


การเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม

THE COMPARISON OF FLUID FLOW IN RECTANGULAR DUCTS



พรพรรณ ทาตวิรัตน์
อรอมา คงอ่อนศรี
อินทิรา แก้วคง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

การเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม

THE COMPARISON OF FLUID FLOW IN RECTANGULAR DUCTS



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์


คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE COMPARISON OF FLUID FLOW IN RECTANGULAR DUCTS



Pornphan Tasvad
Onouma Kongonsri
Intira Kaewkhong

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

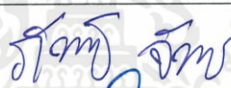


KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2013

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม	
	The Comparison of Fluid Flow in Rectangular Ducts	
นักศึกษา	นางสาวพรพรรณ ทาสวัสดิ์	53050078
	นางสาวอรอุมา คงอ่อนศรี	53050139
	นางสาวอินทิรา แก้วคง	53050146
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ศิริกุล ศิริธีรากล	

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.ภัทรารุช จันทรเสียม ประธานกรรมการ	
ดร.กัมปนาท นามงาม กรรมการ	
อาจารย์ศิริกุล ศิริธีรากล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม The Comparison of Fluid Flow in Rectangular Ducts		
นักศึกษา	นางสาวพรพรรณ ทาสวัสดิ์	53050078	
	นางสาวอรุมา คงอ่อนศรี	53050139	
	นางสาวอินทรีรา แก้วคง	53050146	
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต		
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ศิริกุล ศิริธีรากล		

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันการนำพลังงานทดแทนมาใช้ในการผลิตกระแสไฟฟ้าเพิ่มมากขึ้นทั้ง พลังงานลม พลังงานน้ำ และพลังงานแสงอาทิตย์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งประเทศไทยกำลังหันมาให้ความสำคัญในการผลิตกระแสไฟฟ้าพลังน้ำจากเขื่อนต่างๆ มีแนวโน้มสูงขึ้น ในปัญหาพิเศษนี้จึงสนใจที่จะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหล เช่น ความดัน และ ความเร็ว ณ ตำแหน่งต่างๆ ของท่อที่เกิดจากแนวการวางท่อที่มีความลาดเอียงที่แตกต่างกันไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่บริเวณปลายท่อซึ่งจะมีผลกระทบต่อแรงดันที่ไปปั่นกังหันน้ำ เพื่อใช้ในการผลิตกระแสไฟฟ้าต่อไป ซึ่งตัวแบบจำลองการไหลจะพิจารณาในระบบพิกัดฉาก 2 มิติและสอดคล้องตามกฎการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass) และกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum) โดยจะพิจารณาภายใต้สมมติฐานว่าของไหลที่อัดตัวไม่ได้ ไม่พิจารณาถึงผลกระทบของแรงเสียดทานระหว่างท่อกับของไหล และขนาดของหน้าตัดเท่ากันทุกแบบจำลอง ปัญหาพิเศษนี้ใช้เทคนิคการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element Method) รวมถึงใช้โปรแกรมภาษาซี (Microsoft Visual C++) สำหรับสร้างแบบจำลองเพื่อช่วยในการคำนวณและจากการศึกษาพบว่ามุมการวางท่อมีผลกระทบต่อความเร็วเฉลี่ยของน้ำที่ปลายท่ออย่างชัดเจน โดยมุมท่อที่มีความลาดชันมากมีแนวโน้มความเร็วเฉลี่ยที่น้ำพุ่งออกจากปลายท่อดีกว่ามุมท่อที่มีความลาดชันน้อยกว่าจึงทำให้มีแรงดันไปปั่นกังหันน้ำได้มากกว่าและมีประสิทธิภาพในการผลิตกระแสไฟฟ้าได้ดี

คำสำคัญ พลังงานน้ำ ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ พลศาสตร์ของไหล

Special Problem Title	THE COMPARISON OF FLUID FLOW IN RECTANGULAR DUCTS	
Students	Ms. Pornphan Tasvad	53050078
	Ms. Onouma Kongonsri	53050139
	Ms. Intira Kaewkhong	53050146
Degree	Bachelor of Science	
Major Program	Applied Mathematics	
Academic Year	2013	
Adviser	Sirikul Siriteerakul	

ABSTRACT

In current implementation of renewable energy used to generate electricity more, from both wind energy and solar energy. In particular, Thailand is turning to focus on the production of hydro-electricity from the dam through, upward trend in this thesis, therefore, interesting to study the relationship between the variables associated with the flow, such as pressure and velocity at different positions of the pipe caused by the orientation of the pipe with a slope that varies. Especially at the end of the pipeline, which will affect water pressure to spin the turbine. In order to continue to produce electricity. Which the flow model to consider 2 dimensional coordinate system, and meets the law of conservation of mass and the law of conservation of momentum will be considered under the assumption that the fluid is incompressible, not consider effect of friction between the pipe with fluid, equal size and cross sectional model. This thesis uses numerical analysis with Finite Element Method, including the use of C programming language for modeling to assist in the calculation and the study found that the pipeline affects the average speed of the water pipe is clear. By a pipe with a slope very likely the average speed of water spraying out of the hose over the pipe with a slope less. Therefore, the pressure to spin the turbine more and efficient to produce electricity better.

Keywords Hydroelectricity, Finite Element Method, Fluid Dynamics

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีซึ่งได้รับความกรุณาอย่างสูงจากอาจารย์ ศิริกุล ศิริธีรากล ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำแนะนำ และตรวจแก้ไขในการดำเนินการจัดทำปัญหาพิเศษ ผู้วิจัยมีความซาบซึ้งและถือเป็นพระคุณอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ ดร.ภัทรารุช จันทรเสียมและดร.กัมปนาท นามงาม กรรมการสอบปัญหาพิเศษที่ให้คำแนะนำและคำปรึกษาในการจัดทำปัญหาพิเศษให้มีความถูกต้อง

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ ในสาขาคณิตศาสตร์ ที่ได้กรุณาให้ความรู้และให้คำแนะนำด้วยดีเสมอมา ผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้กรุณาตรวจสอบ ให้คำแนะนำในการจัดทำปัญหาพิเศษนี้ สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

คุณงามความดีอันพึงมีจากปัญหาพิเศษฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบแด่บิดา มารดา อันเป็นที่เคารพยิ่ง และคณาจารย์ผู้ประสาศาวิชาความรู้ ตลอดจนทุก ๆ ท่านที่ให้อำนาจช่วยเหลือจนกระทั่งปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูปภาพ	VII
สารบัญตาราง	IX
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการดำเนินงาน	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน	2
1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน	3
บทที่ 2 สมการควบคุมและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับของไหล	4
2.1 สมการควบคุม (Governing Equation)	4
2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass)	4
2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum)	6
2.1.3 ระบบสมการไร้มิติ (Non-dimensional Systems)	8
2.2 ทฤษฎีการไหลในท่อ	9
2.2.1 คุณสมบัติของของไหล	9
2.2.2 การไหลในท่อรูปทรงสี่เหลี่ยมในรูปแบบต่าง ๆ กัน	13
2.3 คุณสมบัติของของเหลว	15
2.3.1 คุณสมบัติของน้ำ	15
2.3.2 คุณสมบัติบางประการของของเหลวบางชนิด	17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.4 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข	18
2.4.1 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method)	18
2.4.2 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)	18
2.4.3 การวิเคราะห์หาค่า Error	20
2.4.4 การประมาณของอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)	21
2.4.5 การประมาณค่าของรูปแบบผสมกัน	21
2.5 ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite element method)	23
2.5.1 ขั้นตอนการคำนวณ	23
2.5.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์	25
2.5.3 One-Dimensional Quadratic Element	26
2.5.4 Two-Dimensional Linear Elements	26
2.5.5 Two -Dimensional Quadratic Element	27
บทที่ 3 การดำเนินการของปัญหา	28
3.1 เงื่อนไขเริ่มต้น	29
3.2 เงื่อนไขค่าขอบ	29
3.3 ปัญหาที่นำมาศึกษา	29
3.4 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข	30
บทที่ 4 ผลการดำเนินงาน	38
บทที่ 5 สรุปและข้อเสนอแนะ	54
5.1 สรุป	54
5.2 ข้อเสนอแนะ	55
เอกสารอ้างอิง	
ภาคผนวก	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ

รูปที่	หน้า
รูปที่ 2.1 การไหลแบบ Laminar และการไหลแบบ Turbulent	9
รูปที่ 2.2 การไหลในย่านขาเข้า	12
รูปที่ 2.3 รูปท่อทรงสี่เหลี่ยม	13
รูปที่ 2.4 การประมาณค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	19
รูปที่ 2.5 การประมาณค่าของรูปแบบผสมกัน	22
รูปที่ 2.6 ลักษณะการแบ่งรูปร่างออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ	23
รูปที่ 2.7 รูปที่ 2.7 การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์	24
รูปที่ 2.8 การแปลงขึ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณ แบบเชิงเส้นให้อยู่ในแกนหลัก	26
รูปที่ 2.9 การแปลงขึ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณ แบบกำลังสองให้อยู่ในแกนหลัก	27
รูปที่ 3.1 รูปแบบของท่อ	28
รูปที่ 3.2 เงื่อนไขค่าขอบ	29
รูปที่ 3.3 การ gen grid	30
รูปที่ 4.1 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 0°	38
รูปที่ 4.2 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 14°	39
รูปที่ 4.3 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 26.6°	40
รูปที่ 4.4 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 36.9°	41
รูปที่ 4.5 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 45°	42
รูปที่ 4.6 ค่าความดันที่ 0°	43
รูปที่ 4.7 ค่าความดันที่ 14°	44
รูปที่ 4.8 ค่าความดันที่ 26.6°	45
รูปที่ 4.9 ค่าความดันที่ 36.9°	46
รูปที่ 4.10 ค่าความดันที่ 45°	47
รูปที่ 4.11 ความเร็วในแนวแกน Y ที่ 0°	48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
รูปที่ 4.12 ความเร็วในแนวแกน y ที่ 14°	49
รูปที่ 4.13 ความเร็วในแนวแกน y ที่ 26.6°	50
รูปที่ 4.14 ความเร็วในแนวแกน y ที่ 36.9°	51
รูปที่ 4.15 ความเร็วในแนวแกน y ที่ 45°	52
รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบความเร็วเฉลี่ยของปลายท่อต่อมุมมองศาต่อ	53



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาในการดำเนินงาน	3
ตารางที่ 2.1 แสดงค่าความขรุขระเฉลี่ยของวัสดุต่างๆที่ใช้ผลิตท่อ	15
ตารางที่ 2.2 แสดงสมบัติทางกายภาพของน้ำและน้ำแข็งที่อุณหภูมิต่างๆ	16
ตารางที่ 2.3 ความตึงผิวของของเหลวบางชนิดที่อุณหภูมิที่ 20°C	17
ตารางที่ 2.4 สัมประสิทธิ์ความหนืดของของเหลวบางชนิด	17



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

น้ำเป็นทรัพยากรธรรมชาติที่มีความสำคัญต่อสิ่งมีชีวิตทุกชนิด สิ่งมีชีวิตสามารถดำรงชีวิตอยู่ได้ต้องอาศัยน้ำ นอกจากนี้น้ำยังเป็นปัจจัยการผลิตที่สำคัญทั้งในภาคเกษตรกรรม ภาคอุตสาหกรรม และภาคบริการ เช่น การใช้แรงดันน้ำที่กักเก็บในอ่างเก็บน้ำที่อยู่เหนือเขื่อนปล่อยน้ำลงสู่ท้ายเขื่อน โดยผ่านท่อส่งน้ำ (Penstock) มาดันให้กังหันน้ำ (Turbine) หมุนโดยกังหันน้ำซึ่งเป็นตัวต้นกำลัง เชื่อมต่อกับส่วนที่หมุน (Rotor) ของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า (Generator) เพื่อผลิตกระแสไฟฟ้า, การวางระบบท่อประปาโดยไม่ใช้มอเตอร์ปั้มน้ำแต่อาศัยหลักการเรื่องแรงดันน้ำซึ่งต้องอาศัยความเร็วของการไหลของน้ำในการส่งน้ำผ่านท่อไปใช้ประโยชน์ เป็นต้น การส่งน้ำผ่านท่อมาใช้ประโยชน์ส่วนใหญ่จะลำเลียงผ่านระบบท่อชนิดต่างๆ เช่น ท่อเหล็กกล้าที่ขึ้นรูปโดยการเชื่อม, ท่อเหล็กอบสังกะสี, ท่อคอนกรีตและท่อพีวีซี เป็นต้นสำหรับการไหลของของไหลนั้นมันักวิจัยหลายๆท่านได้ทำการวิจัยตัวอย่างเช่น การประยุกต์ใช้ระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ในการศึกษาความเหมาะสมการวางแนวท่อส่งน้ำ ในพื้นที่ชลประทาน โครงการแควน้อย อันเนื่องมาจากพระราชดำริ เป็นงานวิจัยของ (วิทยาลัยการชลประทาน สถาบันสมทบมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กลุ่มงานวางโครงการที่ 1 สำนักบริหารโครงการ (กรมชลประทาน) , พ.ศ. 2553) [6], การยืดหยุ่นประกอบสำหรับของไหลนิวโตเนียน[11] เป็นต้น

สำหรับปัญหาพิเศษนี้ได้เก็บรวบรวมข้อมูลงานวิจัยของนักวิจัยหลายๆท่าน[6,11] รวมถึงมีการต่อยอดการศึกษาเกี่ยวกับการไหลในท่อของของไหลชนิดนิวโตเนียนของศิริกุล[12] ที่สอนในวิชาหัวข้อพิเศษ โดยศึกษาศึกษาความเร็วในแนวแกน X ความเร็วในแนวแกน Y และความดันกับผนังท่อเมื่อมีการปรับเปลี่ยนมุมท่อ โดยพิจารณาท่อปริซึมฐานสี่เหลี่ยมและมีมุม 5 รูปแบบคือ $0^\circ, 14^\circ, 26.6^\circ, 36.9^\circ, 45^\circ$ เพื่อนำความรู้ที่ได้จากปัญหาพิเศษนี้ไปบูรณาการและประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด โดยพิจารณาเพิ่มในส่วนของมุมท่อ

1.2 วัตถุประสงค์ของดำเนินงาน

- 1.1.1 เพื่อสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขสองมิติของการไหล
- 1.1.2 ศึกษาความเร็วในแนวแกน X ความเร็วในแนวแกน Y และความดันกับผนังท่อโดยมุมองศาของท่อนั้นต่างกัน
- 1.1.3 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความเร็วที่เกิดจากการไหล
- 1.1.4 เพื่อใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สร้างแบบจำลองแสดงผลของอัตราการไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น มิใช่เพื่อเผยแพร่เป็นประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.3 ขอบเขตของปัญหา

- 1.3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของของไหลที่สร้างขึ้นในปัญหาพิเศษนี้เป็นเพียงแบบจำลองเบื้องต้นเท่านั้นและอยู่ภายใต้สมมติฐานของไหลที่ไม่มีแรงเสียดทานระหว่างท่อกับของไหล และไม่มีการสิ้นเปลืองของของไหล
- 1.3.2 แบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองแบบสองมิติ ในระบบพริซึมฐานสี่เหลี่ยม
- 1.3.3 ลักษณะของท่อกำหนดให้มีความสูงของท่อเท่ากันทุกแบบจำลอง

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 เป็นพื้นฐานในการนำไปสร้างที่เกี่ยวข้องกับของไหลในภาคอุตสาหกรรม ภาคการเกษตร และภาคบริการ
- 1.4.2 สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบกระบวนการผลิตไฟฟ้าด้วยพลังงานน้ำได้
- 1.4.3 เพื่อจัดทำแนวทางการพัฒนาการส่งน้ำผ่านท่อมาใช้ประโยชน์อย่างเหมาะสม

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

- 1.5.1 ศึกษาค้นหาข้อมูลของหลักการทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับกลศาสตร์ของไหล และหลักการทางคณิตศาสตร์ของวิธีการคำนวณที่เกี่ยวข้องในการแก้สมการ เพื่อใช้ในปัญหาพิเศษศึกษาค้นคว้าและรวบรวมข้อมูล
- 1.5.2 วิเคราะห์และพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อนำไปต่อยอดในปัญหาพิเศษในการสร้างแบบจำลอง
- 1.5.3 สร้างแบบจำลอง
- 1.5.4 การวิเคราะห์และประเมินผลการทดลองเพื่อสรุปผล
- 1.5.5 จัดทำรายงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

8 เดือน

ระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนแสดงไว้ในตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินงาน							
	ปี 2556						ปี 2557	
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.
1.ศึกษาค้นหาข้อมูลของ หลักการทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้อง กับกลศาสตร์ของไหล และ หลักการทางคณิตศาสตร์ของ วิธีการคำนวณที่เกี่ยวข้องใน การแก้สมการ เพื่อใช้ใน ปัญหาพิเศษ	↔							
2.ศึกษาค้นคว้าและรวบรวม ข้อมูล	↔↔							
3.วิเคราะห์และพัฒนา ซอฟต์แวร์เพื่อนำไปต่อยอดใน ปัญหาพิเศษในการสร้าง แบบจำลอง		↔↔						
4.สร้างแบบจำลอง			↔↔↔					
5.การวิเคราะห์และประเมินผล การทดลองเพื่อสรุปผล					↔↔↔		↔	
6.จัดทำรายงาน						↔↔↔		↔

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการควบคุมและทฤษฎีเกี่ยวกับของไหล

การศึกษากลศาสตร์ของไหลเป็นการศึกษาพฤติกรรมและการเคลื่อนที่ของของไหลและแรงที่เกิดขึ้น กลศาสตร์ของไหลอาจแบ่งได้เป็น 2 ส่วนคือสถิตยศาสตร์ของไหลซึ่งศึกษาของไหลในขณะที่ยหยุดนิ่งและพลศาสตร์ของไหลที่ศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลโดยทั่วไปการศึกษากลศาสตร์ของไหลทำการสร้างสมมติฐานพื้นฐานเกี่ยวกับสสารที่กำลังถูกศึกษาสมมติฐานเหล่านี้จะถูกแปลงให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่ยอมรับได้ซึ่งจะสอดคล้องตามกฎ 2 ข้อ ดังนี้

1. กฎการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass)
2. กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum)

โดยทั่วไปการไหลของของไหลสามารถแบ่งออกได้ออกตามประเภทของของไหล แบ่งได้ 2 ประเภทคือ การไหลของของไหลที่อัดตัวไม่ได้และการไหลของของไหลที่อัดตัวได้ สำหรับปัญหาพิเศษนี้จะกล่าวถึงของไหลอัดตัวไม่ได้เท่านั้น ซึ่งของไหลอัดตัวไม่ได้จะมีความหนาแน่นของคงที่เสมอและเป็น การไหลในท่อปริซึมฐานสี่เหลี่ยมเท่านั้น โดยสิ่งสำคัญที่ใช้สำหรับปัญหาพิเศษนี้ประกอบด้วย

1. สมการควบคุม (Governing Equation)
2. ทฤษฎีการไหลในท่อ
3. คุณสมบัติของของเหลว
4. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข
5. ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element Method)

2.1 สมการควบคุม (Governing Equation)

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass) [11,12]

หลักการอนุรักษ์มวล คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลของของไหลภายในโดเมนจะเท่ากับอัตราการไหลเข้าหรือออกของมวลผ่านพื้นผิว สร้างเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญลักษณ์	คือ	หน่วย
ρ	ความหนาแน่นที่ตรงกลาง	kg / m^3
\vec{u}	เวกเตอร์ของความเร็ว	m / s
∇	ตัวดำเนินการเกรเดียนต์	-
$\frac{\partial}{\partial t}$	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา t	-

ให้ $\frac{D}{Dt}$ แทนตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงวัสดุ (Material Derivative Operator) หรือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์แบบออยเลอร์เรียน (Eulerian Derivative Operator) นั่นคือ

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \quad (2.2)$$

สมการ (2.2) สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบ คือ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.3)$$

สำหรับกรณีที่เป็นการไหลคงตัว (Steady Flow) ของไหล ณ ตำแหน่งต่างๆ ของเส้นทางการไหลมีความเร็วในการไหลคงตัวตลอดเวลาและความยาวของการไหล ดังนั้นสมการที่ (2.3) จะกลายเป็น (2.4)

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.4)$$

เมื่อความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลคงตัวจึงมีภาวะต่อเนื่อง อยู่ในพจน์ที่ไม่สามารถตัดตัวได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.5)$$

ดังนั้น สมการความต่อเนื่องจะกลายเป็น

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum) [11,12]

อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้น (Linear Momentum) ของกลุ่มอนุภาค จะมีค่าเท่ากับผลรวมของแรงภายนอกที่มากระทำต่อมวลของของไหลในโดเมน ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.7)$$

สัญลักษณ์	คือ	หน่วย
\vec{F}	แรงกระทำบนวัตถุ	N
\vec{a}	ความเร่งของวัตถุ	m / s ²

เนื่องจากมีแรงภายใน (Internal Forces) ของของไหลกระทำในโดเมนจึงพิจารณาหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม โดยใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ได้เป็น

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_S \vec{\sigma} \cdot \hat{n} dS + \int_V \rho \vec{f} dV \quad (2.8)$$

เมื่อ \hat{n} คือเวกเตอร์หน่วยปกติ (Unit Normal Vector) บนพื้นผิว S

โดยใช้ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss's Theorem) เราสามารถเปลี่ยนการหาปริพันธ์เชิงปริมาตร (Volume Integral) เป็นการหาปริพันธ์เชิงผิว (Surface Integral) ดังนั้น สมการ (2.8) เขียนใหม่ได้

$$\int_V \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + (\nabla \cdot \rho \vec{u}) \vec{u} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV + \int_V \rho \vec{f} dV \quad (2.9)$$

เมื่อ V คือ ปริมาตรใด ๆ ดังนั้น สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการ (2.1) ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ได้ ดังนี้

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f} \quad (2.10)$$

สมการ (2.10) เป็นที่รู้จักกันในชื่อของ สมการเนเวียร์-สโตกส์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญลักษณ์	คือ	หน่วย
$\vec{\sigma}$	เทนเซอร์ความเค้นของโคชี (Cauchy Stress Tensor)	N / m^2
\vec{f}	เวกเตอร์ของแรงวัตถุ (Body Force Vector) ต่อมวล 1 หน่วย	N

ใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมนำไปสู่ความสมมาตร (Symmetry) ของเทนเซอร์ความเค้นในหลักการกล่าวไว้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงผลรวมโมเมนต์ (Moment) ของโมเมนตัมของกลุ่มอนุภาค มีค่าเท่ากับผลรวมเวกเตอร์ของโมเมนต์ของแรงภายนอกที่มากระทำต่อระบบ จึงได้

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^t, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

โดยที่ยกกำลัง t แสดงถึงการสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์

เมื่อของไหลเป็นแบบไม่สามารถอัดตัวได้ เทนเซอร์ความเค้นของโคชี $\vec{\sigma}$ จะประกอบไปด้วยผลรวมของความดัน (p) แบบไอโซโทรปิก (Isotropic Pressure) และส่วนประกอบของเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตรา (Extra Stress Tensor) T นั่นคือ

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ji} + T_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (2.11)$$

สัญลักษณ์	คือ	หน่วย
p	ความดันรวม (Total Pressure) ของของไหล	N / m^2
δ_{ji}	เทนเซอร์ (Unit Tensor) หรือ โครเนคเคอร์เดลตา (Kronecker Delta)	

ในกรณีของของไหลชนิดนิวโตเนียน ค่าความหนืดคงตัว จึงได้

$$T_{ij} = 2\mu D_{ij} \quad (2.12)$$

และ

$$\vec{D} = \frac{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t}{2} \quad (2.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญลักษณ์	คือ	หน่วย
D_{ji}	เทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (Rate of Deformation Tensor) ซึ่งเป็นเทนเซอร์สมมาตร	(Unit Tensor) หรือ โคโรเนคเตอร์เดลตา (Kronecker Delta)
μ	ความหนืด	Ns / m^2 หรือ $Pa.s$

2.1.3 ระบบสมการไร้หน่วย (Non-dimensional Systems)

โดยทั่วไปเราจะพิจารณาระบบสมการควบคุม สมการองค์ประกอบและค่าต่างๆ ที่นำมาใช้พิจารณาในระบบไร้หน่วย โดยกำหนดตัวแปรแบบไร้หน่วย (Non-dimensional Variables) $u^*, P^*, \mu_i^*, \nabla^*, \frac{D}{Dt^*}$ ค่าต่างๆ เหล่านี้เกิดจากการหาอัตราส่วนของค่าที่มีหน่วยตัวประกอบลักษณะเฉพาะ (Characteristic Factors) ของแต่ละค่าต่างๆ กำหนดดังนี้

ชื่อ	สมการ
เวกเตอร์ความเร็ว	$u^* = \frac{u}{V}$
ความดัน	$p^* = \frac{L}{\mu_0 V} p$
ตัวดำเนินการเกรเดียนต์	$\nabla^* = L \nabla$
ตัวดำเนินการ	$\frac{D}{Dt^*} = \frac{L}{V} \frac{D}{Dt}$
ค่าความหนืด	$\mu_i^* = \frac{1}{\mu_0} \mu_i, i=1,2$

โดยที่ L คือ ความยาวลักษณะเฉพาะ (Characteristic length) หน่วยเป็น m

V คือ ความเร็วลักษณะเฉพาะ (Characteristic velocity) หน่วยเป็น m/s

μ_0 คือ ความหนืดอ้างอิง (Reference velocity) หน่วยเป็น $Pa.s$ หรือ N/m^2 และมีค่า

เท่ากับผลรวมของความหนืดของตัวทำละลายกับความหนืดของโพลีเมอร์

เมื่อแทนค่าต่างๆ เหล่านี้ลงในสมการที่ (2.6) และสมการที่ (2.10) แล้วจัดรูปใหม่โดยใช้สัญลักษณ์ * ออกไป เราจะได้สมการไร้หน่วย ดังนี้

$$\text{Re} \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot (\mu \nabla u) - \text{Re} u \cdot \nabla u - \nabla P \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.16)$$

โดย Re คือ ตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 ทฤษฎีการไหลในท่อ

2.2.1 คุณสมบัติของของไหล [4]

คุณสมบัติทางฟิสิกส์บางประการของของไหล ได้แก่ ความดัน ความหนาแน่น ความเร็ว จำนวนเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) ค่าเหล่านี้จะมีความสัมพันธ์ต่อการไหลซึ่งจะกล่าวต่อไป

(1) ความดัน

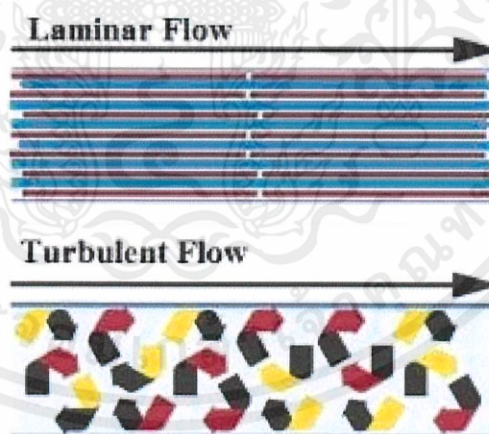
เนื่องจากความดันมีความสัมพันธ์กับแรงต่อพื้นที่หน้าตัด ดังนั้น เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดจะทำให้ค่าความดันเปลี่ยนแปลงไปด้วย เราสามารถนำหลักการนี้ไปใช้เพื่อคำนวณหาความเร็วการไหลของของไหลได้ จากสมการของแบร์นูลลี (Bernoulli's Equation) ซึ่งเป็นการไหลในอุดมคติ โดยเป็นการไหลแบบสม่ำเสมอ (Steady Flow) ไม่มีการหมุน (Irrotational Flow) ไม่มีแรงต้านทาน (Nonviscous Flow) และแบบไม่สามารถอัดตัวได้ (Incompressible Flow)

(2) ความหนาแน่น

ใช้ในการคำนวณหาความดันของของไหล ณ จุดใดๆ โดยความหนาแน่นบ่งบอกถึง มวลต่อปริมาตร

(3) ความเร็ว

เป็นค่าตัวแปรที่กำหนดพฤติกรรมการไหล เมื่อความเร็วเฉลี่ยของของไหลเป็นไปอย่างช้าๆ จะเรียกการไหลแบบนี้ว่า การไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) และหากความเร็วมีค่ามากขึ้นถึงระดับหนึ่งจะทำให้เกิดการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) การไหลแบบปั่นป่วนนี้จะเป็นการไหลที่มีรูปแบบไม่แน่นอน แสดงดังรูปที่ 2.1



<http://www.advantageengineering.com/fyi/156/advantageFYI156.php>

รูปที่ 2.1 การไหลแบบ Laminar และการไหลแบบ Turbulent

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(4) จำนวนเลขเรย์โนลด์ (Reynolds Number) [10]

ในกลศาสตร์ของไหลเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Re) เป็นจำนวนที่ไม่มีมิติ ที่เป็นการหาอัตราส่วนของแรงเฉื่อย ต่อแรงของความหนืด ซึ่งเป็นตัวเลขสำคัญสำหรับการกำหนดเงื่อนไขการไหล

$$\text{Reynolds number (Re)} = \frac{\text{แรงเฉื่อย}}{\text{แรงหนืด}} = \frac{\text{inertial forces}}{\text{viscous forces}} \quad (2.17)$$

เรย์โนลด์นัมเบอร์ใช้ในการอธิบายแบ่งลักษณะการไหลของของเหลวที่แตกต่างกัน เช่น แบบราบเรียบ (Laminar Flow) หรือไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) กรณีเรย์โนลด์นัมเบอร์ของการไหลที่มีค่าต่ำ แสดงว่าแรงของความหนืดจะมีอิทธิพลต่อการเคลื่อนไหวของของเหลว ทำให้การไหลมีลักษณะราบเรียบ (Laminar) ถ้าเรย์โนลด์นัมเบอร์ของการไหลที่มีค่าสูง แสดงว่าแรงของความเฉื่อยจะมีอิทธิพลต่อการไหล ทำให้การไหลเป็นแบบปั่นป่วน (Turbulent) และจะเกิดการหมุนวนแบบกันหอย (Vortices) ซึ่งทำให้การไหลไม่เสถียร

การไหลในท่อ สำหรับการไหลในท่อ (Pipe) หรือท่อหลอด (Tube) สมการของตัวเลขเรย์โนลด์ถูกกำหนดไว้หลายรูปแบบ

$$\text{Re} = \frac{\rho V D_h}{\mu} = \frac{V D_h}{\nu} = \frac{Q D_h}{\nu A} \quad (2.18)$$

โดยที่ D_h คือ ขนาดความโตภายในของท่อทางไฮดรอลิก (m)
 Q คือ อัตราการไหลแบบปริมาตร (m^3 / s)
 A คือ พื้นที่หน้าตัดการไหลของท่อ (m^2)
 V คือ ความเร็วเฉลี่ยของของไหล (m / s)
 μ คือ ความหนืดของของเหลวแบบไดนามิก ($Pa \cdot s$ หรือ $N \cdot s / m^2$ หรือ $kg / m \cdot s$)
 ρ คือ ความหนาแน่นของของเหลว (kg / m^3)
 ν คือ ความหนืดของของเหลวแบบคินแมติก ($\nu = \mu / \rho$), (m^2 / s)

ขนาดความโตของท่อทางไฮดรอลิก (Hydraulic Diameter, D_h)

รูปร่างของท่อที่มีของเหลวไหลอยู่ภายใน นอกจากเป็นวงกลมแล้ว อาจเป็นรูปร่างอื่นๆก็ได้ เช่น สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม สี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็นต้น ที่มีส่วนสูงและความกว้างต่างๆ สามารถเทียบเคียงลักษณะของรูปร่างที่เป็นวงกลมได้ ที่เรียกว่า ขนาดความโตท่อทางไฮดรอลิก (Hydraulic Diameter, D_h) โดยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D_h = \frac{4A}{P} = L \quad (2.19)$$

โดยที่ A คือ พื้นที่หน้าตัดการไหล

P คือ ระยะทางของเส้นรอบรูปที่สัมผัสการไหลเท่านั้น (Wetted Perimeter)

จำนวนเลขเรย์โนลด์ไม่มีหน่วย และมีความสำคัญอย่างมากกล่าวคือจำนวนเลขนี้ใช้เป็นตัวกำหนดรูปแบบการไหลของของไหลว่าเป็นแบบใด เช่น

Re อยู่ในช่วง 0 - 2000 สภาพการไหลเป็นแบบราบเรียบ

Re อยู่ในช่วง 2001 - 4000 สภาพการไหลเป็นแบบ Transition Zone คือ มีการไหล 2 แบบ คือแบบราบเรียบและแบบปั่นป่วน

Re มากกว่า 4000 สภาพการไหลเป็นแบบ Turbulent Flow ในช่วงเริ่มต้นก่อนที่ของไหลจะไหลเข้าสู่ท่อของไหลมีรูปร่างความเร็วอยู่ในลักษณะสมมาตรและจากเงื่อนไขไม่ลื่นไถล (No Slip Condition) จะทำให้ของไหลที่ไหลเข้าสู่ท่อต้องลดความเร็วลงมาเท่ากับศูนย์ที่ผนังของท่อทำให้เกิดเป็นรูปร่างของความเร็วขึ้นและรูปร่างความเร็วจะพัฒนาขึ้นตามความหนาของ

ชั้นขอบเขต (Boundary Layer) ที่เกิดขึ้นบนผนังท่อจนกระทั่งเมื่อชั้นขอบเขตนี้ได้ขึ้นจนเบียดชนกันที่ตำแหน่งที่ 2 ดังรูปที่ 2.2 ช่วงของการไหลจากตำแหน่งที่ 1 ถึง 2 จะเรียกว่าช่วงการไหลในย่านขาเข้า (Entrance Region) และเรียกความยาวของท่อในการไหลช่วงนี้ว่าความยาวขาเข้า (Entrance Length) และการไหลในช่วงจากตำแหน่งที่ 2 ถึง 3 จะเรียกว่าการไหลที่พัฒนาเต็มที่ (Fully Developed Flow) ซึ่งรูปร่างความเร็วจะมีค่าคงที่เมื่อมีการเปลี่ยนทิศทางของท่อหรือเปลี่ยนขนาดของท่อหรือเมื่อของไหลไหลผ่านอุปกรณ์วาล์วรูปร่างของความเร็วของการไหลจะเปลี่ยนจากรูปร่างความเร็วของการไหลที่พัฒนาเต็มที่ไปและต้องใช้ระยะของท่อช่วงหนึ่งที่จะทำให้รูปร่างของความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปกลับสู่สภาวะการไหลแบบพัฒนาเต็มที่อีกครั้งตามที่แสดงไว้ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การไหลในย่านขาเข้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง การหาค่าของ เรย์โนลด์นัมเบอร์ : Re

ต้องการหาค่าของ เรย์โนลด์นัมเบอร์ Re โดยของเหลวมีความหนืด $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ (Pa.s) และมีความหนาแน่น $1.2 \text{ kg}/\text{m}^3$ ที่ไหลผ่านท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีขนาดภายใน $100 \times 150 \text{ mm}$. ด้วยความเร็วการไหล $1.2 \text{ m}/\text{s}$

$$D_h = L = \frac{4A}{P} = \frac{4(0.1 \times 0.15)}{2(0.1 + 0.15)} = 0.12 \text{ (m)}$$

$$A = \frac{\pi}{4(0.12)^2} = 0.01131 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$Q = A \times V = 0.01131 \times 1.2 = 0.014 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$V = 1.2 \text{ (m/s)}$$

$$\mu = 0.001 \text{ (Pa}\cdot\text{s หรือ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 \text{ หรือ kg}/\text{m}\cdot\text{s)}$$

$$\rho = 1.2 \text{ (kg}/\text{m}^3\text{)}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.001}{1,200} = 0.833 \times 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

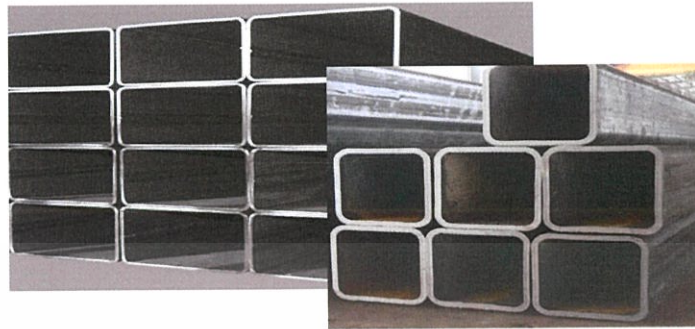
แทนค่าในสมการข้างต้น

$$\text{Re} = \frac{(1.2)(1.2)(0.12)}{0.001} = \frac{(1.44)(0.12)}{0.001} = 172.8$$

ผลปรากฏว่าค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ที่หาได้จากทุกๆ สมการเท่ากับคือ 172.8 ซึ่งเป็นการไหลแบบราบเรียบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2 การไหลในท่อทรงสี่เหลี่ยมในรูปแบบต่างๆ กัน



http://thai.alibaba.com/gs-suppliers_tjtsx/Square_and_Rectangular_Steel_Pipe_213554566_1.html

รูปที่ 2.3 รูปท่อทรงสี่เหลี่ยม

ในการศึกษาทฤษฎีของไหลในของไหลใดๆ เมื่อของไหลมีการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ก็สามารที่จะเกิดการสูญเสียแรงดันขณะไหล (Head Loss) มีสาเหตุมาจากแรงเสียดทาน และการเปลี่ยนแปลงทิศทางหรือความเร็วขณะไหล

การหาค่าความสูญเสียหลัก (Major Loss or Friction Loss)

การสูญเสียของพลังงานหรือ "หัว" (Head Loss) ของการไหลในท่อ เกิดจากผลของความหนืดที่กระทำต่อพื้นผิวภายในของท่อที่เรียกว่า การสูญเสียหลัก (Major Loss) เนื่องจากแรงเสียดทานเมื่อของไหลไหลในท่อปิด พบว่ามีค่าดังสมการของ Darcy

$$h_f = \frac{fLv^2}{D_h 2g} \quad (2.20)$$

เมื่อ h_f คือ ค่าสูญเสียความดันหลักเนื่องจากแรงเสียดทานในท่อ

f คือ ปัจจัยแรงเสียดทาน (Friction Factor)

L คือ ความยาวท่อ

D_h คือ ขนาดความโตภายในของท่อทางไฮดรอลิก

V คือ ความเร็วของของไหลภายในท่อ

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัจจัยแรงเสียดทานเป็นพารามิเตอร์ไร้หน่วย ค่า Head loss มีค่าเป็นระยะทางในการคำนวณจะต้องการสูญเสียความดันหลักจะคำนึงถึงลักษณะของการไหลด้วย เนื่องจากสูตรการคำนวณนี้มีการใช้ค่าปัจจัยแรงเสียดทานด้วย ซึ่งพารามิเตอร์ตัวนี้จะได้มาจากการเปิดตารางต่างกัน โดยลักษณะการไหลที่มีผลต่อการหาค่าปัจจัยแรงเสียดทาน มี 2 แบบคือ

(1) การไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow)

ของไหลที่ไหลลักษณะนี้จะมีค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์จะน้อยกว่า 2,000 พารามิเตอร์ค่า f หรือปัจจัยแรงเสียดทานจะขึ้นอยู่กับค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์เพียงอย่างเดียว สมการที่ใช้ในการคำนวณคือ

$$f = \frac{64}{Re} \quad (2.21)$$

ส่วนสมการที่ใช้หาค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์ คือ

$$Re = \frac{D_h v \rho}{\mu} = \frac{D_h v}{\nu} \quad (2.22)$$

เมื่อ Re คือ ค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์

D_h คือ ขนาดความโตภายในของท่อทางไฮดรอลิก

v คือ ความเร็วของไหลภายในท่อ

n คือ ความหนืดโคเนมาติกส์

r คือ ความหนาแน่นของของไหล

m คือ ความหนืดไดนามิกส์

(2) การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow)

ของไหลที่ไหลแบบปั่นป่วนมีค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์มากกว่า 4,000 พารามิเตอร์ค่า f จะขึ้นกับค่าเรย์โนลด์์นัมเบอร์และพารามิเตอร์ที่เรียกว่า ค่าความขรุขระสัมพัทธ์ภายในท่อ (Relative roughness) ค่าความขรุขระสัมพัทธ์ภายในท่อเป็นอัตราส่วนระหว่างค่าความขรุขระของผิวท่อเฉลี่ย (e) และ ขนาดความโตภายในของท่อทางไฮดรอลิก (D_h) ความขรุขระของผิวท่อขึ้นอยู่กับชนิดและสภาพของวัสดุที่ใช้ สามารถเปิดตารางที่ 2.1 ใช้งานได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 ค่าความขรุขระเฉลี่ยของวัสดุต่างๆที่ใช้ผลิตท่อ

ชนิดของท่อ	Roughness (e)	
ท่อที่ได้จากการรีด ท่อทองเหลือง ท่อดีบุก หลอดแก้ว ท่อภายในที่เคลือบหรือฉาบด้วยบิโทมินัส ท่อซีเมนต์ที่หล่อโดยการเหวี่ยงหนีศูนย์กลาง	0.000005	0.0015
ท่อเหล็กกล้าหรือท่อเหล็กเหนียวที่ขายในท้องตลาด	0.00015	0.046
ท่อเหล็กกล้าที่ขึ้นรูปโดยการเชื่อม	0.00015	0.046
ท่อเหล็กหล่อที่เคลือบหรือฉาบด้วยยางมะตอย	0.0004	0.12
ท่อเหล็กอาบสังกะสี	0.00085	0.15
ท่อเหล็กหล่อ	0.0006 - 0.003	0.25
ท่อไม้	0.0006 - 0.003	0.18 - 0.9
ท่อคอนกรีต	0.001 - 0.01	0.3 - 3
ท่อเหล็กกล้าที่ย้ำด้วยหมุด	0.003 - 0.03	0.9 - 9

2.3 คุณสมบัติของของเหลว

2.3.1 คุณสมบัติของน้ำ[5]

โมเลกุลของน้ำประกอบด้วยออกซิเจน 1 อะตอม จับกับไฮโดรเจน 2 อะตอม โดยพันธะโควาเลนต์ และการที่อะตอมของออกซิเจนมีอิเล็กโตรเนกาติวิตี (Electronegativity) มากกว่าไฮโดรเจน โมเลกุลของน้ำจึงมีขั้ว 2 ขั้ว (Dipole) โดยอะตอมของไฮโดรเจนจะเป็นขั้วเล็กน้อย การมีขั้วของน้ำและการกระจายประจุแบบเตตระฮีดรัลทำให้แต่ละโมเลกุลของน้ำที่อยู่ในสถานะของเหลวและของแข็ง สามารถยึดเกาะกับน้ำได้อีก 4 โมเลกุลด้วยพันธะไฮโดรเจนเกิดการเรียงตัวเป็น 3 มิติ ในรูปแบบเตตระฮีดรัลสำหรับน้ำที่อยู่ในสถานะเป็นของเหลวบางครั้งอาจมีจำนวนโมเลกุลของน้ำที่จับกันด้วยพันธะไฮโดรเจนเพิ่มขึ้นพันธะไฮโดรเจนมีพลังงาน 2-40 กิโลจูล/โมล ซึ่งมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับพันธะโควาเลนต์ระหว่างออกซิเจนกับไฮโดรเจน ซึ่งมีค่าถึง 335 กิโลจูล/โมล ซึ่งสามารถจำแนกสมบัติทางกายภาพของน้ำและน้ำแข็งที่อุณหภูมิต่างๆ ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.2 สมบัติทางกายภาพของน้ำและน้ำแข็งที่อุณหภูมิต่างๆ

สมบัติของน้ำ	อุณหภูมิ (องศาเซลเซียส)					
	0	20	40	60	80	100
ความดันไอ (มิลลิเมตรปรอท)	4.58	17.53	55.32	149.40	355.2	760.0
ความหนาแน่น (กรัม/ซม. ³)	0.998	0.9982	0.9922	0.9832	0.9718	0.9583
ความร้อนจำเพาะ (แคลอรี/กรัม, °C)	1.0074	0.9988	0.9980	0.9994	1.0023	1.0070
ความร้อนในการเป็นไอ (แคลอรี/กิโลกรัม)	597.2	586.0	547.7	563.3	551.3	538.9
การนำความร้อน (กิโลแคลอรี/เมตร ² , ซม., °C)	0.486	0.515	0.540	0.561	0.576	0.585
แรงตึงผิว (ไดน์/เซนติเมตร)	75.62	72.75	69.55	66.17	62.60	58.84
ความหนืด (เซนติพอยส์)	1.792	1.002	0.653	0.466	0.355	0.282
ดัชนีการหักเหแสง	1.3338	1.3330	1.3306	1.3272	1.3230	1.3180
ความดันไอ (มิลลิเมตรปรอท)	4.58	3.01	1.24	0.77	0.47	0.28
ความร้อนในการหลอมเหลว (แคลอรี/กรัม)	79.8	-	-	-	-	-
ความร้อนในการระเหย (แคลอรี/กรัม)	677.8	-	-	666.7	-	662.3
ความหนาแน่น (กรัม, ซม. ³)	9168	0.9171	0.9178	0.9182	0.9185	0.9188
ความร้อนจำเพาะ (แคลอรี/กรัม, °C)	0.04837	-	-	0.4647	-	0.4504
ความจุความร้อน (จูล/กรัม)	2.06	-	-	1.94	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.2 คุณสมบัติบางประการของของเหลวบางชนิด

ความตึงผิว (Surface Tension) ของของเหลวคือ แรงหรือพลังงานต่อตารางเซนติเมตรที่ต้องใช้เพิ่มพื้นที่ผิวของของเหลวนั้นความตึงผิวจะมีค่าสูงถ้าของเหลวนั้นมีแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลมาก ความตึงผิวลดลงถ้าเพิ่มอุณหภูมิจะลดความตึงผิว

ตารางที่ 2.3 ความตึงผิวของของเหลวบางชนิดที่ 20°C

ของเหลว	ความตึงผิว	
	dyne cm^{-1}	Nm^{-1}
แอลกอฮอล์	22.3	22.3×10^{-3}
อะซีโตน	23.7	23.7×10^{-3}
คาร์บอนเตตระคลอไรด์	26.7	26.7×10^{-3}
เบนซีน	28.9	28.9×10^{-3}
น้ำ	72.8	72.8×10^{-3}

ความหนืดเป็นความต้านทานที่จะไหลความหนืดเป็นสมบัติอย่างหนึ่งของของเหลวที่เกี่ยวข้องกับแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลถ้าโมเลกุลของของเหลวมีแรงดึงดูดมากก็หนืดมากเพราะโมเลกุลไหลเลื่อนไปบนโมเลกุลอื่นได้ยากการเพิ่มอุณหภูมิซึ่งเป็นการเพิ่มพลังงานจลน์ทำให้แรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลน้อยลงและทำให้ความหนืดมีค่าลดน้อยลงและทำให้ความหนืดมีค่าลดน้อยลงด้วยกล่าวคือของเหลวไหลง่ายขึ้นกว่าเดิม

นอกจากนั้นรูปร่างหรือลักษณะการจัดเรียงอะตอมภายในโมเลกุลยังเป็นอีกสิ่งหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อความหนืดโมเลกุลที่เป็นรูปกลมหรือรูปรีเบี้ยว จะไหลคล่องกว่าโมเลกุลที่มีรูปร่างยาวหักขดไปมาไม่เรียบสม่ำเสมอ พวกหลังนี้ไหลเลื่อนผ่านกันไปมาลำบาก และเราพบว่าของเหลวที่มีโมเลกุลทำนองนี้มีความหนืดสูง

ตารางที่ 2.4 สัมประสิทธิ์ความหนืดของของเหลวบางชนิด

ของเหลว	อุณหภูมิ °C	สัมประสิทธิ์ความหนืด $\text{gs}^{-1} \text{cm}^{-1}$
แอลกอฮอล์	20	4.55×10^{-3}
เบนซีน	20	6.52×10^{-3}
น้ำ	20	10.05×10^{-3}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

น้ำ	100	2.84×10^{-3}
กลีเซอรอล	20	14.90

2.4 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาต่างๆ เช่น ความร้อน, ของไหล ให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุดโดยทั่วไปจะมีกระบวนการการคำนวณหลายรูปแบบ อาทิ ค่าคลาดเคลื่อนและค่าประมาณ การหาค่ารากของสมการ การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข การแก้สมการ การหาเส้นสมการที่เหมาะสม การประมาณค่าในช่วง การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น

สำหรับปัญหาพิเศษนี้จะใช้เทคนิคการวิเคราะห์เชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการไหลของของไหล ดังนี้

- ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method)
- ระเบียบวิธีขั้นประกอบอันตะ (Finite Element Method)

สำหรับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา ความต้องการความแม่นยำ และเวลาที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหา

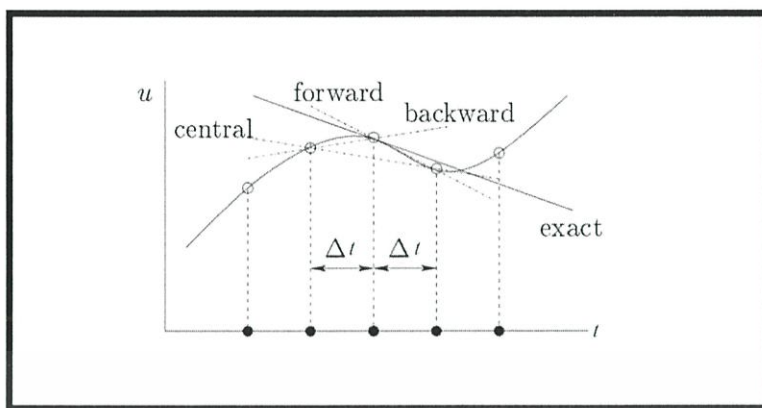
2.4.1 ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite Difference Method)

ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม [1] เป็นวิธีการที่ใช้กันมากในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ที่มีความซับซ้อน ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม เกิดจากการนำอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) มาหาค่าอนุพันธ์อันดับใดๆ โดยเริ่มจากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง อนุพันธ์อันดับสองและอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไป

2.4.2 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

สำหรับการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะแบ่งออกเป็น 3 กรณี คือผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference) ผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference) และผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางอันดับหนึ่ง (First Central Difference) เมื่อกำหนดให้ Δt คือระดับขั้นหรือช่วงกว้าง (Step Size) ดังรูปที่ 2.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.4 การประมาณค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ

ผลต่างสี่เบื้องข้างหน้าอันดับหนึ่ง (Forward Difference)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (2.23)$$

ผลต่างสี่เบื้องย้อนหลังอันดับหนึ่ง (Backward Difference)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.24)$$

ผลต่างสี่เบื้องตรงกลางอันดับหนึ่ง (Central Difference)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.25)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ที่

$$x = 0.5 \text{ เมื่อ } \Delta x = 0.5; f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

- 1.) โดยวิธีผลต่างสี่เบื้องข้างหน้า
- 2.) โดยวิธีผลต่างสี่เบื้องย้อนหลัง
- 3.) โดยวิธีผลต่างสี่เบื้องตรงกลาง

วิธีทำ ค่าจริงหาได้จากสมการ $f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25$

$$\text{จะได้ } f'(0.5) = -0.9125$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้เพื่อให้บริการใช้แก่เพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x_{i-1} &= 0 & ; & \quad f(x_{i-1}) = 1.2 \\ x_i &= 0.5 & ; & \quad f(x_i) = 0.925 \\ x_{i+1} &= 1.0 & ; & \quad f(x_{i+1}) = 0.2 \end{aligned}$$

1.) โดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า

$$f'(0.5) \approx \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45$$

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{-0.9125 - (-1.45)}{-0.9125} \right| \times 100 = 58.9\%$$

2.) โดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลัง

$$f'(0.5) \approx \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -1.55$$

$$|\varepsilon_i| = 39.7\%$$

3.) โดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง

$$f'(0.5) \approx \frac{0.2 - 1.2}{1.0} = -1.0$$

$$|\varepsilon_i| = 9.6\%$$

2.4.3 การวิเคราะห์หาค่า Error

การประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ เป็นวิธีการที่นิยมนำมาศึกษาในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ละพจน์ และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Errors) ซึ่งเกี่ยวข้องกับการตัดค่าในพจน์ท้ายๆ ที่ เพราะถือว่ามีค่าน้อยมาก

ความแม่นยำของการประมาณค่าของ Finite Difference Method

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right)_n - \frac{(\Delta t)^3}{6} \left(\frac{d^3u}{dt^3} \right)_n + \dots \quad (2.26)$$

Forward Difference มีค่า error เป็น $O(\Delta t)$

โดยที่ $O(\Delta t)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลาย

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right)_n - \frac{(\Delta t)^3}{6} \left(\frac{d^3u}{dt^3} \right)_n + \dots \quad (2.27)$$

Backward Difference มีค่า error เป็น $O(\Delta t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาด้านนี้ เมื่อนักศึกษาให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $O(\Delta t)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลาย

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{6} \left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_n + \dots \quad (2.28)$$

Central Difference มีค่า error เป็น $O(\Delta t)^2$

โดยที่ $O(\Delta t)^2$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลาย

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งเลือกใช้รูปแบบใดนั้นจะขึ้นอยู่กับข้อมูลที่ทราบค่าของแต่ละตำแหน่ง โดยถ้าเปรียบเทียบผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า และผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง เมื่อ Δt มีค่าเท่ากัน การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง จะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมที่เหมือนกัน แต่เมื่อใช้ค่า Δt ที่แตกต่างกัน การใช้ค่า Δt ที่มีค่าน้อยกว่าจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่า

2.4.4 การหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

สำหรับการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถแบ่งออกเป็น 3 กรณี เช่นเดียวกันกับการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้าอันดับสอง (Second Forward Finite Divided Difference)

$$\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_n \approx \frac{u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n}{(\Delta t)^2} \quad (2.29)$$

ผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Finite Divided Difference)

$$\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_n \approx \frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{(\Delta t)^2} \quad (2.30)$$

ผลต่างสี่เหลี่ยมย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Finite Divided Difference)

$$\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.31)$$

2.4.5 การประมาณค่าของรูปแบบผสมกัน

โดยทั่วไป U_{xy} จะไม่เท่ากับ U_{yx} แต่สำหรับกรณีนี้ U_x, U_y, U_{xy} และ U_{yx} ต่อเนื่องบน X

$$\text{จะได้} \quad U_{xy}(a, b) = U_{yx}(a, b) \quad ; \forall (a, b) \in X$$

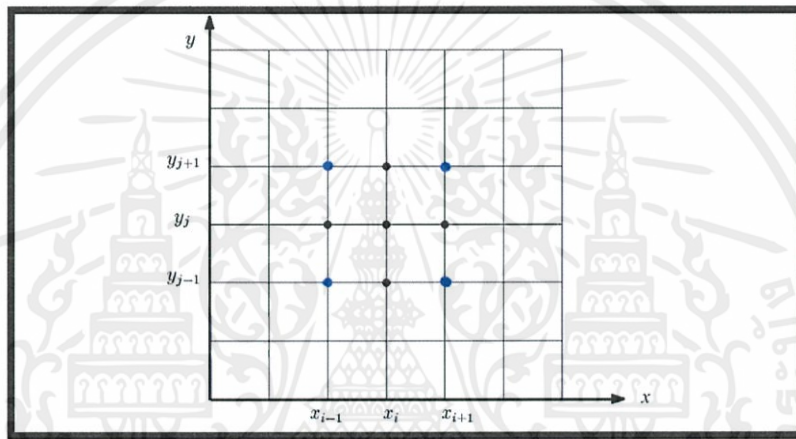
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$2D: \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1,j} = \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2$$



รูปที่ 2.5 การประมาณค่าของรูปแบบผสมกัน

การประมาณค่า Second-order Difference

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (2.32)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

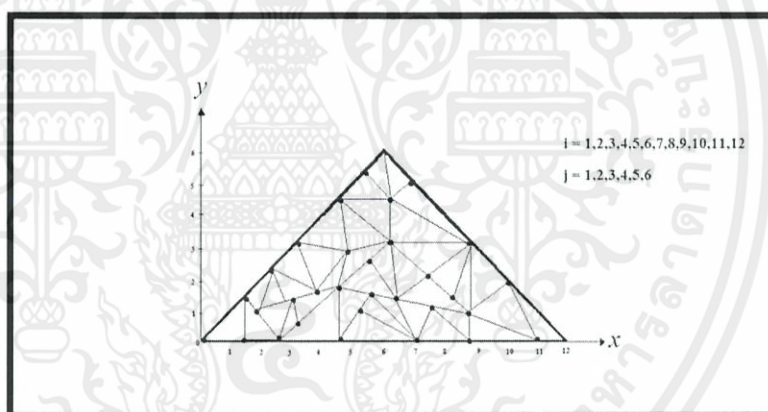
2.5 ระเบียบวิธีขั้นประกอบอันตะ (Finite Element Method)

การแก้ปัญหาโดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อน โดยเริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเนื้อที่หลายๆชิ้น ซึ่งเรียกว่า เอลิเมนต์ (Element)

2.5.1 ขั้นตอนการคำนวณ

ระเบียบวิธีขั้นประกอบอันตะเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งซึ่งสามารถใช้แก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีโดเมนมีความซับซ้อนได้มากกว่าสำหรับผลต่างอันตะโดยจะใช้การประมาณค่าด้วยฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) มาช่วยปรับตำแหน่งจุดและค่าที่ตำแหน่งใดๆ ตามที่ต้องการ โดยมีขั้นตอนการคำนวณ [8] ดังนี้

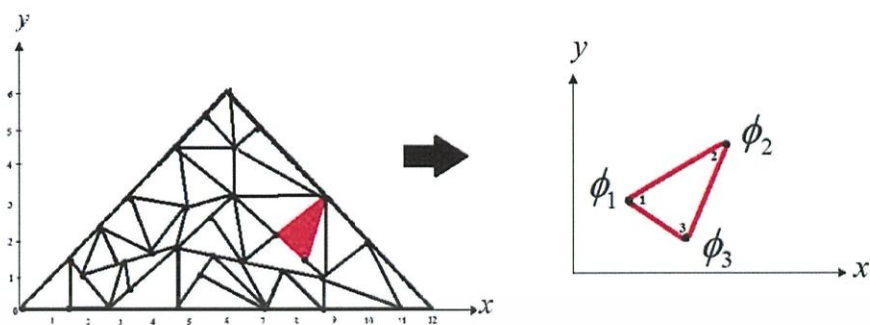
ขั้นที่ 1 แบ่งรูปร่างของโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ที่วางตัวในโคออร์ดิเนต x-y ดังรูปที่ 2.6 ซึ่งอาจประกอบด้วยเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม (Triangular Element) หรือแบบเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (Quadrilateral Element) เอลิเมนต์เหล่านี้ต่อเชื่อมกันที่จุดต่อ (Node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณตัวไม่ทราบค่าคือ ค่าความดัน และค่าความเร็วของการไหล



รูปที่ 2.6 ลักษณะการแบ่งรูปร่างออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

ขั้นที่ 2 การประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงของผลลัพท์บนแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งหากพิจารณาเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมเอลิเมนต์ใดเอลิเมนต์หนึ่งในโดเมนนี้ซึ่งประกอบด้วย 3 จุดต่อที่ไม่ทราบค่าแทนด้วย ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ดังรูปที่ 2.7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.7 การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

จึงอธิบายรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad (2.33)$$

โดยที่ $N_i(x, y), i = 1, 2, 3$ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

สามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N] \{\phi\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

โดยที่ $[N]$ คือ เมทริกซ์แถวแนวนอน (row matrix) ของฟังก์ชันการประกอบภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์หรือเมทริกซ์แถวตั้ง (column matrix) ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

ขั้นที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element equations) ตัวอย่างเช่น สมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}_e \quad (2.35)$$

โดย $k_{i,j}; i, j = 1, 2, 3$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งอาจเป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติและขนาดของเอลิเมนต์นั้น

e คือ เมทริกซ์เหล่านี้เป็นเมทริกซ์ระดับเอลิเมนต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สามารถเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (2.36)$$

ขั้นที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้นในรูปแบบดังนี้

$$\Sigma(\text{elementequation}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (2.37)$$

โดย sys คือ เมทริกซ์เหล่านี้เป็นเมทริกซ์ของระบบสมการรวม (system)

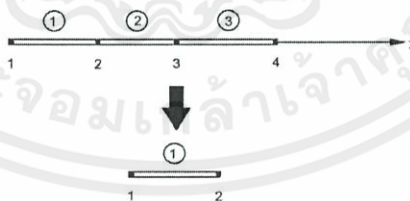
ขั้นที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบของปัญหา ซึ่งจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น เงื่อนไขขอบเขตจะประยุกต์เข้าในระบบสมการรวม (2.37) แล้วจึงแก้ระบบสมการนี้เพื่อหา $\{\phi\}_{\text{sys}}$ ค่าต่างๆที่จุดต่อ (node)

ขั้นที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆที่จุดต่อ ก็สามารถทำการหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการทราบต่อไปได้

2.5.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

จะศึกษาลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์ซึ่งตั้งอยู่บนรากฐานของความเข้าใจในฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ เนื่องจากการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องทำการอินทิเกรตฟังก์ชันบนพื้นที่ของเอลิเมนต์เพื่อไม่ให้เกิดความยากลำบากในการอินทิเกรตเราจึงทำการแปลง (transform) รูปเอลิเมนต์ในโคออร์ดิเนต $x-y$ ให้อยู่ในรูปเอลิเมนต์ในโคออร์ดิเนตธรรมชาติ $\xi - \eta$ ซึ่งจะทำให้การอินทิเกรตเป็นไปได้โดยง่ายยิ่งขึ้น ดังหัวข้อต่อไปนี้

1. One-Dimensional Linear Element



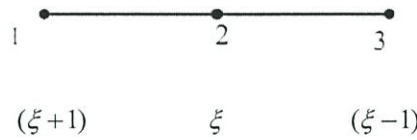
ฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่าได้ดังนี้

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

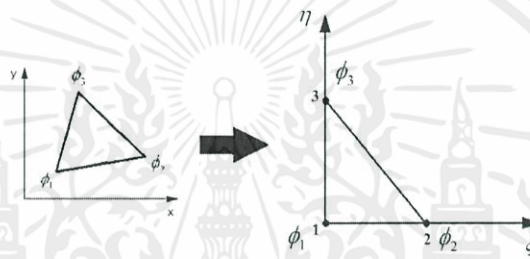
2.5.3 One-Dimensional Quadratic Element



$$N_1 = C\xi(\xi-1) \text{ และ } N_1 = 1 \quad \xi = -1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{ก็จะได้ทำนองเดียวกันว่า } N_2 = -(\xi+1)(\xi-1) \quad N_3 = \frac{\xi}{2}(\xi+1)$$

2.5.4 Two-Dimensional Linear Elements



รูปที่ 2.8 การแปลงขึ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณแบบเชิงเส้น
ให้อยู่ในแกนหลัก

ฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่าได้ดังนี้

$$N_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2 = \xi$$

$$N_3 = \eta$$

และอนุพันธ์ของ Shape function เทียบกับ ξ และ η จะได้ดังนี้

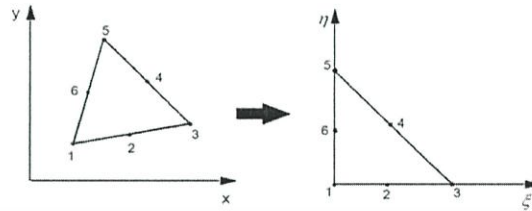
$$\frac{\partial}{\partial \xi} N_1(\xi, \eta) = -1 \quad \frac{\partial}{\partial \eta} N_1(\xi, \eta) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} N_2(\xi, \eta) = 1 \quad \frac{\partial}{\partial \eta} N_2(\xi, \eta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} N_3(\xi, \eta) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \eta} N_3(\xi, \eta) = 1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.5 Two -Dimensional Quadratic Element



รูปที่ 2.9 การแปลงขึ้นประกอบรูปสามเหลี่ยมในการประมาณแบบกำลังสองให้อยู่ในแกนหลัก
ฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) & N_2 &= \xi(2\xi-1) \\ N_3 &= \eta(2\eta-1) & N_4 &= 4\xi(1-\xi-\eta) \\ N_5 &= 4\xi\eta & N_6 &= 4\eta(1-\xi-\eta) \end{aligned}$$

และอนุพันธ์ของ Shape function เทียบกับ ξ และ η จะได้ดังนี้

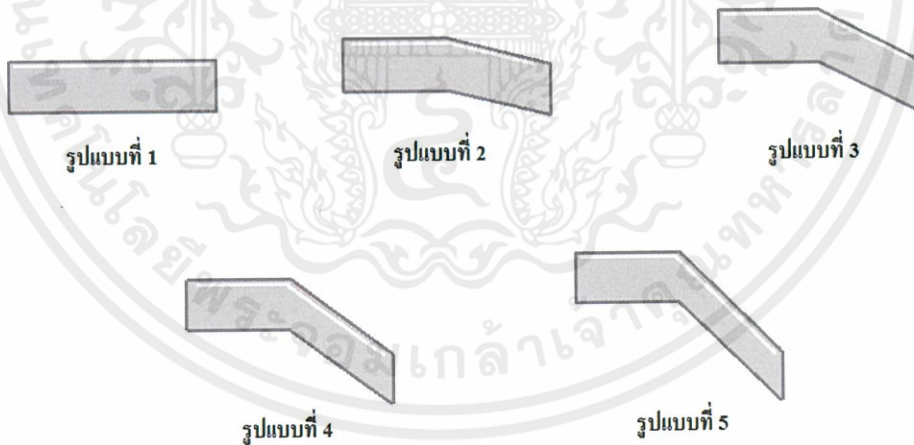
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} N_1(\xi, \eta) &= -3 + 4\xi + 4\eta & \frac{\partial}{\partial \eta} N_1(\xi, \eta) &= -3 + 4\xi + 4\eta \\ \frac{\partial}{\partial \xi} N_2(\xi, \eta) &= -1 + 4\xi & \frac{\partial}{\partial \eta} N_2(\xi, \eta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} N_3(\xi, \eta) &= 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} N_3(\xi, \eta) &= -1 + 4\eta \\ \frac{\partial}{\partial \xi} N_4(\xi, \eta) &= 4(1 - 2\xi - \eta) & \frac{\partial}{\partial \eta} N_4(\xi, \eta) &= -4\xi \\ \frac{\partial}{\partial \xi} N_5(\xi, \eta) &= 4\eta & \frac{\partial}{\partial \eta} N_5(\xi, \eta) &= 4\xi \\ \frac{\partial}{\partial \xi} N_6(\xi, \eta) &= -4\eta & \frac{\partial}{\partial \eta} N_6(\xi, \eta) &= 4(1 - \xi - 2\eta) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การดำเนินการของปัญหา

ในการเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม โดยพิจารณาท่อที่มีรูปทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยม ให้ความเร็วของการไหลในแนวแกน X ไหลเข้าด้านท่อในลักษณะการไหลในท่อ (Poiseuille Flow) และความเร็วในแนวแกน Y มีค่าเท่ากับ ศูนย์ ในปัญหาพิเศษนี้จะพิจารณา น้ำ ซึ่งเป็นของเหลวที่มีสัมประสิทธิ์ความหนืดเท่ากับ 10.05×10^{-3} โดยลักษณะของน้ำที่ไหลภายในท่อ เป็นการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) และเป็นกรไหลแบบคลิบคลาน (Creeping Flow) จึงใช้ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์น้อยๆ ซึ่งในที่นี้เราใช้ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ เท่ากับ 2 โดยใช้หลักการของกฎอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass) และกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum) รวมถึงใช้เทคนิคการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element Method) และสมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations) มาช่วยในการหาผลเฉลย

ในปัญหาพิเศษนี้เราจะพิจารณาการไหลในท่อซึ่งมีลักษณะเป็นท่อที่มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยม โดยพิจารณาในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ โดยโดเมนของปัญหาแสดงดังรูป 3.1 เมื่อพิจารณาครึ่งบนของท่อ



รูปที่ 3.1 รูปแบบของท่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

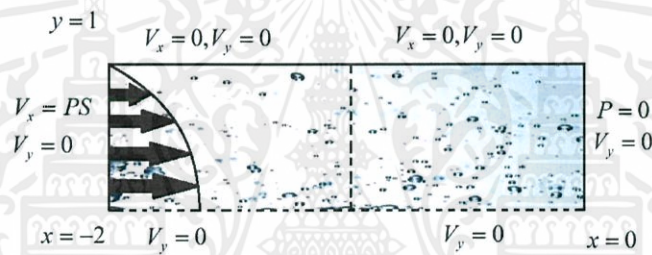
จากการศึกษาพฤติกรรมการไหลและพารามิเตอร์ต่างๆ เป็นความเร็วในแนวแกน X ความเร็วในแนวแกน Y และความดัน ภายใต้สมมติฐานที่ว่า ของไหลที่อัดตัวไม่ได้กับแรงโน้มถ่วงของโลก ไปกับอุณหภูมิและไม่มีการสั่นไถลระหว่างของไหลกับผนังท่อ

3.1 เงื่อนไขเริ่มต้น

ในการเริ่มต้นปัญหา กำหนดให้ความเร็วเกือบทุกตำแหน่ง ทั้งสองทิศทางมีค่าเป็นศูนย์ ยกเว้นความเร็วในแนวแกน X ที่บริเวณทางเข้าให้เป็นไปตามเงื่อนไขค่าขอบ ส่วนค่าความดันจะกำหนดให้ทุกตำแหน่งเป็นศูนย์ ณ จุดเริ่มต้น

3.2 เงื่อนไขค่าขอบ

ที่แต่ละขอบของโดเมนจะกำหนดค่าดังนี้

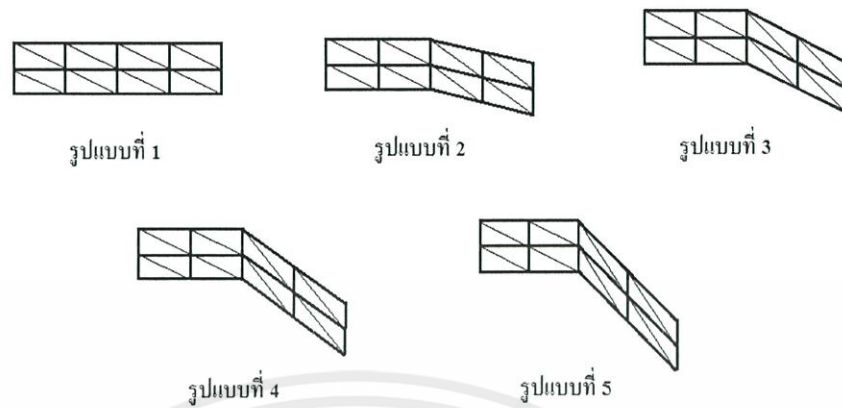


รูปที่ 3.2 เงื่อนไขค่าขอบ [11]

3.3 ปัญหาที่นำมาศึกษา

เมื่อกำหนดให้ แถวและหลักเท่ากับ 2 ข้อมูลเวลา เท่ากับ 10^{-5} Tolalence เท่ากับ 10^{-6} ค่าความเร็วที่เข้าสู่ต้นท่อมี่ระยะการพุ่งเข้าสูงสุดเท่ากับ 3.0 ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 2 และมีค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน เท่ากับ 1 ซึ่งจะมีการ Gen Grid ดังรูปที่ 3.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.3 การ gen grid

3.4 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลของของไหลภายในท่อปริซึมฐานสี่เหลี่ยม โดยใช้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งศึกษาการไหลของของไหลที่มีคุณสมบัติเป็นของไหลแบบหนืด (Viscous) และของไหลที่อัดตัวไม่ได้ (Incompressible) โดยเงื่อนไขขอบเป็นองค์ประกอบที่สำคัญสำหรับกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งกำหนดเงื่อนไขขอบดังรูปที่ 3.2 ดังนั้นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจึงประกอบด้วยสมการเชิงอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass) และสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum) ซึ่งจะนำไปใช้ร่วมกันกับการประยุกต์ระเบียบวิธีผลต่างสปีนนิ่ง (Finite Difference Method) ในการประมาณพจน์เชิงอนุพันธ์ย่อยโดยหลักการของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element Method) ก่อให้เกิดระบบสมการทางพีชคณิตโดยใช้หลักการ Gauss-Seidel Method มาช่วยในการหาผลเฉลย [8]

จากสมการควบคุมนาเวียร์-สโตกส์จะได้สมการดังนี้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = [\nabla \cdot (\mu \nabla u) - \rho u \cdot \nabla u] - \nabla P \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.2)$$

โดยจะใช้หลักการ Taylor Galerkin Pressure Correction [12]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งจะให้เป็นแบบระบบไร้หน่วย (dimensionless) และกระจายผลเฉลย u ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ในเวลา Δt

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t^n + \dots \quad (3.3)$$

รวมทั้งใช้วิธีการของ Crank – Nicolson มาพิจารณาในส่วนของเทอมค่าความดัน จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\text{Re}}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) &= [\nabla \cdot (\mu \nabla u) - \text{Re} u \cdot \nabla u]^{n+\frac{1}{2}} - \theta \nabla P^{n+1} - (1-\theta) \nabla P^n \\ &= [\nabla \cdot (\mu \nabla u) - \text{Re} u \cdot \nabla u]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla P^n - \theta (\nabla P^{n+1} - \nabla P^n) \\ &= [\nabla \cdot (\mu \nabla u) - \text{Re} u \cdot \nabla u]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla P^n - \theta \nabla q^{n+1} \\ \frac{\text{Re}}{\Delta t} (u^{n+1} - u^* + u^* - u^n) &= [\nabla \cdot (\mu \nabla u) - \text{Re} u \cdot \nabla u]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla P^n - \theta \nabla q^{n+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

เมื่อ $q^{n+1} = p^{n+1} - p^n$

สรุป initial u^n, P^n

$$\text{Step 1a: } \frac{2\text{Re}}{\Delta t} (u^{n+\frac{1}{2}} - u^n) = [\mu \nabla^2 u - \text{Re}(u \cdot \nabla)u - \nabla P]^n \quad (\text{หา } u^{n+\frac{1}{2}}) \quad (3.5)$$

$$\text{Step 1b: } \frac{\text{Re}}{\Delta t} (u^* - u^n) = [\mu \nabla^2 u - \text{Re}(u \cdot \nabla)u]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla P^n \quad (\text{หา } u^*) \quad (3.6)$$

$$\text{Step 2: } \theta \nabla^2 q^{n+1} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} \nabla \cdot u^* \quad (\text{หา } P^{n+1}) \quad (3.7)$$

$$\text{Step 3: } \frac{\text{Re}}{\Delta t} (u^{n+1} - u^*) = -\theta \nabla q^{n+1} \quad (\text{หา } u^{n+1}) \quad (3.8)$$

โดยที่แต่ละเทอมจะกระจายได้ในรูปของอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 u = \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \delta x + \left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right] \delta y + \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \delta z$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u \nabla \cdot u = \left[u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] \delta x + \left[u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] \delta y + \left[u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \delta z$$

โดยการแทนค่าแต่ละเทอมลงในสมการ (3.5-3.6) จะได้สมการที่แต่ละ Component ดังนี้

Step 1a : จากสมการ 3.5 $\frac{2 \operatorname{Re}}{\Delta t} \left(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n \right) = \left[\mu \nabla^2 u - \operatorname{Re}(u \cdot \nabla)u - \nabla P \right]^n$ จะได้ว่า

X-component

$$\frac{2 \operatorname{Re}}{\Delta t} [M] \left(u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n \right) = -\mu [S] u_j^n - \operatorname{Re}[NX] u_k^n u_j^n - \operatorname{Re}[NY] v_k^n u_j^n - [LX] P_j^n \quad (3.9)$$

เมื่อ $M_{ij} = \iint_{\Omega} N_i N_j d\Omega$

$$S_{ij} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega$$

$$NX_{ijk} = \iint_{\Omega} N_i N_k \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$$

$$NY_{ijk} = \iint_{\Omega} N_i N_k \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

$$LX_{ij} = \iint_{\Omega} N_i \frac{\partial n_j}{\partial x} d\Omega$$

$$LY_{ij} = \iint_{\Omega} N_i \frac{\partial n_j}{\partial y} d\Omega$$

Y-component

$$\frac{2 \operatorname{Re}}{\Delta t} [M] \left(v_j^{n+\frac{1}{2}} - v_j^n \right) = -\mu [S] v_j^n - \operatorname{Re}[NX] u_k^n v_j^n - \operatorname{Re}[NY] v_k^n v_j^n - [LY] P_j^n \quad (3.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Step 1b : จากสมการ 3.6 $\frac{\text{Re}}{\Delta t}(u^* - u^n) = [\nabla \cdot (\mu \nabla u) - \text{Re} u \cdot \nabla u]^{n+\frac{1}{2}} - \nabla P^{n+1}$ จะได้ว่า

X-component

$$\frac{2\text{Re}}{\Delta t}[M]\left(u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n\right) = -\mu[S]u_j^n - \text{Re}[NX]u_k^n u_j^n - \text{Re}[NY]v_k^n u_j^n - [LX]P_j^n \quad (3.11)$$

Y-component

$$\frac{2\text{Re}}{\Delta t}[M]\left(v_j^{n+\frac{1}{2}} - v_j^n\right) = -\mu[S]v_j^n - \text{Re}[NX]u_k^n v_j^n - \text{Re}[NY]v_k^n v_j^n - [LY]P_j^n \quad (3.12)$$

Step 2 : จากสมการ 3.7 $\theta \nabla^2 q^{n+1} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} \nabla \cdot u^*$ จะได้ว่า

$$\theta[K]q_j^{n+1} = -\frac{\text{Re}}{\Delta t}[RX]u_j^* - \frac{\text{Re}}{\Delta t}[RY]v_j^* \quad (3.13)$$

เมื่อ
$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial n_j}{\partial x} + \frac{\partial n_i}{\partial y} \frac{\partial n_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$RX_{ij} = \iint_{\Omega} n_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$$

$$RY_{ij} = \iint_{\Omega} n_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$$

Step 3 : จากสมการ 3.8 $\frac{\text{Re}}{\Delta t}(u^{n+1} - u^*) = -\theta \nabla q^{n+1}$ จะได้ว่า

X-component

$$\frac{\text{Re}}{\Delta t}[M](u_x^{n+1} - u_x^*) = -\theta[LX]q_j^{n+1} \quad (3.14)$$

Y-component

$$\frac{\text{Re}}{\Delta t}[M](v_x^{n+1} - v_x^*) = -\theta[LY]q_j^{n+1} \quad (3.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

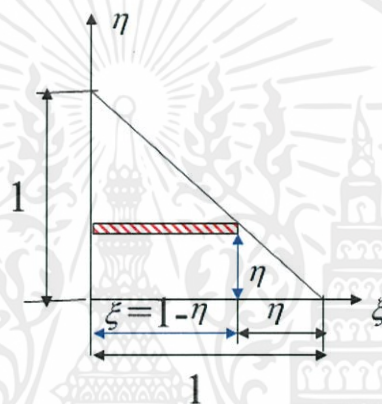
โดยเราจะจัด $M_y, S_y, NX_k, NY_k, LX_y, LY_y, K_y, RX_y, RY_y$ ในรูปของ ξ, η

จาก $U = \sum_{i=1}^n N_i u_i, V = \sum_{i=1}^n N_i v_i, P = \sum_{i=1}^n n_i p_i$; n = จำนวนโหนดใน element

โดยที่ N_i เป็น Element shape function

$$X = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad Y = \sum_{i=1}^n N_i y_i$$

ซึ่งเราจะประมาณค่าอินทิเกรตโดยวิธีการทาง Numerical Gaussian Quadrature 4 จุด ใน 2 มิติ ในรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีรูปแบบดังนี้ [13]



$$I = \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_i)$$

โดยที่

$\xi_1 = \frac{1}{3}$	$\eta_1 = \frac{1}{3}$	$w_1 = \frac{27}{48}$
$\xi_2 = \frac{2}{15}$	$\eta_2 = \frac{2}{15}$	$w_2 = \frac{25}{48}$
$\xi_3 = \frac{11}{15}$	$\eta_3 = \frac{2}{15}$	$w_3 = \frac{25}{48}$
$\xi_4 = \frac{2}{15}$	$\eta_4 = \frac{11}{15}$	$w_4 = \frac{25}{48}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รวมทั้งใช้วิธีการ Penalty Approach [14] โดยให้

$$C = \max |K_{ij}| \times 10^{20}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \quad (3.16)$$

เมื่อเราได้สมการในรูปของสมการพีชคณิตแล้วแก้ระบบสมการหาค่า x_i โดยใช้วิธี Gauss-Seidel Method มาช่วยในการหาผลเฉลยซึ่งมีหลักการดังนี้

วิธีเกาส์เซดอล(Gauss Seidel Method) จะคล้ายกับการหาค่ารากของสมการ 1 สมการ ซึ่งจะต้องเดาค่าเริ่มต้นที่เป็นระบบ เพื่อให้ได้ค่าใกล้เคียงที่ต้องการ

กำหนดระบบสมการ n สมการ หรือในรูปเมทริกซ์ $[A][x]=[c]$ ถ้าสมาชิกในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์มีค่า $\neq 0$ จะสามารถหาค่า x_1 จากสมการแรก และสามารถหาค่า x_2 จากสมการ 2 เรื่อยๆ ไปจนกระทั่งหาค่า x_n ได้จากสมการสุดท้าย [1]

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n$$

ย้ายข้างสมการ

$$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) / a_{11}$$

$$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) / a_{22}$$

⋮

$$x_n = (c_n - a_{n1}x_1 - a_{n3}x_3 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) / a_{nn}$$

หาค่าเริ่มต้นโดยที่ x_i ทุกตัวที่ไม่ทราบค่ามีค่าเท่ากับ 0 ยกเว้น x_j ที่ต้องการหา

$$\text{ดังนั้น } x_1 = c_1 / a_{11}$$

แทนค่า $x_1 = c_1 / a_{11}$ และ $x_i = 0$ (เมื่อ $i = 3, 4, \dots, n$) เพื่อหาค่า x_2 ทำจนกระทั่งครบทั้ง n สมการ ทำซ้ำหลายๆครั้ง ตั้งแต่สมการแรกจนถึงสมการสุดท้าย จนกระทั่งได้ค่าน้อยกว่า ε_s ตามที่ต้องการ

$$|\varepsilon_s| = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| \times 100\% \quad (3.17)$$

j คือ ค่า x_i ที่หาค่าได้ปัจจุบัน และ $j-1$ คือ ค่า x_i ก่อนหน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงใช้วิธีเกาส์ไซดอล์ ในการแก้ระบบสมการ

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

เมื่อค่าคำตอบของระบบสมการ คือ $x_1 = 3, x_2 = -2.5$ และ $x_3 = 7$

วิธีทำ ทำซ้ำครั้งแรก $x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

โดยสมมติว่า x_2, x_3 มีค่าเท่ากับ 0

ดังนั้น $x_1 = \frac{7.85}{3} = 2.616666667$

สมมติว่า $x_3 = 0$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616666667) + 0}{7}$$

$$= -2.794523810$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616666667) + 0.2(-2.794523810)}{10}$$

$$= 7.005609524$$

ทำซ้ำครั้งที่ 2 $x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794523810) + 0.2(7.005609524)}{3}$

$$= 2.990556508$$

$$|\varepsilon_{r1}| = \left| \frac{3 - 2.990556508}{3} \right| \times 100\% = 0.31\%$$

$$|\varepsilon_{a1}| = \left| \frac{2.990556508 - 2.616666667}{2.990556508} \right| \times 100\% = 12.5\%$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990556508) + 0.3(7.005609524)}{7}$$

$$= -2.449624684$$

$$|\varepsilon_{r2}| = \left| \frac{-2.5 + 2.499624684}{-2.5} \right| \times 100\% = 0.015\%$$

$$|\varepsilon_{a2}| = \left| \frac{-2.499624684 + 2.794523810}{-2.499624684} \right| \times 100\% = 11.8\%$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990556508) + 0.2(-2.499624684)}{10}$$

$$= 7.000290811$$

$$|\varepsilon_{r3}| = 0.0042\% \text{ และ } |\varepsilon_{a3}| = 0.076\%$$



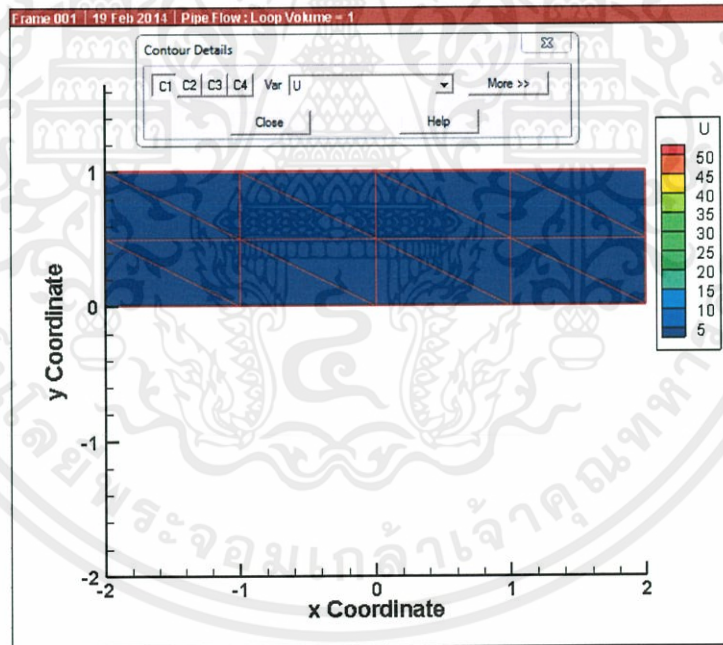
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

จากการศึกษาความเร็วในแนวแกน X ความเร็วในแนวแกน Y และความดัน ณ ตำแหน่งต่างๆ ของท่อที่เกิดจากแนวการวางท่อที่มีความลาดเอียงที่แตกต่างกันไปซึ่งตัวแบบจำลองการไหลจะพิจารณาในระบบพิกัดฉาก 2 มิติโดยจะพิจารณาภายใต้สมมติฐานว่าของไหลที่อัดตัวไม่ได้และไม่พิจารณาถึงผลกระทบของแรงเสียดทานระหว่างท่อกับของไหล ซึ่งขนาดหน้าตัดของท่อแต่ละแบบจำลองเท่ากันทุกกรณีและน้ำมีความเร็วต้น เท่ากับ 0.001 m/s โดยศึกษาของไหลที่พุ่งออกจากปลายท่อเป็นลักษณะ Poiseuille Flow ซึ่งในที่นี้ของไหลคือน้ำ จากการรันโปรแกรมภาษาซีซึ่งพัฒนาโดยศิริกุล ศิริธีรารกุล แล้วนำข้อมูลพล็อตโดยใช้ Tecplot โดยแบ่งเป็น 3 รูปแบบ คือ ความเร็วในแนวแกน $X(U)$ ความเร็วในแนวแกน $Y(V)$ และความดัน (P)

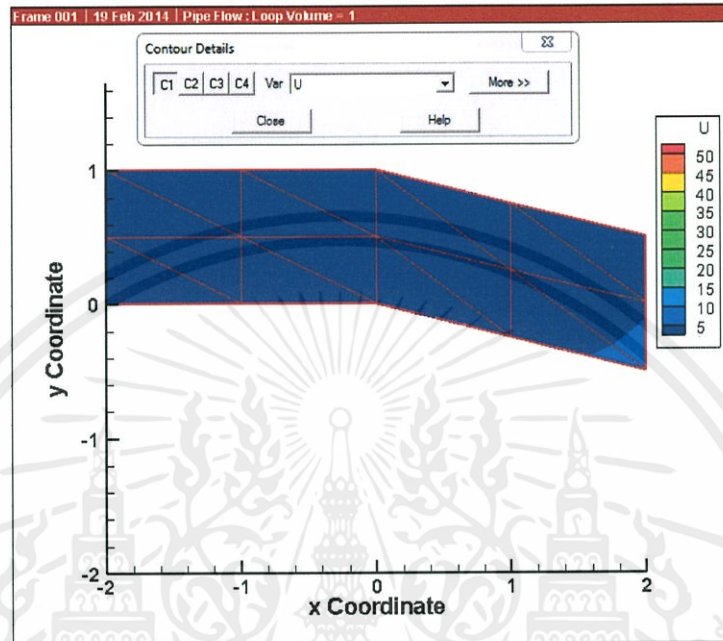
ความเร็วในแนวแกน $X(U)$



รูปที่ 4.1 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 0°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วในแนวแกน X ของปลายท่อที่ตำแหน่งระหว่างผนังท่อจนถึงตำแหน่งจุดกึ่งกลางท่อได้ผล 3.02093296 , 2.814833 , 2.264937 , เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

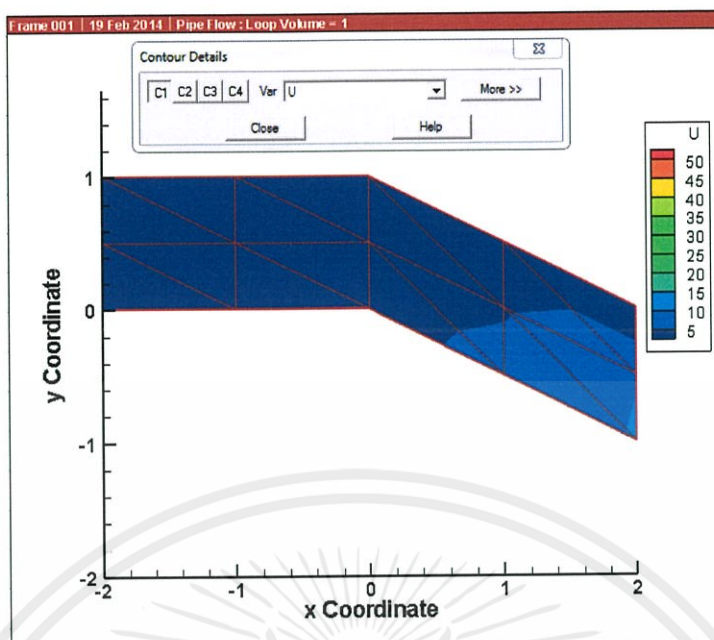
1.307771 และ 0 ซึ่งมีความเร็วเฉลี่ยที่น้ำพุ่งออกจากปลายท่อในลักษณะ Poiseuille Flow เท่ากับ 2.352119 พิจารณาความเร็วในแนวแกน X ที่ ต้นท่อจนถึงปลายท่อนั้นแสดงสีน้ำเงินตลอดแนวท่อ ซึ่งจะมีค่าความเร็วเท่ากัน ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.2 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 14°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วในแนวแกน X ของปลายท่อที่ ตำแหน่งระหว่างผนังท่อจนถึงตำแหน่งจุดกึ่งกลางท่อได้ผลดังนี้ 5.585977 , 5.424446 , 4.818852 , 3.183062 และ 0 ซึ่งมีความเร็วเฉลี่ยที่น้ำพุ่งออกจากปลายท่อในลักษณะ Poiseuille Flow เท่ากับ 4.753084 พิจารณาความเร็วในแนวแกน X ที่ต้นท่อจนถึงจุดหักมุมของท่อนั้นแสดงสีน้ำเงิน ซึ่งแนวโน้มความเร็วจะเท่ากันจนถึงเกือบปลายท่อ จากนั้นจุดกึ่งกลางของปลายท่อจึงจะเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเล็กน้อย ซึ่งแสดงเป็นสีฟ้า ดังรูปที่ 4.2

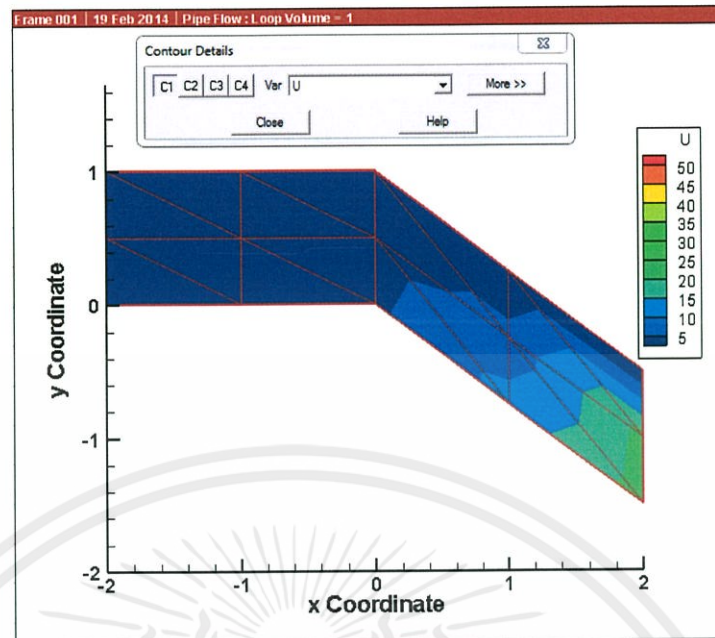
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 26.6°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วในแนวแกน X ของปลายท่อที่ตำแหน่งระหว่างผนังท่อจนถึงตำแหน่งจุดกึ่งกลางท่อได้ผลดังนี้ 10.45403 , 10.38077 , 10.38077 , 7.512057 และ 0 ซึ่งมีความเร็วเฉลี่ยที่น้ำพุ่งออกจากปลายท่อในลักษณะ Poiseuille Flow เท่ากับ 9.681908 พิจารณาความเร็วในแนวแกน X ที่ต้นท่อจนถึงจุดหักมุมของท่อนั้นแสดงสีน้ำเงิน ซึ่งแนวโน้มความเร็วจะเท่ากันจนถึง X เท่ากับ 0.6 จากนั้นเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นสีฟ้าเข้ม แล้วเมื่อถึงจุดกึ่งกลางของปลายท่อ ความเร็วก็เพิ่มขึ้นแสดงเป็นสีฟ้า ดังรูปที่ 4.3

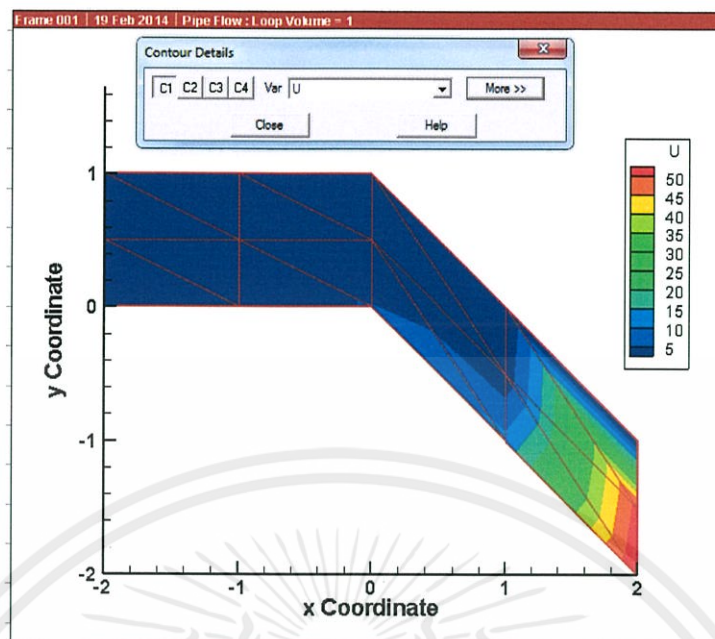
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 36.9°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วในแนวแกน X ของปลายท่อที่ตำแหน่งระหว่างผนังท่อจนถึงตำแหน่งจุดกึ่งกลางท่อได้ผลดังนี้ 22.30523 , 22.80504 , 21.40513 , 20.59502 และ 0 ซึ่งมีความเร็วเฉลี่ยที่น้ำพุ่งออกจากปลายท่อในลักษณะ Poiseuille Flow เท่ากับ 21.7776 พิจารณาความเร็วในแนวแกน X ที่ต้นท่อจนถึงจุดหักมุมของท่อนั้นแสดงเป็นสีน้ำเงิน ซึ่งแนวโน้มความเร็วจะเท่ากัน จนถึง X เท่ากับ 0.1 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นสีฟ้าเข้ม เมื่อ X เท่ากับ 0.8 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นสีฟ้าอ่อน จนถึง X เท่ากับ 1.3 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นสีเขียว จากนั้นจะเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นที่จุดกึ่งกลางของปลายท่อแสดงเป็นสีเขียวเข้ม ดังรูปที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

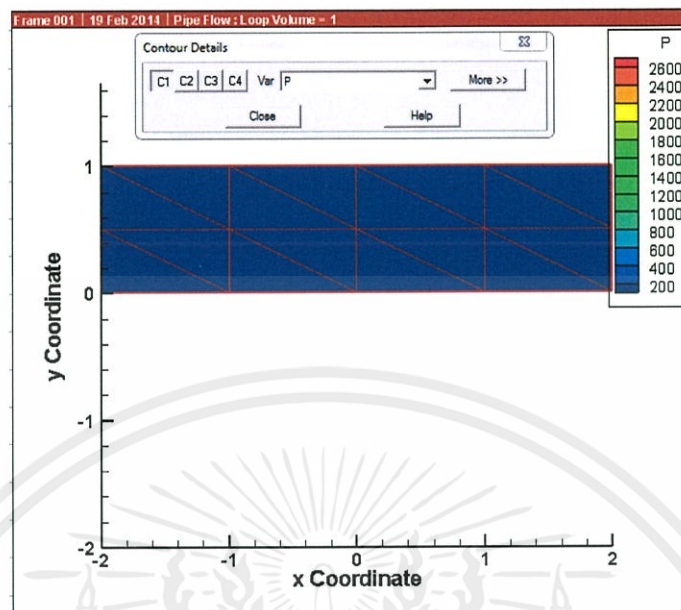


รูปที่ 4.5 ความเร็วในแนวแกน X ที่ 45°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วในแนวแกน X ของปลายท่อที่ตำแหน่งระหว่างผนังท่อจนถึงตำแหน่งจุดกึ่งกลางท่อได้ผลดังนี้ 55.36879 , 53.64571 , 51.99172 , 49.10706 และ 0 ซึ่งมีความเร็วเฉลี่ยที่น้ำพุ่งออกจากปลายท่อในลักษณะ Poiseuille Flow เท่ากับ 52.52832 พิจารณาความเร็วในแนวแกน X ที่ต้นท่อจนถึงจุดเกือบหักมุมของท่อนั้นแสดงเป็นสีน้ำเงินมีแนวโน้มความเร็วจะเท่ากัน จนถึง X เท่ากับ -1.9 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นสีฟ้าเข้ม เมื่อ X เท่ากับ 0.8 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นสีฟ้าอ่อน จนถึง X เท่ากับ 1.0 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเป็นสีฟ้า และจากนั้นจะเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเพิ่มขึ้นเรื่อยๆไปจนถึงจุดกึ่งกลางของปลายท่อจนแสดงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเป็นสีแดงส้ม ดังรูปที่ 4.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

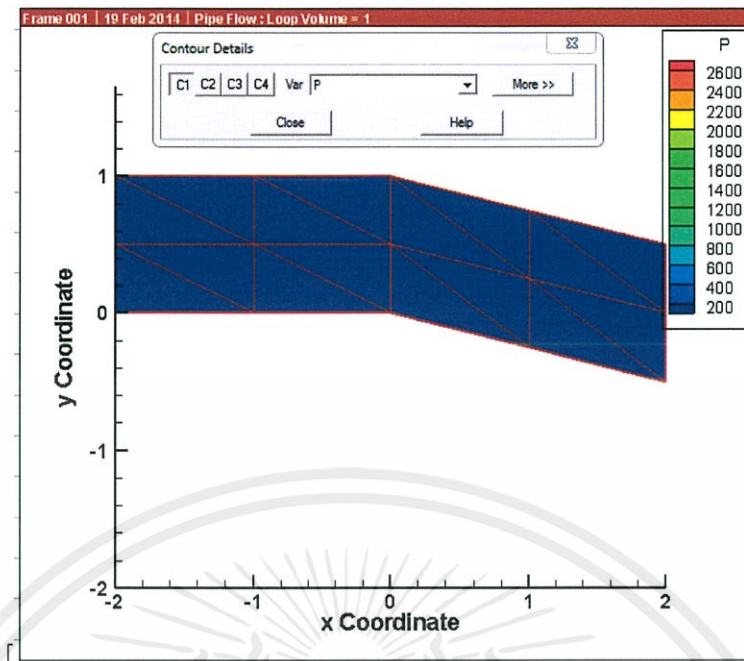
ความดัน (P)



รูปที่ 4.6 ค่าความดันที่ 0°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความดันเฉลี่ยจากปากท่อถึงปลายท่อที่มีค่า ดังนี้ 24.18519 , 18.05919 , 12.07352 , 6.034927 และ 0 เนื่องจากที่ปลายท่อได้กำหนดค่าความดันไว้ในขอบเขตของปัญหา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 พิจารณาความดันที่ต้นท่จนถึงปลายท่อนั้นแสดงสีน้ำเงินตลอดแนวท่อ ซึ่งจะมีความดันเท่ากันตลอดทั้งท่อ ดังรูปที่ 4.6

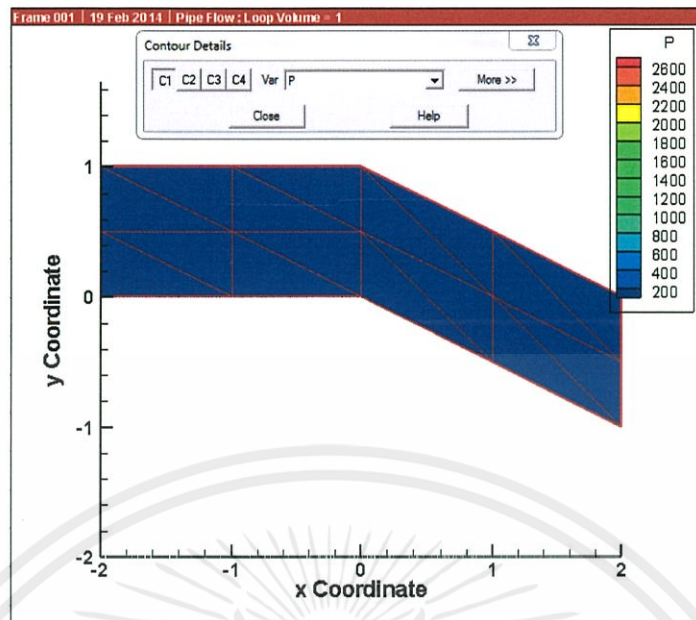
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.7 ค่าความดันที่ 14°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความดันเฉลี่ยจากปากท่อถึงปลายท่อที่มีค่า ดังนี้ 44.9477 , 38.72914 , 33.2307 , 21.79279 และ 0 เนื่องจากที่ปลายท่อได้กำหนดค่าความดันไว้ในช่วงขอบเขตของปัญหา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 พิจารณาความดันที่ต้นท่จนถึงปลายท่อนั้นแสดงสีน้ำเงินตลอดแนวท่อ ซึ่งจะมีความดันเท่ากันตลอดทั้งท่อ ดังรูปที่ 4.7

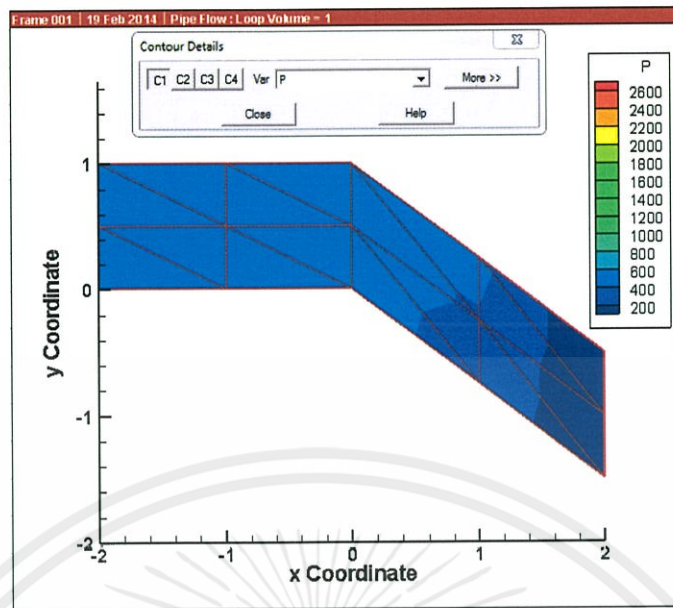
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.8 ค่าความดันที่ 26.6°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความดันเฉลี่ยจากปากท่อถึงปลายท่อมีค่า ดังนี้ 119.6842 , 113.3134 , 108.3558 , 84.29141 และ 0 เนื่องจากที่ปลายท่อได้กำหนดค่าความดันไว้ในขอบเขตของปัญหา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 พิจารณาความดันที่ต้นท่อจนถึงปลายท่อนั้นแสดงสีน้ำเงินตลอดแนวท่อ ซึ่งจะมีความดันเท่ากันตลอดทั้งท่อ ดังรูปที่ 4.8

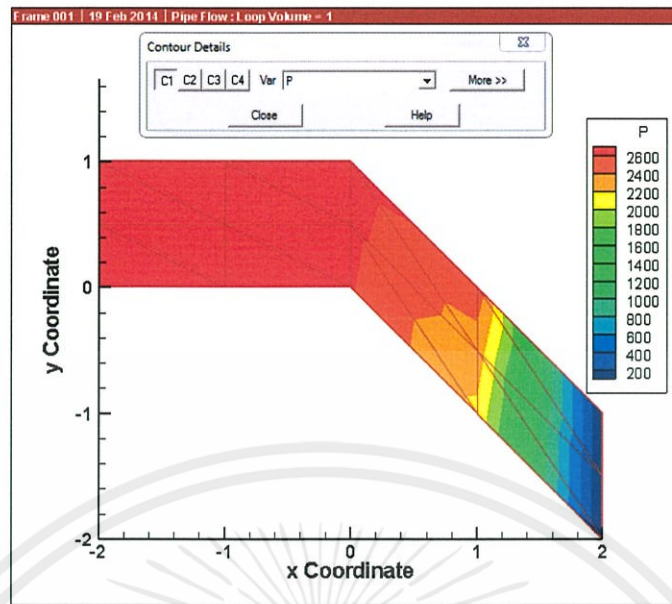
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 ค่าความดันที่ 36.9°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความดันเฉลี่ยจากปากท่อถึงปลายท่อที่มีค่า ดังนี้ 467.156 , 460.3859 , 456.5401 , 395.213 และ 0 เนื่องจากที่ปลายท่อได้กำหนดค่าความดันไว้ในขอบเขตของปัญหา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 พิจารณาความดันที่ต้นท่อจนถึงจุดหักมุมของท่อนั้นแสดงเป็นสีฟ้ามีแนวโน้มความดันเท่ากันตลอดไปจนถึง X เท่ากับ 2.6 แล้วจากนั้นเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงของความดันที่ลดลงเป็นสีฟ้าเข้ม เมื่อ X เท่ากับ 1.5 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงของความดันที่ลดลงอีกครั้งเป็นสีน้ำเงิน ดังรูปที่ 4.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

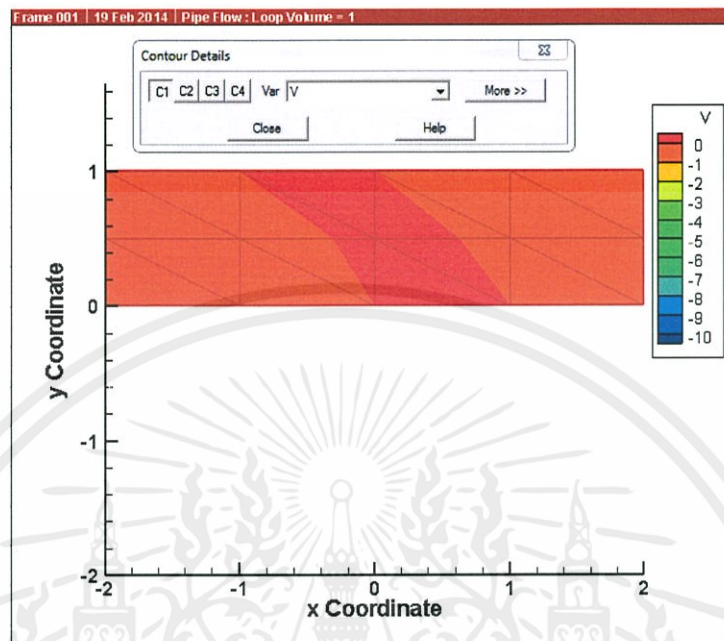


รูปที่ 4.10 ค่าความดันที่ 45°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความดันเฉลี่ยจากปากท่อถึงปลายท่อมีค่า ดังนี้ 2672.413 , 2659.826 , 2648.436 , 2326.816 และ 0 เนื่องจากที่ปลายท่อได้กำหนดค่าความดันไว้ในขอบเขตของปัญหา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 พิจารณาความดันที่ต้นท่อนจนถึงจุดหักมุมของท่อนั้นแสดงเป็นสีแดงส้มมีแนวโน้มความดันจะเท่ากันไปจนถึง X เท่ากับ 0.5 แล้วเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความดันที่ลดลงเป็นสีส้มเข้ม เมื่อ X เท่ากับ 0.5 เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงความดันที่ลดลงอีกเป็นสีส้ม และมีความดันที่ลดลงเรื่อยๆ ไปจนถึง X เท่ากับ 1.9 มีการเปลี่ยนแปลงความดันที่ลดลงเป็นสีน้ำเงินบริเวณปลายท่อ ดังรูปที่ 4.10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

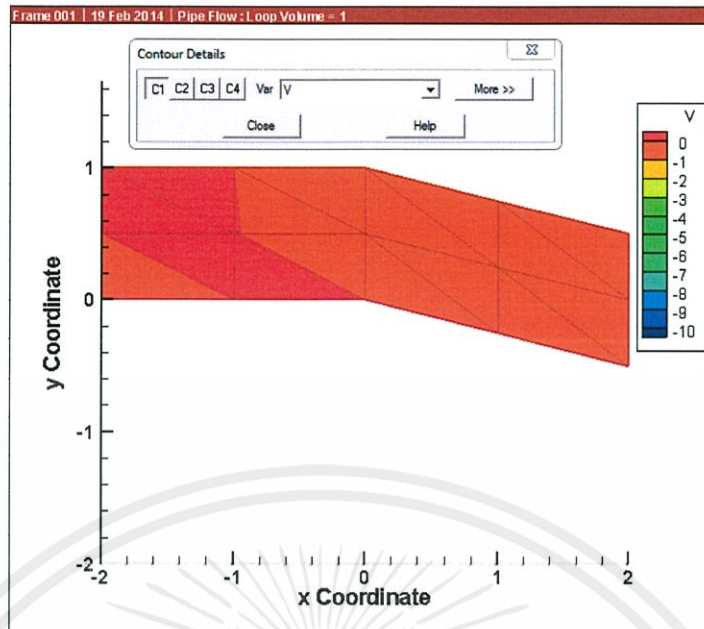
ความเร็วในแนวแกน $Y(V)$



รูปที่ 4.11 ความเร็วในแนวแกน Y ที่ 0°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วเฉลี่ยภายในท่อในแนวแกน Y ได้ดังนี้ -0.00016 พิจารณาความดันที่ต้นท่จนถึงปลายท่อนั้นจะแสดงเป็นสีส้มซึ่งจะมีความเร็วในแนวแกน Y เท่ากันตลอดทั้งท่อ แต่บริเวณจุดกึ่งกลางท่อนั้นจะมีความเร็วในแนวแกน Y เพิ่มขึ้นเป็นสีแดงส้ม และกลับมาเท่าเดิมจนถึงปลายของท่อ ดังรูปที่ 4.11

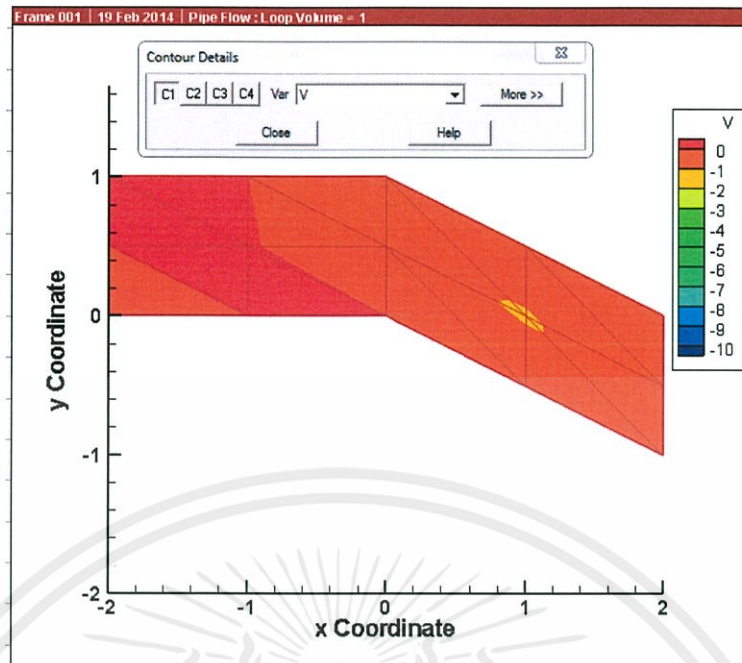
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.12 ความเร็วในแนวแกน Y ที่ 14°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วเฉลี่ยภายในท่อในแนวแกน Y ได้ดังนี้ -0.07796 พิจารณาความเร็วในแนวแกน Y ที่ต้นท่อนั้นจะแสดงความเร็วที่เพิ่มขึ้นเป็นสีแดงส้ม และความเร็วที่ลดลงเป็นสีส้มจะมีความเร็วในแนวแกน Y เป็นสีแดงส้มไปจนถึง Y เท่ากับ 0 หรือจุดหักมุมท่อนั้นเอง จากนั้นความเร็วในแนวแกน Y ก็จะลดลงเท่าเดิมไปจนถึงปลายท่อ ดังรูปที่ 4.12

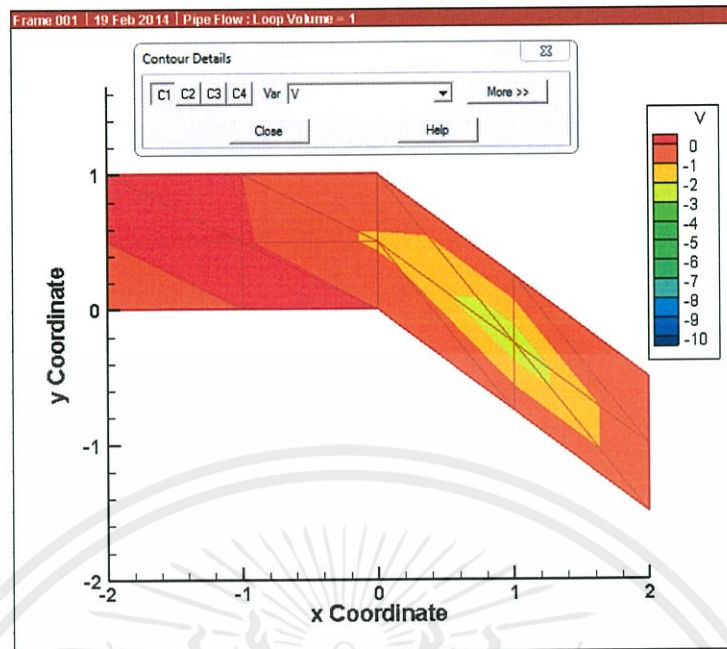
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.13 ความเร็วในแนวแกน Y ที่ 26.6°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วเฉลี่ยภายในท่อในแนวแกน Y ได้ดังนี้ -0.21871 พิจารณาความเร็วในแนวแกน Y ที่ต้นท่อนั้นจะแสดงความเร็วที่เพิ่มขึ้นเป็นสีแดงส้มและความเร็วที่ลดลงเป็นสีส้ม จะมีความเร็วในแนวแกน Y เป็นสีแดงส้มไปจนถึง X เท่ากับ 0 หรือจุดหักมุมท่อนั้นเอง แต่มีค่าความเร็วในแนวแกน Y ที่ลดลงบริเวณสีเหลืองหรือที่ X เท่ากับ 0.8 ถึง 1.2 จากนั้นความเร็วในแนวแกน Y ก็จะเพิ่มขึ้นเท่าเดิมไปจนถึงปลายท่อ ดังรูปที่ 4.13

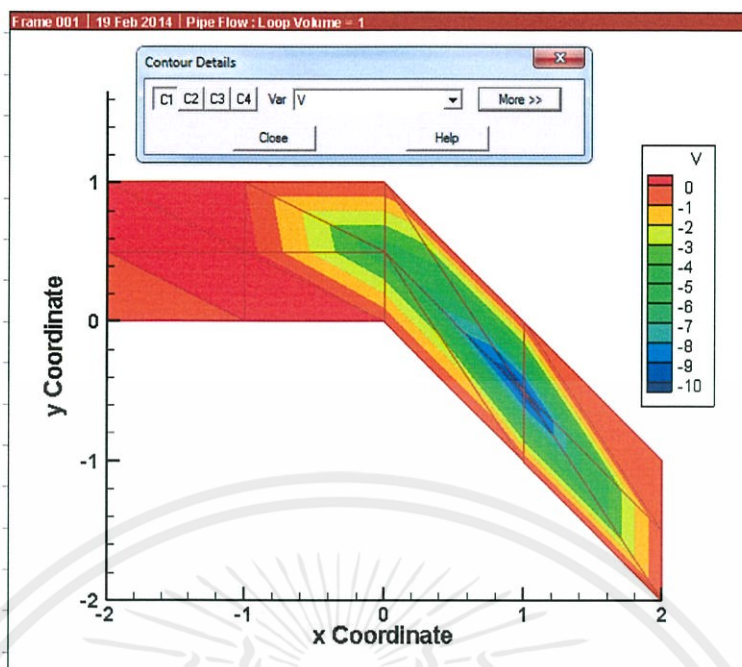
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.14 ความเร็วในแนวแกน Y ที่ 36.9°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วเฉลี่ยภายในท่อในแนวแกน Y ได้ดังนี้ -0.50595 พิจารณาความเร็วในแนวแกน Y ที่ต้นท่อนั้นจะแสดงความเร็วที่เพิ่มขึ้นเป็นสีแดงส้ม และความเร็วที่ลดลงเป็นสีส้ม จะมีความเร็วในแนวแกน Y เป็นสีแดงส้มไปจนถึง X เท่ากับ 0 หรือจุดหักมุมท่อนั้นเอง แต่มีค่าความเร็วในแนวแกน Y ที่ลดลงบริเวณสีเหลืองหรือที่ X เท่ากับ 0.6 ถึง 1.3 จากนั้นความเร็วก็เพิ่มขึ้นบริเวณรอบๆพื้นที่สีเหลือง และความเร็วในแนวแกน Y ก็เพิ่มขึ้นเท่าเดิมไปจนถึงปลายท่อ ดังรูปที่ 4.14

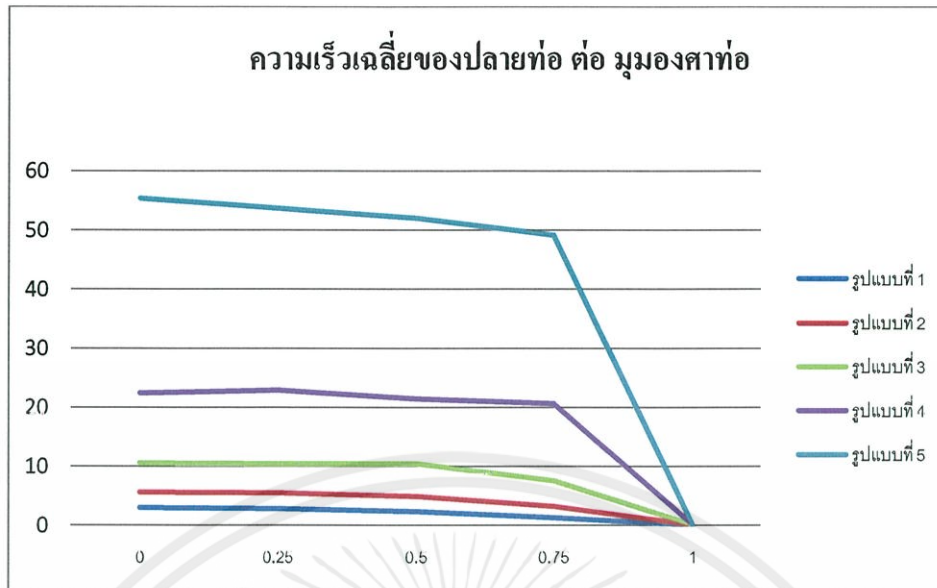
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 ความเร็วในแนวแกน Y ที่ 45°

จากผลการทดลองการรันโปรแกรม โดยพิจารณาความเร็วเฉลี่ยภายในท่อในแนวแกน Y ได้ดังนี้ -1.35089 พิจารณาความเร็วในแนวแกน Y ที่ต้นท่อนจนถึงปลายท่อนนั้นจะมีความเร็วในแนวแกน Y เป็นสีแดงส้มไปจนถึง X เท่ากับ 0 หรือจุดหักมุมท่อนนั้นเอง แต่มีค่าความเร็วในแนวแกน Y ที่ลดลงเรื่อยๆ บริเวณจากจุดกึ่งกลางท่อนถึงปลายท่อแสดงความเร็วที่ลดลง ดังรูปที่ 4.15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบความเร็วเฉลี่ยของปลายท่อ ต่อ มุมองศาท่อ

จากการศึกษาการเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม โดยศึกษาของไหลที่พุ่งออกจากปลายท่อเป็นลักษณะ Poiseuille Flow ซึ่งในที่นี้ของไหลคือน้ำเมื่อกำหนดให้น้ำมีความเร็วต้น เท่ากับ 0.001 m/s จากการพิจารณาความเร็วเฉลี่ยของปลายท่อต่อมุมองศาท่อ ซึ่งความสูงจะพิจารณาจากกึ่งกลางท่อ กำหนดให้มีความสูงดังนี้ 0.0, 0.5 , 1.0 ,1.5 และ 2.0 (หรือ $0^\circ, 14^\circ, 26.6^\circ, 36.9^\circ, 45^\circ$ ตามลำดับ) มีความเร็วเฉลี่ยเป็น 2.352119 , 4.753084 ,9.681908 , 21.7776 และ 52.52832

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปและข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาความเร็วในแนวแกน X ความเร็วในแนวแกน Y และความดัน ณ ตำแหน่งต่างๆ ของท่อที่เกิดจากแนวการวางท่อที่มีความลาดเอียงที่แตกต่างกันไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่บริเวณปลายท่อซึ่งจะมีผลกระทบต่อแรงดันที่ไปปั่นกังหันน้ำ เพื่อใช้ในการผลิตกระแสไฟฟ้าต่อไป ซึ่งตัวแบบจำลองการไหลจะพิจารณาในระบบพิกัดฉาก 2 มิติและสอดคล้องตามกฎการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass) และกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentum) โดยพิจารณาภายใต้สมมติฐานว่าของไหลที่อัดตัวไม่ได้ ไม่พิจารณาถึงผลกระทบของแรงเสียดทานระหว่างท่อกับของไหล และขนาดของหน้าตัดเท่ากันทุกแบบจำลอง รวมถึงใช้เทคนิคการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีชั้นประกอบอันตะ (Finite Element Method) รวมถึงใช้โปรแกรมภาษาซี (Microsoft Visual C++) สำหรับสร้างแบบจำลองเพื่อช่วยในการคำนวณโดยพิจารณาความเร็วเฉลี่ยของปลายท่อ ต่ มุมองศาท่อ ซึ่งความสูงจะพิจารณาจากกึ่งกลางท่อ กำหนดให้มีความสูง ดังนี้ 0.0 , 0.5 , 1.0 , 1.5 และ 2.0 (ซึ่งสามารถคิดมุมจากโปรแกรม [9] ได้ดังนี้ $0^\circ, 14^\circ, 26.6^\circ, 36.9^\circ, 45^\circ$ ตามลำดับ) โดยมีแนวโน้มความเร็วเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น เมื่อมุมท่อมีการหักมุมมากขึ้น

5.1 สรุป

จากการพิจารณาความเร็วเฉลี่ยของปลายท่อต่อมุมองศาท่อ พบว่าความสูง 2.0 (หรือมุม 45°) มีความเร็วเฉลี่ยเท่ากับ 52.52832 ดังนั้น มุมการวางท่อมีผลกระทบต่อความเร็วเฉลี่ยของน้ำที่ปลายท่ออย่างชัดเจน โดยมุมท่อที่มีความลาดชันมากมีแนวโน้มความเร็วเฉลี่ยที่น้ำพุ่งออกจากปลายท่อดีกว่ามุมท่อที่มีความลาดชันน้อยกว่า จึงทำให้มีแรงดันไปปั่นกังหันน้ำได้มากกว่าและมีประสิทธิภาพในการผลิตกระแสไฟฟ้าได้ดี

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ผู้ที่กำลังศึกษา และมีความสนใจในด้านนี้ สามารถนำความรู้ไปพัฒนา โดยประยุกต์ใช้ความเร็วของน้ำที่พุ่งออกมาจากปลายท่อไปผลิตกระแสไฟฟ้า รวมถึงการนำไปต่อยอดในด้านอื่นๆ อาทิ เช่น ภาคการเกษตร ภาคอุตสาหกรรม และภาคบริการ
2. เพื่อให้เกิดการพัฒนาศักยภาพของแบบจำลอง ควรศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับของไหลเพิ่มมากขึ้น อาทิ การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ความเค้นเฉือน (shear stress) กับผนังของท่อ รวมถึงพิจารณาผลกระทบที่เกิดจากแรงเสียดทานระหว่างท่อกับของไหล



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้


ภาคผนวก

การเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

สำหรับการแก้ปัญหาการเปรียบเทียบการไหลของของไหลภายในท่อสี่เหลี่ยม โดยใช้เทคนิคการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element Method) ซึ่งต้องแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเนื้อที่หลายๆชิ้นที่เรียกว่าเอลิเมนต์ โดยในโปรแกรมภาชีของศิริกุล ศิริธีรากล (ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์) ได้แบ่งการพัฒนาโปรแกรมออกเป็น 2 ส่วน โดยส่วนแรกเป็นส่วนการแบ่งโดเมน กำหนดค่าเริ่มต้นและค่าเงื่อนไขค่าขอบ และโปรแกรมในส่วนที่ 2 จะเป็นการคำนวณหาผลเฉลยของการไหล (u, v, p) โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เปิดไฟล์ DATA.txt แล้วกำหนดความยาว ความกว้างและความลาดเอียงของท่อ



```
File Edit Format View Help
number_of_line_comment
5
#*****DATA_FOR_GENERATE_GRID*****
#numhor(row)_numver(column)
#
#*****
numsec
2
acbhor
1
section1
numhor  numver
2        2
biash   biasv
0.5     0.5
acbver
1
coordinate
-2      1
-2      0
0       1
0       0
section2
numhor  numver
2        2
biash   biasv
0.5     0.5
acbver
1
coordinate
0       1
0       0
2       1
2       0
```

รูปที่ ผ.1 กำหนดรูปแบบของท่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 2 เปิดโปรแกรมภาษาซี (Microsoft Visual C++) เพื่อเลือกรูปแบบของ
เอลิเมนต์ โดยในที่นี้จะเลือกเป็น Quadratic Triangle (6 node element) เนื่องจากต้องการแปลง
ให้อยู่ในรูปแบบ Two-Dimensional Quadratic Element ซึ่งเป็นการแปลงขึ้นประกอบรูป
สามเหลี่ยมในการประมาณแบบกำลังสองให้อยู่ในแกนหลัก

```
Choose type of elements
1) Linear triangle (3 Node elements)
2) Quadratic triangle (6 node elements)
3) Linear rectangle (4 Node elements)
4) Quadratic rectangle (8 node elements)
Your choice ( 1 , 2 , 3 or 4 ) is : 2
```

รูปที่ ผ.2 รูปแบบของเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 3 เลือกรูปแบบของ Diagonal ในที่นี้จะเลือกเป็น From Low Left to Top
Right เนื่องจากต้องการคำนวณครึ่งหนึ่งของท่อปริซึมฐานสี่เหลี่ยม ในที่นี้จะเลือกด้านบน ของท่อใน
การแก้ปัญหา

```
Choose type of diagonal
1) From top left to low right
2) From low left to top right
Your choice ( 1 or 2 ) is : 2
```

รูปที่ ผ.3 รูปแบบของ Diagonal

ขั้นตอนที่ 4 การเลือกวิธีการป้อนค่าโดยในที่นี้จะรับค่าจะเลือกแบบรับค่าทาง คีย์บอร์ด
(Key Board)

```
Choose method for input data
1) Read file
2) By key board
Your choice ( 1 or 2 ) is : 1
```

รูปที่ ผ.4 วิธีการป้อนค่า

ขั้นตอนที่ 5 ป้อนชื่อไฟล์ที่ระบุค่าไว้ใน DATA.txt

```
Name of file input data : DATA.txt
nuncenunc=2
Action bias from top to bottom
section1
numver=2          numhor=2
biasv=0.500000   biash=0.500000
Action bias from left to right
coordinate
-2.000000        1.000000
-2.000000        0.000000
0.000000         1.000000
0.000000         0.000000
** PRESS ANY KEY TO CONTINUE **
section2
numver=2          numhor=2
biasv=0.500000   biash=0.500000
Action bias from left to right
coordinate
0.000000         1.000000
0.000000         0.000000
2.000000         1.000000
2.000000         0.000000
** PRESS ANY KEY TO CONTINUE **
```

รูปที่ ผ.5 ป้อนชื่อไฟล์

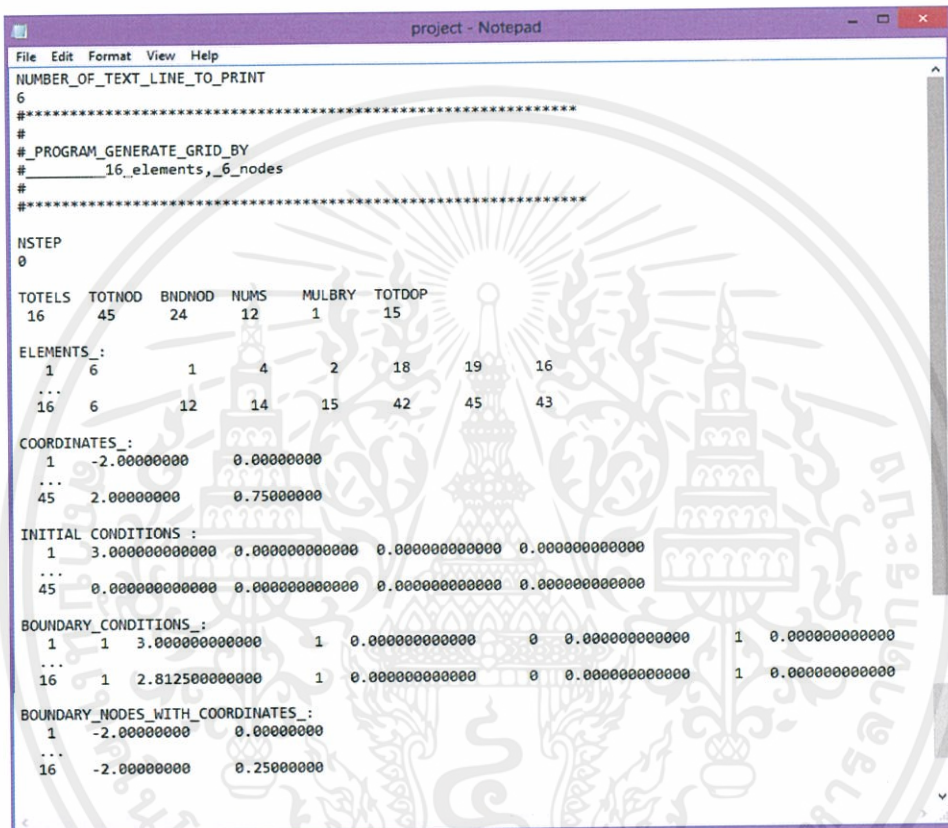
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 6 กดบันทึกในชื่อไฟล์ project.txt

```
Name of output file : project.txt_
```

รูปที่ ผ.6 การบันทึกไฟล์

ขั้นตอนที่ 7 หลังจากกำหนดข้อมูลต่างๆ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา จะปรากฏไฟล์งานที่เราบันทึกข้อมูลต่างๆ ไว้ เช่น project.txt เป็นต้น



```
project - Notepad
File Edit Format View Help
NUMBER_OF_TEXT_LINE_TO_PRINT
6
#*****
#
#_PROGRAM_GENERATE_GRID_BY
#_____16_elements,_6_nodes
#
#*****
NSTEP
0
TOTALS  TOTNOD  BDNOD  NUMS  MULBRY  TOTDOP
16      45     24     12     1       15
ELEMENTS_:
1  6     1  4     2  18    19   16
...
16 6     12 14    15  42    45   43
COORDINATES_:
1  -2.0000000  0.0000000
...
45 2.0000000  0.7500000
INITIAL CONDITIONS :
1  3.000000000000  0.000000000000  0.000000000000  0.000000000000
...
45 0.000000000000  0.000000000000  0.000000000000  0.000000000000
BOUNDARY_CONDITIONS_:
1  1  3.000000000000  1  0.000000000000  0  0.000000000000  1  0.000000000000
...
16 1  2.812500000000  1  0.000000000000  0  0.000000000000  1  0.000000000000
BOUNDARY_NODES_WITH_COORDINATES_:
1  -2.0000000  0.0000000
...
16  -2.0000000  0.2500000
```

รูปที่ ผ.7 ไฟล์งานข้อมูล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 8 เปิดโปรแกรมภาษาซี (Microsoft Visual C++)แล้วค้นหาไฟล์ที่เราตั้งชื่อไว้ เช่น project.txt แล้วกด Enter หลังจากนั้น ตั้งชื่อไฟล์ สำหรับแสดงค่า Output เช่น projectout.txt แล้วกด Enter

```
Please enter name of input data file : project.txt
Input name of output file to show element stiffness : projectout.txt
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
91 92 93 94 95 96 97 98 99 100
101 102 103 104 105 106 107 108 109 110
111 112 113 114 115 116 117 118 119 120
121 122 123 124 125 126 127 128 129 130
131 132 133 134 135 136 137 138 139 140
141 142 143 144 145 146 147 148 149 150
151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
161 162 163 164 165 166 167 168 169 170
171 172 173 174 175 176 177 178 179 180
181 182 183 184 185 186 187 188 189 190
191 192 193 194 195 196 197 198 199 200
```

รูปที่ ผ.8 การตั้งชื่อไฟล์แสดงค่า Output

ระหว่างการรันโปรแกรมถึง Max Step ที่เราตั้งไว้หรือ Steady จะแสดงค่า Max Error ขณะรันโปรแกรม

```
4991 4992 4993 4994 4995 4996 4997 4998 4999 5000
-5000
Maxerror=0.00348708
5001 5002 5003 5004 5005 5006 5007 5008 5009 5010
5011 5012 5013 5014 5015 5016 5017 5018 5019 5020
5021 5022 5023 5024 5025 5026 5027 5028 5029 5030
5031 5032 5033 5034 5035 5036 5037 5038 5039 5040
5041 5042 5043 5044 5045 5046 5047 5048 5049 5050
5051 5052 5053 5054 5055 5056 5057 5058 5059 5060
5061 5062 5063 5064 5065 5066 5067 5068 5069 5070
5071 5072 5073 5074 5075 5076 5077 5078 5079 5080
5081 5082 5083 5084 5085 5086 5087 5088 5089 5090
5091 5092 5093 5094 5095 5096 5097 5098 5099 5100
5101 5102 5103 5104 5105 5106 5107 5108 5109 5110
5111 5112 5113 5114 5115 5116 5117 5118 5119 5120
5121 5122 5123 5124 5125 5126 5127 5128 5129 5130
5131 5132 5133 5134 5135 5136 5137 5138 5139 5140
5141 5142 5143 5144 5145 5146 5147 5148 5149 5150
5151 5152 5153 5154 5155 5156 5157 5158 5159 5160
5161 5162 5163 5164 5165 5166 5167 5168 5169 5170
5171 5172 5173 5174 5175 5176 5177 5178 5179 5180
5181 5182 5183 5184 5185 5186 5187 5188 5189 5190
```

รูปที่ ผ.9 แสดงค่า Max Error ขณะรันโปรแกรม

หลังจากกำหนดข้อมูลต่างๆ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา จะปรากฏไฟล์งานที่เราบันทึกข้อมูลต่างๆ ไว้ เช่น project.txt เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

projectout - Notepad
File Edit Format View Help
t=5000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 38.50679381
45 1.79499321 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00348708
t=10000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 29.79500020
45 1.55724002 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00093653
t=15000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 -0.00000000 27.01413334
45 1.45245518 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00038057
t=20000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 -0.00000000 25.74877516
45 1.39713235 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00019452
t=25000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 25.07430344
45 1.36344996 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00011216
t=30000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.69398250
45 1.34193778 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00006485
t=35000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.47645175
45 1.32824632 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00003717
t=40000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.35212271
45 1.31969956 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00002109
t=45000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.28144758
45 1.31447369 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00001186
t=50000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.24153093
45 1.31133447 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00000662
t=55000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.21912713
45 1.30947515 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00000367
t=60000
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.20662435
45 1.30838594 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00000202
steady state when t=64816
node 1 approx_U approx_V approx_P
... 3.00000000 0.00000000 24.19987167
45 1.30777102 0.00000000 0.00000000
maxerror=0.00000099
Interpolate
interpx interpy U_interp V_interp P_interp

```

รูปที่ ผ.10 ข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 9 นำผลที่ได้ไป Plot Graphโดยใช้โปรแกรม Tecplot

```
bp - Notepad
File Edit Format View Help
TITLE = "Pipe Flow : Loop Volume = 1"
VARIABLES = "x Coordinate" , "y Coordinate" , "U" , "V" , "P"

ZONE T="Flow", N=45, E=16, F=FEPOINT, ET=TRIANGLE
-2      0      3      0      24.19987167
-2      0.5    2.25  0      24.17011945
...
1.5     0.5    2.25307214  -0.00038614  0
1.5     0.75  1.30826968  -0.00021643  0
1.5     1      0      0      0
2       0.25  2.8148332   0      0
2       0.75  1.30777102  0      0

1       4       2
2       4       5
3       5       3
4       5       6
5       7       5
6       7       8
7       8       6
8       8       9
9       10      8
10      10      11
11      11      9
12      11      12
13      13      11
14      13      14
15      14      12
16      14      15
```

รูปที่ ผ.11 ข้อมูลสำหรับ Plot Graph

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Input File ของโปรแกรม Generate Grid ดังนี้

```
DATA - Notepad
File Edit Format View Help
number_of_line_comment
5
*****
*****DATA_FOR_GENERATE_GRID*****
#numhor(row)_numver(column)
#
*****
numsec
2
acbhor 1
1
section1
numhor 2
numver 2
biash 0.5
biasv 0.5
acbver 1
coordinate
-2 1
-2 0
0 1
0 0
section2
numhor 2
numver 2
biash 0.5
biasv 0.5
acbver 1
coordinate
0 1
0 0
2 -1
2 -2
```

รายละเอียดของโปรแกรม

หมายเลข 1 คือ จำนวน Section

หมายเลข 2 คือ Section ที่ 1

หมายเลข 3 คือ ช่องตามแนวนอน

หมายเลข 4 คือ ค่า bias แนวนอน

หมายเลข 5 คือ Section ที่ 2

หมายเลข 6 คือ ช่องตามแนวนอน

หมายเลข 7 คือ ค่า bias แนวนอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

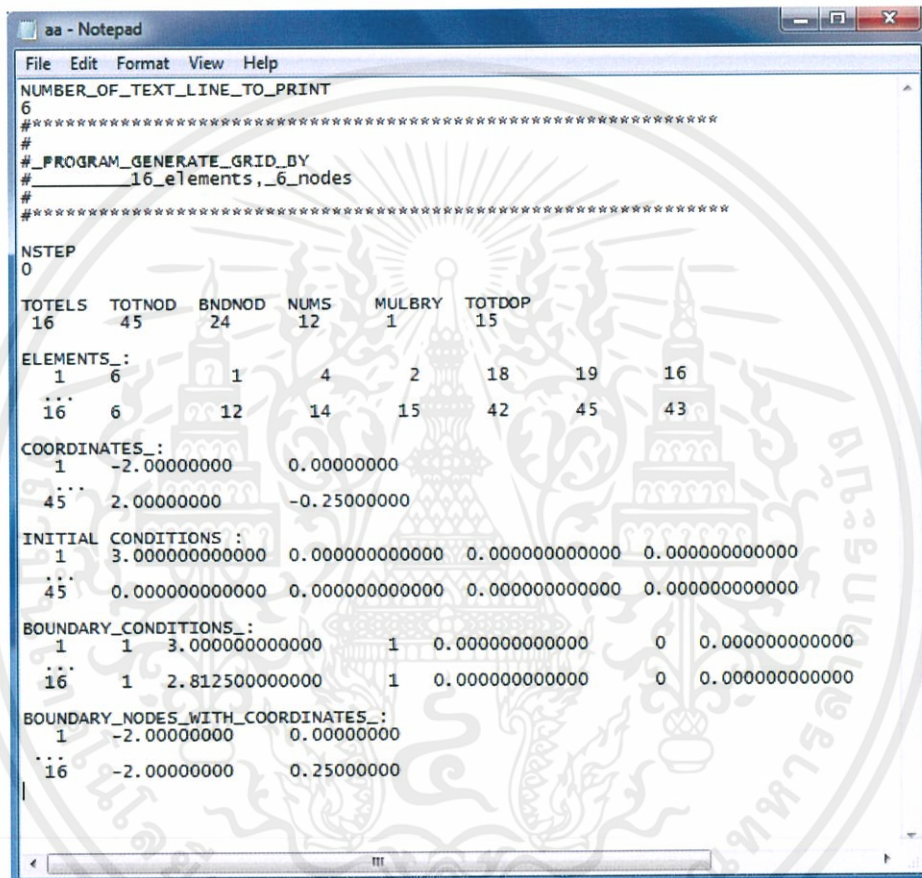
หมายเลข 8 คือ ค่า bias แนวตั้ง

หมายเลข 9 คือ Coordinate ด้านบนซ้าย ด้านล่างซ้าย ด้านบนขวาและด้านล่างขวา

หมายเลข 10 คือ ค่า bias แนวตั้ง

หมายเลข 11 คือ Coordinate ด้านบนซ้าย ด้านล่างซ้าย ด้านบนขวาและด้านล่างขวา

ต้องแก้ไขส่วนของ Source Code ให้เหมาะกับ boundary condition ซึ่งจะให้ผล ดังนี้



```
aa - Notepad
File Edit Format View Help
NUMBER_OF_TEXT_LINE_TO_PRINT
6
#*****
#
#_PROGRAM_GENERATE_GRID_BY
#_____16_elements,_6_nodes
#*****
NSTEP
0
TOTALS TOTNOD BDNOD NUMS MULBRY TOTDOP
16 45 24 12 1 15
ELEMENTS_:
1 6 1 4 2 18 19 16
...
16 6 12 14 15 42 45 43
COORDINATES_:
1 -2.00000000 0.00000000
...
45 2.00000000 -0.25000000
INITIAL CONDITIONS_:
1 3.000000000000 0.000000000000 0.000000000000 0.000000000000
...
45 0.000000000000 0.000000000000 0.000000000000 0.000000000000
BOUNDARY_CONDITIONS_:
1 1 3.000000000000 1 0.000000000000 0 0.000000000000
...
16 1 2.812500000000 1 0.000000000000 0 0.000000000000
BOUNDARY_NODES_WITH_COORDINATES_:
1 -2.00000000 0.00000000
...
16 -2.00000000 0.25000000
```

ซึ่ง Output file นี้ จะเป็น Input File ของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณต่อไป

เมื่อ Run โปรแกรมจะปรากฏหน้าจอต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

Please enter name of input data file : aa.txt
Input name of output file to show element stiffness : aaaout.txt
1      2      3      4      5      6      7      8      9      10
11     12     13     14     15     16     17     18     19     20
21     22     23     24     25     26     27     28     29     30
31     32     33     34     35     36     37     38     39     40
41     42     43     44     45     46     47     48     49     50
51     52     53     54     55     56     57     58     59     60
61     62     63     64     65     66     67     68     69     70
71     72     73     74     75     76     77     78     79     80
81     82     83     84     85     86     87     88     89     90
91     92     93     94     95     96     97     98     99     100
101    102    -

```

และผลที่ได้จากการ Run โปรแกรมจนถึง Steady State แล้ว จะให้ผลดังนี้

```

aaout - Notepad
File Edit Format View Help
t=5000
node  approx_U      approx_V      approx_P
1      3.00000000    0.00000000    144.04850756
...
43     0.00000000    0.00000000    0.00000000
44     7.77358031    0.00000000    0.00000000
45     7.02280741    0.00000000    0.00000000
maxerror=0.00571767
t=10000
node  approx_U      approx_V      approx_P
1      3.00000000    0.00000000    128.91939563
...
43     0.00000000    0.00000000    0.00000000
44     9.17072083    0.00000000    0.00000000
45     7.15479051    0.00000000    0.00000000
maxerror=0.00159573
t=15000
node  approx_U      approx_V      approx_P
1      3.00000000    0.00000000    124.13542151
...
43     0.00000000    0.00000000    0.00000000
44     9.83074225    0.00000000    0.00000000
45     7.31129858    0.00000000    0.00000000
maxerror=0.00064274
t=20000
node  approx_U      approx_V      approx_P
1      3.00000000    0.00000000    121.89954994
...
43     0.00000000    0.00000000    0.00000000
44     10.14216520   0.00000000    0.00000000
45     7.41640434    0.00000000    0.00000000
maxerror=0.00034646
t=25000
node  approx_U      approx_V      approx_P
1      3.00000000    0.00000000    120.61994411
...
43     0.00000000    0.00000000    0.00000000
44     10.29776466   0.00000000    0.00000000
45     7.47753668    0.00000000    0.00000000
maxerror=0.00020466
t=30000

```

ต่อจากนั้นเรานำผลที่ได้ไป Plot Graph ใน Program Tecplot 10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] กาญจนา คำนึ่งนิจ , *การวิเคราะห์เชิงตัวเลข* (กรุงเทพฯ : หจก. มีน เซอร์วิส ซัพพลาย , 2554)
- [2] การหาค่าแรงเสียดทานของการไหลในท่อ.[ออนไลน์].เข้าถึงจาก: <http://www.com/article/96-head-loss-determination>
- [3] การสูญเสียจากความฝืดในระบบท่อ .[ออนไลน์].เข้าถึงจาก : <http://industrialpumps-tsy.blogspot.com/2013/09/pipe-friction-losses.html>
- [4] การไหลแบบภายใน. [ออนไลน์].เข้าถึงจาก: <http://www.me.eng.chula.ac.th/course/351/section2/ch7.pdf>
- [5] โครงสร้างโมเลกุลของน้ำ.[ออนไลน์].เข้าถึงจาก: <http://coursewares.mju.ac.th:81/e-learning50/FT320/012.htm>
- [6] นิชนันท์ มูลเอกและ ธวัชชัย แก้วกวางน.การประยุกต์ใช้ระบบสารสนเทศภูมิศาสตร์ในการศึกษาความเหมาะสมการวางแนวท่อส่งน้ำ ในพื้นที่ชลประทาน โครงการแควน้อย อันเนื่องมาจากพระราชดำริ.วิทยาลัยการชลประทาน สถาบันสมทบมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กลุ่มงานวางโครงการที่ 1 สำนักบริหารโครงการ (กรมชลประทาน) ออนไลน์.เข้าถึงจาก: <http://203.155.16.11/ircweb/prjnisit/2554/2554-15.pdf>
- [7] ท่อเหล็กทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส.[ออนไลน์].เข้าถึงจาก: <http://www.exportpages.asia/manufacturer/1091641385/1.htm>
- [8] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, *ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล* (กรุงเทพฯ:, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545)
- [9] โปรแกรมคำนวณหามุม.[ออนไลน์] เข้าถึงจาก: http://www.atom.rmutphysics.com/oldnews/0/285/18/1/AF_0302.swf
- [10] เรย์โนลด์นัมเบอร์.[ออนไลน์] เข้าถึงจาก: <http://industrialpumps-tsy.blogspot.com/2013/08/reynolds-number.html>
- [11] ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์.*การยืดขึ้นประกอบสำหรับของไหลนิวโตเนียน*.ปริญญาวิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546.
- [12] ศิริกุล ศิริธีรากล. (พฤษภาคม 2556).เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชาหัวข้อปัญหาพิเศษ ในคณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับฟิสิกส์ (กรุงเทพฯ: สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่หารลาดกักระบัง)การใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง(ต่อ)

- [13] Numerical Integration in 2D.[ออนไลน์].เข้าถึงจาก:<http://www.rpi.edu/~des/NumInt2D.pp>
- [14] TIRUPATHI R. CHANDRUPATLA and ASHOK D. BELEGUNDU, Introduction to Finite Elements in Engineering (America: New Jersey 07632)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้