สมบัติเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

SPECTRAL PROPERTIES OF POSITIVE DEFINITE MATRICES

มินตรา เภาพูล

อภิเดช จำปาแดง

อำพล ดวงแป้น

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

สมบัติเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

SPECTRAL PROPERTIES OF POSITIVE DEFINITE MATRICES

มินตรา เภาพูล

อภิเดช จำปาแดง

อำพล ดวงแป้น

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

SPECTRAL PROPERTIES OF POSITIVE DEFINITE MATRICES

MINTRA PAOPOON

APIDET JUMPADAENG

AMPOL DUANGPAN

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2013

หัวข้อปัญหาพิเศษ สมบัติเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน
Spectral Properties of Positive Definite Matrices

ชื่อนักศึกษา นางสาวมินตรา เภาพูล 53050095
นายอภิเดช จำปาแดง 53050133
นายอำพล ดวงแป้น 53050145

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตร คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ พัชรินทร์ เหมโชติ
อาจารย์ ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	**ลายมือชื่อ**
อาจารย์ ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ประธานกรรมการ	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
อาจารย์ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการ	
รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อาจารย์ ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมบัติเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน
ชื่อนักศึกษา	นางสาวมินตรา เภาพูล 53050095 นายอภิเดช จำปาแดง 53050133 นายอำพล ดวงแป้น 53050145
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2556
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ พัชรินทร์ เหมโชติ อาจารย์ ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาสมบัติเกี่ยวกับสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ซึ่งได้แก่ สมบัติเชิงพีชคณิต สมบัติที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ย่อย ตัวกำหนด และรอยเมทริกซ์ รวมทั้งศึกษาการแยกเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ให้อยู่ในรูปผลคูณแบบต่างๆ

คำสำคัญ : เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน สเปกตรัมของเมทริกซ์ เมทริกซ์ยูนิทารี เมทริกซ์เฮอร์มิเชียน เมทริกซ์ปรกติ

Title SPECTRAL PROPERTIES OF POSITIVE DEFINITE MATRICES

Student Ms.Mintra Paopoon 53050095
Mr.Apidet Jumpadaeng 53050133
Mr.Ampol Duangpan 53050145

Degree Bachelor of Science

Major Program Applied Mathematics

Academic Year 2013

Advisor Assoc.Prof.Patcharin Hemchote
Dr.Pattrawut Chansangiam

ABSTRACT

This special problem is to study spectral properties of positive definite matrices, including algebraic properties and properties involving submatrices, determinants and traces. In addition, we consider various decompositions of positive definite matrices.

Keywords : positive definite matrix, spectrum of a matrix, unitary matrix, hermitian matrix, normal matrix.

กิตติกรรมประกาศ

การจัดทำปัญหาพิเศษเรื่องสมบัติเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน จนสามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ และดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม อาจารย์ที่ปรึกษา ขอขอบพระคุณ รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ และดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ที่กรุณาให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะต่างๆ และขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ได้เอื้อเฟื้อสถานที่ วัสดุอุปกรณ์ และงบประมาณในการทำปัญหาพิเศษนี้

นอกจากนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่คอยเป็นกำลังใจ จนทำให้ปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี รวมทั้งเพื่อนๆ รุ่นพี่ และบุคคลอื่นๆ ที่คอยให้ความช่วยเหลือในเรื่องต่างๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้ด้วย

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญรูปภาพ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน (positive definite matrices) เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมด เซตของค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์นี้ เรียกว่า สเปกตรัม (spectrum) ของเมทริกซ์ แนวคิดของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนจึงเป็นการขยายแนวคิดของจำนวนจริงบวก ซึ่งสมบัติต่างๆ ของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนที่เกี่ยวข้องกับสเปกตรัมได้มีการนำมาประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในสาขาต่างๆ เช่น ทฤษฎีการควบคุม การหาค่าเหมาะสมที่สุด การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น

ในปัญหาพิเศษนี้ เราจะศึกษาสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับสเปกตรัม และการแยกเมทริกซ์แบบต่างๆ ของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาสมบัติเกี่ยวกับสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

2. เพื่อศึกษาการแยกเมทริกซ์แบบต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1. ศึกษาสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ได้แก่ สมบัติเชิงพีชคณิต สมบัติที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ย่อย ตัวกำหนด เมทริกซ์ผกผัน และรอยของเมทริกซ์

2. ศึกษาการแยกเมทริกซ์แบบต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถนำสมบัติเกี่ยวกับสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนไปเชื่อมโยง และประยุกต์ใช้กับความรู้คณิตศาสตร์สาขาอื่นๆ

2. สามารถแยกเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปของผลคูณแบบต่างๆ เพื่อหาสมบัติเพิ่มเติมของเมทริกซ์ เช่น ตัวกำหนด รอยเมทริกซ์ และหาผกผันของเมทริกซ์ได้ง่ายขึ้น เป็นต้น

3. เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษา ทฤษฎีเมทริกซ์ พีชคณิตเชิงเส้นขั้นสูง และสาขาอื่นที่เกี่ยวข้องต่อไป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. วางแผนการทำงานในขั้นตอนต่างๆ
2. รวบรวม และศึกษาข้อมูล หรือทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ
3. นำข้อมูลที่ได้มาทดสอบกับปัญหาที่ต้องการทราบของปัญหาพิเศษ
4. นำข้อเท็จจริงที่ได้มาเรียบเรียง และเขียนเป็นรายงานของปัญหาพิเศษ
5. สรุปผลการดำเนินงาน
6. ปรับปรุง และแก้ไขในข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น
7. นำเสนอปัญหาพิเศษ

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินงานตามแผนงาน 10 เดือน ได้แสดงไว้ในตารางที่ 1.1

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2556							ปี 2557		
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1. ศึกษาข้อมูล และกำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ										
2. ทบทวนความรู้พื้นฐานในพีชคณิตเชิงเส้น										
3. ศึกษาพื้นฐานทฤษฎีเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้อง										
4. ศึกษาสมบัติของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน										
5. ศึกษาสมบัติเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์										
6. ศึกษาการแยกเมทริกซ์แบบต่างๆ										
7. สรุปผลการศึกษา และจัดทำรูปเล่ม										
8. นำเสนอปัญหาพิเศษ										

ตารางที่ 1.1 : แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานในพีชคณิตเชิงเส้น

สัญลักษณ์ที่ใช้

$M_n(\mathbb{C})$ แทน เซตของเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน เขียนสั้นๆ ได้ว่า M_n

$M_n(\mathbb{R})$ แทน เซตของเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง

$\mathbb{C}^n$ แทน เซตของเวกเตอร์แนวตั้ง มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน n จำนวน

$\mathbb{R}^n$ แทน เซตของเวกเตอร์แนวตั้ง ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง n จำนวน

A^T แทน การสับเปลี่ยน (transpose) ของเมทริกซ์ A

$\overline{A}$ แทน สังยุค (conjugate) ของเมทริกซ์ A

A^* แทน สังยุคของการสับเปลี่ยน (conjugate transpose) ของเมทริกซ์ A

2.1 สเปกตรัมของเมทริกซ์

➢ สมการลักษณะเฉพาะ (The characteristic equation)

บทนิยาม 2.1 ให้ $A\in M_n$ ถ้ามี $x\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ และ $\lambda\in\mathbb{C}$ ที่ทำให้

$$Ax=\lambda x$$

เราเรียก λ ว่า ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalues) ของเมทริกซ์ A
และเรียก x ว่า เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector) ของเมทริกซ์ A ที่สอดคล้องกับ λ

บทนิยาม 2.2 สเปกตรัม (spectrum) ของเมทริกซ์ $A\in M_n$ คือเซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย $\sigma(A)$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $p(\bullet)$ เป็นพหุนาม ถ้า λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $A \in M_n$ และ x เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ แล้ว $p(\lambda)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $p(A)$ และ x เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ $p(A)$ ที่สอดคล้องกับ $p(\lambda)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $p(A) = a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$ เมื่อ $a_0, a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{C}$

พิจารณา $p(A)x$ จะได้ว่า

$$p(A)x = a_k A^k x + a_{k-1}A^{k-1}x + \ldots + a_1 Ax + a_0 x \qquad \text{.............(1)}$$

เนื่องจาก

$$Ax = \lambda x$$

$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$$

$$A^3 x = A(A^2 x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2 (Ax) = \lambda^3 x$$

$$\vdots$$

$$A^k x = A(A^{k-1}x) = A(\lambda^{k-1}x) = \lambda^{k-1}(Ax) = \lambda^k x$$

แทนค่าในสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(A)x &= a_k \lambda^k x + a_{k-1}\lambda^{k-1}x + \ldots + a_1 \lambda x + a_0 x \\ &= (a_k \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0)x \\ &= p(\lambda)x \end{aligned}$$

ดังนั้น $p(\lambda)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ และ x เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ $p(A)$ $\square$

จากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

บทแทรก 2.4 ให้ $A \in M_n$ จะได้ว่า

$\sigma(A^m) = \{ \lambda^m : \lambda \in \sigma(A) \}$ สำหรับทุกจำนวนนับ m

$\sigma(kA) = \{ k\lambda : \lambda \in \sigma(A) \}$ สำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน k

$\sigma(A+I) = \{ \lambda + 1 : \lambda \in \sigma(A) \}$

<u>**ข้อสังเกต**</u> ถ้า $A \in M_n(\mathbb{C})$ มีผลบวกของแต่ละแถวเท่ากัน โดยเท่ากับ k แล้ว $k \in \sigma(A)$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_n(\mathbb{C})$ มีผลบวกของแต่ละแถวเท่ากัน โดยเท่ากับ k

พิจารณา $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^n - \{0\}$

จะได้
$$
\begin{aligned}
Ax &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \\
&= kx
\end{aligned}
$$

<u>**ดังนั้น**</u> $k \in \sigma(A)$ และ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A □

➢ พหุนามลักษณะเฉพาะ (The characteristic polynomial)

จากบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{C}^n - \{0\}, Ax = \lambda x \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{C}^n - \{0\}, (\lambda I - A)x = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda I - A \text{ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน} \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0
\end{aligned}
$$

บทนิยาม 2.5 พหุนามลักษณะเฉพาะของ $A \in M_n$ กำหนดโดย

$$p_A(t) = \det(tI - A)$$

<u>**ข้อสังเกต**</u> 1) ถ้า $A \in M_n$ แล้ว พหุนามลักษณะเฉพาะ $p_A(\bullet)$ ที่มีดีกรี n จะมีเซตของผลเฉลยของ $p_A(t) = 0$ คือ $\sigma(A)$

2) เมทริกซ์ $A \in M_n$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) ก็ต่อเมื่อ $0 \in \sigma(A)$

<u>ตัวอย่าง 2.6</u> พิจารณาเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}7 & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\in M_2$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $p_A(t)=\det(tI-A)$ จะได้ว่า

$$p_A(t)=\begin{vmatrix}t-7 & 2\\ -4 & t-1\end{vmatrix}$$

นั่นคือ $p_A(t)=(t-7)(t-1)+8$

$$=(t-7)(t-1)+8$$

$$=t^2-8t+15$$

$$=(t-3)(t-5)$$

จะได้ว่า ถ้า $(t-3)(t-5)=0$ แล้ว $t=3,\ 5$

<u>ดังนั้น</u> สเปกตรัมของเมทริกซ์ A คือ $\sigma(A)=\{3,\ 5\}$ □

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> พิจารณาค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $p_A(t)=\det(tI-A)$ จะได้ว่า

$$p_A(t)=\begin{vmatrix}t-3 & 1 & 1\\ 1 & t-3 & 1\\ 1 & 1 & t-3\end{vmatrix}$$

นั่นคือ $p_A(t)=(t-3)^3+1+1-3(t-3)$

$$=t^3-9t^2+27t-27+2-3t-9$$

$$=t^3-9t^2+24t-16$$

$$=(t-1)(t-4)^2$$

จะได้ว่า ถ้า $(t-1)(t-4)^2=0$ แล้ว $t=1,\ 4$

<u>ดังนั้น</u> สเปกตรัมของเมทริกซ์ A คือ $\sigma(A)=\{1,\ 4\}$ □

<u>ตัวอย่าง 2.8</u> ถ้า $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

$$p_A(t)=t^2-(a+d)t+(ad-bc) \quad \text{และ} \quad \sigma(A)=\left\{\frac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}\right\}$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $p_A(A)=\det(tI-A)$ และ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $$p_A(t)=\begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix}$$

$$=(t-a)(t-d)-bc$$

$$=t^2-(a+d)t+ad-bc$$

$$=t^2-(a+d)t+(ad-bc)$$

<u>ดังนั้น</u> $p_A(t)=t^2-(a+d)t+(ad-bc)$

หา $\sigma(A)$ จาก $p_A(t)=0$ จะได้ว่า $t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$

นั่นคือ $$t=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$$

$$=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a^2-2ad+d^2)+4bc}}{2}$$

$$=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$

<u>ดังนั้น</u> $\sigma(A)=\left\{\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}\right\}$ □

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> ถ้า $A\in M_2$ จงแสดงว่า $p_A(t)=t^2-(\operatorname{tr}A)t+\det A$ และ

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\operatorname{tr}A \quad \text{และ} \quad \prod_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\det A$$

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เมื่อ $a, b, c, d\in\mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$\operatorname{tr}A=a+d$$

$$\det A=ad-bc$$

เนื่องจาก $$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix}$$

$$= (t-a)(t-d) - bc$$

$$= t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

$$= t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$$

ดังนั้น $p_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A$

หาค่าลักษณะเฉพาะจาก $p_A(t) = 0$ จะได้ว่า

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}, \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \right\}$$

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \left[\frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \right] + \left[\frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \right]$$

$$= a + d$$

$$= \operatorname{tr} A$$

$$\prod_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \left[\frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \right] \cdot \left[\frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \right]$$

$$= \frac{(a+d)^2 - (a+d)^2 + 4(ad-bc)}{4}$$

$$= \frac{4(ad-bc)}{4}$$

$$= ad - bc$$

$$= \det A$$

ดังนั้น $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \operatorname{tr} A$ และ $\prod_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda = \det A$ □

➢ เมทริกซ์คล้าย (similar matrices)

บทนิยาม 2.10 เมทริกซ์ A และ B ที่มีขนาด $n\times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์คล้าย (similar matrices) เขียนแทนด้วย $A\sim B$ ถ้า $B=P^{-1}AP$ หรือ $PB=AP$ สำหรับบางเมทริกซ์ P ที่มีผกผัน

<u>**ตัวอย่าง 2.11**</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A\sim B$

<u>**วิธีทำ**</u> พิจารณา $P=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det P=2\neq 0$ นั่นคือ P เป็นเมทริกซ์ที่มีผกผัน

จะแสดงว่า $PB=AP$

นั่นคือ $PB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

$AP=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

<u>**ดังนั้น**</u> $A\sim B$ เนื่องจาก $PB=AP$ □

ทฤษฎีบท 2.12 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้ายกัน แล้วจะมีค่าเหล่านี้เท่ากัน

1) ตัวกำหนด
2) ค่าลำดับชั้น
3) รอยเมทริกซ์
4) พหุนามลักษณะเฉพาะ
5) ค่าลักษณะเฉพาะ

พิสูจน์ ให้ $B=P^{-1}AP$ เมื่อ P เป็นเมทริกซ์ที่มีผกผัน

1) ตัวกำหนด

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP)\\ &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P)\\ &= [\det(P)]^{-1}\det(A)\det(P)\\ &= \det(A)\end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $\det A=\det B$

2) ค่าลำดับชั้น

$$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(P^{-1}AP)$$
$$= \operatorname{rank}(AP)$$
$$= \operatorname{rank}(A)$$

ดังนั้น $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

3) รอยเมทริกซ์

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP)$$
$$= \operatorname{tr}[(AP)P^{-1}]$$
$$= \operatorname{tr}(A)$$

ดังนั้น $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

4) พหุนามลักษณะเฉพาะ

จาก $xI = P^{-1}(xI)P$ จะได้

$$p_B(x) = \det(xI - B)$$
$$= \det[P^{-1}(xI)P - P^{-1}AP]$$
$$= \det[P^{-1}(xI - A)P]$$
$$= \det(xI - A)$$
$$= p_A(x)$$

ดังนั้น $p_A(x) = p_B(x)$

5) ค่าลักษณะเฉพาะ

เนื่องจากเมทริกซ์ A และ B มีพหุนามลักษณะเฉพาะเดียวกัน

จึงทำให้มีค่าลักษณะเฉพาะเท่ากันด้วย

ดังนั้น $\sigma(A) = \sigma(B)$ □

ทฤษฎีบท 2.13 ทุกเมทริกซ์ $A \in M_n$ จะคล้ายกับบางเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน นั่นคือ จะมีเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน T และเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ S ที่ทำให้ $S^*S = I$ และ $S^{-1}AS = T$

พิสูจน์ ([4] ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม, 2556, น. 58)

ทฤษฎีบท 2.14 ถ้า $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $A \in M_n$ แล้ว

1) $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

2) $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่า มีเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน T และเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ S ที่ทำให้

$$S^{-1}AS = T$$

โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า A คล้ายกับ T จะได้ว่า $\sigma(T) = \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

จะได้ว่า
$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} T = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

และ
$$\det A = \det T = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

<u>**ดังนั้น**</u> $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ และ $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ $\square$

2.2 การทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

บทนิยาม 2.15 ให้ $A \in M_n$ จะกล่าวว่า A ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ (diagonalizable) ถ้ามีเมทริกซ์ที่มีผกผัน P ที่ทำให้ $P^{-1}AP$ เป็นเทริกซ์ทแยงมุม

ขั้นตอนวิธีทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม : ให้ $A \in M_n$

1) หาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A
2) หา (ถ้าเป็นไปได้) n เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้น
3) เขียน $P = [X_1 \ X_2 \ \ldots \ X_n]$ เป็นเมทริกซ์ที่มี X_i เป็นเวกเตอร์แนวตั้ง
4) จะได้ $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ซึ่งมีสมาชิกในแนวทแยงเป็นค่าลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ตามลำดับ

<u>ตัวอย่าง 2.16</u> จงเขียน $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปของ $A = P^{-1}DP$ เมื่อ P เป็นเมทริกซ์ที่มีผกผัน และ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>วิธีทำ</u> ทำตามขั้นตอนวิธีข้างต้น ดังนี้

1) $$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)-6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-4) \end{aligned}$$

<u>ดังนั้น</u> $\sigma(A) = \{4, -1\}$

2) เมื่อ $\lambda = 4$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3}x_2$$

ให้ $x_2 = s$ จะได้ $x_1 = \frac{2}{3}s$

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}s = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}s$$

<u>ดังนั้น</u> $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

เมื่อ $\lambda = -1$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

ให้ $x_2 = t$ จะได้ $x_1 = -t$

$$E_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}t$$

<u>ดังนั้น</u> $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det P = 2 + 3 = 5 \neq 0$ นั่นคือ P มีผกผัน

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

4) จาก $D = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>ดังนั้น</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ □

<u>ข้อสังเกต</u> สมาชิกตามแนวทแยงของ $P^{-1}AP$ คือ $4, -1$ อยู่ในลำดับเดียวกันกับค่าลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับเวกเตอร์แนวตั้ง X_1, X_2 ของ P

2.3 สังยุคของการสลับเปลี่ยน

บทนิยาม 2.17 ถ้า $A \in M_n$ แล้ว สังยุคของการสลับเปลี่ยน (conjugate transpose) คือ $A^* = \overline{A}^T$ เมื่อ $\overline{A}$ เป็นสังยุคของเมทริกซ์ A และ A^T เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A

ทฤษฎีบท 2.18 ให้ $A, B \in M_n$ และ $k \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

1) $(A^*)^* = A$
2) $(A+B)^* = A^* + B^*$
3) $(kA)^* = \overline{k}A^*$
4) $(AB)^* = B^*A^*$

พิสูจน์ สมมติให้ $A, B \in M_n$ และ $k \in \mathbb{C}$

1) $(A^*)^* = (\overline{A}^T)^* = (\overline{A^T})^* = \overline{(\overline{A^T})}^T = (A^T)^T = A$

<u>ดังนั้น</u> $(A^*)^* = A$

2) $(A+B)^* = (\overline{A+B})^T = (\overline{A}+\overline{B})^T = \overline{A}^T + \overline{B}^T = A^* + B^*$

<u>ดังนั้น</u> $(A+B)^* = A^* + B^*$

3) $(kA)^* = \overline{kA}^T = (\overline{k}\,\overline{A})^T = (\overline{k})^T(\overline{A})^T = \overline{k}(\overline{A})^T = \overline{k}A^*$

<u>ดังนั้น</u> $(kA)^* = \overline{k}A^*$

4) $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = \overline{B}^T\overline{A}^T = B^*A^*$

<u>ดังนั้น</u> $(AB)^* = B^*A^*$ □

2.4 รอยเมทริกซ์

บทนิยาม 2.19 รอย (trace) ของเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{C})$ คือ ผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ A นั่นคือ

$$\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ทฤษฎีบท 2.20 สำหรับแต่ละ $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ และ $k\in\mathbb{C}$ จะได้ว่า

1) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$
2) $\operatorname{tr}(kA)=k\operatorname{tr}(A)$

พิสูจน์ สมมติให้ $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]$ จะได้ว่า

1) สมมติให้ $A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$

นั่นคือ
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A+B)&=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})\\&=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}\\&=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)\end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$

2) สมมติให้ $kA=k\left[a_{ij}\right]=\left[ka_{ij}\right]$

นั่นคือ
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(kA)&=\sum_{i=1}^{n}(ka_{ii})\\&=k\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\\&=k\operatorname{tr}(A)\end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $\operatorname{tr}(kA)=k\operatorname{tr}(A)$ □

ทฤษฎีบท 2.21 สำหรับแต่ละ $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ และ $k\in\mathbb{C}$ จะได้ว่า

1) $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$

2) $\operatorname{tr}(A^T)=\operatorname{tr}(A)$

3) $\operatorname{tr}(\overline{A})=\overline{\operatorname{tr}(A)}=\operatorname{tr}(A^*)$

4) $\operatorname{tr}(A^*A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$

พิสูจน์ สมมติให้ $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]$ จะได้ว่า

1) $$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}$$

$$=\operatorname{tr}(BA)$$

2) เนื่องจาก $A^T=\left[a_{ij}\right]^T=\left[a_{ji}\right]$

นั่นคือ $$\operatorname{tr}(A^T)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\operatorname{tr}(A)$$

3) เนื่องจาก $\overline{A}=\overline{\left[a_{ij}\right]}=\left[\overline{a_{ij}}\right]$

นั่นคือ $$\operatorname{tr}(\overline{A})=\sum_{i=1}^{n}\overline{a_{ii}}=\overline{\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right]}=\overline{\operatorname{tr}(A)}$$

$$\operatorname{tr}(A^*)=\operatorname{tr}(\overline{A}^T)=\operatorname{tr}(\overline{A})=\overline{\operatorname{tr}(A)}$$

4) $$\operatorname{tr}(A^*A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ji}}a_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}a_{ij}$$ เนื่องจาก $a_{ij}=a_{ji}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$ □

2.5 เมทริกซ์ย่อย

ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ และกำหนดให้เซตของดัชนี $\Lambda_1 \subseteq \{1,2,...,m\}$ และ $\Lambda_2 \subseteq \{1,2,...,n\}$ โดยที่ $\Lambda_1, \Lambda_2 \neq \varnothing$ เรานิยาม เมทริกซ์ย่อย (submatrix) ของ A ที่มีแถวกำหนดโดย Λ_1 และมีคอลัมน์กำหนดโดย Λ_2 เป็น $A(\Lambda_1, \Lambda_2)$ เช่น ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\Lambda_1 = \{1,2\}$, $\Lambda_2 = \{1,3\}$ และ $\Lambda_3 = \{3\}$ จะได้ว่า

$$A(\Lambda_1, \Lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad A(\Lambda_3, \Lambda_1) = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad A(\Lambda_2, \Lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่ $m = n$ และ $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ เราเรียก $A(\Lambda, \Lambda)$ ว่า เมทริกซ์ย่อยสำคัญ (principal submatrix) ของ A ที่แถวและคอลัมน์กำหนดโดย Λ เขียนย่อว่า $A(\Lambda)$

ในกรณีที่ $\Lambda = \{1,2,...,k\}$ สำหรับบาง $k = 1,2,...,n$ เราเรียก เมทริกซ์ย่อยสำคัญ $A(\Lambda)$ ว่าเป็น เมทริกซ์ย่อยสำคัญแบบเรียง (leading principal submatrix) ของ A เช่น ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

แล้ว เมทริกซ์ย่อยสำคัญแบบเรียงทั้งหมดของ A คือ

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

นิยามตัวกำหนด (determinant) ของ เมทริกซ์ย่อย ชนิดต่างๆ ดังนี้

- ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อย ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส เรียกว่า ไมเนอร์ (minor)
- ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยสำคัญ เรียกว่า ไมเนอร์สำคัญ (principal minor)
- ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยสำคัญแบบเรียง เรียกว่า ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง (leading principal minor)

บทที่ 3
ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์

3.1 เมทริกซ์ยูนิทารี

บทนิยาม 3.1 ให้เวกเตอร์ $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{C}^n$ ถ้า $x_i^* x_j = 0$ สำหรับทุก $i \neq j$ ซึ่ง $i, j = 1, 2, \ldots, k$ จะเรียกเซตของเวกเตอร์นี้ว่า เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)

เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set) คือ เซตเชิงตั้งฉาก $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ที่มีสมบัติว่า $x_i^* x_i = 1$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, k$

__ตัวอย่าง 3.2__ จงพิจารณาเซต $\left\{ \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\}$ ว่าเป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ หรือไม่

__วิธีทำ__ ให้ $x_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$ และ $x_2 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$x_1^* x_2 = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0$$

นั่นคือ $\{x_1, x_2\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

$$x_1^* x_1 = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

$$x_2^* x_2 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$$

นั่นคือ $\{x_1, x_2\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

__ดังนั้น__ $\left\{ \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ □

บทนิยาม 3.3

เมทริกซ์ $U \in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่า เมทริกซ์ยูนิทารี (unitary matrix) ก็ต่อเมื่อ $U^* U = I$

เมทริกซ์ $U \in M_n(\mathbb{R})$ จะเรียกว่า เมทริกซ์เชิงตั้งฉากจริง (real orthogonal matrix) ก็ต่อเมื่อ $U^T U = I$

<u>**ตัวอย่าง 3.4**</u> จงแสดงว่าเมทริกซ์ U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี เมื่อ

$$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{bmatrix}$$

<u>**วิธีทำ**</u> $$U^*U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-i & 1+i\\ 1+i & 1-i\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=I$$

<u>**ดังนั้น**</u> เมทริกซ์ $U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี □

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ $U\in M_n$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี
2) U เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $U^*=U^{-1}$
3) $UU^*=I$
4) U^* เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี
5) คอลัมน์ของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ
6) แถวของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ
7) $\|Ux\|=\|x\|$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{C}^n$

พิสูจน์ จะพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน ดังนี้

1) $\Rightarrow$ 2) สมมติว่า U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี จะได้ $U^*U=I$

จากทฤษฎีบทที่ว่า ถ้า $AB=I$ แล้ว $BA=I$

จะได้ $UU^*=I$

$U^*U=I=UU^*$

นั่นคือ U หาผกผันได้ และ $U^{-1}=U^*$

<u>**ดังนั้น**</u> U เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $U^*=U^{-1}$

2) $\Rightarrow$ 3) สมมติว่า U เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $U^* = U^{-1}$

จะได้ว่า $UU^* = UU^{-1}$

นั่นคือ $UU^* = I$

ดังนั้น $UU^* = I$

3) $\Rightarrow$ 4) สมมติว่า $UU^* = I$

$(UU^*)^* = I^*$

$(U^*)^*(U^*) = I$

ดังนั้น U^* เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

4) $\Rightarrow$ 1) สมมติว่า U^* เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

จะได้ว่า $(U^*)^*(U^*) = I$

นั่นคือ $UU^* = I$

จากทฤษฎีบทที่ว่า ถ้า $AB = I$ แล้ว $BA = I$

จะได้ $U^*U = I$

ดังนั้น U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

1) $\Rightarrow$ 7) สมมติว่า U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

ให้ $x \in \mathbb{C}^n$ ต้องแสดงว่า $\|Ux\| = \|x\|$

$$\begin{aligned} \|Ux\|^2 &= (Ux)^*(Ux) \\ &= x^* I x \\ &= x^* x \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\|Ux\| = \|x\|$

7) $\Rightarrow$ 1) สมมติว่า $\|Ux\| = \|x\|$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n$

พิจารณา $x^*U^*Ux = (Ux)^*(Ux)$

$= \|Ux\|^2$

$= \|x\|^2$

$= x^*x$

$= x^*I\,x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n$

นั่นคือ $U^*U = I$

ดังนั้น U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

1) $\Rightarrow$ 5) สมมติว่า U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี นั่นคือ $U^*U = I$

ให้ x_i เป็นคอลัมน์ที่ i ของ U สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$

นั่นคือ $U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $I = U^*U$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^*x_1 & x_1^*x_2 & \cdots & x_1^*x_n \\ x_2^*x_1 & x_2^*x_2 & \cdots & x_2^*x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^*x_1 & x_n^*x_2 & \cdots & x_n^*x_n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $x_i^*x_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ สำหรับ $i, j = 1, 2, ..., n$

นั่นคือ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

ดังนั้น คอลัมน์ของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

5) $\Rightarrow$ 1) สมมติว่า คอลัมน์ของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

เขียน $U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{C}^n \ \ \forall_i = 1,\ldots,n$

จากบทนิยามของเซตเชิงตั้งฉากปรกติ นั่นคือ

$$x_i^* x_j = \begin{cases} 1 \ , \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases} \text{ สำหรับ } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

จะได้ว่า $U^*U = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x_1^*x_1 & x_1^*x_2 & \cdots & x_1^*x_n \\ x_2^*x_1 & x_2^*x_2 & \cdots & x_2^*x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^*x_1 & x_n^*x_2 & \cdots & x_n^*x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

<u>ดังนั้น</u> U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

3) $\Rightarrow$ 6) สมมติว่า $UU^* = I$ ให้ x_i^T เป็นแถวที่ i ของ U

นั่นคือ $U = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{C}^n \ \ \forall_i = 1,\ldots,n$

จะได้ว่า $I = UU^*$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1^T)^* & (x_2^T)^* & \cdots & (x_n^T)^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T(x_1^T)^* & x_1^T(x_2^T)^* & \cdots & x_1^T(x_n^T)^* \\ x_2^T(x_1^T)^* & x_2^T(x_2^T)^* & \cdots & x_2^T(x_n^T)^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^T(x_1^T)^* & x_n^T(x_2^T)^* & \cdots & x_n^T(x_n^T)^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1^* x_1)^T & (x_2^* x_1)^T & \cdots & (x_n^* x_1)^T \\ (x_1^* x_2)^T & (x_2^* x_2)^T & \cdots & (x_n^* x_2)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_1^* x_n)^T & (x_2^* x_n)^T & \cdots & (x_n^* x_n)^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* x_1 & x_2^* x_1 & \cdots & x_n^* x_1 \\ x_1^* x_2 & x_2^* x_2 & \cdots & x_n^* x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^* x_n & x_2^* x_n & \cdots & x_n^* x_n \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $x_i^* x_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ สำหรับ $i, j = 1, 2, \ldots, n$

<u>**ดังนั้น**</u> แถวของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

6) $\Rightarrow$ 3) สมมติว่า แถวของ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

เขียน $U = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{C}^n \ \ \forall_i = 1, \ldots, n$

จากบทนิยามของเซตเชิงตั้งฉากปรกติ นั่นคือ

$x_i^* x_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ สำหรับ $i, j = 1, 2, \ldots, n$

จะได้ว่า $UU^* = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1^T)^* & (x_2^T)^* & \cdots & (x_n^T)^* \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T (x_1^T)^* & x_1^T (x_2^T)^* & \cdots & x_1^T (x_n^T)^* \\ x_2^T (x_1^T)^* & x_2^T (x_2^T)^* & \cdots & x_2^T (x_n^T)^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^T (x_1^T)^* & x_n^T (x_2^T)^* & \cdots & x_n^T (x_n^T)^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1^* x_1)^T & (x_2^* x_1)^T & \cdots & (x_n^* x_1)^T \\ (x_1^* x_2)^T & (x_2^* x_2)^T & \cdots & (x_n^* x_2)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_1^* x_n)^T & (x_2^* x_n)^T & \cdots & (x_n^* x_n)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

<u>**ดังนั้น**</u> $UU^* = I$ □

3.2 เมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

บทนิยาม 3.6 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_n$

จะเรียก A ว่า เมทริกซ์เฮอร์มิเชียน (Hermitian) ถ้า $A^*=A$ และ

จะเรียก A ว่า เมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน (skew-Hermitian) ถ้า $A^*=-A$

ข้อสังเกต ให้ $A,B\in M_n$ ซึ่ง A,B เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนด้วย

1) $A+A^*,\ AA^*,\ A^*A$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับทุก $A\in M_n$
2) ถ้า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน แล้ว A^k เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับทุก $k=1,2,\ldots$ และถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานด้วย แล้ว A^{-1} เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน
3) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน แล้ว $aA+bB$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับทุก $a,b\in\mathbb{R}$
4) ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน แล้ว $aA+bB$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน สำหรับทุก $a,b\in\mathbb{R}$
5) ถ้า $A-A^*$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน สำหรับทุก $A\in M_n$
6) ถ้า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน แล้ว iA เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน
7) ถ้า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน แล้ว iA เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน
8) สำหรับแต่ละ $A\in M_n$ สามารถเขียนได้เป็น

$$A=\frac{1}{2}(A+A^*)+\frac{1}{2}(A-A^*)=H(A)+S(A)$$

เมื่อ $H(A)=\frac{1}{2}(A+A^*)$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน และ

$S(A)=\frac{1}{2}(A-A^*)$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

9) ถ้า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ซึ่งมีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็นจำนวนจริง แล้วจะมีจำนวนสมาชิกซึ่งอยู่เหนือแนวทแยงมุมหลักเป็น $\frac{1}{2}n(n-1)$

พิสูจน์ 1) $(A+A^*)^*=A^*+A=A+A^*$

$(AA^*)^*=(A^*)^*A^*=AA^*$

$(A^*A)^*=A^*(A^*)^*=A^*A$

ดังนั้น $A+A^*,\ AA^*,\ A^*A$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับทุก $A\in M_n$

2) ให้ $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(A^k)^* &= (\underbrace{A\,A\,A\,\ldots\,A}_{k})^* \\
&= \underbrace{A^*A^*A^*\ldots A^*}_{k} \\
&= \underbrace{AAA\ldots A}_{k} \\
&= A^k
\end{aligned}
$$

และ $(A^{-1})^* = \overline{(A^{-1})^T}$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{(A^T)^{-1}} \\
&= \overline{(A^T)}^{-1} \\
&= (A^*)^{-1} \\
&= A^{-1}
\end{aligned}
$$

<u>ดังนั้น</u> $A^k,\ A^{-1}$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

3) $(aA+bB)^* = (aA)^* + (bB)^*$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{a}A^* + \bar{b}B^* \\
&= aA + bB
\end{aligned}
$$

<u>ดังนั้น</u> $aA+bB$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับทุก $a,b \in \mathbb{R}$

4) $(aA+bB)^* = (aA)^* + (bB)^*$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{a}A^* + \bar{b}B^* \\
&= -aA - bB \\
&= -(aA+bB)
\end{aligned}
$$

<u>ดังนั้น</u> $aA+bB$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน สำหรับทุก $a,b \in \mathbb{R}$

5) $(A-A^*)^* = A^* - (A^*)^*$

$$
\begin{aligned}
&= A^* - A \\
&= -(A - A^*)
\end{aligned}
$$

<u>ดังนั้น</u> $A - A^*$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

6) $(iA)^* = \bar{i}A^*$

$= -iA^*$

$= -iA$

<u>**ดังนั้น**</u> iA เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

7) $(iA)^* = \bar{i}A^*$

$= -i(-A)$

$= iA$

<u>**ดังนั้น**</u> iA เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

8) พิจารณาเมทริกซ์ $H(A)$ จะได้ว่า

$$[H(A)]^* = \left[\frac{1}{2}\left(A + A^*\right)\right]^*$$

$$= \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)^*$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^* + A\right)$$

$$= H(A)$$

<u>**ดังนั้น**</u> $H(A)$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

พิจารณาเมทริกซ์ $S(A)$ จะได้ว่า

$$[S(A)]^* = \left[\frac{1}{2}\left(A - A^*\right)\right]^*$$

$$= \frac{1}{2}\left(A - A^*\right)^*$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^* - A\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(A - A^*\right)$$

$$= -S(A)$$

<u>**ดังนั้น**</u> $S(A)$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

9) สมมติว่า $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$

จะได้ว่า $A^{*}=\left[\overline{a_{ji}}\right]_{i,j=1}^{n}$

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

นั่นคือ $A=A^{*}$

$$\left[a_{ij}\right]=\left[\overline{a_{ji}}\right]$$

$$a_{ij}=\overline{a_{ji}} \quad \text{สำหรับทุก } i,j=1,\ldots,n$$

ดังนั้น $a_{ii}=\overline{a_{ii}}$ สำหรับทุก $i=1,\ldots,n$

เพราะฉะนั้น สมาชิกแนวทแยงมุมหลักเป็นจำนวนจริง

$$A=\begin{bmatrix} - & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & - & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & - & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & - \end{bmatrix}$$

จำนวนสมาชิกที่อยู่เหนือแนวทแยงมุมหลัก เท่ากับ

$$\frac{(n^{2}-n)}{2}=\frac{1}{2}(n^{2}-n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

<u>ดังนั้น</u> จำนวนสมาชิกที่อยู่เหนือแนวทแยงมุมหลัก เท่ากับ $\frac{1}{2}n(n-1)$ □

ทฤษฎีบท 3.7 สำหรับแต่ละ $A\in M_{n}$ สามารถเขียน A ในรูปของ $A=S+iT$ ได้แบบเดียวเท่านั้น โดยที่ S,T เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

พิสูจน์ จาก $A=\frac{1}{2}(A+A^{*})+\frac{1}{2}(A-A^{*})$

จะได้ $A=\frac{1}{2}(A+A^{*})+i\left[\left(\frac{-i}{2}\right)(A-A^{*})\right]$

<u>ดังนั้น</u> $S=\frac{1}{2}(A+A^{*})$ และ $T=\left(\frac{-i}{2}\right)(A-A^{*})$

พิจารณาเมทริกซ์ S และ T ว่าเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

$$S^* = \left[\frac{1}{2}(A+A^*)\right]^* = \frac{1}{2}\left(A+A^*\right)^* = \frac{1}{2}\left(A^*+A\right) = \frac{1}{2}\left(A+A^*\right) = S$$

$$T^* = \left[\left(\frac{-i}{2}\right)(A-A^*)\right]^* = \left(\frac{i}{2}\right)\left(A^*-A\right) = \left(\frac{-i}{2}\right)\left(A-A^*\right) = T$$

<u>ดังนั้น</u> S และ T เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

สมมติว่า $A = E + iF$ โดยที่ E, F เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

จะพิสูจน์ว่า $E = S$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2S &= A + A^* \\ &= (E+iF)+(E+iF)^* \\ &= E+iF+E^*-iF^* \\ &= E+iF+E-iF \\ &= 2E \end{aligned}$$

เนื่องจาก $2S = 2E$ นั่นคือ $E = S$

จะพิสูจน์ว่า $F = T$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2T &= (-i)(A-A^*) \\ &= (-i)\left[(E+iF)-(E+iF)^*\right] \\ &= (-i)\left[E+iF-E^*+iF^*\right] \\ &= (-i)(2iF) \\ &= 2F \end{aligned}$$

เนื่องจาก $2T = 2F$ นั่นคือ $F = T$

<u>ดังนั้น</u> สามารถเขียน A ในรูป $A = S + iT$ ได้แบบเดียวเท่านั้น □

ทฤษฎีบท 3.8 สำหรับแต่ละ $A \in M_n$ สามารถเขียน A ในรูป $A = B + C$ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น โดยที่ B เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน และ C เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

พิสูจน์ จะพิสูจน์ว่า $A = B + C$

จาก $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$

<u>ดังนั้น</u> $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ และ $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$

พิจารณาเมทริกซ์ B ว่าเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน และ C ว่าเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

$$B^* = \left[\frac{1}{2}(A + A^*)\right]^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}\left(A^* + A\right) = B$$

$$C^* = \left[\frac{1}{2}(A - A^*)\right]^* = \frac{1}{2}\left(A^* - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - A^*\right) = -C$$

<u>ดังนั้น</u> B ว่าเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน และ C ว่าเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

สมมติว่า $A = G + H$ โดยที่ G เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน และ H เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน

จะพิสูจน์ว่า $G = B$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2B &= A + A^* \\ &= (G + H) + (G + H)^* \\ &= G + H + G^* + H^* \\ &= G + H + G - H \\ &= 2G \end{aligned}$$

เนื่องจาก $2B = 2G$ นั่นคือ $G = B$

จะพิสูจน์ว่า $H = C$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2C &= A - A^* \\ &= (G + H) - (G + H)^* \\ &= G + H - G^* + H^* \\ &= 2H \end{aligned}$$

เนื่องจาก $2C = 2H$ นั่นคือ $H = C$

<u>ดังนั้น</u> สามารถเขียน A ในรูป $A = B + C$ ได้แบบเดียวเท่านั้น □

ทฤษฎีบท 3.9 ให้ $A \in M_n$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ดังนั้น

1) $x^* Ax$ เป็นจำนวนจริง สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n$

2) ทุกค่าลักษณะเฉพาะของ A เป็นจำนวนจริง

3) $S^* AS$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับทุก $S \in M_n$

พิสูจน์ 1) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

เนื่องจาก $z \in \mathbb{C}$ จะเป็นจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ $\overline{z} = z$

$$\begin{aligned}\overline{x^* Ax} &= \left(\overline{x^* Ax}\right)^T \\ &= (x^* Ax)^* \\ &= x^* A^* x \\ &= x^* Ax\end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $x^* Ax$ เป็นจำนวนจริง สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{C}^n$

2) สมมติว่า $\lambda \in \sigma(A)$ โดยมี $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

จะได้
$$\begin{aligned}Ax &= \lambda x \\ x^* Ax &= x^* (\lambda x) \\ x^* Ax &= \lambda (x^* x) \\ \lambda &= \frac{x^* Ax}{x^* x}\end{aligned}$$

จากข้อ 1) $x^* Ax$ เป็นจำนวนจริง และ $x^* x$ เป็นจำนวนจริงบวก

<u>**ดังนั้น**</u> ทุกค่าลักษณะเฉพาะของ A เป็นจำนวนจริง

3) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน นั่นคือ $A^* = A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(S^* AS)^* &= S^* A^* (S^*)^* \\ &= S^* A^* S \\ &= S^* AS\end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $S^* AS$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับทุก $S \in M_n$ □

ทฤษฎีบท 3.10 (ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน)

$A \in M_n$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ก็ต่อเมื่อ มีเมทริกซ์ยูนิทารี $U \in M_n$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D \in M_n(\mathbb{R})$ ซึ่งทำให้ $A = UDU^*$

พิสูจน์

($\Leftarrow$) สมมติว่า มีเมทริกซ์ยูนิทารี $U \in M_n$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D \in M_n(\mathbb{R})$ ที่ทำให้ $A = UDU^*$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A^* &= (UDU^*)^* \\ &= (U^*)^* D^* U^* \\ &= UDU^* \qquad \because \ D^* = \overline{D}^T = D^T = D \\ &= A \end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

($\Rightarrow$) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ปรกติ

โดยทฤษฎีบท 3.14 จะได้ว่า A ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงยูนิทารีได้

นั่นคือ มีเมทริกซ์ยูนิทารี $U \in M_n$ และเมทริกซ์ทแยงมุม D ที่ทำให้

$$U^*AU = D \text{ หรือ } A = UDU^*$$

เนื่องจากเมทริกซ์ D คล้ายกับเมทริกซ์ A จะได้ว่า $\sigma(D) = \sigma(A)$

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน จะได้ว่า $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ นั่นคือ $D \in M_n(\mathbb{R})$

<u>**ดังนั้น**</u> เมทริกซ์ยูนิทารี $U \in M_n$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D \in M_n(\mathbb{R})$ ซึ่ง $A = UDU^*$ $\square$

3.3 เมทริกซ์ปรกติ

บทนิยาม 3.11 $A \in M_n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์ปรกติ (normal matrices) ถ้า $A^*A = AA^*$

<u>ข้อสังเกต</u>

1) ทุกเมทริกซ์ยูนิทารี เป็นเมทริกซ์ปรกติ $(U^*U = I = UU^*)$

2) ทุกเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน เป็นเมทริกซ์ปรกติ $(A^*A = A^2 = AA^*)$

3) ทุกเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน เป็นเมทริกซ์ปรกติ $(A^*A = -A^2 = AA^*)$

4) ทุกเมทริกซ์ทแยงมุม เป็นเมทริกซ์ปรกติ

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ปรกติ แต่ A ไม่เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี, ไม่เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน, ไม่เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนเสมือน และไม่เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

บทนิยาม 3.12 เมทริกซ์ $A, B \in M_n$ จะกล่าวว่าเป็นสมมูลเชิงยูนิทารี (unitarily equivalent) กัน ถ้ามีเมทริกซ์ยูนิทารี $U \in M_n$ ซึ่งทำให้ $B = U^*AU = U^{-1}AU$

บทนิยาม 3.13 ถ้า $A \in M_n$ เป็นสมมูลเชิงยูนิทารี กับ เมทริกซ์ทแยงมุม แล้วเรากล่าวว่า A ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงยูนิทารี (unitarily diagonalizable) ได้

ทฤษฎีบท 3.14 (ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์ปรกติ)

ข้อความต่อไปนี้สมมูลกันสำหรับ $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ ซึ่ง $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$

1) A เป็นเมทริกซ์ปรกติ

2) A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงยูนิทารี นั่นคือ มีเมทริกซ์ยูนิทารี U ที่ทำให้

$$U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

3) มีเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$ ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A จำนวน n เวกเตอร์

พิสูจน์ สมมติว่า $A \in M_n(\mathbb{C})$ ซึ่ง $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$

1) $\Rightarrow$ 2) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ปรกติ โดยทฤษฎีบท 2.13 จะมีเมทริกซ์ยูนิทารี U ที่ทำให้ $U^*AU=T$ เมื่อ T เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน โดย $t_{ii}=\lambda_i \quad \forall i=1,\ldots,n$

จะได้ $T^*T=(U^*AU)^*(U^*AU)$

$$
\begin{aligned}
&= U^*A^*UU^*AU \\
&= U^*A^*AU \\
&= U^*AUU^*AU \\
&= TT^*
\end{aligned}
$$

นั่นคือ T เป็นเมทริกซ์ปรกติ ที่เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

จะได้ว่า T เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม นั่นคือ $U^*AU=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงยูนิทารี ที่ทำให้ $U^*AU=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

2) $\Rightarrow$ 1) สมมติว่า มีเมทริกซ์ยูนิทารี U ที่ทำให้ $U^*AU=D$

เมื่อ $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ จะได้ว่า $A=UDU^*$

$$
\begin{aligned}
A^*A &= (UDU^*)^*(UDU^*) \\
&= UD^*U^*UDU^* \\
&= UD^*DU^* \\
&= UDD^*U^* \\
&= UDU^*UD^*U^* \\
&= AA^*
\end{aligned}
$$

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์ปรกติ

2) $\Rightarrow$ 3) สมมติว่า มีเมทริกซ์ยูนิทารี U ที่ทำให้ $U^*AU=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

เขียน $U=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{C}^n \quad \forall i$

สร้างเซต $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ จะได้ว่า เซตนี้เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

เนื่องจาก $AU=U\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

จะได้ว่า $A\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} Ax_1 & \dots & Ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad \forall i = 1,\dots,n$$

เนื่องจาก $\|x_i\| = 1$ นั่นคือ $x_i \neq 0 \quad \forall i = 1,\dots,n$

จะได้ว่า x_i เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A สำหรับ $i = 1,\dots,n$

ดังนั้น มีเซตเชิงตั้งฉากปรกติที่เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A จำนวน n เวกเตอร์

3) $\Rightarrow$ 2) สมมติว่ามี $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ที่เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$

เมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A โดย x_i สอดคล้องกับ $\lambda_i \in \sigma(A)$

สร้าง $U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ จากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

จะได้
$$\begin{aligned} AU &= A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \dots & Ax_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $AU = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ จะได้ว่า $U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงยูนิทารี ที่ทำให้ $U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ □

บทที่ 4
สมบัติของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

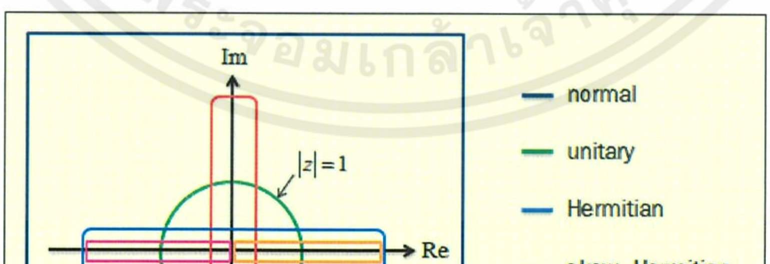
4.1 เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนและฟังก์ชันกำลังสอง

บทนิยาม 4.1 เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{C})$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน จะเรียกว่า

- เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$
- เมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n$
- เมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax < 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$
- เมทริกซ์ที่ไม่แน่นอน ก็ต่อเมื่อ มี $x, y \in \mathbb{C}^n$ ที่ทำให้ $x^*Ax > 0$ และ $y^*Ay < 0$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ความหมายของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนใน $M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ คือ จำนวนจริงบวก ดังนั้นแนวคิดของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน จึงเป็นการขยายแนวคิดของจำนวนจริงบวกซึ่งมีมิติเดียวไปสู่มิติใดๆ
2. ความหมายของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนใน $M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ คือ จำนวนจริงบวก หรือศูนย์ ดังนั้นแนวคิดของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน จึงเป็นการขยายแนวคิดของจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ ไปสู่มิติใดๆ
3. ความหมายของเมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอนใน $M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ คือ จำนวนจริงลบ ดังนั้นแนวคิดของเมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน จึงเป็นการขยายแนวคิดของจำนวนจริงลบซึ่งมีมิติเดียวไปสู่มิติใดๆ
4. A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $-A$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน



รูปที่ 4.1 : ความสัมพันธ์ของเมทริกซ์ต่างๆ ใน 1 มิติ

ทฤษฎีบท 4.2 เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{R})$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตร จะเป็น

1) เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $x^T Ax > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
2) เมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $x^T Ax \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n$
3) เมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $x^T Ax < 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

พิสูจน์ 1) สมมติว่า $A \in M_n(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร นั่นคือ $A^T = A$

($\Rightarrow$) สมมติว่า A เป็น เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

ให้ $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

นั่นคือ $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ และ $x^* = x^T$

จะได้ว่า $x^* Ax = x^T Ax > 0$

<u>ดังนั้น</u> $x^T Ax > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $x^T Ax > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

เนื่องจาก $A \in M_n(\mathbb{R})$ จะได้ $\overline{A} = A$

$$A^* = \overline{A}^T = A^T = A$$

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

ให้ $y \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ เขียน $y = y_1 + iy_2$

เมื่อ $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ และ y_1, y_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

$$\begin{aligned} y^* Ay &= (y_1 + iy_2)^* A(y_1 + iy_2) \\ &= (y_1^* - iy_2^*)A(y_1 + iy_2) \\ &= y_1^* Ay_1 - iy_2^* Ay_1 + iy_1^* Ay_2 + y_2^* Ay_2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $y_2^* Ay_1 = y_2^T Ay_1 = (y_2^T Ay_1)^T = y_1^T A^T y_2 = y_1^* A^T y_2 = y_1^* Ay_2$

จะได้ว่า $y^* Ay = y_1^* Ay_1 + y_2^* Ay_2$

$$= y_1^T Ay_1 + y_2^T Ay_2 > 0$$

เพราะ $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ และ y_1, y_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

Note : ข้อ 2) และ ข้อ 3) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 1)

<u>ตัวอย่าง 4.3</u> พิจารณาเมทริกซ์สมมาตร $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2-\{0\}$

จะได้ $x^TAx=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

$$=1x_1{}^2+2(2)x_1x_2+5x_2{}^2$$

$$=x_1{}^2+4x_1x_2+5x_2{}^2$$

$$=(x_1{}^2+4x_1x_2+4x_2{}^2)+x_2{}^2$$

$$=(x_1+2x_2)^2+x_2{}^2$$

$$\geq 0$$

และ $x^TAx=0 \Leftrightarrow x_1+2x_2=0$ และ $x_2=0$

$\Leftrightarrow x_1=0$ และ $x_2=0$

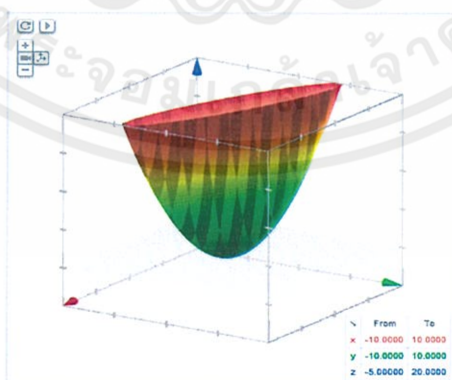
เนื่องจาก x_1,x_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน นั่นคือ

$$x^TAx>0$$

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

➢ **กราฟของฟังก์ชัน** $f(x)=x^TAx$, $x\in\mathbb{R}^2$

$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2)^2+x_2{}^2$



รูปที่ 4.2 : กราฟของฟังก์ชันที่เป็นบวกแน่นอน

<u>ตัวอย่าง 4.4</u> พิจารณาเมทริกซ์สมมาตร $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$

จะได้ $x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= 1{x_1}^2 + 2(-2)x_1x_2 + 4{x_2}^2$$

$$= {x_1}^2 - 4x_1x_2 + 4{x_2}^2$$

$$= (x_1 - 2x_2)^2$$

$$\geq 0$$

นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

พิจารณา $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ จะได้ว่า

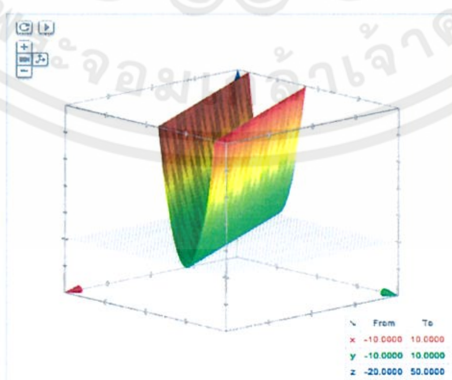
$$x^T A x = 0$$

นั่นคือ A ไม่ใช่เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน □

➢ **กราฟของฟังก์ชัน** $f(x) = x^T A x \ , \ x \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2)^2$$



รูปที่ 4.3 : กราฟของฟังก์ชันกึ่งบวกแน่นอน

พิจารณาเมทริกซ์สมมาตร

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$

เรานิยาม **ฟังก์ชันกำลังสอง** หรือ**รูปแบบกำลังสอง** (quadratic function) ที่สอดคล้องกับ A โดย

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad , \quad f(u)=u^T Au$$

เมื่อ $u=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ จะเห็นว่า

$$f(x,y)=f(u)=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$$

จุดวิกฤตของ f คือจุด (x,y) ที่ทำให้

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0 \text{ และ } \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$$

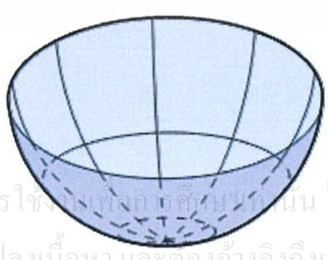
จะได้ว่า จุดกำเนิด $(0,0)$ เป็นจุดวิกฤตของ f ซึ่งอาจเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์/จุดต่ำสุดสัมพัทธ์/จุดอานม้า โดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$ax^2+2bxy+cy^2=a\left[x^2+\frac{2b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\left(\frac{ac-b^2}{a^2}\right)y^2\right]$$

ให้ $D=ac-b^2=\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)/4$ รูปร่างของกราฟของ f ขึ้นกับสัมประสิทธิ์ D หน้า y^2 ว่าเป็นบวก ลบ หรือศูนย์ ค่า D ดังกล่าวเรียกว่า **ดิสคริมิแนนท์** จะได้ว่า

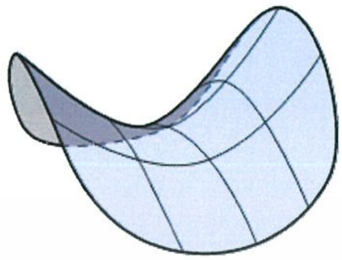
➢ ถ้า $D>0$ แล้วพจน์ในวงเล็บใหญ่จะเป็นบวกหรือศูนย์ ดังนั้น f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์

- ถ้า $a>0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยกราฟจะมีลักษณะคล้ายถ้วยหงาย เช่น $z=x^2+y^2$
- ถ้า $a<0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ โดยกราฟจะมีลักษณะคล้ายถ้วยคว่ำ เช่น $z=-x^2-y^2$



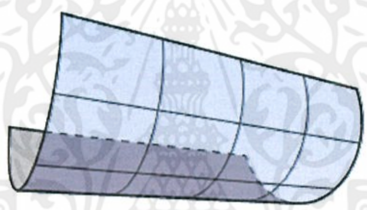
รูปที่ 4.4 : กราฟรูปถ้วยหงาย (Bowl)

➢ ถ้า $D<0$ แล้วพจน์ในวงเล็บใหญ่จะอยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง ซึ่งทำให้ f มีการเพิ่มขึ้นในบางทิศทาง และลดลงในบางทิศทาง ดังเช่น $z=x^2-y^2$ ในกรณีนี้จุด $(0,0)$ เป็นจุดอานม้า



รูปที่ 4.5 : กราฟรูปอานม้า (Saddle)

➢ ถ้า $D=0$ เราจะได้ฟังก์ชันกำลังสอง $a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2$ ซึ่งมีกราฟคล้ายทรงกระบอกเชิงพาราโบลา



รูปที่ 4.6 : กราฟรูปรางน้ำ (Trough)

สำหรับฟังก์ชันกำลังสองดังกล่าว เมื่อพิจารณาจากสมการกำลังสองสมบูรณ์ข้างต้น จะได้ว่า จุดสุดขีดสัมพัทธ์ จะเป็นจุดสุดขีดสัมบูรณ์ ดังนั้น

A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน $\Leftrightarrow x^T Ax>0$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}^2-\{0\}$

$\Leftrightarrow (0,0)$ เป็นจุดต่ำสุดของ f

$\Leftrightarrow f_{xx}(0,0)>0$ และ $D>0$

$\Leftrightarrow a>0$ และ $ac-b^2>0$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน $\Leftrightarrow x^T Ax<0$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}^2-\{0\}$

$\Leftrightarrow (0,0)$ เป็นจุดสูงสุดของ f

$\Leftrightarrow f_{xx}(0,0)<0$ และ $D>0$

$\Leftrightarrow a<0$ และ $ac-b^2>0$

เนื่องจากจุดอานม้าของ f เป็นจุดวิกฤตที่ค่าของ f เพิ่มขึ้นในทิศทางหนึ่ง และลดลงในทิศทางหนึ่ง (นั่นคือ บริเวณรอบจุดดังกล่าวจะมีลักษณะคล้ายอานม้า) จะได้ว่า

$$A \text{ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่แน่นอน} \Leftrightarrow (0,0) \text{ เป็นจุดอานม้าของ } f$$

<u>ตัวอย่าง 4.5</u> จงพิจารณา $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

<u>วิธีทำ</u> ฟังก์ชันกำลังสองที่สอดคล้องกับ A คือ

$$f(u)=u^T Au \ , \ u=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$=2x^2+2(2)xy+1y^2$$

$$=2x^2+4xy+y^2$$

เนื่องจาก $D=\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)/4$ จะได้ว่า

$$f_x=4x+4y \ , \ f_{xx}=4$$

$$f_y=4x+2y \ , \ f_{yy}=2$$

$$f_{xy}=4$$

นั่นคือ $D=\left(4\cdot 2-4^2\right)/4=-2<0$

จะได้ว่า $(0,0)$ เป็นจุดอานม้าของ f

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์ที่ไม่แน่นอน □

<u>ตัวอย่าง 4.6</u> จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x,y)=2xy$ เมื่อ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่าจุด $(0,0)$ เป็นจุดอานม้าของ f

เพราะไม่ใช่จุดต่ำสุด หรือจุดสูงสุด

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตรที่สอดคล้องกับ f

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์ที่ไม่แน่นอน □

ในกรณีทั่วไป พิจารณาเมทริกซ์สมมาตร $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$ เรานิยามฟังก์ชันกำลังสอง ที่สอดคล้องกับ A โดย

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\quad ,\quad f(x)=x^TAx$$

เมื่อ $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ จะเห็นว่า

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

จุดวิกฤตของ f คือจุด $(0,...,0)$ ดังนั้น

$(0,...,0)$ เป็นจุดต่ำสุดของ $f \iff A$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

$(0,...,0)$ เป็นจุดสูงสุดของ $f \iff A$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน

$(0,...,0)$ เป็นจุดอานม้าของ $f \iff A$ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่แน่นอน

ข้อสังเกต ให้ $A\in M_n(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1) A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax\in\mathbb{R}$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{C}^n$

2) A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax>0$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{C}^n-\{0\}$

พิสูจน์

1) $(\Rightarrow)$ สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

$$\begin{aligned}\overline{x^*Ax}&=\left(\overline{x^*Ax}\right)^T\\&=\left(x^*Ax\right)^*\\&=x^*A^*x\\&=x^*Ax\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^*Ax\in\mathbb{R}$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{C}^n$

$(\Leftarrow)$ สมมติว่า $x^*Ax\in\mathbb{R}$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{C}^n$

$$x^*Ax=(x^*Ax)^*=x^*A^*x$$

ดังนั้น $A=A^*$ นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

2) $(\Rightarrow)$ เป็นจริงตามบทนิยาม 4.1

$(\Leftarrow)$ สมมติว่า $x^{*}Ax > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}^{n} - \{0\}$

เนื่องจาก $x^{*}Ax > 0$ แสดงว่า $x^{*}Ax \in \mathbb{R}$

จากข้อ 1) จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

<u>ตัวอย่าง 4.7</u> จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนหรือไม่ รวมทั้งเขียนฟังก์ชันกำลังสองที่สอดคล้อง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> จากรูปแบบกำลังสองจะได้ว่า

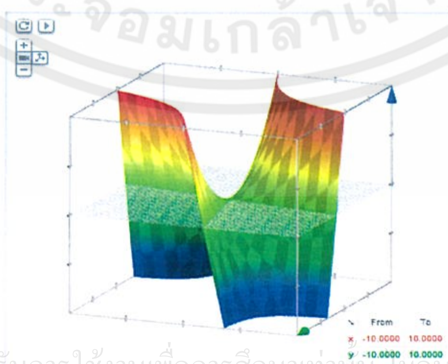
$$u^{T}Au = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^{2} + 2bxy + cy^{2}$$

1) พิจารณาเมทริกซ์ A จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u^{T}Au &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= 1x^{2} + 2(3)xy + 5y^{2} \\ &= x^{2} + 6xy + 5y^{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a = 1 > 0$ และ $D = ad - b^{2} = 5 - 6 = -1 < 0$

<u>ดังนั้น</u> A ไม่เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □



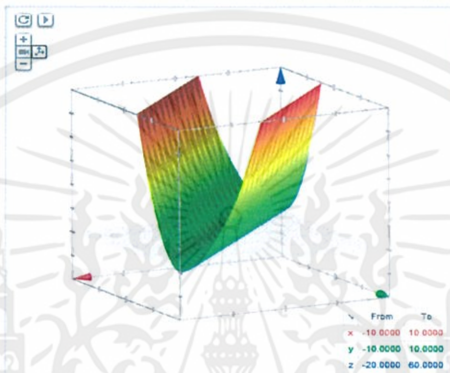
รูปที่ 4.7 : กราฟของเมทริกซ์ A

2) พิจารณาเมทริกซ์ B จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
u^T B u &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= 1x^2 + 2(-1)xy + 1y^2 \\
&= x^2 - 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $a = 1 > 0$ และ $D = ad - b^2 = 1 - 1 = 0$

<u>ดังนั้น</u> B ไม่เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □



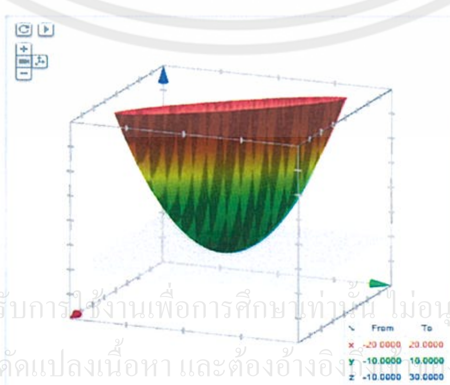
รูปที่ 4.8 : กราฟของเมทริกซ์ B

3) พิจารณาเมทริกซ์ C จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
u^T C u &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= 2x^2 + 2(3)xy + 5y^2 \\
&= 2x^2 + 6xy + 5y^2
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $a = 1 > 0$ และ $D = ad - b^2 = 10 - 9 = 1 > 0$

<u>ดังนั้น</u> C เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □



รูปที่ 4.9 : กราฟของเมทริกซ์ C

4.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

ทฤษฎีบท 4.8 ให้ $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน จะได้ว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

1) $\alpha A+\beta B$ สำหรับทุก $\alpha,\beta>0$

2) $\overline{A}, A^T$

3) X^*AX สำหรับทุก $X \in M_n(\mathbb{C})$ ที่หาผกผันได้

4) ทุกเมทริกซ์ย่อยสำคัญของ A

พิสูจน์ สมมติว่า $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

1) $$\begin{aligned}(\alpha A+\beta B)^* &= (\alpha A)^*+(\beta B)^* \\ &= \overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^* \\ &= \alpha A+\beta B\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ และ A,B เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

<u>**ดังนั้น**</u> $\alpha A+\beta B$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

ให้ $x \in \mathbb{C}^n-\{0\}$ และ A,B เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

จะได้ว่า $x^*Ax>0$ และ $x^*Bx>0$

เนื่องจาก $\alpha,\beta>0$ จะได้ว่า

$$x^*(\alpha A)x > 0 \quad \text{.............(1)}$$

$$x^*(\beta B)x > 0 \quad \text{.............(2)}$$

(1)+(2) ; $$\begin{aligned}x^*(\alpha A)x+x^*(\beta B)x &> 0 \\ x^*(\alpha Ax+\beta Bx) &> 0 \\ x^*(\alpha A+\beta B)x &> 0\end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $\alpha A+\beta B$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

2) ให้ $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ และ A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

$(\overline{A})^* = \overline{(A^*)} = \overline{A}$ ดังนั้น $\overline{A}$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

$$\begin{aligned} x^*\overline{A}x &= (x^*\overline{A}x)^T \\ &= x^T\overline{A}^T(x^*)^T \\ &= x^T A^* \overline{x} \\ &= (\overline{\overline{x}})^T A\overline{x} \qquad \because A \text{ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน} \\ &= (\overline{x})^* A\overline{x} > 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\overline{x} \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ และ A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

<u>**ดังนั้น**</u> $\overline{A}$ เป็น เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

$(A^T)^* = (A^*)^T = A^T$ ดังนั้น A^T เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

$$\begin{aligned} x^*A^Tx &= (x^*A^Tx)^T \\ &= x^T(A^T)^T(x^*)^T \\ &= (\overline{\overline{x}})^T A(\overline{x}^T)^T \\ &= (\overline{x})^* A\overline{x} > 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\overline{x} \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ และ A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

<u>**ดังนั้น**</u> A^T เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

3) ให้ $X \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ และ $u \in \mathbb{C}^n - \{0\}$

$$(X^*AX)^* = X^*A^*(X^*)^* = X^*AX$$

<u>**ดังนั้น**</u> X^*AX เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

จะได้ว่า $u^*(X^*AX)u = (Xu)^*A(Xu)$

เนื่องจาก X หาผกผันได้ และ $u \neq 0$

จะได้ว่า $Xu \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ และ A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

นั่นคือ $(Xu)^*A(Xu) > 0$

<u>**ดังนั้น**</u> X^*AX เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

4) ให้ $A \in M_n$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน และ $A(\Lambda)$ เป็นเมทริกซ์ย่อยสำคัญของ A โดยที่ $\Lambda \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ โดย $|\Lambda| = r > 0$

พิจารณา $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^r - \{0\}$

จะได้ว่า $x^* A(\Lambda)x = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \cdots & \overline{x}_r \end{bmatrix} A(\Lambda) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = y^* Ay$

เมื่อ $y \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ ได้จาก x โดยเพิ่มอีก $n-r$ สมาชิกด้วย 0 ในตำแหน่งที่อยู่นอก Λ เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน และ $y \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ จะได้ว่า $y^* Ay > 0$

นั่นคือ $x^* A(\Lambda)x > 0$ จะได้ว่า $A(\Lambda)$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

ดังนั้น ทุกเมทริกซ์ย่อยสำคัญ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

หมายเหตุ ตัวอย่างอธิบายเพิ่มเติมการพิสูจน์ข้อ 4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

สมมติว่า $\Lambda = \{1, 3\}$ นั่นคือ $|\Lambda| = 2$

พิจารณา $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} x^* A(\Lambda)x &= \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & 0 & \overline{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= y^* Ay \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^* A(\Lambda)x = y^* Ay$ □

4.3 สมบัติเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

ทฤษฎีบท 4.9 (ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน)

ข้อความต่อไปนี้สมมูลกันสำหรับ $A \in M_n(\mathbb{C})$

1) A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน
2) A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ที่มีทุกค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงบวก
3) A เป็นเมทริกซ์ปรกติ ที่มีทุกค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงบวก
4) A สามารถเขียนในรูปของ $A = UDU^*$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก และ $U \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

พิสูจน์

1) $\Rightarrow$ 2) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ให้ $\lambda \in \sigma(A)$ โดยมี $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้อง นั่นคือ

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ x^* Ax &= x^* \lambda x \\ x^* Ax &= \lambda (x^* x) \\ \lambda &= \frac{x^* Ax}{(x^* x)} > 0 \quad \text{เนื่องจาก} \quad x^* Ax > 0 \quad \text{และ} \quad x^* x = \|x\|^2 > 0 \end{aligned}$$

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ที่มีทุกค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงบวก

2) $\Rightarrow$ 3) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ที่มีทุกค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงบวก เนื่องจาก ทุกเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน เป็นเมทริกซ์ปรกติ

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์ปรกติ ที่มีทุกค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงบวก

3) $\Rightarrow$ 4) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ปรกติ ที่มีทุกค่าลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริงบวก โดยทฤษฎีบท 3.14 จะมีเมทริกซ์ยูนิทารี U และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $A = UDU^*$ เนื่องจาก $\sigma(A) = \sigma(D)$ และ $\sigma(D) = \{$ สมาชิกในแนวทแยงมุมทั้งหมดของ D $\}$ นั่นคือ สมาชิกในแนวทแยงมุมของ D เป็นจำนวนจริงบวก

<u>**ดังนั้น**</u> $A = UDU^*$ และ D มีสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก

4) $\Rightarrow$ 1) สมมติว่า A สามารถเขียนในรูปของ $A = UDU^*$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก และ $U \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

เนื่องจาก $\sigma(D) = \{$ สมาชิกในแนวทแยงมุมทั้งหมดของ $D\}$

ซึ่ง D มีสมาชิกในแนวทแยงมุมทั้งหมดเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า D เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน และ U หาผกผันได้

โดยทฤษฎีบท 4.8 ข้อ 3) จะได้ว่า UDU^* เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน จะได้ว่า เมทริกซ์ A^k เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ สมมติว่า $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

จากทฤษฎีบท 4.9 จะได้ว่า $A = UDU^*$ เมื่อ U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

และ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} A^k &= (UDU^*)^k \\ &= UD^kU^* \\ &= (U^*)^* D^k U^* \\ &= (U^*)^* \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} U^* \end{aligned}$$

เนื่องจาก D^k เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน และ U^* หาผกผันได้

โดยทฤษฎีบท 4.8 ข้อ 3) จะได้ว่า $(U^*)^* D^k U^*$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

<u>**ดังนั้น**</u> A^k เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

บทแทรก 4.11 ถ้า $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน แล้ว A หาผกผันได้ และ A^{-1} เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

พิสูจน์ สมมติว่า $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

จะได้ว่า ทุกค่าลักษณะเฉพาะของ A มีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น A หาผกผันได้

จากทฤษฎีบท 4.9 จะได้ว่า $A = UDU^*$ เมื่อ U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

และ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(UDU^*\right)^{-1} \\ &= \left(U^*\right)^{-1} D^{-1}U^{-1} \\ &= UD^{-1}U^* \\ &= (U^*)^* D^{-1}U^* \end{aligned}$$

เนื่องจาก D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า D^{-1} เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก

นั่นคือ D^{-1} เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน และ U^* หาผกผันได้

โดยทฤษฎีบท 4.8 ข้อ 3) จะได้ว่า $(U^*)^* D^{-1}U^*$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

ดังนั้น A^{-1} เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

4.4 สมบัติเกี่ยวกับตัวกำหนด รอยเมทริกซ์ และไมเนอร์สำคัญ

บทแทรก 4.12 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน แล้วค่าต่อไปนี้เป็นจำนวนจริงบวก

1) ตัวกำหนดของ A
2) รอยเมทริกซ์ของ A
3) ทุกไมเนอร์สำคัญของ A
4) ทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมของ A

พิสูจน์ สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน นั่นคือ ทุกค่าลักษณะเฉพาะ A เป็นจำนวนจริงบวก

1) พิจารณาตัวกำหนดของ A จะได้ว่า

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0 \text{ เมื่อ } \sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

<u>**ดังนั้น**</u> ตัวกำหนดของ A เป็นจำนวนจริงบวก

2) พิจารณารอยเมทริกซ์ของ A จะได้ว่า

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0 \text{ เมื่อ } \sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

<u>**ดังนั้น**</u> รอยเมทริกซ์ของ A เป็นจำนวนจริงบวก

3) สมมติให้ B เป็นเมทริกซ์ย่อยสำคัญของ A

โดยทฤษฎีบท 4.8 ข้อ 4) จะได้ว่า B เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

จากข้อ 1) จะได้ว่า $\det B > 0$

<u>**ดังนั้น**</u> ทุกไมเนอร์สำคัญของ A เป็นจำนวนจริงบวก

4) พิจารณาไมเนอร์สำคัญของ A ขนาด 1×1

ที่อยู่ในแถว และหลักที่ i สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$

จะได้ว่า $a_{ii} = \det[a_{ii}] > 0$

<u>**ดังนั้น**</u> ทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมของ A เป็นจำนวนจริงบวก □

ทฤษฎีบท 4.13 ให้ $A \in M_n(\mathbb{R})$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน
2) A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ที่มีทุกไมเนอร์สำคัญแบบเรียงเป็นจำนวนจริงบวก

พิสูจน์

1) $\Rightarrow$ 2) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

$A = A^* = \overline{A}^T = A^T$ ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ให้ A_k เป็นเมทริกซ์ย่อยสำคัญแบบเรียงของ A

ที่ได้จากแถว และคอลัมน์ ที่ $1,2,\ldots,k$ โดย $1 \le k \le n$

จะได้ $\det A_k > 0$ โดยบทแทรก 4.12 ข้อ 3)

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ที่มีทุกไมเนอร์สำคัญแบบเรียงเป็นจำนวนจริงบวก

2) $\Rightarrow$ 1) ละเว้นการพิสูจน์ □

<u>ตัวอย่าง 4.14</u> จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็น เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน หรือไม่

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $A^T = A$ นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง ขนาด 1×1 คือ

$$\det[5] = 5 \quad > 0$$

ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง ขนาด 2×2 คือ

$$\det \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 9 \quad > 0$$

ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง ขนาด 3×3 คือ

$$\det \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 1 \quad > 0$$

<u>ดังนั้น</u> A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

ทฤษฎีบท 4.15 ให้ $A \in M_n(\mathbb{R})$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) A เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน
2) A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ที่มีทุกไมเนอร์สำคัญเป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

พิสูจน์

1) $\Rightarrow$ 2) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

$A = A^* = \overline{A}^T = A^T$ ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ให้ B เป็นเมทริกซ์ย่อยสำคัญของ A จะได้ว่า B เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน

นั่นคือ $\det B \geq 0$ โดยที่ $\det B$ เป็นไมเนอร์สำคัญ

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ที่มีทุกไมเนอร์สำคัญเป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

2) $\Rightarrow$ 1) ละเว้นการพิสูจน์ $\square$

<u>**ตัวอย่าง 4.16**</u> จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็น เมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน หรือไม่

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $A^T = A$ นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ไมเนอร์สำคัญ ขนาด 1×1 คือ

$\Lambda = \{1\}$, $\det[2] = 2 \geq 0$

$\Lambda = \{2\}$, $\det[2] = 2 \geq 0$

$\Lambda = \{3\}$, $\det[2] = 2 \geq 0$

ไมเนอร์สำคัญ ขนาด 2×2 คือ

$\Lambda = \{1,2\}$, $\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \geq 0$

$\Lambda = \{1,3\}$, $\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \geq 0$

$\Lambda = \{2,3\}$, $\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \geq 0$

ไมเนอร์สำคัญ ขนาด 3×3 คือ

$$\Lambda=\{1,2,3\}\ ,\ \det\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}=0\ \ \geq 0$$

ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน □

ตัวอย่าง 4.17 จงพิจารณาว่า $A=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนหรือไม่

1) ฟังก์ชันกำลังสองที่สอดคล้อง

ให้ $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2-\{0\}$

จะได้ $x^TAx=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}&=5x_1^2+2(4)x_1x_2+5x_2^2\\&=5x_1^2+8x_1x_2+5x_2^2\\&=(4x_1^2+8x_1x_2+4x_2^2)+x_1^2+x_2^2\\&=(2x_1+2x_2)^2+x_1^2+x_2^2\ >0\end{aligned}$$

ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

2) ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง

เนื่องจาก $A^T=A$ นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง ขนาด 1×1 จะได้ว่า $\det[5]=5>0$

ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง ขนาด 2×2 จะได้ว่า $\det\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}=9>0$

ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

3) ค่าลักษณะเฉพาะ

ให้ $\lambda_1,\lambda_2\in\sigma(A)$ เนื่องจาก ทุกผลบวกของทุกแถวเท่ากับ 9 จะได้ว่า $\lambda_1=9>0$

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2&=\operatorname{tr}A\\9+\lambda_2&=10\\\lambda_2&=1>0\end{aligned}$$

ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

บทที่ 5
การแยกเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

5.1 การแยกเมทริกซ์โดยทฤษฎีเชิงสเปกตรัม

ให้ $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน โดยทฤษฎีบท 4.9
จะได้ว่า A สามารถเขียนในรูป

$$A = UDU^*$$

เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก
และ U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

<u>**ตัวอย่าง 5.1**</u> จงเขียนเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูป $A = UDU^*$ เมื่อ U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี และ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $A^* = A$ ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 4$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A = 3$$

จะได้ว่า $\sigma(A) = \{1, 3\}$ นั่นคือ ทุกค่าลักษณะเฉพาะมากกว่าศูนย์

<u>**ดังนั้น**</u> A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

จากทฤษฎีบท 4.9 จะได้ว่า A สามารถเขียนในรูป $A = UDU^*$ ได้

- หาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 = x_1$$

$$x_2 = -x_1$$

เลือก $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- หาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$2y_1 + y_2 = 3y_1$$

$$y_2 = y_1$$

เลือก $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- สร้าง $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|x\|}x & \frac{1}{\|y\|}y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

และ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี และ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>ดังนั้น</u> $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^*$ □

5.2 การแยกของชอเลสกี

ทฤษฎีบท 5.2 ข้อความต่อไปนี้สมมูลกันสำหรับ $A \in M_n(\mathbb{C})$

1) A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

2) $A = S^2$ สำหรับบางเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน S ที่หาผกผันได้

3) $A = S^* S$ สำหรับบางเมทริกซ์ S ที่แต่ละแถวตั้งฉากกัน

<u>หมายเหตุ</u> การแยก $A = S^* S$ ดังกล่าวเรียกว่า การแยกของชอเลสกี (Cholesky decomposition)

พิสูจน์

1) $\Rightarrow$ 2) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

จากทฤษฎีบท 4.9 จะได้ว่า $A = UDU^*$ เมื่อ U เป็นเมทริกซ์ยูนิทารี

และ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ที่มีทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก

เขียน $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

สมมติให้ $E = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

นั่นคือ $A = UDU^* = UEEU^* = UEU^*UEU^* = (UEU^*)^2$

สร้าง $S = UEU^*$ จะได้ว่า $A = S^2$

เนื่องจาก E เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน และ U หาผกผันได้

โดยทฤษฎีบท 4.8 ข้อ 3) จะได้ว่า $S = UEU^*$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

นั่นคือ S เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน และหาผกผันได้

<u>ดังนั้น</u> $A = S^* S$ สำหรับบางเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน S ที่หาผกผันได้

2) $\Rightarrow$ 1) สมมติว่า $A = S^2$ เมื่อ S เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ที่หาผกผันได้

เนื่องจาก $A = SS = S^* IS$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน โดยทฤษฎีบท 4.8 ข้อ 3)

<u>ดังนั้น</u> S เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

1) $\Rightarrow$ 3) สมมติว่า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน โดยวิธีพิสูจน์ใน 1) $\Rightarrow$ 2) จะได้ว่า

$$A = UDU^* = UEE^*U^* = (UE)(UE)^* = [(UE)^*]^*(UE)^*$$

ให้ $S = (UE)^*$ จะได้ว่า $A = S^*S$

เขียน $U = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$, $E = \operatorname{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{\frac{1}{2}})$ จะได้ว่า

$$S = E^*U^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} u_1^* \\ \vdots \\ \lambda_n^{\frac{1}{2}} u_n^* \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก จะได้ว่า $\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

และ $\left\{\lambda_1^{\frac{1}{2}} u_1^*, \lambda_2^{\frac{1}{2}} u_2^*, \ldots, \lambda_n^{\frac{1}{2}} u_n^*\right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากเพราะ $\lambda_i^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \forall i$

<u>**ดังนั้น**</u> $A = S^*S$ สำหรับบางเมทริกซ์ S ที่แต่ละแถวตั้งฉากกัน

3) $\Rightarrow$ 1) สมมติว่า $A = S^*S$ เมื่อ $S \in M_n(\mathbb{C})$ มีแต่ละแถวตั้งฉากกัน

เนื่องจาก เซตเชิงตั้งฉากเป็นเซตอิสระเชิงเส้น

จะได้ว่า เซตของแถวทั้งหมดของ S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น นั่นคือ S หาผกผันได้

เนื่องจาก $A = S^*IS$ จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน โดยทฤษฎีบท 4.8 ข้อ 3)

<u>**ดังนั้น**</u> S เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน □

<u>**หมายเหตุ**</u> ในที่นี้เมื่อ $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ เราจะให้ $D^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n^{\frac{1}{2}})$

<u>**ตัวอย่าง 5.3**</u> จงเขียนเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปต่อไปนี้

1) $A = S^2$ เมื่อ S เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน ที่หาผกผันได้

<u>**วิธีทำ**</u> จากตัวอย่าง 5.1 จะได้ว่า $A = UDU^*$ เมื่อ $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

จาก $A = UDU^*$

$$= UD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}U^*$$

$$= UD^{\frac{1}{2}}U^*UD^{\frac{1}{2}}U^*$$

$$= (UD^{\frac{1}{2}}U^*)^2$$

ให้ $S = UD^{\frac{1}{2}}U^*$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^*$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $A = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}\right)^2$ □

2) $A = S^*S$ เมื่อ S เป็นเมทริกซ์ที่แต่ละแถวตั้งฉากกัน

<u>**วิธีทำ**</u> จากตัวอย่าง 5.1 จะได้ว่า $A = UDU^*$ เมื่อ $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

จาก $A = UDU^*$

$$= UD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}U^*$$

$$= UD^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}})^*U^*$$

$$= [(UD^{\frac{1}{2}})^*]^*(UD^{\frac{1}{2}})^*$$

ให้ $S = (UD^{\frac{1}{2}})^*$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\right)^*$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right)^*$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

<u>**ดังนั้น**</u> $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right)^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}\right)$ □

เอกสารอ้างอิง

[1] Roger A. Horn, and Charles R. Johnson *Matrix Analysis*. USA: Cambridge University, 1985.

[2] Fuzhen Zhang *Matrix Theory Basic Results and Techniques*. 2nd ed. USA: Nova Southeastern University, 2011.

[3] Steven H. Weintraub *A Guide to Advanced Linear Algebra*. USA: The Mathematical Association of America, 2011.

[4] ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม. *ทฤษฎีเมทริกซ์*. กรุงเทพมหานคร : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2556.

[5] รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ. *พีชคณิตเชิงเส้น*. กรุงเทพมหานคร : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2552.

[6] รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ. *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ*. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2551.