติดกันนั้นเกิดขึ้นในระบบทางกายภาพและในการประยุกต์ใช้ในทางวิศวกรรมอย่างกว้าง ปฏิกริยาของของไหลที่รอยต่อก่อให้เกิดปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนขึ้นในหลายกรณี โดยหนึ่งในของไหลจะออกแรงความเครียดเล็กน้อยในส่วนที่เป็นรอยต่อกันของของไหล ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาแยกความแตกต่างได้ พื้นที่ระหว่างของไหลสองชนิดนั้นจะทำหน้าที่เป็นขอบอิสระ ตัวอย่างที่ดีของการไหลของขอบอิสระได้แก่การไหลของผิวน้ำที่อยู่ในอากาศ

การคาดการณ์ความถูกต้องของพฤติกรรมกรการไหลของขอบอิสระเป็นสิ่งสำคัญ เช่น ในการตั้งสมมติฐานและออกแบบของโครงสร้างของของไหล โดยในวิชาคณิตศาสตร์ปัญหาขอบอิสระจะถูกกำหนดในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.10 ส่วนประกอบของปัญหาการไหลของพื้นผิวอิสระ

## 2.3 สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation)

สมการนาเวียร์-สโตกส์ เป็นสมการที่ตั้งตามชื่อของผู้คิดค้นสองท่าน คือ โกลด ลูอิส นาเวียร์ และจอร์จกาเบรียล สโตกส์ ซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหล สมการเหล่านี้ถูกสร้างขึ้นจากการประยุกต์ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันบนของไหลประกอบเข้ากับสมมติฐานว่าความเค้นบนของไหลคือผลรวมของเทอมของความหนืดของการกระจายตัว และเทอมของความดัน

สมการชุดนี้นับได้ว่าเป็นสมการชุดที่มีประโยชน์ต่อวิชาฟิสิกส์ของของไหลมากที่สุด เนื่องจากมันสามารถอธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพของของไหลได้กว้างขวางที่สุด มันอาจจะใช้เพื่อการจำลองสภาพอากาศคลื่นทะเลการไหลของของไหลในท่อ การไหลของอากาศผ่านปีกเครื่องบิน หรือการเคลื่อนที่ของดาวในจักรวาลสมการชุดนี้ไม่ว่าจะในรูปแบบเต็มหรือรูปแบบที่ถูกดัดแปลงให้ง่ายขึ้นล้วนถูกนำไปใช้ในการออกแบบอากาศยานและยานยนต์ การศึกษาการไหลเวียนของโลกิตการออกแบบโรงไฟฟ้าการวิเคราะห์ผลกระทบของมลพิษเป็นต้น การนำสมการชุดนี้ไปใช้ร่วมกับสมการแมกซ์เวลล์สามารถใช้ในการศึกษาแมกนีโตโรไฮโดรไดนามิกส์ได้อีกด้วย

สมการชุดนาเวียร์-สโตกส์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งต่างจากสมการพีชคณิต โดยจะไม่มีภาวะความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แน่นอนหรือชัดเจน หากแต่ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงแทน ตัวอย่างเช่น ในสมการนาเวียร์-สโตกส์สำหรับของไหลในอุดมคติซึ่งไม่มีความหนืดและอัดตัวไม่ได้สามารถระบุความสัมพันธ์ของความเร็วนั้นเป็นอัตราส่วนต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงความดัน (pressure gradient)

สมการชุดนาเวียร์-สโตกส์ไม่สามารถใช้ระบุตำแหน่งได้แต่สามารถบอกความเร็วได้ทำให้คำตอบของสมการชุดนาเวียร์-สโตกส์ถูกเรียกว่าสนามความเร็วหรือสนามการไหล ซึ่งเป็นตัวอธิบายถึงความเร็วของของไหล ณ ตำแหน่งและเวลาที่กำหนด และเมื่อสนามความเร็วถูกระบุแล้ว ตัวแปรอื่นๆ เช่น อัตราการไหล หรือแรงแทรกอาจจะถูกค้นพบด้วย สมการชุดนี้ต่างออกไปจากปรากฏการณ์ที่พบได้ในกลศาสตร์ดั้งเดิมซึ่งมีคำตอบในรูปของเส้นแนวโน้มตำแหน่งของอนุภาคหรือการเปลี่ยนแปลงของ

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความต่อเนื่องสำหรับวิชากลศาสตร์ของไหลการศึกษาความเร็วในตำแหน่งนั้นควรเป็นสิ่งที่สนใจมาก แต่ทว่าสำหรับการสร้างแบบจำลองแล้ว จะใช้คอมพิวเตอร์ในการสร้างเส้นแนวโน้ม

โดยสมการนาเวียร์-สโตกส์มีรูปแบบเป็น

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (2.6)$$

เมื่อ  $\mathbf{g}$  คือ ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational force) มีค่าประมาณ  $9.8 \text{ m/s}^2$

$\mathbf{v}$  คือ ความเร็วของของไหล (m/s)

$\rho$  คือ ความหนาแน่นของของไหล ( $\text{kg/m}^3$ )

$\mu$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของความหนืด ( $\text{kg/m.s}$ )

$p$  คือ ความดัน ( $\text{N/s}^2$  หรือ Pa)

## 2.4 วิธีการผลต่างเชิงอันดับ (FINITE DIFFERENT METHOD)

การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จะมีลำดับขั้นตอนการทำเช่นเดียวกับการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จะมีลำดับขั้นตอนการทำเช่นเดียวกับการหาค่าอนุพันธ์ในวิชาแคลคูลัส คือเมื่อมีฟังก์ชันใดๆ ก็ตาม ที่ต้องการหาค่าอนุพันธ์อันดับใดๆ จะต้องเริ่มต้นจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งก่อน แล้วตามด้วยการหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง และอันดับสูงขึ้นไปตามที่ต้องการ ในทำนองเดียวกันการหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ จะมีลำดับขั้นตอนดังนี้

การนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้หาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จะพิจารณาจากการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ และช่วงกว้างของ  $h$  ที่เท่ากัน ซึ่งสามารถเป็นไปได้ทั้งด้านขวามือ (ไปข้างหน้า) และด้านซ้ายมือ (ย้อนหลัง)

### 2.4.1 การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

- การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า  
(Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ  $f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$

จะได้  $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.7)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ 
$$R_1 = \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$$

แทนค่า  $R_1$  ในสมการค่าประมาณอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$$

จะได้  $\|A\|_\infty$

หรือ 
$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \quad (2.8)$$

เมื่อ  $\Delta f_i$  คือ ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference)

$h$  คือ ระดับขั้น หรือช่วงกว้าง (Step Size) หรือ  $x_{i+1} - x_i$

ในสมการ (2.7) หรือสมการ (2.8) จะได้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง เพราะการหาค่า  $x$  จะอยู่ที่  $i$  และ  $i+1$  โดยที่พจน์ของ  $\Delta f_i / h$  เรียกว่า ผลต่างจำกัดอันดับหนึ่ง (First Finite Divide)

- การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the first Derivative)

จากอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถพิจารณาช่วงกว้าง  $h$  ที่เป็นค่าย้อนหลัง คือ  $x_i$  และ  $x_{i-1}$  ได้ดังสมการ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} - \dots$$

จะได้ 
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h) \quad (2.9)$$

เมื่อ  $O(h)$  คือ ค่าคลาดเคลื่อน

$\nabla f_i$  คือ ผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference)

- การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ 
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \dots$$

และ 
$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} - \dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad & f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^3}{3} + \dots \\
 & f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{f''(x_i)h^2}{6} + \dots \\
 \text{หรือ} \quad & f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - O(h^2) \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลายของการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางเป็นการตัดปลายอันดับสอง คือพจน์ของ  $O(h^2)$  ซึ่งจะแตกต่างจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าและผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังที่มีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายอันดับหนึ่ง คือพจน์ของ  $O(h)$  โดยการตัดปลายของพจน์ที่แตกต่างกัน สามารถสรุปความสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนที่ได้กับความแตกต่างของค่า  $h$  คือ ถ้าลดค่า  $h$  ไปครึ่งหนึ่งค่าประมาณที่เกิดจากการตัดปลายของการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางจะมีค่าคลาดเคลื่อนเป็น  $1/4$  แต่ถ้าเป็นการหาค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า และผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลัง จะมีค่าคลาดเคลื่อน  $1/2$

นั่นคือสามารถสรุปความสัมพันธ์ของการหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข และช่วงกว้างได้ดังนี้

- 1) ถ้าเปรียบเทียบการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า ผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลัง และผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง เมื่อ  $h$  มีค่าเท่ากัน การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง จะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด
- 2) ถ้าการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมที่เหมือนกัน แต่เมื่อใช้ค่า  $h$  ที่แตกต่างกัน การใช้ค่า  $h$  ที่มีค่าน้อยกว่าจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่า

#### 2.4.2 การหาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยม

(Finite Difference Approximation of Second Derivatives)

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถใช้ค่าตัวเลขที่ได้มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงต่อไป และสามารถเขียนอนุกรมเทย์เลอร์แบบไปข้างหน้าสำหรับ  $f(x_{i+2})$  ในพจน์ของ  $f(x_i)$

$$\text{จะได้} \quad f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \dots$$

$$\text{จากสมการ} \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \dots$$

ทำการคูณด้วย 2 แล้วนำไปลบกับสมการ  $f(x_{i+2})$

$$\text{จะได้} \quad f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \dots$$

เอกสารนี้เป็นจัดสมการใหม่ จะได้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (2.11)$$

$$\approx \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

สมการ (2.11) เรียกว่า ผลต่างสี่เบื้องข้างหน้าอันดับสอง  
(Second Forward Finite Divided Difference)

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2} + O(h) \quad (2.12)$$

$$\approx \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

สมการ (2.12) เรียกว่า ผลต่างสี่เบื้องหลังอันดับสอง  
(Second Backward Finite Divided Difference)

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (2.13)$$

$$\approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

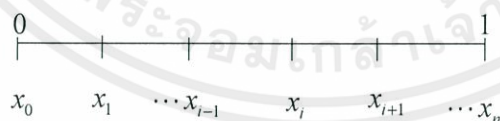
สมการ (2.13) เรียกว่า ผลต่างสี่เบื้องตรงกลางอันดับสอง  
(Second Centered Finite Divided Difference)

ต่อไปเราจะให้ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้วิธีการ FDM

ดังสมการเชิงอนุพันธ์  $u''(x) = f(x)$ ,  $0 < x < 1$  และเงื่อนไขค่าขอบ  $u'(0) = \sigma$ ,  $u(1) = \beta$

ดังต่อไปนี้

กำหนดให้  $U_i = u(x_i)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  และ



จากสมการ (2.13) ทำให้ได้ค่า  $u''(x_i) = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้





ดังนั้น  $A[U_i] = b$

ทำให้ได้ค่า  $[U_i] = A^{-1}b$  ซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ  $u''(x) = f(x)$ ,  $0 < x < 1$

กับเงื่อนไขของ  $u(1) = \beta$  และ  $u'(0) = \sigma$

ซึ่งทั้ง 3 วิธีจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกันโดยวิธีที่ 1 เป็น first-order accuracy

และวิธีที่ 2 และ 3 เป็น second-order accuracy

## 2.6 การใช้งาน MATLAB เบื้องต้น

เนื่องจากเราจะใช้ MATLAB ในการเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยเชิงประมาณในบทที่ 4 ในหัวข้อนี้จะแนะนำถึง การใช้ ที่มา MATLAB ดังนี้

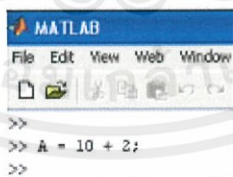
MATLAB เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ขั้นสูง (High-level Language) สำหรับการคำนวณทางเทคนิคที่ประกอบด้วย การคำนวณเชิงตัวเลข กราฟิกที่ซับซ้อน และการจำลองแบบเพื่อให้มองเห็นภาพพจน์ได้ง่ายขึ้น ชื่อของ MATLAB ย่อมาจาก matrix laboratory เดิมโปรแกรม MATLAB ได้เขียนขึ้นเพื่อใช้ในการคำนวณทาง matrix หรือเป็น matrix software

MATLAB ได้พัฒนามาด้วยการแก้ปัญหาที่ส่งมาจากหลายๆ ผู้ใช้เป็นระยะเวลาหลายปี จึงทำให้โปรแกรม MATLAB มีฟังก์ชันต่างๆ ให้เลือกมากมาย ในบางมหาวิทยาลัยได้ใช้โปรแกรม MATLAB เป็นหลักสูตรพื้นฐานในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ วิศวกรรมและ วิทยาศาสตร์ ตลอดจนในด้านอุตสาหกรรม ได้ใช้โปรแกรมเป็นเครื่องมือ สำหรับใช้ในการทำวิจัย

### 2.6.1 การกำหนดตัวแปร

การกำหนดค่าให้กับตัวแปรในโปรแกรม MATLAB สามารถกระทำได้โดยการใช้เครื่องหมายเท่ากับ “(=)” แล้วตามด้วยค่าข้อมูลหรือนิพจน์ที่ต้องการกำหนดให้กับตัวแปร

ตัวอย่างเช่น ตัวแปร = นิพจน์ ; เป็นการกำหนดค่าให้ตัวแปร A มีค่าเท่ากับ  $10 + 2 = 12$  หากไม่มีการเปลี่ยนแปลงของ ค่า A ค่า A จะมีค่าเท่ากับ 12



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.6.2 ตัวดำเนินการ

ลักษณะดำเนินงาน	ตัวดำเนินการ	รูปแบบของ MATLAB
การบวก	+	A+B
การลบ	-	A-B
การคูณ	*	A*B
การคูณเชิงสมาชิก	.*	A.*B
การหารทางขวา	/	A/B
การหารทางซ้าย	\	A\B
การหารเชิงสมาชิก	./	A./B
การยกกำลัง	^	A^b
การยกกำลังเชิงสมาชิก	.^	A.^b

## 2.6.3 ตัวดำเนินการเปรียบเทียบ

ลักษณะดำเนินงาน	ตัวดำเนินการเปรียบเทียบ ทางตรรกะ	ตัวอย่างรูปแบบการใช้งาน
น้อยกว่า	<	x < 10
น้อยกว่าหรือเท่ากับ	<=	x <= 10
มากกว่า	>	x > 10
มากกว่าหรือเท่ากับ	>=	x >= 10
เท่ากับ	==	x == 1
ไม่เท่ากับ	~=	x ~= 5
และ	&	x>2 & y<1
หรือ		x>2 y<1
ไม่	~	~x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.6.4 เครื่องหมายพิเศษ

เครื่องหมายจะเอาไว้แสดงหมายเหตุ มักจะเอาไว้เขียนอธิบายความหมายของโปรแกรมที่เขียนขึ้น

เครื่องหมาย	รายละเอียด
.	จุดทศนิยม
( )	กำหนด subscripts
=	กำหนดค่า
[ ]	สร้างเวกเตอร์และเมตริกซ์
:	สร้างเวกเตอร์
...	กระทำคำสั่งยังบรรทัดต่อไป
,	แยก element ภายในเมตริกและ subscripts

## 2.6.5 ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าทางตรีโกณมิติ

การหาค่าทางตรีโกณมิติเป็นการหาค่าโดยการใช้ความสัมพันธ์ของวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีการวัดมุมเป็นหน่วยองศาและ Radian แต่ในการคำนวณของโปรแกรม MATLAB จะใช้การคำนวณในหน่วยของ radian

คำสั่ง	รายละเอียด
sin(x)	ฟังก์ชันนี้ใช้คำนวณหาค่า sine ของ x โดยที่ค่า x ต้องอยู่ในหน่วยของเรเดียน
cos(x)	ฟังก์ชันนี้ใช้คำนวณหาค่า cosine ของ x โดยที่ค่า x ต้องอยู่ในหน่วยของเรเดียน
tan(x)	ฟังก์ชันนี้ใช้คำนวณหาค่า tangent ของ x โดยที่ค่า x ต้องอยู่ในหน่วยของเรเดียน
asin(x)	ฟังก์ชันที่ใช้ในการคำนวณค่าอินเวอร์สของ sine ซึ่งผลที่ได้จากการคำนวณจะเป็นมุมเรเดียนที่อยู่ระหว่าง $-\pi/2$ ถึง $\pi/2$ โดยที่ค่า x จะต้องอยู่ในช่วง -1 ถึง 1
acos(x)	ฟังก์ชันที่ใช้ในการคำนวณค่าอินเวอร์สของ cosine ซึ่งผลที่ได้จากการคำนวณจะเป็นมุมเรเดียนที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง $\pi$ โดยที่ค่า x จะต้องอยู่ในช่วง -1 ถึง 1
atan(x)	ฟังก์ชันที่ใช้ในการคำนวณค่าอินเวอร์สของ tangent ซึ่งผลที่ได้จากการคำนวณจะเป็นมุมเรเดียนที่อยู่ระหว่าง $-\pi/2$ ถึง $\pi/2$ โดยที่ค่า x จะต้องอยู่ในช่วง -1 ถึง 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

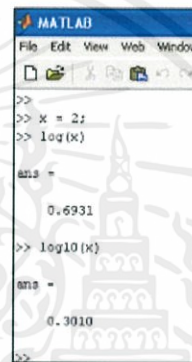
## 2.6.6 ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่า Logarithm

ในการคำนวณเพื่อหาค่าลอการิทึมนั้นจะเสียเวลาและยุ่งยากในการคำนวณมากเพราะจะต้องเปิดตารางเพื่อเทียบค่าในการหาผลลัพธ์เพื่อลดความยุ่งยากดังกล่าวโปรแกรม MATLAB จึงมีฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการหาค่า Logarithm คือ  $\log$  และ  $\log_{10}$  ซึ่งมีโครงสร้างดังนี้

การหาค่าฟังก์ชันลอการิทึม มีคำสั่งดังนี้

คำสั่ง	รายละเอียด
$\log(x)$	ฟังก์ชันนี้ใช้สำหรับการหาค่า natural logarithm ของ $x$
$\log_{10}(x)$	ฟังก์ชันนี้ใช้สำหรับการหาค่า common logarithms (logarithm ฐาน 10) ของ $x$

ตัวอย่างเช่น  $\ln(2) = 0.6931$   $\log_{10}(2) = 0.3010$



```

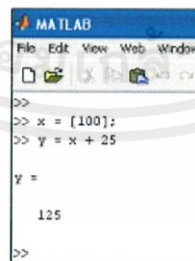
MATLAB
File Edit View Web Window
>>
>> x = 2;
>> log(x)
ans =
    0.6931
>> log10(x)
ans =
    0.3010
>>

```

## 2.6.7 การสร้างอาร์เรย์

อาร์เรย์ในโปรแกรม MATLAB สามารถสร้างได้โดยการกำหนดค่าตัวแปรไว้ด้านซ้ายมือแล้วตามด้วยเครื่องหมายเท่ากับ(=) ส่วนด้านขวามือให้นำค่าข้อมูลมาใส่ในเครื่องหมาย bracket [ ]  $x = [x1]$

เช่น  $x = [100]$  เป็นเมตริกซ์ที่มี 1 แถว 1 หลัก



```

MATLAB
File Edit View Web Window
>>
>> x = [100];
>> y = x + 25
y =
    125
>>

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าข้อมูลหรือค่าตัวเลขระหว่างหลักจะถูกแยกด้วยช่องว่าง(space) หรือเครื่องหมาย ,  
 $x=[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  หรือ  $x=[x_1,x_2,\dots,x_n]$  เช่น  $x=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$

```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
>>
>> x = [0 1 2 3 4];
>> y = x + 3
y =
     3     4     5     6     7
>> x = [-3,-2,-1,0,1];
>> y = x + 3
y =
     0     1     2     3     4
>>

```

## 2.6.8 อาร์เรย์มาตรฐาน

สำหรับสร้างอาร์เรย์มาตรฐานเพื่อความรวดเร็วและสะดวกต่อการใช้งาน  
เมตริกซ์ที่เป็นศูนย์ทั้งหมดจะใช้  
`zeros(n)` คำสั่งนี้จะใช้สร้างเมตริกซ์ศูนย์ซึ่งเป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด  $n \times n$

เช่น `zeros(3)`

```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
>>
>> zeros(3)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
>>

```

`zeros(m,n)` คำสั่งนี้จะใช้สร้างเมตริกซ์ศูนย์ที่มีขนาด  $m \times n$

เช่น `zeros(2,4)`


```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
>>
>> zeros(2,4)
ans =
     0     0     0     0
     0     0     0     0
>>

```

เอกสารนี้ เมตริกซ์เอกลักษณ์ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าหนึ่งในเส้นทแยงมุมหลักส่วนตำแหน่งอื่นๆ จะมี  
 0 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด คำสั่งที่ใช้สร้างเมตริกซ์เอกลักษณ์ มีดังต่อไปนี้  
 $\text{eye}(n)$  คำสั่งนี้ใช้สร้างเมตริกซ์เอกลักษณ์ซึ่งเป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด  $n \times n$



```

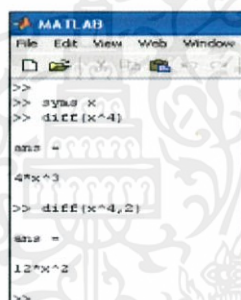
MATLAB
File Edit View Web Window
>> eye(4)
ans =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
>>

```

## 2.6.9 การหาอนุพันธ์

คำสั่ง	รายละเอียด
$\text{diff}(f)$	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$
$\text{diff}(f,n)$	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ อันดับที่ $n$

เช่น



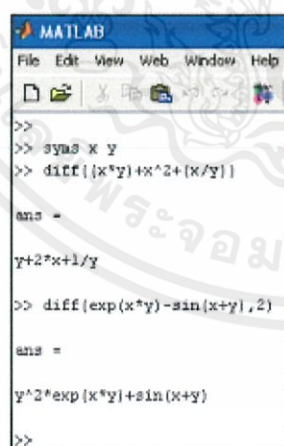
```

MATLAB
File Edit View Web Window
>> sym x
>> diff(x^4)
ans =
 4*x^3
>> diff(x^4,2)
ans =
 12*x^2
>>

```

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^4) = 12x^2$$



```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
>> sym x y
>> diff(|x*y|+x^2+(x/y))
ans =
 y+2*x+1/y
>> diff(exp(x*y)-sin(x+y),2)
ans =
 y^2*exp(x*y)+sin(x+y)
>>

```

$$\frac{d}{dx}(xy + x^2 + \frac{x}{y}) = y + 2x + \frac{1}{y}$$

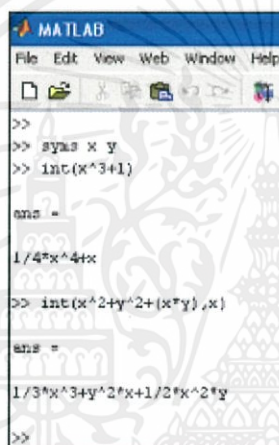
$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{xy} - \sin(x+y)) = y^2 e^{xy} + \sin(x+y)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.6.10 การอินทิเกรต

คำสั่ง	รายละเอียด
<code>int(f(x))</code>	$\int f(x)dx$
<code>int(f(x,y),x)</code>	$\int f(x,y)dx$
<code>int(f(x),a,b)</code>	$\int_a^b f(x)dx$
<code>int(f(x,y),x,a,b)</code>	$\int_a^b f(x,y)dx$

เช่น



```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
>>
>> syms x y
>> int(x^3+1)
ans =
1/4*x^4+x
>> int(x^2+y^2+(x*y),x)
ans =
1/3*x^3+y^2*x+1/2*x^2*y
>>

```

$$\int (x^3 + 1)dx = \frac{x^4}{4} + x + C$$

$$\int (x^2 + y^2 + xy)dx = \frac{x^3}{3} + y^2x + \frac{x^2y}{2} + C$$

## 2.6.11 หาคำตอบอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง

คำสั่ง	รายละเอียด
<code>dsolve('eqn')</code>	แก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยการใส่สมการลงไป ในเครื่องหมายคำพูด ('eqn')
<code>dsolve('eqn','cond')</code>	แก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยการใส่สมการลงไป ในเครื่องหมายคำพูด ('eqn') และใส่เงื่อนไขตามลงไป ('cond')

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

MATLAB
File Edit View Web Window
>>
>> syms y t
>> dsolve('Dy+t*y=0')

ans =

C1*exp(-1/2*t^2)
>>

```

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dt} + ty = 0$$

คือ  $y = C_1 e^{-t^2/2}$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dt} + 5y = 9e^{2t}; y(0) = 4$$

คือ  $y = \frac{9}{7}e^{2t} + \frac{19}{7}e^{-5t}$

```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
>>
>> syms y t
>> dsolve('Dy+5*y=9*exp(2*t)', 'y(0)=4')

ans =

9/7*exp(2*t)+19/7*exp(-5*t)
>>

```

## 2.6.12 การสร้างกราฟ

สำหรับการแสดงผลที่สำคัญ คือ การแสดงผลด้วยกราฟซึ่ง MATLAB เป็นโปรแกรมที่สามารถสร้างกราฟได้ดีมาก

โดยสามารถเขียนกราฟได้ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับในหัวข้อนี้จะเสนอกกราฟ x-y แบบง่าย ๆ

plot(x,y,S) สร้าง Linear plot ของค่า x และ y โดยแกน x เป็นแกนนอน และ y เป็นแกนตั้ง และ S คือตัวเลือกเช่น สีที่ใช้ ชนิดของจุด เป็นต้น

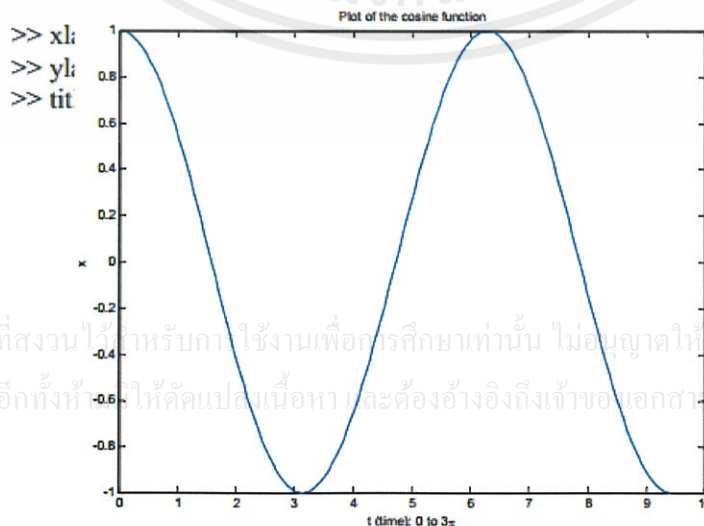
หากต้องการพล็อตโดยใช้สีแดง และใช้เส้น เป็นต้น

```

>> t = 0: pi/50:3*pi; % time
>> x = cos(t); % cosine function
>> plot(t, x); % plot cosine function

```

จากนั้นเดิมชื่อของแกนทั้งสองและชื่อเรื่อง ดังกล่าว  $\pi$  แสดง  $\pi$  บนแกนราบ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสาร ทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หากต้องการพล็อตโดยใช้สีแดงและใช้เส้นประ ทำได้โดยเพิ่มตัวเลือกเป็น

```
>>plot(t , x, 'r')                %plot cosinefunction
```

มีตัวเลือกอื่นๆในการพล็อตสามารถเลือกได้ดังนี้

สี	จุด	เส้น
b blue	. point	- solid
g green	o circle	: dotted
r red	x x-mark	-. dashdot
c cyan	+ plus	-- dashed
m magenta	* star	
y yellow	s square	
k black	d diamond	
	v triangle (down)	
	^ triangle (up)	
	< triangle (left)	
	> triangle (right)	
	p pentagram	
	h hexagram	

### 2.6.13 M-file

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำสั่ง	รายละเอียด
clear	เช็ดค่าเริ่มต้นใหม่ให้ตัวแปรทั้งหมด
n=input('text')	รับค่า n ทางแป้นพิมพ์
if condition module1 else module2 end	การเช็คเงื่อนไขว่าจริงหรือเท็จ ถ้าจริงทำ module1 ถ้าเท็จทำ module2 เป็นต้น
if condition module1 elseif condition module2 else module3 end	เป็นการเช็คเงื่อนไขที่มากกว่า 1 เงื่อนไข
for k=start:stop module end	การทำซ้ำเท่ากับจำนวนรอบที่ใส่ลงไป โดย k จะเริ่มต้นที่ค่า start และจบที่ค่า stop เพิ่มค่า k ทีละ 1
for k=start:step:stop module end	การทำซ้ำเท่ากับจำนวนรอบที่ใส่ลงไป โดย k จะเริ่มต้นที่ค่า start และจบที่ค่า stop เพิ่มค่า k เท่ากับค่าของ step ที่ใส่

```

1 - clear
2 - x=input('Input x = ');
3 - if x > 0
4 -     disp('positive number')
5 - elseif x < 0
6 -     disp('negative number')
7 - else
8 -     disp('zero')
9 - end

```

```

1 - clear
2 - n=input('input n = ');
3 - sum=0;
4 - for k=1:n
5 -     sum=sum+k;
6 - end
7 - disp('1 + 2 + . . . + n');
8 - disp(sum)

```

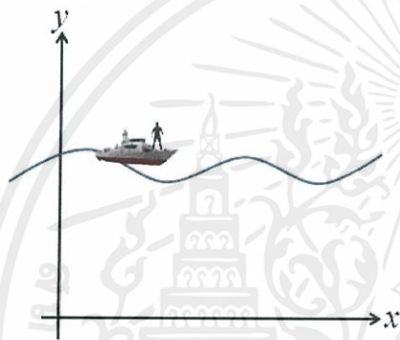
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

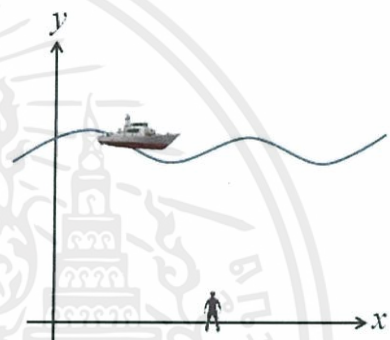
## Volume of Fluid (VOF) Method

ในบทนี้จะอธิบายถึงวิธีการ volume of fluid ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาสำหรับการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาและมีขอบอิสระ ซึ่งมีความยืดหยุ่นและมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีการอื่นๆ ในการหาผลเฉลยของปัญหาขอบอิสระ

สำหรับโครงสร้างของการเคลื่อนที่โดยทั่วไปนั้นจะใช้พิกัดลากรองจ์(Lagrangian coordinate) และออยเลอร์(Eulerian coordinate) โดยแต่ละวิธีก็จะมีข้อดีและข้อเสียที่ต่างกัน ซึ่งทางเลือกของการใช้งานนั้นก็ขึ้นอยู่กับลักษณะเฉพาะของปัญหาที่จะทำการหาผลเฉลย ในการศึกษาครั้งนี้จะเน้นไปที่พิกัดของออยเลอร์สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหลที่มีขอบแบบอิสระ โดยเฉพาะปัญหาที่ขอบอิสระนั้นมีขนาดใหญ่ซึ่งวิธีการลากรองจ์ไม่สามารถใช้ได้



รูปที่ 3.1 Lagrangian Coordination



รูปที่ 3.2 Eulerian Coordination

จากรูปที่ 3.1 และ รูปที่ 3.2 จะเห็นว่าพิกัดลากรองจ์จะเป็นการสังเกตการเคลื่อนที่ของของไหลโดยผู้สังเกตจะอยู่ในตำแหน่งเดียวกับจุดที่จะสังเกต ส่วนพิกัดออยเลอร์นั้นจะเป็นการสังเกตการเคลื่อนที่ของของไหลโดยที่ผู้สังเกตจะมองการเคลื่อนที่ของจุดที่สังเกตที่ตำแหน่งอื่น

ขอบเขตอิสระที่จะทำการพิจารณาคือบริเวณส่วนที่เป็นพื้นผิวอิสระหรือบริเวณพื้นผิวระหว่างของไหล 2 ชนิดโดยเราสามารถแบ่งชนิดของปัญหาที่เกิดขึ้นในวิธีการเชิงตัวเลขของขอบเขตอิสระได้เป็น 3 อย่างด้วยกัน

ได้แก่

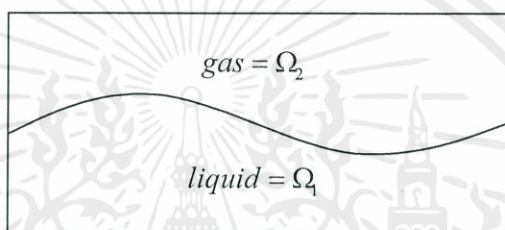
1. การแสดงขอบเขตอิสระที่ไม่ต่อเนื่อง
2. วิวัฒนาการของขอบเขตอิสระในเรื่องของเวลา
3. ลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตที่ถูกกำหนดบนของไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการแสดงวิธีลากรองจ์ที่ไม่ต่อเนื่องสำหรับของไหลนั้นจะเป็นแนวคิดง่ายๆ เพราะในแต่ละบริเวณของโครงร่างตาข่ายของไหลซึ่งแบ่งออกเป็นองค์ประกอบ ยังคงยึดติดกับองค์ประกอบของของไหลเดียวกันตลอดเวลา แรงของตัวส่วนร่างกาย(body force) และส่วนพื้นผิวบนส่วนประกอบนี้จึงง่ายต่อการกำหนด

ดังนั้นมันจึงมีความสัมพันธ์กันโดยตรงในการคำนวณผลการเคลื่อนที่ของส่วนประกอบ ส่วนในการแสดงของวิธีออยเลอร์ เส้นกริดนั้นก็คงจะยังมีอยู่ และเอกลักษณ์ของส่วนประกอบเฉพาะของของไหลนั้นจะถูกตัดออกไป แต่ถึงอย่างนั้นโดยส่วนใหญ่เราก็มักที่จะมองของไหลในตารางของวิธีกรออยเลอร์

พื้นฐานของวิธีการ VOF เป็นปริมาณเศษส่วนของแบบแผนของของไหลสำหรับการติดตามขอบอิสระ ในเทคนิคนี้ ให้ฟังก์ชัน  $F(r, \theta, t)$  เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่โดย



รูปที่ 3.3 แสดงพื้นที่ของของไหล

$$\text{ให้ } S = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega\}$$

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 1 & ; & (x, y) \in S \\ 0 & ; & (x, y) \notin S \\ \varepsilon & ; & 0 < \varepsilon < 1, (x, y) \in \partial S \end{cases} \quad (\text{ขอบของ } S) \quad (3.1)$$

ดังรูปที่ 3.3 เนื่องจากฟังก์ชัน  $F$  เป็นฟังก์ชันขั้นบันได (step-function) เมื่อต้องการคำนวณค่าที่อยู่ในตำแหน่งบนขอบเซลล์ ค่าของ  $F$  จะมีการเปลี่ยนแปลงมากซึ่งค่าอนุพันธ์ของสามารถคำนวณได้ในวิธีการพิเศษ ซึ่งจะทำการอธิบายภายหลังเมื่อคำนวณแล้ว ค่าอนุพันธ์สามารถใช้ในการกำหนดขอบปกติในที่สุดเมื่อรู้ทิศทางปกติและค่าของ  $F$  ที่เซลล์ขอบ การตัดเส้นกันของเซลล์จะสร้างชั้นใกล้กับพื้นผิว นอกจากนี้ความโค้งของพื้นผิวสามารถคำนวณแรงตึงผิวได้

ฟังก์ชัน  $F$  จะขึ้นอยู่กับเวลาที่ถูกกำหนดโดยสมการ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial r} + v \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \quad (3.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $u$  และ  $v$  เป็นความเร็วในแนวแกน  $r$  และ  $\theta$  ตามลำดับ สถานะของสมการนี้ คือ  $F$  เป็นการเคลื่อนที่ของของไหล โดยปกติการประมาณค่าผลต่างอันดับ (finite-difference) จะทำฟังก์ชัน  $F$  และพื้นผิวจะสูญเสียความละเอียดในการคำนวณซึ่ง  $F$  เป็น step-function ที่มีค่าของ 0 หรือ 1 ซึ่งสามารถใช้การประมาณค่าการไหลโดยอนุรักษ์ธรรมชาติแบบไม่ต่อเนื่อง การประมาณค่านี้เรียกว่า วิธี Donor-Acceptor ซึ่งจะอธิบายรายละเอียดในส่วนต่อไป

ดังนั้นเทคนิค VOF ให้ความหมายของบริเวณการติดตามของไหลผ่านตาข่ายของเซลล์ที่อยู่กับที่ วิธีการจะใช้ค่าที่ต่ำที่สุดของข้อมูลที่เก็บไว้ และเนื่องจากบริเวณการติดตามมากกว่าขอบ มันจะหลีกเลี่ยงปัญหาตรรกะทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับการตัดพื้นผิว วิธีการ VOF สามารถคำนวณเพื่อให้อยู่ในรูป 3 มิติได้ง่าย ซึ่งยังคงใช้การเก็บรักษาข้อมูลโดยเฉพาะส่วนที่เป็นประโยชน์

หลักของวิธีการ VOF ควรใช้ในการติดตามพื้นผิวใดๆที่ไม่ต่อเนื่องในคุณสมบัติของส่วนประกอบในความเร็วที่เกี่ยวข้องกับการสัมผัส หรือคุณสมบัติอื่นๆ โดยเฉพาะกรณีที่น่ามาเป็นตัวอย่าง จะกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเจาะจงซึ่งจะต้องประยุกต์กับตำแหน่งของขอบ สำหรับเหตุการณ์ที่พื้นผิวไม่ได้คงที่ในของไหล แต่มีการเพิ่มเติมความสัมพันธ์ของการเคลื่อนไหว สมการเคลื่อนที่สมการสมการที่ (3.2) จะต้องถูกแก้ไข ตัวอย่างเช่น การใช้งานที่เป็นคลื่นความสั่นสะเทือน, การทำปฏิกิริยาของสารเคมี และขอบเขตระหว่างบริเวณของไหลระยะเดียวและสองระยะ

### 3.1 วิวัฒนาการของ VOF

วิธีการผลต่างเชิงอันดับของออยเลอร์(Eulerian finite-difference) สำหรับการคำนวณการเคลื่อนที่ของของไหลที่ไม่สามารถอัดได้ วิธีการแรกเพื่อให้สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของพื้นผิวอิสระแบบซับซ้อนคือวิธี Marker-and-Cell (MAC) วิธีการนี้จะเป็นเทคนิคแรกที่ใช้ความดันและความเร็วซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรเบื้องต้น วิธีการ MAC จะทำงานโดยการกระจายของอนุภาคเครื่องหมายเมื่อกำหนดบริเวณของของไหลและง่ายในการกำหนดค่าความดันพื้นผิวอิสระที่ตรงกลางของเซลล์ที่กำหนดเพื่อใส่ในพื้นที่ผิว โดยไม่มีการทำเพื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของความดันที่ตำแหน่งจริงของขอบเขตในพื้นที่ผิวของเซลล์ การประมาณค่าอย่างหยาบนี้ต่อมาได้ถูกปรับปรุงให้ดีขึ้นและอนุภาคเครื่องหมายนั้นถูกตัดออกในการสนับสนุนของอนุภาคลูกโซ่บนพื้นผิวอิสระ

อัลกอริทึมรุ่นที่เข้าใจง่ายในการหาผลเฉลยพื้นฐาน (SOLA) ที่ใช้ในวิธีการ MAC สามารถใช้ได้โปรแกรมที่เน้นผู้ใช้งาน(user-oriented) ที่เรียกว่า SOLA ถึงแม้ว่า SOLA จะไม่สามารถแก้ปัญหาพื้นผิวอิสระ แต่ในเวอร์ชันถัดมาSOLA-SURF ก็สามารถใช้กับวิธีการแบบฟังก์ชันพื้นผิวที่สูง ความง่ายและความยืดหยุ่นของโปรแกรมSOLA ทำให้มีพื้นฐานที่ดีเยี่ยมสำหรับการพัฒนาของโปรแกรมที่มีความซับซ้อนมากขึ้น จากเหตุผลนี้ รุ่นตารางตัวแปรของโปรแกรมSOLA คือ SOLA-VARIABLE MESH (SOLA-VM) จึงถูกเลือกเป็นพื้นฐานสำหรับเทคนิค VOF ตั้งแต่นั้นมา ได้มีการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์การใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ ใช้นับด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปรับปรุงมากมายและเทคนิคพื้นฐานได้สำเร็จ สามารถประยุกต์เพื่อการใช้งานปัญหาในวงกว้าง ในส่วนด้านการพัฒนา McMaster, et al. ได้ทำการรวมโปรแกรมของ SOLA-SURF โดยมีเทคนิคการติดตามพื้นผิวต่างๆบนพื้นฐานของแนวคิดเหมือนกับ VOF

ในส่วนย่อยต่อไปจะเป็นรายละเอียดของวิธีการ VOF กับความสนใจในการประมาณค่าโดยวิธีfinite-difference ที่มีตารางแบบไม่สม่ำเสมอ(nonuniform) และวิธีการVOF สำหรับการหักเห การเคลื่อนที่และตำแหน่งของพื้นผิว

### 3.2 สมการ Navier-Stokes

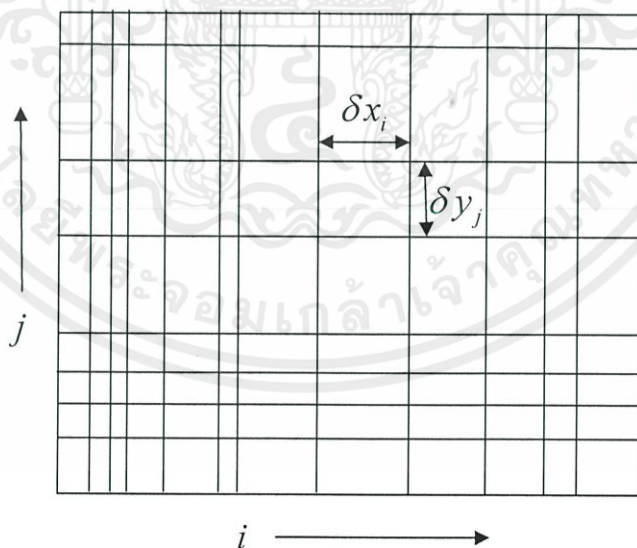
วิธีการ VOF จะใช้ตารางออยเลอร์ของเซลล์รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีระยะห่างระหว่าง  $x_i$  และ  $x_{i-1}$  คือ  $\delta x_i$  สำหรับแถวที่  $i$  และระยะห่างระหว่าง  $y_j$  และ  $y_{j-1}$  คือ  $\delta y_j$  สำหรับคอลัมน์ที่  $j$  (รูปที่ 3.4) ถึงแม้ว่ามันจะไม่มีคามยืดหยุ่นเหมือนกับตารางที่มีขนาดของช่องเท่ากัน แต่จะช่วยให้มันมีข้อได้เปรียบอย่างมากสำหรับวิธีการหาผลเฉลยใหม่ของตารางที่ใช้รูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดเท่ากัน

สมการของไหลที่จะใช้แก้ปัญหา คือ สมการ Navier-Stokes ซึ่งมีรูปทั่วไปดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (3.3)$$

และ

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (3.4)$$



รูปที่ 3.4 ตารางผลต่างอันตะโดยเซลล์ตัวแปรแบบสี่เหลี่ยม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความเร็ว ( $u, v$ ) จะอยู่ในพิกัดฉากคาร์ทีเซียนที่ขนานกันในทิศทาง ( $x, y$ ) ตามลำดับ ความเร่งที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงจะแสดงโดย ( $g_x, g_y$ ) และ  $\rho$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของความหนืด โดยความหนาแน่นของของไหลแทนด้วย  $\rho$  ในการคำนวณของไหลหนึ่งอย่างด้วยพื้นผิวอิสระ  $\rho$  ในสมการ (3.3) และ (3.4) จะเป็นค่าคงที่ ในการคำนวณของไหล 2 อย่าง  $\rho$  อาจจะไม่เท่ากับผลต่างของค่าคงที่ในแต่ละของไหล จะเห็นว่าสมการ (3.3) และ (3.4) มีสมการ 2 สมการแต่มี 3 ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า คือ  $u, v$  และ  $p$  ดังนั้นเราจะเป็นต้องเพิ่มอีก 1 สมการซึ่งหามาได้จากกฎการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) คือ สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้สมการ (3.3) และในสมการ (3.4) จะต้องเสริมเงื่อนไขการอัดไม่ได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

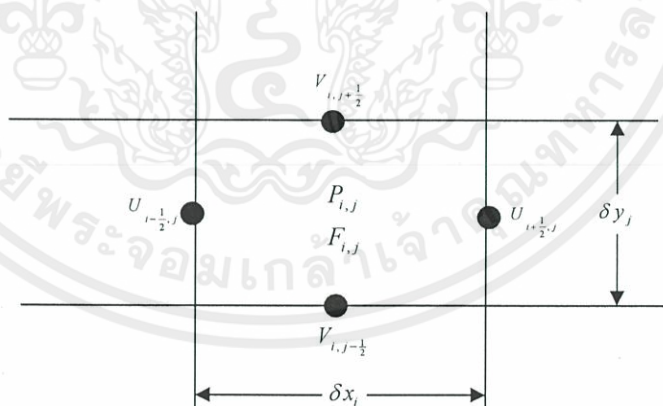
บางครั้งของไหลที่อัดได้ (เช่น คลื่นอคูสติก) ในสมการ (3.5) จะถูกแทนที่ด้วย

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

เมื่อ  $c$  คือความเร็วเสียง

สมการ (3.6) เพิ่มความยืดหยุ่นมากขึ้นจากสมการ (3.5) ด้วยการเพิ่มพจน์  $\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$  เข้าไปในสมการ (3.5) ซึ่งเป็นคุณสมบัติมาตรฐานใน VOF

ในเทคนิคของ VOF ค่าของตัวแปรที่อยู่ในรูปเชิงตัวเลขที่เซลล์เซลล์หนึ่ง จะถูกระบุตำแหน่งดังที่แสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ตำแหน่งของตัวแปรตามแบบอย่างของเซลล์โครงร่างตาข่าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3 การใช้ Finite Difference

รูปทั่วไปสำหรับการประมาณค่า finite-difference ของสมการที่ (3.3) และ (3.4) คือ

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^n + \delta t \left[ -\left( p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1} \right) / \delta \rho x_{i+\frac{1}{2}} + g_x - FUX - FUY + VISX \right]$$

(3.7)

และ

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \delta t \left[ -\left( p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1} \right) / \delta \rho y_{j+\frac{1}{2}} + g_y - FVX - FVY + VISY \right]$$

เมื่อ

$$\delta \rho x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j} \right] \delta x_{i+1} + \left[ \rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i+1,j} \right] \delta x_i \right\}$$

และ

$$\delta \rho y_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j} \right] \delta y_{j+1} + \left[ \rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j+1} \right] \delta y_j \right\}$$

$$\delta t = t^{n+1} - t^n$$

ค่า  $VISX$  จะหมายถึงเทอมของความหนืด และค่า  $FUX$ ,  $FUY$  จะหมายถึงการพาของความเร่งความเร็วในทิศแกน  $x$  และแกน  $y$  โดยเทอมเหล่านี้จะประมาณผลโดยใช้ค่าที่ระดับเวลาเก่า ( $n$ ) สำหรับความเร็ว และเนื่องจากที่จุดเริ่มต้นของการคำนวณในสมการ (3.7) ความดันที่ระดับเวลา  $n+1$  นั้นยังไม่ถูกกำหนดค่า จึงไม่สามารถใช้ได้โดยตรงเพื่อประเมินค่า ( $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ ) แต่จะต้องรวมกับสมการความต่อเนื่องที่อธิบายด้านล่างในขั้นแรกของผลเฉลย ดังนั้นค่า  $\rho^{n+1}$  ในสมการนี้จะถูกแทนที่โดย  $\rho^n$  เพื่อเป็นการคำนวณครั้งแรกสำหรับความเร็วใหม่

โดยค่าประมาณของ  $FUX$  ที่จุด  $(i+\frac{1}{2}, j)$  มีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$FUX = \left( u_{i+\frac{1}{2},j} / \delta x_\alpha \right) \left[ \delta x_{i+1} DUL + \delta x_i DUR + \alpha \operatorname{sgn}(u) (\delta x_{i+1} DUL - \delta x_i DUR) \right] \quad (3.8)$$

เมื่อ  $DUB = (u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}) / \delta y_j$

$$DUT = (u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}) / \delta y_{j+1}$$

$$\delta y_\alpha = \delta y_{j+1} + \delta y_j + \alpha \operatorname{sgn}(v) (\delta y_{j+1} - \delta y_j)$$

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} > 0 \\ 0 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} = 0 \\ -1 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$FUY = (v_{i,j+\frac{1}{2}} / \delta y_\alpha) [\delta y_{j+1} DUB + \delta y_j DUT + \alpha \operatorname{sgn}(V) (\delta y_{j+1} DUB - \delta y_j DUT)] \quad (3.9)$$

$$\text{เมื่อ } DUB = (u_{1,j+\frac{1}{2}} - u_{1,j-\frac{1}{2}}) / \delta y_j$$

$$DUT = (u_{1,j+\frac{1}{2}} - u_{1,j-\frac{1}{2}}) / \delta y_{j+1}$$

$$\delta y_\alpha = \delta y_{j+1} + \delta y_j + \alpha \operatorname{sgn}(v) (\delta y_{j+1} - \delta y_j)$$

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} > 0 \\ 0 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} = 0 \\ -1 & ; v_{i,j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

สำหรับ  $FVX$  และ  $FVY$  นั้นจะทำการเปลี่ยนค่าจาก  $u$  เป็น  $v$  ในส่วนของ  $DUL$ ,  $DUR$ ,  $DUT$  และ  $DUB$

และ

$$VISX = v [DUDXSQ + DUDYSQ] \quad (3.10)$$

เมื่อ

$$DUDXSQ = 2.0 \left[ \frac{u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x_i (\delta x_i + \delta x_{i+1})} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x_{i+1} (\delta x_i + \delta x_{i+1})} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta x_i + \delta x_{i+1}} \right]$$

$$DUDYSQ = (DUDYT - DUDYB) / \delta y_j$$

$$\text{โดย } DUDYT = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} \delta y_j}{\delta y_{j+1}} - \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} \delta y_{j+1}}{\delta y_j} - \left( \frac{\delta y_j u_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta y_{j+1} u_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta y_j + \delta y_{j+1}} \right) \left[ \frac{\delta y_j / \delta y_{j+1} - \delta y_{j+1} / \delta y_j}{\frac{1}{2} (\delta y_j + \delta y_{j+1})} \right]$$

$$DUDYB = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} \delta y_{j-1}}{\delta y_j} - \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} \delta y_j}{\delta y_{j-1}} - \left( \frac{\delta y_{j-1} u_{i,j+\frac{1}{2}} - \delta y_j u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y_j + \delta y_{j-1}} \right) \left[ \frac{\delta y_{j-1} / \delta y_j - \delta y_j / \delta y_{j-1}}{\frac{1}{2} (\delta y_{j+1} + \delta y_j)} \right]$$

โดยค่า  $VISY$  นั้น จะมีการคิดคล้ายกับค่า  $VISX$  แต่จะเปลี่ยนจากค่า  $u$  เป็น  $v$  และเปลี่ยนจาก  $x$  เป็น  $y$

และค่า  $\alpha$  ในสมการ (3.8) มีค่าดังนี้

$$\alpha = \begin{cases} 0 & , \text{ เมื่อ ใช้การประมาณค่าความถูกต้องอันดับสอง} \\ 1 & , \text{ เมื่อ ใช้รูปแบบ donor-cell ซึ่งเป็นการประมาณค่าความถูกต้องอันดับหนึ่ง} \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้การเชิงงานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น มิใช่ให้ผู้ใดนำไปใช้มีวัตถุประสงค์ทางการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการคำนวณความเร็วจากสมการ (3.7) ซึ่งมีรูปแบบการประมาณค่าเป็นเชิงตัวเลข ซึ่งสมการ (3.6) จะต้องมีความสอดคล้องกับสมการ (3.7) ดังนั้นความดันและความเร็วในสมการ (3.6) จะต้องถูกแก้ไขในการคำนวณในแต่ละเซลล์ของของไหลใหม่ โดยจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับการประมาณค่า finite-difference ได้เป็น

$$(p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n) / (\rho c^2 \delta t) + D_{i,j}^{n+1} = 0 \quad (3.11)$$

เมื่อ

$$D_{i,j}^{n+1} = (u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) / \delta r_i + (v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) / \delta \theta_j$$

หลังจากที่สมการ (3.11) ถูกจัดให้อยู่ในรูปสำหรับการประมาณค่า finite-difference แล้วจะได้ความหนาแน่นใหม่ คือ

$$\rho = \rho_F F_{i,j} + \rho_c (1 - F_{i,j}) \quad (3.12)$$



รูปที่ 3.6 แสดงความหนาแน่นในส่วนต่างๆของของไหล

โดยค่า  $c^2$  ที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะมีเพียงค่าเดียว หรือกล่าวได้ว่าการสมมติให้ความเร็วของของไหลทั้งสองชนิดที่คำนวณนั้นมีค่าเท่ากัน

เนื่องจากความเร็วที่ปรากฏอยู่ใน  $D$  จะถูกคำนวณที่เวลาใหม่ ซึ่งขึ้นอยู่กับความดัน ณ เวลา  $n+1$  ตามสมการ (3.7) โดยที่สมการนี้เป็นความสัมพันธ์แบบ implicit สำหรับความดันตัวใหม่ ในการคำนวณตารางจะคำนวณเป็นแถวจากแถวล่างขึ้นไปยังด้านบน ในแต่ละเซลล์ที่บรรจุของไหลอยู่นั้น (ไม่รวมส่วนที่เป็นพื้นผิวอิสระ) ความดันจะถูกเปลี่ยนจากสมการ (3.11) เป็น

$$\delta p = -S / (\partial S / \partial p) \quad (3.13)$$

โดยที่ค่า  $S$  คือค่าทางซ้ายของสมการ (3.11)

ซึ่งสมการ (3.13) สามารถเขียนในรูป finite difference method ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการ  $\delta p = -S \beta_{i,j} n_{i,j}$  ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ (3.14) ในการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{เมื่อ } \beta_{i,j} = [(\omega - 1.0)\Omega + 1] / \left[ xx\Omega + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\rho_F}{\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}} \right) / \delta t \right]$$

$$\text{โดย } xx = \frac{\delta t}{\delta x_i} \left( \frac{2.0}{RHXL} + \frac{2.0}{RHXR} \right) + \frac{\delta t}{\delta y_j} \left( \frac{2.0}{RHYT} + \frac{2.0}{RHYB} \right)$$

$$RHXL = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i-1,j}] \delta x_i + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta x_{i-1}$$

$$RHXR = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta x_{i+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i+1,j}] \delta x_i$$

$$RHYT = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta y_{j+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j+1}] \delta y_j$$

$$RHYB = [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j-1}] \delta y_j + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c)F_{i,j}] \delta y_{j-1}$$

$$\text{และ } \eta_{i,j} = 1.0 / (1.0 - DFS / DMIN) \quad (3.15)$$

$$\text{โดย } DFS = (0.5 - F_{i,j}) \delta x_i$$

$$DMIN = 0.5 (\delta x_i + \delta x_{i+1})$$

และจะได้ความดันใหม่คือ

$$p = p_{i,j} + \delta p \quad (3.16)$$

โดยการประมาณค่าใหม่สำหรับความเร็วของทุกด้านบนเซลล์คือ

$$\left. \begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j} + \delta t \Omega \delta p / \delta \rho x_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i-\frac{1}{2},j} + \delta t \Omega \delta p / \delta \rho x_{i-\frac{1}{2}} \\ v_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta t \Omega \delta p / \delta \rho y_{j+\frac{1}{2}} \\ v_{i,j-\frac{1}{2}} + \delta t \Omega \delta p / \delta \rho y_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\text{โดย } \Omega = \min(\mu_0, 1.0)$$

$$\mu_0 = \max(2c\delta t / \delta r_i, 2c\delta t / \delta \theta_j)$$

สำหรับในปัญหาของเรานั้น เราจะพิจารณาของไหลแบบอัดไม่ได้ (incompressible fluid)

ดังนั้น  $\Omega = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งสมการ (3.17) สามารถเขียนอยู่ในรูป Finite Difference ได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j} &= u_{i-\frac{1}{2},j} + 2.0\delta t \delta p / \delta \rho x_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i-\frac{1}{2},j} &= u_{i-\frac{1}{2},j} + 2.0\delta t \delta p / \delta \rho x_{i-\frac{1}{2}} \\ v_{i,j+\frac{1}{2}} &= v_{i,j-\frac{1}{2}} + 2.0\delta t \delta p / \delta \rho y_{j+\frac{1}{2}} \\ v_{i,j-\frac{1}{2}} &= v_{i,j-\frac{1}{2}} + 2.0\delta t \delta p / \delta \rho y_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (3.18)$$

โดย

$$\begin{aligned} \delta \rho x_{i+\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta x_{i+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i+1,j}] \delta x_i \\ \delta \rho x_{i-\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i-1,j}] \delta x_i + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta x_{i-1} \\ \delta \rho y_{i+\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta y_{j+1} + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j+1}] \delta y_j \\ \delta \rho y_{i-\frac{1}{2}} &= [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j-1}] \delta y_j + [\rho_c + (\rho_F - \rho_c) F_{i,j}] \delta y_{j-1} \end{aligned}$$

แต่สำหรับกรณีที่เป็นของไหลชนิดเดียวจะใช้

$$S = (1 - \eta) p_N + \eta p_s - p_{i,j} \quad (3.19)$$

เมื่อ  $p_s$  คือแรงดันที่พื้นผิว(surface)

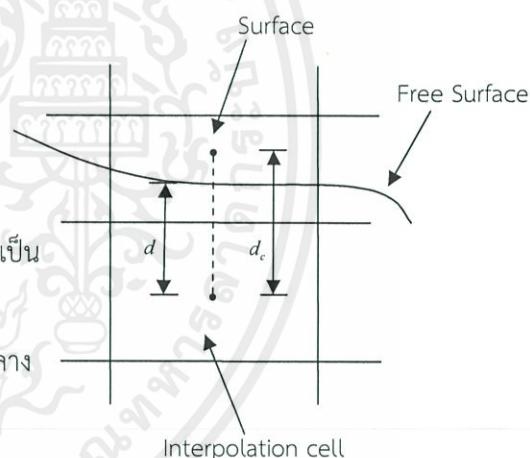
$p_N$  คือแรงดันที่ของไหล(fluid)

และ  $\eta = d_c / d$

เมื่อ  $d_c$  = ระยะห่างระหว่างจุดกึ่งกลางของเซลล์ที่เป็น  
ขอบอิสระกับเซลล์ที่อยู่ใต้ขอบอิสระ

$d$  = ระยะห่างระหว่างที่ขอบอิสระกับจุดกึ่งกลาง  
ของเซลล์เซลล์ที่อยู่ใต้ขอบอิสระ

ดังที่แสดงในรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 แสดงความหมายของปริมาณที่ใช้ในการ  
กำหนดเงื่อนไขความดันของขอบพื้นผิวอิสระ

ซึ่งในบางกรณีการทำซ้ำเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เฉลยสามารถเร่งกระบวนการได้ด้วยการคูณ  $\delta p$  ด้วย  $\omega$  ซึ่งค่าที่เหมาะสมโดยส่วนใหญ่คือ 1.8 (ซึ่งไม่มีกรณีที่ใช้เกินค่า 2.0) มิฉะนั้นแล้วผลเฉลยจากการทำซ้ำจะไม่เสถียร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีที่มีของไหล 2 ชนิดจะได้สมการ

$$\omega \delta p = (\omega) [-S / (\partial S / \partial p)] \quad (3.20)$$

แต่ในกรณีของไหลชนิดเดียวจะไม่สามารถคูณด้วย  $\omega$  ได้แต่จะได้สมการใหม่คือ

$$\omega \delta p = \frac{\omega}{1 - \omega(1 - \eta) \delta t R} \quad (3.21)$$

เมื่อ 
$$R = \left( \frac{\delta S}{\delta p} \Delta r d_c \right)^{-1}$$

และ  $\Delta x$  จะเป็นค่า  $\delta x$  เมื่อเป็น neighbor cell ในทิศทางแกน X แต่ในกรณีอื่น  $\Delta x$  จะเท่ากับ  $\delta y$  ของเซลล์พื้นผิว (surface cell)

### 3.4 Determining Interfaces Within a Cell

สำหรับการประยุกต์ใช้ที่ถูกต้องสำหรับเงื่อนไขขอบนั้นจำเป็นต้องทราบเกี่ยวกับตำแหน่งของขอบของ เซลล์ขอบในเทคนิคของวิธีการ VOF จะสมมติให้ขอบนั้นสามารถประมาณค่าได้โดยใช้เส้นตรงตัดผ่านระหว่างเซลล์ โดยในขั้นแรกจะกำหนดความชันของเส้นตรงนี้ ซึ่งสามารถเคลื่อนที่ผ่านเซลล์ไปยังตำแหน่งอื่นที่เป็นจุดตัด ซึ่งเรารู้จักค่านี้ในนามของค่า  $F$  ในเซลล์

ในการกำหนดความชันของขอบ เราจะกำหนดค่าฟังก์ชันตัวใหม่คือ  $Y(x)$  หรือ  $X(y)$  เพื่อแทนค่าของขอบ ซึ่งค่านี้จะขึ้นอยู่กับทิศทางของมันถ้าค่าขอบถูกแทนด้วย  $Y(x)$  เราจะคำนวณ  $\frac{dY}{dx}$  ซึ่งค่าประมาณของ  $Y(x)$  คือ

$$Y_i = Y(x_i) = F(i, j-1) \delta y_{j-1} + F(i, j) \delta y_j + F(i, j+1) \delta y_{j+1} \quad (3.22)$$

เมื่อ  $y=0$  จะดำเนินการเป็นเส้นด้านล่างของแถว  $i-1$  ในเซลล์

ดังนั้น

$$\left( \frac{dY}{dx} \right)_i = [(Y_{i+1} - Y_i) \delta x_{i-\frac{1}{2}} / \delta x_{i+\frac{1}{2}} + (Y_i - Y_{i-1}) \delta x_{i+\frac{1}{2}} / \delta x_{i-\frac{1}{2}}] / (\delta x_{i-\frac{1}{2}} + \delta x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (3.23)$$

โดย

$$\delta x_{i+\frac{1}{2}} = (\delta x_{i+1} + \delta x_i) / 2$$

$$\delta x_{i-\frac{1}{2}} = (\delta x_i + \delta x_{i-1}) / 2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทางเดียวกัน จะได้ว่า

$$X_j = X(y_j) = F(i-1, j)\delta x_{i-1} + F(i, j)\delta x_i + F(i+1, j)\delta x_{i+1} \quad (3.24)$$

และ

$$\left(\frac{dX}{dy}\right)_j = [(X_{j+1} - X_j)\delta y_{j-\frac{1}{2}}/\delta y_{j+\frac{1}{2}} + (X_j - X_{j-1})\delta y_{j+\frac{1}{2}}/\delta y_{j-\frac{1}{2}}]/(\delta y_{j+\frac{1}{2}} + \delta y_{j-\frac{1}{2}}) \quad (3.25)$$

ถ้า  $\left|\frac{dY}{dx}\right|$  น้อยกว่า  $\left|\frac{dX}{dy}\right|$  แล้วขอบจะเป็นแนวนอนมากกว่าแนวตั้ง ในทางกรณีอื่นมันจะใกล้เคียงกับแนวตั้งมากกว่า ค่าอนุพันธ์ที่มีขนาดเล็กที่สุดจะให้การประมาณค่าความชันที่ดีที่สุด เพราะการประมาณค่าของ  $y$  หรือ  $x$  ที่สอดคล้องกันนั้นจะมีความถูกต้องมากกว่า

สมมติให้  $\left|\frac{dY}{dx}\right|$  มีค่าน้อยสุดดังนั้นขอบจะใกล้เคียงแนวนอนมากกว่าแนวตั้ง โดยถ้า  $\frac{dX}{dy}$  มีค่าเป็นลบ (เส้นของฟังก์ชันของไหล  $F$  จะอยู่ด้านล่างขอบ) และเซลล์  $(i, j-1)$  จะถูกใช้เป็น interpolation neighbor สำหรับเซลล์ผิว  $(i, j)$  แต่ถ้า  $\frac{dX}{dy}$  มีค่าเป็นบวก เซลล์  $(i, j+1)$  จะถูกเลือกเป็น interpolation neighbor เนื่องจากของไหลอาจจะอยู่ด้านบนของขอบ

### 3.5 Surface Tension and Wall Adhesion

แรงตึงผิวจะถูกเพิ่มเข้ามาเป็นตัวเลือกของ SOLA-VOF โดยใช้ตัวแปรที่มีชื่อว่า ISURF10 โดยกำหนดให้มีค่าเป็น 1 เมื่อมีแรงตึงผิวและมีค่าเป็น 0 ในกรณีอื่น โดยกำหนดให้สัมพันธ์แรงเสียดทาน (แรงต่อหน่วยความยาว) แทนด้วย  $\sigma$

ขั้นตอนในการเพิ่มแรงตึงผิวในการคำนวณนั้นจะมี 2 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 เราจะต้องคำนวณตำแหน่งของความโค้งในแต่ละเซลล์ของขอบโดยใช้ค่า  $Y(x)$  หรือ  $X(y)$  ที่อยู่ในสมการ (3.22) และ (3.24) ดังนั้นความดันของแรงตึงผิวจะต้องถูกคำนวณ เมื่อคำนวณค่าความโค้ง ( $K$ ) ได้แล้ว จะได้ว่าค่าความดันของแรงตึงผิวคือ

$$P_s = -\sigma K \quad (3.26)$$

ขั้นที่ 2 เราจะต้องเพิ่มแรงความดันนี้ในขอบทั้งหมด

ค่า  $K$  ในขั้นตอนที่หนึ่ง มีค่าเป็น

$$K = K_{xy} = \frac{1}{R_{xy}} \quad (3.27)$$

เมื่อ  $R_{xy}$  คือ รัศมีความโค้งในพิกัดฉาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อขอบเข้าใกล้แนวอนมากกว่าจะได้ความโค้งในพิกัดฉากเป็น

$$K_{xy} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{\frac{dY}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}} \right] \quad (3.28)$$

ถ้าขอบใกล้แนวตั้งมากกว่า ค่า  $x$  และ  $y$  นั้นจะถูกเปลี่ยนเป็น  $X(y)$  แทน  $Y(x)$

การคำนวณค่า  $P_s$  นั้นก็จะเสร็จสิ้นแล้วยกเว้นในบริเวณที่ใกล้กับผนัง เนื่องจากจะมีแรงยึดติด (adhesion) ที่ผนังที่จะต้องถูกเพิ่มเข้ามาโดยให้มุมสัมผัสนั้นแทนด้วย *CANGLE* ซึ่งเป็นค่าที่ต้องรับค่าเข้ามา ถ้าไม่มีแรงยึดติด (adhesion) กับผนังแล้วค่ามุมจะถูกกำหนดให้เป็นศูนย์ แต่ถ้ามีแรงยึดติดแล้วค่า *CANGLE* จะหมายถึงมุมระหว่างผนังกับพื้นผิวของไหล ซึ่งอยู่ในฟังก์ชัน  $F$  เพื่อที่จะกำหนดเงื่อนไขของมุมนี้ เราจะต้องปรับค่า  $Y(x)$  และ  $X(y)$  ที่ผนัง

ตัวอย่างเช่น ให้เซลล์ที่ขอบ  $(i, j)$  ที่แสดงในรูปที่ 3.8a และ 3.8b ที่ของไหล  $F$  ถูกสมมติให้อยู่ด้านล่างขอบ

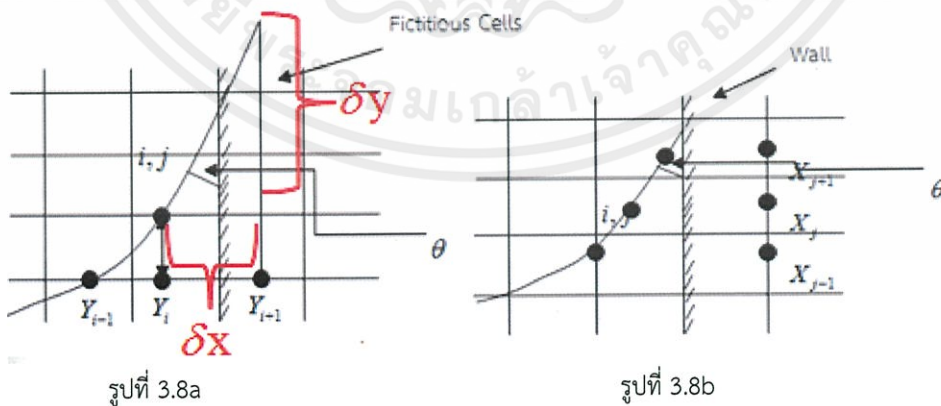
ความดันแรงตึงผิวจะถูกคำนวณเหมือนกับวิธีที่ระบุไว้ข้างต้น ยกเว้นบริเวณที่เป็น surface จะถูกสมมติให้มีมุม *CANGLE* ระหว่างผนังโดยปรับค่าที่จุด  $i+1$  ของ  $Y(x)$  และค่าที่จุด  $j+1$  ของ  $X(y)$  ได้เป็น

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2}(\delta x_i + \delta x_{i+1}) / \text{TANCA} \quad (3.29)$$

และ

$$X_{j+1} = X_j - \frac{1}{2}(\delta y_j + \delta y_{j+1}) \text{TANCA} \quad (3.30)$$

เมื่อ  $\text{TANCA} = \tan(\text{CANGLE})$



รูปที่ 3.8a

รูปที่ 3.8b

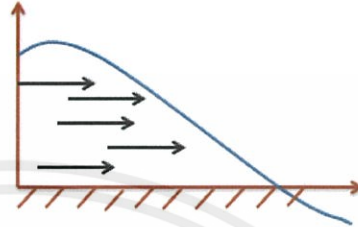
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.8a การยืดเกาะผนังสำหรับภายในบริเวณใกล้พื้นผิวแนวนอนที่ถูกจำลองโดยการตั้งค่าของ  $Y_{i+1}$  ดังกล่าวไว้ว่า *CANGLE* เป็นระหว่างผนังกับพื้นผิวของของไหลและ 3.8b การยืดเกาะผนังสำหรับภายในบริเวณใกล้พื้นผิวแนวตั้งที่ถูกจำลองโดยการตั้งค่าของ  $X_{i+1}$  ดังกล่าวไว้ว่า *CANGLE* เป็นระหว่างผนังกับพื้นผิวของของไหล

ในการเพิ่มแรง  $P_s$  ในทางใดทางหนึ่งรวมไปถึงการเพิ่มความเร่งเพราะจะมีผลต่อความเร็วบนเซลล์พื้นผิวโดย

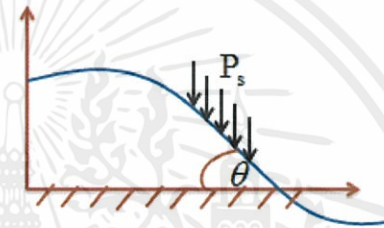
การเพิ่มแรงในทิศแกน  $y$

$$STFY = P_s \delta x_i$$



การเพิ่มแรงในทิศแกน  $x$

$$STFX = P_s \delta x_i \tan \theta$$



เราจึงนำแรงที่จะเพิ่ม ทำการบวกเพิ่มเข้าไปในทางขวาของสมการที่ 3.7 โดยจะมีผลทั้งทางด้านซ้าย ขวา บน และ ล่าง ของพื้นผิว

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \dots + \delta t \omega_R STFX(\delta y_j \delta \rho y_{i+\frac{1}{2}})$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = \dots + \delta t \omega_L STFX(\delta y_j \delta \rho y_{i-\frac{1}{2}})$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \dots + \delta t \omega_T STFY(\delta x_i \delta \rho y_{j+\frac{1}{2}})$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \dots + \delta t \omega_B STFY(\delta x_i \delta \rho y_{j-\frac{1}{2}})$$

(3.31)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.6 เงื่อนไขขอบเขต(Boundary Conditions)

ในการเพิ่มเงื่อนไขขอบพื้นผิวอิสระ นั้นจำเป็นที่จะต้องกำหนดเงื่อนไขขอบของตาราง และที่พื้นผิวของสิ่งกีดขวางภายในทั้งหมด โดยที่ความแตกต่างกันของเงื่อนไขขอบในลำดับต่างๆ อาจจะต้องสร้างขึ้นมารอบตาราง พิจารณาจากตัวอย่างขอบทางซ้ายถ้าเป็น rigid free-slip wall ความเร็วปกติจะเป็น 0 และความเร็วแนวสัมผัสควรมีความชันไม่ปกติ

ตัวอย่างเช่น

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j} &= 0 \\ v_{1,j} &= v_{2,j} \\ p_{1,j} &= p_{2,j} \\ F_{1,j} &= F_{2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

ถ้าขอบทางซ้ายเป็น rigid no-slip wall แล้วความเร็วแนวสัมผัสส่วนที่เป็นผนังควรเป็น 0 ด้วย

ตัวอย่างเช่น

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j} &= 0 \\ v_{1,j} &= -v_{2,j} \\ p_{1,j} &= p_{2,j} \\ F_{1,j} &= F_{2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

เงื่อนไขนี้จะถูกกำหนดไว้ในการคำนวณความเร็ว จากสมการโมเมนตัม และหลังจากผ่านแต่ละการของตาราง ระหว่างการทำความดันซ้ำ

Continuative or outflow boundaries ทำให้เกิดปัญหาของการคำนวณความเร็วที่ต่ำ เพราะสิ่งที่กำหนดอาจส่งผลกระทบต่อกรไหลทั้งหมด สิ่งที่เป็น คือการกำหนดให้ของไหลออกนอกตารางได้น้อยที่สุดของผิวน้ำที่กำหนดใน SOLA-VOF เงื่อนไขขอบแบบ continuative ถูกใช้ที่ขอบด้านซ้าย คือ

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j} &= u_{2,j} \\ v_{1,j} &= v_{2,j} \\ p_{1,j} &= p_{2,j} \\ F_{1,j} &= F_{2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

จากเงื่อนไขเหล่านี้ เราจะกำหนดหลังจากใช้สมการโมเมนตัม และไม่ทำหลังการทำความดันซ้ำแต่ละรอบ

สำหรับเงื่อนไขขอบ periodic boundary condition ในแนวแกน x ทางซ้ายและทางขวาของขอบจะต้องกำหนดการสะท้อนของระยะช่วง โดยระยะช่วงเลือกให้มีค่าเท่ากับระยะห่าง จากผนังด้านซ้ายถึงขอบด้านซ้ายของเซลล์สุดท้ายในตารางด้านขวา ซึ่งคือ 2 หลัของเซลล์ ( $i = \text{IMAX}$  และ  $i = \text{IMAX} - 1$ ) ซึ่งกำหนดไว้บนด้านขวาของตาราง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูไปใช้งานเพื่อการศึกษาดูเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ในการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับกำหนดค่าของเงื่อนไขขอบแบบ periodic boundary condition จากเงื่อนไขจะได้ฝั่งซ้ายเป็น

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j} &= u_{IM2,j} \\ v_{1,j} &= v_{IM2,j} \\ F_{1,j} &= F_{IM2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

และฝั่งขวาเป็น

$$\left. \begin{aligned} u_{IM1,j} &= u_{2,j} \\ v_{IM1,j} &= v_{2,j} \\ P_{IM1,j} &= P_{2,j} \\ (P_s)_{IM1} &= (P_s)_{2,j} \\ v_{IMAX,j} &= v_{3,j} \\ F_{IMAX,j} &= F_{3,j} \\ F_{IM1,j} &= F_{2,j} \end{aligned} \right\} \text{สำหรับทุกค่า } j$$

เมื่อ  $IM1 = IMAX - 1$  และ  $IM2 = IMAX - 2$

ในกรณีนี้ เงื่อนไขเหล่านี้จะถูกกำหนดในการคำนวณความเร็วจากสมการโมเมนตัมชัดแจ้งและหลังการทำความดันซ้ำในแต่ละรอบ

ในโปรแกรม SOLA-VOF จะเขียนเพื่อให้สามารถใช้ได้กับเงื่อนไขค่าขอบที่กำหนดได้โดยอัตโนมัติ โดยการรับค่าตัวเลขเข้ามา

ตัวอย่าง สำหรับการกำหนดชนิดของเงื่อนไขขอบทางซ้าย

$$WL = \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ rigid free-slip wall} \\ 2. \text{ rigid no-slip wall} \\ 3. \text{ continuative} \\ 4. \text{ periodic in } x \\ 5. \text{ specified pressure} \end{array} \right.$$

ในทำนองที่คล้ายกัน

WR หมายถึงเงื่อนไขขอบทางด้านขวา

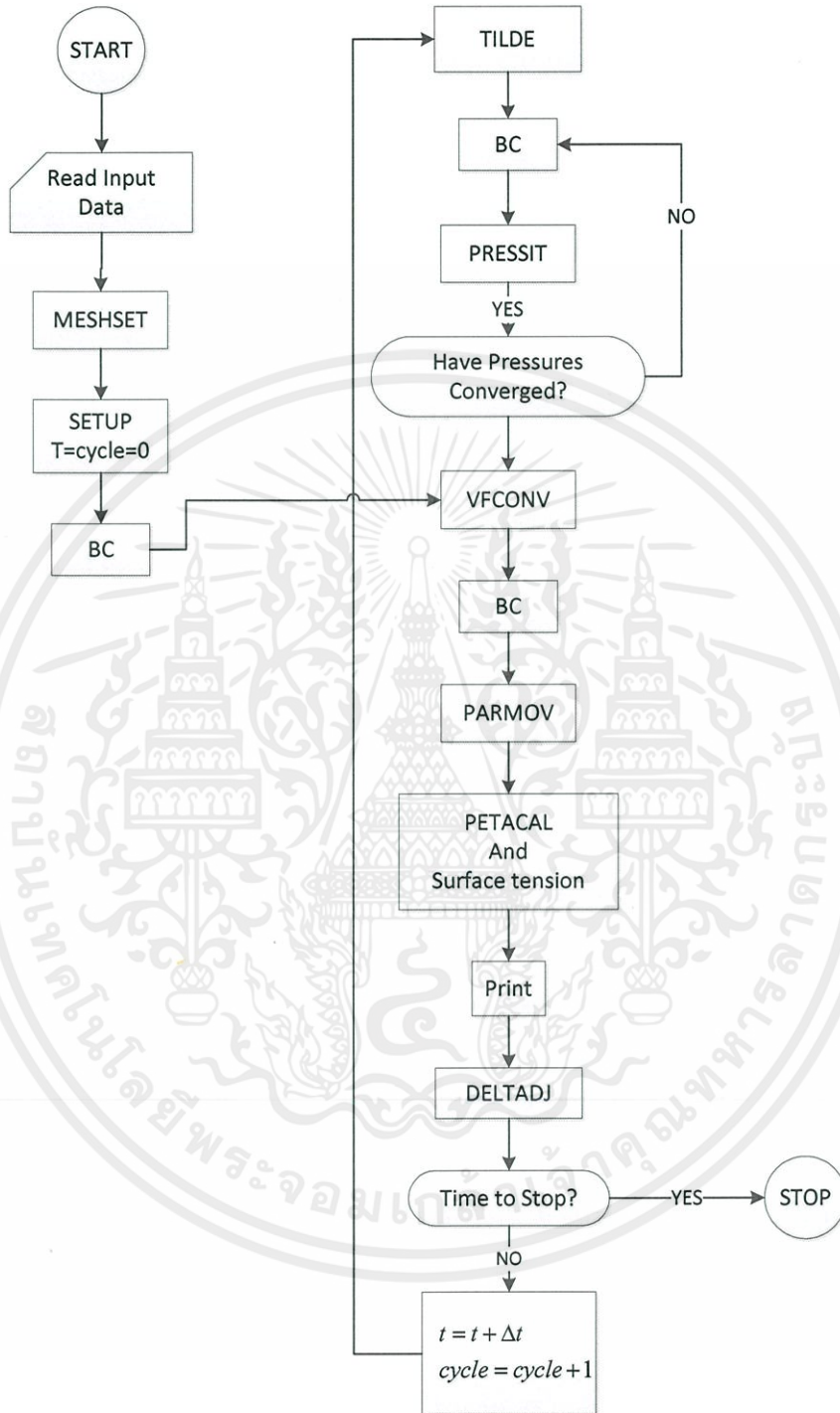
WT หมายถึงเงื่อนไขขอบทางด้านบน

WB หมายถึงเงื่อนไขขอบทางด้านล่าง

โดยที่เงื่อนไขขอบแบบ specified pressure คือ เงื่อนไขขอบค่าคงที่ของความดันที่ผนังด้านซ้าย จะกำหนดโดยให้ค่าความดันคงที่ในหลักที่  $j = 2$  มิฉะนั้นจะกระทำกับขอบแบบอื่น เช่น เอกสารนี้เป็น continuative ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อ boundary นั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ condition ในการคำนวณการคำนวณใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 4

## การพัฒนาโปรแกรม



รูปที่ 4.1 แสดงแผนผังการทำงานของโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้า โดยอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## SOLA-VOF (โปรแกรมหลัก)

- (1) อ่านและพิมพ์ข้อมูลที่รับเข้าและผลลัพธ์
- (2) ทำการเรียกซับรูทีนอื่นๆตามลำดับและควบคุมการคำนวณทุกรอบ
- (3) ทำการเพิ่มเวลาในการคำนวณของแต่ละเป็น  $t \rightarrow t + DELT$
- (4) เพิ่มจำนวนรอบหนึ่งรอบในแต่ละรอบของการคำนวณ
- (5) หยุดการทำงานในกรณีที่ผลเฉลยไม่เป็นที่ยอมรับกับการอนุรักษ์โดยมวลหรือได้ผลเฉลยตามเวลาที่ต้องการ

### 4.1 ซับรูทีนของโปรแกรม(subroutines)

โปรแกรม SOLA-VOF ถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบของซับรูทีนโดยการดำเนินการของแต่ละซับรูทีน ซึ่งแผนผังของโปรแกรมในรูปแบบที่ 4.1 แสดงลำดับการเรียกใช้ซับรูทีนต่างๆของโปรแกรมหลัก

โดยซับรูทีนที่ใช้ใน SOLA-VOF มีดังนี้

#### 4.1.1 BC (เงื่อนไขขอบเขต)

- (1) กำหนดค่าของตัวแปรที่เหมาะสมกับเงื่อนไข rigid free-slip , no-slip , continuative , periodic ,specified pressure
- (2) กำหนดค่าของตัวแปรที่เหมาะสมรอบขอบเขตพื้นผิวอิสระที่สร้างไว้
- (3) สำหรับเงื่อนไขขอบเขตพิเศษ เช่น ขอบที่มีการไหลเข้าจะต้องคำนวณด้วยมือของแต่ละปัญหา
- (4) กำหนดค่าเฉลี่ยของ  $F$  และ  $p$  ในเซลล์อุปสรรคอยู่ติดกับเซลล์ของไหล

#### 4.1.2 CAVOVO (CALculates void volumes)

- (1) คำนวณพื้นที่ส่วนที่เป็นอากาศ ( $F = 0$ )

#### 4.1.3 DELTADJ (Time step ADJustraent)

- (1) คำนวณค่าสูงสุด  $\delta t$  ที่มีความเสถียรภาพ
- (2) ปรับ  $\delta t$  ให้พอดีตามจำนวนของการทำซ้ำและจำนวนสูงสุดที่ยอมรับ สำหรับความเสถียรภาพ
- (3) คำนวณปัจจัยในการทำซ้ำโดยกำหนดให้เป็น  $BETA$

#### 4.1.4 LAVORE (LAbel void REgions)

- (1) ตรวจสอบและระบุพื้นที่ทั้งหมดที่เป็นอากาศ ( $F = 0$ ) โดยระบุเป็น  $NF = 6, 7, 8, \dots$

#### 4.1.5 MESHSET (MESH SET-up)

- (1) สร้างตารางการคำนวณ จากข้อมูลที่รับเข้ามาใน NAME-LIST/MSHSET
- (2) ตรวจสอบตัวแปรทั้งหมดที่จำเป็นในการใช้ตลอดทั้งโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.1.6 PARMOV (PARTicle MOVement)

- (1) คำนวณการเคลื่อนที่ของตัวบ่งชี้อนุภาคในบริเวณความเร็วของของไหล
- (2) เก็บค่าของบ่งชี้อนุภาคที่ออกจากตารางหรือถูกแทนที่ด้วยอนุภาคที่เข้ามาใหม่

#### 4.1.7 PETACAL (PETA interpolation factor CALculation)

- (1) กำหนดความชันของพื้นผิวในพื้นที่ผิวเซลล์
- (2) กำหนดค่าเซลล์ที่จุด  $NF(i, j)$  เพื่อประมาณค่าใกล้เคียงกับพื้นผิวเซลล์  
 $NF = 1$  ,ค่าใกล้เคียงทางด้านซ้าย  
 $NF = 2$  ,ค่าใกล้เคียงทางด้านขวา  
 $NF = 3$  ,ค่าใกล้เคียงทางด้านล่าง  
 $NF = 4$  ,ค่าใกล้เคียงทางด้านบน  
 ดังนั้น ข้อมูลข้างต้นที่กล่าวมาอธิบายถึงทิศทางของพื้นผิวและด้านข้างของพื้นผิวไม่ว่าจะเป็นแนวตั้งหรือแนวนอนของของไหลที่มีอยู่แล้ว
- (3) คำนวณพื้นผิวความดัน  $PS(i, j)$  ที่เกิดจากแรงตึงผิวในพื้นที่ผิวเซลล์ ถ้าจุดที่แรงตึงผิวตั้งค่าไว้

#### 4.1.8 PLTPT (PlOT a PoiNT)

- (1) แสดงผลข้อมูลผลเฉลยออกมา

#### 4.1.9 PRESSIT (PRESSure Iteration)

- (1) การทำซ้ำของความเร็วและความดันที่มีมวลในแต่ละเซลล์และตารางการวนซ้ำ
- (2) คำนวณ ความดันของเซลล์ที่พื้นผิวอิสระที่ปรับค่าตามความดันที่นำมาใช้ การอนุรักษ์มวลในพื้นที่ผิวเซลล์จะไม่ทำการวนซ้ำ ความดันของเซลล์ตั้งค่าโดยการประยุกต์ใช้เงื่อนไขขอบเขตพื้นผิวอิสระ

#### 4.1.10 SETUP (general SETUP)

- (1) กำหนดค่าเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณ
- (2) คำนวณการกระจายความดันเริ่มต้น โดเมนเริ่มต้นที่  $p(i, j)$
- (3) เริ่มต้นสร้างจำนวนอนุภาค
- (4) ตั้งค่าความเร็วเริ่มต้นด้วย  $U(i, j) = UI$  และ  $V(i, j) = VI$  ทุกที่ในตาราง
- (5) คำนวณปัจจัย ( $BETA(i, j)$ ) ที่ใช้ในการเกิดซ้ำของความดัน
- (6) ตั้งค่าอุปสรรคด้วยการกำหนดเซลล์อุปสรรค มี  $BETA(i, j) = 1.0$  นิยามของอุปสรรคโดยทั่วไป จะต้องมีการคำนวณสำหรับแต่ละปัญหา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.1.11 TILDE (Temporary Velocity Calculation)

- (1) คำนวณการแก้ปัญหาที่ชัดเจนสำหรับสมการโมเมนตัม(เช่น ค่าใหม่ of ความเร็วจะได้รับ จากเวลาที่ ของความดัน, การเคลื่อนที่และการกระจายความเร่ง) ค่าต่างๆเหล่านี้จะถูกรวบรวมเข้าสู่เวลาที่  $n+1$  ในการวนซ้ำของความดัน

## 4.1.12 TMS10 (Two Material Surface Tension)

- (1) เพิ่มผิวสัมผัสกับพื้นผิวที่แรงตึงผิวกับความเร็วใกล้เคียงอินเตอร์เฟซ

## 4.1.13 VFCONV (Volume Fraction CONvection)

- (1) คำนวณวิธีการแก้สมการ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot u F = 0$$

- (2) คำนวณและจัดเก็บสำหรับการพิมพ์ข้อผิดพลาดใดๆในปริมาณ (นั่นคือ การสูญเสียหรือ การได้รับ) ในระหว่างขั้นตอนของการคำนวณใน (1)

## 4.2 การกำหนดค่าเริ่มต้นที่ใช้ในโปรแกรม

ในที่นี้จะทำการประกาศตัวแปรที่จะใช้ในโปรแกรมแล้วทำการกำหนดค่าเริ่มต้นดังนี้

NU=0.0	โดย NU คือค่าสัมประสิทธิ์ของความหนืดซึ่งก็คือค่า $\nu$
ICYL=0	โดย ICYL คือตัวบ่งชี้ของลักษณะพิกัดของตารางที่ใช้ซึ่งก็คือค่า $\xi$ (กำหนดให้มีค่าเป็น 1 สำหรับพิกัดทรงกระบอก และมีค่าเป็น 0 สำหรับพิกัดฉาก)
EPSI=1.0×10 <sup>-3</sup>	โดย EPSI คือ เกณฑ์การลู่เข้าการวนซ้ำความดัน
GX=0.0	โดย GX คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวแกน x ซึ่งก็คือค่า $g_x$
GY=-1.0	โดย GY คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวแกน y ซึ่งก็คือค่า $g_y$
UI=0.2	โดย UI คือ ความเร็วเริ่มต้นในแนวแกน x
VI=0.0	โดย VI คือ ความเร็วเริ่มต้นในแนวแกน y
VELMX=0.2	โดย VELMX คือ ความเร็วสูงสุดที่ใช้ในการแปลงขนาดของเวกเตอร์
IMOVY=0	โดย IMOVY คือ เครื่องหมายว่าจะแสดงผลลัพธ์แบบใด
OMG=1.7	โดย OMG คือ ปัจจัยที่ใช้ในการวนซ้ำของความดัน ซึ่งก็คือค่า $\omega$
ALPHA=1.0	โดย ALPHA คือ ตัวควบคุมปริมาตรการไหลของdormer cell ซึ่งก็คือค่า $\alpha$
WL=3	โดย WL คือ ตัวบอกระดับของเงื่อนไขขอบเขตทางซ้ายของตาราง
WR=2	โดย WR คือ ตัวบอกระดับของเงื่อนไขขอบเขตทางขวาของตาราง
WT=1	โดย WT คือ ตัวบอกระดับของเงื่อนไขขอบเขตทางด้านบนของตาราง
WB=2	โดย WB คือ ตัวบอกระดับของเงื่อนไขขอบเขตทางด้านล่างของตาราง
CSQ=-1.0	โดย CSQ คือ ค่าความเร็วเสียงกำลังสองซึ่งก็คือค่า $c^2$ (กำหนดให้เท่ากับ -1.0 สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

AUTOT=0.0	โดย AUTOT คือ ตัวบอกชนิดของช่วงเวลาที่ทำอัตโนมัติ (กำหนดให้เท่ากับ 1.0 สำหรับการปรับค่า $\delta t$ แบบอัตโนมัติ และ เท่ากับ 0.0 สำหรับการปรับค่า $\delta t$ แบบคงที่)
ISYMLT=0	โดย ISYMLT คือ ตัวบ่งชี้จุดที่สมมาตร (กำหนดให้ เท่ากับ 1 สำหรับจุดที่สมมาตร และ เท่ากับ 0 สำหรับจุดที่ไม่สมมาตร)
ISURF10=0	โดย ISURF10 คือ ตัวบ่งชี้แรงดึงของพื้นผิว (กำหนดให้ เท่ากับ 1 ถ้ามีแรงดึงผิว และ เท่ากับ 0 ถ้าไม่มีแรงดึงผิว)
SIGMA=0.0	โดย SIGMA คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงดึงผิว
CANGLE=90	โดย CANGLE คือ มุมสัมผัสระหว่างของไหลกับผนัง (องศา)
NMAT=1	โดย NMAT คือ จำนวนของของไหลที่คำนวณ (1 หรือ 2)
RHO=1.0	โดย RHO คือ ความหนาแน่นของของไหล (สำหรับบริเวณที่ F=1) ซึ่งก็คือค่า $\rho_F$
RHOFC=1.0	โดย RHOFC คือ ความหนาแน่นในบริเวณของฟังก์ชัน F ซึ่งก็คือค่า $\rho_c$
FLHT=1.0	โดย FLHT คือ ความสูงของของไหลในแนวแกน y
XPL=0.0	โดย XPL คือ ตำแหน่งทางด้านซ้ายของอนุภาครูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
XPR=0.0	โดย XPR คือ ตำแหน่งทางด้านขวาของอนุภาครูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
YPB=0.0	โดย YPB คือ ตำแหน่งทางด้านล่างของอนุภาครูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
YPT=0.0	โดย YPT คือ บริเวณทางด้านบนของพื้นที่อนุภาคของสี่เหลี่ยมมุมฉาก
NPX=0	โดย NPX คือ จำนวนของอนุภาคในแนวแกน x ที่เราตั้งค่าอนุภาคของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
NPY=0	โดย NPY คือ จำนวนของอนุภาคในแนวแกน y ที่เราตั้งค่าอนุภาคของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
EMF = $1.0 \times 10^{-6}$	} constant variables
EM6 = $1.0 \times 10^{-6}$	
EM10 = $1.0 \times 10^{-10}$	
EPI0 = $1.0 \times 10^{-10}$	
RPD = 0.0174532925	

และมีค่าที่ต้องรับค่าเข้ามาดังนี้

NAME	คือ ชื่อของปัญหาที่เราจะแก้ไข
DELT	คือ $\delta t$ ระยะห่างของเวลา โดยกำหนดให้ DELT = 0.2
TWFIN	คือ เวลาที่สิ้นสุดการคำนวณ โดยกำหนดให้ TWFIN = 12
PRTDT	คือ ระยะห่างของเวลาในการพิมพ์ลงกระดาษ โดยกำหนดให้ PRTDT = 5
NKX	คือ จำนวนตารางย่อยในแกน x โดยกำหนดให้ NKX = 1
XL(N)	คือ ตำแหน่งขอบซ้ายของตารางย่อยที่ N (ขอบขวาของตารางย่อยที่ N จะถูกกำหนดโดย ขอบซ้ายของตารางย่อยที่ N+1) โดยกำหนดให้ XL(1) = 0, XL(2) = 12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่ ใช้งานด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$XC(N)$  คือ ตำแหน่งในแกน  $x$  ที่ตัดกันในตารางย่อยที่  $N$  โดยกำหนดให้  $XC(1) = 6$

$NXL(N)$  คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง  $XL(N)$  และ  $XC(N)$  ในตารางย่อยที่  $N$  โดยกำหนดให้  $NXL(1) = 10$

$NXR(N)$  คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง  $XC(N)$  และ  $XL(N+1)$  ในตารางย่อยที่  $N$  โดยกำหนดให้  $NXR(1) = 10$

$DXMN(N)$  คือ การเพิ่มพื้นที่ที่น้อยที่สุดของตารางย่อยในแกน  $x$  โดยกำหนดให้  $DXMN(1) = 0.6$

$NKY$  คือ จำนวนตารางย่อยในแกน  $y$  โดยกำหนดให้  $NKY = 1$

$YL(N)$  คือ ตำแหน่งขอบด้านล่างของตารางย่อยที่  $N$  (ขอบบนของตารางย่อยที่  $N$  จะถูกกำหนดโดยขอบล่างของตารางย่อยที่  $N+1$ ) โดยกำหนดให้  $YL(1) = 0$ ,  $YL(2) = 1.6$

$YC(N)$  คือ ตำแหน่งของในแกน  $y$  ที่ตัดกันในตารางย่อยที่  $N$  โดยกำหนดให้  $YC(1) = 0.8$

$NYL(N)$  คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง  $YL(N)$  และ  $YC(N)$  ในตารางย่อยที่  $N$  โดยกำหนดให้  $NYL(1) = 4$

$NYR(N)$  คือ จำนวนเซลล์ระหว่างตำแหน่ง  $YC(N)$  และ  $YL(N+1)$  ในตารางย่อยที่  $N$  โดยกำหนดให้  $NYR(1) = 4$

$DYMN(N)$  คือ การเพิ่มพื้นที่ที่น้อยที่สุดของตารางย่อยในแกน  $y$  โดยกำหนดให้  $DYMN(1) = 0.2$

### 4.3 การตรวจสอบโปรแกรม SOLA-VOF

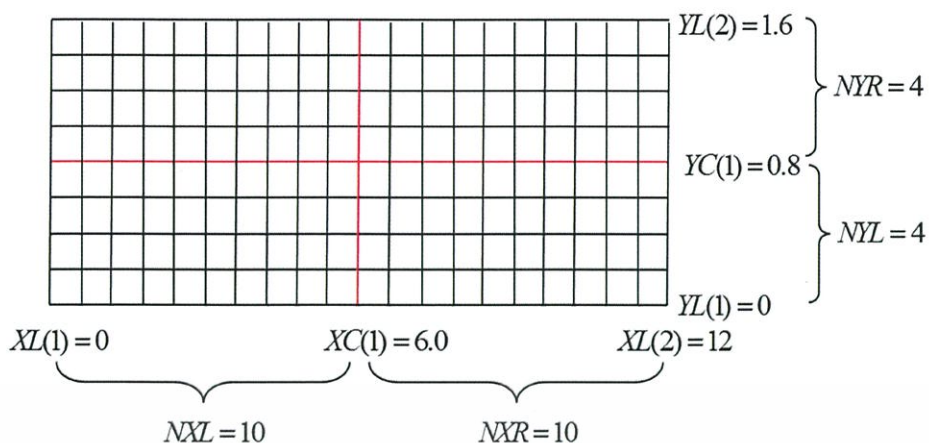
#### ตัวอย่างทดสอบปัญหา

ในโครงการนี้เราจะยกตัวอย่างการพิจารณาปัญหาของการเหนี่ยวนำลงบนพื้น โดยเราจะเหนี่ยวนำทางด้านซ้าย สังเกตการกระทบของน้ำกับผนัง ที่น้ำไหลจากด้านซ้ายไปด้านขวาว่าน้ำจะมีการกระทบหรือกระเด็นไปอย่างไร ซึ่งจะแบ่งตารางการพิจารณาการเคลื่อนที่ของน้ำเท่ากับช่อง 1 ช่องใหญ่แล้วแบ่งช่องจากตรงกลางของตารางไปทางขวา 10 ช่อง และทางซ้าย 10 ช่องตามแนวแกน  $x$  ทำการกำหนดให้  $\delta x = 0.6$  และแบ่งช่องของตารางจากตรงกลางไปด้านบน 8 ช่อง และด้านล่าง 8 ช่องตามแนวแกน  $y$  กำหนดให้  $\delta y = 0.2$  ดังนั้นจะได้ขนาดของตารางทั้งหมด  $10 \times 8$  ช่อง โดยกำหนดให้ค่าในแกน  $x$  มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 12 และกำหนดให้ค่าในแกน  $y$  มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1.6 โดยมีกำหนดค่าดังต่อไปนี้

$$NKX = 1, XL = 0.0, 12.0, XC = 6.0, NXL = 10, NXR = 10, DXMN = 0.6$$

$$NKY = 1, YL = 0.0, 1.6, YC = 0.8, NYL = 4, NYR = 4, DYMN = 0.2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 แสดงภาพจากตัวอย่าง

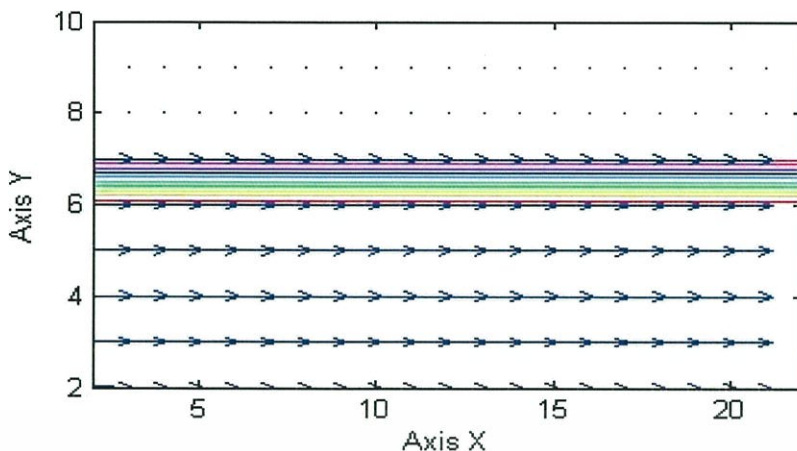
และกำหนดให้  $\delta t$  เป็นแบบค่าคงที่ และมีเงื่อนไขขอบทางซ้ายแบบ continuative ทางด้านบนเป็นแบบ rigid free-slip wall ส่วนทางด้านขวาและด้านล่างเป็นแบบ rigid no-slip wall โดยมีค่าความเร็วเริ่มต้นในแนวแกน  $x$  เป็น 0.2 ซึ่งในการคำนวณจะหาผลเฉลยตั้งแต่เวลา 0 ถึง 12 ดังนั้นจะสามารถกำหนดค่าได้เป็น

$$\begin{aligned}
 &DELT = 0.2, FLHT = 1.0, GY = -1.0, PLTDT = 1.0, PRTDT = 5.0, \\
 &TWFIN = 12.0, UI = 0.2, VELMX = 0.2, WL = 3, WR = 2, WT = 1, WB = 2, \\
 &AUTOT = 0.0
 \end{aligned}$$

#### ตัวแปรในตาราง

ITER	คือ ความดันซ้ำ
T	คือ เวลา
DELT	คือ ช่วงเวลา
CYCLE	คือ รอบในการคำนวณ
VCHGT	คือ การเปลี่ยนแปลงปริมาณของของไหล
NREG	คือ จำนวนพื้นที่ว่างที่สร้างขึ้นในการคำนวณ
VOL	คือ ปริมาณของพื้นที่ว่าง
PR	คือ ความดันในพื้นที่ว่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา  $t = 0$

จากรูปที่ 4.3 ความเร็วในแนวแกน  $x$  ในทิศทางจากซ้ายไปขวาด้วยความเร็วคงที่ และไม่มีความเร็วในแนวแกน  $y$  จึงทำให้บริเวณที่พื้นผิวของน้ำเป็นเส้นตรงซึ่งก็คือบริเวณพื้นผิวไม่มีการเปลี่ยนแปลงใดๆ

ตารางที่ 4.1 แสดงผลเวลาที่  $t = 0$

Name = SOLAVOF									
ITER = 0	T = 0.00	DELT=0.20	CYCLE=0	VCHGT=9.952566e-05					
NREG=1									
K	VOL(K)	PR(K)							
6	7.200003	0.000000							
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
2	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
2	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
3	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.200000
3	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	0.200000
3	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
4	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
4	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
5	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
5	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
6	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.200000	0.000000
6	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
6	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
7	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
7	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
8	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
เอกสารนี้เป็นเอกสาร	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
8	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
9	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
9	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
10	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
10	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
11	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
11	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
12	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
12	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
13	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
13	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
13	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
14	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
14	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
15	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
15	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
16	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
16	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
17	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
17	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

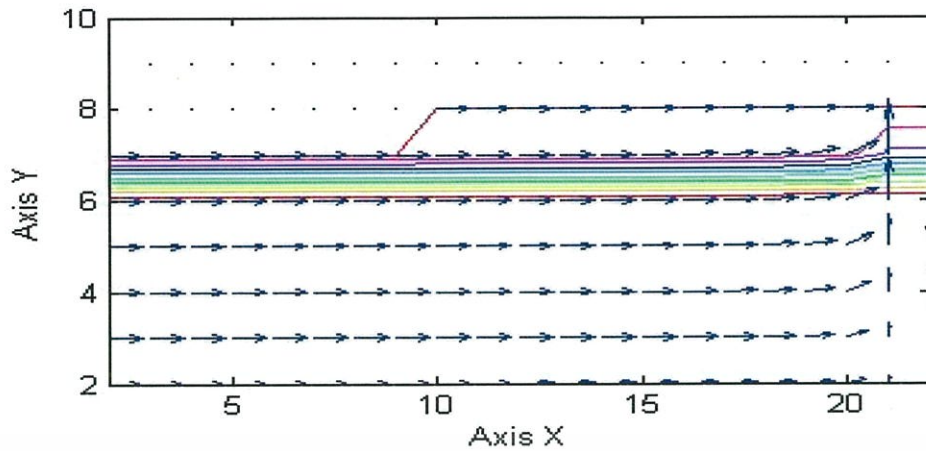
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
17	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
18	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
18	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
19	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
19	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	3	0.200000	0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	4	0.200000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
20	7	0.200000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	0.000000	0.900000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	0.000000	0.700000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	0.000000	0.500000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	0.000000	0.300000	-0.333333	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	0.066667	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
21	7	0.000000	0.000000	0.000000	-0.666667	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	2	0.000000	-0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	-0.000000	0.700000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
22	4	0.000000	-0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	-0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	-0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา  $t = 0.2$

จากรูปที่ 4.4 เมื่อความเร็วในแนวแกน  $x$  ไปกระทบกับผนังด้านขวาทำให้น้ำเกิดการยกตัวขึ้นมา และทำให้เกิดความเร็วในแนวแกน  $y$  บริเวณผนัง ทำให้ได้พื้นผิวที่ยกตัวสูงตรงบริเวณผนัง

ตารางที่ 4.2 แสดงผลเวลาที่  $t = 0.2$

Name = SOLAVOF									
ITER = 0	T = 0.20	DELT=0.20	CYCLE=1	VCHGT=8.821031e-05					
NREG=1									
K	VOL(K)	PR(K)							
1	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
6	7.160059	0.000000							
2	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	3	0.200000	0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
2	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
2	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
3	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	3	0.200000	0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
3	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
3	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
4	2	0.200000	0.000000	0.900000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	3	0.200000	0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
4	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
5	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
5	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
6	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	5	0.200000	0.000000	0.300000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	6	0.200000	0.000000	0.100000	-0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
6	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
7	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
7	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
8	2	0.200000	-0.000000	0.900000	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	3	0.200000	-0.000000	0.700000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	4	0.200000	0.000000	0.500000	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	5	0.200000	0.000000	0.300000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	6	0.200000	0.000000	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
8	7	0.200000	0.000000	0.000000	-0.000001	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
9	2	0.199998	-0.000000	0.900001	-0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	3	0.199998	0.000000	0.700001	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	4	0.199998	0.000000	0.500001	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	5	0.199999	0.000001	0.300001	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	6	0.200000	0.000001	0.100000	0.000000	0.000000	0.999999	3.000000	0.666667
9	7	0.199999	0.000003	0.000000	0.000010	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	8	0.199999	0.000000	0.000000	0.333316	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
10	2	0.199994	-0.000000	0.900006	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	3	0.199994	0.000001	0.700007	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	4	0.199995	0.000002	0.500006	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	5	0.199997	0.000003	0.300004	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	6	0.199999	0.000003	0.100001	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566574
10	7	0.199999	0.000003	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002	3.000000	1.999992
10	8	0.199999	0.000000	0.000000	-0.000016	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
11	2	0.199981	-0.000000	0.900024	-0.000024	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	3	0.199982	0.000003	0.700025	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	4	0.199985	0.000007	0.500021	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	5	0.199990	0.000010	0.300014	0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	6	0.199997	0.000010	0.100005	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566581
11	7	0.199997	0.000011	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000009	3.000000	1.999963
11	8	0.199997	0.000000	0.000000	-0.000059	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
12	2	0.199945	0.000002	0.900081	-0.000051	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	3	0.199948	0.000013	0.700079	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	4	0.199958	0.000023	0.500067	0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	5	0.199973	0.000030	0.300044	0.000006	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
12	6	0.199991	0.000031	0.100015	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566602
12	7	0.199991	0.000033	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000030	3.000000	1.999879
12	8	0.199991	0.000000	0.000000	-0.000176	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
13	2	0.199849	0.000013	0.900248	-0.000094	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
13	3	0.199861	0.000042	0.700235	0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	4	0.199889	0.000067	0.500192	0.000007	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
13	5	0.199929	0.000084	0.300126	0.000012	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
13	6	0.199976	0.000089	0.100042	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566658
13	7	0.199976	0.000094	0.000000	0.000000	0.000000	0.000088	3.000000	1.999649
13	8	0.199976	0.000000	0.000000	-0.000493	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
14	2	0.199605	0.000050	0.900700	-0.000156	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	3	0.199641	0.000125	0.700650	0.000006	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
14	4	0.199714	0.000186	0.500526	0.000014	0.000000	0.999997	0.000000	1.000000
14	5	0.199817	0.000227	0.300340	0.000019	0.000000	0.999996	0.000000	1.000000
14	6	0.199939	0.000239	0.100113	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.566806
14	7	0.199939	0.000252	0.000000	0.000000	0.000000	0.000238	3.000000	1.999048
14	8	0.199939	0.000000	0.000000	-0.00132	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	9	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
15	2	0.198994	0.000157	0.901884	-0.00023	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	3	0.199089	0.000344	0.701727	0.000014	0.000000	0.999997	0.000000	1.000000
15	4	0.199277	0.000494	0.501383	0.000024	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
15	5	0.199538	0.000593	0.300889	0.000030	0.000000	0.999994	0.000000	1.000000
15	6	0.199846	0.000624	0.100296	-0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.567184
15	7	0.199846	0.000655	0.000000	0.000000	0.000000	0.000623	3.000000	1.997512
15	8	0.199846	0.000000	0.000000	-0.00343	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
16	2	0.197469	0.000444	0.904902	-0.00032	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	3	0.197714	0.000907	0.704459	0.000025	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
16	4	0.198188	0.001277	0.503552	0.000035	0.000000	0.999993	0.000000	1.000000
16	5	0.198843	0.001517	0.302275	0.000041	0.000000	0.999992	0.000000	1.000000
16	6	0.199614	0.001594	0.100758	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.568136
16	7	0.199614	0.001671	0.000000	-0.000000	0.000000	0.001593	3.000000	1.993649
16	8	0.199614	0.000000	0.000000	-0.00874	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
17	2	0.193678	0.001181	0.912496	-0.00041	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	3	0.194295	0.002328	0.711315	0.000038	0.000000	0.999992	0.000000	1.000000
17	4	0.195476	0.003242	0.508987	0.000048	0.000000	0.999990	0.000000	1.000000
17	5	0.197110	0.003830	0.305745	0.000053	0.000000	0.999989	0.000000	1.000000
17	6	0.199037	0.004023	0.101915	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.570518
17	7	0.199037	0.004215	0.000000	-0.000000	0.000000	0.004022	3.000000	1.984042

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

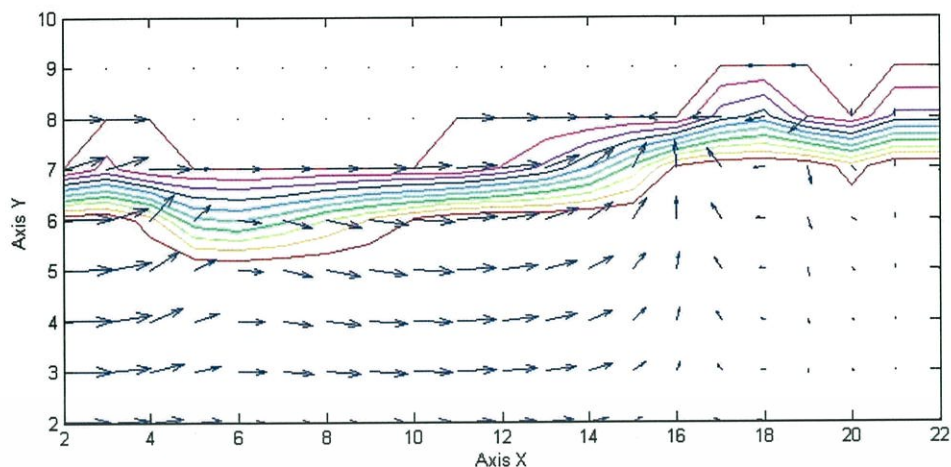
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
17	8	0.199037	0.000000	0.000000	-0.02203	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
18	2	0.184290	0.003031	0.931462	-0.00049	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	3	0.185796	0.005874	0.728432	0.000050	0.000000	0.999990	0.000000	1.000000
18	4	0.188698	0.008145	0.522558	0.000059	0.000000	0.999988	0.000000	1.000000
18	5	0.192755	0.009609	0.314413	0.000063	0.000000	0.999987	0.000000	1.000000
18	6	0.197585	0.010093	0.104804	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.576459
18	7	0.197585	0.010577	0.000000	-0.00000	0.000000	0.010092	3.000000	1.960431
18	8	0.197585	0.000000	0.000000	-0.05530	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
19	2	0.161311	0.007549	0.978592	-0.00055	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	3	0.164739	0.014580	0.771043	0.000061	0.000000	0.999988	0.000000	1.000000
19	4	0.171532	0.020316	0.556463	0.000069	0.000000	0.999986	0.000000	1.000000
19	5	0.181450	0.024099	0.336148	0.000072	0.000000	0.999986	0.000000	1.000000
19	6	0.193817	0.025355	0.112049	-0.00000	0.000000	1.000000	0.000000	0.591309
19	7	0.193817	0.026611	0.000000	0.000000	0.000000	0.025354	3.000000	1.903480
19	8	0.193817	0.000000	0.000000	-0.13933	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	0.107451	0.017834	1.094660	-0.00059	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	3	0.113404	0.034960	0.876826	0.000069	0.000000	0.999986	0.000000	1.000000
20	4	0.126254	0.050068	0.641866	0.000076	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000
20	5	0.148102	0.061199	0.391798	0.000078	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
20	6	0.182701	0.064904	0.130599	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	0.629242
20	7	0.182701	0.068610	0.000000	0.000000	0.000000	0.064903	3.000000	1.770215
20	8	0.182701	0.000000	0.000000	-0.36157	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	0.035695	1.372308	-0.00061	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	0.073511	1.136613	0.000073	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	0.115611	0.863103	0.000080	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	0.164995	0.547492	0.000081	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	0.225895	0.182497	-0.00000	0.000000	1.000000	0.000000	0.732950
21	7	0.000000	0.286795	0.000000	0.000000	0.000000	0.225894	3.000000	1.476273
21	8	0.000000	0.000000	0.000000	-1.73847	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	2	0.000000	-0.035695	1.372308	-0.17847	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	-0.073511	1.136613	-0.18908	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
22	4	0.000000	-0.115611	0.863103	-0.21050	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	-0.164995	0.547492	-0.24691	0.000000	0.999984	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	-0.225895	0.182497	-0.30450	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	-0.000000	0.000000	1.129475	0.000000	0.225894	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา  $t = 5$

จากรูปที่ 4.5 ที่เวลา  $t = 5$  ความเร็วในแนวแกน  $x$  และความเร็วในแกน  $y$  ไม่คงที่ จากภาพจะเห็นว่าพื้นผิวของที่บริเวณผนังมีการยกตัวสูงขึ้นและความเร็วเริ่มมีการเปลี่ยนทิศทางซึ่งแสดงให้เห็นว่าบริเวณผนังเริ่มมีการเกิดคลื่นสะท้อนขึ้น

ตารางที่ 4.3 แสดงผลเวลาที่  $t = 5$

Name = SOLAVOF									
ITER= 17	T = 5.00	DELTA=0.20	CYCLE=25	VCHGT=2.086723e-03					
NREG=1									
K	VOL(K)	PR(K)							
6	6.461061	0.000000							
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
2	2	0.198567	0.000430	0.901360	-0.00067	0.000000	0.999963	0.000000	1.000000
2	3	0.207904	0.001088	0.701208	0.000035	0.000000	0.999954	0.000000	1.000000
2	4	0.212308	0.001924	0.500804	0.000058	0.000000	0.999945	0.000000	1.000000
2	5	0.218047	0.003004	0.300109	0.000070	0.000000	0.999942	0.000000	1.000000
2	6	0.214363	0.004345	0.099078	-0.00000	0.000000	0.997184	3.000000	0.667921
2	7	0.177240	0.042945	0.000000	0.124428	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	8	0.177240	0.000000	0.000000	0.080673	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
3	2	0.177063	0.007084	0.891387	-0.00042	0.000000	0.999863	0.000000	1.000000
3	3	0.187116	0.014029	0.692802	0.000078	0.000000	0.999930	0.000000	1.000000
3	4	0.189675	0.021587	0.496108	0.000069	0.000000	0.999935	0.000000	1.000000
3	5	0.189746	0.031032	0.301893	0.000059	0.000000	0.999951	0.000000	1.000000
3	6	0.178644	0.042945	0.111189	0.000034	0.000000	0.999491	0.000000	0.695922
3	7	0.177240	0.042945	-0.07408	0.000000	0.000000	0.136469	3.000000	1.571168
3	8	0.177240	0.000000	0.000000	-0.21472	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
3	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
4	2	0.138817	0.012699	0.864836	-0.00024	0.000000	0.999741	0.000000	1.000000
4	3	0.140767	0.028158	0.665599	0.000046	0.000000	0.999966	0.000000	1.000000
4	4	0.136069	0.046036	0.467007	0.000046	0.000000	0.999973	0.000000	1.000000
4	5	0.124960	0.067640	0.269471	0.000042	0.000000	0.999979	0.000000	1.000000
4	6	0.102767	0.092935	0.073713	0.000016	0.000000	0.849597	0.000000	0.484584
4	7	0.177240	0.092935	-0.11949	0.000000	0.000000	0.008278	3.000000	2.390362
4	8	0.177240	0.000000	0.000000	-0.46467	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
5	2	0.113084	0.008554	0.830621	-0.00011	0.000000	0.999663	0.000000	1.000000
5	3	0.110444	0.018666	0.628153	0.000023	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
5	4	0.103629	0.029485	0.422369	0.000027	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
5	5	0.091213	0.040739	0.212169	0.000025	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
5	6	0.071197	0.051262	-0.00453	0.000000	0.000000	0.524850	3.000000	0.975752
5	7	0.071197	0.092935	0.000000	0.031627	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	8	0.000000	0.000000	0.000000	-0.76007	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
6	2	0.113080	-0.000008	0.821205	-0.00004	0.000000	0.999638	0.000000	1.000000
6	3	0.111519	-0.000364	0.619215	0.000008	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
6	4	0.108279	-0.001912	0.415045	0.000010	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
6	5	0.103058	-0.005859	0.208537	0.000011	0.000000	0.999998	0.000000	0.990253
6	6	0.095452	-0.013944	-0.00049	0.000000	0.000000	0.487297	3.000000	1.012866
6	7	0.095452	0.000000	0.000000	0.110145	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
7	2	0.126894	-0.004607	0.830454	-0.000012	0.000000	0.999659	0.000000	1.000000
7	3	0.126639	-0.009647	0.629565	-0.00000	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	4	0.126157	-0.015606	0.427794	0.000002	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	5	0.125481	-0.023079	0.225229	0.000004	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	6	0.124204	-0.032663	0.022028	-0.00000	0.000000	0.575973	3.000000	0.929392
7	7	0.124204	0.000000	0.000000	0.211235	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
8	2	0.143021	-0.005378	0.847410	-0.000013	0.000000	0.999735	0.000000	1.000000
8	3	0.143450	-0.010983	0.647196	-0.000005	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	4	0.144320	-0.017037	0.446790	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
8	5	0.145675	-0.023768	0.246284	0.000003	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	6	0.147149	-0.031416	0.045816	0.000000	0.000000	0.694229	3.000000	0.837360
8	7	0.147149	0.000000	0.000000	0.195324	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
9	2	0.155356	-0.004121	0.865894	-0.000049	0.000000	0.999852	0.000000	1.000000
9	3	0.156144	-0.008354	0.665909	-0.000006	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	4	0.157695	-0.012812	0.465957	0.000002	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	5	0.159999	-0.017585	0.266105	0.000007	0.000000	0.999999	0.000000	1.000000
9	6	0.162768	-0.022791	0.066446	0.000000	0.000000	0.805765	3.000000	0.765835
9	7	0.162768	0.000000	0.000000	0.139988	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
9	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
10	2	0.160622	-0.001779	0.884021	-0.000118	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	3	0.161887	-0.003693	0.683939	-0.000001	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
10	4	0.164170	-0.005850	0.483803	0.000009	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
10	5	0.167656	-0.008399	0.283669	0.000015	0.000000	0.999991	0.000000	1.000000
10	6	0.172524	-0.011651	0.083624	0.000000	0.000000	0.902020	3.000000	0.713256
10	7	0.163091	0.009400	0.000000	0.105792	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	8	0.163091	0.000000	0.000000	0.224820	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
11	2	0.154690	0.001935	0.902816	-0.00021	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
11	3	0.158128	0.003190	0.702310	0.000011	0.000000	0.999995	0.000000	1.000000
11	4	0.159738	0.004672	0.501431	0.000020	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000
11	5	0.161854	0.006611	0.300118	0.000026	0.000000	0.999985	0.000000	1.000000
11	6	0.164167	0.009400	0.098257	0.000014	0.000000	0.995271	0.000000	0.549055
11	7	0.163091	0.009400	-0.10433	0.000000	0.000000	0.005415	3.000000	2.073608
11	8	0.163091	0.000000	0.000000	-0.04699	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
12	2	0.140859	0.004548	0.924643	-0.00030	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
12	3	0.147935	0.007950	0.723992	0.000021	0.000000	0.999983	0.000000	1.000000
12	4	0.150492	0.011039	0.522863	0.000032	0.000000	0.999955	0.000000	1.000000
12	5	0.154171	0.013608	0.321310	0.000039	0.000000	0.999930	0.000000	1.000000
12	6	0.159276	0.015243	0.119427	0.000024	0.000000	0.999953	0.000000	0.667812
12	7	0.165655	0.014388	-0.08259	-0.000000	0.000000	0.105975	3.000000	1.650233
12	8	0.165655	0.000000	0.000000	-0.06766	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
12	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
13	2	0.116040	0.008192	0.950665	-0.00040	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
13	3	0.126967	0.015189	0.749711	0.000040	0.000000	0.999939	0.000000	1.000000
13	4	0.129836	0.022084	0.547928	0.000047	0.000000	0.999906	0.000000	1.000000
13	5	0.133560	0.028964	0.345274	0.000048	0.000000	0.999889	0.000000	1.000000
13	6	0.138647	0.035847	0.141647	0.000033	0.000000	0.999945	0.000000	0.773685
13	7	0.145162	0.042678	-0.06310	0.000000	0.000000	0.223393	3.000000	1.382374
13	8	0.145162	0.000000	0.000000	-0.24754	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
14	2	0.080579	0.011730	0.983052	-0.00044	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
14	3	0.094841	0.022448	0.782096	0.000045	0.000000	0.999905	0.000000	1.000000
14	4	0.097592	0.033206	0.580160	0.000047	0.000000	0.999887	0.000000	1.000000
14	5	0.100437	0.044257	0.377163	0.000052	0.000000	0.999849	0.000000	1.000000
14	6	0.104437	0.055670	0.172944	0.000046	0.000000	0.999907	0.000000	0.916328
14	7	0.109878	0.067431	-0.03272	0.000000	0.000000	0.393366	3.000000	1.119362
14	8	0.109878	0.000000	0.000000	-0.39596	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
15	2	0.038198	0.014034	1.021860	-0.00046	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
15	3	0.054127	0.027614	0.821328	0.000045	0.000000	0.999887	0.000000	1.000000
15	4	0.055907	0.041520	0.620121	0.000054	0.000000	0.999840	0.000000	1.000000
15	5	0.056205	0.056275	0.418121	0.000053	0.000000	0.999787	0.000000	1.000000
15	6	0.056735	0.072186	0.215074	0.000051	0.000000	0.999873	0.000000	1.000000
15	7	0.057953	0.089494	0.010614	0.000000	0.000000	0.625913	3.000000	0.888168
15	8	0.057953	0.000000	0.000000	-0.53401	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
16	2	-0.002566	0.013500	1.063028	-0.00044	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
16	3	0.012676	0.027325	0.863519	0.000041	0.000000	0.999852	0.000000	1.000000
16	4	0.012336	0.041858	0.664283	0.000046	0.000000	0.999815	0.000000	1.000000
16	5	0.008038	0.057923	0.465181	0.000048	0.000000	0.999776	0.000000	1.000000
16	6	0.001760	0.076257	0.265963	0.000046	0.000000	0.999850	0.000000	1.000000
16	7	-0.006350	0.097691	0.066195	0.000000	0.000000	0.920028	3.000000	0.704211
16	8	-0.121132	0.069924	0.000000	-0.43731	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	9	-0.121132	0.000000	0.000000	-0.55150	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	10	-0.121132	0.000000	0.000000	-0.20188	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
17	2	-0.028855	0.008687	1.098011	-0.00038	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
17	3	-0.015413	0.018059	0.899757	0.000046	0.000000	0.999849	0.000000	1.000000
17	4	-0.017656	0.028064	0.703266	0.000040	0.000000	0.999825	0.000000	1.000000
17	5	-0.026029	0.039426	0.508671	0.000034	0.000000	0.999740	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

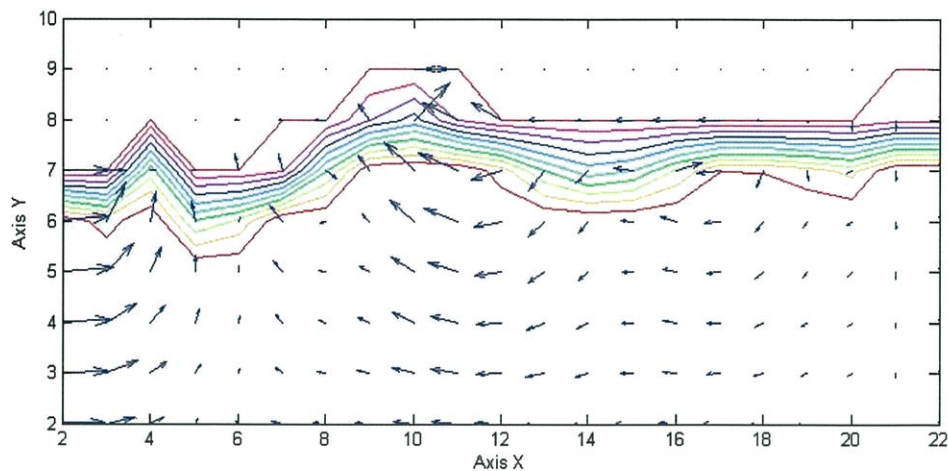
I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
17	6	-0.038878	0.052979	0.316169	0.000033	0.000000	0.999837	0.000000	1.000000
17	7	-0.057172	0.069924	0.125958	0.000023	0.000000	1.000000	0.000000	0.797353
17	8	-0.121132	0.069924	-0.06270	0.000000	0.000000	0.250625	3.000000	1.332222
17	9	-0.121132	0.000000	0.000000	-0.34962	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	10	-0.121132	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
18	2	-0.031267	0.000746	1.116295	-0.00029	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
18	3	-0.017617	0.001485	0.918352	0.000021	0.000000	0.999843	0.000000	1.000000
18	4	-0.018249	0.001688	0.722729	0.000025	0.000000	0.999798	0.000000	1.000000
18	5	-0.023999	0.001017	0.529732	0.000027	0.000000	0.999770	0.000000	1.000000
18	6	-0.033100	-0.000902	0.339923	0.000034	0.000000	0.999835	0.000000	1.000000
18	7	-0.047185	-0.004227	0.154122	0.000025	0.000000	0.999979	0.000000	0.874583
18	8	-0.080148	-0.017888	-0.02695	0.000000	0.000000	0.342138	3.000000	1.187453
18	9	-0.080148	0.000000	0.000000	0.157748	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	10	-0.080148	0.000000	0.000000	0.068307	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
19	2	-0.016637	-0.004920	1.115706	-0.00021	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
19	3	-0.001333	-0.010344	0.916456	0.000016	0.000000	0.999897	0.000000	1.000000
19	4	0.003033	-0.017435	0.718023	0.000018	0.000000	0.999873	0.000000	1.000000
19	5	0.006694	-0.027662	0.520485	0.000020	0.000000	0.999797	0.000000	1.000000
19	6	0.013046	-0.043039	0.324017	0.000025	0.000000	0.999829	0.000000	1.000000
19	7	0.015523	-0.063938	0.128961	0.000018	0.000000	0.999974	0.000000	0.657723
19	8	-0.080148	-0.063938	-0.06343	0.000000	0.000000	0.096969	3.000000	1.680256
19	9	-0.080148	0.000000	0.000000	0.319691	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	10	-0.080148	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	-0.006254	-0.003495	1.107992	-0.00016	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
20	3	0.006289	-0.006032	0.906889	0.000017	0.000000	0.999885	0.000000	1.000000
20	4	0.010098	-0.008384	0.704354	0.000016	0.000000	0.999839	0.000000	1.000000
20	5	0.013556	-0.010668	0.499584	0.000015	0.000000	0.999814	0.000000	1.000000
20	6	0.017951	-0.012299	0.291058	0.000020	0.000000	0.999859	0.000000	1.000000
20	7	0.021563	-0.014312	0.076110	0.000000	0.000000	0.840622	3.000000	0.745922
20	8	0.000000	0.021050	0.000000	0.310388	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.028331	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.133580	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	-0.002113	1.109663	-0.00014	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	-0.000016	0.909828	0.000003	0.000000	0.999896	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	0.003352	0.710303	0.000010	0.000000	0.999860	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	0.007873	0.511404	0.000014	0.000000	0.999828	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	0.013860	0.313739	0.000016	0.000000	0.999836	0.000000	1.000000
21	7	0.000000	0.021050	0.118417	0.000010	0.000000	0.998789	0.000000	0.709575
21	8	0.000000	0.021050	-0.07220	0.000000	0.000000	0.221311	3.000000	1.535026
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	-0.10524	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
22	2	0.000000	0.002113	1.109663	0.010564	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	0.000016	0.909828	-0.01048	0.000000	0.999896	0.000000	1.000000
22	4	0.000000	-0.003352	0.710303	-0.01684	0.000000	0.999860	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	-0.007873	0.511404	-0.02260	0.000000	0.999828	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	-0.013860	0.313739	-0.02993	0.000000	0.999836	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	-0.021050	0.118417	-0.03594	0.000000	0.998789	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	-0.021050	-0.07220	0.000000	0.000000	0.221311	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.105249	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 การเคลื่อนที่ของน้ำที่เวลา  $t=10$

จากรูปที่ 4.6 ที่เวลา  $t=10$  ความเร็วในแนวแกน  $x$  และความเร็วในแกน  $y$  มีทิศทางในตรงกันข้าม และจากภาพจะเห็นว่าคลื่นสะท้อนได้มีการเคลื่อนที่ออกห่างจากผนังและเคลื่อนไปยังจุดเริ่มต้น

ตารางที่ 4.4 แสดงผลเวลาที่  $t=10$

Name = SOLAVOF									
ITER= 17	T = 10.0	DELT=0.20	CYCLE=50	VCHGT=3.450411e-03					
NREG=1									
K	VOL(K)	PR(K)							
6	5.919310	0.000000							
1	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
2	2	0.142697	0.002560	0.899495	-0.00019	0.000000	0.999576	0.000000	1.000000
2	3	0.156809	0.005133	0.698617	0.000009	0.000000	0.999965	0.000000	1.000000
2	4	0.164219	0.007663	0.497075	0.000015	0.000000	0.999955	0.000000	1.000000
2	5	0.172151	0.010180	0.295177	0.000020	0.000000	0.999954	0.000000	1.000000
2	6	0.157147	0.012816	0.093209	0.000000	0.000000	0.974218	3.000000	0.678326
2	7	0.157147	0.000000	0.000000	-0.07726	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
2	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
3	2	0.093920	0.016231	0.865836	-0.00013	0.000000	0.999800	0.000000	1.000000
3	3	0.105097	0.033473	0.664125	0.000019	0.000000	0.999953	0.000000	1.000000
3	4	0.102143	0.054169	0.460685	0.000021	0.000000	0.999954	0.000000	1.000000
3	5	0.090004	0.081556	0.255422	0.000022	0.000000	0.999953	0.000000	1.000000
3	6	0.063751	0.112688	0.048146	0.000000	0.000000	0.848636	3.000000	0.741490
3	7	0.063751	0.000000	0.000000	-0.71910	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
3	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
4	2	0.045074	0.016255	0.843556	-0.00013	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
4	3	0.054862	0.033003	0.640876	0.000015	0.000000	0.999925	0.000000	1.000000
4	4	0.049307	0.050619	0.435203	0.000020	0.000000	0.999894	0.000000	1.000000
4	5	0.035194	0.068894	0.226239	0.000023	0.000000	0.999912	0.000000	1.000000
4	6	0.016987	0.084482	0.013431	0.000000	0.000000	0.644373	3.000000	0.873841
4	7	0.016987	0.000000	0.000000	-0.50034	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	8	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
4	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
5	2	0.009119	0.011953	0.844064	-0.00016	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
5	3	0.019239	0.023830	0.641054	0.000016	0.000000	0.999955	0.000000	1.000000
5	4	0.013734	0.035692	0.434873	0.000022	0.000000	0.999936	0.000000	1.000000
5	5	0.001166	0.047040	0.225296	0.000025	0.000000	0.999935	0.000000	1.000000
5	6	-0.012687	0.056931	0.012006	0.000000	0.000000	0.609510	3.000000	0.901299
5	7	-0.012687	0.000000	0.000000	-0.33411	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	8	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
5	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
6	2	-0.011361	0.006784	0.871135	-0.00021	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
6	3	0.002035	0.012523	0.668404	0.000019	0.000000	0.999924	0.000000	1.000000
6	4	0.001994	0.016442	0.462946	0.000027	0.000000	0.999866	0.000000	1.000000
6	5	-0.000079	0.016863	0.254767	0.000031	0.000000	0.999865	0.000000	1.000000
6	6	0.006345	0.010519	0.044022	0.000000	0.000000	0.721252	3.000000	0.818832
6	7	-0.013105	0.046954	0.000000	0.181473	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	8	-0.013105	0.000000	0.000000	-0.25661	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
6	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
7	2	-0.032949	0.007141	0.922492	-0.00027	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
7	3	-0.018629	0.014036	0.720138	0.000034	0.000000	0.999868	0.000000	1.000000
7	4	-0.020816	0.021646	0.515133	0.000035	0.000000	0.999856	0.000000	1.000000
7	5	-0.028321	0.031067	0.306689	0.000034	0.000000	0.999861	0.000000	1.000000
7	6	-0.041307	0.046954	0.093358	0.000013	0.000000	0.999250	0.000000	0.597605
7	7	-0.013105	0.046954	-0.12757	0.000000	0.000000	0.071318	3.000000	1.880191
7	8	-0.013105	0.000000	0.000000	-0.23476	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
7	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
8	2	-0.039243	0.002039	0.994334	-0.00029	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
8	3	-0.025522	0.004342	0.795526	0.000028	0.000000	0.999806	0.000000	1.000000
8	4	-0.022347	0.004858	0.598095	0.000028	0.000000	0.999799	0.000000	1.000000
8	5	-0.020108	0.002127	0.402426	0.000033	0.000000	0.999761	0.000000	1.000000
8	6	-0.016874	-0.006011	0.209216	0.000032	0.000000	0.999924	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
8	7	0.036943	-0.022694	0.019864	0.000000	0.000000	0.588801	3.000000	0.918441
8	8	-0.037939	0.045080	0.000000	0.297480	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	9	-0.037939	0.000000	0.000000	-0.28863	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
8	10	-0.037939	0.000000	0.000000	-0.06323	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
9	2	-0.047421	0.002668	1.054823	-0.00029	0.000000	1.000000	0.000000	1.000000
9	3	-0.041946	0.008149	0.858216	0.000032	0.000000	0.999844	0.000000	1.000000
9	4	-0.037832	0.013319	0.665073	0.000039	0.000000	0.999803	0.000000	1.000000
9	5	-0.032484	0.017451	0.475895	0.000033	0.000000	0.999678	0.000000	1.000000
9	6	-0.023978	0.019823	0.291486	0.000025	0.000000	0.999924	0.000000	1.000000
9	7	-0.038820	0.045080	0.112928	0.000014	0.000000	0.995060	0.000000	0.750295
9	8	-0.037939	0.045080	-0.05876	0.000000	0.000000	0.196843	3.000000	1.435044
9	9	-0.037939	0.045080	-0.05876	0.000000	0.000000	0.196843	3.000000	1.435044
9	10	-0.037939	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
10	2	-0.068124	0.006859	1.084531	-0.00021	0.000000	0.999998	0.000000	1.000000
10	3	-0.071958	0.016870	0.887783	0.000035	0.000000	0.999781	0.000000	1.000000
10	4	-0.073079	0.028624	0.694245	0.000029	0.000000	0.999761	0.000000	1.000000
10	5	-0.075964	0.043122	0.504093	0.000020	0.000000	0.999795	0.000000	1.000000
10	6	-0.080958	0.062119	0.317562	0.000018	0.000000	0.999835	0.000000	1.000000
10	7	-0.098910	0.082151	0.134723	0.000014	0.000000	0.999836	0.000000	0.875146
10	8	-0.118204	0.108906	-0.04398	0.000000	0.000000	0.342820	3.000000	1.186492
10	9	-0.118204	0.000000	0.000000	-0.67830	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
10	10	-0.118204	0.000000	0.000000	-0.13377	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
11	2	-0.087303	0.006372	1.084109	-0.00010	0.000000	0.999862	0.000000	1.000000
11	3	-0.089812	0.012328	0.885812	0.000023	0.000000	0.999868	0.000000	1.000000
11	4	-0.093247	0.019054	0.689181	0.000018	0.000000	0.999800	0.000000	1.000000
11	5	-0.100765	0.027324	0.494091	0.000014	0.000000	0.999748	0.000000	1.000000
11	6	-0.112506	0.037842	0.300223	0.000012	0.000000	0.999881	0.000000	1.000000
11	7	-0.133219	0.049280	0.106877	0.000006	0.000000	0.994571	0.000000	0.651385
11	8	-0.118204	0.049280	-0.08695	0.000000	0.000000	0.090913	3.000000	1.699596
11	9	-0.118204	0.000000	0.000000	-0.24639	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
11	10	-0.118204	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
12	2	-0.088365	0.000354	1.067198	0.000002	0.000000	0.999787	0.000000	1.000000
12	3	-0.082132	-0.002204	0.867722	0.000009	0.000000	0.999827	0.000000	1.000000
12	4	-0.083201	-0.005551	0.668808	0.000006	0.000000	0.999825	0.000000	1.000000
12	5	-0.087374	-0.010014	0.470427	0.000005	0.000000	0.999750	0.000000	1.000000
12	6	-0.093822	-0.016241	0.272540	0.000003	0.000000	0.999855	0.000000	1.000000
12	7	-0.102349	-0.026531	0.075081	0.000000	0.000000	0.847353	3.000000	0.742196
12	8	-0.102349	0.049280	0.000000	0.405481	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	9	0.000000	0.000000	0.000000	-0.04939	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
12	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.197007	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
13	2	-0.072742	-0.005190	1.044942	0.000088	0.000000	0.999594	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
13	3	-0.060840	-0.012286	0.844264	0.000006	0.000000	0.999812	0.000000	1.000000
13	4	-0.057532	-0.020843	0.642770	-0.000002	0.000000	0.999788	0.000000	1.000000
13	5	-0.055456	-0.031484	0.440363	-0.000006	0.000000	0.999786	0.000000	1.000000
13	6	-0.054536	-0.044581	0.236918	-0.000009	0.000000	0.999905	0.000000	1.000000
13	7	-0.055514	0.000094	0.000000	0.000000	0.000000	0.000088	3.000000	1.999649
13	8	-0.055514	0.000000	0.000000	0.379020	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
13	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
14	2	-0.058414	-0.004741	1.028738	0.000175	0.000000	0.999385	0.000000	1.000000
14	3	-0.043923	-0.010380	0.826923	0.000001	0.000000	0.999892	0.000000	1.000000
14	4	-0.038001	-0.016892	0.623062	-0.000010	0.000000	0.999859	0.000000	1.000000
14	5	-0.032880	-0.024421	0.416821	-0.000019	0.000000	0.999756	0.000000	1.000000
14	6	-0.031819	-0.031998	0.207681	-0.000021	0.000000	0.999904	0.000000	0.955129
14	7	-0.039999	-0.037169	-0.005019	0.000000	0.000000	0.442143	3.000000	1.061411
14	8	-0.039999	0.000000	0.000000	0.211706	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
14	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
15	2	-0.056383	-0.000623	1.028465	0.000272	0.000000	0.999262	0.000000	1.000000
15	3	-0.041690	-0.001369	0.826781	-0.000012	0.000000	0.999848	0.000000	1.000000
15	4	-0.037054	-0.001689	0.623249	-0.000019	0.000000	0.999864	0.000000	1.000000
15	5	-0.034569	-0.001131	0.417592	-0.000025	0.000000	0.999792	0.000000	1.000000
15	6	-0.038965	0.001245	0.209396	-0.000032	0.000000	0.999924	0.000000	1.000000
15	7	-0.061257	0.008331	-0.00182	0.000000	0.000000	0.500121	3.000000	0.999879
15	8	-0.061257	0.000000	0.000000	-0.07708	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
15	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
16	2	-0.060293	0.001378	1.043284	0.000372	0.000000	0.999198	0.000000	1.000000
16	3	-0.046508	0.002982	0.842910	-0.000007	0.000000	0.999859	0.000000	1.000000
16	4	-0.044814	0.005564	0.642170	-0.000024	0.000000	0.999799	0.000000	1.000000
16	5	-0.047247	0.009783	0.441100	-0.000037	0.000000	0.999819	0.000000	1.000000
16	6	-0.056566	0.015641	0.239752	-0.000043	0.000000	0.999931	0.000000	1.000000
16	7	-0.086626	0.024097	0.038174	0.000000	0.000000	0.717010	3.000000	0.821686
16	8	-0.086626	0.000000	0.000000	-0.16276	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
16	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
17	2	-0.057171	-0.000942	1.061525	0.000492	0.000000	0.999072	0.000000	1.000000
17	3	-0.043445	-0.001967	0.862275	-0.000022	0.000000	0.999930	0.000000	1.000000
17	4	-0.042355	-0.002794	0.663937	-0.000036	0.000000	0.999886	0.000000	1.000000
17	5	-0.045243	-0.003471	0.466781	-0.000043	0.000000	0.999778	0.000000	1.000000
17	6	-0.053009	-0.004666	0.271252	-0.000049	0.000000	0.999916	0.000000	1.000000
17	7	-0.078180	-0.007481	0.077912	0.000000	0.000000	0.896742	3.000000	0.715952

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
17	8	-0.078180	0.000000	0.000000	0.051483	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
17	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
18	2	-0.045336	-0.003829	1.072864	0.000579	0.000000	0.999120	0.000000	1.000000
18	3	-0.030856	-0.008031	0.873564	-0.000025	0.000000	0.999863	0.000000	1.000000
18	4	-0.027702	-0.012923	0.675056	-0.000040	0.000000	0.999866	0.000000	1.000000
18	5	-0.026578	-0.019155	0.477462	-0.000053	0.000000	0.999867	0.000000	1.000000
18	6	-0.026322	-0.028063	0.280987	-0.000060	0.000000	0.999960	0.000000	1.000000
18	7	-0.023145	-0.046408	0.085869	0.000000	0.000000	0.894216	3.000000	0.717249
18	8	-0.023145	0.000000	0.000000	0.323767	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
18	10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
19	2	-0.033605	-0.003778	1.077559	0.000662	0.000000	0.999133	0.000000	1.000000
19	3	-0.020086	-0.007376	0.877614	-0.000037	0.000000	0.999948	0.000000	1.000000
19	4	-0.017529	-0.010777	0.677638	-0.000054	0.000000	0.999936	0.000000	1.000000
19	5	-0.016914	-0.014011	0.477420	-0.000064	0.000000	0.999869	0.000000	1.000000
19	6	-0.015847	-0.017517	0.276548	-0.000070	0.000000	0.999940	0.000000	1.000000
19	7	0.000925	-0.025540	0.074216	0.000000	0.000000	0.842337	3.000000	0.744970
19	8	0.000925	-0.005975	0.000000	0.137943	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	9	0.041240	0.000000	0.000000	0.098607	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
19	10	0.041240	-0.000000	0.000000	0.068733	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
20	2	-0.020465	-0.004238	1.081445	0.000709	0.000000	0.999145	0.000000	1.000000
20	3	-0.010750	-0.007358	0.881666	-0.000043	0.000000	0.999941	0.000000	1.000000
20	4	-0.010254	-0.009795	0.682177	-0.000059	0.000000	0.999900	0.000000	1.000000
20	5	-0.012277	-0.011355	0.483056	-0.000069	0.000000	0.999893	0.000000	1.000000
20	6	-0.016062	-0.011298	0.284481	-0.000074	0.000000	0.999952	0.000000	1.000000
20	7	-0.015065	-0.005968	0.086818	0.000000	0.000000	0.768992	3.000000	0.788027
20	8	0.000000	-0.028204	0.000000	-0.11272	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.072286	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
20	10	0.041240	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
21	2	0.000000	-0.006675	1.082958	0.000731	0.000000	0.999149	0.000000	1.000000
21	3	0.000000	-0.010269	0.883077	-0.000049	0.000000	0.999943	0.000000	1.000000
21	4	0.000000	-0.013699	0.683331	-0.000063	0.000000	0.999929	0.000000	1.000000
21	5	0.000000	-0.017806	0.483705	-0.000072	0.000000	0.999911	0.000000	1.000000
21	6	0.000000	-0.023175	0.284145	-0.000078	0.000000	0.999928	0.000000	1.000000
21	7	0.000000	-0.028204	0.084533	-0.000034	0.000000	0.999910	0.000000	0.414818
21	8	0.000000	-0.028204	-0.11523	0.000000	0.000000	0.075113	3.000000	2.844050
21	9	0.000000	0.000000	0.000000	0.141019	0.000000	0.000000	6.000000	1.000000
21	10	0.000000	0.000000	0.000000	-0.06873	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	2	0.000000	0.006675	1.082958	0.033377	0.000000	0.999149	0.000000	1.000000
22	3	0.000000	0.010269	0.883077	0.017966	0.000000	0.999943	0.000000	1.000000

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

I	J	U	V	P	D	PS	F	NF	PETA
22	4	0.000000	0.013699	0.683331	0.017152	0.000000	0.999929	0.000000	1.000000
22	5	0.000000	0.017806	0.483705	0.020533	0.000000	0.999911	0.000000	1.000000
22	6	0.000000	0.023175	0.284145	0.026848	0.000000	0.999928	0.000000	1.000000
22	7	0.000000	0.028204	0.084533	0.025142	0.000000	0.999910	0.000000	1.000000
22	8	0.000000	0.014457	-0.11523	-0.06873	0.000000	0.075113	0.000000	1.000000
22	9	0.000000	0.000000	0.000000	-0.07228	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
22	10	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

# สรุปผลและข้อเสนอแนะ

### 5.1 สรุปผลการศึกษา

ในโครงการปัญหาพิเศษนี้เราได้ศึกษาเรื่องการไหลของของไหลแบบไม่อุดมคติ เพื่อหารูปร่างของขอบอิสระของพื้นที่ที่อยู่ระหว่างของไหล 2 ชนิด และคำนวณหาค่าประมาณต่างๆบนขอบอิสระ โดยสมการที่เราจะนำมาใช้คือ สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) รวมเข้ากับเงื่อนไขของการอัดได้และอัดไม่ได้ของของไหล จากนั้นแปลงสมการให้อยู่ในรูปผลต่างอันตะ (finite difference) โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ เพื่อใช้ในการประมาณค่าอนุพันธ์ของจุดต่างๆ บนขอบอิสระ ซึ่งอัลกอริทึมที่เราจะนำมาใช้คือวิธีการวอลุ่มออฟฟลูอิด (Volume- of-Fluid) หรือ SOLA-VOF ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาที่มีการแบ่งตารางที่พื้นผิวให้แต่ละช่องมีขนาดไม่เท่ากัน และหาค่าประมาณสำหรับการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ขอบอิสระ หลังจากที่เราสามารถแปลงสมการให้อยู่ในรูปผลต่างอันตะได้ แล้วนำค่า ณ เวลาต่างๆ ที่คำนวณได้จากโปรแกรมมาทำการพล็อตกราฟเพื่อแสดงค่า ที่พื้นผิวของของไหล

### 5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ปัญหาพิเศษนี้ ควรศึกษาทำความเข้าใจใน สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation), วิธีการวอลุ่มออฟฟลูอิด (Volume- of-Fluid) และวิธีการผลต่างอันตะ (finite difference method) เพื่อจะได้สามารถทำความเข้าใจและหาที่มาที่ไปของสมการและการดำเนินการต่างๆในโปรแกรมได้ถูกต้อง
2. ในการแบ่งตารางย่อยบนพื้นผิวเซลล์ หากมีการแบ่งอย่างละเอียดหรือระยะห่างระหว่างช่อง มีขนาดเล็ก จะสามารถช่วยให้การคำนวณค่าออกมามีความละเอียดและมีความแม่นยำมากขึ้น
3. ในปัญหาพิเศษนี้ ควรศึกษาหลักเขียนโปรแกรมและรูปแบบของคำสั่งในภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] B.D.Nichols,C.W.Hirt,R.S.Hotchkiss.SOLA-VOF : A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries[Internet];1980.[updated 2012 Aug 7]. Available from :  
<http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2012/CFD/Readings/SOLA-VOF-1980-P1.pdf>
- [2] B.D.Nichols,C.W.Hirt.Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries[Internet].Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico;1979.[updated 2012 Aug 7]. Available from :  
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.413.7358&rep=rep1&type=pdf>
- [3] ธัญธร ออกระลา.เอกสารประกอบการสอนวิชากลศาสตร์ของไหล[อินเทอร์เน็ต]. นครปฐม:คณะวิศวกรรมศาสตร์กำแพงแสน;2553[เข้าถึงเมื่อ 10 ก.ย. 2556]. เข้าถึงได้จาก :  
<http://irre.ku.ac.th/HomepageDoc/BooksOnline/Thandon/FluidMechanics.pdf>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้