การศึกษาเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงกับการประยุกต์ใช้

TO STUDY EXTRAPOLATION TECHNIQUE WITH SOME APPLICATION

จีระศักดิ์ กิ่งสีเสียด

ช่อทิพย์ สมทอง

นิตยา พรมมะลา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา ๒๕๕๖

การศึกษาเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงกับการประยุกต์ใช้
TO STUDY EXTRAPOLATION TECHNIQUE WITH SOME APPLICATION

จีระศักดิ์ กิ่งสีเสียด
ช่อทิพย์ สมทอง
นิตยา พรมมะลา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2556

TO STUDY EXTRAPOLATION TECHNIQUE WITH SOME APPLICATION

JERASAK KINGSISEAD
CHORTHIP SOMTONG
NITTAYA PROMMALA

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การศึกษาเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงกับการประยุกต์ใช้ TO STUDY EXTRAPOLATION TECHNIQUE WITH SOME APPLICATION
ชื่อนักศึกษา	นายจีระศักดิ์ กิ่งสีเสียด 53050015 นางสาวช่อทิพย์ สมทอง 53050021 นางสาวนิตยา พรมมะลา 53050062
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ดร.กัมปนาท นามงาม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ประธานกรรมการ	
ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร กรรมการ	ธวัชชัย
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.กัมปนาท นามงาม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ การศึกษาเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงกับการประยุกต์ใช้ TO STUDY EXTRAPOLATION TECHNIQUE WITH SOME APPLICATION

ชื่อนักศึกษา นายจีระศักดิ์ กิ่งสีเสียด 53050015
นางสาวช่อทิพย์ สมทอง 53050021
นางสาวนิตยา พรมมะลา 53050062

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตร คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย
ดร.กัมปนาท นามงาม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นปัญหาเกี่ยวกับการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน โดยพิจารณาการประมาณค่าของฟังก์ชันและการประมาณค่าของปริพันธ์ เพื่อให้ได้คำตอบเชิงตัวเลขที่ถูกต้องมากขึ้น และสร้างโปรแกรมคำนวณเพื่อช่วยในการคำนวณ ซึ่งสามารถลดเวลา และความยุ่งยากในการคำนวณลงได้

คำสำคัญ : การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน

Special Problem Title	TO STUDY EXTRAPOLATION TECHNIQUE WITH SOME APPLICATION
Students	Mr. Jerasak Kingsisead 53050015
	Ms. Chorthip Somtong 53050021
	Ms. Nittaya Prommala 53050062
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2013
Advisors	Asst.Prof.Dr. Nopparat Pochai
	Dr. Kampanat Namngam

ABSTRACT

This special problem studied about approximation method of function and integral by mean of Richardson's extrapolation, which can produce highly accurate result. A software base on the study was developed to help in calculation, which can shorten and complicated the calculation time.

Keyword : Richardson's extrapolation

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำโครงการปัญหาพิเศษเรื่อง การศึกษาเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงกับการประยุกต์ใช้ โดยที่สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี และเสริมสร้างประสบการณ์ในการทำงานต่างๆ เช่น การทำงานร่วมกัน การนำความรู้ที่ได้เรียนมาเพื่อต่อยอดประยุกต์ใช้ และปฏิบัติให้บรรลุตามจุดประสงค์ของโครงการและสาขาวิชา คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นพรัตน์ โพธิ์ชัย และ ดร. กัมปนาท นามงาม อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ เป็นที่ได้มอบแนวคิดแนวทางต่างๆ จนถึงหัวข้อเรื่องให้นำไปออกแบบ คิดพัฒนาให้เป็นชิ้นงาน คำแนะนำติชมต่างๆ การตรวจทานและตรวจสอบผลงาน รวมถึงคณะกรรมการสอบปัญหาพิเศษซึ่งประกอบด้วย ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ และ ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ที่ได้เสียสละเวลามาให้คำแนะนำต่างๆ ข้อเสนอแนะและสิ่งที่ควรปรับปรุงทำให้โครงการปัญหาพิเศษหัวข้อนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สุดท้ายนี้ทางคณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณทุกท่านและครอบครัวที่ให้ความสนับสนุน กำลังใจ แนวทางชีวิต และเพื่อนๆของคณะผู้จัดทำที่ให้ความช่วยเหลือต่างๆ ทำให้คณะผู้จัดทำสามารถดำเนินงานพัฒนาโครงงานพิเศษได้จนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2557

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ

สารบัญตาราง

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

วิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน เป็นเทคนิคการประมาณค่าโดยใช้ค่าประมาณ 2 ค่า ในการคำนวณ เพื่อให้ได้การประมาณที่ถูกต้องมากขึ้น

ดังนั้นผู้จัดทำจึงได้สนใจศึกษาการประมาณค่าเพื่อให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่า π ตามตำแหน่งที่สนใจมากสุด โดยศึกษาเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน (Richardson Extrapolation Technique) และได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณ เพื่อลดระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และมีการนำเสนอการประยุกต์ใช้เทคนิคการประมาณค่านี้กับปัญหาที่สนใจต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ

1.2.1. ต้องการใช้ Richardson Extrapolation ในการประมาณค่า π

1.2.2. ใช้ Microsoft Excel 2010 เขียนโปรแกรมในการคำนวณการประมาณค่า π โดย Richardson Extrapolation เพื่อลดเวลาและความยุ่งยากในการคำนวณ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1.3.1. นำข้อมูลที่ได้ศึกษาจากการคำนวณค่า π มาประมาณค่าโดย Richardson Extrapolation

1.3.2. ใช้ Microsoft Excel 2010 เขียนโปรแกรมในการคำนวณการประมาณค่า π โดย Richardson Extrapolation

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.4.1. ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับ Richardson Extrapolation Technique

1.4.2. เขียนโปรแกรม การคำนวณการประมาณค่า π โดย Richardson Extrapolation

1.4.3. จัดทำเอกสารประกอบการทำโครงงานปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 มีความรู้ ความเข้าใจ ในเทคนิคการประมาณค่า

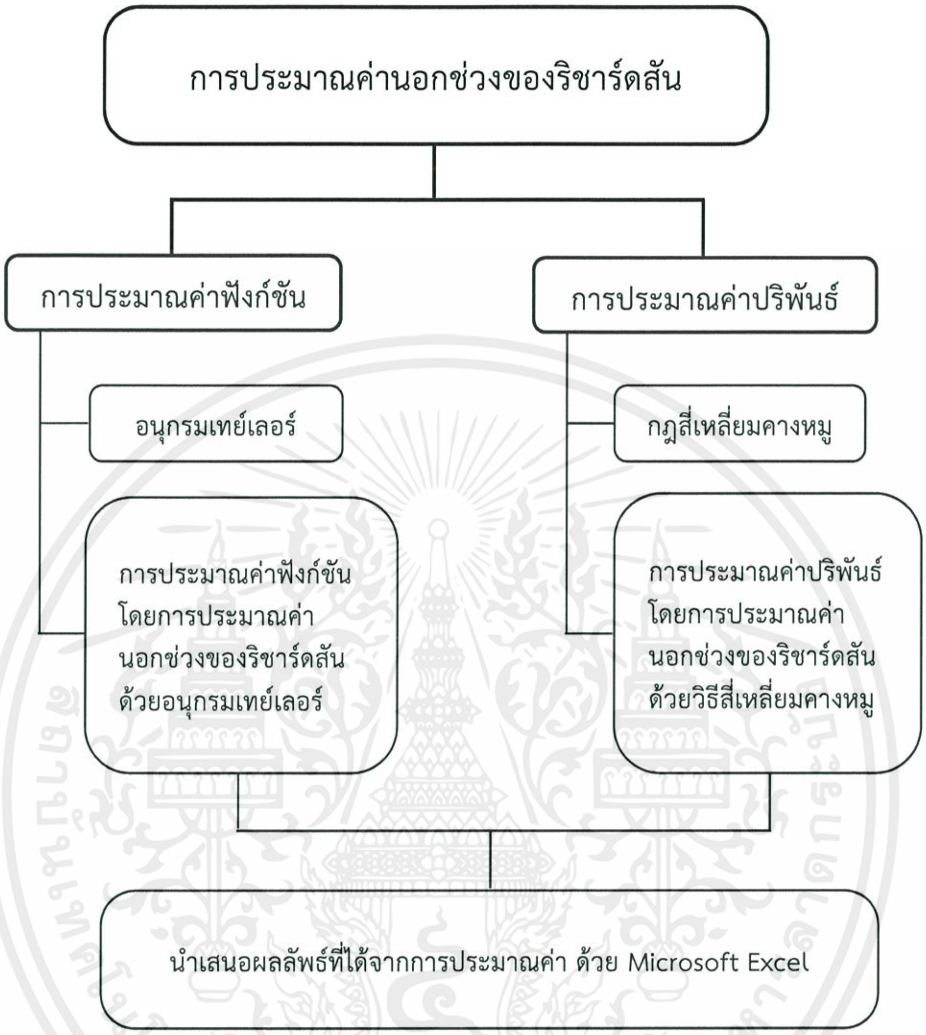
1.5.2 สามารถเพิ่มความรู้ และความเข้าใจ ให้กับผู้ที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน

1.5.3 สำหรับผู้ที่สนใจศึกษาสามารถนำโปรแกรมไปปรับประยุกต์ใช้ และนำไปต่อยอดได้

1.6 แผนการดำเนินการ

ระยะเวลา / การดำเนินงาน	2556						2557		
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1. เสนอหัวข้อโครงงาน	↔								
2. ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องของข้อมูล	↔	↔							
3. ศึกษาวิธีการวิเคราะห์ของข้อมูล		↔	↔						
4. ศึกษาการเขียนโปรแกรม		↔	↔						
5. ทดลองใช้โปรแกรม			↔						
นำเสนอโครงงานปัญหาพิเศษ ครั้งที่ 1				↔					
6. เขียนอัลกอริทึมในการคำนวณด้วย Microsoft Excel				↔	↔				
7. ทดสอบโปรแกรมเพื่อหาข้อผิดพลาดและทำการแก้ไข					↔	↔			
8. จัดทำเอกสารประกอบการทำโครงงานปัญหาพิเศษ					↔	↔	↔	↔	
นำเสนอโครงงานปัญหาพิเศษ ครั้งที่ 2									↔

1.7 แผนภาพแสดงการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน



บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ซึ่งแบ่งออกเป็นการประมาณค่าของฟังก์ชัน และการประมาณค่าของปริพันธ์ ซึ่งจะพิจารณาฟังก์ชันต่อเนื่องที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ C^{∞}

2.1 ฟังก์ชันต่อเนื่องที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ C^{∞}

พิจารณาช่วงเปิดบนเส้นจำนวนจริงและฟังก์ชันค่าจริง f ที่นิยามบนเซตเปิดดังกล่าว ให้ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ฟังก์ชัน f ถูกรียกว่าเป็นของคลาส C^k ถ้าอนุพันธ์ $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ หาค่าได้และมีความต่อเนื่อง มากไปกว่านั้น ฟังก์ชัน f ถูกรียกว่าเป็นของคลาส C^{∞} หรือเป็นฟังก์ชันเรียบ (Smooth Function) ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ทุกอันดับ

ตัวอย่างเช่น คลาส C^0 ประกอบไปด้วยฟังก์ชันต่อเนื่องทั้งหมด และคลาส C^1 ประกอบไปด้วยฟังก์ชันทั้งหมดที่หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์มีความต่อเนื่อง จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันที่เป็นของคลาส C^1 จะเป็นฟังก์ชันของคลาส C^0 ด้วย โดยทั่วไป ฟังก์ชันของคลาส C^k จะอยู่ในคลาส C^{k-1} สำหรับทุก k

2.2 ทฤษฎีค่ากลางแบบถ่วงน้ำหนักปริพันธ์ (Weighted Mean-Value Theorem for Integrals)

ทฤษฎีบท 2.2.1

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $g(x)$ หาปริพันธ์ได้บน $[a,b]$ ซึ่ง $g(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ (หรือ $g(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$) แล้วจะมี ξ อยู่ระหว่าง a กับ b ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> ฟังก์ชัน $f(x) = \sin(x)$ และ $g(x) = x^2$ แทนด้วยสมมุติฐานของทฤษฎีค่ากลางแบบถ่วงน้ำหนักปริพันธ์ บนช่วง $[0, \pi/2]$ จงหาค่า ξ

$$\sin(\xi) = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\, dx}{\int_0^{\pi/2} x^2 dx} = \frac{1.14159}{1.29193} = 0.88363$$

หรือ $\xi = \sin^{-1}(0.88363) = 1.08356$

2.3 Big-Oh

บทนิยาม 2.3.1

$f(n) = O(g(n))$ ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ ที่เป็นค่าบวกสองตัวคือ c และ n_0 ที่ทำให้ $f(n) \le cg(n)$ สำหรับทุกๆ ค่า n เมื่อ $n \ge n_0$

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาค่า Big-Oh ของฟังก์ชันการเติบโตทางเวลา (Upper-bound function) ต่อไปนี้ $f(n) = 100n^2 + 14n - 59$

จะเห็นว่า กรณีถ้า $n \ge 0$ แล้ว ;
ฟังก์ชัน $f(n)$ จะกลายเป็น $f(n) \le 100n^2 + 14n$ $----(1)$
และกรณีถ้า $n \ge 14$ แล้ว ;
ฟังก์ชัน $f(n)$ จะกลายเป็น $14n \le n^2$ $----(2)$
ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ $n_0 = 14$ และ $n \ge n_0$ แล้ว ;
เมื่อนำสมการที่ (2) มาแทนในสมการที่ (1)
จะได้ว่า $f(n) \le 100n^2 + n^2 \le 101n^2$
ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า $f(n) = O(n^2)$ เมื่อ $c = 101$

การตรวจสอบผลการคำนวณค่า Big-Oh

ทฤษฎีอัตราส่วนของ Big-Oh [Big-Oh Ratio Theorem]

กำหนดให้ $f(n)$ และ $g(n)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ที่มีผลลัพธ์ของค่า $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ เป็นค่าคงที่ที่แน่นอนจะสรุปได้ว่า $f(n) = O(g(n))$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \le c$ เมื่อ c คือค่าคงที่ใดๆที่มีขอบเขต (Finite Constant)

ตัวอย่าง 2.5.2 จงตรวจสอบว่า $4n^3 + 11n^2 + 5n = O(n^2)$ จริงหรือไม่

จากโจทย์ จะได้ว่า $f(n) = 4n^3 + 11n^2 + 5n$, $g(n) = n^2$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 11n^2 + 5n}{n^2} = \infty$$

ดังนั้น สามารถสรุปได้ว่า $4n^3 + 11n^2 + 5n = O(n^2)$ ไม่จริง

2.4 การประมาณค่าฟังก์ชัน $\phi(x)$

การประมาณค่า ϕ โดยใช้ค่า h ที่เล็กมากๆ ทำได้โดย ให้ ϕ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ เราจะเรียกอนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\phi(x)=\phi(a)+\phi'(a)(x-a)+\frac{\phi''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{\phi'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{\phi^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4+\cdots$$

ว่าอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ของ ϕ รอบจุด $x=a$
กำหนดให้ ϕ เป็นฟังก์ชันของ h จะได้ว่า

$$\phi(h)=\phi(a)+\phi'(a)(h-a)+\frac{\phi''(a)}{2!}(h-a)^2+\frac{\phi'''(a)}{3!}(h-a)^3+\frac{\phi^{(4)}(a)}{4!}(h-a)^4+\cdots$$

ถ้า $a=0$ จะได้อนุกรมข้างต้นในรูปแบบของ

$$\phi(h)=\phi(0)+\phi'(0)(h)+\frac{\phi''(0)}{2!}(h)^2+\frac{\phi'''(0)}{3!}(h)^3+\frac{\phi^{(4)}(0)}{4!}(h)^4+\cdots$$

และเรียกว่า อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series) ของ ϕ
เมื่อ $h \to 0$ จะได้ว่า $\phi(h)\to\phi(0)$
นั่นคือ $\phi(0):=x_*$ เป็นค่าประมาณของ $\phi(h)$

2.4.1 เทคนิคการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน

เนื่องจาก

$$\phi(h)=\phi(0)+\phi'(0)(h)+\frac{\phi''(0)}{2!}(h)^2+\frac{\phi'''(0)}{3!}(h)^3+\frac{\phi^{(4)}(0)}{4!}(h)^4+\cdots$$

สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\phi(h)=x_*+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+c_4h^4+\cdots$$

เมื่อ $c_1=\phi'(0), c_2=\frac{1}{2!}\phi''(0), c_3=\frac{1}{3!}\phi'''(0), c_4=\frac{1}{4!}\phi^{(4)}(0)$,...
จะได้ว่า x_* เป็นค่าประมาณของ $\phi(h)$ ซึ่งจะมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h)$

เนื่องจาก

$$\phi\left(\frac{h}{2}\right) = x_* + c_1\frac{1}{2}h + c_2\frac{1}{4}h^2 + c_3\frac{1}{8}h^3 + c_4\frac{1}{16}h^4 + \cdots$$

และกำหนดให้

$$\begin{aligned}\psi(h) &:= 2\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \phi(h)\\ &= 2(x_* + c_1\frac{1}{2}h + c_2\frac{1}{4}h^2 + c_3\frac{1}{8}h^3 + c_4\frac{1}{16}h^4 + \cdots) - \left(x_* + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \cdots\right)\\ &= x_* - c_2\frac{1}{2}h^2 - c_3\frac{3}{4}h^3 - c_4\frac{7}{8}h^4 + \cdots\end{aligned}$$

จะได้ว่า x_* เป็นค่าประมาณของ $\psi(h)$ ซึ่ง $\psi(0) = x_* = \phi(0)$ มีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก

$$\psi\left(\frac{h}{2}\right) = x_* - c_2\frac{1}{8}h^2 - c_3\frac{3}{32}h^3 - c_4\frac{7}{128}h^4 + \cdots$$

และกำหนดให้

$$\begin{aligned}\theta(h) &:= \frac{4\psi\left(\frac{h}{2}\right) - \psi(h)}{3}\\ &= \frac{4\left(x_* - c_2\frac{1}{8}h^2 - c_3\frac{3}{32}h^3 - c_4\frac{7}{128}h^4 + \cdots\right) - \left(x_* - c_2\frac{1}{2}h^2 - c_3\frac{3}{4}h^3 - c_4\frac{7}{8}h^4 + \cdots\right)}{3}\\ &= x_* + c_3\frac{1}{8}h^3 + c_4\frac{7}{32}h^4 + \cdots\end{aligned}$$

จะได้ว่า x_* เป็นค่าประมาณของ $\theta(h)$ ซึ่ง $\theta(0) = x_* = \phi(0)$ มีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^3)$

จากการดำเนินการข้างต้น จะมีการปรับค่าให้มีความถูกต้องมากขึ้น หากมีการเพิ่มการคำนวณ ϕ จะทำให้ค่า h ลดลง เพื่อความสะดวก และลดความยุ่งยาก

เขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}R(j,0) &:= \phi(h/2^j), && j \ge 0\\ R(j,k) &:= \frac{2^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{2^k - 1}, && j \ge k \ge 1\end{aligned}$$

จะได้ตารางการคำนวณดังนี้

$$
\begin{array}{ccccc}
R(0,0) & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
O(h^1) & O(h^2) & O(h^3) & O(h^4) &
\end{array}
$$

ตัวอย่าง 2.4.1 กำหนดค่าจริงของ $f(x)=e^{x}$ พิจารณาค่าของ $f'(1)=e=2.71828...$ ด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันถึงอันดับที่ 7

วิธีทำ พิจารณาการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 สำหรับบางฟังก์ชันที่สามารถกระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด α เมื่อ α อยู่ระหว่าง a กับ b

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+hf'(\alpha)+\frac{1}{2}h^{2}f''(\alpha)+\frac{1}{6}h^{3}f'''(\alpha)+...$$

เขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของการประมาณค่า $f'(\alpha)$

$$f'(\alpha)=\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}+O(h)$$

กำหนดให้

$$\phi(h)=\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

จะได้ว่า

$$h=1 \quad : \quad \phi(h)=\frac{e^{1+1}-e^{1}}{1}=4.670774270$$

$$h=1/2 \quad : \quad \phi(h/2)=\frac{e^{1+\frac{1}{2}}-e^{1}}{1/2}=3.526814484$$

$$h=1/4 \quad : \quad \phi(h/4)=\frac{e^{1+\frac{1}{4}}-e^{1}}{1/4}=3.088244516$$

$$h=1/8 \quad : \quad \phi(h/8)=\frac{e^{1+\frac{1}{8}}-e^{1}}{1/8}=2.895480164$$

$$h=1/16 \quad : \quad \phi(h/16)=\frac{e^{1+\frac{1}{16}}-e^{1}}{1/16}=2.805025851$$

$$h=1/32 \quad : \quad \phi(h/32)=\frac{e^{1+\frac{1}{32}}-e^{1}}{1/32}=2.761200889$$

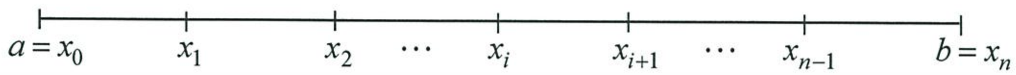
นำค่าประมาณที่ได้มาคำนวณต่อด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน โดยใช้โปรแกรม Excel ช่วยในการคำนวณจะได้ผลลัพธ์ดังตารางต่อไปนี้

h	k \ j	0 $\phi(h)$	1 2^{nd} Round	2 3^{rd} Round	3 4^{th} Round	4 5^{th} Round	5 6^{th} Round	6 7^{th} Round
1	0	4.67077						
1/2	1	3.52681	2.38285					
1/4	2	3.08824	2.64967	2.73861				
1/8	3	2.89548	2.20272	2.72040	2.71779			
1/16	4	2.80503	2.71457	2.71852	2.71826	2.71829		
1/32	5	2.76120	2.71738	2.71831	2.71828	2.71828	2.71828	
1/64	6	2.73963	2.71806	2.71829	2.71828	2.71828	2.71828	2.71828

ดังนั้น ค่าประมาณของ $f'(1)=e$ จากการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันถึงอันดับที่ 7 เท่ากับ 2.71828

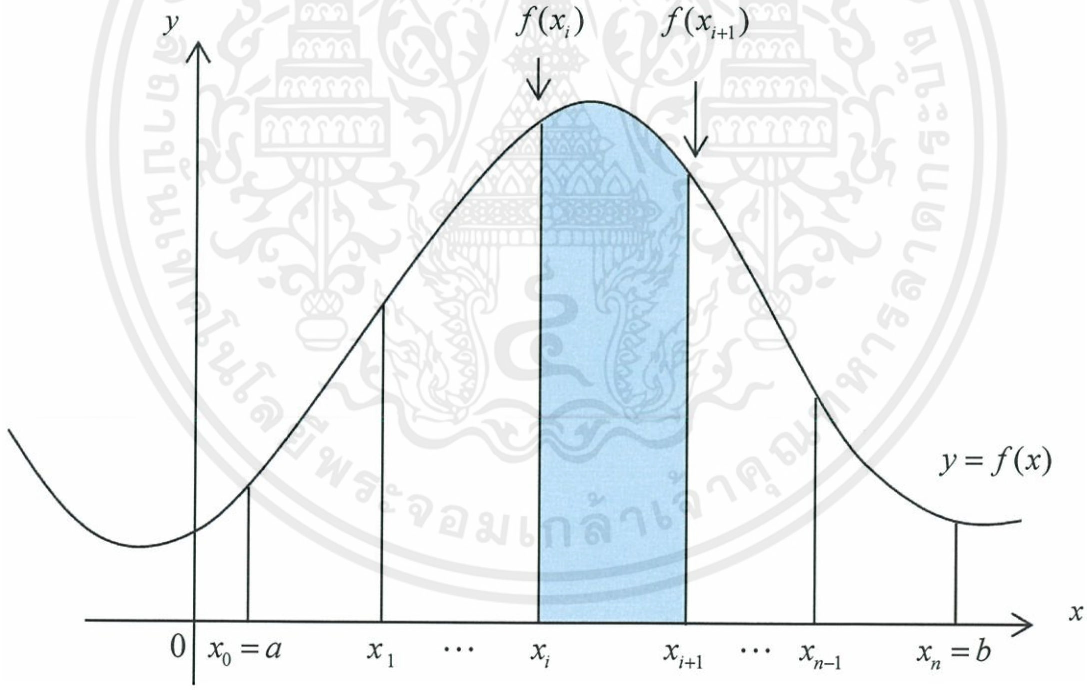
2.5 การประมาณค่าปริพันธ์ $\int_a^b f(x)dx$

กำหนดให้ $h = \dfrac{b-a}{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $x_i = a + ih$ เมื่อ $i = 0,...,n$ นั่นคือ แบ่งช่วง $[a,b]$ เป็นจำนวน n ช่วงย่อยเท่าๆกัน โดยแต่ละช่วงย่อยมีความกว้างเท่ากับ h ดังนี้



โดยสมบัติของปริพันธ์ จะได้

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$



รูปที่ 2.1 ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

สำหรับแต่ละ $i = 0,\ldots,n$ พิจารณา $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ โดยเทคนิคการอินทิเกรททีละส่วน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx &= \int_0^h f(t+x_i)dt \\
&= [(t+A)f(t+x_i)]\Big|_{t=0}^{h} - \int_0^h (t+A)f'(t+x_i)dt \\
&= \left[(t+A)f(t+x_i)\right]\Big|_{t=0}^{h} - \left[\left(\frac{(t+A)^2}{2}+B\right)f'(t+x_i)\right]_{t=0}^{h} \\
&\quad + \int_0^h \left(\frac{(t+A)^2}{2}+B\right)f''(t+x_i)dt \\
&= \left[(h+A)f(h+x_i) - Af(x_i)\right] - \left[\left(\frac{(h+A)^2}{2}+B\right)f'(h+x_i) - \left(\frac{A^2}{2}+B\right)f'(x_i)\right] \\
&\quad + \int_0^h \left(\frac{(t+A)^2}{2}+B\right)f''(t+x_i)dt
\end{aligned}$$

เมื่อ A, B เป็นค่าคงที่

เลือก $A = -h/2$ และ $B = -h^2/8$

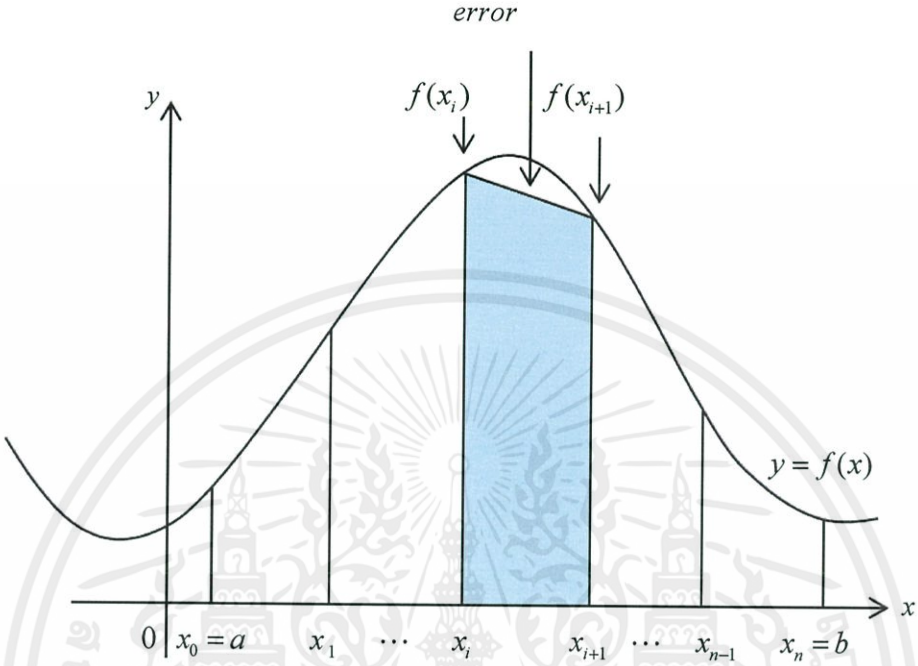
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx &= \left[(h-h/2)f(h+x_i) + \frac{h}{2}f(x_i)\right] \\
&\quad - \left[\left(\frac{(h-h/2)^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)f'(h+x_i) - \left(\frac{(-h/2)^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)f'(x_i)\right] \\
&\quad + \int_0^h \left(\frac{(t-h/2)^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)f''(t+x_i)dt \\
&= \frac{h}{2}\left[f(h+x_i) + f(x_i)\right] + \frac{1}{2}\int_0^h (t^2-ht)f''(t+x_i)dt \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_{i+1}) + f(x_i)\right] + \frac{1}{2}\int_0^h (t^2-ht)f''(t+x_i)dt
\end{aligned}$$

ดังนั้น ประมาณค่าปริพันธ์ได้จากสูตร

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_{i+1}) + f(x_i)\right]$$

จะเห็นว่า $\frac{h}{2}[f(x_{i+1})+f(x_i)]$ เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู จึงเรียกวิธีการประมาณค่าปริพันธ์แบบนี้ว่า **การประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู** (Trapezoidal Rule)



รูปที่ 2.2 การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลาย (Truncation Error)

$$E_T(i) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\left[f(x_{i+1})+f(x_i)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^h (t^2-ht)f''(t+x_i)dt$$

พิจารณา $E_T(i)=\frac{1}{2}\int_0^h (t^2-ht)f''(t+x_i)dt$ ด้วยทฤษฎีค่ากลางแบบถ่วงน้ำหนักปริพันธ์
กำหนดให้ $f(t)=f''(t+x_i)$ และ $g(t)=(t^2-ht)$
เนื่องจาก $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,h]$ และ $g(t)$ หาปริพันธ์ได้บน $[0,h]$ ซึ่ง $g(t)\le 0$ สำหรับทุก $t\in[0,h]$ แล้วจะมี ξ อยู่ระหว่าง 0 กับ h ที่ทำให้

$$E_T(i)=\frac{1}{2}f''(\xi_i)\int_0^h (t^2-ht)dt$$
$$=\frac{1}{2}f''(\xi_i)\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ht^2}{2}\right]_0^h$$
$$=-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

ดังนั้น

$$E_T(i)=-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

ในการประมาณค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายจะประมาณค่า $f''(\xi_i)$ โดยใช้วิธีการหาค่าเฉลี่ย นั่นคือ

$$f''(\xi_i)\approx\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)dx$$

จะได้ว่า

$$E_T(i)\approx-\frac{h^2}{12}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)dx$$

ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\approx\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\cdots+\frac{h}{2}\left[f(x_{i+1})+f(x_i)\right]$$
$$+\cdots+\frac{h}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$
$$=\frac{h}{2}\left[f\left(x_0\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i\right)+f\left(x_n\right)\right]:=I(h)$$

ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป ทำได้โดยการหาผลรวมของค่าคลาดเคลื่อนของแต่ละส่วน

$$E_T:=E_T(1)+E_T(2)+\cdots+E_T(n)$$
$$=-\frac{h^3}{12}f''(\xi_1)-\frac{h^3}{12}f''(\xi_2)-\cdots-\frac{h^3}{12}f''(\xi_n)$$
$$=-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}f''\left(\xi_i\right)$$

เมื่อ $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$

ใช้เป็นค่าประมาณของค่าเฉลี่ย หรือค่าเฉลี่ยอนุพันธ์อันดับสองของทุกๆ ส่วนจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E_T &\approx -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)dx \\
&= -\frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_1} f''(x)dx + \frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_2} f''(x)dx + \ldots + \frac{1}{h}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f''(x)dx\right) \\
&= -\frac{h^3}{12}\left[\frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_1} f''(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f''(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f''(x)dx\right)\right] \\
&= -\frac{h^2}{12}\left(\int_{x_0}^{x_1} f''(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f''(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f''(x)dx\right) \\
&= -\frac{h^2}{12}\int_{x_0}^{x_n} f''(x)dx
\end{aligned}
$$

เมื่อ $x_0 = a,\ x_n = b$ จะได้ว่า

$$E_T \approx -\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

2.5.1 เทคนิคการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน

วิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน เป็นเทคนิคการหาค่าปริพันธ์โดยใช้ค่าประมาณ 2 ค่า เพื่อให้ได้การประมาณที่ถูกต้องมากขึ้น โดยค่าผลลัพธ์ที่ได้แต่ละค่าจะใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู หรือวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป ซึ่งพิจารณา

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + E_T(h)$$

เมื่อ $h = (b-a)/n$

$I(h)$ เป็นค่าการหาค่าปริพันธ์โดยประมาณด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู หรือ วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูปที่มีจำนวน n ส่วน

$E_T(h)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย

กำหนดให้ h_j สำหรับทุก $j = 0,1,2,\ldots$ ที่ทำให้

$$I(h_j) + E_T(h_j) = I(h_{j+1}) + E_T(h_{j+1})$$

เนื่องจาก

$$E_T(h_j) \approx -\frac{h_j^2}{12}\int_a^b f''(x)dx \qquad \text{และ} \qquad E_T(h_{j+1}) \approx -\frac{h_{j+1}^2}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

ดังนั้น

$$E_T(h_j) \approx -\frac{h_j^2}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

$$= \left(\frac{h_{j+1}^2}{h_{j+1}^2}\right)\left(-\frac{h_j^2}{12}\int_a^b f''(x)dx\right)$$
$$= \left(\frac{h_j^2}{h_{j+1}^2}\right)\left(-\frac{h_{j+1}^2}{12}\int_a^b f''(x)dx\right)$$
$$= \left(\frac{h_j}{h_{j+1}}\right)^2 E_T(h_{j+1})$$

จะได้ว่า

$$I(h_{j+1}) + E_T(h_{j+1}) = I(h_j) + E_T(h_j) \approx I(h_j) + \left(\frac{h_j}{h_{j+1}}\right)^2 E_T(h_{j+1})$$
$$E_T(h_{j+1}) \approx \frac{I(h_{j+1}) - I(h_j)}{\left(h_j / h_{j+1}\right)^2 - 1}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = I(h_{j+1}) + E_T(h_{j+1}) \approx I(h_{j+1}) + \frac{I(h_{j+1}) - I(h_j)}{\left(h_j / h_{j+1}\right)^2 - 1}$$
$$= \frac{\left(h_j / h_{j+1}\right)^2 I(h_{j+1}) - I(h_j)}{\left(h_j / h_{j+1}\right)^2 - 1} := I_{j+1}$$

สำหรับ $j = 0,1,2,\ldots$

กำหนดให้ $h_{j+1} = \frac{h_j}{2}$ จะได้ว่า $$I_{j+1} = \frac{2^2 I(h_{j+1}) - I(h_j)}{2^2 - 1}$$

เขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้

$$R(j,0) := I(h/2^j), \qquad j \ge 0$$
$$R(j,k) := \frac{4^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^k - 1}, \qquad j \ge k \ge 1$$

จะได้ตารางการคำนวณดังนี้

$$\begin{array}{ccccc}
R(0,0) & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
O(h^2) & O(h^4) & O(h^6) & O(h^8) &
\end{array}$$

<u>ตัวอย่าง 2.5.1</u> กำหนด $f(x)=0.25+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$
พิจารณาค่าปริพันธ์ $\int_0^{0.8} f(x)dx$ โดยใช้วิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันถึงอันดับ 4 โดยมีค่าปริพันธ์จริงคือ 1.6805

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากต้องการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีการกระจายของริชาร์ดสันถึงอันดับ 4 จะต้องใช้ข้อมูลทั้งหมด 4 ชุด นั่นคือจะต้องแบ่งช่วง $[0,0.8]$ เป็นส่วนย่อยต่างๆ คือ $1,2,4$ และ 8 ตามลำดับ โดยแต่ละส่วนย่อยคำนวณจากวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

อันดับ 1 : จากสูตร
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right] := I(h/2^j)$$
$$= R(j,0), \qquad j=0,1,2,3$$

$$f(0)=0.25+25(0)-200(0)^2+675(0)^3-900(0)^4+400(0)^5=0.25$$
$$f(0.1)=0.25+25(0.1)-200(0.1)^2+675(0.1)^3-900(0.1)^4+400(0.1)^5=1.339$$
$$f(0.2)=0.25+25(0.2)-200(0.2)^2+675(0.2)^3-900(0.2)^4+400(0.2)^5=1.338$$
$$f(0.3)=0.25+25(0.3)-200(0.3)^2+675(0.3)^3-900(0.3)^4+400(0.3)^5=1.657$$
$$f(0.4)=0.25+25(0.4)-200(0.4)^2+675(0.4)^3-900(0.4)^4+400(0.4)^5=2.506$$
$$f(0.5)=0.25+25(0.5)-200(0.5)^2+675(0.5)^3-900(0.5)^4+400(0.5)^5=3.375$$
$$f(0.6)=0.25+25(0.6)-200(0.6)^2+675(0.6)^3-900(0.6)^4+400(0.6)^5=3.514$$
$$f(0.7)=0.25+25(0.7)-200(0.7)^2+675(0.7)^3-900(0.7)^4+400(0.7)^5=2.413$$
$$f(0.8)=0.25+25(0.8)-200(0.8)^2+675(0.8)^3-900(0.8)^4+400(0.8)^5=0.282$$

จะได้ว่า เมื่อ

$$h=0.8 \quad : \quad I(0.8)=\frac{0.8}{2}\left[f(0)+f(0.8)\right]=0.4(0.25+0.282)$$
$$=0.2128=R(0,0)$$
$$h=0.4 \quad : \quad I(0.4)=\frac{0.4}{2}\left[f(0)+2\big(f(0.4)\big)+f(0.8)\right]=0.2\left[0.25+2(2.506)+0.282\right]$$
$$=1.1088=R(1,0)$$
$$h=0.2 \quad : \quad I(0.2)=\frac{0.2}{2}\left[f(0)+2\big(f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)\big)+f(0.8)\right]$$
$$=0.2\left[0.25+2(1.338+2.506+3.514)+0.282\right]$$
$$=1.5248=R(2,0)$$

$$h = 0.1 \quad : \quad I(0.1) = \frac{0.1}{2}\Big[f(0) + 2\big(f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(0.6) + f(0.7)\big) + f(0.8)\Big]$$
$$= 0.2\big[0.25 + 2(1.339 + 1.338 + \cdots + 3.514 + 2.413) + 0.282\big]$$
$$= 1.6408 = R(3,0)$$

อันดับ 2 : นำค่าที่ได้มาคำนวณด้วยการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ได้ดังนี้

$$R(1,1) = \frac{4^1 R(1,0) - R(0,0)}{4^1 - 1} = \frac{4(1.1088) - 0.2128}{3} = 1.4075$$
$$R(2,1) = \frac{4^1 R(2,0) - R(1,0)}{4^1 - 1} = \frac{4(1.5248) - 1.1088}{3} = 1.6635$$
$$R(3,1) = \frac{4^1 R(2,0) - R(1,0)}{4^1 - 1} = \frac{4(1.6408) - 1.5248}{3} = 1.6795$$

อันดับ 3 : นำค่าที่ได้มาคำนวณด้วยการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ได้ดังนี้

$$R(2,2) = \frac{4^2 R(2,1) - R(1,1)}{4^2 - 1} = \frac{16(1.6635) - 1.4075}{15} = 1.6805$$
$$R(3,2) = \frac{4^2 R(3,1) - R(2,1)}{4^2 - 1} = \frac{16(1.6795) - 1.6635}{15} = 1.6805$$

อันดับ 4 : นำค่าที่ได้มาคำนวณด้วยการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ได้ดังนี้

$$R(3,3) = \frac{4^3 R(3,2) - R(2,2)}{4^3 - 1} = \frac{64(1.6805) - 1.6805}{63} = 1.6805$$

ผลลัพธ์จากการคำนวณจะแสดงดังตารางต่อไปนี้

h	n	k / j	0 1^{st} *Round*	1 2^{nd} *Round*	2 3^{rd} *Round*	3 4^{th} *Round*
0.8	1	0	0.2128			
0.4	2	1	1.1088	1.4075		
0.2	4	2	1.5248	1.6635	1.6805	
0.1	8	3	1.6408	1.6795	1.6805	1.6805

ดังนั้น จะได้ค่าประมาณของปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน อันดับ 4 คือ 1.6805

2.6 โปรแกรม Microsoft Excel 2010

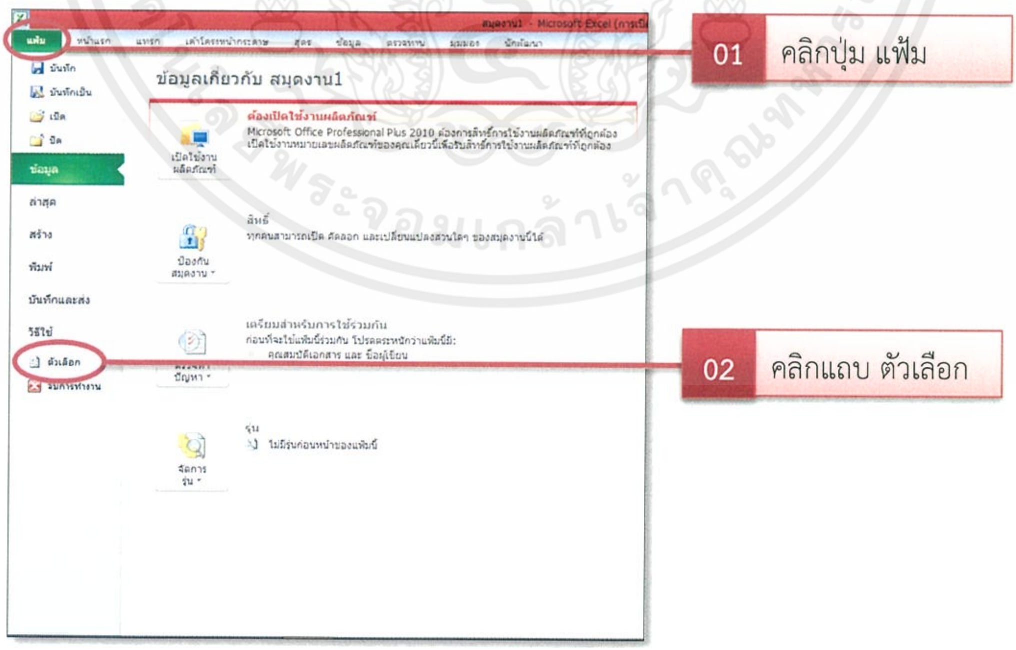
Microsoft Excel เป็นโปรแกรมที่มีจุดเด่นสำหรับงานด้านวิเคราะห์ และประมวลผลกลุ่มของข้อมูลจำนวนมาก รวมทั้งงานด้านการคำนวณที่ซับซ้อน ทั้งในด้านการเงิน บัญชี วิศวกรรม การวางแผนการผลิต และวิทยาศาสตร์ ซึ่งในโปรแกรม Microsoft Excel มีเครื่องมือสำเร็จรูปทำให้สร้างผลลัพธ์ตามที่ต้องการได้อย่างรวดเร็ว

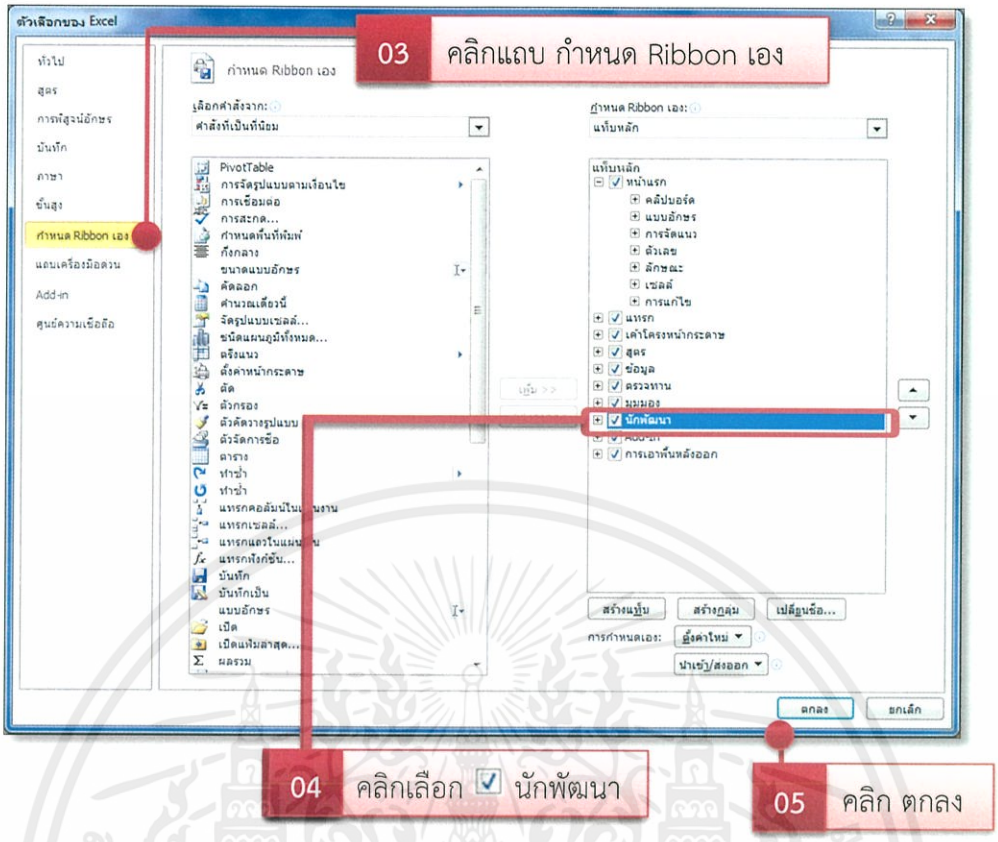
Macro เป็นอีกหนึ่งเครื่องมือใน Excel โดยเราสามารถกำหนดให้ Excel ทำงานที่เราต้องทำอยู่เป็นประจำให้เป็นไปอย่างอัตโนมัติ เช่น การจัดรูปแบบของเซล การจัดรูปแบบของกลุ่มข้อมูล การสร้างสูตรสำหรับการประมวลผล โดยเพียงแค่บันทึกขั้นตอนการทำงานจนเสร็จและเก็บ Macro นั้นลงในไฟล์ Excel เมื่อเรียกใช้งาน Macro ดังกล่าว Excel จะทำงานตามที่ได้บันทึกไว้อย่างอัตโนมัติ

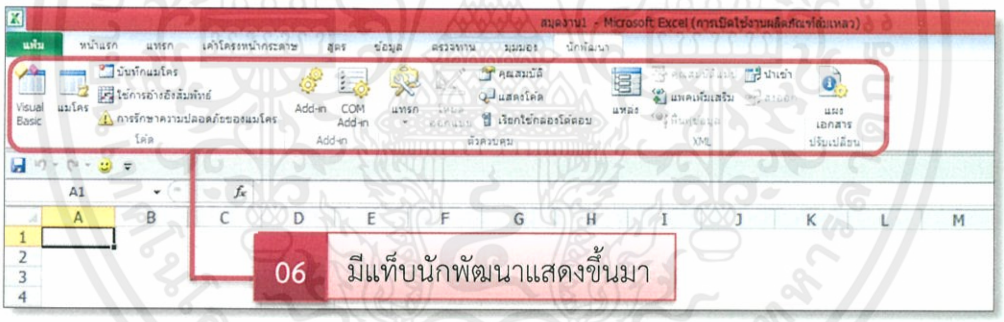
นอกจากการบันทึก Macro ที่ทำให้ Excel ทำงานอัตโนมัติแล้วยังสามารถเขียนโปรแกรมภาษา VBA (Visual Basic for Applications) ซึ่งมีโครงสร้างเช่นเดียวกับภาษา Visual Basic การเขียนโปรแกรมด้วยภาษา VBA ใน Excel มีข้อดีกว่าการบันทึก Macro ให้ทำงานตามที่ต้องการ เพราะ Macro ไม่สามารถสร้างระบบงานบางอย่างได้ แต่การเขียนโค้ด VBA สามารถทำได้ เช่น การทำให้ Excel ทำงานซ้ำๆ มากกว่าหนึ่งครั้ง การสั่งให้ Excel ทำงานตามเงื่อนไขที่เกิดขึ้น การเชื่อมต่อฐานข้อมูลโดยมีเงื่อนไขในการค้นหาข้อมูล การสร้างเมนูเพิ่มขึ้นใน Excel และการสร้างระบบงานใน Excel ที่เหมือนโปรแกรมสำเร็จรูป

การตั้งค่าให้ Microsoft Excel สามารถใช้งาน Macro และ VBA

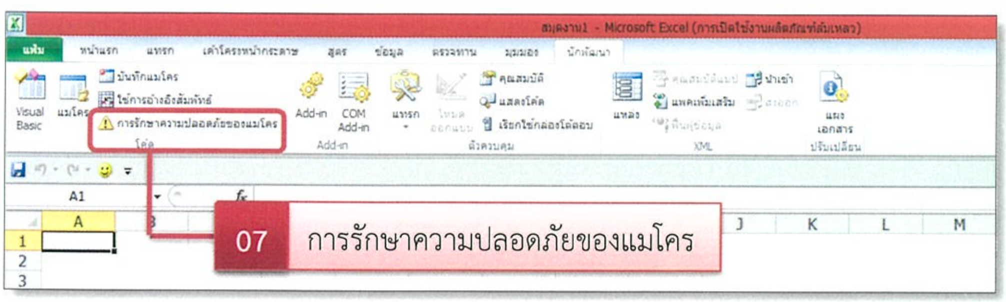
โดยปกติแล้วหลังจากติดตั้งชุดโปรแกรม Microsoft Office ใน Excel จะยังไม่สามารถใช้งาน Macro และ VBA ได้ เราต้องทำการปรับแต่งคุณลักษณะ Excel เพื่อให้สามารถใช้งาน Macro และ VBA ได้ โดยมีขั้นตอนดังนี้

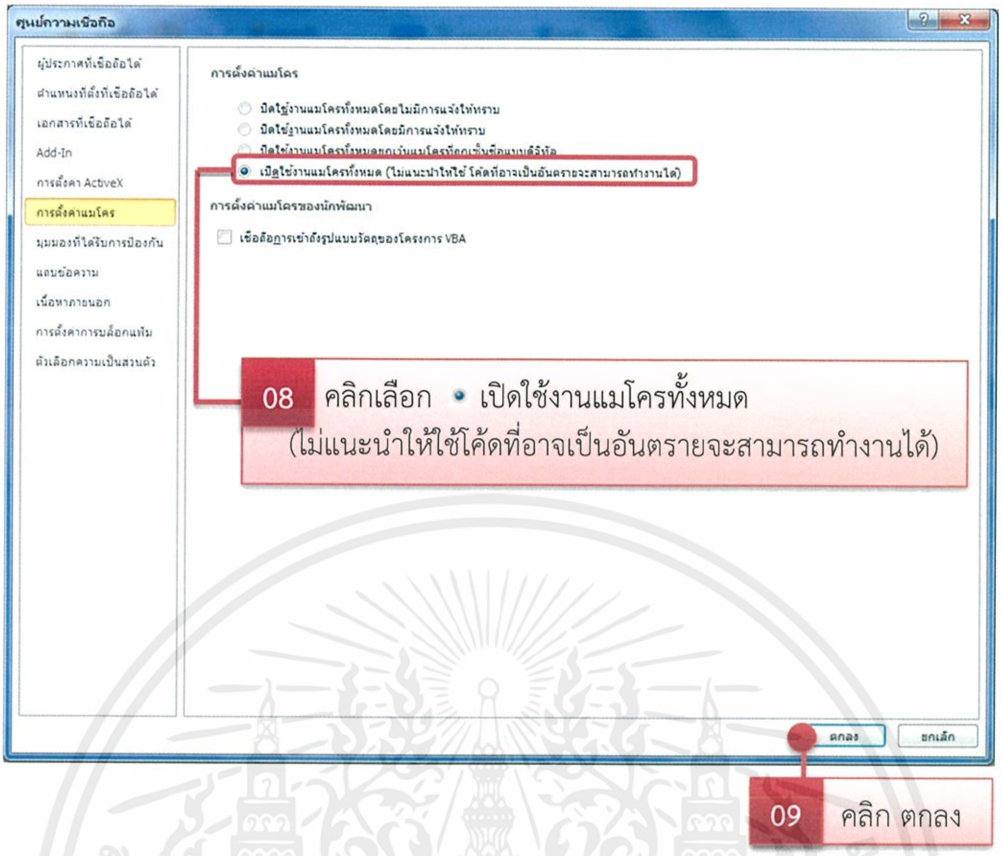






หลังจากติดตั้งแท็บ นักพัฒนา เราต้องปรับระดับการรักษาความปลอดภัยของ Macro ใน Excel เพื่อให้อยู่ในระดับที่สามารถใช้งาน Macro และ VBA ได้ โดยมีหลักการดังนี้





■ สาเหตุที่ Excel ไม่กำหนดค่าเริ่มต้นให้เปิดใช้งานแมโครทั้งหมด เนื่องจากไวรัสคอมพิวเตอร์บางชนิด ถูกสร้างด้วยการเขียนโค้ด VBA ผู้ใช้งานจึงต้องเป็นผู้อนุญาตให้ใช้งาน Macro แต่ละอันได้หรือไม่

วิธีการบันทึกไฟล์ Excel ที่มี Macro หรือ VBA

- Excel Workbook : บันทึกไฟล์นามสกุล xlsx สำหรับไฟล์ Excel ที่ไม่มี Macro หรือ VBA
- Excel Macro-Enabled Workbook : บันทึกเป็นไฟล์นามสกุล xlsm สำหรับไฟล์ Excel ที่มี Macro และ VBA

ถ้ามีการสร้าง Macro จะต้องบันทึกไฟล์ Excel เป็นชนิด xlsm ถ้าบันทึกไฟล์เป็นชนิด xlsx การบันทึกครั้งนั้นจะไม่เก็บ Macro หรือ VBA ที่เราสร้างขึ้น

เริ่มต้นพื้นฐาน VBA

VBA (Visual Basic for Applications) เป็นภาษาที่ใช้สำหรับการเขียนโปรแกรมควบคุมการทำงานของโปรแกรม Microsoft Office โครงสร้างของภาษาเหมือนกับ Visual Basic แต่มีส่วนเพิ่มเติมในวิธีการอ้างถึงองค์ประกอบในโปรแกรม Microsoft Office โดยในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะในส่วนของ Microsoft Excel เท่านั้น

องค์ประกอบพื้นฐานของการเขียนโปรแกรมใน Excel

ก่อนที่จะเริ่มต้นเขียนโปรแกรมใน Excel เราควรรู้จักองค์ประกอบของ Excel ก่อน เพื่อให้สามารถเขียนคำสั่งควบคุมส่วนต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งมีส่วนสำคัญที่ควรรู้จักดังนี้

1. **Workbook** เป็นส่วนที่ใหญ่ที่สุด ไว้สำหรับเก็บข้อมูลในไฟล์ทั้งหมดภายในจะประกอบไปด้วย Worksheet ต่างๆ
2. **Worksheet** เป็นแผ่นงานที่มีลักษณะเป็นเหมือนตารางที่มีแถวและคอลัมน์ตัดกัน ซึ่งส่วนที่ตัดกันเป็นช่องๆไว้สำหรับป้อนข้อมูลเรียกว่าเซล
3. **Modules** เป็นส่วนที่ไว้สำหรับเก็บคำสั่ง รหัส รวมทั้ง Macro ต่างๆที่บันทึกไว้ เพื่อให้สามารถเรียกขึ้นมาใช้ได้ภายหลัง

ตัวดำเนินการ (Operators)

ตัวดำเนินการ ก็คือเครื่องหมายที่ใช้สำหรับการประมวลผลตัวแปรชนิดต่างๆ แบ่งออกได้ดังนี้

<table>
<tr><th colspan="4">ตัวดำเนินการของข้อมูลชนิดตัวเลข</th><th rowspan="2">ตัว ดำเนินการ ของข้อมูล ประเภท String</th><th rowspan="2" colspan="2">ตัวดำเนินการของข้อมูล ประเภท Boolean</th></tr>
<tr><th colspan="2">ตัวดำเนินการ ด้านการคำนวณ</th><th colspan="2">ตัวดำเนินการด้านการ เปรียบเทียบ</th></tr>
<tr><td>+</td><td>บวก</td><td>></td><td>มากกว่า</td><td rowspan="7">&
(ใช้สำหรับ การนำอักษร หรือข้อความ เชื่อมต่อกัน)</td><td>And</td><td>จริงเมื่อทั้ง 2 เงื่อนไขจริง</td></tr>
<tr><td>-</td><td>ลบ</td><td><</td><td>น้อยกว่า</td><td>Or</td><td>เท็จเมื่อทั้ง 2 เงื่อนไขเท็จ</td></tr>
<tr><td>*</td><td>คูณ</td><td>>=</td><td>มากกว่าหรือเท่ากับ</td><td>Not</td><td>ให้ค่าตรงกันข้ามกับเงื่อนไขแรก</td></tr>
<tr><td>/</td><td>หาร</td><td><=</td><td>น้อยกว่าหรือเท่ากับ</td><td>Xor</td><td>จริงเมื่อทั้ง 2 เงื่อนไข ต่างกัน</td></tr>
<tr><td>\</td><td>หารเอาจำนวนเต็ม</td><td>=</td><td>เท่ากับ</td><td>Eqv</td><td>จริงเมื่อทั้ง 2 เงื่อนไขเหมือนกัน</td></tr>
<tr><td>^</td><td>ยกกำลัง</td><td><></td><td>ไม่เท่ากับ</td><td>Imp</td><td>เท็จเมื่อเงื่อนไขหน้าจริงหลังเท็จ</td></tr>
<tr><td>mod</td><td>หารเอาค่าเศษ</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

บทที่ 3

ขั้นตอนการดำเนินงาน

การประมาณค่า π ด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน สามารถแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 วิธีได้แก่

1. การประมาณค่าฟังก์ชัน
2. การประมาณค่าปริพันธ์

3.1 การประมาณค่าฟังก์ชัน

จากงานวิจัยของ Eric Hung-Lin Liu, Fundamental Methods of Numerical Extrapolation With Applications. กล่าวว่า

เจมส์ สเตอลิง (James Stirling) ได้ค้นพบวิธีที่ดีที่สุดในการประมาณค่าแฟกทอเรียลที่มีขนาดใหญ่ โดยสูตรของสเตอลิง เขียนอยู่ในรูปของ

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$$

หรือ

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

และจะได้สูตรของการประมาณค่า $n!$ คือ

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

สามารถหาความสัมพันธ์ก่อนหน้าได้จาก

$$n! = W(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

เมื่อ $$W(n) = \sum_{y=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right) + \prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right), \qquad n = 2,4,8,\ldots$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปการกระจายเทย์เลอร์ของ e^x โดยที่ $W(n)$ มีค่าเข้าใกล้ $\sqrt{2\pi n}$

กำหนดให้

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$n! = W(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ดังนั้น

$$\sqrt{2\pi n} \approx W(n)$$

จะได้ว่า

$$\pi \approx \frac{(W(n))^2}{2n} := \phi\left(h/2^j\right), \qquad j = 0,1,2,\ldots$$

ให้ $$\phi(n) := \frac{(W(n))^2}{2n} \qquad \text{เมื่อ } n = 2,4,8,\ldots$$

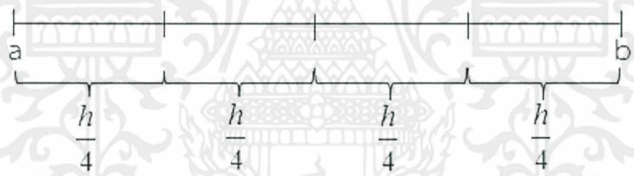
และกำหนดให้จำนวนช่อง คือ

$$n_h = 2^{j+1}, \quad j = 0,1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{2^{j+1}}$$

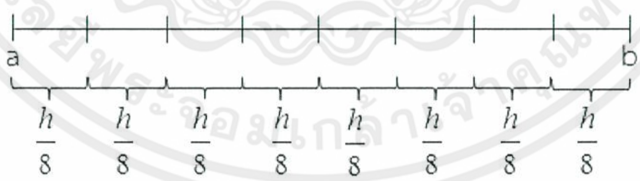
นั่นคือ ความกว้างของแต่ละช่องเป็น $\dfrac{h}{2^{j+1}}$ เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{n}$

เช่น $j = 0 \;:\; n_h = 2^1 = 2 \Rightarrow \dfrac{h}{2^1} = \dfrac{h}{2}$

$j = 1 \;:\; n_h = 2^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{h}{2^2} = \dfrac{h}{4}$



$j = 2 \;:\; n_h = 2^3 = 8 \Rightarrow \dfrac{h}{2^3} = \dfrac{h}{8}$



$$\vdots$$

นั่นคือ

$$n = 2^1 \Rightarrow \phi\left(2^1\right) := \phi\left(h/2\right)$$
$$n = 2^2 \Rightarrow \phi\left(2^2\right) := \phi\left(h/2^2\right)$$
$$n = 2^3 \Rightarrow \phi\left(2^3\right) := \phi\left(h/2^3\right)$$
$$\vdots$$
$$n = 2^{j+1} \Rightarrow \phi\left(2^{j+1}\right) := \phi\left(h/2^{j+1}\right)$$

จะทำการประมาณค่าของ π และจะนำค่าประมาณที่ได้ไปทำการประมาณต่อโดยใช้การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันดังสูตรต่อไปนี้

$$R(j,0) := \phi(h/2^{j+1}), \qquad j \ge 0$$
$$R(j,k) := \frac{2^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{2^k - 1}, \qquad j \ge k \ge 1$$

พิจารณาที่ $R(j,0)$, $j \ge 0$

$$j=0 \; ; \; R(0,0) = \phi\left(h/2^1\right) = \phi\left(2^1\right) = \phi(2)$$
$$j=1 \; ; \; R(1,0) = \phi\left(h/2^2\right) = \phi\left(2^2\right) = \phi(4)$$
$$j=2 \; ; \; R(2,0) = \phi\left(h/2^3\right) = \phi\left(2^3\right) = \phi(8)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$R(j,0) = \phi\left(h/2^{j+1}\right) = \phi\left(2^{j+1}\right)$$

พิจารณาที่ $R(j,k)$, $j \ge k \ge 1$

$$j=1, k=1 \; ; \; R(1,1) = \frac{2^1 R(1,0) - R(0,0)}{2^1 - 1}$$
$$j=2, k=1 \; ; \; R(2,1) = \frac{2^1 R(2,0) - R(1,0)}{2^1 - 1}$$
$$j=2, k=2 \; ; \; R(2,2) = \frac{2^2 R(2,1) - R(1,1)}{2^2 - 1}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$R(j,k) = \frac{2^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{2^k - 1}$$

จะได้ตารางการคำนวณดังนี้

$$\begin{array}{ccccc}
R(0,0) & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array}$$

3.2 การประมาณค่าปริพันธ์

จากงานวิจัยของ S.K. Lucas, Integral approximations to π with nonnegative integrands, Department of Mathematics and Statistics. (2007) กล่าวว่า

เนื่องจาก

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^6 dx - \int_0^1 4x^5 dx + \int_0^1 5x^4 dx - \int_0^1 4x^2 dx + \int_0^1 4dx - 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 - \left.\frac{4x^6}{6}\right|_0^1 + \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 - \left.\frac{5x^5}{5}\right|_0^1 + 4x\Big|_0^1 - 4\left(\arctan\ x\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4(\arctan 1 - \arctan 0)$$

$$= \frac{22}{7} - 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{22}{7} - \pi$$

ดังนั้น

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$$

ให้

$$I\left(h/2^j\right) \approx \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx, \qquad j = 0,1,2,\ldots$$

จะใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูในการประมาณค่าปริพันธ์ โดยมีสูตรคือ

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

จากนั้นจะนำค่าที่ได้ไปทำการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันโดยมีสูตรคือ

$$R(j,0) := I(h/2^j), \qquad j \ge 0$$

$$R(j,k) := \frac{4^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^k - 1}, \qquad j \ge k \ge 1$$

พิจารณาที่ $R(j,0)$, $j \ge 0$

$$j=0\ ;\ R(0,0)=I(h/2^0)=I(h)=\frac{22}{7}-\frac{h}{2\cdot 2^0}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$j=1\ ;\ R(1,0)=I(h/2^1)=I(h/2)=\frac{22}{7}-\frac{h}{2\cdot 2^1}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$j=2\ ;\ R(2,0)=I(h/2^2)=I(h/4)=\frac{22}{7}-\frac{h}{2\cdot 2^2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$j=3\ ;\ R(3,0)=I(h/2^3)=I(h/8)=\frac{22}{7}-\frac{h}{2\cdot 2^3}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R(j,0)=I(h/2^j)=\frac{22}{7}-\frac{h}{2\cdot 2^j}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right],\ j\ge 0$$

พิจารณาที่ $R(j,k)$, $j \ge k \ge 1$

$$j=1,k=1\ ;R(1,1)=\frac{4R(1,0)-R(0,0)}{4-1}$$

$$j=2,k=1\ ;R(2,1)=\frac{4^1R(2,0)-R(1,0)}{4^1-1}$$

$$j=2,k=2\ ;R(2,2)=\frac{4^2R(2,1)-R(1,1)}{4^2-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R(j,k):=\frac{4^kR(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^k-1} \quad ,\ j\ge k\ge 1$$

จะได้ตารางการคำนวณดังนี้

$$\begin{array}{ccccc}
R(0,0) & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array}$$

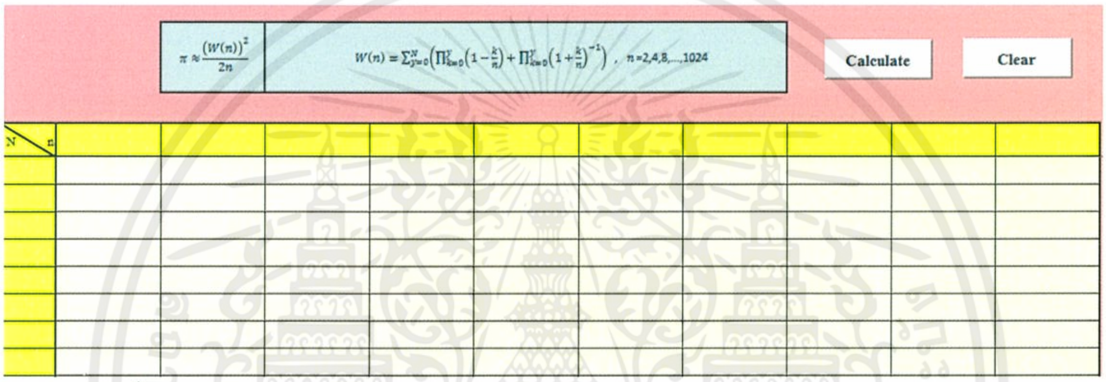
3.3 โปรแกรมการคำนวณ

3.3.1 วิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยวิธีการประมาณค่าฟังก์ชัน

1) เข้าสู่โปรแกรม

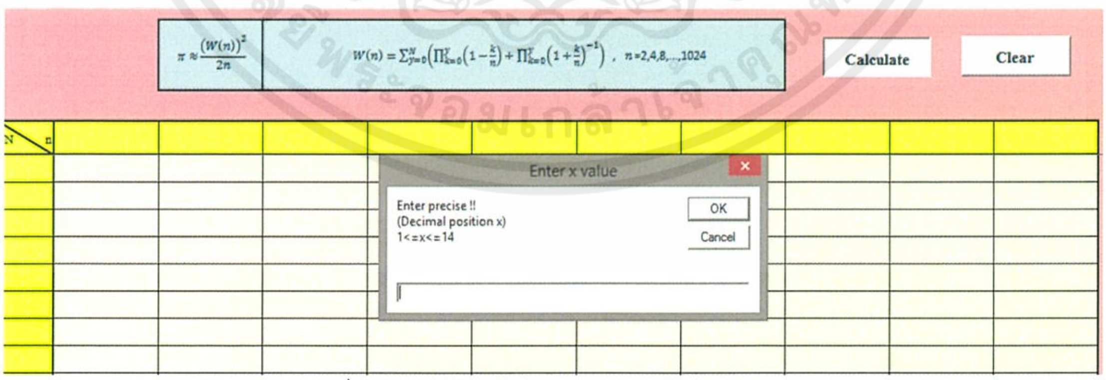
เมื่อเริ่มเข้าสู่โปรแกรมในหน้าแรกของโปรแกรมจะแสดงรายละเอียดดังนี้

- สูตรการหาค่า π
- ปุ่ม Calculate เพื่อคำนวณค่า $W(n)$ เมื่อคลิกปุ่มนี้จะมีกล่องข้อความให้กรอกจำนวนทศนิยมที่ต้องการ ดังรูปที่ 3.2
- ตารางแสดงผลการคำนวณค่า $W(n)$
- ปุ่ม Clear เพื่อลบผลการคำนวณ



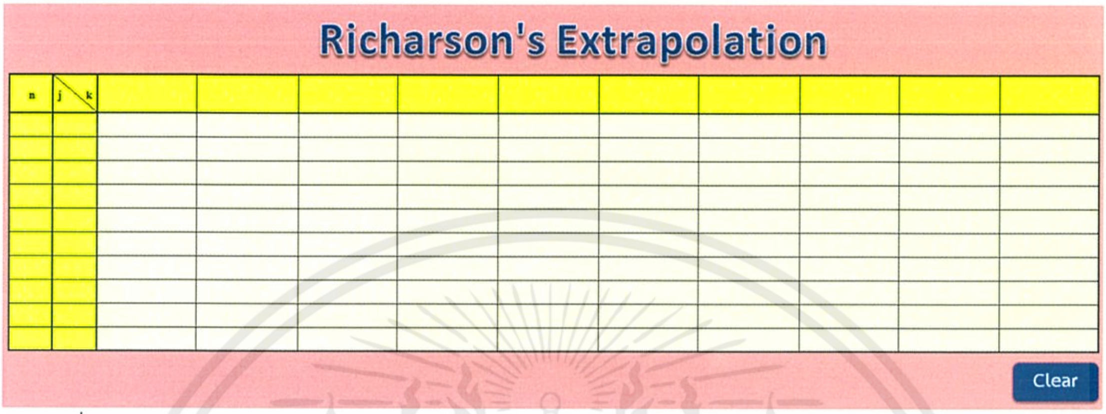
รูปที่ 3.1 หน้าแรกของโปรแกรมการคำนวณวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ด้วยวิธีการประมาณค่าฟังก์ชัน

2) กดปุ่ม Calculate แล้วกรอกจำนวนทศนิยมของคำตอบที่ต้องการทราบ และกด OK เพื่อแสดงผลการคำนวณค่า $W(n)$ และค่า π



รูปที่ 3.2 การกรอกจำนวนทศนิยมของคำตอบ

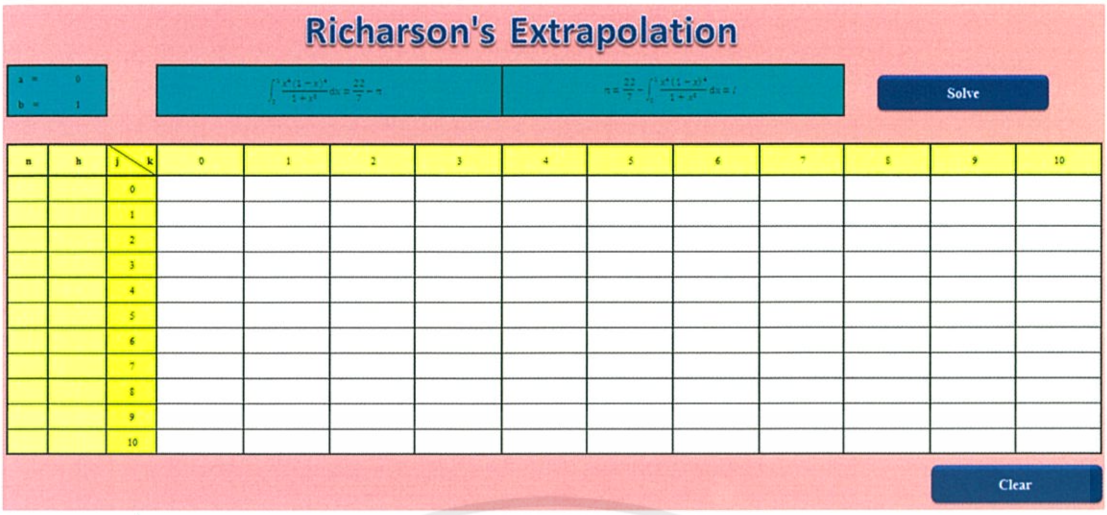
3) แสดงผลการคำนวณค่า π โดยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน
เมื่อเข้าสู่หน้าแสดงผลการคำนวณค่า π จะแสดงรายละเอียดดังนี้
- ชื่อตาราง Richardson’s Extrapolation
- ตารางแสดงผลการคำนวณค่า π
- ปุ่ม Clear เพื่อลบผลการคำนวณ



รูปที่ 3.3 การคำนวณค่า π โดยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยวิธีการประมาณค่าฟังก์ชัน

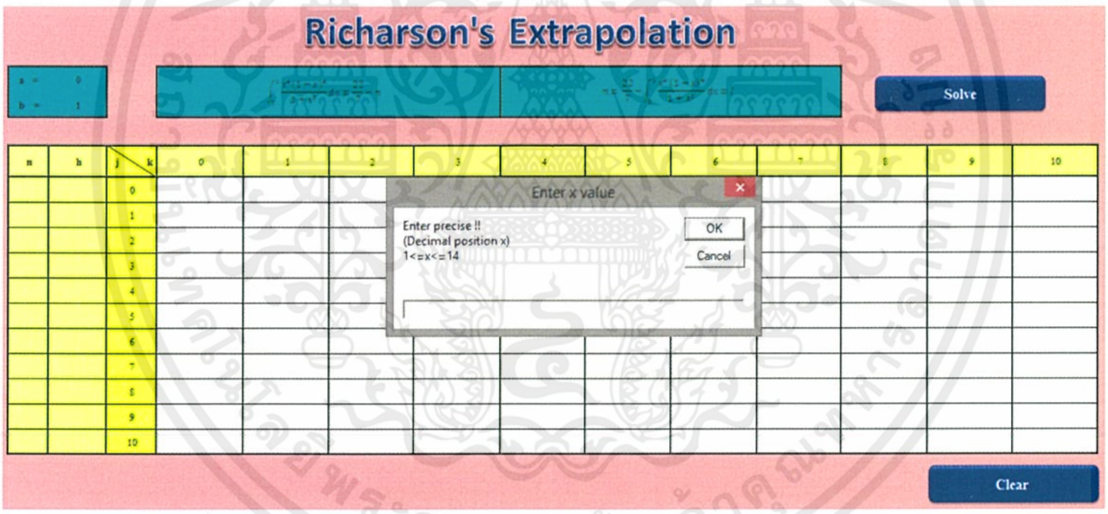
3.3.2 วิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยวิธีการประมาณค่าปริพันธ์

1) เข้าสู่โปรแกรม
เมื่อเริ่มเข้าสู่โปรแกรมในหน้าแรกของโปรแกรมจะแสดงรายละเอียดดังนี้
- ชื่อตาราง Richardson’s Extrapolation
- สูตรการหาค่า π
- ช่องสำหรับกรอกช่วงในการคำนวณ
- ปุ่ม Solve เพื่อคำนวณค่า π เมื่อกดปุ่มนี้จะมีกล่องข้อความให้กรอกจำนวนทศนิยมที่ต้องการ ดังรูปที่ 3.5
- ตารางแสดงผลการคำนวณค่า π
- ปุ่ม Clear เพื่อลบผลการคำนวณ



รูปที่ 3.4 หน้าแรกของโปรแกรมการคำนวณวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ด้วยวิธีการประมาณค่าปริพันธ์

2) กดปุ่ม Solve แล้วกรอกจำนวนทศนิยมของคำตอบที่ต้องการทราบ และกด OK เพื่อแสดงผลการคำนวณค่า π



รูปที่ 3.5 การคำนวณค่า π โดยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ด้วยวิธีการประมาณค่าปริพันธ์

บทที่ 4

ผลการศึกษา

จากการศึกษาการประมาณค่า π ด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน สามารถแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 วิธีดังนี้

4.1 การประมาณค่าฟังก์ชัน

ประมาณค่า π ได้จาก

$$\pi \approx \frac{\left(W(n)\right)^2}{2n} := \phi\left(h/2^{j+1}\right)$$

เมื่อ $W(n) = \sum_{y=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right)$

และ $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ และ $1,024$

จากนั้นจะนำค่า π ที่ได้มาคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันเพื่อให้ได้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าความถูกต้องของค่า π มากที่สุด
โดยที่

$$R(j,0) := \phi(h/2^{j+1}), \qquad j \ge 0$$

$$R(j,k) := \frac{2^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{2^k - 1}, \qquad j \ge k \ge 1$$

โดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel 2010 มาช่วยในการคำนวณค่าจะได้ผลเฉลยของการประมาณค่า π ดังต่อไปนี้

4.1.1 พิจารณาที่ทศนิยม 4 ตำแหน่ง

จากฟังก์ชันสามารถประมาณค่า π ได้ดังนี้

$$\pi \approx \frac{(W(n))^2}{2n} \qquad W(n) = \sum_{y=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right) + \prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right),\ n=2,4,8,\ldots,1024$$

Calculate Clear

N \ n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	2.5069	1.5753	0.8854	0.4701	0.2423	0.1230	0.0620	0.0311	0.0155	0.0078
2	3.0625	2.4845	1.6456	0.9575	0.5182	0.2698	0.1377	0.0695	0.0349	0.0175
3	3.3002	2.9486	2.2941	1.4906	0.8595	0.4630	0.2404	0.1225	0.0618	0.0310
8	3.4123	3.2731	3.1838	3.0095	2.4942	1.7248	1.0363	0.5714	0.3005	0.1541
9	3.4123	3.2744	3.1974	3.0830	2.6892	1.9618	1.2231	0.6890	0.3665	0.1891
11		3.2749	3.2060	3.1478	2.9428	2.3657	1.5922	0.9402	0.5133	0.2685
12		3.2749	3.2070	3.1605	3.0173	2.5284	1.7682	1.0708	0.5931	0.3126
14			3.2076	3.1708	3.1013	2.7774	2.0911	1.3349	0.7628	0.4089
15			3.2076	3.1727	3.1228	2.8679	2.2348	1.4658	0.8516	0.4608
19				3.1744	3.1534	3.0688	2.6791	1.9561	1.2209	0.6883
20				3.1744	3.1553	3.0922	2.7588	2.0664	1.3143	0.7494
26					3.1579	3.1437	3.0380	2.5947	1.8501	1.1358
27					3.1579	3.1457	3.0608	2.6600	1.9323	1.2018

ตารางที่ 4.1 ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 4 ตำแหน่ง

$$\pi \approx \frac{(W(n))^2}{2n}$$

$$W(n) = \sum_{y=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right), \quad n=2,4,8,\ldots,1024$$

Calculate **Clear**

N \ n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
26					3.1579	3.1437	3.0380	2.5947	1.8501	1.1358
27					3.1579	3.1457	3.0608	2.6600	1.9323	1.2018
36						3.1497	3.1381	3.0137	2.5342	1.7790
37						3.1497	3.1400	3.0335	2.5848	1.8388
48							3.1455	3.1292	2.9544	2.4018
49							3.1455	3.1319	2.9741	2.4434
66								3.1434	3.1230	2.9180
67								3.1434	3.1256	2.9344
90									3.1422	3.1139
91									3.1422	3.1165
123										3.1414
124										3.1414

ตารางที่ 4.1 (ต่อ) ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 4 ตำแหน่ง

ตารางที่ 4.2 สรุปผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 4 ตำแหน่ง

N	n	ค่าประมาณของ π
8	2	3.4123
11	4	3.2749
14	8	3.2076
19	16	3.1744
26	32	3.1579
36	64	3.1497
48	128	3.1455
66	256	3.1434
90	512	3.1422
123	1,024	3.1414

เมื่อได้ค่าประมาณของ π จะนำค่าประมาณที่ได้ ไปทำการประมาณต่อโดยใช้การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน จากการคำนวณจะพบว่าที่ตำแหน่ง $R(3,3)$ มีค่าเท่ากับ 3.1415 ซึ่งมีค่าความถูกต้องตรงกับค่า π ที่ตำแหน่งที่ 4 ดังตารางที่ 4.3

Richarson's Extrapolation

n	j \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	3.4123									
4	1	3.2749	3.1375								
8	2	3.2076	3.1403	3.1412							
16	3	3.1744	3.1412	3.1415	3.1415						
32	4	3.1579	3.1414	3.1414	3.1413	3.1412					
64	5	3.1497	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415				
128	6	3.1455	3.1413	3.1412	3.1411	3.1410	3.1409	3.1408			
256	7	3.1434	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413		
512	8	3.1422	3.1410	3.1409	3.1408	3.1407	3.1406	3.1405	3.1404	3.1403	
1024	9	3.1414	3.1406	3.1404	3.1403	3.1402	3.1401	3.1400	3.1399	3.1398	3.1397

Clear

ตารางที่ 4.3 แสดงผลการคำนวณของการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยทศนิยม 4 ตำแหน่ง

4.1.2 พิจารณาที่ทศนิยม 8 ตำแหน่ง

จากฟังก์ชันสามารถประมาณค่า π ได้ดังนี้

$$\pi \approx \frac{(W(n))^2}{2n} \qquad W(n) = \sum_{y=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right), \quad n = 2,4,8,\ldots,1024$$

Calculate

Clear

N \ n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	2.50694444	1.57531250	0.88542872	0.47012909	0.24236507	0.12306941	0.06201455	0.03112828	0.01559452	0.00780487
2	3.06250000	2.48459201	1.64560791	0.95758624	0.51827509	0.26987204	0.13773853	0.06958552	0.03497382	0.01753243
3	3.30027777	2.94861820	2.29414793	1.49066034	0.85951289	0.46300128	0.24049862	0.12259203	0.06189385	0.03109793
13	3.41238437	3.27497663	3.20748005	3.16729431	3.06796595	2.66516220	1.93516299	1.20290852	0.67649666	0.35955664
14	3.41238437	3.27497791	3.20762133	3.17088308	3.10135204	2.77749898	2.09111214	1.33497353	0.76283516	0.40898254
17		3.27497825	3.20769209	3.17410269	3.14502035	2.99485077	2.48314237	1.71939896	1.03452435	0.57090443
18		3.27497825	3.20769371	3.17431350	3.15024386	3.03712290	2.58752277	1.84025255	1.12756125	0.62881608
22			3.20769437	3.17447903	3.15712587	3.12168053	2.88570049	2.26865128	1.49910980	0.87511441
23			3.20769437	3.17448223	3.15751047	3.13041642	2.93490160	2.36005692	1.58969648	0.93940198
30				3.17448431	3.15799195	3.14864323	3.10566560	2.82079084	2.16166088	1.39943796
31				3.17448431	3.15799464	3.14904525	3.11492162	2.86365082	2.23195019	1.46459354
38					3.15799725	3.14975619	3.14151762	3.05055846	2.63231982	1.89743856
39					3.15799725	3.14976732	3.14261719	3.06524714	2.67667593	1.95469804

ตารางที่ 4.4 ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 8 ตำแหน่ง

$$\pi \approx \frac{(W(n))^2}{2n}$$

$$W(n) = \sum_{y=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right) + \prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right), \quad n=2,4,8,\ldots,1024$$

Calculate **Clear**

N \ n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
38					3.15799725	3.14975619	3.14151762	3.05055846	2.63231982	1.89743856
39					3.15799725	3.14976732	3.14261719	3.06524714	2.67667593	1.95469804
53						3.14978447	3.14565960	3.13865351	3.03622713	2.59338259
54						3.14978447	3.14566779	3.13963974	3.04821670	2.62686044
70							3.14568590	3.14355812	3.13167398	2.97758927
71							3.14568590	3.14357693	3.13319253	2.99016687
97								3.14363860	3.14250588	3.12818693
98								3.14363860	3.14252504	3.12956268
136									3.14261545	3.14197773
137									3.14261545	3.14199395
187										3.14210398
188										3.14210398

ตารางที่ 4.4 (ต่อ) ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 8 ตำแหน่ง

ตารางที่ 4.5 สรุปผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 8 ตำแหน่ง

N	n	ค่าประมาณของ π
13	2	3.41238437
17	4	3.27497825
22	8	3.20769437
30	16	3.17448431
38	32	3.15799725
53	64	3.14978447
70	128	3.14568590
97	256	3.14363860
136	512	3.14261545
188	1,024	3.14210398

เมื่อได้ค่าประมาณของ π จะนำค่าประมาณที่ได้ไปทำการประมาณต่อโดยใช้การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน จากการคำนวณจะพบว่าที่ตำแหน่ง $R(5,5)$ มีค่าเท่ากับ 3.14159266 ซึ่งมีค่าความถูกต้องตรงกับค่า π ที่ตำแหน่งที่ 7 ดังตารางที่ 4.6

Richarson's Extrapolation

n	j \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	3.41238437									
4	1	3.27497825	3.13757213								
8	2	3.20769437	3.14041049	3.14135661							
16	3	3.17448431	3.14127425	3.14156217	3.14159153						
32	4	3.15799725	3.14151019	3.14158883	3.14159263	3.14159270					
64	5	3.14978447	3.14157169	3.14159219	3.14159267	3.14159267	3.14159266				
128	6	3.14568590	3.14158733	3.14159254	3.14159259	3.14159258	3.14159257	3.14159256			
256	7	3.14363860	3.14159130	3.14159262	3.14159263	3.14159263	3.14159263	3.14159263	3.14159263		
512	8	3.14261545	3.14159230	3.14159263	3.14159263	3.14159263	3.14159263	3.14159263	3.14159263	3.14159263	
1024	9	3.14210398	3.14159251	3.14159258	3.14159257	3.14159256	3.14159255	3.14159254	3.14159253	3.14159252	3.14159251

Clear

ตารางที่ 4.6 แสดงผลการคำนวณของการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยทศนิยม 8 ตำแหน่ง

4.1.3 พิจารณาที่ทศนิยม 14 ตำแหน่ง

จากฟังก์ชันสามารถประมาณค่า π ได้ดังนี้

$$\pi \approx \frac{(W(n))^2}{2n}$$

$$W(n) = \sum_{y=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right), \quad n=2,4,8,\ldots,1024$$

Calculate   Clear

N \ n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	2.50694444444444	1.57531250000000	0.88542872299382	0.47012909885921	0.24236507082992	0.12306941150913	0.06201455760880	0.03112828592427	0.01559452703823	0.00780487618795
2	3.06250000000000	2.48459201388889	1.64560791015625	0.95758624135712	0.51827509943589	0.26987204505891	0.13773853645699	0.06958552110782	0.03497382743399	0.01753243415474
3	3.30027777777778	2.94861820835105	2.29414793651866	1.49066034779107	0.85951289534848	0.46300128133206	0.24049862245313	0.12259203171987	0.06189385410934	0.03109793945423
19	3.41238437707151	3.27497825718329	3.20769418906165	3.17440987892650	3.15341881683725	3.06884562247951	2.67919918108192	1.95612531931287	1.22099668609691	0.68838341291684
20	3.41238437707151	3.27497825723771	3.20769432559726	3.17445271129303	3.15532716900616	3.09229529329897	2.75885814883528	2.06642795648512	1.31435889619253	0.7494159520982 7
24		3.27497825724799	3.20769437654625	3.17448351165666	3.15772955658406	3.13655417174541	2.97601779263734	2.44484251405086	1.67861017473266	1.00439992898282
25		3.27497825724799	3.20769437670334	3.17448401109491	3.15785236590527	3.14082172015787	3.01007258139861	2.52302403281503	1.76553342502611	1.06992597779306
31			3.20769437675114	3.17448431131699	3.15799464707488	3.14904525547581	3.11492162423608	2.86365082051304	2.23195019302897	1.46459354332097
32			3.20769437675114	3.17448431167827	3.15799599355487	3.14930926374729	3.12217706963380	2.90174308675842	2.29900256730465	1.52915873812111
41				3.17448431185103	3.15799726370625	3.14977833874353	3.14404609194432	3.08861411975352	2.75647612001522	2.06498229338024
42				3.17448431185103	3.15799726428777	3.14978085375844	3.14449542289971	3.09777563357217	2.79213511454165	2.11789435925480
55					3.15799726471355	3.14978447785678	3.14567349754566	3.14044032973647	3.05900737086199	2.65878533248556
56					3.15799726471355	3.14978447868982	3.14567744526057	3.14108809495771	3.06869851987151	2.68918852073821

ตารางที่ 4.7 ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 14 ตำแหน่ง

$\pi \approx \frac{(W(n))^2}{2n}$	$W(n) = \sum_{y=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{y}\left(1-\frac{k}{n}\right)+\prod_{k=0}^{y}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-1}\right)$, $n = 2,4,8,\ldots,1024$	Calculate	Clear

N \ n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
55					3.15799726471355	3.14978447785678	3.14567349754566	3.14044032973647	3.05900737086199	2.65878533248556
56					3.15799726471355	3.14978447868982	3.14567744526057	3.14108809495771	3.06869851987151	2.68918852073821
73						3.14978447960800	3.14568591888963	3.14360267283593	3.13566188417613	3.01287532676577
74						3.14978447960800	3.14568592118083	3.14361127964530	3.13665709551481	3.02309017522087
99							3.14568592500843	3.14363861323918	3.14254096056820	3.13081243186667
100							3.14568592500843	3.14363861697288	3.14255416460671	3.13194662620222
134								3.14363862620077	3.14261543841464	3.14193816768227
135								3.14363862620077	3.14261544605100	3.14195923534424
186									3.14261547378392	3.14210397224312
187									3.14261547378392	3.14210398029121
257										3.14210402211696
258										3.14210402211696

ตารางที่ 4.7 (ต่อ) ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 14 ตำแหน่ง

ตารางที่ 4.8 สรุปผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 14 ตำแหน่ง

N	n	ค่าประมาณของ π
19	2	3.41238437707151
24	4	3.27497825724799
31	8	3.20769437675114
41	16	3.17448431185103
55	32	3.15799726471355
73	64	3.14978447960800
99	128	3.14568592500843
134	256	3.14363862620077
186	512	3.14261547378392
257	1,024	3.14210402211696

เมื่อได้ค่าประมาณของ π จะนำค่าประมาณที่ได้ไปทำการประมาณต่อโดยใช้การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน จากการคำนวณจะพบว่าที่ตำแหน่ง $R(8,8)$ มีค่าเท่ากับ 3.14159265358979 ซึ่งมีค่าความถูกต้องตรงกับค่า π ที่ตำแหน่งที่ 14 ดังตารางที่ 4.9

Richarson's Extrapolation

n	j \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	3.41238437707151									
4	1	3.27497825724799	3.13757213742447								
8	2	3.20769437675114	3.14041049625429	3.14135661586423							
16	3	3.17448431185103	3.14127424695092	3.14156216384980	3.14159152784774						
32	4	3.15799726471355	3.14151021757607	3.14158887445112	3.14159269025131	3.14159276774488					
64	5	3.14978447960800	3.14157169450245	3.14159218681124	3.14159266000554	3.14159265798916	3.14159265444865				
128	6	3.14568592500843	3.14158737040886	3.14159259571100	3.14159265412525	3.14159265373323	3.14159265359594	3.14159265358240			
256	7	3.14363862620077	3.14159132739311	3.14159264638786	3.14159265362741	3.14159265359422	3.14159265358974	3.14159265358964	3.14159265358970		
512	8	3.14261547378392	3.14159232136707	3.14159265269172	3.14159265359227	3.14159265358993	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	
1024	9	3.14210402211696	3.14159257045000	3.14159265347764	3.14159265358991	3.14159265358975	3.14159265358974	3.14159265358974	3.14159265358974	3.14159265358974	3.14159265358974

Clear

ตารางที่ 4.9 แสดงผลการคำนวณของการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยทศนิยม 14 ตำแหน่ง

4.2 การประมาณค่าปริพันธ์

ประมาณค่า π ได้จาก

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4\left(1-x\right)^4}{1+x^2} := I\left(h/2^j\right)$$

จะทำการประมาณค่าของปริพันธ์โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f\left(x_0\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right) + f\left(x_n\right) \right]$$

เมื่อค่าประมาณของค่า π จะนำมาคำนวณด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน เพื่อให้ได้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด
โดยที่

$$R(j,0) := I(h/2^j), \qquad j \geq 0$$

$$R(j,k) := \frac{4^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^k - 1}, \qquad j \geq k \geq 1$$

โดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel 2010 มาช่วยในการคำนวณค่าจะได้ผลเฉลยของการประมาณค่า π ดังต่อไปนี้

4.2.1 พิจารณาทศนิยมที่ 4 ตำแหน่ง

ตารางที่ 4.10 ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 4 ตำแหน่ง โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

n	h	ค่าประมาณของ π
1	1	3.1428
2	0.5	3.1412
4	0.25	3.1415
8	0.125	3.1415
16	0.0625	3.1415
32	0.03125	3.1415
64	0.015625	3.1415
128	0.0078125	3.1415
256	0.00390625	3.1415
512	0.001953125	3.1415
1,024	0.0009765625	3.1415

เมื่อได้ค่าประมาณของ π จะนำค่าประมาณที่ได้ไปทำการประมาณต่อโดยใช้การประมาณของริชาร์ดสัน จากการคำนวณจะพบว่าที่ตำแหน่ง $R(4,4)$ มีค่าเท่ากับ 3.1415 ซึ่งมีค่าความถูกต้องตรงกับค่า π ที่ตำแหน่งที่ 4 ดังตารางที่ 4.11

Richarson's Extrapolation

a = 0

b = 1

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7} - \pi$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = I$$

Solve

n	h	j \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	3.1428										
2	0.5	1	3.1412	3.1406									
4	0.25	2	3.1415	3.1416	3.1416								
8	0.125	3	3.1415	3.1415	3.1414	3.1413							
16	0.0625	4	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415						
32	0.03125	5	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415					
64	0.015625	6	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415				
128	0.0078125	7	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415			
256	0.00390625	8	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415		
512	0.00195313	9	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	
1024	0.00097656	10	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415

Clear

ตารางที่ 4.11 แสดงผลการคำนวณของการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยทศนิยม 4 ตำแหน่ง

4.2.2 พิจารณาทศนิยมที่ 8 ตำแหน่ง

ตารางที่ 4.12 ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 8 ตำแหน่ง โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

n	h	ค่าประมาณของ π
1	1	3.14285714
2	0.5	3.14129464
4	0.25	3.14158732
8	0.125	3.14159257
16	0.0625	3.14159265
32	0.03125	3.14159265
64	0.015625	3.14159265
128	0.0078125	3.14159265
256	0.00390625	3.14159265
512	0.001953125	3.14159265
1,024	0.0009765625	3.14159265

เมื่อได้ค่าประมาณของ π จะนำค่าประมาณที่ได้ไปทำการประมาณต่อโดยใช้การประมาณของริชาร์ดสัน จากการคำนวณพบว่าที่ตำแหน่ง $R(6,6)$ มีค่าเท่ากับ 3.14159265 ซึ่งมีค่าความถูกต้องตรงกับค่า π ที่ตำแหน่งที่ 8 ดังตารางที่ 4.13

Richarson's Extrapolation

a = 0
b = 1

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7}-\pi$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = I$$

Solve

n	h	j \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	3.14285714										
2	0.5	1	3.14129464	3.1407738									
4	0.25	2	3.14158732	3.14168488	3.14174561								
8	0.125	3	3.14159257	3.14159432	3.14158828	3.14158578							
16	0.0625	4	3.14159265	3.14159267	3.14159256	3.14159262	3.14159264						
32	0.03125	5	3.14159265	3.14159265	3.14159264	3.14159264	3.14159264	3.14159264					
64	0.015625	6	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265				
128	0.0078125	7	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265			
256	0.00390625	8	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265		
512	0.00195313	9	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	
1024	0.00097656	10	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265

Clear

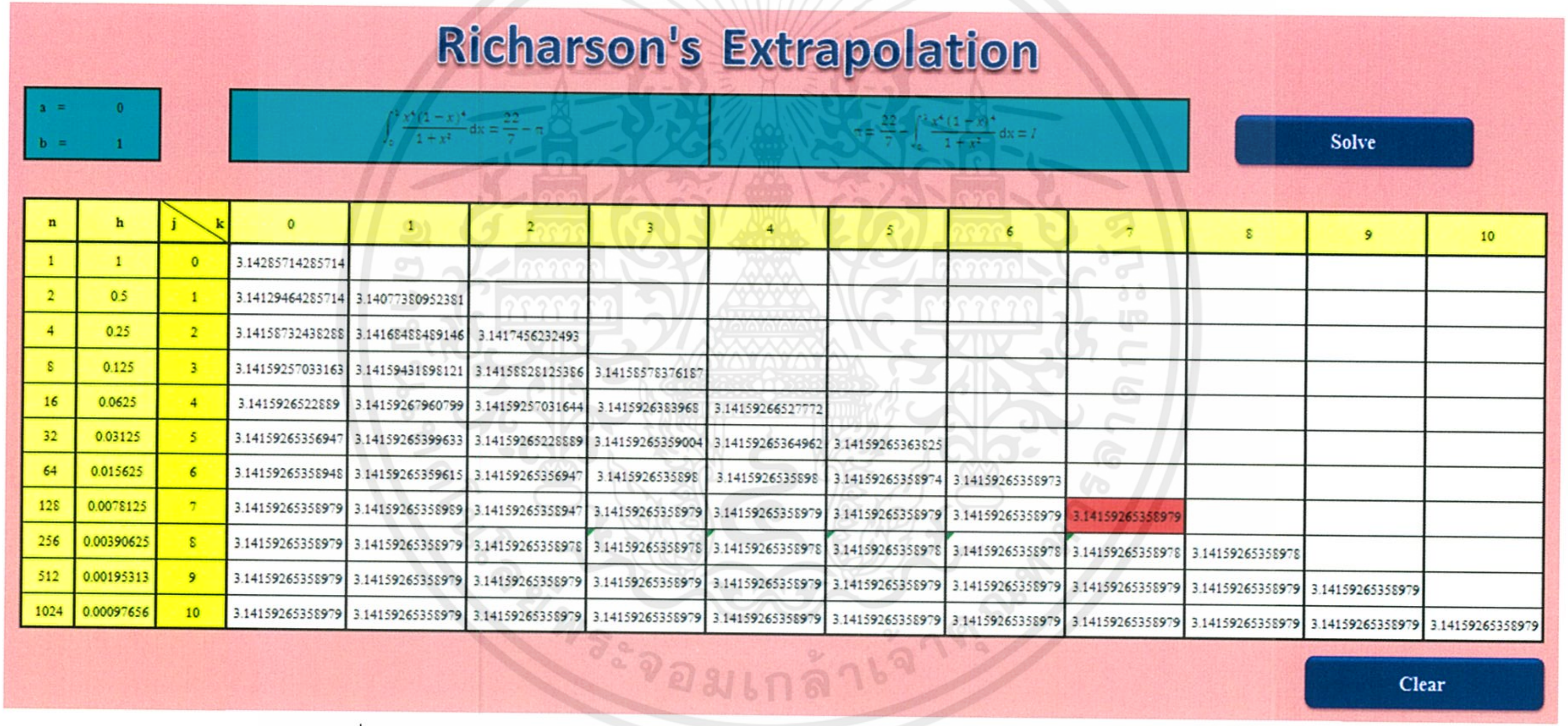
ตารางที่ 4.13 แสดงผลการคำนวณของการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยทศนิยม 8 ตำแหน่ง

4.2.3 พิจารณาทศนิยมที่ 14 ตำแหน่ง

ตารางที่ 4.14 ผลการประมาณค่า π ด้วยทศนิยม 14 ตำแหน่ง โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

n	h	ค่าประมาณของ π
1	1	3.14285714285714
2	0.5	3.14129464285714
4	0.25	3.14158732438288
8	0.125	3.14159257033163
16	0.0625	3.14159265228890
32	0.03125	3.14159265356947
64	0.015625	3.14159265358948
128	0.0078125	3.14159265358979
256	0.00390625	3.14159265358979
512	0.001953125	3.14159265358979
1,024	0.0009765625	3.14159265358979

เมื่อได้ค่าประมาณของ π จะนำค่าประมาณที่ได้ไปทำการประมาณต่อโดยใช้การประมาณของริชาร์ดสัน จากการคำนวณจะพบว่าที่ตำแหน่ง $R(7,7)$ มีค่าเท่ากับ 3.14159265358979 ซึ่งมีค่าความถูกต้องตรงกับค่า π ที่ตำแหน่งที่ 14 ดังตารางที่ 4.15



Richarson's Extrapolation

a = 0

b = 1

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \frac{22}{7}-\pi$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = I$$

Solve

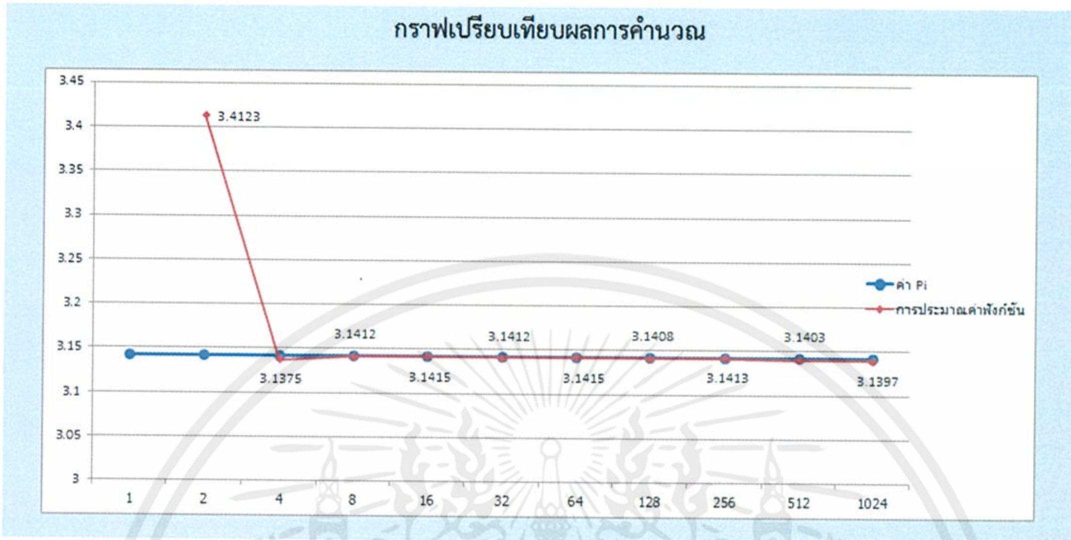
n	h	j \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	3.14285714285714										
2	0.5	1	3.14129464285714	3.14077380952381									
4	0.25	2	3.14158732438288	3.14168488489146	3.1417456232493								
8	0.125	3	3.14159257033163	3.14159431898121	3.14158828125386	3.14158578376187							
16	0.0625	4	3.1415926522889	3.14159267960799	3.14159257031644	3.141592638396 8	3.14159266527772						
32	0.03125	5	3.14159265356947	3.14159265399633	3.14159265228889	3.14159265359004	3.14159265364962	3.14159265363825					
64	0.015625	6	3.14159265358948	3.14159265359615	3.14159265356947	3.141592653598	3.141592653598	3.14159265358974	3.14159265358973				
128	0.0078125	7	3.14159265358979	3.14159265358989	3.14159265358947	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979			
256	0.00390625	8	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358978	3.14159265358978	3.14159265358978	3.14159265358978	3.14159265358978	3.14159265358978	3.14159265358978		
512	0.00195313	9	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	
1024	0.00097656	10	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979	3.14159265358979

Clear

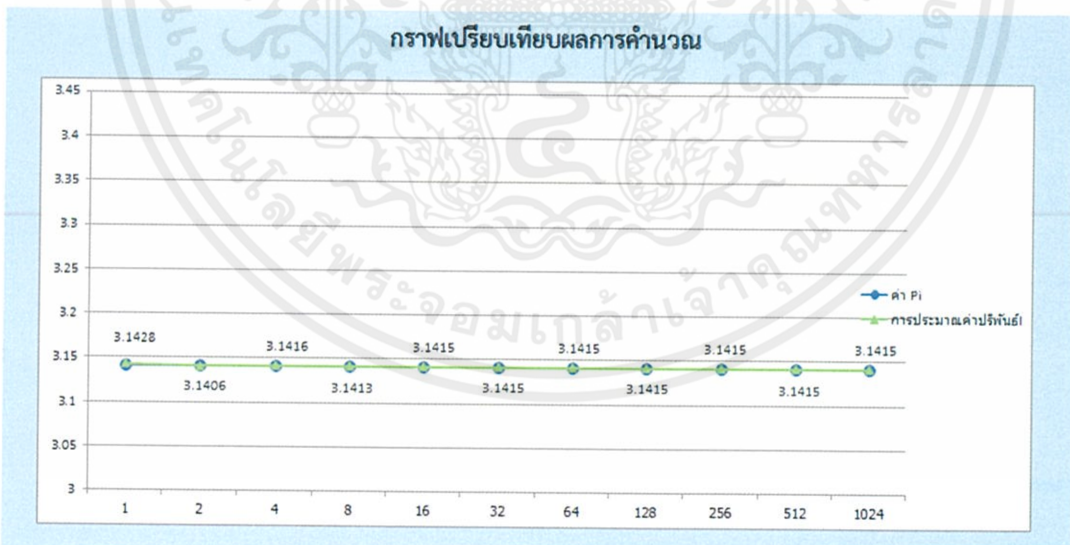
ตารางที่ 4.15 แสดงผลการคำนวณของการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันด้วยทศนิยม 14 ตำแหน่ง

4.3 การเปรียบเทียบผลการคำนวณ

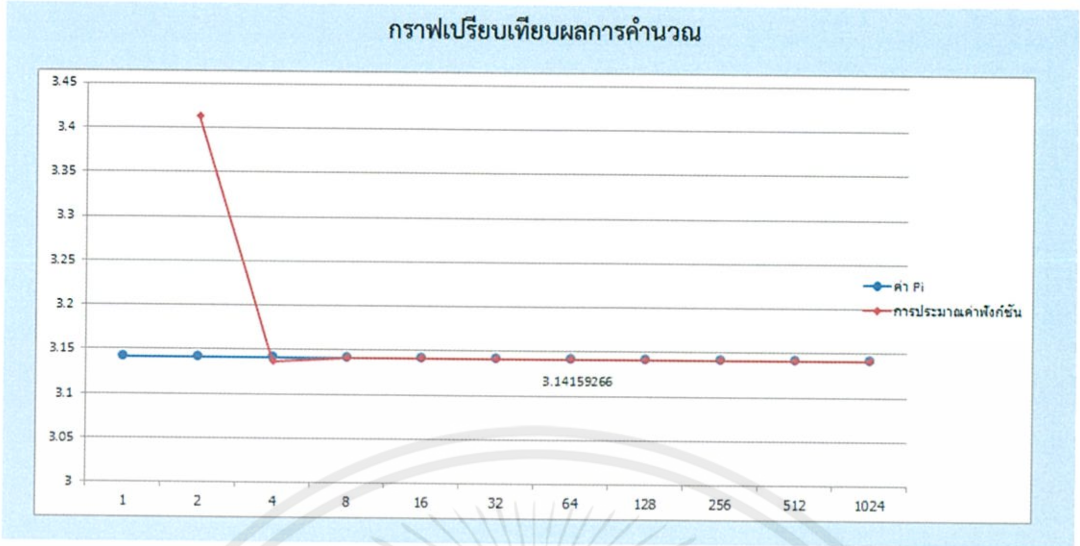
จากผลการคำนวณเราสามารถแสดงกราฟเปรียบเทียบได้ดังต่อไปนี้



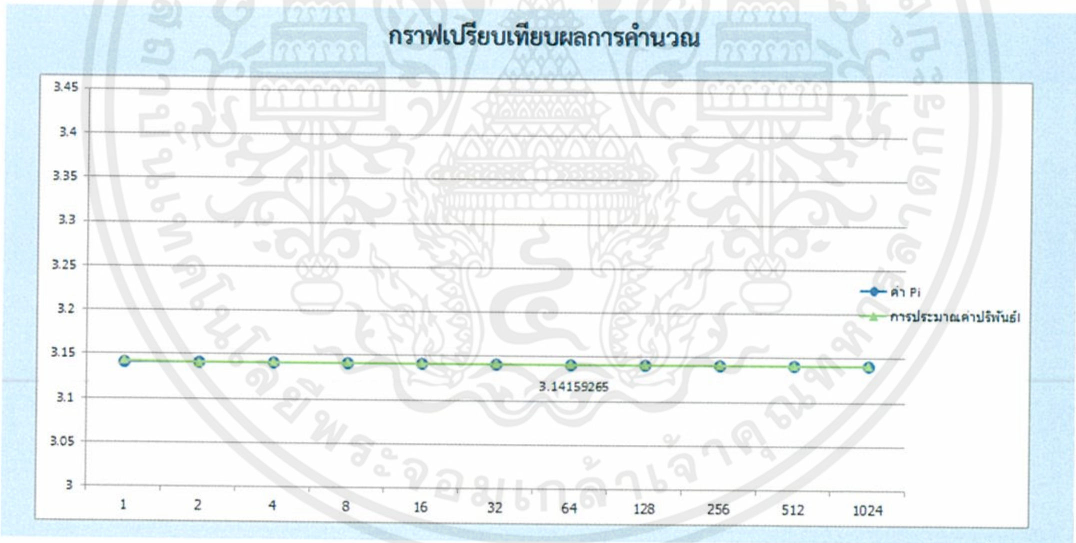
รูปที่ 4.1 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณของการประมาณค่าฟังก์ชัน (ทศนิยม 4 ตำแหน่ง)



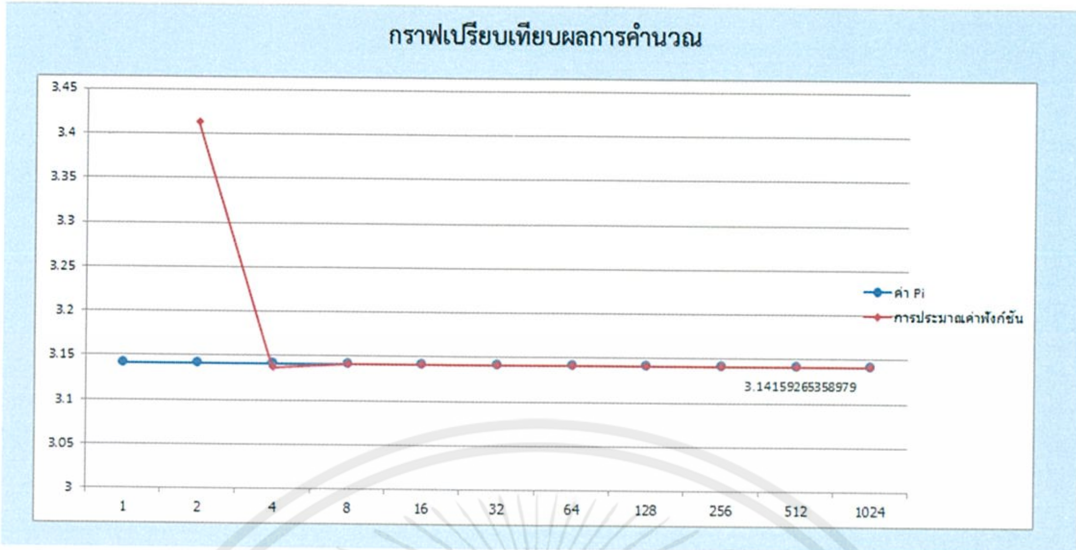
รูปที่ 4.2 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณของการประมาณค่าปริพันธ์ (ทศนิยม 4 ตำแหน่ง)



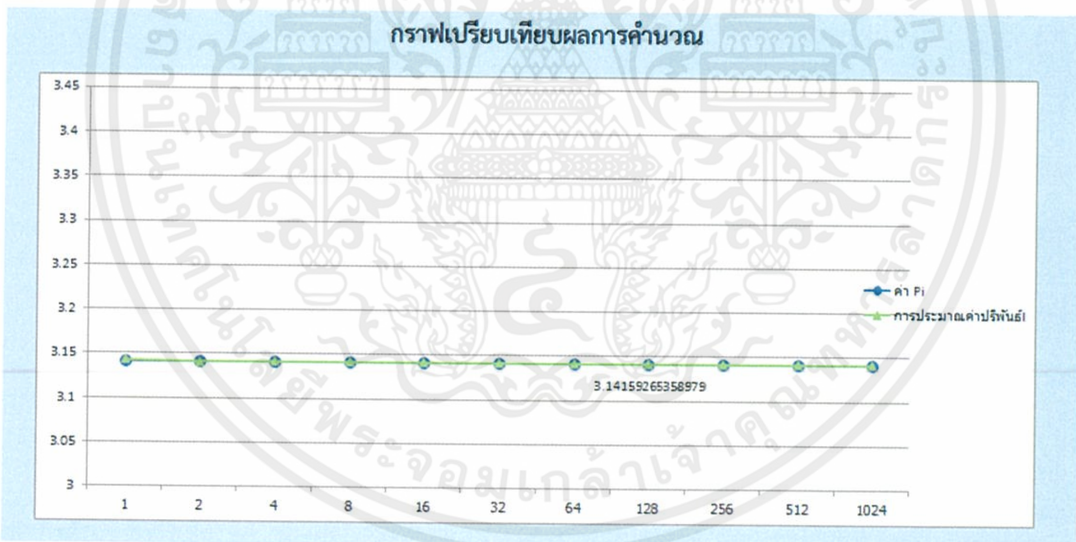
รูปที่ 4.3 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณของการประมาณค่าฟังก์ชัน (ทศนิยม 8 ตำแหน่ง)



รูปที่ 4.4 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณของการประมาณค่าปริพันธ์ (ทศนิยม 8 ตำแหน่ง)



รูปที่ 4.5 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณของการประมาณค่าฟังก์ชัน (ทศนิยม 14 ตำแหน่ง)



รูปที่ 4.6 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณของการประมาณค่าปริพันธ์ (ทศนิยม 14 ตำแหน่ง)

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษา

จากผลการศึกษาการประมาณค่า π ด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน เราจะพิจารณาว่าการประมาณค่า π ด้วยวิธีการประมาณค่าฟังก์ชันและการประมาณค่าปริพันธ์ วิธีใดให้ผลการคำนวณที่มีความถูกต้องของค่าประมาณ ซึ่งจะพิจารณาจากค่าประมาณที่ได้ และค่า π ที่ทศนิยม 4 ตำแหน่ง 8 ตำแหน่ง และ 14 ตำแหน่งตามลำดับ

ตารางที่ 5.1 ตารางแสดงค่าความถูกต้องของค่าประมาณ

ค่า π / การประมาณค่า	ทศนิยม 4 ตำแหน่ง (3.1415)	ทศนิยม 8 ตำแหน่ง (3.14159265)	ทศนิยม 14 ตำแหน่ง (3.14159265358979)
1. การประมาณค่าฟังก์ชัน			
- ค่าประมาณ	3.1415	3.14159266	3.14159265358979
- ตำแหน่งความถูกต้อง	4 ตำแหน่ง	7 ตำแหน่ง	14 ตำแหน่ง
2. การประมาณค่าปริพันธ์			
- ค่าประมาณ	3.1415	3.14159265	3.14159265358979
- ตำแหน่งความถูกต้อง	4 ตำแหน่ง	8 ตำแหน่ง	14 ตำแหน่ง

จากตารางที่ 5.1 พบว่าการประมาณค่า π ด้วยวิธีการประมาณค่าปริพันธ์ให้ผลการคำนวณที่มีความถูกต้องของค่าประมาณ

5.2 วิเคราะห์เทคนิคการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันที่ใช้ในการคำนวณ

จากกระบวนการที่ใช้ในการคำนวณ สามารถนำมาวิเคราะห์จุดแข็งและจุดอ่อน ได้ดังตาราง ต่อไปนี้

ตารางที่ 5.2 ตารางแสดงการวิเคราะห์กระบวนการที่ใช้ในการคำนวณ

<table>
<tr><th>การประมาณค่า</th><th>จุดแข็ง</th><th>จุดอ่อน</th></tr>
<tr><td>1. การประมาณค่าฟังก์ชัน</td><td rowspan="2">มีการปรับค่าประมาณให้มีความถูกต้องมากขึ้น</td><td>- การคำนวณการประมาณค่าฟังก์ชันมีความซับซ้อนมากกว่า
- การคำนวณในส่วนของโปรแกรมทำได้ช้ากว่า
- ฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันมีความซับซ้อนมากกว่า</td></tr>
<tr><td>2. การประมาณค่าปริพันธ์</td><td>- การคำนวณการประมาณค่าปริพันธ์มีความซับซ้อนน้อยกว่า
- การคำนวณในส่วนของโปรแกรมทำได้เร็วกว่า
- ฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์มีความซับซ้อนน้อยกว่า</td></tr>
</table>

5.3 ข้อเสนอแนะ

5.3.1. ควรศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับที่มาของฟังก์ชัน $W(n)$

5.3.2. ควรกำหนดตัวแปรที่ทำให้ได้ทศนิยมมากกว่า 14 ตำแหน่ง เพื่อดูความถูกต้องของวิธีการประมาณค่า

5.3.3. ในแต่ละวิธีการประมาณค่า ควรมีฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่ามากกว่า 1 ฟังก์ชัน เพื่อดูความถูกต้องของวิธีการประมาณค่าของแต่ละวิธี

5.3.4. สำหรับผู้ที่จะศึกษา ควรที่จะทำความเข้าใจในส่วนของเนื้อหา และส่วนของโปรแกรม Excel ก่อนที่จะทำการใช้โปรแกรมในการคำนวณ

5.3.5. โปรแกรมนี้สามารถนำไปศึกษา และปรับประยุกต์ใช้ต่อยอดได้

เอกสารอ้างอิง

[1] กาญจนา คำนึงกิจ. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข. กรุงเทพฯ: แผนกผลิตตำราและสื่อการสอน สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2552.

[2] ขนิษฐา นามี. โครงสร้างข้อมูลและอัลกอริทึม. นนทบุรี: ไอดีซีฯ, 2548

[3] ดุสิต กอปรรักชาติ. Advanced Excel Macro & VBA. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2554.

[4] นันรณา จำลอง. Excel 2010 step by step. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2554.

[5] Embree, M. Richardson Extrapolation and Romberg Integration. Numerical AnalysisI. Rice University, 2009

[6] Liu, Eric Hung-Lin. Fundamental Methods of Numerical Extrapolation with Applications. Mitopencourseware, Massachusetts Institute of Technology, 2006.

[7] S.K. Lucas, Integral approximations to with nonnegative integrands. Department of Mathematics and Statistics. James Madison University, May 2007.

ภาคผนวก

อัลกอลิทึมสำหรับการคำนวณหาค่า π โดยวิธีการประมาณค่านอกช่วงริชาร์ดสันด้วยการประมาณฟังก์ชัน

```
Dim format As String
Sub Extrapolation()
        Dim round As Integer
        round = 10
        Dim deci As Integer
        deci = InputBox("Enter precise !! " & vbNewLine & "(Decimal position x)" &
                  vbNewLine & "1<=x<=14  ", "Enter x value")
       Call MakeFormat(deci)
       Dim Answer(1 To 10) As Double
       Dim k As Integer
       Dim rown As Integer
       k = 1
             While (k <= round)
                    rown = 0
                    Call helpCell(rown, k + 1)
                    ActiveCell.Value = 2 ^ k
                    Dim epselon As Double
                    epselon = 0.000000001
                              While epselon <> 0
                                       rown = rown + 1
                                       Call helpCell(rown, k + 1)
                                       ActiveCell.Offset(0, -k).Value = rown
                                       Dim Y As Integer
                                       Y = ActiveCell.Offset(0, -k).Value
                                       result = 0
                                       Dim i As Integer
                                                 For i = 0 To Y
                                                        result = result + SumOfProduct(i, rown)
                                                 Next
                                      result = (result ^ 2) / (2 * ActiveCell.Offset(-rown,0).Value)
                                      ActiveCell.NumberFormat = format
                                      ActiveCell.Formula = "=TRUNC(" & result & "," & deci & ")"
```

```
                                                If rown <> 1 Then
                                                        epselon = Abs(ActiveCell.Value
                                                                        - ActiveCell.Offset(-1, 0).Value)
                                                End If
                                Wend
                        Answer(k) = ActiveCell.Offset(-1, 0).Value
                        k = k + 1
            Wend
        Call workSheet2(round, Answer(), deci)
End Sub

Sub helpCell(row As Integer, col As Integer)
        Cells(row + 5, col).Select
End Sub

Function SumOfProduct(yi As Integer, rown As Integer) As Double
        Dim mul1 As Double
        Dim mul2 As Double
        Dim n As Integer
        n = ActiveCell.Offset(-rown, 0).Value
        mul1 = 1
        mul2 = 1
                Dim i As Integer
                For i = 0 To yi
                        mul1 = mul1 * productOne(i, n)
                        mul2 = mul2 * ProductTwo(i, n)
                Next
        SumOfProduct = mul1 + mul2
End Function

Function productOne(kValue As Integer, nValue As Integer) As Double
         ProductOne = 1 - (kValue / nValue)
End Function

Function ProductTwo(kValue As Integer, nValue As Integer) As Double
          ProductTwo = 1 / (1 + (kValue / nValue))
End Function
```

```
Sub workSheet2(round As Integer, dataArray() As Double, deci As Integer)
        Worksheets("Sheet2").Activate
        Range("firstArray").Activate
                Dim i As Integer
                For i = 1 To round
                        ActiveCell.NumberFormat = format
                        ActiveCell.Value = dataArray(i)
                        ActiveCell.Offset(0, -1).Value = i - 1
                        ActiveCell.Offset(0, -2).Value = 2 ^ i
                        ActiveCell.Offset(1, 0).Select
                Next
                ActiveCell.Offset(-(round + 1), 0).Select
                Dim k As Integer
                For k = 1 To round
                        ActiveCell.Offset(0, 0).Value = k - 1
                        ActiveCell.Offset(0, 1).Select
                Next
                ActiveCell.Offset(2, -(k - 2)).Select
                Dim jrow As Integer
                jrow = round - 1
                        Dim crow As Integer
                        While jrow <> 0
                              Dim mj As Integer
                               mj = (round - jrow) + 1
                               For crow = 1 To jrow
                                   Dim kcol As Double
                                   Dim result As Double
                                   result = 0
                                   kcol = ActiveCell.Offset(-mj, 0).Value
                                   result = (((2 ^ kcol) * (ActiveCell.Offset(0, -1).Value)
                                          –ActiveCell.Offset(-1, -1).Value)) / ((2 ^ kcol) - 1)
                                           ActiveCell.NumberFormat = format
                                           ActiveCell.Formula = "=TRUNC(" & result & ","
                                           & deci & ")"
                                           ActiveCell.Offset(1, 0).Select
                                           mj = mj + 1
                               Next
```

```
                    jrow = jrow - 1
                    ActiveCell.Offset(-jrow, 1).Select
                Wend
    End Sub

Sub MakeFormat(r As Integer)
        format = "#0."
            Dim i As Integer
            For i = 1 To r
                format = format & "0"
            Next
End Sub

Sub DeleteContent()
        Range("A6:A263").ClearContents
        Range("B5:K263").ClearContents
End Sub
Sub ClearData()
        Range("D6:N6").ClearContents
        Range("A7:N17").ClearContents
End Sub
```

อัลกอลิทึมสำหรับการคำนวณหาค่า π โดยวิธีการประมาณค่านอกช่วงริชาร์ดสันด้วยการประมาณปริพันธ์

```
Dim format As String
Dim deci As Integer
Sub PiIntegral()
Dim h As Double, x As Double, fn As Double, fx As Double,
    i As Integer, a As Double, b As Double
    deci = InputBox("Enter precise !! " & vbNewLine & "(Decimal position x)" &
        vbNewLine & "1<=x<=14  ", "Enter x value")
Call MakeFormat(deci) ' หาค่า π ในช่อง ( j, 0)
    For i = 10 To 20
        x = 0
        fx = 0
        a = Cells(5, 3)
        b = Cells(6, 3)
        k = Cells(i, 4)
        n = 2 ^ k
        Cells(i, 2) = n
        h = (b - a) / n
        Cells(i, 3).Value = h
            Do While x <= 1
                fn = ((x ^ 4) * ((1 - x) ^ 4)) / (1 + (x ^ 2))
                fx = fx + (2 * fn)
                x = x + h
            Loop
        fx = (22 / 7) - (fx * (h / 2))
        Cells(i, 5).Value = fx
        Cells(i, 5).NumberFormat = format
        Cells(i, 5).Value = "=TRUNC(" & fx & "," & deci & ")"
    Next i
    Call richardson
End Sub
Sub richardson()
    Dim i As Integer, j As Integer, fx As Double
    For i = 6 To 15
        For j = ((i - 6) + 11) To 20
```

```
                        Dim k As Double
                        k = ((4 ^ Cells(9, i).Value) * Cells(j, i - 1).Value –
                            Cells(j - 1, i - 1).Value)/ ((4 ^ Cells(9, i).Value) - 1)
                        Cells(j, i).Value = k
                        Cells(j, i).NumberFormat = format
                        Cells(j, i).Value = "=TRUNC(" & Cells(j, i).Value & "," & deci & ")"
                Next j
        Next i
End Sub

Sub MakeFormat(r As Integer)
InputBox
        format = "#0."
        Dim i As Integer
        For i = 1 To r
                format = format & "#"
        Next
End Sub

Sub ClearData()
        Range("B10:C20").ClearContents
        Range("E10:O20").ClearContents
End Sub
```