

การวิเคราะห์สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี

ANALYSIS OF A BIDIRECTIONAL ANTENNA USING  
A PROBE EXCITED ELLIPTICAL RING



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2551

KMITL-2008-EN-D-018-012

การวิเคราะห์สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี

ANALYSIS OF A BIDIRECTIONAL ANTENNA USING  
A PROBE EXCITED ELLIPTICAL RING



กฤตยา ชวานนท์พิทักษ์

KRITTAYA CHAWANONPHITHAK



เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 79846  
วัน,เดือน,ปี..... 1.8... ๒๕๕1

Rectangular stamp box with fields .b..... and .i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานบัณฑิตวิทยาลัยนั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ก็ครั้งที่มีการนำไปใช้

พ.ศ. 2551

KMITL-2008-EN-D-018-012

**ANALYSIS OF A BIDIRECTIONAL ANTENNA USING  
A PROBE EXCITED ELLIPTICAL RING**

**KRITTAYA CHAWANONPHITHAK**

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
DOCTOR OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING**

**SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**  
**KING MONKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**2008**

**KMITL-2008-EN-D-018-012**



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ หากมีให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**COPYRIGHT 2008**

**SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

บัณฑิตวิทยาลัย  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้ในโพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี  
Analysis of a Bidirectional Antenna Using a Probe Excited Elliptical Ring

นักศึกษา นางกฤตยา ชวานนท์พิทักษ์

รหัสประจำตัว 46060211

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.ชวงค์ พงศ์เจริญพาณิชย์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ศ.ดร.โมไนย ไกรฤกษ์	ไกรฤกษ์	
ผศ.ดร.สมเกียรติ ฤกษ์วีระบุญ	ฤกษ์วีระบุญ	
ผศ.ดร.ทับทิม อ่างแก้ว	อ่างแก้ว	
รศ.ดร.สมพล โกศลวิตร	โกศลวิตร	
ผศ.ดร.ชวงค์ พงศ์เจริญพาณิชย์	พงศ์เจริญพาณิชย์	

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ 17 ธันวาคม 2550 เวลา 11.30-13.30 น.  
สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 3 ห้องประชุม 2

บัณฑิตวิทยาลัยรับรองแล้ว  
  
(รศ.ดร.รวีวรรณ ษินะตระกูล)

รักษาราชการแทนคณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่สามารถนำออกจำหน่ายไปใช้เพื่อประโยชน์ทางการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี
นักศึกษา	นางกฤตยา ชวานนท์พิทักษ์
รหัสนักศึกษา	46060211
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรศุภบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	2551
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ. ดร. ชูวงศ์ พงศ์เจริญพาณิชย์

### บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการวิเคราะห์ ออกแบบ สร้าง และทดสอบคุณลักษณะของสายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี โดยการวิเคราะห์เริ่มจากหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศด้วยการจำลองแบบจากโปรแกรมคำนวณแม่เหล็กไฟฟ้า หลังจากนั้นจะศึกษาโหมดคลื่นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่องเปิดสายอากาศจากค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีและช่องเปิดสายอากาศ สำหรับการวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศจะใช้วิธีฟังก์ชันกรีนโคแอดิกเพื่อหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนช่องเปิดสายอากาศที่เกิดจากการกระตุ้นของโพรบภายในวงแหวนวงรี ร่วมกับการแปลงฟูเรียร์เพื่อหาสนามระยะไกล นอกจากนี้ยังได้ทำการวิเคราะห์คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศโดยใช้วิธีการจำลองสายอากาศเป็นแบบแผ่นตัวนำสามเหลี่ยมเรียงต่อกัน และทำการคำนวณกระแสเชิงผิวที่อยู่บนสายอากาศด้วยระเบียบวิธีโมเมนต์แบบองค์ประกอบขอบ RWG (Rao-Wilton-Glisson Edge Element) และสุดท้ายทำการทดสอบสายอากาศต้นแบบเพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษาและยืนยันคุณสมบัติของสายอากาศที่สร้างขึ้น จากผลการทดสอบพบว่าสายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้นมีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทางมีความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กคือ 75 องศา และ 70 องศา ตามลำดับ อัตราขยายมีค่า 3.6 dBi อิมพีแดนซ์อินพุตมีค่า  $55.38 - j 4.74 \Omega$  การสูญเสียย้อนกลับมีค่า 23.35 dB มีความกว้างแถบความถี่เท่ากับ 11.5% สามารถทำงานที่ความถี่ปฏิบัติงาน 1.92 GHz ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ข้อดีของสายอากาศที่นำเสนอคือมีโครงสร้างที่ง่ายราคาถูก ขนาดกะทัดรัด และให้ลำคลื่นของสายอากาศเหมาะสมสำหรับการประยุกต์ใช้งานเป็นสายอากาศในสถานีฐานซึ่งมีพื้นที่ให้บริการในลักษณะทางยาวได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ใช้เฉพาะงานวิจัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<b>Thesis Title</b>	Analysis of a Bidirectional Antenna Using a Probe Excited Elliptical Ring
<b>Student</b>	Mrs. Krittaya Chawanonphithak
<b>Student ID.</b>	46060211
<b>Degree</b>	Doctor of Engineering
<b>Program</b>	Electrical Engineering
<b>Year</b>	2008
<b>Thesis Advisor</b>	Asst. Prof. Dr. Chuwong Phongcharoenpanich

### ABSTRACT

This thesis presents the analysis of a bidirectional antenna using a probe excited elliptical ring. The analysis is started by adjusting the antenna dimension using the electromagnetic program to obtain the suitable parameters. Then, the correlation coefficients between the fields of the antenna aperture and various modes of the elliptic cylindrical waveguide are evaluated to investigate the effect of each mode for the radiation pattern. The radiated fields are achieved using the dyadic Green's function together with Fourier transformation. The impedance characteristics are carried out using Method of Moments with Rao-Wilton-Glisson edge element techniques. The analysis results are useful for antenna design. The antenna prototype was fabricated to measure its characteristics. The measured results verify the proposed principle and the antenna performance. From the measured results, the prototype antenna yields the bidirectional pattern with HPBW in E-plane and H-plane of 75 degrees and 70 degrees, respectively. The moderate gain of 3.6 dBi is obtained. The input impedance and return loss are  $55.38 - j 4.74 \Omega$  and 23.35 dB, respectively. The antenna provides the bandwidth of 11.5%. The proposed antenna operates effectively at the operating frequency of 1.92 GHz. The advantage of this antenna type is simple structure, small size, low cost and bidirectional pattern. The proposed antenna is necessary for base station with long and narrow path service.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์ในการให้คำปรึกษาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชวงค์ พงศ์เจริญพาณิชย์ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา และคณาจารย์ห้องปฏิบัติการสื่อสารไร้สายประกอบด้วย ศาสตราจารย์ ดร. โมไนย ไกรฤกษ์ และ รองศาสตราจารย์ ดร. สมผล โกศลวิตร ที่คอยสั่งสอนในงานทางวิชาการรวมทั้งทักษะการใช้อุปกรณ์ทดสอบสายอากาศ เปิดโอกาสให้มีการอภิปราย ฝึกฝนในนำเสนอผลงาน และชี้แนะแนวทางการประพจน์ที่ดีต่างๆ อย่างสม่ำเสมอให้กับลูกศิษย์คนนี้

ขอขอบคุณสมาชิกห้องปฏิบัติการสื่อสารไร้สายที่ศึกษาในช่วงเวลาเดียวกันกับข้าพเจ้าทุกท่าน สำหรับความสนิทสนม ความสนุกสนาน ความเป็นที่ปรึกษา เพื่อน และน้องที่ดี โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ดร. ดวงอาทิตย์ ศรีมูล คุณสุธาณี ละมุลตรี คุณไพโรจน์ วุ่นชุม คุณจิรัฐ เหมือนชู คุณสุวรรณ จันทร์อินทร์ คุณรุ่งโรจน์ บุตตะจีน คุณธัญวัฒน์ ลิขิตติ คุณวิเศษ อ่อนรำพรรณ คุณอวยพร เครือแก้ว คุณกฤษฎา เกตวัลห์ คุณระพีพันธ์ ชัดปิก คุณสัณชัย เอียดปราบ คุณอนุชิตกลางคุณเสน คุณกิตติศักดิ์ แพบัว คุณรัฐพงษ์ สุวลักษณ์ คุณสุพัตนา วงสัก และคุณศุภกิจ แก้วดวงตา

ขอขอบคุณผู้บังคับบัญชาที่มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมาสำหรับการสนับสนุนให้โอกาสในการศึกษาคือ ประกอบด้วย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เสาวนิต เสอาณานนท์ อธิการบดี, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมทรง อัสวกุล รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รสริน พิมลบรรยงก์ ผู้ช่วยอธิการบดีฝ่ายพัฒนาบุคลากรและวิเทศสัมพันธ์, อาจารย์อชิพัทธ์ ทวีชาติ คณบดีคณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม และ รองศาสตราจารย์สุพรรณิ ภูงาม ผู้อำนวยการกองพัฒนาบุคลากรและวิเทศสัมพันธ์

ขอขอบพระคุณครอบครัวนาคนประสิทธิ์ และครอบครัวชวานนท์พิทักษ์ ที่ให้ความอบอุ่น โดยเฉพาะอย่างยิ่งขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่คอยสนับสนุนส่งเสริมให้โอกาสได้รับการศึกษา คอยห่วงใย ดูแลความเป็นอยู่ ให้กำลังใจ และเต็มใจสนับสนุนค่าใช้จ่ายต่างๆ มาตลอดชีวิตด้วยความรักและความหวังดีที่บริสุทธิ์ใจ และขอขอบคุณคุณคุณยุกติทัศน์ ชวานนท์พิทักษ์ ที่เสียสละเวลาและอำนวยความสะดวกทำให้มีเวลาสำหรับทำงานวิจัย

สุดท้ายขอขอบคุณทุนสนับสนุนการศึกษาจากกองทุนพัฒนาบุคลากรของมหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา ปีการศึกษา 2546-2548 และโครงการเครือข่ายเชิงกลยุทธ์ของสภาการอุดมศึกษา ประเภททุนปริญญาเอกในประเทศ (CHE-PhD-THA-INV) ปีการศึกษา 2549-2550

กฤตยา ชวานนท์พิทักษ์

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษาและขอบเขตงานวิจัย.....	5
1.3 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์.....	6
บทที่ 2 องค์ประกอบสายอากาศ.....	8
2.1 บทนำ.....	8
2.2 โพรบไฟฟ้า.....	8
2.3 ท่อนำคลื่นวงรี.....	8
2.3.1 ระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี.....	9
2.3.2 สมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี.....	10
2.3.3 ความถี่ตัด.....	25
2.3.4 เจื่อนไขในการเลือกค่าความถี่ปฏิบัติการของท่อนำคลื่น ทรงกระบอกวงรี.....	27
2.4 บทสรุป.....	27
บทที่ 3 การจำลองแบบสายอากาศ.....	28
3.1 บทนำ.....	28
3.2 การหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศ.....	28
3.2.1 การกำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้น.....	28
3.2.2 การวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม.....	30
3.3 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ.....	33

# สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3.4 บทสรุป.....	47
บทที่ 4 การวิเคราะห์แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น โดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก (Dyadic Green's Function).....	48
4.1 บทนำ.....	48
4.2 ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก.....	48
4.3 ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี (Vector Wave Functions in an Elliptical Cylinder Coordinate System).....	51
4.4 สนามแม่เหล็กภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี.....	54
4.4.1 กรณีโหมดคลื่นคู่.....	57
4.4.2 กรณีโหมดคลื่นคี่.....	60
4.5 สนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี.....	67
4.5.1 กรณีโหมดคลื่นคู่.....	69
4.5.2 กรณีโหมดคลื่นคี่.....	74
4.6 โหมดคลื่นภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี.....	82
4.7 การคำนวณหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าระยะไกลโดยวิธี การแปลงฟูเรียร์.....	91
4.8 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศวงแหวนวงรีกระตุ้นโดยโพรบไฟฟ้า.....	94
4.9 บทสรุป.....	98
บทที่ 5 การวิเคราะห์คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศด้วยระเบียบวิธี โมเมนต์.....	100
5.1 บทนำ.....	100
5.2 ขั้นตอนการคำนวณของระเบียบวิธี โมเมนต์.....	100
5.3 ฟังก์ชันฐาน RWG (Rao-Wilton-Glisson Basis Function).....	102
5.4 สมการอินทิกรัลสนามไฟฟ้า (Electric Field Integral Equation: EFIE).....	104
5.5 สมการโมเมนต์.....	106
5.6 บทสรุป.....	114

# สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 6 ผลการทดสอบสายอากาศและผลการวิเคราะห์.....	116
6.1 บทนำ.....	116
6.2 การสร้างสายอากาศและการทดสอบ.....	116
6.2.1 การทดสอบ $ S_{11} $ และอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศต้นแบบ.....	117
6.2.2 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศต้นแบบ.....	120
6.2.3 ผลการทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ที่มีค่าความถี่ต่าง ๆ.....	126
6.3 บทสรุป.....	136
บทที่ 7 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	138
7.1 สรุปผลการวิจัย.....	138
7.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการพัฒนา.....	140
เอกสารอ้างอิง.....	141
ภาคผนวก.....	143
ภาคผนวก ก ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method).....	144
ภาคผนวก ข ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method).....	146
ภาคผนวก ค ระเบียบวิธีการประมาณนอกเส้น (Extrapolation Method).....	148
ภาคผนวก ง ฟังก์ชันเมทิว (Mathieu Functions).....	149
ง.1 คำจำกัดความของฟังก์ชันเมทิว.....	149
ง.2 การหาสัมประสิทธิ์การกระจายและค่าคุณลักษณะ.....	151
ง.3 การกระจายฟังก์ชันเมทิวในกรณี $ q  < 1$ .....	158
ง.4 คุณสมบัติของฟังก์ชันเมทิว.....	160
ภาคผนวก จ ฟังก์ชันเมทิวดัดแปลง (Modified Mathieu Function).....	163
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิใช่เพื่อเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้	
เอกสารอ้างอิงภาคผนวก ก—จ.....	173
ประวัติผู้เขียน.....	174

# สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 ค่าราคาของโหมคคลื่นต่างๆ เมื่อ $a = 48 \text{ mm}$ และ $b = 36 \text{ mm}$ .....	26
3.1 พารามิเตอร์เริ่มต้นสำหรับการจำลองแบบ.....	29
3.2 ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศ.....	33
3.3 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าที่ช่องเปิดสายอากาศกับ สนามไฟฟ้าโหมคคลื่นต่างๆ ในกรณีรวมสนามไฟฟ้าทุกองค์ประกอบ.....	46
3.4 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าที่ช่องเปิดสายอากาศกับ สนามไฟฟ้า ในกรณีคิดสนามไฟฟ้าแยกองค์ประกอบ.....	46
4.1 ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งของสายอากาศที่คำนวณจากวิธีฟังก์ชัน กรีนไดแอดิกในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมคคลื่น $TM_{\text{co1}}$ และแบบจำลอง โดยที่ $a = 4.8 \text{ cm}$ และ $b$ มีค่า $2.6 \text{ cm}$ , $3.1 \text{ cm}$ , $3.6 \text{ cm}$ , $4.1 \text{ cm}$ และ $4.6 \text{ cm}$ .....	98
6.1 การเปรียบเทียบค่าอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศต้นแบบ ที่ความถี่ปฏิบัติการ $1.92 \text{ GHz}$ .....	118
6.2 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งใน ระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศต้นแบบ ที่ความถี่ปฏิบัติการ $1.92 \text{ GHz}$ .....	126
6.3 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งใน ระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 1 ที่ความถี่ปฏิบัติการ $1.92 \text{ GHz}$ .....	135
6.4 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งใน ระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 2 ที่ความถี่ปฏิบัติการ $1.92 \text{ GHz}$ .....	136
6.5 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งใน ระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 3 ที่ความถี่ปฏิบัติการ $1.92 \text{ GHz}$ .....	136
6.6 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งใน ระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 4 ที่ความถี่ปฏิบัติการ $1.92 \text{ GHz}$ .....	136

# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 จำนวนผู้ใช้บริการระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่เซลลูลาร์ในโลก (หน่วยล้าน).....	2
1.2 สายอากาศ BNPA (Bidirectional Narrow Patch Antenna).....	3
1.3 สายอากาศ BCAP-AP (Bidirectional Collinear Antenna with Arc Parasitic Plates).....	3
1.4 สายอากาศ BIRA (Bidirectional Rod Array Antenna).....	4
1.5 สายอากาศนอตช์และสายอากาศรูปหักศอก (Notch Antenna and Crank-shaped Antenna).....	4
1.6 สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรีและระบบพิกัด.....	5
2.1 ระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี.....	9
2.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{\lambda_c}{a}$ กับ $e$ .....	24
2.3 เงื่อนไขการเลือกความถี่ปฏิบัติการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่มี $a = 48$ mm และ $b = 36$ mm.....	27
3.1 สายอากาศที่มีค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นตามที่กำหนด.....	29
3.2 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มีค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นตามตารางที่ 3.1.....	30
3.3 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี $a$ และ $b$ เท่ากับ 32 mm, 34 mm, 36 mm, 38 mm และ 40 mm และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1.....	31
3.4 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี $a$ เท่ากับ 44 mm, 46 mm, 48 mm, 50 mm และ 52 mm เมื่อ $b = 36$ mm และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1.....	31
3.5 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี $b$ เท่ากับ 32 mm, 34 mm, 36 mm, 38 mm และ 40 mm เมื่อ $a = 48$ mm และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1.....	32
3.6 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี $l$ เท่ากับ 1 mm, 2 mm, 3 mm, 4 mm และ 5 mm เมื่อ $a = 48$ mm, $b = 36$ mm และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1.....	32
3.7 โครงสร้างสายอากาศแบบสองทิศทางโดยโพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี.....	33
3.8 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้า.....	34
3.9 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็ก.....	34
3.10 อัตราขยายของสายอากาศเมื่อเปลี่ยนแปลงความถี่.....	35
3.11 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ $z = 0$ mm (ตำแหน่งของโพรบ).....	35
3.12 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระนาบ $z = 0$ mm (ตำแหน่งของโพรบ) ในมุมมองด้านหน้าสายอากาศ.....	36

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.13 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ $z = 0$ mm (ตำแหน่งของ โพรบ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ.....	36
3.14 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ $z = 1.5$ mm (ตำแหน่งของช่องเปิดสายอากาศ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ.....	37
3.15 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ $z = 3.0$ mm (ตำแหน่งอยู่ห่างจากช่องเปิด สายอากาศออกมา 1.5 mm) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ.....	37
3.16 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระนาบ $z = 0$ mm (ตำแหน่งของ โพรบ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ.....	38
3.17 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระนาบ $z = 1.5$ mm (ตำแหน่งของช่องเปิดสายอากาศ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ.....	38
3.18 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระนาบ $z = 3.0$ mm (ตำแหน่งอยู่ห่างจากช่องเปิด สายอากาศออกมา 1.5 mm) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ.....	39
3.19 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่เฟสต่างๆ ในระนาบ $z = 1.5$ mm (ตำแหน่งของช่องเปิด สายอากาศ) ในมุมมองด้านหน้าสายอากาศเมื่อสัญญาณความถี่ 1.92 GHz.....	39–43
3.20 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น $TE_{C11}$ ความถี่ตัด 1.845 GHz.....	44
3.21 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น $TE_{S11}$ ความถี่ตัด 2.395 GHz.....	44
3.22 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น $TM_{C01}$ ความถี่ตัด 2.803 GHz.....	44
3.23 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น $TE_{C21}$ ความถี่ตัด 3.275 GHz.....	45
3.24 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น $TE_{S21}$ ความถี่ตัด 3.538 GHz.....	45
3.25 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น $TM_{C11}$ ความถี่ตัด 4.134 GHz.....	45
4.1 บล็อกไดอะแกรมการคำนวณสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าโดยใช้ ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก.....	49
4.2 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดโอดิก ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b = 3.6$ cm หรือ $e = 0.6614$ เปรียบเทียบกับแบบรูปสนาม จาก [15] (เส้นทึบแสดงสนามไฟฟ้า เส้นประแสดงสนามแม่เหล็ก).....	83–84
4.3 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดโอดิก ในกรณี $a = 7.5$ cm และ $b = 2.5$ cm หรือ $e = 0.943$ เปรียบเทียบกับแบบรูปสนาม จาก [15] (เส้นทึบแสดงสนามไฟฟ้า เส้นประแสดงสนามแม่เหล็ก).....	85–86

## สารบัญรูป (ต่อ)

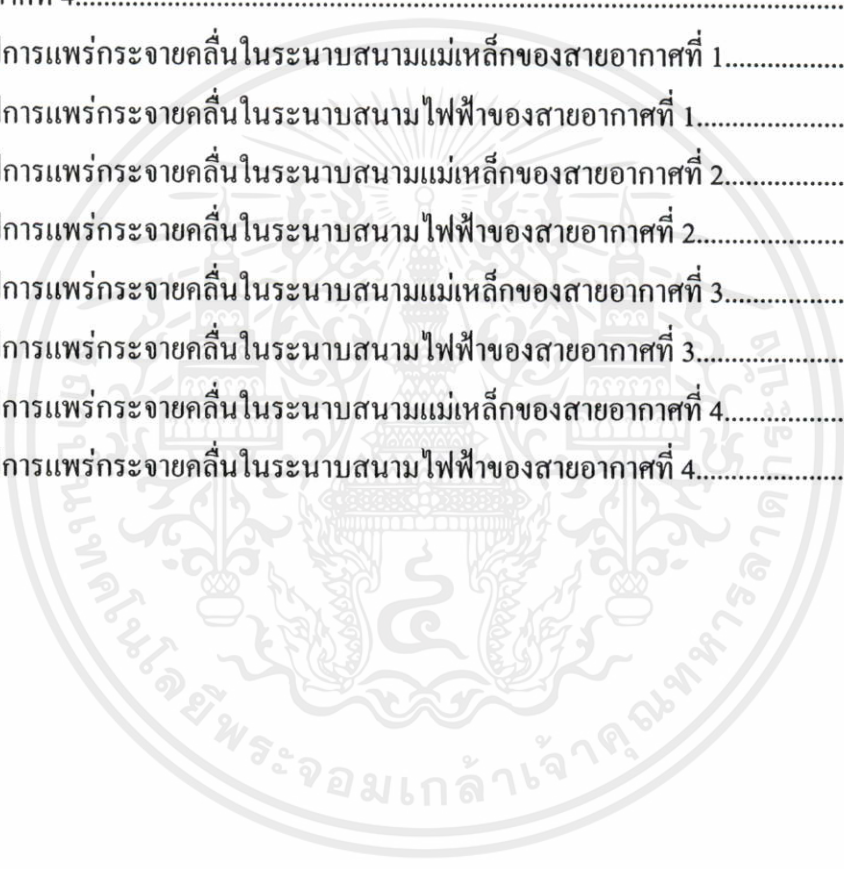
รูปที่	หน้า
4.4 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b = 2.6$ cm หรือ $e = 0.841$ .....	87
4.5 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b = 3.1$ cm หรือ $e = 0.763$ .....	88
4.6 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b = 4.1$ cm หรือ $e = 0.520$ .....	89
4.7 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอดิก ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b = 4.6$ cm หรือ $e = 0.286$ .....	90
4.8 ช่องเปิดสายอากาศ.....	91
4.9 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศ มีโหมดคลื่น $TM_{C01}$ .....	94
4.10 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศ มีโหมดคลื่น $TE_{S21}$ .....	95
4.11 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศ มีโหมดคลื่น $TE_{C11}$ .....	95
4.12 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศ มีโหมดคลื่น $TE_{C11}$ และความยาววงแหวนมีค่า $0.25\lambda$ .....	96
4.13 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น $TM_{C01}$ ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b$ มีค่า $2.6$ cm.....	96
4.14 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น $TM_{C01}$ ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b$ มีค่า $3.1$ cm.....	97
4.15 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น $TM_{C01}$ ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b$ มีค่า $4.1$ cm.....	97
4.16 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น $TM_{C01}$ ในกรณี $a = 4.8$ cm และ $b$ มีค่า $4.6$ cm.....	98
5.1 แบบจำลองสายอากาศที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนสามเหลี่ยม.....	101
5.2 บล็อกไดอะแกรมอัลกอริทึมการคำนวณสายอากาศด้วยระเบียบวิธี โมเมนต์.....	101
5.3 คู่ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมและพารามิเตอร์เชิงเรขาคณิตภายในขอบ.....	103

## สารบัญญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.4 รูปทรงเรขาคณิตขององค์ประกอบของฟังก์ชันฐานที่ตั้งฉากกับขอบ.....	103
5.5 การแบ่งชิ้นส่วนสามเหลี่ยมออกเป็น 9 ชิ้นส่วนย่อย จุดสีขาแสดงจุดกึ่งกลาง ของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม จุดสีดำแสดงจุดกึ่งกลางของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อย.....	107
5.6 การจำลองจุดกระตุ้นที่โพรบไฟฟ้า.....	108
5.7 การกระจายกระแสเชิงผิวของสายอากาศ.....	109
5.8 การกระจายกระแสเชิงผิวที่ความยาวโพรบต่างๆ.....	109
5.9 ค่าความต้านทานอินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาวโพรบมีค่า $0.20\lambda-0.30\lambda$ .....	110
5.10 ค่ารีแอกแตนซ์อินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาวโพรบมีค่า $0.20\lambda-0.30\lambda$ .....	111
5.11 ค่า SWR ของสายอากาศ เมื่อความยาวโพรบมีค่า $0.20\lambda-0.30\lambda$ .....	111
5.12 ค่าความต้านทานอินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาววงแหวนมีค่า $0.01\lambda-0.10\lambda$ .....	112
5.13 ค่ารีแอกแตนซ์อินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาววงแหวนมีค่า $0.01\lambda-0.10\lambda$ .....	113
5.14 ค่า SWR ของสายอากาศ เมื่อความยาววงแหวนมีค่า $0.01\lambda-0.10\lambda$ .....	113
6.1 สายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้น.....	117
6.2 ผลการทดสอบค่า $ S_{11} $ .....	118
6.3 ผลการทดสอบค่าอิมพีแดนซ์อินพุต.....	118
6.4 ผลการทดสอบค่าอิมพีแดนซ์อินพุต เมื่อความยาวโพรบมีค่า $0.20\lambda-0.30\lambda$ .....	119
6.5 ผลการทดสอบค่ารีแอกแตนซ์อินพุต เมื่อความยาวโพรบมีค่า $0.20\lambda-0.30\lambda$ .....	119
6.6 ผลการทดสอบค่า SWR เมื่อความยาวโพรบมีค่า $0.20\lambda-0.30\lambda$ .....	120
6.7 สายอากาศโมโนโพลและค่า $ S_{11} $ ของสายอากาศโมโนโพล.....	121
6.8 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็ก ที่มีโพลาไรเซชันร่วม (Co-polarization).....	122
6.9 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็ก ที่มีโพลาไรเซชันไขว้ (Cross-polarization).....	122
6.10 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้า ที่มีโพลาไรเซชันร่วม (Co-polarization).....	123
6.11 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้า ที่มีโพลาไรเซชันไขว้ (Cross-polarization).....	123
6.12 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศต้นแบบ.....	124

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.13 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศต้นแบบ.....	125
6.14 สายอากาศที่ 1.....	127
6.15 สายอากาศที่ 2.....	127
6.16 สายอากาศที่ 3.....	127
6.17 สายอากาศที่ 4.....	128
6.18 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ 1.....	128
6.19 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 1.....	129
6.20 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ 2.....	130
6.21 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 2.....	131
6.22 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ 3.....	132
6.23 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 3.....	133
6.24 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ 4.....	134
6.25 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 4.....	135



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

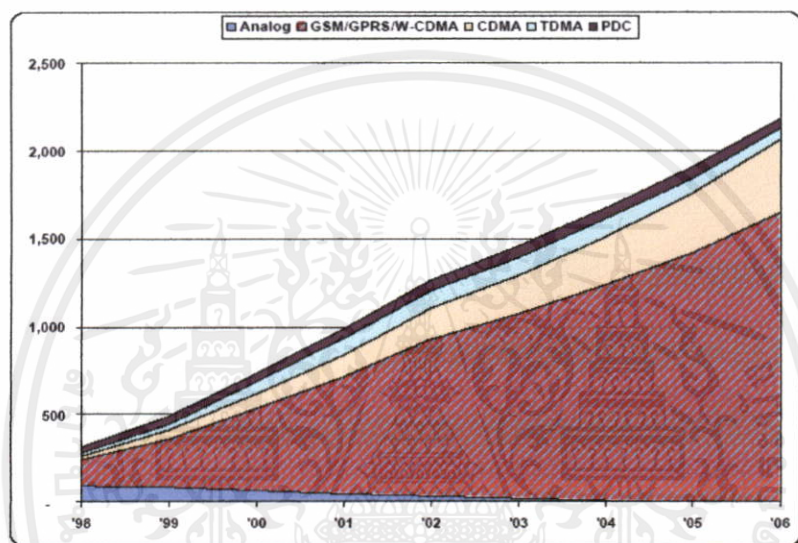
### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ยุคการสื่อสารไร้สายของระบบโทรศัพท์เซลลูลาร์เริ่มต้นขึ้นในปี ค.ศ. 1980 ระบบโทรศัพท์เซลลูลาร์ในระยะแรกเป็นแบบอนาล็อก โดยมีระบบ NMT (Northern Mobile Telephone) เป็นเทคโนโลยีแรก หลังจากนั้นจำนวนผู้ใช้บริการการสื่อสารไร้สายได้เพิ่มขึ้นมาเป็นลำดับ พร้อมทั้งเทคโนโลยีในระบบดิจิทัลใหม่ๆ ก็เกิดขึ้น นับตั้งแต่ระบบ GSM (Global System for Mobile Communication) เป็นต้นมา จากข้อมูลในการวิจัยของ ITU (International Telecommunication Union) และ Micrologic Research ที่แสดงไว้ในรูปที่ 1.1 รายงานว่าตลาดของระบบโทรศัพท์เซลลูลาร์เป็นตลาดที่สำคัญที่สุดของตลาดผู้ใช้บริการการสื่อสารไร้สายทั้งหมด ในปี ค.ศ. 2006 มีการคาดการณ์ว่าผู้ใช้บริการระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่เซลลูลาร์ในโลกจะมีมากกว่า 2 พันล้านคน [1] จากข้อมูล Frost & Sullivan's Asia Pacific Mobile Communication Outlook 2007 รายงานเมื่อวันที่ 3 เมษายน ค.ศ. 2007 ระบุว่าประเทศในเอเชียแปซิฟิกนั้นจะมีอัตราการเติบโตของการใช้งานโทรศัพท์เคลื่อนที่เพิ่มขึ้นคิดเป็น 30.9% ของการใช้งานในปี ค.ศ. 2006 และภายในสิ้นปี ค.ศ. 2007 จะมีผู้ใช้บริการถึง 1.14 พันล้านคน [2] ดังนั้นผู้ให้บริการจึงจำเป็นต้องขยายเครือข่ายสถานีฐานให้รองรับจำนวนผู้ใช้บริการที่เพิ่มขึ้น สิ่งสำคัญที่ผู้ให้บริการต้องคำนึงถึงคือการลดต้นทุนสายอากาศที่ติดตั้งบนสถานีฐานนับว่าเป็นอุปกรณ์สำคัญ เพราะทำหน้าที่รับและส่งคลื่นกับเครื่องโทรศัพท์เคลื่อนที่ ดังนั้นสายอากาศที่สถานีฐานจึงควรมีราคาไม่แพง การพัฒนาสายอากาศเพื่อให้มีลักษณะเหมาะสมกับพื้นที่บริการนั้นจะสามารถลดต้นทุนการติดตั้งจำนวนสถานีฐานได้

ในเมืองใหญ่จะประกอบด้วยพื้นที่บริการที่มีลักษณะเป็นทางยาวตรงที่แคบจำนวนมาก เช่น ทางด่วน ถนน อุโมงค์ ฯลฯ สายอากาศแบบสองทิศทาง (Bidirectional Antenna) จะสามารถขยายพื้นที่ให้บริการให้ไกลกว่าสายอากาศแบบทิศทางรอบตัว (Omnidirectional Antenna) ซึ่งเป็นสายอากาศที่นิยมติดตั้งที่สถานีฐาน ด้วยเหตุผลดังกล่าวการศึกษาวินิจฉัยเพื่อพัฒนาสายอากาศแบบสองทิศทางจึงมีความจำเป็น

การสังเคราะห์สายอากาศแบบสองทิศทางโดยอาศัยหลักการพื้นฐานนั้นสายอากาศแบบสองทิศทางสามารถสร้างได้จากสายอากาศแบบทิศทางเดียว (Unidirectional Antenna) เช่น สายอากาศขาคีอูจะจำนวน 2 ตัวมารวมกัน โดยจัดให้สายอากาศทิศทางตรงกันข้าม หรือนำสายอากาศแบบทิศทางรอบตัว เช่น สายอากาศโมโนโพลมาจัดเรียงเป็นสายอากาศแบบแถวลำดับ (Array Antenna) และกระตุ้นด้วยความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่มีเฟสที่เหมาะสม ซึ่งข้อเสียของ

การสร้างสายอากาศแบบสองทิศทางดังกล่าวคือ เกิดการสูญเสียในการป้อนสัญญาณมาก ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1994 พบว่ามีงานวิจัยในเรื่องสายอากาศแบบสองทิศทาง [3]–[6] ได้แก่ สายอากาศ BNPA (Bidirectional Narrow Patch Antenna) สายอากาศ BIRA (Bidirectional Rod Array Antenna) สายอากาศ BCAP (Bidirectional Collinear Antenna with Parasitic Element) สายอากาศนอตช์ (Notch Antenna) และสายอากาศรูปหักศอก (Crank Shaped Antenna) เป็นต้น แต่เนื่องจาก โครงสร้างสายอากาศที่กล่าวมานี้มีความซับซ้อนและราคาแพง ทำให้เกิดความพยายามที่จะต้อง พัฒนางานวิจัยต่อไปเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น



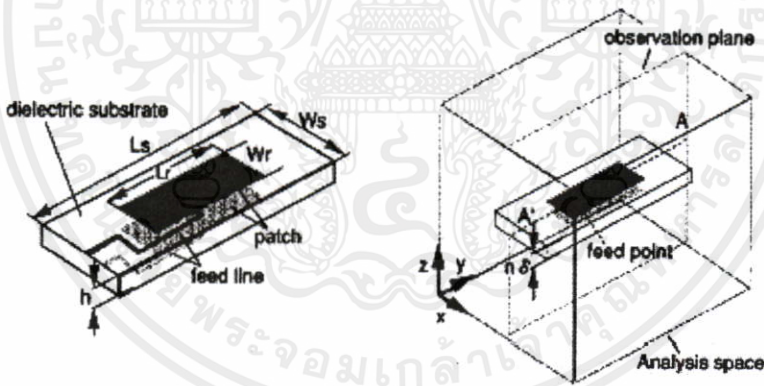
	'98	'99	'00	'01	'02	'03	'04	'05	'06
Analog	96	87	69	51	38	22	12	4	1
GSM/GPRS/W-CDMA	145	276	470	670	897	1,054	1,226	1,418	1,648
cdmaOne/cdma2000	23	50	82	123	171	217	278	339	417
TDMA	19	35	67	92	99	101	97	88	66
PDC	31	42	52	59	63	63	61	57	53
Total	313	490	740	995	1,267	1,456	1,674	1,906	2,185

Source: ITU & Micrologic Research

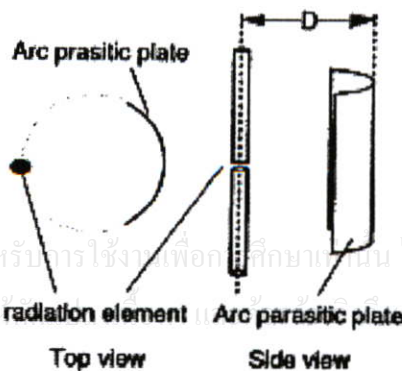
รูปที่ 1.1 จำนวนผู้ใช้บริการระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่เซลลูลาร์ในโลก (หน่วยล้าน) [1]

เพื่อให้โครงสร้างสายอากาศไม่ซับซ้อน เมื่อเปรียบเทียบกับโครงสร้างสายอากาศในงานวิจัยที่ผ่านมาซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 1.2–1.5 และต้นทุนในการผลิตสายอากาศมีราคาสูง ซึ่งประเทศไทยสามารถผลิตใช้ได้ภายในประเทศเองเพื่อลดปัญหาทางเศรษฐกิจ จึงได้นำเสนอสายอากาศแบบใหม่คือ สายอากาศแบบสองทิศทางที่มีลักษณะเป็นวงแหวนที่ใช้โพรบกระตุ้น ซึ่งพัฒนามาจากลักษณะของวงแหวนที่ได้ทำการศึกษาไปแล้วคือวงแหวนแบบวงกลมและสี่เหลี่ยมมุมฉาก [7]–[8] แนวความคิดการสร้างสายอากาศแบบนี้คือ โมโนโพลที่ให้แบบรูปการแพร่กระจาย

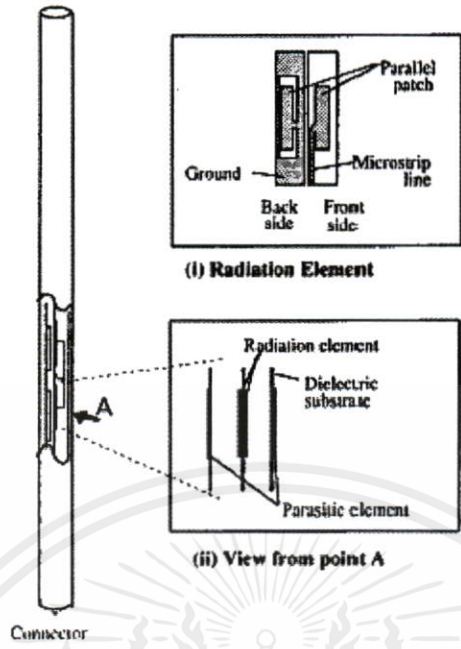
คลื่นแบบทิศทางรอบตัวนั้น สามารถเปลี่ยนแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเป็นแบบสองทิศทางได้ด้วยการเพิ่มวงแหวนล้อมรอบโมโนโพล ข้อดีของสายอากาศแบบวงแหวนนี้คือสร้างได้ง่ายจากวัสดุราคาถูก โดยสายอากาศแบบนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานกับสถานีฐานระบบ PCT (Personal Communication Telephone) ได้เป็นอย่างดี ด้วยข้อดีของสายอากาศแบบสองทิศทางที่มีลักษณะเป็นวงแหวนดังกล่าว จึงทำให้งานวิจัยนี้มีความน่าสนใจที่จะศึกษาต่อไป แต่จากงานวิจัยที่ผ่านมา [7]–[8] พบว่าสายอากาศวงแหวนวงกลมและวงแหวนสี่เหลี่ยมนี้ไม่ได้ถูกออกแบบเพื่อเน้นความกะทัดรัด ให้มีน้ำหนักเบา อีกทั้งสายอากาศวงแหวนสี่เหลี่ยมมีโครงสร้างที่ด้านลมเนื่องจากมีขอบที่เป็นมุมฉาก ซึ่งส่งผลต่อปัญหาการแกว่งของระดับสัญญาณ และข้อเสียของสายอากาศแบบวงกลมก็คือปัญหาเรื่องการควบคุมลำคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กให้เหมาะสมกับการใช้งาน เนื่องจากมีพารามิเตอร์รัศมีของวงแหวนเพียงค่าเดียวที่สามารถปรับค่าได้ จากการศึกษาถึงผลดีและปัญหาที่ผ่านมา จึงทำให้เกิดการพัฒนาสายอากาศที่มีโครงสร้างสายอากาศใหม่เป็นแบบวงแหวนวงรีขึ้น ซึ่งโครงสร้างใหม่นี้ได้รวมทั้งจุดดีและจุดด้อยของสายอากาศวงแหวนทั้งสอง โดยการออกแบบเน้นโครงสร้างสายอากาศที่เล็กแต่มีประสิทธิภาพในการทำงานที่ดี จึงทำให้สายอากาศเหมาะกับการใช้งานที่สถานีฐานและอุปกรณ์ไร้สายบางชนิดได้



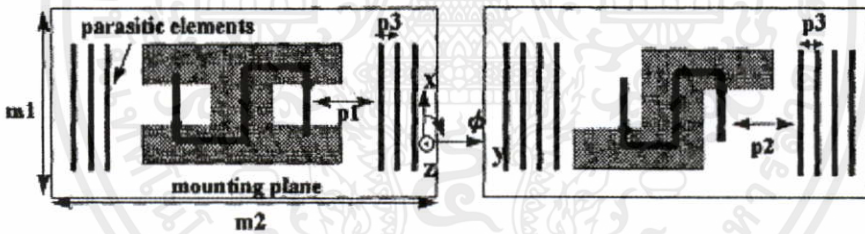
รูปที่ 1.2 สายอากาศ BNPA (Bidirectional Narrow Patch Antenna) [3]



รูปที่ 1.3 สายอากาศ BCAP-AP (Bidirectional Collinear Antenna with Arc Parasitic Plates) [4]

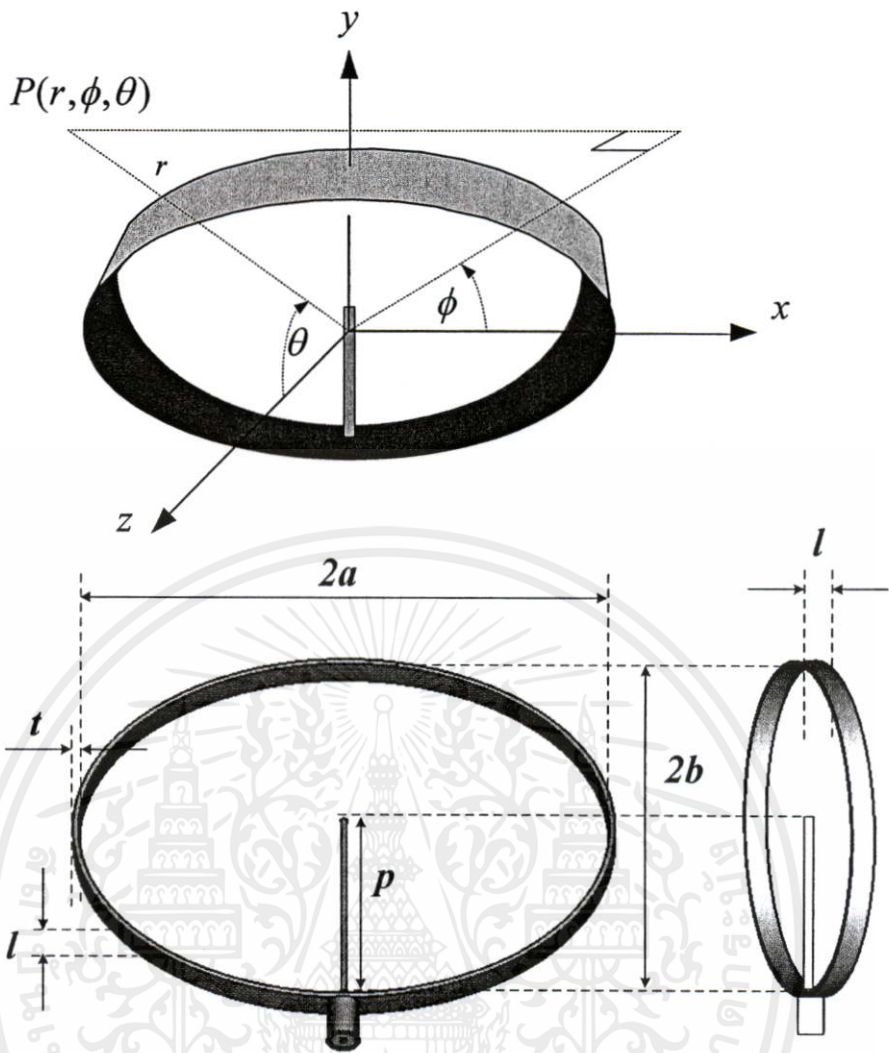


รูปที่ 1.4 สายอากาศ BIRA (Bidirectional Rod Array Antenna) [5]



รูปที่ 1.5 สายอากาศชนิดขั้วและสายอากาศรูปหักศอก (Notch Antenna and Crank-shaped Antenna) [6]

วิทยานิพนธ์นี้มุ่งศึกษาการวิเคราะห์สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี โครงสร้างสายอากาศประกอบด้วยโพรบที่มีความยาว  $p$  วางตัวในทิศทางแกน  $y$  โดย โพรบจะถูกติดตั้งอยู่ที่กึ่งกลางวงแหวนวงรีที่ตำแหน่งระนาบ  $z=0$  ซึ่งโพรบจะถูกล้อมรอบด้วยวงแหวนวงรีที่มีขนาดครึ่งแกนหลัก (Semi-major Axis) มีค่า  $a$  และขนาดครึ่งแกนรอง (Semi-minor Axis) มีค่า  $b$  ความหนาของวงแหวนกำหนดให้มีค่า  $t$  โดยปากวงแหวนวงรีวางอยู่บนระนาบ  $z=-l/2$  และ  $z=l/2$  ตามลำดับ เมื่อ  $l$  คือความยาวของวงแหวน รูปที่ 1.6 แสดงพารามิเตอร์ของสายอากาศและระบบพิกัดอ้างอิงของสายอากาศ



รูปที่ 1.6 สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรีและระบบพิกัด

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษาและขอบเขตงานวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์นำเสนอการศึกษา การวิเคราะห์ ออกแบบ สร้างและทดสอบ สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรีที่มีความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz โดยสายอากาศจะถูกสร้างขึ้นมาจากโลหะวงแหวนที่มีขนาดกะทัดรัด การออกแบบสายอากาศเน้นให้มีโครงสร้างไม่ซับซ้อน สร้างได้ง่ายจากวัสดุราคาถูก และมีขนาดเล็ก เพื่อให้สายอากาศสามารถติดตั้งกับอุปกรณ์ขนาดเล็กได้และสามารถทำงานเป็นสายอากาศของสถานีฐาน สายอากาศจะมีลำคลื่นแบบสองทิศทาง โดยสายอากาศที่สร้างขึ้นจะมีค่า  $|S_{11}|$  ต่ำกว่า -10 dB ครอบคลุมย่านความถี่ PCS (Personal Communication Service) รอรับความถี่ในช่วง 1.85 GHz ถึง 1.99 GHz อัตราขยายของสายอากาศมีค่าเพียงพอสำหรับการใช้งานกับสถานีฐานทั่วไป โดยจะหลีกเลี่ยงการออกแบบ

ให้สายอากาศมีอัตราขยายที่สูง เนื่องจากจะกระทบต่อโปรโตคอลการสื่อสารในระดับ MAC (Medium Access Control) เพราะสถานีฐานทั่วไปถูกออกแบบให้ทำงานกับสายอากาศที่มีอัตราขยายต่ำ เช่นสายอากาศรอบตัว [9]

### 1.3 เนื้อหาของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 บทด้วยกัน คือ

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย วัตถุประสงค์การศึกษาและขอบเขตงานวิจัยและเนื้อหาของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 กล่าวถึงองค์ประกอบของสายอากาศ ซึ่งบทนี้จะกล่าวถึงการพิจารณาเริ่มต้นให้วงแหวนวงรีมีการทำงานตามหลักการท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี ซึ่งเนื้อหาทั้งหมดนี้จำเป็นสำหรับการอธิบายกลไกการทำงานของสายอากาศ การวิเคราะห์และการคำนวณสายอากาศ

บทที่ 3 ในหัวข้อนี้กล่าวถึงการจำลองแบบสายอากาศด้วยโปรแกรมคำนวณแม่เหล็กไฟฟ้า เพื่อใช้สำหรับการออกแบบให้สายอากาศมีค่า  $|S_{11}|$  และมีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบสองทิศทางที่เหมาะสมตามความต้องการสำหรับระบบ PCS โดยที่สายอากาศมีขนาดกะทัดรัด

บทที่ 4 กล่าวถึงการวิเคราะห์แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกและการแปลงฟูเรียร์ เพื่อคำนวณหาแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ซึ่งเนื้อหาในบทนี้จะทำให้ทราบถึงผลกระทบจากโหมดคลื่นของสนามภายในวงแหวนวงรีที่มีผลต่อแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

บทที่ 5 กล่าวถึงการวิเคราะห์เชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศ โดยแบบจำลองสายอากาศที่ใช้ในการคำนวณจะประกอบด้วยชิ้นส่วนแผ่นตัวนำสามเหลี่ยมจำนวนมากเรียงต่อกัน หลังจากนั้นจึงคำนวณด้วยระเบียบวิธีโมเมนต์แบบองค์ประกอบขอบ RWG (Rao-Wilton-Glisson Edge Element) โดยอาศัยหลักการของสมการอินทิกรัลสนามไฟฟ้า ซึ่งเนื้อหาในบทนี้จะทำให้ทราบถึงผลกระทบการเปลี่ยนแปลงความยาวโพรบและความยาววงแหวนของสายอากาศที่มีผลต่อคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศ

บทที่ 6 นำเสนอการทดสอบสายอากาศเพื่อหาค่า  $|S_{11}|$  อัตราขยาย และแบบรูปการแพร่กระจายคลื่น จากนั้นนำผลทดสอบที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการจำลองและผลการคำนวณเพื่อยืนยันความแม่นยำของการจำลองแบบด้วย โปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

บทที่ 7 กล่าวถึงการสรุปเนื้อหาโดยรวมพร้อมทั้ง ข้อเสนอแนะ และแนวทางในการจำลองแบบ การคำนวณและผลการทดสอบสายอากาศที่ได้ นอกจากนั้นยังได้เปรียบเทียบวิธีการ

วิเคราะห์แต่ละวิธี สรุปข้อดีและข้อเสียของสายอากาศ และเสนอคำแนะนำไว้เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาสายอากาศต่อไป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

# องค์ประกอบสายอากาศ

### 2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้เกี่ยวกับองค์ประกอบของสายอากาศในงานวิจัย โดยองค์ประกอบหลักของสายอากาศแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ โพรบไฟฟ้าและวงแหวนวงรี สำหรับวงแหวนวงรีนั้นจะถูกพิจารณาเริ่มต้น โดยอาศัยหลักการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จะครอบคลุมถึงทฤษฎีและการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีเพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์และการคำนวณสายอากาศ

### 2.2 โพรบไฟฟ้า

โพรบไฟฟ้าเป็นองค์ประกอบสำคัญในการป้อนสัญญาณให้สายอากาศที่ทำการวิจัย ซึ่งหลักการของโพรบไฟฟ้านี้ใกล้เคียงกับหลักการของสายอากาศโมโนโพล สายอากาศโมโนโพลเป็นสายอากาศที่มีการใช้แผ่นระนาบกราวด์มาแทนโครงสร้างอีกครั้งหนึ่งของสายอากาศไดโพล โดยระนาบกราวด์จะอยู่ในตำแหน่งตั้งฉากกับโครงสร้างอีกครั้งหนึ่งของสายอากาศไดโพล ถ้าระนาบกราวด์มีขนาดใหญ่เพียงพอจะทำให้เกิดการสะท้อนคลื่นโดยไม่มี การเลี้ยวเบน สายอากาศโมโนโพลจะให้คลื่นที่แพร่กระจายเช่นเดียวกับสายอากาศไดโพล ดังนั้นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ โมโนโพลจึงเป็นแบบรูปทิศทาง โพรบไฟฟ้าที่ใช้ในสายอากาศวงแหวนวงรีนั้นถึงแม้จะมีความยาวเท่ากับ ความยาวของสายอากาศโมโนโพล คือ ส่วนสี่เท่าของความยาวคลื่น ( $\lambda/4$ ) แต่เนื่องจากไม่ได้มีลักษณะโครงสร้างกราวด์ที่แบนราบและไม่ได้ให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบรูปตัวจิ้งจอกเป็นลักษณะ โครงสร้างเฉพาะของกราวด์ที่เป็นวงแหวนวงรี

### 2.3 ท่อนำคลื่นวงรี

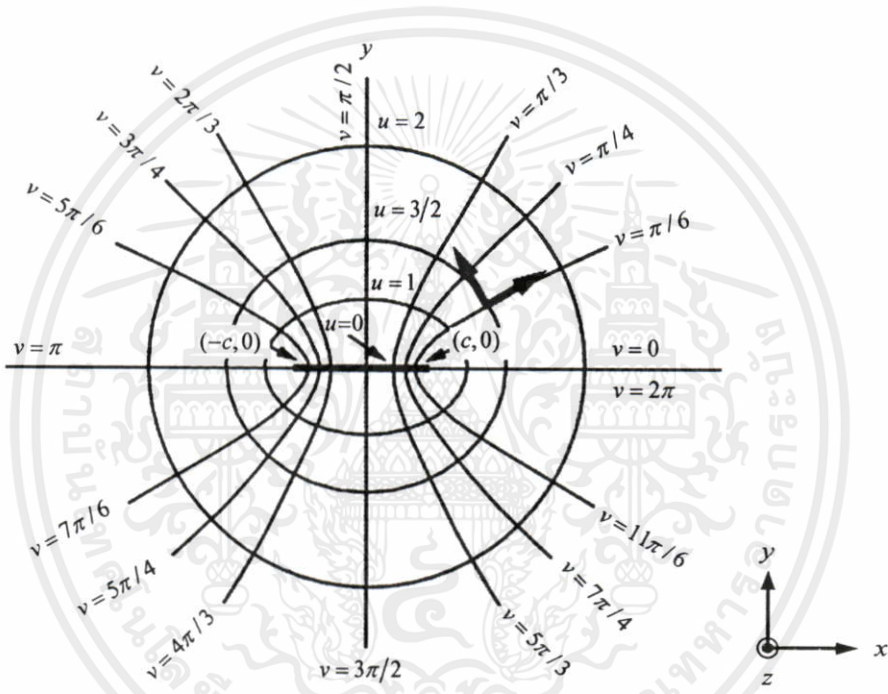
สำหรับวงแหวนวงรีนั้นเพื่อให้ง่าย จะพิจารณาโดยอาศัยหลักการของท่อนำคลื่นวงรี โดยอาศัยทฤษฎีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางในท่อนำคลื่นที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงรี ทำให้สามารถกำหนดโหมดคลื่นที่เดินทางภายในท่อนำคลื่นได้จาก การเลือกขนาดท่อนำคลื่นให้เหมาะสมกับความถี่ที่ใช้ งาน [10]–[12] หัวข้อนี้จะกล่าวถึงระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีซึ่งถูกเลือกใช้เป็นพิกัดอ้างอิง

สำหรับการคำนวณสายอากาศ ผลเฉลยของสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี ความถี่ตัด และเงื่อนไขการหาค่าความถี่ปฏิบัติการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี

### 2.3.1 ระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี

ระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีประกอบด้วยองค์ประกอบ  $(u, v, z)$  โดยที่  $u$  เป็นค่าความยาว เหมือนเป็นรัศมีของวงรี ซึ่งเป็นเซตของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่จุดกำเนิด องค์ประกอบที่ตั้งฉากกับ  $u$  คือ  $v$  โดย  $v$  เป็นค่ามุม เป็นเซตของไฮเปอร์โบล่าที่มีจุดโฟกัสร่วมกัน ดังแสดงในรูปที่

2.1



รูปที่ 2.1 ระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีกับระบบพิกัดคาร์ทีเซียนมีดังนี้

$$x = c \cosh u \cos v \quad (2.1)$$

$$y = c \sinh u \sin v \quad (2.2)$$

$$z = z \quad (2.3)$$

โดยที่  $u \in [0, \infty)$ ,  $v \in [0, 2\pi)$  และ  $z \in (-\infty, \infty)$

$u$  หาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$u = \cosh^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \quad (2.4)$$

โดยที่  $c$  คือ ความยาวครึ่งโฟกัสของวงรี ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความยาวครึ่งแกนหลัก ( $a$ ) และความยาวครึ่งแกนรอง ( $b$ ) คือ  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

ในการคำนวณพิกัดทรงกระบอกวงรี เพื่อความสะดวกจะกำหนดพารามิเตอร์ Eccentricity ( $e$ ) เพื่อแสดงคุณสมบัติของวงรี โดย  $e$  มีค่าเป็น

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{1}{AR^2}} \quad (2.5)$$

เมื่อ  $AR$  คือ อัตราส่วนแกน (Axial Ratio) หาได้จากอัตราส่วนของความยาวแกนหลักต่อความยาวแกนรอง ( $AR = a/b$ ) ดังนั้น (2.4) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$u = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \quad (2.6)$$

### 2.3.2 สมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี

การศึกษาสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี จะทำให้เข้าใจถึงคุณลักษณะของคลื่นที่เดินทางอยู่ภายในวงแหวนวงรีของสายอากาศ จากสมการแมกซ์เวลล์

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.10)$$

โดยที่  $\vec{E}$   $\vec{H}$   $\vec{D}$  และ  $\vec{B}$  เป็น ความเข้มสนามไฟฟ้า ความเข้มสนามแม่เหล็ก ความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้า และความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็ก ตามลำดับ โดยสนามจะมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นแบบฮาร์มอนิกซึ่งแสดงได้ด้วยฟังก์ชัน  $e^{j\omega t}$  และเนื่องจากคลื่นเดินทางในทิศทาง  $z$  สนามจะมีการเปลี่ยนแปลงตามระยะ  $z$  เป็นฟังก์ชัน  $e^{-\gamma z}$  และความสัมพันธ์เพิ่มเติมคือ

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad (2.11)$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (2.12)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (2.13)$$

เมื่อ  $\varepsilon$   $\sigma$  และ  $\mu$  เป็นค่าสภาพยอมไฟฟ้า ความนำไฟฟ้า และความซาบซึ่มแม่เหล็กของตัวกลางตามลำดับ

จาก (2.7) สามารถหาความสัมพันธ์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีได้จากสมการ

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{1}{h_u h_v h_z} \begin{vmatrix} h_u \hat{a}_u & h_v \hat{a}_v & h_z \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_u H_u & h_v H_v & h_z H_z \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

ค่าตัวประกอบสเกล (Scale Factor) ในพิกัดทรงกระบอกวงรี มีสมการคือ

$$h_u = h_v = c \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \quad (2.15)$$

$$h_z = 1 \quad (2.16)$$

จัดรูปด้านซ้ายมือของ (2.7)

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{H} &= \frac{1}{h_u h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (h_z H_z) - \frac{\partial}{\partial z} (h_v H_v) \right] \hat{a}_u + \frac{1}{h_u h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (h_u H_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_z H_z) \right] \hat{a}_v \\ &+ \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v H_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u H_u) \right] \hat{a}_z \end{aligned} \quad (2.17)$$

กระจายองค์ประกอบด้านขวามือของ (2.7)

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_u \hat{a}_u + E_v \hat{a}_v + E_z \hat{a}_z) + \sigma (E_u \hat{a}_u + E_v \hat{a}_v + E_z \hat{a}_z) \quad (2.18)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ จาก (2.7) (2.17) และ (2.18)

$$\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\left(\frac{\partial H_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v\right)\right) - \left(\sigma E_u + \varepsilon \frac{\partial E_u}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u\right) - \frac{\partial H_z}{\partial u}\right) - \left(\sigma E_v + \varepsilon \frac{\partial E_v}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{1}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u\right)\right) - \left(\sigma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.21)$$

จาก (2.8) ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\left(\frac{\partial E_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})E_v\right)\right) + \mu \frac{\partial H_u}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

$$\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})E_u\right) - \frac{\partial E_z}{\partial u}\right) + \mu \frac{\partial H_v}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{1}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})E_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})E_u\right)\right) + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

ในการคำนวณสำหรับตัวกลางไดอิเล็กตริกที่ไม่มีการสูญเสีย  $\sigma=0$  ค่าคงที่การแพร่กระจายคลื่นประกอบด้วยค่าคงที่การลดทอนและค่าคงที่เฟส  $\gamma = \alpha + j\beta$  ในกรณีที่คลื่นไม่มีการลดทอนเมื่อเดินทาง ( $\alpha=0$ ) และจาก  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv j\omega$  และ  $\frac{\partial}{\partial z} \equiv -\gamma \equiv -j\beta$  ดังนั้นเมื่อทำการจัดรูปใหม่ของ (2.19)–(2.24) จะได้สมการดังนี้

$$\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\left(\frac{\partial H_z}{\partial v} + (j\beta)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v\right) - (j\omega\varepsilon)E_u = 0 \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\left((-j\beta)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u - \frac{\partial H_z}{\partial u}\right) - (j\omega\varepsilon)E_v = 0 \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{1}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u\right)\right) - (j\omega\varepsilon)E_z = 0 \quad (2.27)$$

$$\left( \frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \right) \left( \frac{\partial E_z}{\partial v} + (j\beta) \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) E_v \right) + j\omega\mu H_u = 0 \quad (2.28)$$

$$\left( \frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \right) \left( (-j\beta) \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) E_u \right) - \frac{\partial E_z}{\partial u} + j\omega\mu H_v = 0 \quad (2.29)$$

$$\left( \frac{1}{\left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right)^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) E_v \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) E_u \right) \right) + j\omega\mu H_z = 0 \quad (2.30)$$

จาก (2.27)

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) H_v \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) H_u \right) - \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right)^2 (j\omega\epsilon) E_z = 0 \quad (2.31)$$

จาก (2.30)

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) E_v \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) E_u \right) = (-j\omega\mu) \left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right)^2 H_z \quad (2.32)$$

จาก (2.29)

$$H_v = \frac{(-j\beta) E_u - \left( \frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \right) \frac{\partial E_z}{\partial u}}{(-j\omega\mu)}$$

$$\frac{\partial H_v}{\partial z} = \left( \frac{\beta^2}{j\omega\mu} \right) E_u - \left( \frac{\beta}{(\omega\mu) c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \right) \frac{\partial E_z}{\partial u} \quad (2.33)$$

แทน (2.33) ลงใน (2.19)

$$\left( \frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \right) \frac{\partial H_z}{\partial v} - \left( \frac{\beta^2}{j\omega\mu} \right) E_u - \left( \frac{1}{\omega\mu} \right) \left( \frac{\beta}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \right) \frac{\partial E_z}{\partial u} = (j\omega\epsilon) E_u \quad (2.34)$$

คูณ (2.34) ด้วย  $\left( c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \right) (-j\omega\mu)$

$$(-j\beta)\frac{\partial E_z}{\partial v} + (j\omega\mu)\frac{\partial H_z}{\partial u} = (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)E_v \quad (2.39)$$

จาก (2.26)

$$(-j\beta)H_u - \left( \frac{1}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})} \right) \frac{\partial H_z}{\partial u} = (j\omega\varepsilon)E_v \quad (2.40)$$

จาก (2.28)

$$(-j\omega\mu)H_u = \left( \frac{1}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})} \right) \frac{\partial E_z}{\partial v} + j\beta E_v \quad (2.41)$$

นำ (2.40) คูณด้วย  $(j\beta)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})$

$$(\beta^2)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u = (j\beta)\frac{\partial H_z}{\partial u} + (j\beta)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(j\omega\varepsilon)E_v \quad (2.42)$$

นำ (2.41) คูณด้วย  $(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(j\omega\varepsilon)$

$$(\omega^2\varepsilon\mu)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u = (j\omega\varepsilon)\frac{\partial E_z}{\partial v} + (j\beta)(j\omega\varepsilon)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})E_v \quad (2.43)$$

นำ (2.43) ลบด้วย (2.42)

$$(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u = (j\omega\varepsilon)\frac{\partial E_z}{\partial v} - (j\beta)\frac{\partial H_z}{\partial u} \quad (2.44)$$

นำ (2.25) คูณด้วย  $j\beta$

$$(j\beta)\left( \frac{1}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})} \right) \frac{\partial H_z}{\partial v} - (j\beta)(j\omega\varepsilon)E_u = \beta^2 H_v \quad (2.45)$$

นำ (2.29) คูณด้วย  $j\omega\varepsilon$

$$(j\omega\varepsilon)(-j\beta)E_u - (j\omega\varepsilon)\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\frac{\partial E_z}{\partial u} = (\omega^2\varepsilon\mu)H_v \quad (2.46)$$

นำ (2.45)–(2.46)

$$(j\beta)\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\frac{\partial H_z}{\partial v} + (j\omega\varepsilon)\left(\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\right)\frac{\partial E_z}{\partial u} = (\beta^2 - \omega^2\varepsilon\mu)H_v \quad (2.47)$$

คูณ (2.47) ด้วย  $c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$

$$-(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v = (j\beta)\frac{\partial H_z}{\partial v} + (j\omega\varepsilon)\frac{\partial E_z}{\partial u} \quad (2.48)$$

สรุปว่าสามารถหาค่าประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีได้จาก (2.31) (2.32) (2.35) (2.39) (2.44) และ (2.48) โดยค่าที่ได้สอดคล้องกับ [9]

$$\begin{aligned} (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})^2 (j\omega\varepsilon)E_z &= \frac{\partial}{\partial u} \left( (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u \right) \\ (-j\omega\mu)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})^2 H_z &= \frac{\partial}{\partial u} \left( (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})E_v \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})E_u \right) \\ (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)E_u &= (-j\omega\mu)\frac{\partial H_z}{\partial v} - (j\beta)\frac{\partial E_z}{\partial v} \\ (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)E_v &= -(j\beta)\frac{\partial E_z}{\partial v} + (j\omega\mu)\frac{\partial H_z}{\partial u} \\ (\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u &= (j\omega\varepsilon)\frac{\partial E_z}{\partial v} - (j\beta)\frac{\partial H_z}{\partial u} \\ -(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v &= (j\beta)\frac{\partial H_z}{\partial v} + (j\omega\varepsilon)\frac{\partial E_z}{\partial u} \end{aligned}$$

จาก (2.31)

$$(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})^2 (j\omega\varepsilon)E_z = \frac{\partial}{\partial u} \left( (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_v \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( (c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})H_u \right)$$

แทน (2.44) และ (2.48) ลงใน (2.31) แล้วคูณด้วย  $(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})$  ซึ่งประโยชน์ด้านการคำนวณว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)(c^2)(\sinh^2 u + \sin^2 v)E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial v^2} \quad (2.49)$$

กำหนดให้  $\sinh^2 u = \frac{1}{2}[\cosh(2u) - 1]$  และ  $\sin^2 v = \frac{1}{2}[1 - \cos(2v)]$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial v^2} + \frac{(\omega^2 \epsilon \mu - \beta^2)(c^2)}{2} [\cosh(2u) - \cos(2v)] E_z = 0 \tag{2.50}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial v^2} + \frac{(\omega^2 \epsilon \mu - \beta^2)(c^2)}{2} [\cosh(2u) - \cos(2v)] H_z = 0 \tag{2.51}$$

นอกจากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในองค์ประกอบต่าง ๆ จะหาได้จากสมการแมกซ์เวลล์แล้ว ยังสามารถใช้สมการเฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz Equation) ร่วมกับวิธีแยกตัวแปรหาค่าได้ ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้  
จากสมการเฮล์มโฮลทซ์

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \tag{2.52}$$

สมการลาปลาซเขียนในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีมีสมการเป็น

$$\nabla^2 = \frac{1}{c^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.53}$$

ดังนั้นจะได้สมการอนุพันธ์เฮล์มโฮลทซ์ เป็น

$$\frac{1}{(\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \tag{2.54}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
เมื่อใช้หลักการแยกตัวแปรจะได้

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z) \quad (2.55)$$

ดังนั้นสมการอนุพันธ์เฮล์มโฮลทซ์ จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{Z}{(\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left( V \frac{d^2 U}{du^2} + U \frac{d^2 V}{dv^2} \right) + UV \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 UVZ = 0 \quad (2.56)$$

หารด้วย  $UVZ$  จะได้

$$\frac{1}{(\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left( \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} + \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (2.57)$$

สามารถแยกส่วนที่เป็นองค์ประกอบ  $Z$  ได้เป็น

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -(k^2 + h^2) \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{(\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left( \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} + \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} \right) = h^2 \quad (2.59)$$

ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -(k^2 + h^2)Z \quad (2.60)$$

ซึ่งมีผลเฉลยคือ

$$Z(z) = A_{km} \cos(\sqrt{k^2 + h^2} z) + B_{km} \sin(\sqrt{k^2 + h^2} z) \quad (2.61)$$

จาก (2.59)

$$\left( \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} - h^2 \sinh^2 u \right) + \left( \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} - h^2 \sin^2 v \right) = 0 \quad (2.62)$$

สามารถแยกตัวแปรได้เป็น

$$\left( \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} - h^2 \sinh^2 u \right) = G \quad (2.63)$$

$$G + \left( \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} - h^2 \sin^2 v \right) = 0 \quad (2.64)$$

ดังนั้น

$$\frac{d^2 U}{du^2} - (G + h^2 \sinh^2 u) U = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{d^2 V}{dv^2} + (G - h^2 \sin^2 v) V = 0 \quad (2.66)$$

—

เอกสารกำหนดให้ การที่สวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sinh^2 u = \frac{1}{2} [\cosh(2u) - 1] \quad (2.67)$$

$$\sin^2 v = \frac{1}{2}[1 - \cos(2v)] \quad (2.68)$$

เมื่อจัดกลุ่มใหม่ จะได้

$$\frac{d^2U}{du^2} - \left[ \left( G - \frac{1}{2}h^2 \right) + \frac{1}{2}h^2 \cosh(2u) \right] U = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{d^2V}{dv^2} + \left[ \left( G - \frac{1}{2}h^2 \right) + \frac{1}{2}h^2 \cos(2v) \right] V = 0 \quad (2.70)$$

กำหนดให้  $a' \equiv G - \frac{h^2}{2}$  และ  $q \equiv -\frac{h^2}{4}$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{d^2V}{dv^2} + [a' - 2q \cos(2v)] V = 0 \quad (2.71)$$

$$\frac{d^2U}{du^2} - [a' - 2q \cosh(2u)] U = 0 \quad (2.72)$$

(2.71) เรียกว่าสมการอนุพันธ์เมทริชและ (2.72) เรียกว่าสมการอนุพันธ์เมทริชคัดแปลง ซึ่งผลเฉลยของสมการจะเป็นฟังก์ชันเมทริช แสดงได้ดังนี้

$$V = C_1 ce(q, v) + S_1 se(q, v) \quad (2.73)$$

$$U = C_2 Ce(q, u) + S_2 Se(q, u) \quad (2.74)$$

สามารถเขียน (2.50) และ (2.51) ให้อยู่ในรูปใหม่ได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกนัยหนึ่งการนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่แจ้งชื่อผู้จัดทำเอกสารทุกครั้งที่มีโอกาสใช้

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{(\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2) c^2}{2} [\cosh(2u) - \cos(2v)] \psi = 0 \quad (2.75)$$

เมื่อนำ (2.71) บวกด้วย (2.72) จะได้สมการเฮล์มโฮลทซ์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีมีค่าเป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + 2q[\cosh(2u) - \cos(2v)]\psi = 0 \quad (2.76)$$

กำหนดให้  $\psi$  คือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี และ  $q$  คือ พารามิเตอร์แยก (Separate Parameter)

หาค่า  $q$  ได้จาก (2.75) และ (2.76)

$$q = \frac{c^2}{4}(\omega^2 \varepsilon \mu - \beta_z^2) = \frac{a^2 e^2}{4}(\omega^2 \varepsilon \mu - \beta_z^2) \quad (2.77)$$

กำหนดให้  $a$  คือ ความยาวครึ่งแกนหลัก และ  $e$  คือ Eccentricity ของท่อนำคลื่นวงรี

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \text{ คือ ค่าคงที่เฟสในช่องว่างอิสระ} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\beta_z \text{ คือ ค่าคงที่เฟสในท่อนำคลื่น} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{c^2 k_c^2}{2}[\cosh(2u) - \cos(2v)]\psi = 0 \quad (2.78)$$

โดยที่  $c$  คือ ความยาวครึ่งหนึ่งของโพกัส ( $c = ae$ ) และ  $k_c$  คือ ค่าเลขคลื่นตัด (Cutoff Wavenumber)  $k_c^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta_z^2$

ถ้าพิจารณาอันดับของโหมดคลื่น สามารถเขียน (2.78) ที่แสดงรูปอันดับของโหมดคลื่นเป็น

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial v^2} + \frac{c^2 k_{cm}^2}{2}(\cosh 2u - \cos 2v)\psi_m = 0 \quad (2.79)$$

ผลเฉลยของ (2.79) เป็นพจน์ฟังก์ชันที่เรียกว่าฟังก์ชันเมทริว โดยแสดงได้ดังนี้

$$\psi_m(u, v, z) = \begin{bmatrix} ce_m(q, v) Ce_m(q, u) \\ se_m(q, v) Se_m(q, u) \end{bmatrix} e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (2.80)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ในการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้ค่า  $\psi_m$  คือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี และ  $m$  คือ อันดับ (Order) ของฟังก์ชันแมทริว โดยที่ฟังก์ชันแมทริวประกอบด้วยฟังก์ชันต่างๆ มีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

- (1)  $ce_m(q, v)$  คือ ฟังก์ชันแมทริวธรรมดาแบบคู่ หรือ ฟังก์ชันแมทริวธรรมดาแบบโคซายน์
- (2)  $se_m(q, v)$  คือ ฟังก์ชันแมทริวธรรมดาแบบคี่ หรือ ฟังก์ชันแมทริวธรรมดาแบบซายน์
- (3)  $Ce_m(q, u)$  คือ ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลงแบบคู่ หรือ ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลงแบบโคซายน์
- (4)  $Se_m(q, u)$  คือ ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลงแบบคี่ หรือ ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลงแบบซายน์

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เดินทางภายในท่อนำคลื่นวงรีจะประกอบด้วยโหมดคลื่น TM และ TE ในกรณีคลื่นโหมด TM เมื่อพิจารณาองค์ประกอบในทิศแกนตามแนวยาว (Longitudinal component) จะได้ว่า  $H_z = 0, E_z = \psi_m$  และสำหรับกรณีโหมดคลื่น TE เมื่อพิจารณาองค์ประกอบในทิศแกนตามแนวยาว จะได้ว่า  $E_z = 0, H_z = \psi_m$

จาก (2.80) พบว่า  $E_z$  และ  $H_z$  มีรูปแบบที่ต่างกัน 2 แบบ ซึ่งสอดคล้องกับโหมดคลื่นคู่ หรือโหมดคลื่นคี่ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าคลื่นที่เดินทางในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีทั้งหมดประกอบด้วย 4 โหมดคลื่นที่ต่างกัน มีชื่อเรียกว่า  $TM_c, TM_s, TE_c$  และ  $TE_s$  ซึ่งหมายถึงโหมดคลื่น TM แบบคู่ (โหมดคลื่น TM แบบโคซายน์), โหมดคลื่น TM แบบคี่ (โหมดคลื่น TM แบบซายน์), โหมดคลื่น TE แบบคู่ (โหมดคลื่น TE แบบโคซายน์) และโหมดคลื่น TE แบบคี่ (โหมดคลื่น TE แบบซายน์) ตามลำดับ

$$\left. \begin{matrix} E_z \\ H_z \end{matrix} \right\} = K [Ce_m(q, u)ce_m(q, v) + Se_m(q, u)se_m(q, v)] e^{j(\alpha x - \beta_z z)} \quad (2.81)$$

โหมดคลื่น TE ให้  $E_z = 0$  จะได้องค์ประกอบสนามแม่เหล็กดังนี้

$$H_z = K [Ce_m(q, u)ce_m(q, v) + Se_m(q, u)se_m(q, v)] e^{j(\alpha x - \beta_z z)} \quad (2.82)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้  $j\beta_z$  เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยัง (  $c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$  )  $(\omega^2 \epsilon \mu - \beta_z^2)$  ังอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\times [Ce'_m(q, u)ce_m(q, v) + Se'_m(q, u)se_m(q, v)] e^{j(\alpha x - \beta_z z)} \quad (2.83)$$

$$H_v = \frac{\beta_z}{\omega\mu} E_u = -K \frac{j\beta_z}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(\omega^2 \varepsilon\mu - \beta_z^2)} \times [Ce_m(q,u)ce'_m(q,v) + Se_m(q,u)se'_m(q,v)]e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (2.84)$$

โหมดคลื่น TM ให้  $H_z = 0$  จะได้อังก์ประกอบสนามไฟฟ้าดังนี้

$$E_z = K [Ce_m(q,u)ce_m(q,v) + Se_m(q,u)se_m(q,v)]e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (2.85)$$

$$E_u = \frac{\beta_z}{\omega\varepsilon} H_v = -K \frac{j\beta_z}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(\omega^2 \varepsilon\mu - \beta_z^2)} \times [Ce'_m(q,u)ce_m(q,v) + Se'_m(q,u)se_m(q,v)]e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (2.86)$$

$$E_v = \frac{\beta_z}{\omega\varepsilon} H_u = -K \frac{j\beta_z}{(c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v})(\omega^2 \varepsilon\mu - \beta_z^2)} \times [Ce_m(q,u)ce'_m(q,v) + Se_m(q,u)se'_m(q,v)]e^{j(\omega t - \beta_z z)} \quad (2.87)$$

เมื่อ  $K$  เป็นค่าคงที่จำนวนเชิงซ้อน

จาก (2.82) และ (2.87) พบว่าจะสอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบเขตของผนังท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีโดย  $E_v = 0$  เมื่อ  $u = u_0$  ทำให้ได้ว่า

$$\text{สำหรับโหมดคลื่น TM} \quad Ce_m(q, u_0) = 0 \text{ (แบบคู่)}, \quad Se_m(q, u_0) = 0 \text{ (แบบคี่)} \quad (2.88)$$

$$\text{สำหรับโหมดคลื่น TE} \quad Ce'_m(q, u_0) = 0 \text{ (แบบคู่)}, \quad Se'_m(q, u_0) = 0 \text{ (แบบคี่)} \quad (2.89)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะพิมพ์ใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $u_0$  คือค่าฟังก์ชันแมทิวในแนวรัศมี (Radial Mathieu Function) ของวงรีจาก (2.79) พบว่า  $q$  มีความสัมพันธ์กับค่าเลขคลื่นตัด ซึ่งค่า  $q$  ที่ได้จะแตกต่างกันสำหรับแต่ละค่ารากของ (2.88) และ (2.89) ตัวห้อย  $n$  จะบอกถึงลำดับค่ารากพาราเมตริก ซึ่งจะใช้ในการกำหนดโหมดคลื่น สูตรที่ใช้ในการหาค่าความยาวคลื่นตัดของโหมดคลื่น TE และ TM สำหรับท่อนำคลื่นแบบวงรีคือ

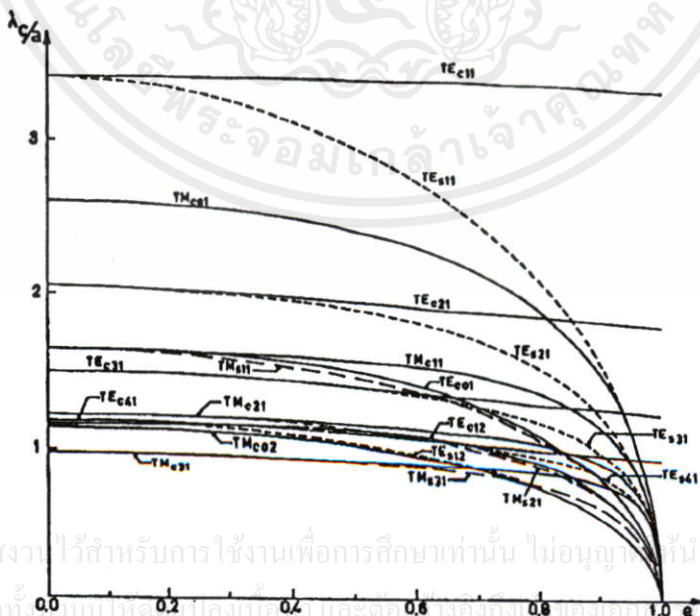
$$\lambda_c = \frac{\pi a e}{\sqrt{q}} \quad (2.90)$$

ในกรณีโหมดคลื่น  $TM_{Cmn}$   $q = q_{Cmn}$  เป็นค่ารากพาราเมตริกลำดับที่  $n$  ของฟังก์ชันแมทิวตัดแปลงแบบคู่ลำดับที่  $m$  เมื่อใช้อาร์กิวเมนต์  $u_0$

ในกรณีโหมดคลื่น  $TM_{Smn}$   $q = q_{Smn}$  เป็นค่ารากพาราเมตริกลำดับที่  $n$  ของฟังก์ชันแมทิวตัดแปลงแบบคี่ลำดับที่  $m$  เมื่อใช้อาร์กิวเมนต์  $u_0$

ในกรณีโหมดคลื่น  $TE_{Cmn}$   $q = \bar{q}_{Cmn}$  เป็นค่ารากพาราเมตริกลำดับที่  $n$  ของอนุพันธ์ฟังก์ชันแมทิวตัดแปลงแบบคู่ลำดับที่  $m$  เมื่อใช้อาร์กิวเมนต์  $u_0$

ในกรณีโหมดคลื่น  $TE_{Smn}$   $q = \bar{q}_{Smn}$  เป็นค่ารากพาราเมตริกลำดับที่  $n$  ของอนุพันธ์ฟังก์ชันแมทิวตัดแปลงแบบคี่ลำดับที่  $m$  เมื่อใช้อาร์กิวเมนต์  $u_0$



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\frac{\lambda_c}{a}$  กับ  $e$  [10]

โดยค่า  $\lambda_c / a$  และ  $e$  ตามความสัมพันธ์ใน (2.90) แสดงเป็นกราฟได้ดังรูปที่ 2.2 จาก (2.77), (2.78) และ (2.90) ค่าความยาวคลื่นตัดของโหมดคลื่นใด ๆ จะเป็นฟังก์ชันของขนาดพื้นที่หน้าตัดวงรีและค่า  $q$  พร้อมทั้งยังขึ้นอยู่กับชนิดโหมดคลื่นและ  $e$  ด้วย จึงทำให้สรุปได้ว่า ความยาวคลื่นตัดที่โหมดคลื่นใด ๆ ในท่อนำคลื่น จะหาได้จากขนาดของหน้าตัดวงรี

### 2.3.3 ความถี่ตัด

ในกรณีที่ทราบขนาดของหน้าตัดท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี เราสามารถที่จะหาค่าราก  $q$  ของโหมดคลื่นต่างๆ ได้โดยอาศัยสมการ (2.88) และ (2.89) หลังจากคำนวณหาค่ารากได้แล้วจะทำให้สามารถทราบความถี่ตัดได้จากความสัมพันธ์ในสมการ (2.90)

ตัวอย่างกรณีท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีมีความยาวแกนหลัก 48 mm และความยาวแกนรอง 36 mm ทำให้ทราบว่า  $u = 0.973$  และ  $e = 0.6614$  ซึ่งค่ารากของคลื่นในโหมดคลื่นต่างๆ ภายในท่อนำคลื่นนี้ได้ถูกคำนวณและแสดงไว้ในตารางที่ 2.1 จากการคำนวณโดยอาศัยหลักการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี สำหรับ 6 โหมดคลื่นแรกจะหาความถี่ตัดได้ดังนี้

1. ความถี่ตัดของโหมดคลื่นเป็นใหญ่  $TE_{c11}$  คือ 1.849 GHz

$$\lambda_{cTE_{c11}} = \frac{\pi \times 0.048 \times 0.6614}{\sqrt{0.378}} = 0.1622 \text{ m}$$

$$\therefore f_{cTE_{c11}} = \frac{3 \times 10^8}{0.1622} = 1.849 \text{ GHz} \quad (2.91)$$

2. ความถี่ตัดของโหมดคลื่นอันดับสูงที่หนึ่ง  $TE_{s11}$  คือ 2.407 GHz

$$\lambda_{cTE_{s11}} = \frac{\pi \times 0.048 \times 0.6614}{\sqrt{0.641}} = 0.1246 \text{ m}$$

$$\therefore f_{cTE_{s11}} = \frac{3 \times 10^8}{0.1246} = 2.407 \text{ GHz} \quad (2.92)$$

3. ความถี่ตัดของโหมดคลื่นอันดับสูงที่สอง  $TM_{c01}$  คือ 2.814 GHz

$$\lambda_{cTM_{c01}} = \frac{\pi \times 0.048 \times 0.6614}{\sqrt{0.876}} = 0.1066 \text{ m}$$

$$\therefore f_{cTM_{c01}} = \frac{3 \times 10^8}{0.1066} = 2.814 \text{ GHz} \quad (2.93)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. ความถี่ตัดของโหมดคลื่นอันดับสูงที่สาม  $TE_{c21}$  คือ 3.296 GHz

$$\lambda_{cTE_{c21}} = \frac{\pi \times 0.048 \times 0.6614}{\sqrt{1.201}} = 0.0910 \text{ m}$$

$$\therefore f_{cTE_{c21}} = \frac{3 \times 10^8}{0.0910} = 3.296 \text{ GHz} \quad (2.94)$$

5. ความถี่ตัดของโหมดคลื่นอันดับสูงที่สี่  $TE_{s21}$  คือ 3.554 GHz

$$\lambda_{cTE_{s21}} = \frac{\pi \times 0.048 \times 0.6614}{\sqrt{1.397}} = 0.0844 \text{ m}$$

$$\therefore f_{cTE_{s21}} = \frac{3 \times 10^8}{0.0844} = 3.554 \text{ GHz} \quad (2.95)$$

6. ความถี่ตัดของโหมดคลื่นอันดับสูงที่ห้า  $TM_{c11}$  คือ 4.160 GHz

$$\lambda_{cTM_{c11}} = \frac{\pi \times 0.048 \times 0.6614}{\sqrt{1.911}} = 0.0721 \text{ m}$$

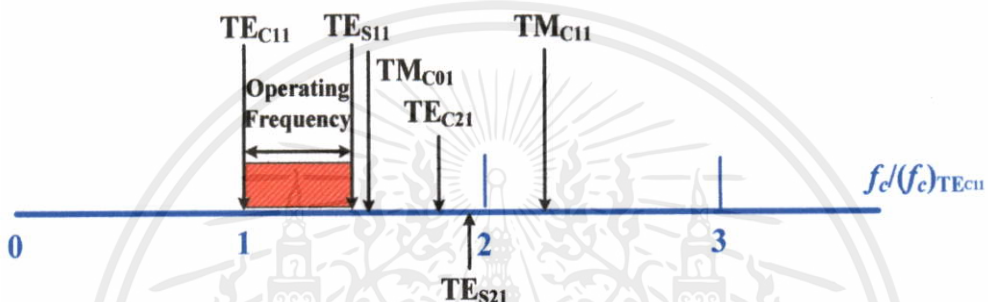
$$\therefore f_{cTM_{c11}} = \frac{3 \times 10^8}{0.0721} = 4.160 \text{ GHz} \quad (2.96)$$

ตารางที่ 2.1 ค่ารากของโหมดคลื่นต่างๆ เมื่อ  $a = 48 \text{ mm}$  และ  $b = 36 \text{ mm}$

$m$	$n$	$TE_c$	$TE_s$	$TM_c$	$TM_s$
0	1	2.413	2.524	0.876	4.568
0	2	8.686	7.597	5.194	12.046
0	3	18.8	16.872	13.383	-
0	4	32.751	-	25.423	-
0	5	50.539	-	41.28	-
1	1	0.378	0.641	1.911	2.534
1	2	3.881	5.066	7.178	8.808
1	3	11.150	13.263	16.384	18.918
1	4	22.298	25.296	29.444	32.867
1	5	37.285	41.165	46.343	50.653
2	1	1.201	1.397	3.412	3.981
2	2	5.848	7.007	9.614	11.295
2	3	14.046	16.244	19.804	22.433
2	4	26.212	29.312	33.885	37.414
2	5	42.228	46.217	51.815	56.232
3	1	2.512	2.397	5.832	5.369
3	2	9.376	8.328	14.207	12.545
3	3	19.645	17.404	26.362	23.665
3	4	33.740	30.557	42.370	38.752
3	5	51.676	47.591	62.220	57.700

### 2.3.4 เงื่อนไขในการเลือกค่าความถี่ปฏิบัติการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี

ในกรณีท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีมีความยาวแกนหลัก 48 mm และความยาวแกนรอง 36 mm ที่เป็นตัวอย่างนั้น เพื่อให้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นทำงานที่เฉพาะโหมดคลื่นเป็นใหญ่ (Dominant Mode) ความถี่ปฏิบัติการควรมีช่วงอยู่ระหว่าง 1.849 GHz ถึง 2.407 GHz ดังนั้นจึงสามารถที่จะเลือกขนาดท่อนำคลื่นนี้ให้ทำงานที่ความถี่ปฏิบัติการของระบบ PCS ที่ 1.92 GHz ได้ ซึ่งสำหรับประเทศไทยนั้นผู้ให้บริการโทรศัพท์เคลื่อนที่ระบบ PCS คือไทยโมบายล์ (Thai Mobile) เงื่อนไขการเลือกความถี่ปฏิบัติการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 เงื่อนไขการเลือกความถี่ปฏิบัติการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่มี  $a = 48$  mm และ  $b = 36$  mm

## 2.4 บทสรุป

เนื่องจากองค์ประกอบของสายอากาศประกอบด้วยโพรบไฟฟ้าและวงแหวนวงรี ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์สายอากาศ จึงเริ่มต้นการวิเคราะห์โดยอาศัยหลักการของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีมาเป็นแนวทางการศึกษาและเพื่อเป็นแนวทางสำหรับการเลือกขนาดหน้าตัดวงแหวนวงรี ซึ่งจากทฤษฎีสมการคลื่นและความรู้ในเรื่องโหมดคลื่นในหัวข้อ 2.3.2 และการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับความถี่ตัดของท่อนำคลื่นทรงกระบอก ในหัวข้อที่ 2.3.3 ทำให้ทราบว่าวงแหวนวงรีที่มี  $a$  มีค่า 48 mm และมี  $b$  มีค่า 36 mm เป็นขนาดวงรีที่เหมาะสมสำหรับรองรับการปฏิบัติงานย่านความถี่ PCS

## บทที่ 3

### การจำลองแบบสายอากาศ

#### 3.1 บทนำ

บทนี้จะกล่าวถึงการใช้โปรแกรมคำนวณแม่เหล็กไฟฟ้ามาจำลองแบบสายอากาศเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศซึ่งจะนำไปใช้ในการสร้างสายอากาศต้นแบบเพื่อทำการทดสอบคุณลักษณะของสายอากาศ โดยสายอากาศจะถูกออกแบบให้มีขนาดเล็กแต่ยังสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz ผลที่ได้จากการจำลองแบบทำให้ทราบคุณลักษณะต่างๆ ของสายอากาศ นอกจากนั้นยังใช้โปรแกรมจำลองผลโหมคคลื่นชนิดต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่มีขนาดหน้าตัดเท่ากับขนาดหน้าตัดของสายอากาศ เพื่อหาว่าสนามบนช่องเปิดสายอากาศที่เกิดขึ้นนั้นมีลักษณะคล้ายกับโหมคคลื่นชนิดใดบ้างโดยอาศัยการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็นตัวบ่งบอกอิทธิพลจากโหมคคลื่น

#### 3.2 การหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศ

ในการศึกษาจะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ การกำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้น และการวิเคราะห์เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศต้นแบบ โดยมีรายละเอียดดังนี้

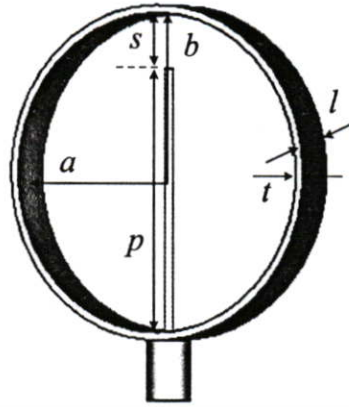
##### 3.2.1 การกำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้น

เพื่อที่จะได้ค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นที่เหมาะสมของสายอากาศจะใช้หลักการกำหนดค่าเริ่มต้นดังต่อไปนี้

การกำหนดค่าความยาวโพรบ ให้ความยาวโพรบมีขนาดเท่ากับความยาวของสายอากาศ โมโนโพลที่มีความถี่ปฏิบัติการที่ 1.92 GHz ซึ่งเป็นความถี่กลางของย่านความถี่ในระบบ PCS (1.85–1.99 GHz)

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 1.95 \times 10^9} = 0.039 \text{ (m)} \quad (3.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้เพื่อการศึกษานี้ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ เพราะฉะนั้น ความยาวโพรบ  $p = 39 \text{ mm}$



รูปที่ 3.1 สายอากาศที่มีค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นตามที่กำหนด

การใส่วงแหวนครอบโพรบ ต้องไม่ให้ปลายโพรบสัมผัสกับวงแหวนเพื่อป้องกันการลัดวงจร ควรกำหนดให้ระยะห่างของปลายโพรบกับวงแหวนมีระยะห่างกันเล็กน้อย เพื่อให้สายอากาศมีขนาดเล็ก ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงกำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้นดังนี้

- รัศมีของโพรบกำหนดให้มีขนาดเท่ากับรัศมีของตัวนำของคอนเนคเตอร์แบบ SMA 0.7 mm
- กำหนดให้ระยะห่างของปลายโพรบห่างจากวงแหวน ( $s$ ) 1 mm
- วงแหวนเป็นแบบวงกลม ขนาดวงแหวนวงกลมด้านในมีความยาวครึ่งแกนหลัก ( $a$ ) เท่ากับความยาวครึ่งแกนรอง ( $b$ )
- ความยาวของวงแหวน ( $l$ ) 1 mm

พารามิเตอร์เริ่มต้นได้ถูกสรุปไว้ในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์เริ่มต้นสำหรับการจำลองแบบ

พารามิเตอร์	ขนาดทางกายภาพ (mm)	ขนาดทางไฟฟ้า ( $\lambda$ )
$p$	39	$0.2500\lambda$
$a$	20	$0.1280\lambda$
$b$	20	$0.1280\lambda$
$t$	1	$0.0064\lambda$
$l$	1	$0.0064\lambda$
$s$	$2b - p$	$(2b - p) \times 0.0064\lambda$

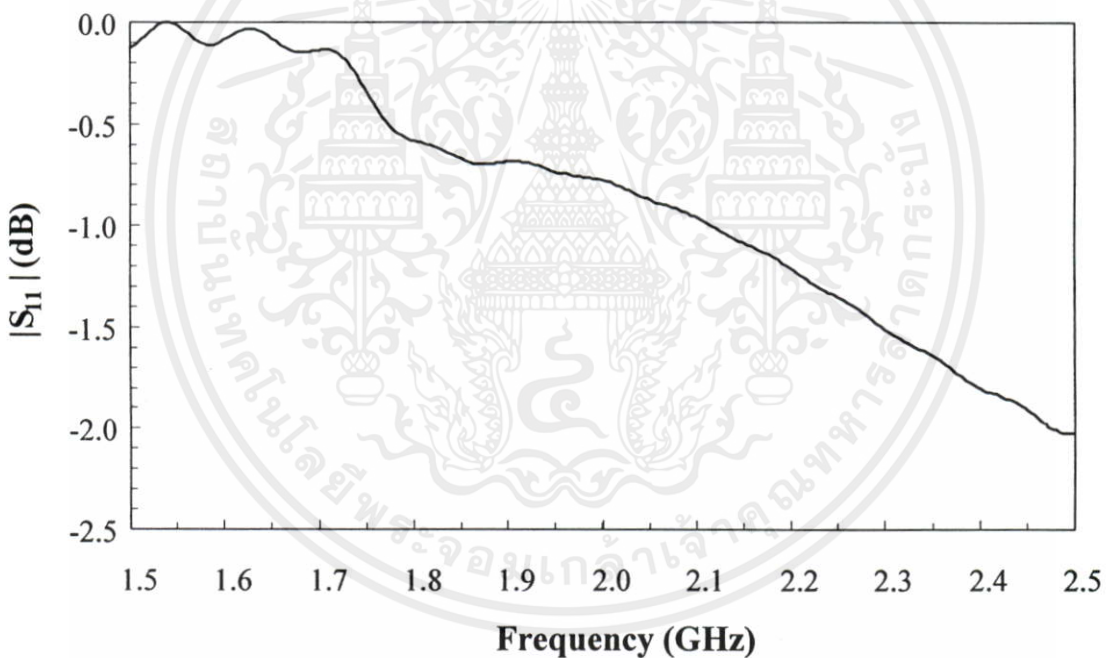
ผลที่ได้จากการจำลองแบบสายอากาศที่มีพารามิเตอร์เริ่มต้นตามตารางที่ 3.1 แสดงไว้ในรูปที่ 3.2 พบว่าไม่มีควมถี่ต่ำสุดอยู่ภายใต้เงื่อนไข  $|S_{11}|$  น้อยกว่า -10 dB ในช่วงแบนด์วิดธ์ของระบบ PCS

### 3.2.2 การวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสม

เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศจะวิเคราะห์ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

(1) ทำการปรับขนาดของวงแหวนวงกลมเพื่อให้เกิดการเรโซแนนซ์

โดยให้ค่า  $a$  และ  $b$  มากกว่า 20 mm และ  $a = b$  เมื่อเพิ่มค่าขนาดวงแหวนวงกลมให้มีขนาดใหญ่ขึ้นพบว่าเกิดการเรโซแนนซ์ที่ได้ค่า  $|S_{11}|$  น้อยกว่า -10 dB ถูกปรับปรุงให้ดีขึ้น ผลการจำลองแบบด้วยโปรแกรมพบว่า  $|S_{11}|$  ที่ได้เมื่อใช้  $a = b = 32$  mm,  $a = b = 34$  mm,  $a = b = 36$  mm,  $a = b = 38$  mm และ  $a = b = 40$  mm แสดงไว้ในรูปที่ 3.3

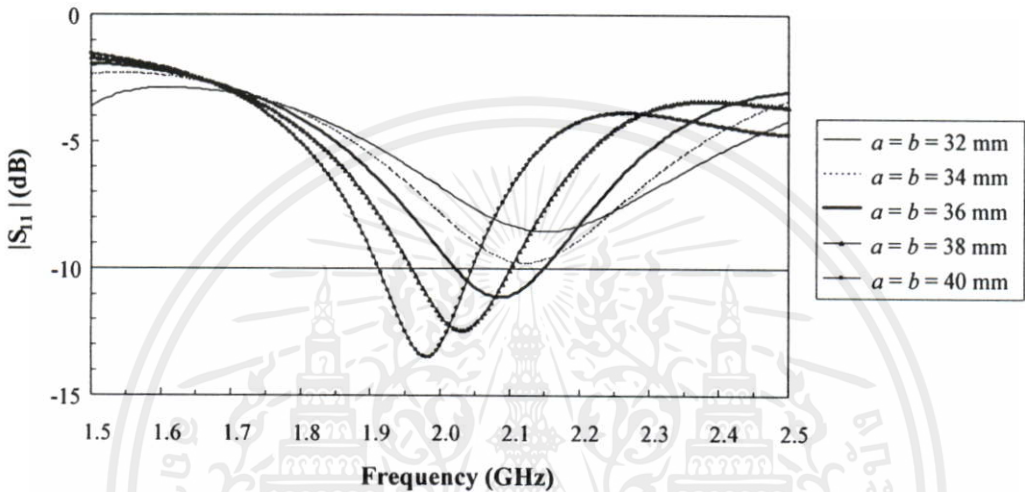


รูปที่ 3.2 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มีค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นตามตารางที่ 3.1

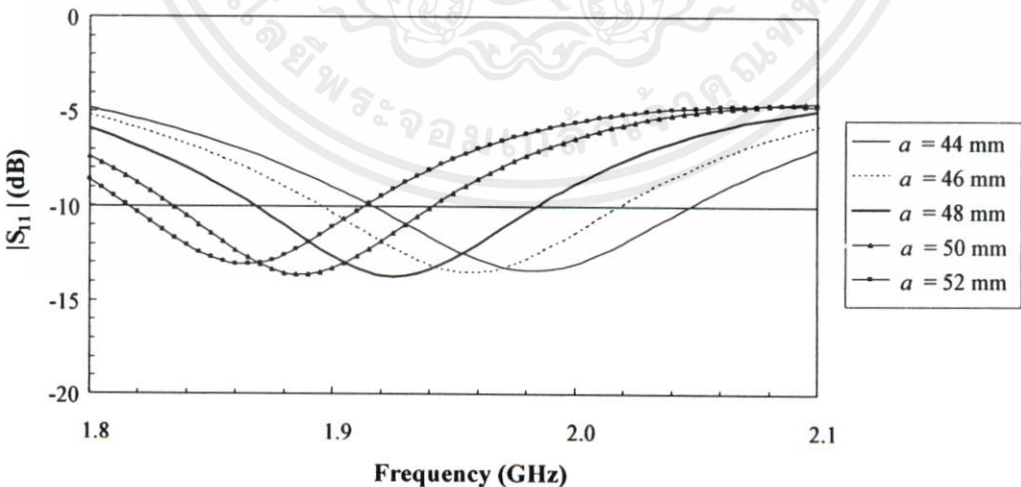
จากรูปที่ 3.3 ในการออกแบบต้องการให้สายอากาศมีขนาดกะทัดรัด พบว่าที่  $a = b = 36$  mm เป็นค่าที่เหมาะสม เพราะให้ความกว้างแบนด์วิดธ์ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไข  $|S_{11}|$  น้อยกว่า -10 dB แต่เนื่องจากความถี่ต่ำสุดของแบนด์วิดธ์มีค่าต่ำที่สุดคือ 2.02 GHz ซึ่งยังไม่อยู่ในช่วงความถี่ที่ต้องการระหว่าง 1.85 GHz และ 1.99 GHz จึงต้องทำการปรับปรุงการออกแบบต่อไป

(2) ทำการปรับขนาดของ  $a$  ให้มากขึ้นเพื่อให้แบนด์วิดธ์อยู่ที่ความถี่ต่ำ

เพื่อให้เกิดการปรับปรุงแบนด์วิดธ์การทำงาน จึงทำการแปรค่า  $a$  โดยที่ยังคงค่า  $b = 36$  mm ผลจากการจำลองแบบแสดงดังรูปที่ 3.4 จะต้องเลือก  $a$  ให้มีขนาดเล็กที่สุดที่จะทำให้มีแบนด์วิดธ์ตามความต้องการของระบบ PCS พบว่า  $a = 48$  mm เป็นค่าที่เหมาะสมเนื่องจากมีค่าขอบแบนด์วิดธ์ต่ำสุดที่ใกล้ความถี่ 1.92 GHz ซึ่งเป็นความถี่กลางของระบบ PCS



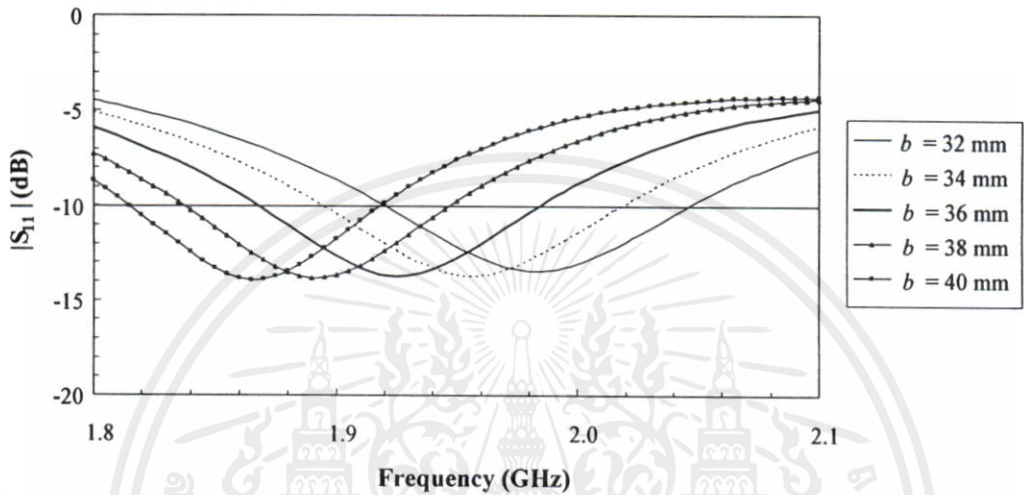
รูปที่ 3.3 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี  $a$  และ  $b$  เท่ากับ 32 mm, 34 mm, 36 mm, 38 mm และ 40 mm และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1



รูปที่ 3.4 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี  $a$  เท่ากับ 44 mm, 46 mm, 48 mm, 50 mm และ 52 mm เมื่อ  $b = 36$  mm และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1

(3) ทำการปรับขนาดของ  $b$  เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของ  $|S_{11}|$

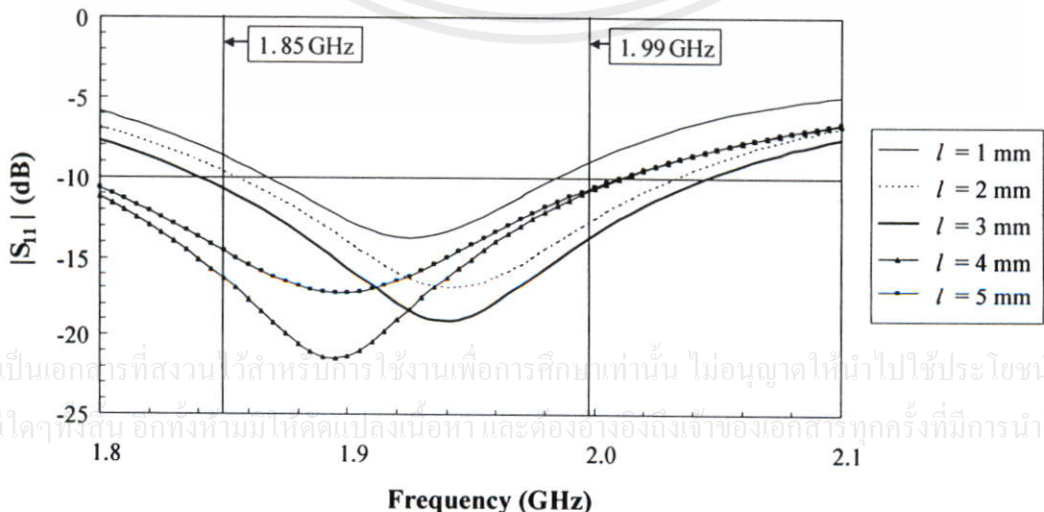
เมื่อทำการเปลี่ยนค่าขนาด  $b$  อีกครั้ง พบว่า  $b = 36$  mm ยังคงเป็นค่าที่เหมาะสมอยู่ ดังแสดงในรูปที่ 3.5 เนื่องจากมีค่าขอบแบนด์วิดท์ต่ำสุดที่ใกล้ความถี่ 1.92 GHz ซึ่งเป็นความถี่กลางของระบบ PCS



รูปที่ 3.5 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี  $b$  เท่ากับ 32 mm, 34 mm, 36 mm, 38 mm และ 40 mm เมื่อ  $a = 48$  mm และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1

(4) ทำการปรับขนาดของ  $l$  เพื่อให้มีแบนด์วิดท์ครอบคลุมความถี่ระบบ PCS

กำหนดให้  $a = 48$  mm,  $b = 36$  mm และค่าพารามิเตอร์อื่นที่เหลือมีค่าคงที่เหมือนในตารางที่ 3.1 เมื่อทำการแปรค่าหาขนาด  $l$  ที่เหมาะสม พบว่า  $l = 3$  mm เป็นค่าที่เหมาะสมเนื่องจากมีขนาดเล็กและมีแบนด์วิดท์ครอบคลุม 1.84 GHz ถึง 2.04 GHz



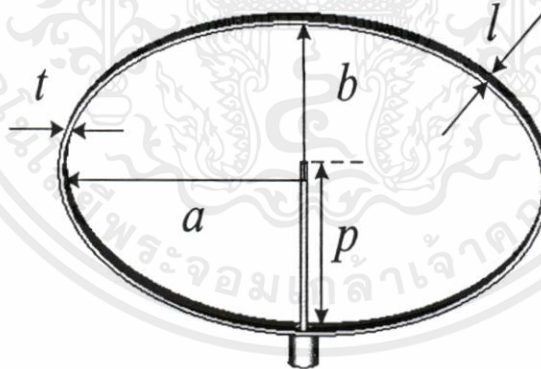
รูปที่ 3.6 ผลการจำลองแบบของสายอากาศที่มี  $l$  เท่ากับ 1 mm, 2 mm, 3 mm, 4 mm และ 5 mm

เมื่อ  $a = 48 \text{ mm}$ ,  $b = 36 \text{ mm}$  และค่าพารามิเตอร์ที่เหลือมีค่าตามตารางที่ 3.1  
 ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศสรุปได้ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศ

พารามิเตอร์	ขนาดทางกายภาพ (mm)	ขนาดทางไฟฟ้า ( $\lambda$ )
$p$	39	$0.2500\lambda$
$a$	48	$0.3071\lambda$
$b$	36	$0.2303\lambda$
$t$	1	$0.0064\lambda$
$l$	3	$0.0192\lambda$
$s = 2b - p$	33	$0.2111\lambda$

เพื่อความสะดวกต่อไปจะละเว้นการกล่าวถึงพารามิเตอร์  $s$  ทำให้สายอากาศมีโครงสร้าง  
 และพารามิเตอร์ดังรูปที่ 3.7



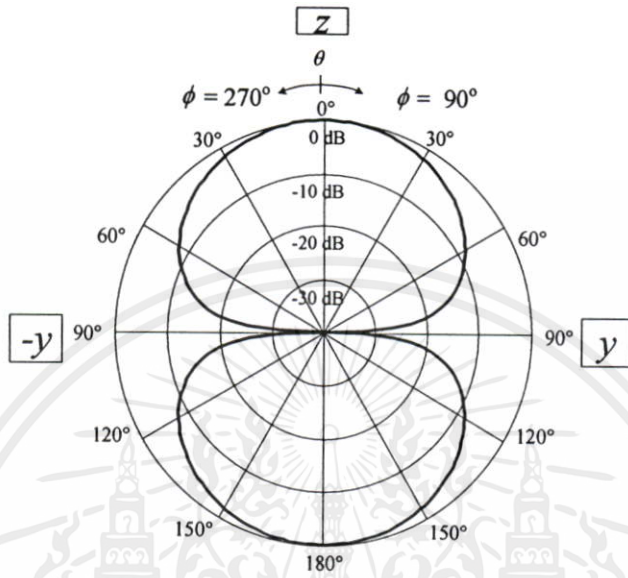
รูปที่ 3.7 โครงสร้างสายอากาศแบบสองทิศทางโดยโพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี

### 3.3 คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

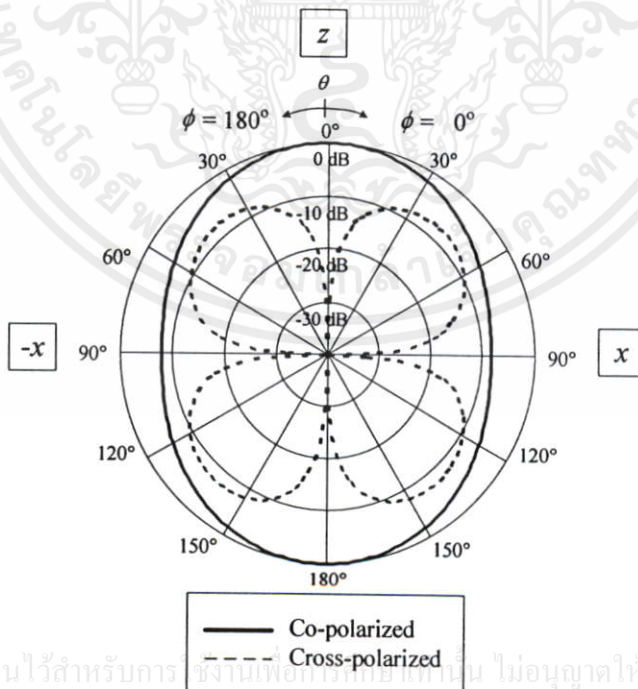
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งการจำลองแบบพบว่าเป็นรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่มีความถี่ปฏิบัติใช้

การ 1.92 GHz ในระนาบสนามไฟฟ้า (E-plane) และในระนาบสนามแม่เหล็ก (H-plane) มีลักษณะ  
 การแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทางพุ่งออกไปยังทิศทาง  $+z$  และ  $-z$  ดังรูปที่ 3.8 และรูปที่ 3.9

โดยมีสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity) เท่ากับ 4.4 dBi มีค่าอัตราขยาย (Gain) เท่ากับ 4.2 dBi ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง (HPBW) ในระนาบสนามไฟฟ้าและในระนาบสนามแม่เหล็ก มีค่า 74 องศาและ 78 องศา ตามลำดับ



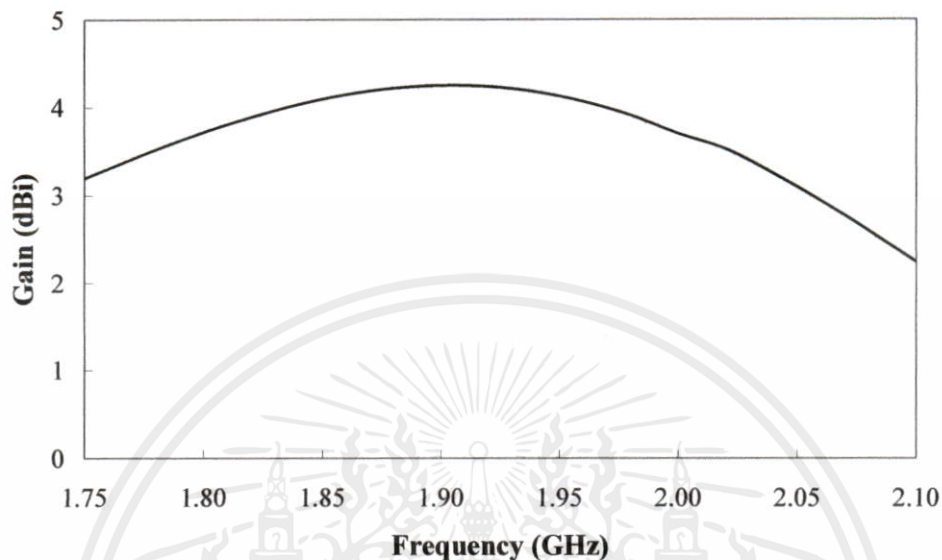
รูปที่ 3.8 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้า



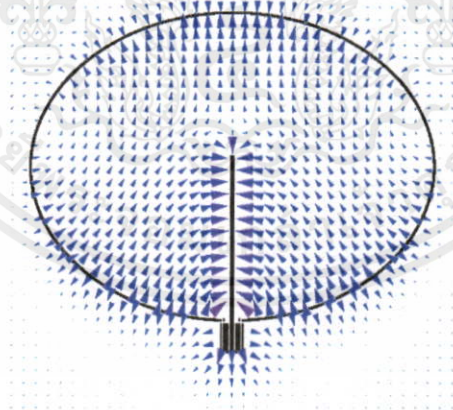
รูปที่ 3.9 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็ก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อความถี่เปลี่ยนแปลงไปในระหว่างช่วง 1.75 GHz ถึง 2.10 GHz อัตราขยายจะมีการเปลี่ยนแปลงไปดังแสดงในรูปที่ 3.10 ที่ความถี่ 1.85 GHz และที่ความถี่ 1.99 GHz อัตราขยายจะมีค่า 4.09 dBi และ 3.60 dBi ตามลำดับ



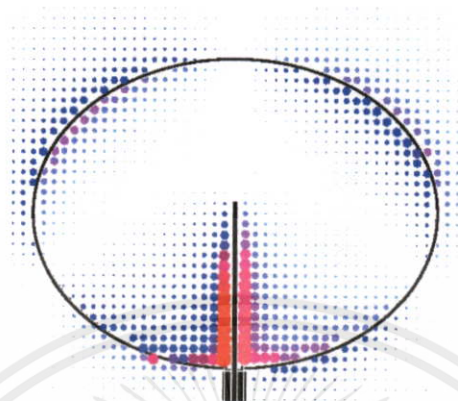
รูปที่ 3.10 อัตราขยายของสายอากาศเมื่อเปลี่ยนแปลงความถี่



รูปที่ 3.11 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 0$  mm (ตำแหน่งของโพรบ) ในมุมมองด้านหน้าสายอากาศ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานวิจัยเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 จากรูปที่ 3.11 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 0$  mm จะมีความเข้มของสนามมาก  
 ไม่ว่าจะถี่ใดช่วงสั้น อีกทังนั้นเป็นคลื่นโลงเงาหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
 บริเวณโพรบ โดยสนามไฟฟ้าจะมีการเชื่อมต่อ (Coupling) ระหว่างขอบวงแหวนส่วนล่าง โพรบ  
 และวงแหวนส่วนบนตรงกลาง องค์ประกอบสนามไฟฟ้าจะมีการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง  $x$  และ  $y$

ในขณะเดียวกันจะมีสนามแม่เหล็กเกิดขึ้นดังแสดงในรูปที่ 3.12 ซึ่งมีความเข้มสนามแม่เหล็กที่มีค่ามากบริเวณที่มีการเหนี่ยวนำระหว่างขอบวงแหวนส่วนล่าง โพรบ และวงแหวนส่วนบนด้านซ้าย และด้านขวา องค์กรประกอบสนามแม่เหล็กจะมีการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง  $z$



รูปที่ 3.12 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 0$  mm (ตำแหน่งของโพรบ) ในมุมมองด้านหน้าสายอากาศ



รูปที่ 3.13 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 0$  mm (ตำแหน่งของโพรบ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



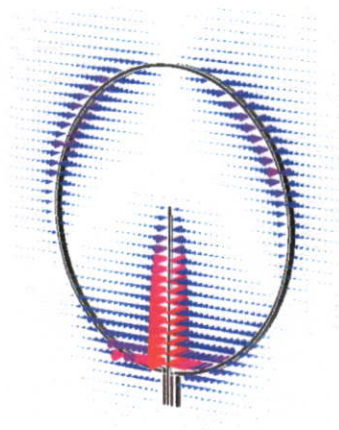
รูปที่ 3.14 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 1.5 \text{ mm}$  (ตำแหน่งของช่องเปิดสายอากาศ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ



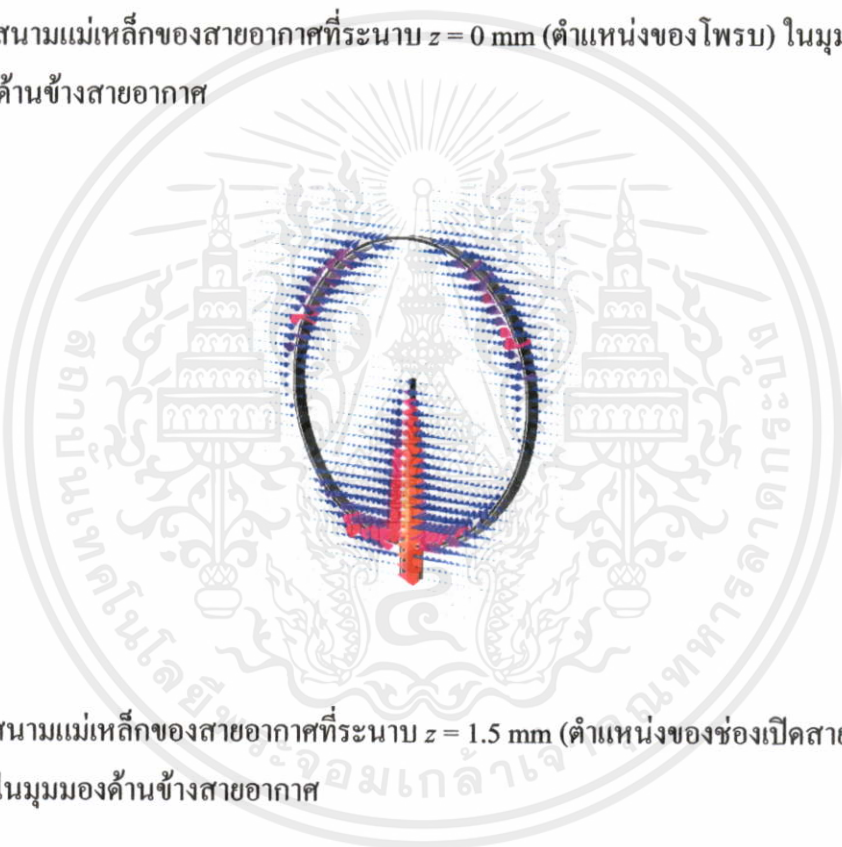
รูปที่ 3.15 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 3.0 \text{ mm}$  (ตำแหน่งอยู่ห่างจากช่องเปิดสายอากาศออกมา  $1.5 \text{ mm}$ ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ

จากรูปที่ 3.13 สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 0 \text{ mm}$  จะมีการเหนี่ยวนำบริเวณโพรง วงแหวนส่วนล่าง และวงแหวนส่วนบน โดยสนามไฟฟ้าจะมีค่าค่อย ๆ เพิ่มมากขึ้นเมื่อสนามไฟฟ้าเคลื่อนที่เดินทางออกจากช่องเปิดสายอากาศ ซึ่งสังเกตได้จากองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในทิศทาง  $z$  ของรูปที่ 3.15 มีความเข้มสนามมากกว่ารูปที่ 3.14 และความเข้มสนามของรูปที่ 3.14 มากกว่ารูปที่ 3.13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.16 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระยะ  $z = 0$  mm (ตำแหน่งของโพรบ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ

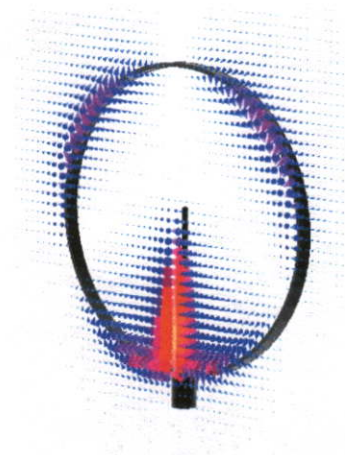


รูปที่ 3.17 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระยะ  $z = 1.5$  mm (ตำแหน่งของช่องเปิดสายอากาศ) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ

จากรูปที่ 3.16 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระยะ  $z = 0$  mm จะมีการเหนี่ยวนำบริเวณโพรบ วงแหวนส่วนล่าง และวงแหวนส่วนบนด้านซ้ายและด้านขวา ความเข้มสนามแม่เหล็กจะเพิ่มมากขึ้น โดยองค์ประกอบสนามแม่เหล็กในทิศทาง  $x$  และ  $y$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อสนามแม่เหล็กเดินทางเคลื่อนที่ออกจากช่องเปิดสายอากาศ ซึ่งสังเกตได้จากความเข้มขององค์ประกอบสนามแม่เหล็กที่มีการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง  $x$  และ  $y$  ของรูปที่ 3.18 มากกว่ารูปที่ 3.17 และความเข้มขององค์ประกอบดังกล่าวของรูปที่ 3.17 มีค่ามากกว่ารูปที่ 3.16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

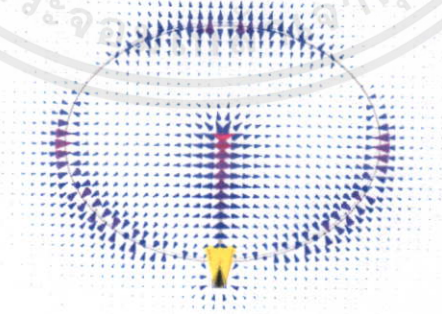
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.18 สนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ระนาบ  $z = 3.0$  mm (ตำแหน่งอยู่ห่างจากช่องเปิดสายอากาศออกมา 1.5 mm) ในมุมมองด้านข้างสายอากาศ

ผลของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เหนี่ยวนำกับขอบวงแหวนจะทำให้เกิดแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง เมื่อพิจารณาความเข้มของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าพบว่าจะมีค่ามาก เมื่อมีตำแหน่งใกล้เคียงโพรบ และความเข้มสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มมากขึ้น เมื่อพิจารณาในตำแหน่งที่อยู่ห่างออกมาจากตำแหน่งของโพรบ ซึ่งแสดงถึงการแพร่กระจายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ค่อยๆ เคลื่อนที่ออกมาจากสายอากาศ

เมื่อสัญญาณที่ถูกป้อนความถี่ 1.92 GHz มีการเปลี่ยนแปลงพลไปพบว่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งช่องเปิดของสายอากาศจะมีการเปลี่ยนแปลงไป โดยมีการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้าที่ขอบของสายอากาศที่ตำแหน่งต่างกันไป ดังแสดงในรูปที่ 3.19 (ก)-(ง)

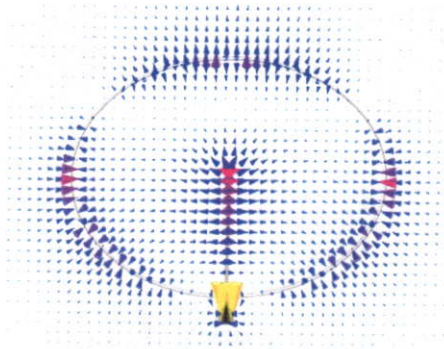


Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) (1)  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 0 degrees  
 Maximum-Zd = 97091.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

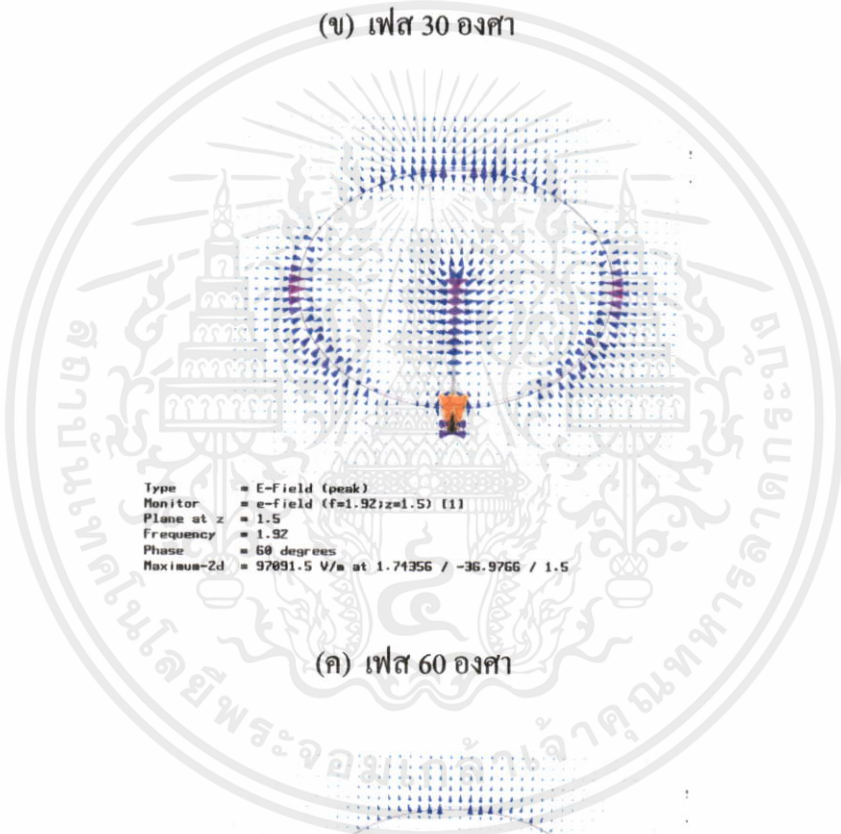
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ก) เฟส 0 องศา



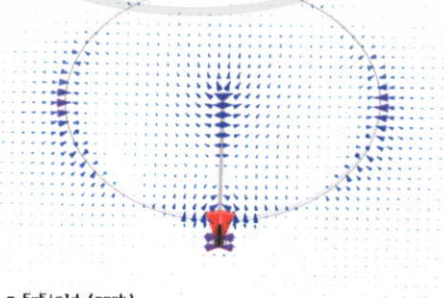
Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 30 degrees  
 Maximum-Zd = 97091.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

(ข) เฟส 30 องศา



Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 60 degrees  
 Maximum-Zd = 97091.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

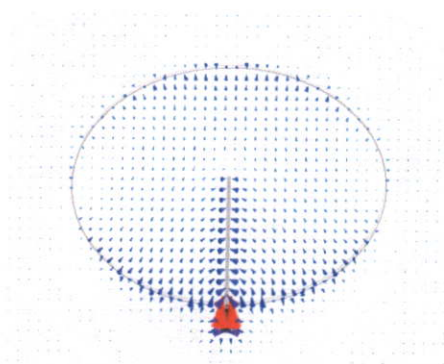
(ค) เฟส 60 องศา



Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 90 degrees  
 Maximum-Zd = 97091.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

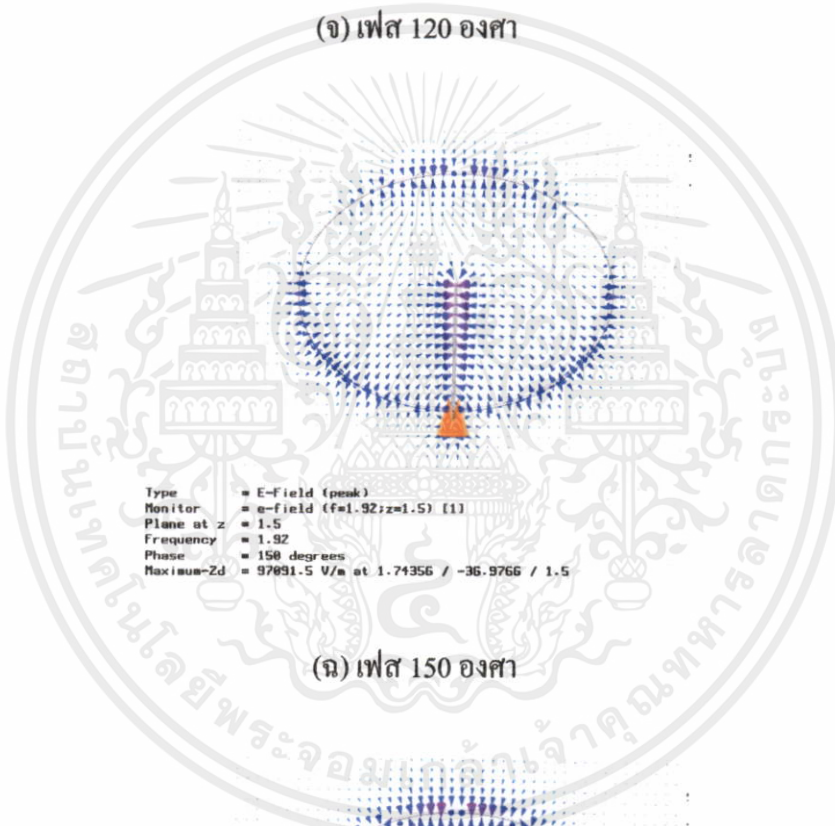
(ง) เฟส 90 องศา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้  
 ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมี เหตุคิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 120 degrees  
 Maximum-Zd = 97891.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

(จ) เฟส 120 องศา



Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 150 degrees  
 Maximum-Zd = 97891.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

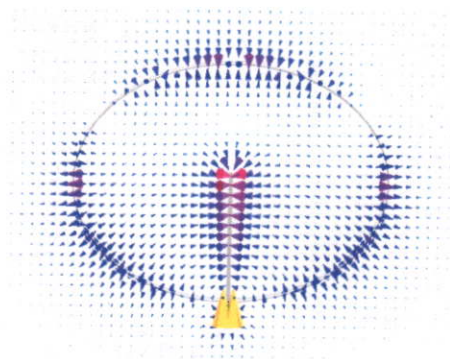
(ฉ) เฟส 150 องศา



Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 180 degrees  
 Maximum-Zd = 97891.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

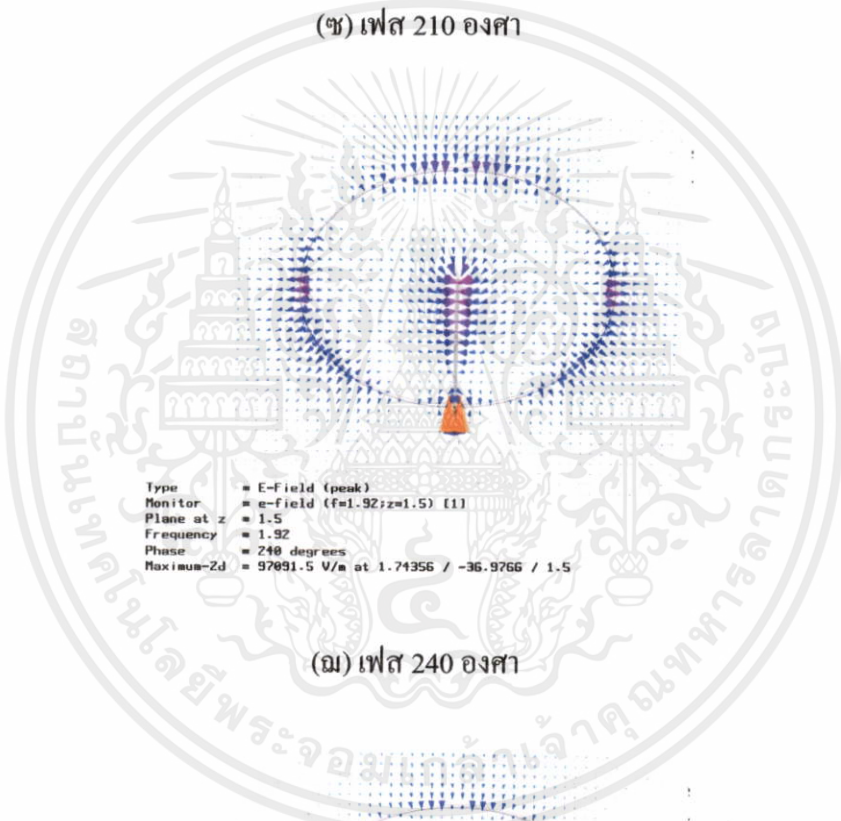
(ช) เฟส 180 องศา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามเผยแพร่เปลี่ยนแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



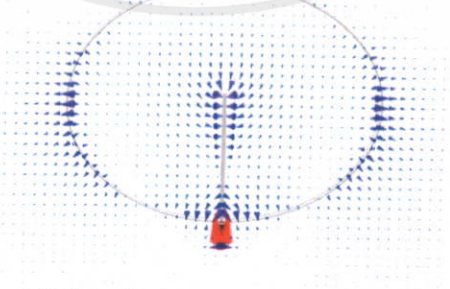
Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 180 degrees  
 Maximum-Zd = 97891.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

(ข) เฟส 210 องศา



Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 240 degrees  
 Maximum-Zd = 97891.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

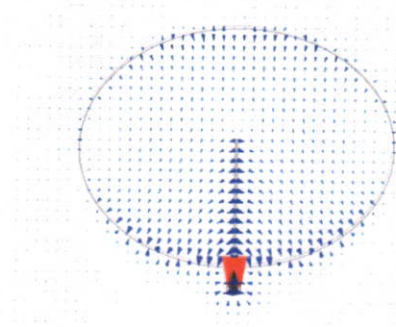
(ค) เฟส 240 องศา



Type = E-Field (peak)  
 Monitor = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]  
 Plane at z = 1.5  
 Frequency = 1.92  
 Phase = 270 degrees  
 Maximum-Zd = 97891.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

(ง) เฟส 270 องศา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

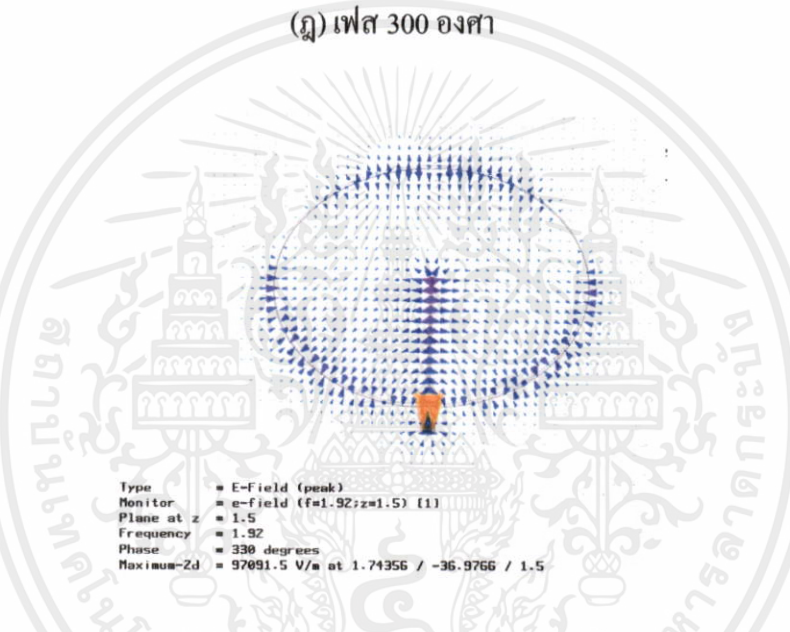


```

Type      = E-Field (peak)
Monitor   = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]
Plane at z = 1.5
Frequency  = 1.92
Phase      = 300 degrees
Maximum-Zd = 97091.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

```

(ก) เฟส 300 องศา



```

Type      = E-Field (peak)
Monitor   = e-field (f=1.92;z=1.5) [1]
Plane at z = 1.5
Frequency  = 1.92
Phase      = 330 degrees
Maximum-Zd = 97091.5 V/m at 1.74356 / -36.9766 / 1.5

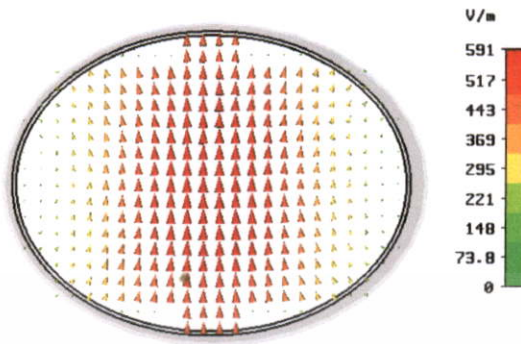
```

(ข) เฟส 330 องศา

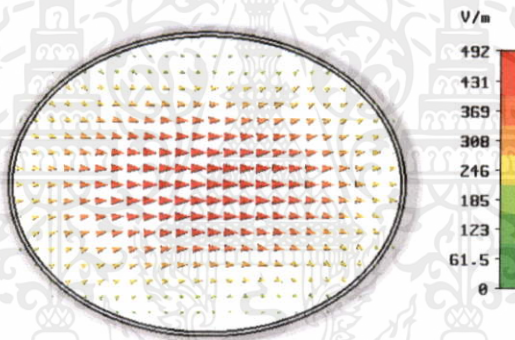
**รูปที่ 3.19** สนามไฟฟ้าของสายอากาศที่เฟสต่างๆ ในระนาบ  $z = 1.5$  mm (ตำแหน่งของช่องเปิดสายอากาศ) ในมุมมองด้านหน้าสายอากาศ เมื่อสัญญาณความถี่ 1.92 GHz

เพื่อที่จะอธิบายลักษณะการกระจายของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนช่องเปิดสายอากาศ จึงได้ทำการหาความสัมพันธ์ของสนามที่เกิดขึ้นกับสนามที่เกิดจากท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี ที่มีขนาดหน้าตัดขวางที่เท่ากับขนาดหน้าตัดของสายอากาศ โดยการใช้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จาก (3.1) ผลที่ได้จากการจำลองแบบพบว่าในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับพื้นที่หน้าตัดสายอากาศมีโหมดคลื่นที่เกิดขึ้น 6 โหมดคลื่นแรก ดังแสดงในรูปที่ 3.20-3.25 มีความถี่ต่ำสุดของแต่ละโหมดที่ได้จากการโปรแกรมคำนวณสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสอดคล้อง

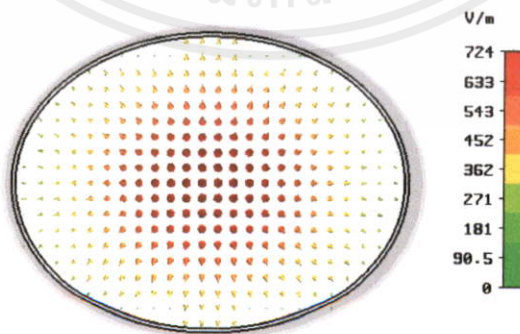
กับค่าที่คำนวณได้ใน(2.91)–(2.96) และเนื่องจากความสัมพันธ์ดังกล่าวทำให้เราสามารถแยกคุณลักษณะของโหมดคลื่นที่ได้



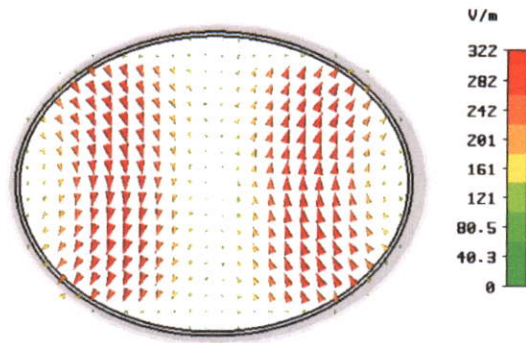
รูปที่ 3.20 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น  $TE_{CI1}$  ความถี่ตัด 1.845 GHz



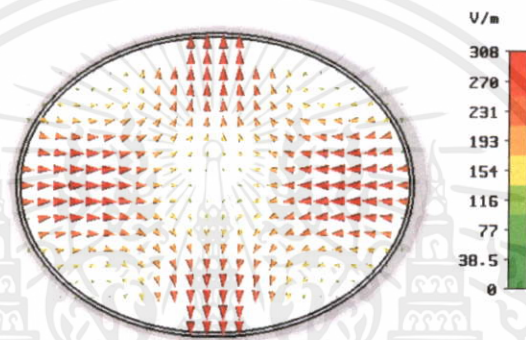
รูปที่ 3.21 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น  $TE_{S11}$  ความถี่ตัด 2.395 GHz



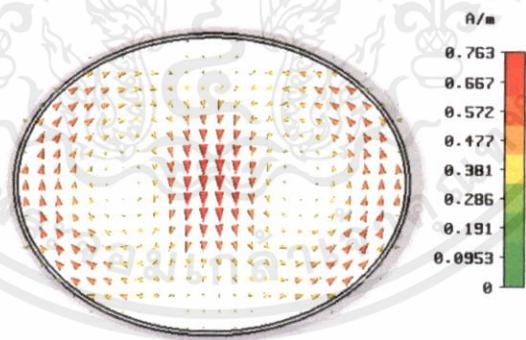
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น รูปที่ 3.22 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น  $TM_{CO1}$  ความถี่ตัด 2.803 GHz



รูปที่ 3.23 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น  $TE_{C21}$  ความถี่ตัด 3.275 GHz



รูปที่ 3.24 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น  $TE_{S21}$  ความถี่ตัด 3.538 GHz



รูปที่ 3.25 สนามไฟฟ้าของโหมดคลื่น  $TM_{C11}$  ความถี่ตัด 4.134 GHz

เมื่อรวบรวมข้อมูล 2 ชุดของสนามที่เกิดจากสายอากาศวงแหวนวงรีและสนามที่เกิดจาก  
 เอกสารนี้เป็นโหมดคลื่นแบบต่างๆ ในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี กำหนดให้เป็นชุดข้อมูล  $x$  และ  $y$  มาจำนวน  $n$  ค่า  
 ไม่ว่าจะกรณีใด ก็คือ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  เมื่อ  $\bar{x}$  และ  $\bar{y}$  เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูล  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ ค่า  
 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ( $r$ ) สามารถคำนวณได้โดยอาศัยสมการดังนี้

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.2)$$

ตารางที่ 3.3 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าที่ช่องเปิดสายอากาศกับสนามไฟฟ้าโหมดคลื่นต่างๆ ในกรณีคิดรวมสนามไฟฟ้าทุกองค์ประกอบ

ชนิดโหมดคลื่น	ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
TE <sub>C11</sub>	-0.0923
TE <sub>S11</sub>	0.0245
TM <sub>C01</sub>	0.2786
TE <sub>C21</sub>	0.0004
TE <sub>S21</sub>	-0.2110
TM <sub>C11</sub>	-0.0002

ตารางที่ 3.4 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าที่ช่องเปิดสายอากาศกับสนามไฟฟ้า ในกรณีคิดสนามไฟฟ้าแยกองค์ประกอบ

ชนิดโหมดคลื่น	Re( $E_x$ )	Re( $E_y$ )	Re( $E_z$ )	Im( $E_x$ )	Im( $E_y$ )	Im( $E_z$ )
TE <sub>C11</sub>	-0.1981	-0.1296	ไม่มี	ไม่มี	ไม่มี	0.1133
TE <sub>S11</sub>	0.0000	-0.0002	-0.0361	ไม่มี	ไม่มี	ไม่มี
TM <sub>C01</sub>	0.4494	0.0408	0.0966	ไม่มี	ไม่มี	ไม่มี
TE <sub>C21</sub>	0.0010	0.0005	-0.0001	ไม่มี	ไม่มี	ไม่มี
TE <sub>S21</sub>	-0.4543	-0.0355	-0.1049	ไม่มี	ไม่มี	ไม่มี
TM <sub>C11</sub>	0.0000	0.0000	0.0000	ไม่มี	ไม่มี	ไม่มี

จากตารางที่ 3.3–3.4 พบว่าโหมดคลื่นที่มีอิทธิพลกับสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนช่องเปิดสายอากาศคือโหมดคลื่น TM<sub>C01</sub> และ TE<sub>S21</sub> โดยเฉพาะในองค์ประกอบจำนวนจริงในทิศทาง x พบว่าโหมดคลื่น TM<sub>C01</sub> มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ 0.4494 และโหมดคลื่น TE<sub>S21</sub> มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ -0.4543 เครื่องหมายลบแสดงว่าความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งสองอยู่ในทิศทางที่ตรงข้ามกัน

เมื่อพิจารณาสนามไฟฟ้าภายในสายอากาศจากการกระตุ้นโดยโพรบไฟฟ้า ทำให้ทราบว่าถึงแม้ว่าขนาดของวงแหวนวงรีจะเท่ากับขนาดท่อนำคลื่นที่ใช้งานในกรณีคลื่นโหมคเป็นใหญ่ แต่เนื่องจากความยาวของวงแหวนวงรีที่สั้นและการกระตุ้นจากโพรบไฟฟ้าเชิงเส้น ทำให้สามารถกระตุ้นเกิดโหมคคลื่นจำนวนมากเกิดขึ้นได้ และคลื่นสามารถแพร่กระจายออกจากช่องเปิดสายอากาศโดยยังไม่เกิดการลดทอนที่สูงเนื่องจากระยะความยาววงแหวนสั้น เมื่อพิจารณาการวางตัวของโพรบไฟฟ้าในแนวตั้งที่บริเวณกึ่งกลางสายอากาศทำให้ทราบว่าสนามไฟฟ้าจะไม่เกิดในทิศทางสัมผัสกับผิวของโพรบไฟฟ้านี้ แต่สนามไฟฟ้าจะเกิดในทิศทางที่ตั้งฉากกับผิวของโพรบไฟฟ้า ซึ่งเมื่อนำผลการคำนวณโหมคคลื่นต่างๆ ที่เกิดขึ้น 6 โหมคคลื่นแรกมาพิจารณา จะพบว่าโหมคคลื่นที่เกิดขึ้นและมีความสำคัญก็คือโหมคคลื่น  $TM_{CO1}$  และ  $TE_{S21}$  สำหรับโหมคคลื่น  $TM_{CO1}$  นั้นในบริเวณกลางช่องเปิดสายอากาศสนามไฟฟ้าที่มีความเข้มสนามสูงจะมีทิศทางตั้งฉากกับช่องเปิดกับสายอากาศจึงทำให้คลื่นโหมคนี้มีโอกาสเกิดการกระตุ้นได้มาก สำหรับโหมคคลื่น  $TE_{S21}$  นั้นบริเวณขอบช่องเปิดสนามไฟฟ้าจะมีทิศทางพุ่งออกจากบริเวณกึ่งกลางช่องเปิดสายอากาศไปยังขอบสายอากาศในแนวแกนหลัก แต่แนวแกนรองของช่องเปิดสายอากาศนั้นสนามไฟฟ้าจะมีทิศทางพุ่งออกจากขอบสายอากาศไปยังบริเวณกึ่งกลางช่องเปิดสายอากาศ ซึ่งจากการคำนวณสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นภายในสายอากาศบริเวณแนวแกนรองของช่องเปิดสายอากาศสนามไฟฟ้าจะมีทิศทางพุ่งออกจากบริเวณกึ่งกลางช่องเปิดสายอากาศไปยังขอบสายอากาศ จึงทำให้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของโหมคคลื่น  $TE_{S21}$  มีเครื่องหมายติดลบ

### 3.4 บทสรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการจำลองแบบเพื่อศึกษาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของสายอากาศแบบสองทิศทางโดยใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรี สำหรับใช้งานในระบบ PCS นอกจากนี้ยังสามารถใช้ประโยชน์จากโปรแกรมวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศแบบสองทิศทางโดยพิจารณาจากสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนสายอากาศ จากผลที่คำนวณได้พบว่าสายอากาศที่มีพารามิเตอร์ที่เหมาะสมมีสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity) เท่ากับ 4.4 dBi มีค่าอัตราขยาย (Gain) เท่ากับ 4.2 dBi ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง (HPBW) ในระนาบสนามไฟฟ้าและในระนาบสนามแม่เหล็ก มีค่า 74 องศาและ 78 องศา ตามลำดับ จากการคำนวณหาความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนช่องเปิดของสายอากาศกับคลื่นโหมคคลื่นต่างๆ ที่เกิดในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัดเท่ากับพื้นที่หน้าตัด (ช่องเปิด) ของสายอากาศ พบว่าสนามไฟฟ้าโหมคคลื่น  $TM_{CO1}$  และ  $TE_{S21}$  มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่สูงเป็นอันดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ ซึ่งทำให้ทราบว่าสนามไฟฟ้าทั้งสองโหมคคลื่นนี้มีอิทธิพลต่อการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศอย่างมาก

# การวิเคราะห์แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก (Dyadic Green's Function)

## 4.1 บทนำ

ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่มีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ ซึ่งหมายความว่าฟังก์ชันกรีนไดแอดิกคือสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดจากไดโพลจิว ในปัญหาที่แตกต่างกันจะมีเงื่อนไขขอบเขตของฟังก์ชันไดแอดิกที่แตกต่างกัน การหาผลเฉลยของปัญหาจะกระทำได้เมื่อทราบค่าฟังก์ชันกรีนไดแอดิกของปัญหานั้นๆ ซึ่งมีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ โดยปริพันธ์ตลอดปริมาตรของแหล่งกำเนิดของผลคูณระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอดิกกับการกระจายความหนาแน่นกระแสที่แหล่งกำเนิดอื่นๆ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์สนามภายในวงแหวนวงรีที่เกิดขึ้นโดยอาศัยหลักการท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีร่วมกับวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก เพื่อใช้สำหรับพิจารณาคุณลักษณะความเป็นโหมดคลื่น สำหรับการวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศจะพิจารณาให้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าแพร่กระจายออกจากช่องเปิดวงรี ซึ่งสามารถคำนวณหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ระยะไกลได้จากค่าสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่อยู่ภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีโดยใช้วิธีการแปลงฟูเรียร์ร่วมกับหลักการสนามสมมูลที่ช่องเปิด

## 4.2 ฟังก์ชันกรีนไดแอดิก

ขั้นตอนการคำนวณสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กโดยใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกสามารถสรุปเป็นบล็อกไดอะแกรมได้ดังแสดงในรูปที่ 4.1 ด้วยขั้นตอนการคำนวณนี้ในที่สุดจะสามารถหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าโดยการปริพันธ์ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกที่เป็นผลตอบสนองจากแหล่งกำเนิดแบบอิมพัลส์ กับแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าหรือแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็กที่ทราบค่า

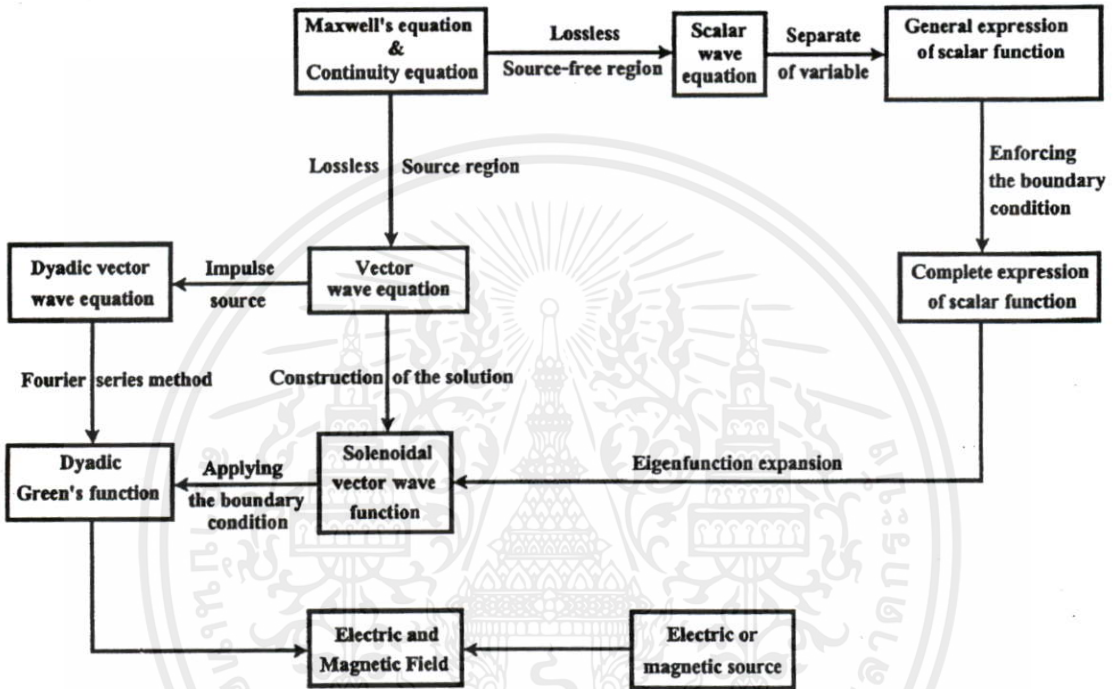
ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเป็นฟังก์ชันหนึ่งที่สำคัญสำหรับการคำนวณหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในตำแหน่งใดๆ ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบ่งออกได้เป็น 4 ชนิด ขึ้นอยู่กับค่าสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่คำนวณหาได้ว่าจะเกิดจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าหรือแหล่งกำเนิดแม่เหล็ก จากทฤษฎีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า สมการแมกซ์เวลล์ในรูปแบบฟังก์ชันกรีนไดแอดิกมีสมการดังต่อไปนี้

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_e = \bar{\bar{G}}_m \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_m = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_e \tag{4.2}$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_e = -\frac{1}{k^2} \nabla \delta(\bar{R} - \bar{R}') \tag{4.3}$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_m = 0 \tag{4.4}$$



รูปที่ 4.1 บล็อกไดอะแกรมการคำนวณสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าโดยใช้ฟังก์ชันกรีนไดเอดิก

- กำหนดให้  $\bar{\bar{G}}_e$  คือ ฟังก์ชันกรีนไดเอดิกแบบไฟฟ้า  
 $\bar{\bar{G}}_m$  คือ ฟังก์ชันกรีนไดเอดิกแบบแม่เหล็ก  
 $k$  คือ ค่าคงที่เฟสของช่องว่างอิสระ โดยที่  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$   
 $\bar{I}$  คือ ตัวประกอบไอดีม (Idem Factor) โดยที่  $\bar{I} = \hat{u}\hat{u} + \hat{v}\hat{v} + \hat{z}\hat{z}$   
 $\delta(\bar{R} - \bar{R}')$  คือ ฟังก์ชันดิเรกเดลต้า (Dirac Delta Function)

จากสมการคลื่นเวกเตอร์ สมการคลื่นไดเอดิกที่ได้มีสมการดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e - k^2 \bar{\bar{G}}_e = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') \tag{4.5}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_m - k^2 \bar{\bar{G}}_m = \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] \tag{4.6}$$

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและข้อมูลของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การแบ่งชนิดของฟังก์ชันกรีนไดโอดิกจะขึ้นกับเงื่อนไขขอบเขตด้วยว่าเป็นเงื่อนไขขอบเขตแบบดิริคเลต์ (Dyadic Dirichlet Boundary Condition) หรือเงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมานน์ (Dyadic Neumann Boundary Condition) สำหรับตัวกลางช่องว่างอิสระ (Free Space) ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกจะมี 2 ชนิด คือฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้า ( $\bar{\bar{G}}_e$ ) และฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็ก ( $\bar{\bar{G}}_m$ ) แต่ละชนิดก็จะแบ่งประเภทได้อีกเป็นชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง สำหรับชนิดที่หนึ่งนั้นจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดิริคเลต์ ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าชนิดที่หนึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์  $\bar{\bar{G}}_{e1}$  และฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กชนิดที่หนึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์  $\bar{\bar{G}}_{m1}$  สมการของฟังก์ชันทั้งสองแสดงได้ดัง (4.7)–(4.8)

$$\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (4.7)$$

$$\hat{n} \times \bar{\bar{G}}_{m1}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (4.8)$$

เมื่อทราบค่า  $\bar{\bar{G}}_{e1}$  และ  $\bar{\bar{G}}_{m1}$  แล้ว จะสามารถหาสนามไฟฟ้าได้จากสมการต่อไปนี้

$$\bar{E}(\bar{R}) = -j\omega\mu_0 \iiint_v \bar{\bar{G}}_{e1}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot \bar{J}(\bar{R}') dV' \quad (4.9)$$

$$\bar{E}(\bar{R}) = - \iint_{S'} \bar{\bar{G}}_{m1}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot \bar{M}(\bar{R}') dS' \quad (4.10)$$

โดยที่  $\bar{J}$  คือความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า และ  $\bar{M}$  คือความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก

ฟังก์ชันกรีนไดโอดิกชนิดที่สองจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์ ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์  $\bar{\bar{G}}_{e2}$  แทนฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าชนิดที่สอง และใช้สัญลักษณ์  $\bar{\bar{G}}_{m2}$  แทนฟังก์ชันกรีนไดโอดิกแม่เหล็กชนิดที่สอง ซึ่งฟังก์ชันทั้งสองนี้สามารถแสดงเป็นสมการตามเงื่อนไขขอบเขตได้ดัง (4.11)–(4.12)

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (4.11)$$

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (4.12)$$

เมื่อทราบค่า  $\bar{\bar{G}}_{e2}$  และ  $\bar{\bar{G}}_{m2}$  แล้ว จะสามารถหาสนามแม่เหล็กได้จากสมการต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเอกสารทุกครั้งที่มีการ (4.13) ใช้

$$\bar{H}(\bar{R}) = \iiint_v \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot \bar{J}(\bar{R}') dV' \quad (4.13)$$

$$\bar{H}(\bar{R}) = -j\omega\epsilon_0 \iint_{S'} \bar{\bar{G}}_{e2}(\bar{R}, \bar{R}') \cdot \bar{M}(\bar{R}') dS' \quad (4.14)$$

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอคชันชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง มีดังนี้

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e2} = \bar{\bar{G}}_{m1} \quad (4.15)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{e1} = \bar{\bar{G}}_{m2} \quad (4.16)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2} = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_{e1} \quad (4.17)$$

$$\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m1} = \bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + k^2 \bar{\bar{G}}_{e2} \quad (4.18)$$

### 4.3 ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี (Vector Wave Functions in an Elliptical Cylinder Coordinate System)

เมื่อทราบค่าฟังก์ชันคลื่นสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี (จากหัวข้อ 2.3.2) ก็จะทำให้สามารถหาฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีได้ สมการคลื่นสเกลาร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรีมีสมการดังนี้

$$\frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \kappa^2 \psi = 0 \quad (4.19)$$

โดยที่

$$\beta = c(\cosh^2 u - \cos^2 v)^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

สำหรับพารามิเตอร์  $u, v, z$  และ  $c$  นั้นได้นิยามไว้แล้วในหัวข้อที่ 2.3.1

จาก [13] ค่าฟังก์ชันเจาะจง (Eigen Function) ของ (4.19) จะถูกเรียกว่าฟังก์ชันคลื่นทรงกระบอกวงรี ซึ่งมีสมการดังนี้

$$\psi_{e_{m\lambda}}^e(h) = S_{e_{m\lambda}}^e(v) R_{e_{m\lambda}}^e(u) e^{-jhz} \quad (4.21)$$

กำหนดให้

$$h^2 + \lambda^2 = \kappa^2 \quad (4.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันคณิตศาสตร์ที่ใช้นี้ประกอบด้วยฟังก์ชันเมทริวชนิดต่างๆ ได้แก่ ผลเฉลยแบบคาบของฟังก์ชันเชิงมุมแบบคู่ ( $S_{em\lambda}(v)$ ), ผลเฉลยแบบคาบของฟังก์ชันเชิงมุมแบบคี่ ( $S_{om\lambda}(v)$ ), ผลเฉลยแบบไม่มีคาบของฟังก์ชันเชิงรัศมีแบบคู่ ( $R_{em\lambda}(u)$ ) และผลเฉลยแบบไม่มีคาบของฟังก์ชันเชิงรัศมีแบบคี่ ( $R_{om\lambda}(u)$ ) ซึ่งสถาบันมาตรฐานแห่งชาติ (National Bureau of Standards) ได้ให้นิยามฟังก์ชันเหล่านี้ดังแสดงในสมการที่ (4.23), (4.24), (4.27) และ (4.28) [14]

ฟังก์ชันเมทริวเชิงมุมแบบคาบสามารถเขียนในรูปแบบอนุกรมโคไซน์สำหรับกรณีฟังก์ชันคู่และอนุกรมไซน์กรณีฟังก์ชันคี่ได้ดังนี้

$$S_{em\lambda}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^m(\lambda) \cos nv \quad , m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

$$S_{om\lambda}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^m(\lambda) \sin nv \quad , m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.24)$$

กำหนดให้  $\sum_{n=0}^{\infty}$  คือการอนุกรมกันของ  $n$  จากทุกเลขคู่ เมื่อ  $m$  เป็นเลขคู่ และเป็นการอนุกรมกันของ  $n$  จากทุกเลขคี่ เมื่อ  $m$  เป็นเลขคี่ สมบัติ  $D_n^m(\lambda)$  และ  $F_n^m(\lambda)$  จะถูกนอร์มัลไลซ์ ซึ่งมีสมการดังนี้

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n^m(\lambda) = 1 \quad (4.25)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n F_n^m(\lambda) = 1 \quad (4.26)$$

ฟังก์ชันเมทริวเชิงรัศมีในรูปแบบอนุกรมของฟังก์ชันเบสเซลมีสมการดังนี้

$$R_{em\lambda}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{m-n} D_n^m(\lambda) J_n[c\lambda \cosh(u)] \quad (4.27)$$

$$R_{om\lambda}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh(u) \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{n-m} F_n^m(\lambda) J_n[c\lambda \cosh(u)] \quad (4.28)$$

สมการแสดงคุณสมบัติออร์โธโกนัล (Orthogonality Properties) ของฟังก์ชันเมทริวเชิงมุมมีดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_0^{2\pi} S_{em\lambda}(v) S_{om'\lambda}(v) dv = 0 \quad (4.29)$$

$$\int_0^{2\pi} S_{em\lambda}(v) S_{em'\lambda}(v) dv = \begin{cases} 0 & , m \neq m' \\ I_{em\lambda} & , m = m' \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\int_0^{2\pi} S_{om\lambda}(v)S_{om'\lambda}(v)dv = \begin{cases} 0 & , m \neq m' \\ I_{om\lambda} & , m = m' \end{cases} \quad (4.31)$$

กำหนดให้

$$I_{em\lambda} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \delta_0) [D_n^m(\lambda)]^2 \quad (4.32)$$

$$I_{om\lambda} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} [F_n^m(\lambda)]^2 \quad (4.33)$$

โดยที่  $\delta_0 = 1$  เมื่อ  $n = 0$  และ  $\delta_0 = 0$  เมื่อ  $n \neq 0$

ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์มีสมการดังนี้

$$\bar{M}_{e_{om\lambda}}(h) = \nabla \times \left[ \psi_{e_{om\lambda}}(h) \hat{z} \right] \quad (4.34)$$

$$\bar{N}_{e_{om\lambda}}(h) = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \bar{M}_{e_{om\lambda}}(h) \quad (4.35)$$

จาก (4.34)–(4.35) จะได้

$$\bar{M}_{e_{om\lambda}}(h) = \nabla \times \left[ S_{e_{om\lambda}}(v) R_{e_{om\lambda}}(u) e^{-jhz} \hat{z} \right] \quad (4.36)$$

$$\bar{N}_{e_{om\lambda}}(h) = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times \left[ S_{e_{om\lambda}}(v) R_{e_{om\lambda}}(u) e^{-jhz} \hat{z} \right] \quad (4.37)$$

ดังนั้นจะได้สมการที่สมบูรณ์ของฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกวงรี ดังต่อไปนี้

$$\bar{M}_{e_{om\lambda}}(h) = \frac{1}{\beta} \left[ R_{e_{om\lambda}}(u) \frac{\partial S_{e_{om\lambda}}(v)}{\partial v} \hat{u} - S_{e_{om\lambda}}(v) \frac{\partial R_{e_{om\lambda}}(u)}{\partial u} \hat{v} \right] e^{-jhz} \quad (4.38)$$

$$\bar{N}_{e_{om\lambda}}(h) = \frac{1}{\kappa\beta} \left[ -jh S_{e_{om\lambda}}(v) \frac{\partial R_{e_{om\lambda}}(u)}{\partial u} \hat{u} - jh R_{e_{om\lambda}}(u) \frac{\partial S_{e_{om\lambda}}(v)}{\partial v} \hat{v} + \beta\lambda^2 R_{e_{om\lambda}}(u) S_{e_{om\lambda}}(v) \hat{z} \right] e^{-jhz} \quad (4.39)$$

ในการวิเคราะห์ปัญหาที่กำหนดให้มีลักษณะเป็นท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี มีความยาวในแนวแกนทิศ  $z$  มีโครงสร้างเป็นท่อตัวนำสมบูรณ์ทรงกระบอกที่มีปลายเปิดทั้งสองข้าง

#### 4.4 สนามแม่เหล็กภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี

โดยอาศัยวิธี  $\vec{G}_m$  ทำให้ได้การกระจายฟังก์ชันเงาของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแม่เหล็กดังแสดงในสมการต่อไปนี้

$$\nabla \times [\vec{I} \delta(\vec{R} - \vec{R}')] = \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \bar{N}_{e_{m\lambda}}(h) \bar{A}_{e_{m\lambda}}(h) + \bar{M}_{e_{m\lambda}}(h) \bar{B}_{e_{m\lambda}}(h) \right] \quad (4.40)$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์เวกเตอร์  $\bar{A}$  และ  $\bar{B}$  คือ

$$\bar{A}_{e_{m\lambda}}(h) = \frac{1}{\pi^2 \lambda I_{e_{m\lambda}}} \nabla' \times \bar{N}'_{e_{m\lambda}}(-h) = \frac{\kappa}{\pi^2 \lambda I_{e_{m\lambda}}} \bar{M}'_{e_{m\lambda}}(-h) \quad (4.41)$$

$$\bar{B}_{e_{m\lambda}}(h) = \frac{1}{\pi^2 \lambda I_{e_{m\lambda}}} \nabla' \times \bar{M}'_{e_{m\lambda}}(-h) = \frac{\kappa}{\pi^2 \lambda I_{e_{m\lambda}}} \bar{N}'_{e_{m\lambda}}(-h) \quad (4.42)$$

กำหนดให้  $\vec{G}_{HJ}$  เป็นฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กที่เกิดจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้า ดังนั้นจะได้

$$\vec{G}_{HJ}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{G}_{m_2}(\vec{R}, \vec{R}') \quad (4.43)$$

$\vec{G}_{HJ}$  มีสมการดังนี้

$$\vec{G}_{HJ}(\vec{R}, \vec{R}') = \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\kappa}{\pi^2 \lambda I_{e_{m\lambda}} (\kappa^2 - k^2)} \bar{N}_{e_{m\lambda}}(h) \bar{M}'_{e_{m\lambda}}(-h) + \frac{\kappa}{\pi^2 \lambda I_{e_{m\lambda}} (\kappa^2 - k^2)} \bar{M}_{e_{m\lambda}}(h) \bar{N}'_{e_{m\lambda}}(-h) \right] \quad (4.44)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การปริพันธ์แบบฟูเรียร์ (Fourier Integration) ใน (4.44) สามารถหาค่าได้จากระเบียบวิธีปริพันธ์คอนทัวร์ (Contour Integration) โพลของตัวถูกปริพันธ์ (Pole of Integrand) จะมีค่าดังนี้

$$h^2 = \pm\sqrt{k^2 - \zeta^2} \quad (4.45)$$

จัดรูป  $\bar{G}_{HJ}^\pm$  ใหม่เป็น

$$\bar{G}_{HJ}^\pm(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{e_{om\zeta}} \bar{N}_{e_{om\zeta}}(\pm h) \bar{M}'_{e_{om\zeta}}(\mp h) + c_{e_{om\zeta}} \bar{M}_{e_{om\zeta}}(\pm h) \bar{N}'_{e_{om\zeta}}(\mp h) \right] \quad \begin{matrix} z > z' \\ z < z' \end{matrix} \quad (4.46)$$

สมการที่ปรากฏข้างบนจะใช้ในกรณี  $z > z'$  และสมการที่ปรากฏข้างล่างจะใช้ในกรณี  $z < z'$  กำหนดให้

$$c_{e_{om\zeta}} = \frac{-jk}{2\pi\zeta^2 I_{e_{om\zeta}}} \quad (4.47)$$

$$I_{e_{om\zeta}} = \int_0^{2\pi} S_{e_{om\zeta}}^2(v) dv \quad (4.48)$$

$$I_{em\zeta} = \pi \sum_n' (1 + \delta_0) (D_n^m)^2 \quad (4.49)$$

$$I_{om\zeta} = \pi \sum_n' (F_n^m)^2 \quad (4.50)$$

จาก (4.46) จะได้พจน์ในเครื่องหมายวงเล็บ ในรูปของโหมคคลื่นแบ่งได้เป็น 4 พจน์ย่อยดังนี้

$$\begin{aligned} & c_{e_{om\zeta}} \bar{N}_{e_{om\zeta}}(\pm h) \bar{M}'_{e_{om\zeta}}(\mp h) + c_{e_{om\zeta}} \bar{M}_{e_{om\zeta}}(\pm h) \bar{N}'_{e_{om\zeta}}(\mp h) \\ &= \left[ c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(+h) \bar{M}'_{em\zeta}(-h) + c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(+h) \bar{M}'_{om\zeta}(-h) \right] \text{พจน์ที่ 1} \\ &+ \left[ c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(+h) \bar{N}'_{em\zeta}(-h) + c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta}(+h) \bar{N}'_{om\zeta}(-h) \right] \text{พจน์ที่ 2} \quad z > z' \\ &= \left[ c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(-h) \bar{M}'_{em\zeta}(+h) + c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(-h) \bar{M}'_{om\zeta}(+h) \right] \text{พจน์ที่ 1'} \\ &+ \left[ c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(-h) \bar{N}'_{em\zeta}(+h) + c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta}(-h) \bar{N}'_{om\zeta}(+h) \right] \text{พจน์ที่ 2'} \quad z < z' \end{aligned} \quad (4.51)$$

จากพจน์ที่ 1 และพจน์ที่ 1' ของ (4.51) มีค่า

$$c_{e_{om\zeta}} \bar{N}_{e_{om\zeta}}(\pm h) \bar{M}'_{e_{om\zeta}}(\mp h) = \frac{c_{e_{om\zeta}}}{\kappa\beta} \left\{ -j(\pm h) S_{e_{om\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{om\zeta}}(u)}{\partial u} \hat{u} - j(\pm h) R_{e_{om\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{om\zeta}}(v)}{\partial v} \hat{v} \right.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ลิขสิทธิ์ทั้งหมดเป็นของเจ้าของเอกสารทุกฉบับให้นำไปใช้

$$\begin{aligned}
& +\beta\zeta^2 R_{e_{o_{m\zeta}}}(u) S_{e_{o_{m\zeta}}}(v) \hat{z} \left. \right\} e^{-j(\pm h)z} \\
& \times \frac{1}{\beta} \left\{ R_{e_{o_{m\zeta}}}(u') \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v')}{\partial v'} \hat{u} - S_{e_{o_{m\zeta}}}(v') \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u')}{\partial u'} \hat{v} \right\} e^{-j(\mp h)z'} \\
& = \frac{c_{e_{o_{m\zeta}}}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(\pm z \mp z')} \left[ \hat{u} \hat{u} \left( -j(\pm h) S_{e_{o_{m\zeta}}}(v) \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u)}{\partial u} R_{e_{o_{m\zeta}}}(u') \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v')}{\partial v'} \right) \right. \\
& + \hat{u} \hat{v} \left( j(\pm h) S_{e_{o_{m\zeta}}}(v) \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u)}{\partial u} S_{e_{o_{m\zeta}}}(v') \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u')}{\partial u'} \right) \\
& + \hat{v} \hat{u} \left( -j(\pm h) R_{e_{o_{m\zeta}}}(u) \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v)}{\partial v} R_{e_{o_{m\zeta}}}(u') \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v')}{\partial v'} \right) \\
& + \hat{v} \hat{v} \left( j(\pm h) R_{e_{o_{m\zeta}}}(u) \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v)}{\partial v} S_{e_{o_{m\zeta}}}(v') \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u')}{\partial u'} \right) \\
& + \hat{z} \hat{u} \left( \beta\zeta^2 R_{e_{o_{m\zeta}}}(u) S_{e_{o_{m\zeta}}}(v) R_{e_{o_{m\zeta}}}(u') \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v')}{\partial v'} \right) \\
& \left. + \hat{z} \hat{v} \left( -\beta\zeta^2 R_{e_{o_{m\zeta}}}(u) S_{e_{o_{m\zeta}}}(v) S_{e_{o_{m\zeta}}}(v') \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u')}{\partial u'} \right) \right] \tag{4.52}
\end{aligned}$$

จากพจน์ที่ 2 และพจน์ที่ 2' ของ (4.51) มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{e_{o_{m\zeta}}} \bar{M}_{e_{o_{m\zeta}}}(\pm h) \bar{N}'_{e_{o_{m\zeta}}}(\mp h) & = \frac{c_{e_{o_{m\zeta}}}}{\beta} \left\{ R_{e_{o_{m\zeta}}}(u) \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v)}{\partial v} \hat{u} - S_{e_{o_{m\zeta}}}(v) \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u)}{\partial u} \hat{v} \right\} e^{-j(\pm h)z} \\
& \times \frac{1}{\kappa\beta} \left\{ -j(\mp h) S_{e_{o_{m\zeta}}}(v') \frac{\partial R_{e_{o_{m\zeta}}}(u')}{\partial u'} \hat{u} - j(\mp h) R_{e_{o_{m\zeta}}}(u') \frac{\partial S_{e_{o_{m\zeta}}}(v')}{\partial v'} \hat{v} \right\}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้เฉพาะเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามคัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_{e_{m\zeta}}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(\pm z \mp z')} \left[ \hat{u}\hat{u} \left( \pm jh R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} S_{e_{m\zeta}}(v') \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u')}{\partial u'} \right) \right. \\
&+ \hat{u}\hat{v} \left( \pm jh R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} R_{e_{m\zeta}}(u') \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v')}{\partial v'} \right) \\
&+ \hat{v}\hat{u} \left( \mp jh S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} S_{e_{m\zeta}}(v') \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u')}{\partial u'} \right) \\
&+ \hat{v}\hat{v} \left( \mp jh S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} R_{e_{m\zeta}}(u') \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v')}{\partial v'} \right) \\
&+ \hat{u}\hat{z} \left( \beta\zeta^2 R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} R_{e_{m\zeta}}(u') S_{e_{m\zeta}}(v') \right) \\
&\left. + \hat{v}\hat{z} \left( -\beta\zeta^2 S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} R_{e_{m\zeta}}(u') S_{e_{m\zeta}}(v') \right) \right] \quad (4.53)
\end{aligned}$$

#### 4.4.1 กรณีโหมดคลื่นคู่

ผลคูณของ (4.23) และ (4.27) มีค่า

$$R_{e_{m\zeta}}(u) S_{e_{m\zeta}}(v) = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_n (i)^{n-m} D_n^m \cos n\phi J_n(\zeta r) \quad (4.54)$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta} (+h) \bar{M}'_{em\zeta} (-h) \hat{u}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left( -jh S_{em\zeta}(v) \frac{\partial R_{em\zeta}(u)}{\partial u} R_{em\zeta}(u') \frac{\partial S_{em\zeta}(v')}{\partial v'} \right) \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left( -jh \sum_n D_n^m \cos nv \right) \frac{\partial}{\partial u} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_n (i)^{m-n} D_n^m J_n(\zeta \cosh u) \right) \\
&\times \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_n (i)^{m-n} D_n^m J_n(\zeta \cosh u') \right) \frac{\partial}{\partial v'} \left[ \sum_n D_n^m \cos nv' \right] \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left( \frac{jh\pi}{2} \sum_n D_n^m \cos nv \right) \frac{\partial}{\partial u} \left[ \sum_n (i)^{m-n} D_n^m J_n(\zeta \cosh u) \right] \\
&\times \left( \sum_n (i)^{m-n} D_n^m J_n(\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n D_n^m n \sin nv' \right) \quad (4.55)
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
 c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(+h) \bar{M}'_{em\zeta}(-h)^{\hat{v}\hat{u}} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left( -jh \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \\
 &\times \frac{\partial}{\partial v} \left[ \sum_n 'D_n^m \cos nv \right] \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \frac{\partial}{\partial v'} \left[ \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right] \\
 &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left( \frac{-jh\pi}{2} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right) \\
 &\times \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{z}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
 c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(+h) \bar{M}'_{em\zeta}(-h)^{\hat{z}\hat{u}} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left( \beta\zeta^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \\
 &\times \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right) \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \frac{\partial}{\partial v'} \left[ \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right] \\
 &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left( \frac{-\beta\zeta^2\pi}{2} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right) \\
 &\times \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right)
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
 c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(-h) \bar{M}'_{em\zeta}(+h)^{\hat{u}\hat{u}} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \\
 &\times \left\{ jh \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right] \right. \\
 &\times \left. \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right) \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left(\frac{-jh\pi}{2}\right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
 &\times \left. \left. \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{u}$  มีค่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ไม่ควรเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์อื่นใด (4.58)

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(-h) \bar{M}'_{em\zeta}(+h) \hat{v}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \\
&\times \left\{ jh \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial}{\partial v} \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right) \right. \\
&\times \left. \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right) \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left(\frac{jh\pi}{2}\right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right. \\
&\times \left. \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \tag{4.59}
\end{aligned}$$

จาก (4.53) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{z}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(-h) \bar{M}'_{em\zeta}(+h) \hat{z}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \\
&\times \left\{ \beta^2 \zeta^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m \cos nv \right. \\
&\times \left. \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right\} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left(\frac{-\beta^2 \zeta^2 \pi}{2}\right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m \cos nv \right. \\
&\times \left. \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \tag{4.60}
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(+h) \bar{N}'_{em\zeta}(-h) \hat{u}\hat{u} &= \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \left( jh R_{em\zeta}(u) \frac{\partial S_{em\zeta}(v)}{\partial v} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right) \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left(\frac{-jh\pi}{2}\right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'n D_n^m \sin nv \right) \right. \\
&\times \left. \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \right\} \tag{4.61}
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{u}$  มีค่า

$$c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(+h) \bar{N}'_{em\zeta}(-h) \hat{v}\hat{u} = \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \left( -jh S_{em\zeta}(v) \frac{\partial R_{em\zeta}(u)}{\partial u} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \right\} \quad (4.62)
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(-h) \bar{N}'_{em\zeta}(+h) \hat{u}\hat{u} &= \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \left( -jhR_{em\zeta}(u) \frac{\partial S_{em\zeta}(v)}{\partial v} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right) \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'nD_n^m \sin nv \right) \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \right\} \quad (4.63)
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(-h) \bar{N}'_{em\zeta}(+h) \hat{v}\hat{v} &= \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \left( jhS_{em\zeta}(v) \frac{\partial R_{em\zeta}(u)}{\partial u} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right) \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left[ \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right] \right\} \quad (4.64)
\end{aligned}$$

#### 4.4.2 กรณีโหมดคลื่นที่

ผลคูณของ (4.24) และ (4.28) มีค่า

$$S_{om\zeta}(v) R_{om\zeta}(u) = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m \sin n\phi J_n(\zeta r) \quad (4.65)$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(-h) \bar{M}'_{om\zeta}(+h) \hat{u}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ jhS_{om\zeta}(v) \frac{\partial R_{om\zeta}(u)}{\partial u} R_{om\zeta}(u') \frac{\partial S_{om\zeta}(v')}{\partial v'} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{j h \pi \tanh u'}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \right\} \\
&\times \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \left( \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(-h) \bar{M}'_{om\zeta}(+h) \hat{v}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \\
&\times \left\{ \left( j h \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \frac{\partial}{\partial v} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right) \right. \\
&\times \left. \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right) \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{j h \pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right\} \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right) \\
&\times \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{z}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(-h) \bar{M}'_{om\zeta}(+h) \hat{z}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \\
&\times \left\{ \left( \beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right) \right. \\
&\times \left. \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right) \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{\beta\zeta^2 \pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right\} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right) \\
&\times \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

เอกสารจาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า  $\beta\zeta^2$  นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(+h) \bar{M}'_{om\zeta}(-h) \hat{u}\hat{u} = \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ -jh \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
& \times \left. \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right) \right\} \\
& = \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
& \times \left. \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(+h) \bar{M}'_{om\zeta}(-h)^{\hat{v}} & = \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \\
& \times \left\{ -jh \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial}{\partial v} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right) \right. \\
& \times \left. \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right) \right\} \\
& = \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
& \times \left. \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \quad (4.70)
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 1 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{z}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(+h) \bar{M}'_{om\zeta}(-h)^{\hat{z}} & = \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \\
& \times \left\{ \beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m \sin nv \right. \\
& \times \left. \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial}{\partial v'} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right) \right\} \\
& = \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{\beta\zeta^2\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m \sin nv \right. \\
& \times \left. \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \quad (4.71)
\end{aligned}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta} (+h) \bar{N}'_{om\zeta} (-h) \overset{iii}{=} & \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \left( jh R_{om\lambda}(u) \frac{\partial S_{om\zeta}(v)}{\partial v} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right) \\
= & \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial}{\partial v} \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right) \right. \\
& \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left. \right\} \\
= & \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
& \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2 ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta} (+h) \bar{N}'_{om\zeta} (-h) \overset{iii}{=} & \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \left( -jh S_{om\zeta}(v) \frac{\partial R_{om\zeta}(u)}{\partial u} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right) \\
= & \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
& \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta} (-h) \bar{N}'_{om\zeta} (+h) \overset{iii}{=} & \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \left( -jh R_{om\zeta}(u) \frac{\partial S_{om\zeta}(v)}{\partial v} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right) \\
= & \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right. \\
& \times \sum_n 'F_n^m n \cos nv \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

จาก (4.51) พจน์หน้าของพจน์ที่ 2' ในองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta} (-h) \bar{N}'_{om\zeta} (+h) \overset{iii}{=} & \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \left( jh S_{om\zeta}(v) \frac{\partial R_{om\zeta}(u)}{\partial u} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right) \\
= & \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \} \quad (4.75)$$

ดังนั้นสนามแม่เหล็กที่เกิดจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าจะสามารถหาได้จาก

$$\bar{H}(u, v, z) = \int_{a-l}^a \bar{G}_{HJ}(u, v, z; u', v', z') \cdot J_u(u', v', z') \hat{u} du' \quad (4.76)$$

กำหนดให้

$$\bar{J}(R') = J_m \sin[k(u' - u + l)] \hat{u} \quad ; u - l \leq u' \leq u, v' = \frac{\pi}{2}, z' = 0 \quad (4.77)$$

โดยที่กระแสสูงสุด  $J_m = 1$

เนื่องจากแหล่งกำเนิดมีทิศทางเดียวคือ  $\hat{u}$  จาก (4.76)  $\bar{G}_{HJ}$  จะมีองค์ประกอบไดแอดิกที่ใช้ในการคำนวณเพียงองค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$ ,  $\hat{v}\hat{u}$  และ  $\hat{z}\hat{u}$  ดังนั้นจะได้

$$\bar{H}^\pm(\bar{R}) = \int_{u-l}^u (G_{HJ}^{uu\pm} \hat{u}\hat{u} + G_{HJ}^{vv\pm} \hat{v}\hat{u} + G_{HJ}^{zz\pm} \hat{z}\hat{u}) \cdot J_u(u') \hat{u} du' \quad \begin{matrix} z > z' \\ < \end{matrix} \quad (4.78)$$

กำหนดให้  $\bar{G}_{HJ}^\pm$  มีค่าเป็น

$$\bar{G}_{HJ}^\pm(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{e_{m\zeta}} \bar{N}_{e_{m\zeta}} (\pm h) \bar{M}'_{e_{m\zeta}} (\mp h) + c_{e_{m\zeta}} \bar{M}_{e_{m\zeta}} (\pm h) \bar{N}'_{e_{m\zeta}} (\mp h) \right] \quad \begin{matrix} z > z' \\ < \end{matrix} \quad (4.79)$$

$$\bar{G}_{HJ}^+(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{e_{m\zeta}} \bar{N}_{e_{m\zeta}} (+h) \bar{M}'_{e_{m\zeta}} (-h) + c_{e_{m\zeta}} \bar{M}_{e_{m\zeta}} (+h) \bar{N}'_{e_{m\zeta}} (-h) \right] \quad z > z' \quad (4.80)$$

$$G_{uu}^{uu+} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right] \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \right\} \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right.$$

$$\times \left. \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right) \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \right\} \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารต้นฉบับที่จัดทำขึ้นเพื่อการวิจัยและใช้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆก็ตาม ผู้จัดทำขอสงวนสิทธิ์ในการแก้ไขและปรับปรุงเนื้อหา และขอแจ้งถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'n D_n^m \sin nv \right) \right. \\
& \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
& \times \sum_r 'F_r^m \sin rv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_r '(i)^{r-m} F_r^m J_r(c\lambda \cosh u') \right) \Big\} \Big\} \quad (4.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{HI}^{vu+} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right) \right. \right. \\
& \times \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right) \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
& \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
& \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
& \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \Big\} \Big\} \quad (4.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{HI}^{zu+} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{-\beta\zeta^2\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right) \right. \right. \\
& \times \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right) \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{\beta\zeta^2\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m \sin nv \right. \\
& \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \Big\} \Big\} \quad (4.83)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆก็ตาม หากพบการเปลี่ยนแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทำนองเดียวกับ (4.80) จะได้ว่า

$$\bar{G}_{HJ}^-(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{e_{om\zeta}} \bar{N}_{e_{om\zeta}} (-h) \bar{M}'_{e_{om\zeta}} (+h) + c_{e_{om\zeta}} \bar{M}_{e_{om\zeta}} (-h) \bar{N}'_{e_{om\zeta}} (+h) \right] \quad z < z' \quad (4.84)$$

ในทำนองเดียวกับ (4.81) จะได้

$$\begin{aligned} G_{HJ}^{uu-} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \right. \\ & \times \left. \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \\ & + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z-z')} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi \tanh u'}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \right\} \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \\ & \times \left( \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right) \\ & + \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'n D_n^m \sin nv \right) \right. \\ & \times \left. \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \right\} \\ & + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{-jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\ & \times \left. \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.85)$$

ในทำนองเดียวกับ (4.82) จะได้

$$\begin{aligned} G_{HJ}^{vu-} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right. \right. \\ & \times \left. \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \\ & + \left\{ \frac{c_{om\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right\} \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right) \\ & \times \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right) \\ & + \left\{ \frac{c_{em\zeta}}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{jh\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\ & \times \left. \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{c_{om}\zeta}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \frac{j h \pi}{2} \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial}{\partial u} \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \right. \\
& \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial}{\partial u'} \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \right\} \quad (4.86)
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกับ (4.83) จะได้

$$\begin{aligned}
G_{HJ}^{zu-} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{c_{em}\zeta}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{-\beta^2 \zeta^2 \pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m \cos nv \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \right. \\
& + \left\{ \frac{c_{om}\zeta}{\kappa\beta^2} e^{-jh(z'-z)} \right\} \left\{ \left( \frac{\beta \zeta^2 \pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right) \right. \\
& \left. \left. \times \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right) \left( \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right) \right\} \right] \quad (4.87)
\end{aligned}$$

จาก (4.78)

$$\bar{H}^{\pm}(\bar{R}) = \int_{u-l}^l (G_{HJ}^{uu\pm} \hat{u}\hat{u} + G_{HJ}^{vv\pm} \hat{v}\hat{v} + G_{HJ}^{zz\pm} \hat{z}\hat{z}) \cdot J_u(u') \hat{u} du' \quad z > z' \quad (4.88)$$

$$H_u^+ = \int_{u-l}^l G_{HJ}^{uu+} J_u(u') du' \quad z > z' \quad (4.89)$$

$$H_u^- = \int_{u-l}^l G_{HJ}^{uu-} J_u(u') du' \quad z < z' \quad (4.90)$$

$$H_v^+ = \int_{u-l}^l G_{HJ}^{vv+} J_u(u') du' \quad z > z' \quad (4.91)$$

$$H_v^- = \int_{u-l}^l G_{HJ}^{vv-} J_u(u') du' \quad z < z' \quad (4.92)$$

$$H_z^+ = \int_{u-l}^l G_{HJ}^{zz+} J_u(u') du' \quad z > z' \quad (4.93)$$

$$H_z^- = \int_{u-l}^l G_{HJ}^{zz-} J_u(u') du' \quad z < z' \quad (4.94)$$

#### 4.5 สนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ เมื่อเราทราบ  $\bar{G}_{m2}$  จาก (4.46) เราสามารถจะหา  $\bar{G}_{e1}$  ได้จากความสัมพันธ์ กำหนดให้

$\bar{G}_{EJ} = \bar{G}_{e1}$  โดยที่  $\bar{G}_{EJ}$  คือฟังก์ชันกรีนไดโอดิกไฟฟ้าที่เกิดการแหล่งกำเนิดไฟฟ้างั้นจะได้

$$\bar{\bar{G}}_{EJ}(\bar{R}, \bar{R}') = \frac{1}{k^2} \left[ -\hat{z}\hat{z}\delta(\bar{R} - \bar{R}') + (\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^+) U(z - z') + (\nabla \times \bar{\bar{G}}_{m_2}^-) U(z' - z) \right] \quad (4.95)$$

$$\bar{\bar{G}}_{EJ}(\bar{R}, \bar{R}') = -\frac{1}{k^2} \hat{z}\hat{z}\delta(\bar{R} - \bar{R}') + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{e_{m\zeta}} \bar{M}_{e_{m\zeta}}(\pm h) \bar{M}'_{e_{m\zeta}}(\mp h) + c_{e_{m\zeta}} \bar{N}_{e_{m\zeta}}(\pm h) \bar{N}'_{e_{m\zeta}}(\mp h) \right] \quad z > z' \quad (4.96)$$

$$\bar{\bar{G}}_{EJ}(\bar{R}, \bar{R}') = -\frac{1}{k^2} \hat{z}\hat{z}\delta(\bar{R} - \bar{R}') + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{e_{m\zeta}} \bar{M}_{e_{m\zeta}}(-h) \bar{M}'_{e_{m\zeta}}(+h) + c_{e_{m\zeta}} \bar{N}_{e_{m\zeta}}(-h) \bar{N}'_{e_{m\zeta}}(+h) \right] \quad z < z' \quad (4.97)$$

กำหนดให้

$$\delta(\bar{R} - \bar{R}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(z - z') \quad (4.98)$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีกระตุ้นโดยโพรบไฟฟ้าหาได้จาก

$$\bar{E}(u, v, z) = -j\omega\mu_0 \int_{u-t}^u \bar{\bar{G}}_{EJ}(u, v, z; u', v', z') \cdot J_u(u', v', z') \hat{u} du' \quad (4.99)$$

จากพจน์หน้าของ (4.96) และ (4.97) จะได้

$$c_{e_{m\zeta}} \bar{M}_{e_{m\zeta}}(\pm h) \bar{M}'_{e_{m\zeta}}(\mp h) = \left\{ \frac{c_{e_{m\zeta}} e^{-jh(\pm z \mp z')}}{\beta^2} \right\} \times \left[ \hat{u}\hat{u} \left( R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} - R_{e_{m\zeta}}(u') \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v')}{\partial v'} \right) + \hat{v}\hat{v} \left( -S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} + S_{e_{m\zeta}}(v') \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u')}{\partial u'} \right) + \hat{u}\hat{v} \left( R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} - S_{e_{m\zeta}}(v') \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u')}{\partial u'} \right) + \hat{v}\hat{u} \left( S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} - R_{e_{m\zeta}}(u') \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v')}{\partial v'} \right) \right] \quad (4.100)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากพจน์หลังของ (4.96) และ (4.97) จะได้

$$\begin{aligned}
 c_{e_{m\zeta}} \bar{N}_{e_{m\zeta}} (\pm h) \bar{N}'_{e_{m\zeta}} (\mp h) &= \frac{c_{e_{m\zeta}} e^{-jh(\pm z \mp z')}}{\kappa^2 \beta^2} \times \left[ \hat{u} \hat{u} \left( h^2 S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} S_{e_{m\zeta}}(v') \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u')}{\partial u'} \right) \right. \\
 &+ \hat{v} \hat{v} \left( -h^2 R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} R_{e_{m\zeta}}(u') \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v')}{\partial v'} \right) \\
 &+ \hat{z} \hat{z} \left( \beta^2 \zeta^4 R_{e_{m\zeta}}(u) S_{e_{m\zeta}}(v) R_{e_{m\zeta}}(u') S_{e_{m\zeta}}(v') \right) \\
 &+ \hat{u} \hat{v} \left( h^2 S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} R_{e_{m\zeta}}(u') \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v')}{\partial v'} \right) \\
 &+ \hat{u} \hat{z} \left( j(\mp h) \beta \zeta^2 S_{e_{m\zeta}}(v) \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u)}{\partial u} R_{e_{m\zeta}}(u') S_{e_{m\zeta}}(v') \right) \\
 &+ \hat{v} \hat{u} \left( h^2 R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} S_{e_{m\zeta}}(v') \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u')}{\partial u'} \right) \\
 &+ \hat{v} \hat{z} \left( j(\mp h) \beta \zeta^2 R_{e_{m\zeta}}(u) \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v)}{\partial v} R_{e_{m\zeta}}(u') S_{e_{m\zeta}}(v') \right) \\
 &+ \hat{z} \hat{u} \left( j(\mp h) \beta \zeta^2 R_{e_{m\zeta}}(u) S_{e_{m\zeta}}(v) S_{e_{m\zeta}}(v') \frac{\partial R_{e_{m\zeta}}(u')}{\partial u'} \right) \\
 &+ \hat{z} \hat{v} \left( j(\pm h) \beta \zeta^2 R_{e_{m\zeta}}(u) S_{e_{m\zeta}}(v) R_{e_{m\zeta}}(u') \frac{\partial S_{e_{m\zeta}}(v')}{\partial v'} \right) \left. \right] \quad (4.101)
 \end{aligned}$$

#### 4.5.1 กรณีโหมคคี่คู่

โดยใช้ (4.54) กับ (4.96) และ (4.97) จากพจน์หน้าของ (4.96) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}$

มีค่า

$$c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta} (+h) \bar{M}'_{em\zeta} (-h) \hat{u} = \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ R_{em\zeta}(u) \frac{\partial S_{em\zeta}(v)}{\partial v} R_{em\zeta}(u') \frac{\partial S_{em\zeta}(v')}{\partial v'} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right)}{\partial v} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right)}{\partial v'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right) \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right) \right\} \tag{4.102}
\end{aligned}$$

จากพจน์หน้าของ (4.96) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(+h) \bar{M}'_{em\zeta}(-h) \hat{v}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ S_{em\zeta}(v) \frac{\partial R_{em\zeta}(u)}{\partial u} R_{em\zeta}(u') \frac{\partial S_{em\zeta}(v')}{\partial v'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \sum_n 'D_n^m \cos nv \right) \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right)}{\partial v'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ -\left( \frac{\pi}{2} \sum_n 'D_n^m \cos nv \right) \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \tag{4.103}
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.96) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(+h) \bar{N}'_{em\zeta}(-h) \hat{u}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 S_{em\zeta}(v) \frac{\partial R_{em\zeta}(u)}{\partial u} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \sum_n 'D_n^m \cos nv \right) \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.104)$$

จากพจน์หลังของ (4.96) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned} c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(+h) \bar{N}'_{em\zeta}(-h)^{\hat{v}\hat{u}} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 R_{em\zeta}(u) \frac{\partial S_{em\zeta}(v)}{\partial v} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\ &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right)}{\partial v} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \\ &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m \sin nv \right. \\ &\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.105) \end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.96) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{z}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned} c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(+h) \bar{N}'_{em\zeta}(-h)^{\hat{z}\hat{u}} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -jh\beta\zeta^2 R_{em\zeta}(u) S_{em\zeta}(v) S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\ &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right. \\ &\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.106) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
จากพจน์หน้าของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{M}_{em\zeta}(-h) \bar{M}'_{em\zeta}(+h) \overset{iii}{=} & \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ R_{em\zeta}(u) \frac{\partial S_{em\zeta}(v)}{\partial v} R_{em\zeta}(u') \frac{\partial S_{em\zeta}(v')}{\partial v'} \right\} \\
= & \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right)}{\partial v} \right\} \\
& \times \left\{ \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right)}{\partial v'} \right\} \\
= & \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right) \right. \\
& \left. \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right) \right\} \tag{4.107}
\end{aligned}$$

จากพจน์หน้าของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{e\mu} \bar{M}_{em\mu}(-k_z) \bar{M}'_{em\mu}(+k_z) \overset{iii}{=} & \left\{ \frac{c_{e\mu} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ S_{em\mu}(v) \frac{\partial R_{em\mu}(u)}{\partial u} R_{em\mu}(u') \frac{\partial S_{em\mu}(v')}{\partial v'} \right\} \\
= & \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right\} \\
& \times \left\{ \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv' \right)}{\partial v'} \right\} \\
= & \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ -\left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
& \left. \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \tag{4.108}
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}$  มีค่า

$$c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(-h) \bar{N}'_{em\zeta}(+h) \overset{iii}{=} \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 S_{em\zeta}(v) \frac{\partial R_{em\zeta}(u)}{\partial u} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.109)
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(-h) \bar{N}'_{em\zeta}(+h)^{\hat{v}} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-h(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 R_{em\zeta}(u) \frac{\partial S_{em\zeta}(v)}{\partial v} S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n 'D_n^m \cos nv \right)}{\partial v} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.110)
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{z}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{em\zeta} \bar{N}_{em\zeta}(-h) \bar{N}'_{em\zeta}(+h)^{\hat{z}} &= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ jh\beta\zeta^2 R_{em\zeta}(u) S_{em\zeta}(v) S_{em\zeta}(v') \frac{\partial R_{em\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m \cos nv \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.111)
\end{aligned}$$

#### 4.5.2 กรณีโหมคคลื่นคู่

แทนค่า (4.61) ลงใน (4.96) และ (4.97) จากพจน์หน้าของ (4.96) องค์กรประกอบไคแอติก  $\hat{u}\hat{u}$  จะได้

$$\begin{aligned}
 c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta}(+h) \bar{M}'_{om\zeta}(-h) \hat{u}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ R_{om\zeta}(u) \frac{\partial S_{om\zeta}(v)}{\partial v} R_{om\zeta}(u') \frac{\partial S_{om\zeta}(v')}{\partial v'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right)}{\partial v} \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right)}{\partial v'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
 &\quad \left. \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \tag{4.112}
 \end{aligned}$$

จากพจน์หน้าของ (4.96) องค์กรประกอบไคแอติก  $\hat{v}\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
 c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta}(+h) \bar{M}'_{om\zeta}(-h) \hat{v}\hat{v} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ S_{om\zeta}(v) \frac{\partial R_{om\zeta}(u)}{\partial u} R_{om\zeta}(u') \frac{\partial S_{om\zeta}(v')}{\partial v'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right)}{\partial v'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
 &\quad \left. \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \tag{4.113}
 \end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.96) องค์กรประกอบไคแอติก  $\hat{u}\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta} (+h) \bar{N}'_{om\zeta} (-h) \ddot{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 S_{om\zeta}(v) \frac{\partial R_{om\zeta}(u)}{\partial u} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jk_1(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \tag{4.114}
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.96) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta} (+h) \bar{N}'_{om\zeta} (-h) \ddot{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 R_{om\zeta}(u) \frac{\partial S_{om\zeta}(v)}{\partial v} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right)}{\partial v} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \tag{4.115}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรณใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงที่มาของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากพจน์หลังของ (4.96) องค์กรประกอบไดเอดิก  $z\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
 c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta} (+h) \bar{N}'_{om\zeta} (-h) z\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -jh\beta\zeta^2 R_{om\zeta}(u) S_{om\zeta}(v) S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m \sin nv \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.116)
 \end{aligned}$$

จากพจน์หน้าของ (4.97) องค์กรประกอบไดเอดิก  $\hat{u}u$  มีค่า

$$\begin{aligned}
 c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta} (-h) \bar{M}'_{om\zeta} (+h) \hat{u}u &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ R_{om\zeta}(u) \frac{\partial S_{om\zeta}(v)}{\partial v} R_{om\zeta}(u') \frac{\partial S_{om\zeta}(v')}{\partial v'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right)}{\partial v} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right)}{\partial v'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
 &\quad \left. \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \quad (4.117)
 \end{aligned}$$

จากพจน์หน้าของ (4.97) องค์กรประกอบไดเอดิก  $\hat{v}u$  มีค่า

$$\begin{aligned}
 c_{om\zeta} \bar{M}_{om\zeta} (-h) \bar{M}'_{om\zeta} (+h) \hat{v}u &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ S_{om\zeta}(v) \frac{\partial R_{om\zeta}(u)}{\partial u} R_{om\zeta}(u') \frac{\partial S_{om\zeta}(v')}{\partial v'} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right.
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv' \right)}{\partial v'} \Bigg\} \\
& = \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
& \left. \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \quad (4.118)
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{u}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(-h) \bar{N}'_{om\zeta}(+h) \hat{u}\hat{u} & = \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 S_{om\zeta}(v) \frac{\partial R_{om\zeta}(u)}{\partial u} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
& = \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
& \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.119)
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{v}\hat{v}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta}(-h) \bar{N}'_{om\zeta}(+h) \hat{v}\hat{v} & = \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 R_{om\zeta}(u) \frac{\partial S_{om\zeta}(v)}{\partial v} S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
& = \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n 'F_n^m \sin nv \right)}{\partial v} \right. \\
& \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n (i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \frac{\partial \left( \sum_n F_n^m \sin nv \right)}{\partial v} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n (i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.120)
\end{aligned}$$

จากพจน์หลังของ (4.97) องค์ประกอบไดแอดิก  $\hat{z}\hat{u}$  มีค่า

$$\begin{aligned}
c_{om\zeta} \bar{N}_{om\zeta} (-h) \bar{N}'_{om\zeta} (+h) \hat{z}\hat{u} &= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ jh\beta\zeta^2 R_{om\zeta}(u) S_{om\zeta}(v) S_{om\zeta}(v') \frac{\partial R_{om\zeta}(u')}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u \sum_n (i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n F_n^m \sin nv \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh u' \sum_n (i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \\
&= \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n (i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n F_n^m \sin nv \right. \\
&\quad \left. \times \sum_n F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n (i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \quad (4.121)
\end{aligned}$$

สนามไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีกระตุ้นโดยโพรมไฟฟ้าสามารถหาได้จาก

$$\bar{E}(u, v, z) = -j\omega\mu_0 \int_{u-l}^u \bar{G}_{EJ}(u, v, z; u', v', z') \cdot J_u(u', v', z') \hat{u} du' \quad (4.122)$$

กำหนดให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 $\bar{J}(R') = J_m \sin \left[ k(u' - u + l) \right] \hat{u} \quad ; \quad u - l \leq u' \leq u, v' = \frac{\pi}{2}, z' = 0 \quad (4.123)$

โดยที่กระแสสูงสุด  $J_m = 1$

จาก (4.122)  $\bar{G}_{EJ}$  จะมีองค์ประกอบไดโอดิกที่ใช้ในการคำนวณเพียงองค์ประกอบไดโอดิก  $\hat{u}\hat{u}$ ,  $\hat{v}\hat{v}$  และ  $\hat{z}\hat{z}$

$$\bar{E}^\pm(R) = -j\omega\mu_0 \int_{a-l}^a (G_{EJ}^{uu\pm}\hat{u}\hat{u} + G_{EJ}^{vv\pm}\hat{v}\hat{v} + G_{EJ}^{zz\pm}\hat{z}\hat{z}) \cdot J_u(u')\hat{u}du' \quad \begin{matrix} z > \\ z' < \end{matrix} \quad (4.124)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} G_{EJ}^{uu+} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right) \right. \right. \\ & \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right) \left. \right\} \\ & + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\ & \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \left. \right\} \\ & + \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\ & \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \left. \right\} \\ & + \left. \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \right. \\ & \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \left. \right\} \right] \quad (4.125) \end{aligned}$$

$$G_{EJ}^{vv+} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษานานาชาติเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น

$$\begin{aligned}
& \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right\} \\
& \times \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right. \\
& \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
& \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \Big\} \Big\} \quad (4.126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{EJ}^{2H+} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \\
& \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m \cos nv \right. \\
& \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \Big\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right. \\
& \times \sum_n 'F_n^m \sin nv \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \Big\} \quad (4.127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{EJ}^{4H-} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \\
& \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z-z')}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right) \right. \\
& \times \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \left( \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right) \Big\}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งนี้

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m n \cos nv \right. \\
& \times \left. \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \\
& + \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
& \times \left. \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
& \times \left. \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \tag{4.128} \\
G_{EJ}^{vu-} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \\
& \left[ \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ - \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'D_n^m \cos nv \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \right. \\
& \times \left. \left. \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'D_n^m n \sin nv' \right\} \right. \\
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\beta^2} \right\} \left\{ \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n 'F_n^m \sin nv \frac{\partial \left( \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u} \right. \\
& \times \left. \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \sum_n 'F_n^m n \cos nv' \right\} \\
& + \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ -h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m n \sin nv \right. \\
& \times \left. \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right)}{\partial u'} \right\}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น

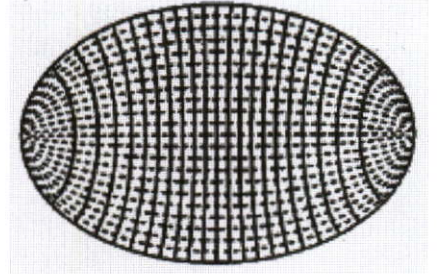
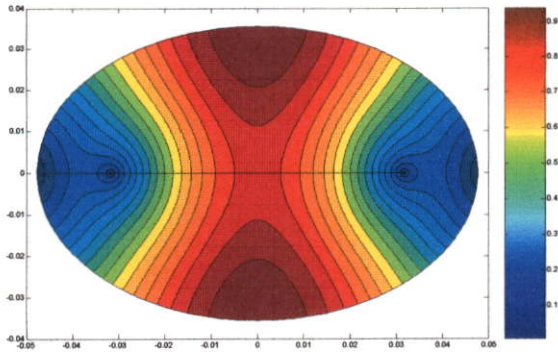
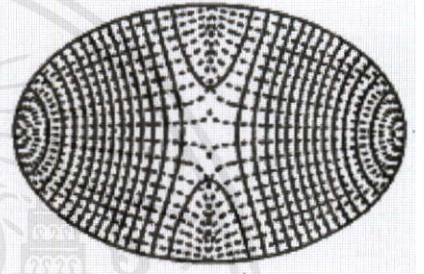
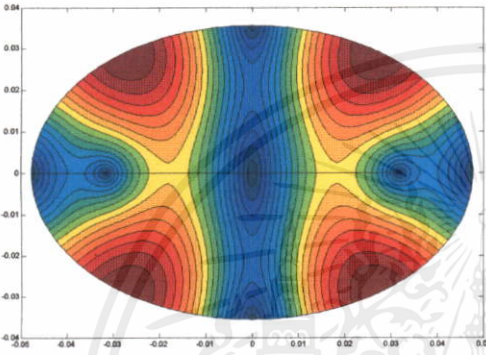
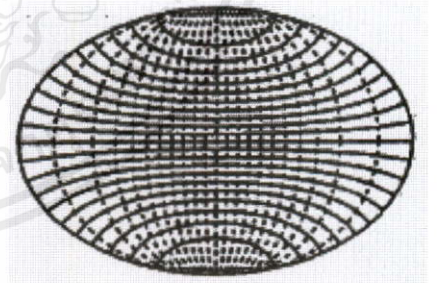
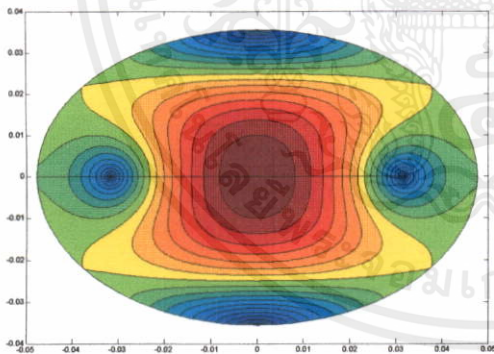
$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ h^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'F_n^m \cos nv \right. \\
& \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \Bigg\} \quad (4.129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{EJ}^{m-} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \\
& \left[ \left\{ \frac{c_{em\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \sum_n 'D_n^m \cos nv \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sum_n 'D_n^m \cos nv' \frac{\partial \left( \sum_n '(i)^{m-n} D_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \right. \\
& \left. + \left\{ \frac{c_{om\zeta} e^{-jh(z'-z)}}{\kappa^2 \beta^2} \right\} \left\{ jh\beta\zeta^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \tanh u \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u) \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sum_n 'F_n^m \sin nv \sum_n 'F_n^m \sin nv' \frac{\partial \left( \tanh u' \sum_n '(i)^{n-m} F_n^m J_n(c\zeta \cosh u') \right)}{\partial u'} \right\} \right] \quad (4.130)
\end{aligned}$$

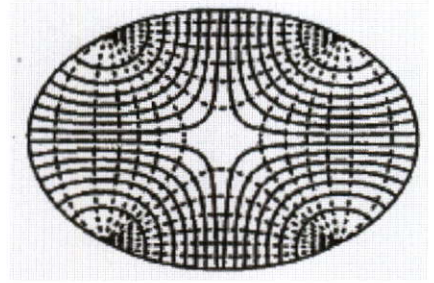
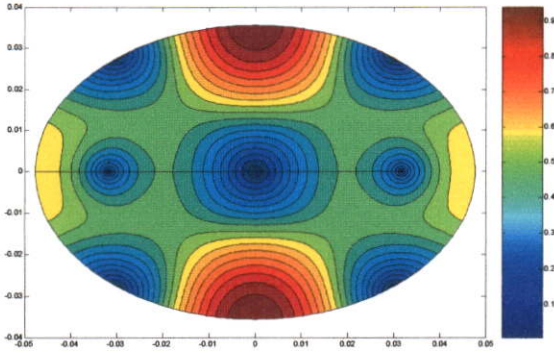
#### 4.6 โหมดคลื่นภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรี

จากรูปที่ 4.2 และ รูปที่ 4.3 ด้านขวามือแสดงตัวอย่างโหมดคลื่นภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีจาก [15] ซึ่งเป็นรูปปลายเส้นที่ประกอบด้วยเส้นทึบแทนสนามไฟฟ้า และเส้นประแทนสนามแม่เหล็กสำหรับกรณี  $e = 0.75$  ส่วนด้านซ้ายมือของรูปที่ 4.2 และ รูปที่ 4.3 แสดงโหมดคลื่นที่ถูกนอร์มัลไลซ์ในกรณี  $e = 0.6614$  และ  $e = 0.9430$  ตามลำดับ จะสังเกตได้ว่าโหมดคลื่นที่คำนวณได้จากฟังก์ชันกรีนไดโอดิกมีความสอดคล้องกับ [15] แต่จะมีสิ่งที่แตกต่างกันคือสนามบริเวณจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี โดยระยะทางระหว่างจุดโฟกัสกับจุดกำเนิดจะยาวถ้า  $e$  มีค่ามาก เมื่อกำหนดให้ความยาวแกนรองของท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีเปลี่ยนแปลงไปในขณะที่ความยาวแกนหลักมีค่าคงที่ จะทำให้ค่า  $e$  มีค่าเปลี่ยนแปลงไป โหมดคลื่นภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีในกรณี  $e$  มีค่า 0.841, 0.763, 0.520 และ 0.286 แสดงไว้ในรูปที่ 4.4–4.7

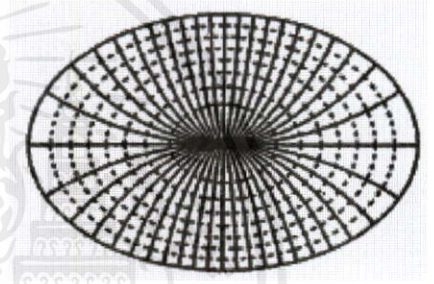
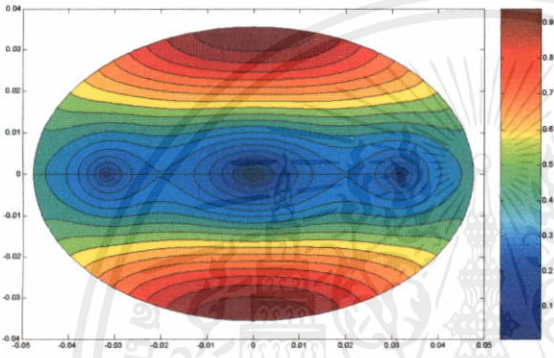
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ก) โหมดคลื่น  $TE_{C11}$ (ข) โหมดคลื่น  $TE_{C21}$ (ค) โหมดคลื่น  $TE_{S11}$ 

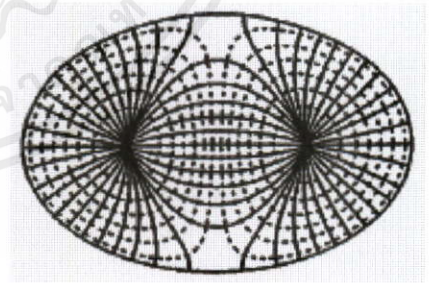
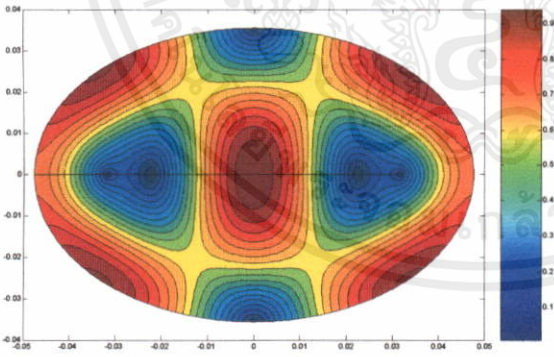
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ง) โหมดคลื่น TE<sub>s21</sub>



(จ) โหมดคลื่น TM<sub>c01</sub>



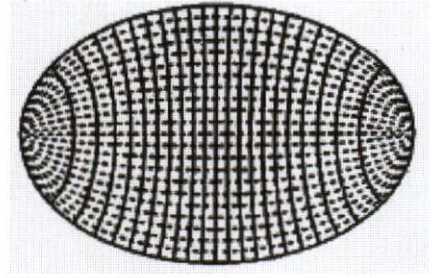
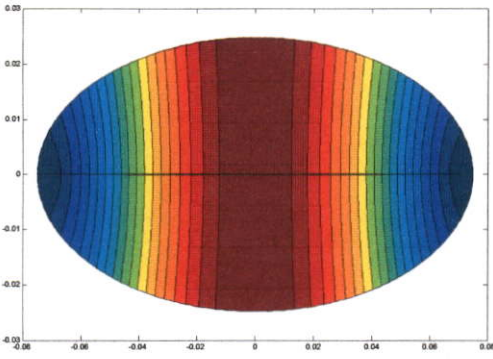
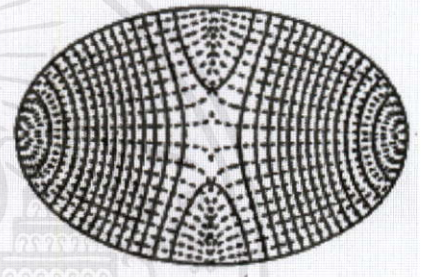
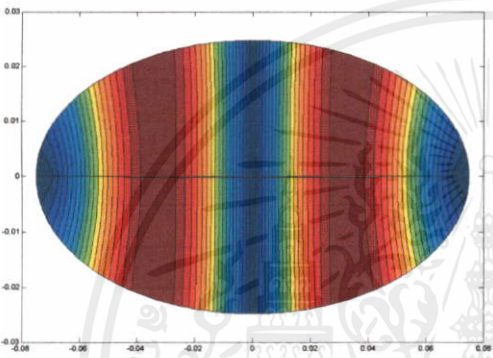
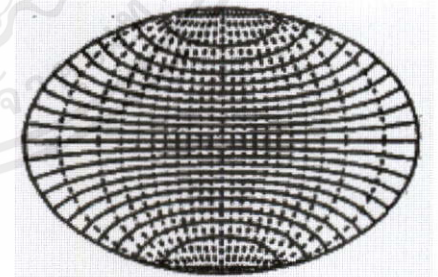
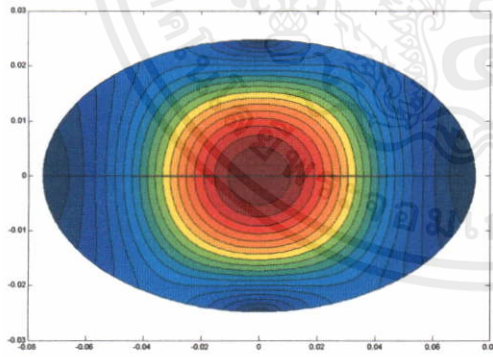
(ฉ) โหมดคลื่น TM<sub>c11</sub>

รูปที่ 4.2 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในกรณี

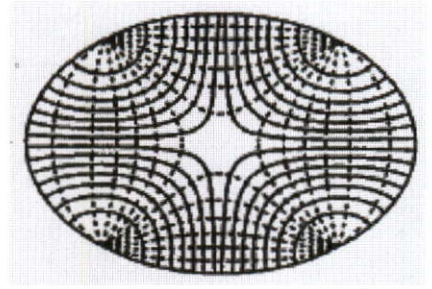
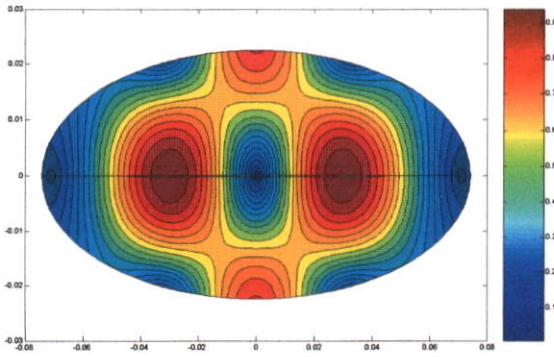
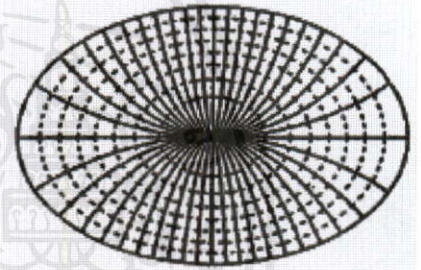
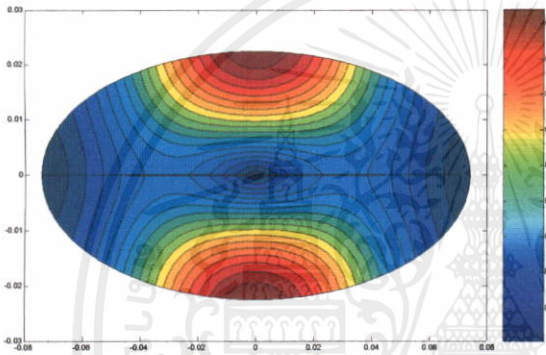
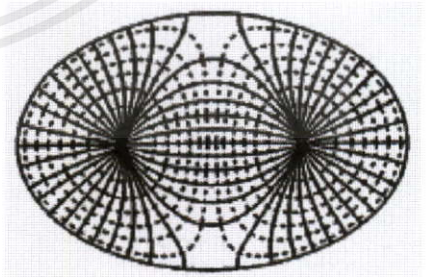
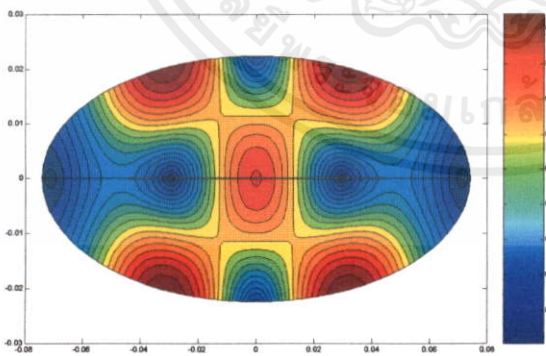
$a = 4.8 \text{ cm}$  และ  $b = 3.6 \text{ cm}$  หรือ  $e = 0.6614$  เปรียบเทียบกับแบบรูปสนามจาก [15]

(เส้นทึบแสดงสนามไฟฟ้า เส้นประแสดงสนามแม่เหล็ก)

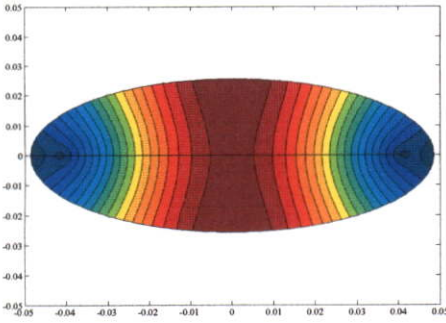
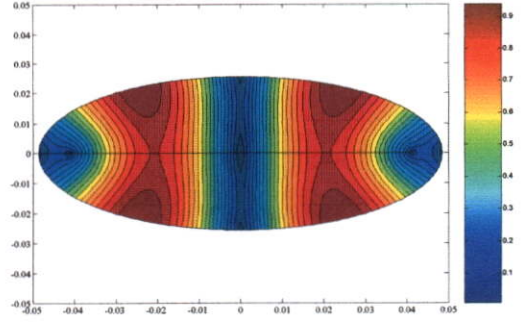
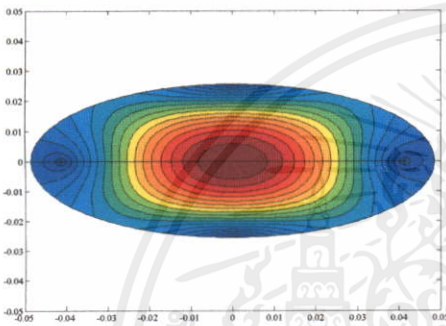
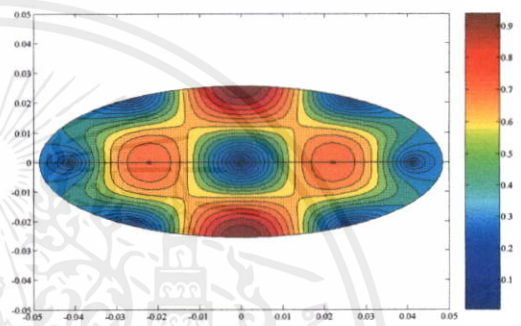
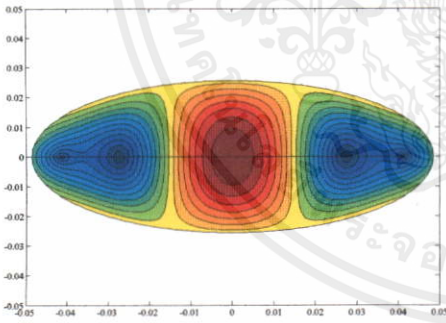
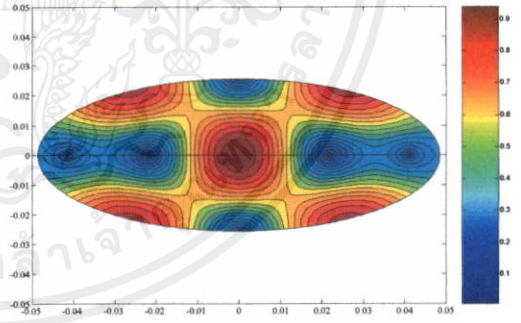
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า (ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้)

(ก) โหมดคลื่น  $TE_{C11}$ (ข) โหมดคลื่น  $TE_{C21}$ (ค) โหมดคลื่น  $TE_{S11}$ 

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ง) โหมดคลื่น  $TE_{S21}$ (จ) โหมดคลื่น  $TM_{C01}$ (ฉ) โหมดคลื่น  $TM_{C11}$ 

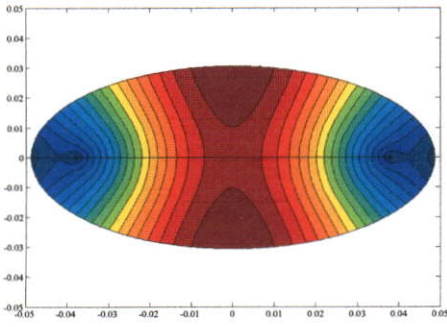
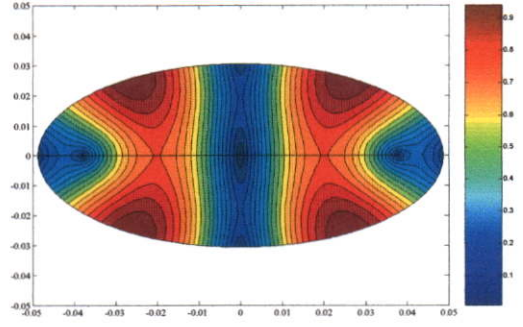
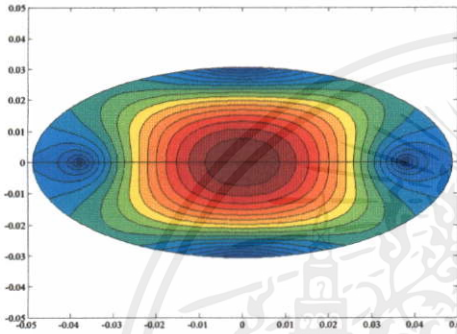
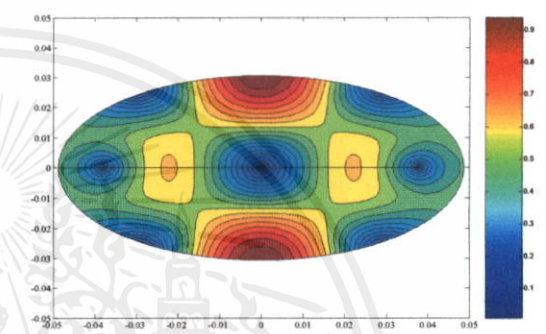
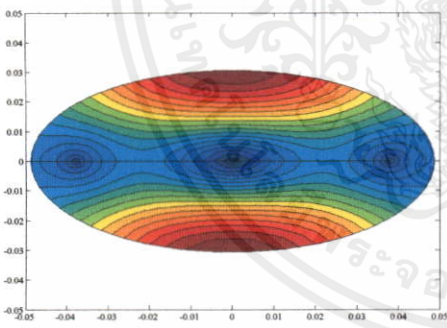
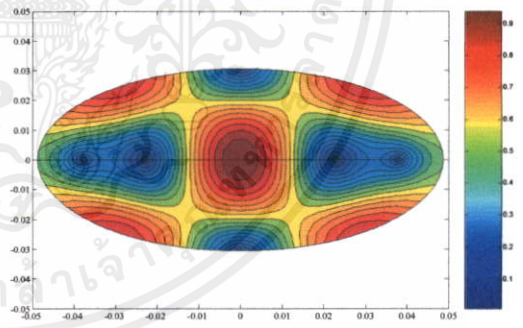
รูปที่ 4.3 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอดิกโนกรณี  
 $a = 7.5$  cm และ  $b = 2.5$  cm หรือ  $e = 0.943$  เปรียบเทียบกับแบบรูปสนามจาก [15] (เส้น  
 ทึบแสดงสนามไฟฟ้า เส้นประแสดงสนามแม่เหล็ก)

(ก) โหมดคลื่น  $TE_{C11}$ (ข) โหมดคลื่น  $TE_{C21}$ (ค) โหมดคลื่น  $TE_{S11}$ (ง) โหมดคลื่น  $TE_{S21}$ (จ) โหมดคลื่น  $TM_{C01}$ (ฉ) โหมดคลื่น  $TM_{C11}$ 

**รูปที่ 4.4** โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดเอดิกในกรณี

$$a = 4.8 \text{ cm และ } b = 2.6 \text{ cm หรือ } e = 0.841$$

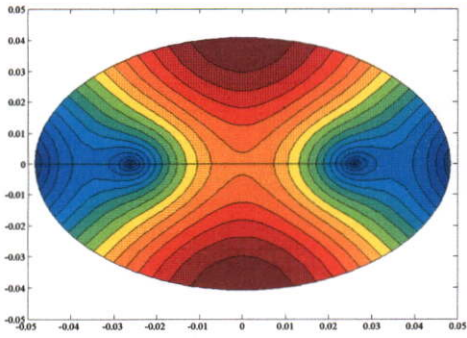
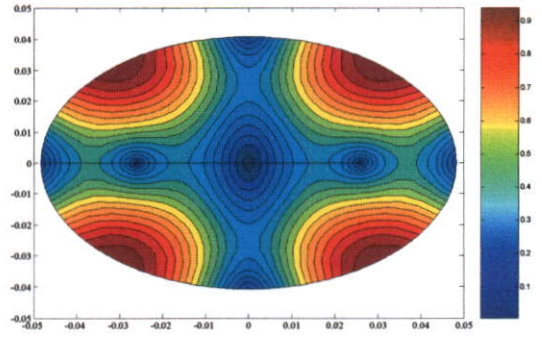
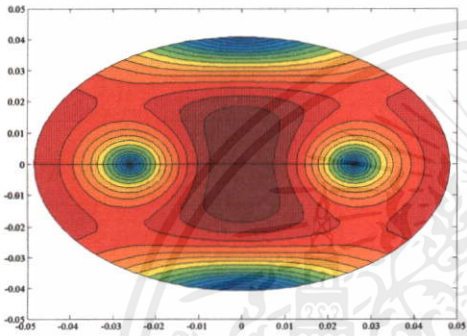
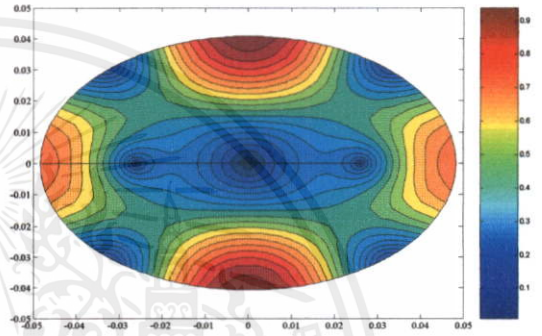
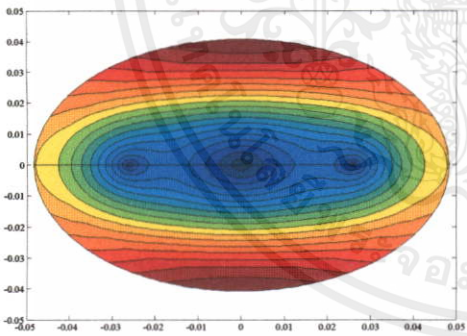
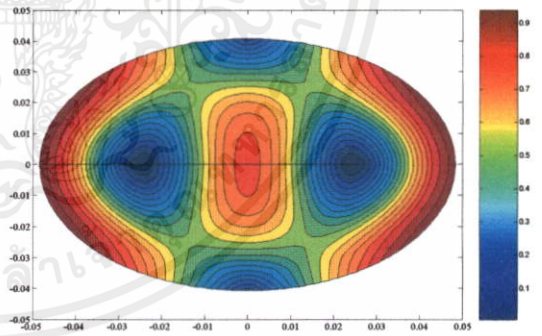
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาเอกสารนี้ ต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ก) โหมดคลื่น  $TE_{C11}$ (ข) โหมดคลื่น  $TE_{C21}$ (ค) โหมดคลื่น  $TE_{S11}$ (ง) โหมดคลื่น  $TE_{S21}$ (จ) โหมดคลื่น  $TM_{C01}$ (ฉ) โหมดคลื่น  $TM_{C11}$ 

รูปที่ 4.5 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอดิกโนกรณี

$$a = 4.8 \text{ cm และ } b = 3.1 \text{ cm หรือ } e = 0.763$$

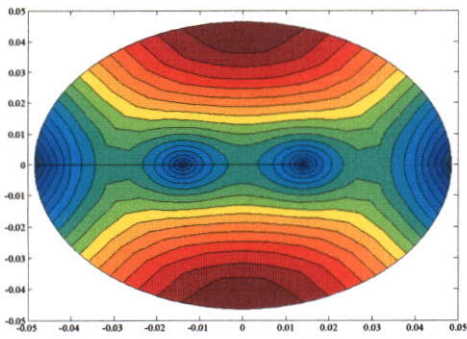
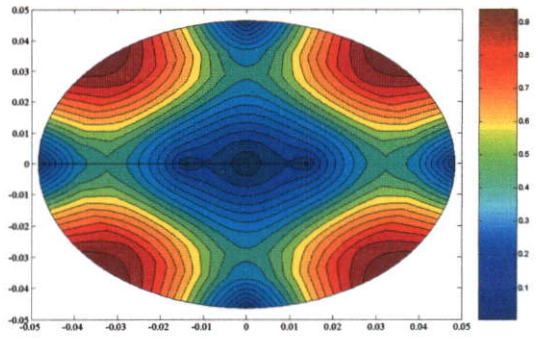
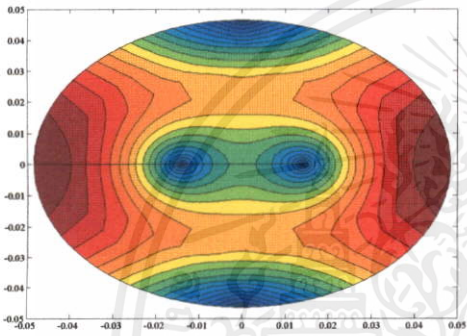
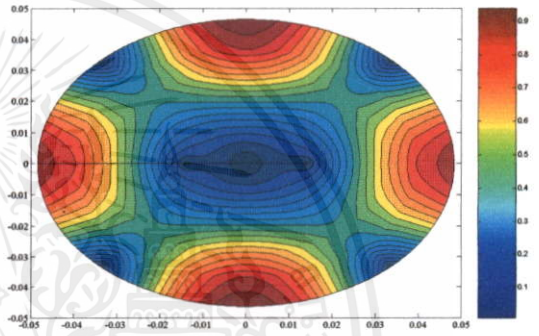
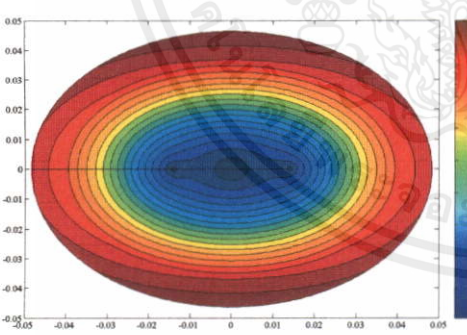
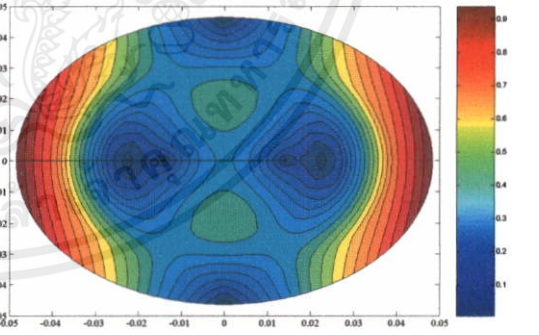
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ก) โหมดคลื่น  $TE_{C11}$ (ข) โหมดคลื่น  $TE_{C21}$ (ค) โหมดคลื่น  $TE_{S11}$ (ง) โหมดคลื่น  $TE_{S21}$ (จ) โหมดคลื่น  $TM_{C01}$ (ฉ) โหมดคลื่น  $TM_{C11}$ 

#### รูปที่ 4.6 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดโอดิกในกรณี

$$a = 4.8 \text{ cm และ } b = 4.1 \text{ cm หรือ } e = 0.520$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ก) โหมดคลื่น  $TE_{C11}$ (ข) โหมดคลื่น  $TE_{C21}$ (ค) โหมดคลื่น  $TE_{S11}$ (ง) โหมดคลื่น  $TE_{S21}$ (จ) โหมดคลื่น  $TM_{C01}$ (ฉ) โหมดคลื่น  $TM_{C11}$ 

#### รูปที่ 4.7 โหมดคลื่นในท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่คำนวณจากฟังก์ชันกรีนไดแอติกในกรณี

$a = 4.8 \text{ cm}$  และ  $b = 4.6 \text{ cm}$  หรือ  $e = 0.286$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.7 การคำนวณหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าระยะไกลโดยวิธีการแปลงฟูเรียร์

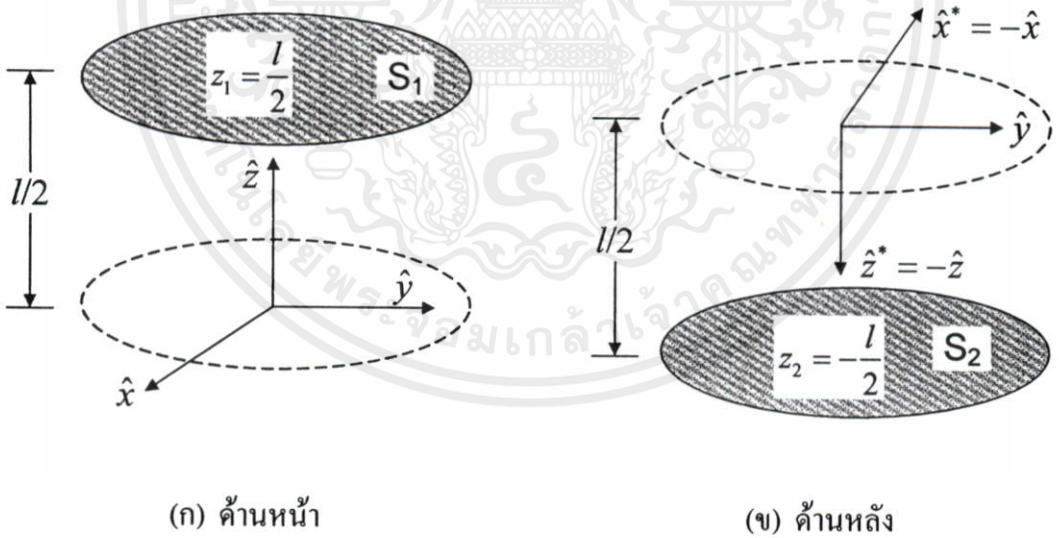
จากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในสายอากาศที่หาได้จากวิธีกรีนไดโอดิก จะทำให้สามารถคำนวณหาค่ากระแสแม่เหล็กสมมูล ( $\bar{M}_s$ ) และกระแสไฟฟ้าสมมูล ( $\bar{J}_s$ ) ที่ช่องเปิดวงรี ได้ หลังจากนั้นจะใช้วิธีการแปลงฟูเรียร์เพื่อหาค่าสนามแม่เหล็กที่ระยะไกล ( $\bar{H}(r, \phi, \theta)$ ) และสนามไฟฟ้าที่ระยะไกล ( $\bar{E}(r, \phi, \theta)$ ) ซึ่งกระแสแม่เหล็กสมมูลและกระแสไฟฟ้าสมมูลที่ช่องเปิดด้านหน้าสามารถคำนวณได้จาก (4.131)–(4.132) สำหรับช่องเปิดด้านหลังจะคำนวณจาก (4.133)–(4.134) พารามิเตอร์ต่างๆ ของช่องเปิดสายอากาศแสดงอยู่ในรูปที่ 4.8

$$\bar{M}_{s1}(u', v', z') = \bar{E}(u', v', z') \Big|_{z_1 = \frac{l}{2}} \times \hat{z} \quad (4.131)$$

$$\bar{J}_{s1}(u', v', z') = \bar{H}(u', v', z') \Big|_{z_1 = \frac{l}{2}} \times (-\hat{z}) \quad (4.132)$$

$$\bar{M}_{s2}(u', v', z') = \bar{E}(u', v', z') \Big|_{z_2 = -\frac{l}{2}} \times (-\hat{z}) \quad (4.133)$$

$$\bar{J}_{s2}(u', v', z') = \bar{H}(u', v', z') \Big|_{z_2 = -\frac{l}{2}} \times \hat{z} \quad (4.134)$$



รูปที่ 4.8 ช่องเปิดสายอากาศ

เวกเตอร์การแพร่กระจายคลื่น (Radiation Vector)  $L$  ในทิศทาง  $\theta$  และ  $\phi$  สามารถหาได้จาก

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $M$  ซึ่งแสดงในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน [16] ดังสมการต่อไปนี้

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$L_\theta = \iint_s (M_x \cos \theta \cos \phi + M_y \cos \theta \sin \phi - M_z \sin \theta) e^{jkr' \cos \psi} ds' \quad (4.135)$$

$$L_\phi = \iint_s (-M_x \sin \phi + M_y \cos \phi) e^{jkr' \cos \psi} ds' \quad (4.136)$$

กำหนดให้  $r' \cos \psi = c \cosh(u) \cos(v) \sin(\theta) \cos(\phi) + c \sinh(u) \sin(v) \sin(\theta) \sin(\phi)$

แปลงองค์ประกอบ  $M$  จากองค์ประกอบในพิกัดทรงกระบอกวงรีให้อยู่ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนโดยอาศัยความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v & \frac{1}{\Delta} \cosh u \sin v & 0 \\ -\frac{1}{\Delta} \cosh u \sin v & \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_u \\ M_v \\ M_z \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

$$\text{โดยที่ } \Delta = \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} \quad (4.138)$$

ดังนั้นจะได้

$$M_x = M_u \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v + M_v \frac{1}{\Delta} \cosh u \sin v \quad (4.139)$$

$$M_y = M_u \left( -\frac{1}{\Delta} \right) \cosh u \sin v + M_v \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v \quad (4.140)$$

สามารถเขียน (4.135)–(4.136) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} L_\theta &= \iint_s \left( M_u \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v \cos \theta \cos \phi + M_v \frac{1}{\Delta} \cosh u \sin v \cos \theta \cos \phi \right. \\ &+ \left. M_u \left( -\frac{1}{\Delta} \right) \cosh u \sin v \cos \theta \sin \phi + M_v \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v \cos \theta \sin \phi - M_z \sin \theta \right) e^{jkr' \cos \psi} ds' \end{aligned} \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} L_\phi &= \iint_s \left( -\left( M_u \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v + M_v \frac{1}{\Delta} \cosh u \sin v \right) \sin \phi \right. \\ &+ \left. \left( M_u \left( -\frac{1}{\Delta} \right) \cosh u \sin v + \left( M_v \frac{1}{\Delta} \sinh u \cos v \right) \cos \phi \right) e^{jkr' \cos \psi} ds' \right) \end{aligned} \quad (4.142)$$

ในทำนองเดียวกันเวกเตอร์การแพร่กระจายคลื่น  $N$  แต่ละองค์ประกอบจะมีค่าดังนี้

$$N_\phi = \iint_s \left( -\frac{J_u}{\Delta} \sinh u \cos v \sin \phi - \frac{J_v}{\Delta} \cosh u \sin v \sin \phi - \frac{J_w}{\Delta} \cosh u \sin v \cos \phi + \frac{J_z}{\Delta} \sinh u \cos v \cos \phi \right) e^{jkr' \cos \psi} ds' \quad (4.143)$$

$$N_\theta = \iint_s \left( \frac{J_u}{\Delta} \sinh u \cos v \cos \theta \cos \phi + \frac{J_v}{\Delta} \cosh u \sin v \cos \theta \cos \phi - \frac{J_w}{\Delta} \cosh u \sin v \cos \theta \sin \phi + \frac{J_z}{\Delta} \sinh u \cos v \cos \theta \sin \phi - J_z \sin \theta \right) e^{jkr' \cos \psi} ds' \quad (4.144)$$

ผลลัพธ์ของสนามระยะไกลจะเกิดจากรวมกันแบบ Superposition ของสนามที่แต่ละช่องเปิด ในบริเวณสนามระยะไกลองค์ประกอบ  $r$   $\phi$  และ  $\theta$  ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ออกจากสายอากาศวงแหวนวงรีกระตุ้นโดยโพรบไฟฟ้า สามารถหาได้จาก (4.145)–(4.150) โดยมีสมการดังนี้

$$E_\theta \approx \frac{-jke^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ e^{jk\frac{l}{2}\cos\theta} \left[ L_\phi(\theta, \phi) + \eta N_\theta(\theta, \phi) \right] + e^{jk\frac{l}{2}\cos(\theta+\pi)} \left[ L_\phi(\theta + \pi, \phi + \pi) + \eta N_\theta(\theta + \pi, \phi + \pi) \right] \right\} \quad (4.145)$$

$$E_\phi \approx \frac{-jke^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ e^{jk\frac{l}{2}\cos\theta} \left[ L_\theta(\theta, \phi) - \eta N_\phi(\theta, \phi) \right] + e^{jk\frac{l}{2}\cos(\theta+\pi)} \left[ L_\theta(\theta + \pi, \phi) - \eta N_\phi(\theta + \pi, \phi) \right] \right\} \quad (4.146)$$

$$E_r \approx 0 \quad (4.147)$$

$$H_r \approx 0 \quad (4.148)$$

$$H_\phi \approx \frac{E_\phi}{\eta} \quad (4.149)$$

$$H_\theta \approx \frac{-E_\theta}{\eta} \quad (4.150)$$

กำหนดให้  $k$  คือ ค่าเลขคลื่นที่ความถี่ใช้งาน โดยที่  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

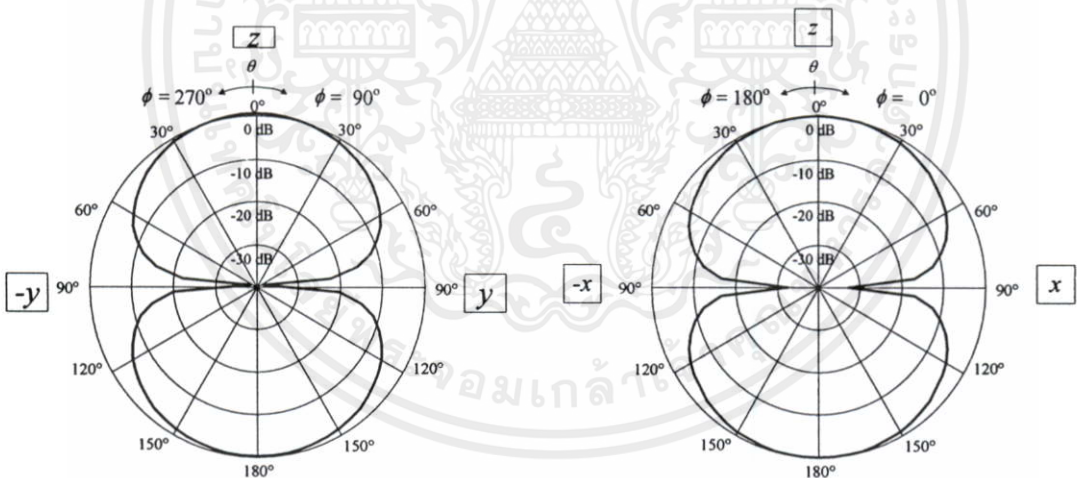
$\eta$  คือ อิมพีแดนซ์ของช่องว่างอิสระ โดยที่  $\eta = 120\pi$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สละลิขสิทธิ์การศึกษานานาชาติ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.8 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศวงแหวนวงรีกระตุ้นโดยโพรบไฟฟ้า

แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศวงแหวนวงรีกระตุ้นโดยโพรบไฟฟ้าที่คำนวณจากวิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิกนั้น สามารถคำนวณได้จากการกำหนดให้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่องเปิดสายอากาศประกอบด้วยโหมดคลื่นชนิดต่างๆ เนื่องจากที่บริเวณใกล้โพรบไฟฟ้านั้นจะประกอบด้วยโหมดคลื่นจำนวนมาก (Multi-mode) โดยจะพบว่าโหมดคลื่นที่สอดคล้องกับการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทางของสายอากาศวงแหวนวงรีกระตุ้นโดยโพรบไฟฟ้าคือโหมดคลื่น  $TM_{C01}$  ดังแสดงในรูปที่ 4.9 นอกจากนี้ยังแสดงผลการคำนวณแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจากโหมดคลื่น  $TE_{S21}$  และ  $TE_{C11}$  ในรูปที่ 4.10 และรูปที่ 4.11 ตามลำดับ โดยแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่คำนวณได้ไม่เป็นแบบสองทิศทาง ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้แสดงไว้ในตารางที่ 4.1 สำหรับกรณีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง

กรณีโหมดคลื่น  $TM_{C01}$



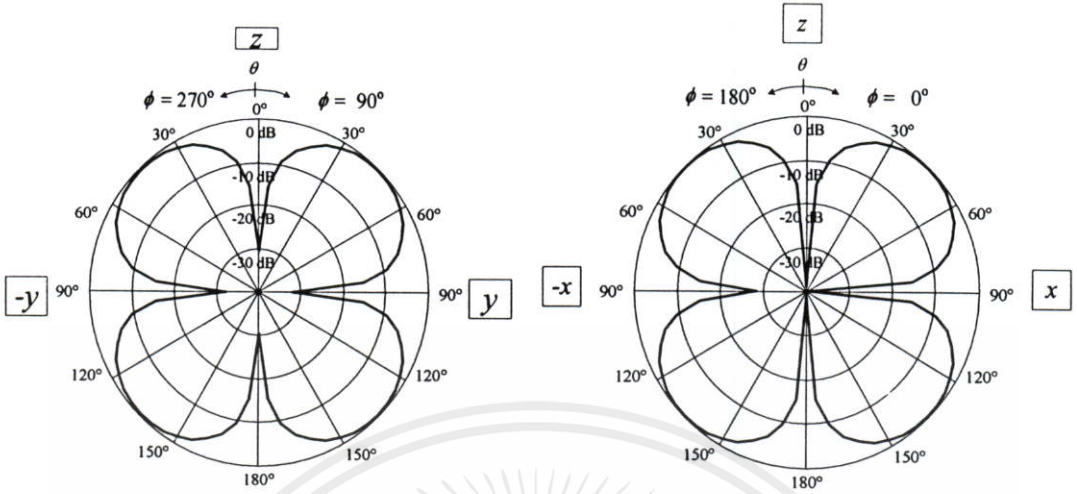
(ก) ระนาบสนามไฟฟ้า

(ข) ระนาบสนามแม่เหล็ก

รูปที่ 4.9 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น  $TM_{C01}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีโหมดคลื่น TE<sub>S21</sub>

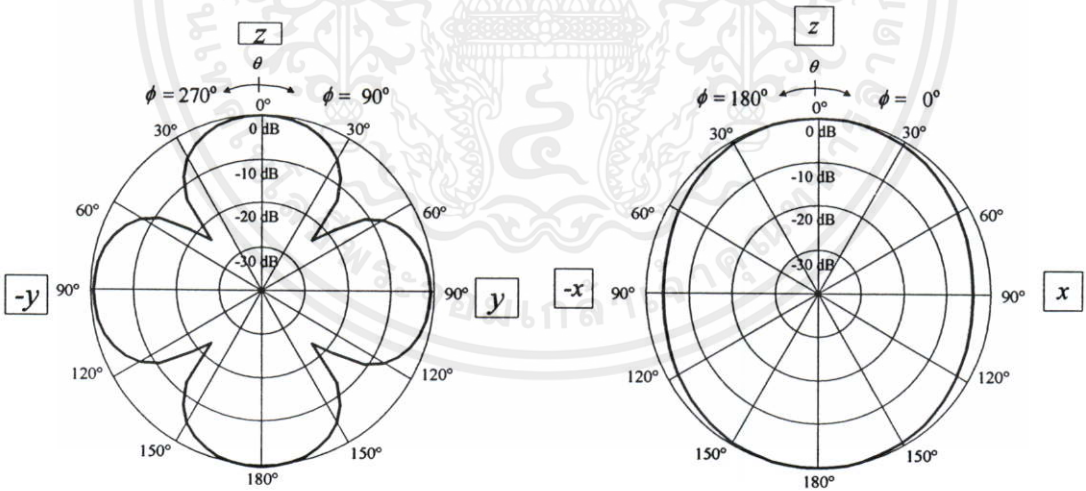


(ก) ระนาบสนามไฟฟ้า

(ข) ระนาบสนามแม่เหล็ก

รูปที่ 4.10 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น TE<sub>S21</sub>

กรณีโหมดคลื่น TE<sub>C11</sub>

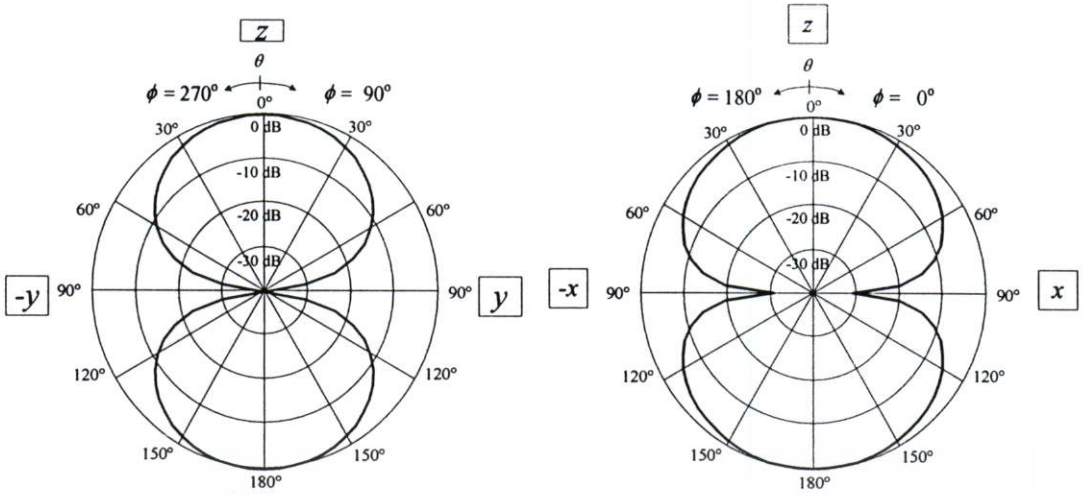


(ก) ระนาบสนามไฟฟ้า

(ข) ระนาบสนามแม่เหล็ก

รูปที่ 4.11 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น TE<sub>C11</sub>

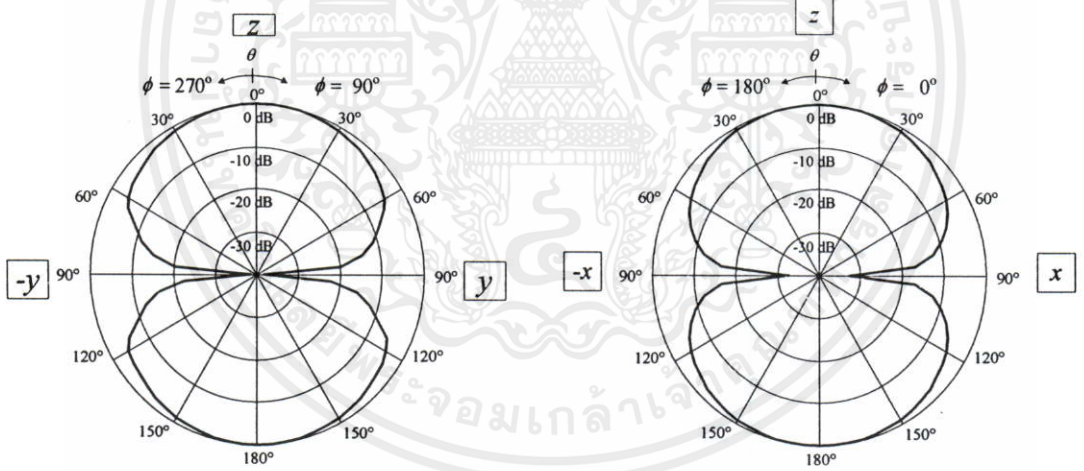
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก) ระนาบสนามไฟฟ้า

(ข) ระนาบสนามแม่เหล็ก

รูปที่ 4.12 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น TE<sub>111</sub> และความยาววงแหวนมีค่า 0.25λ



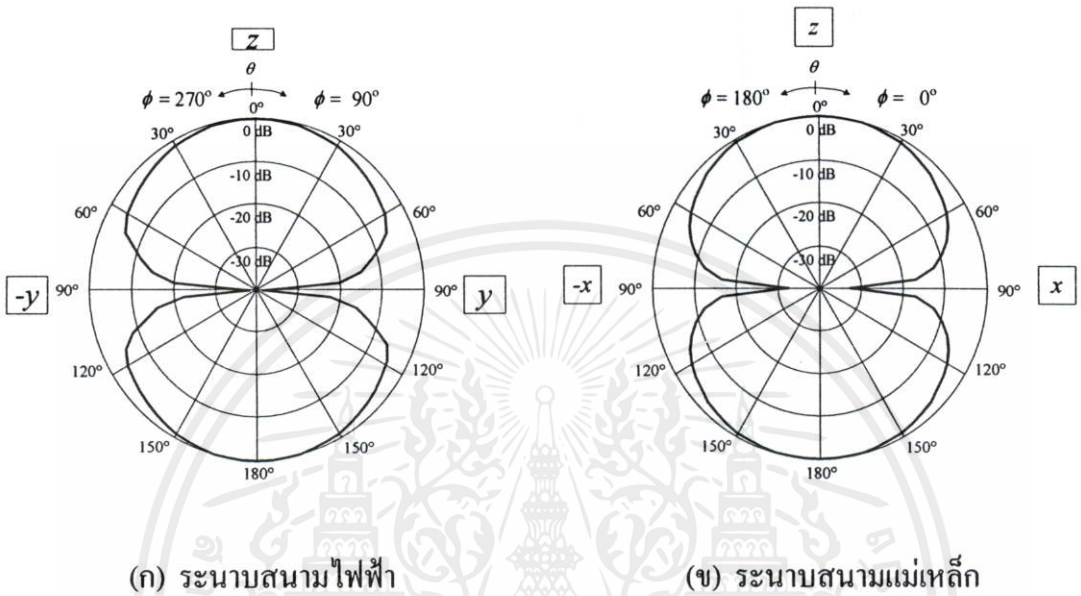
(ก) ระนาบสนามไฟฟ้า

(ข) ระนาบสนามแม่เหล็ก

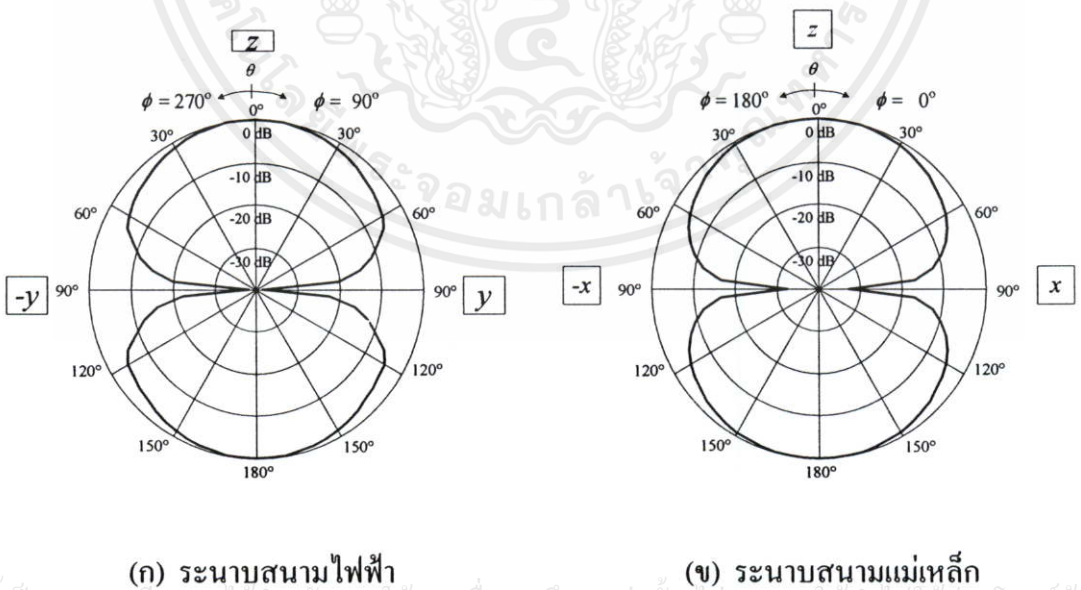
รูปที่ 4.13 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น TM<sub>101</sub> ในกรณี a = 4.8 cm และ b มีค่า 2.6 cm

เมื่อทำการคำนวณแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นเมื่อช่องเปิดสายอากาศมีขนาดที่เปลี่ยนแปลงไป โดยกำหนดให้ b มีค่าเป็น 2.6 cm, 3.1 cm, 4.1 cm และ 4.6 cm แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น TM<sub>101</sub> ยังคงเป็นแบบสองทิศทางดังแสดงในรูปที่ 4.13–4.16 โดยเมื่อขนาด b มีขนาดที่เล็กลงจะส่งผลให้ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงาน

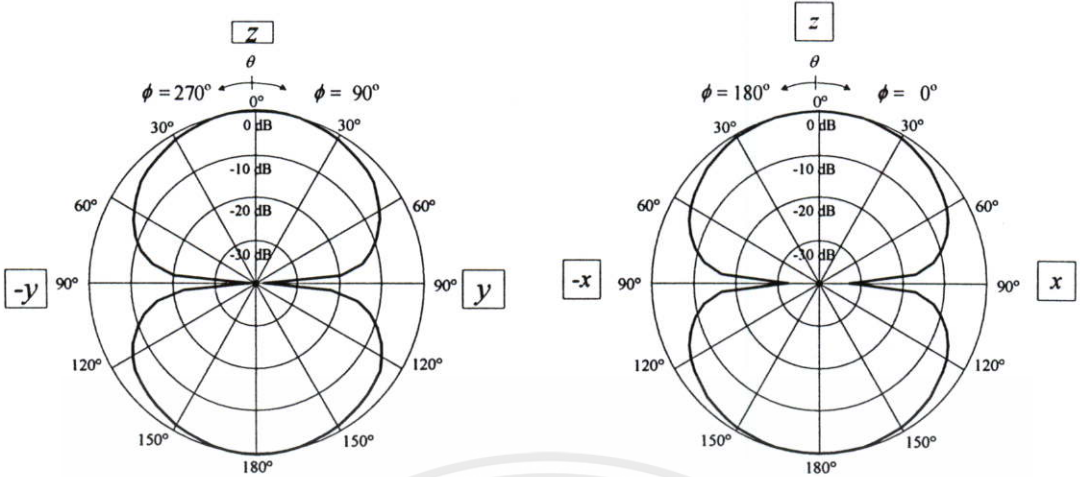
ลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงมีค่ามากขึ้นทั้งจากผลคำนวณได้จากวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกและแบบจำลอง ขณะที่ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กที่คำนวณได้จากวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกและแบบจำลองไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งผลการคำนวณได้ถูกสรุปไว้ในตารางที่ 4.2



รูปที่ 4.14 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหนดคลื่น  $TM_{001}$  ในกรณี  $a = 4.8 \text{ cm}$  และ  $b$  มีค่า  $3.1 \text{ cm}$



รูปที่ 4.15 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหนดคลื่น  $TM_{001}$  ในกรณี  $a = 4.8 \text{ cm}$  และ  $b$  มีค่า  $4.1 \text{ cm}$



(ก) ระบายสนามไฟฟ้า

(ข) ระบายสนามแม่เหล็ก

รูปที่ 4.16 แบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น  $TM_{co1}$  ในกรณี  $a = 4.8$  cm และ  $b$  มีค่า 4.6 cm

ตารางที่ 4.1 ค่าความกว้างลำคลื่นที่ กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งของสายอากาศที่คำนวณจากวิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิกในกรณีช่องเปิดสายอากาศมีโหมดคลื่น  $TM_{co1}$  และแบบจำลอง โดยที่  $a = 4.8$  cm และ  $b$  มีค่า 2.6 cm, 3.1 cm, 3.6 cm, 4.1 cm และ 4.6 cm

$b$ (cm)	HPBW ในระบายสนามไฟฟ้า (องศา)		HPBW ในระบายแม่เหล็ก (องศา)	
	ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก	แบบจำลอง	ฟังก์ชันกรีนไดโอดิก	แบบจำลอง
2.6	96	82	90	78
3.1	93	76	90	78
3.6	90	74	90	78
4.1	88	68	90	78
4.6	85	57	90	78

### 4.9 บทสรุป

ในการวิเคราะห์สนามภายในวงแหวนวงรีที่เกิดขึ้นโดยอาศัยหลักการท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีร่วมกับวิธีฟังก์ชันกรีนไดโอดิก พบว่าโหมดคลื่นที่คำนวณได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับผลการคำนวณที่มีมาก่อนใน [15] เมื่อกำหนดให้สนามบนช่องเปิดเป็นโหมดคลื่นชนิด  $TM_{co1}$  แล้วใช้หลักการแปลงฟูเรียร์คำนวณหาคลื่นในระยะไกล ผลคำนวณที่ได้พบว่าสนาม

ที่แพร่กระจายออกไปจากช่องเปิดนั้นให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง เมื่อพิจารณาให้คลื่นที่แพร่กระจายออกจากช่องเปิดนั้นไม่มีการสะท้อนกลับของคลื่น โดยมีค่าความกว้างกำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็น 90 องศาและ 90 องศาตามลำดับ ผลที่ได้นี้สอดคล้องกับค่าที่คำนวณจากแบบจำลองของโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบทที่ 3 ว่าสนามภายในสายอากาศจะมีอิทธิพลจากโหมดคลื่น  $TM_{001}$  มากที่สุด และเมื่อวิเคราะห์ที่ความยาวสายอากาศที่ยาวขึ้นมีค่า  $0.25\lambda$  โหมดคลื่นที่มีอิทธิพลต่อสายอากาศคือโหมดคลื่นเป็นใหญ่  $TE_{011}$  เนื่องจากคลื่นในโหมดคลื่นอื่นที่เดินทางจากโพรบไฟฟ้ามายังช่องเปิดของสายอากาศมีการสูญเสียอย่างมาก เมื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงขนาดของช่องเปิดสายอากาศพบว่าในกรณีที่  $b$  มีขนาดเล็กลงจะส่งผลให้ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงมีค่ามากขึ้นทั้งจากผลคำนวณได้จากวิธีฟังก์ชันกรีน ไดแอดิกและแบบจำลอง ขณะที่ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กที่คำนวณได้จากวิธีฟังก์ชันกรีน ไดแอดิกและแบบจำลองไม่เปลี่ยนแปลง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

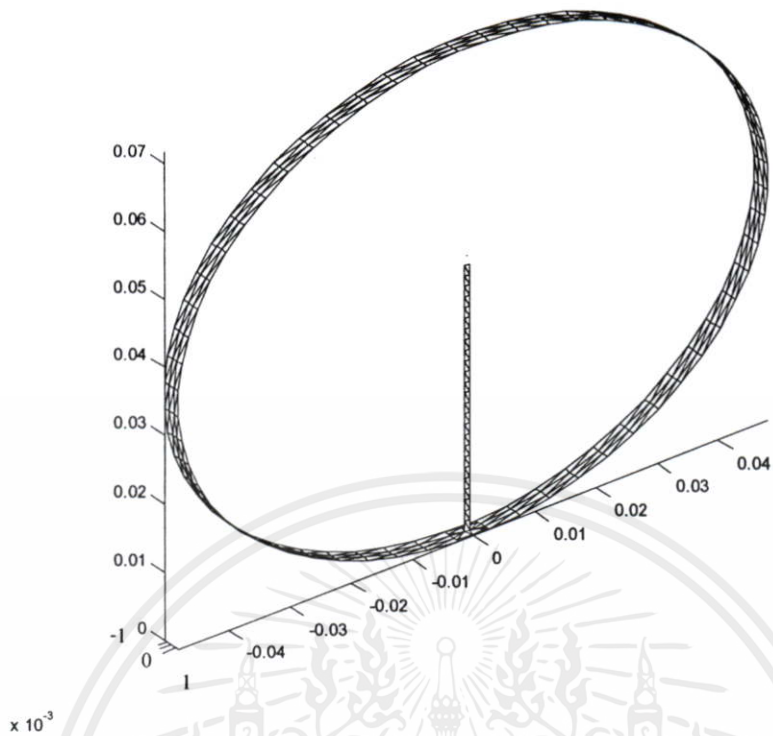
# การวิเคราะห์คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศด้วย ระเบียบวิธีโมเมนต์

### 5.1 บทนำ

ระเบียบวิธีโมเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันฐาน RWG (Rao-Wilton-Glisson Basis Function) เป็นวิธีที่ยอมรับกันว่าสามารถคำนวณอิมพีแดนซ์ของสายอากาศได้อย่างแม่นยำ โดยผลที่ได้จากการคำนวณสามารถที่จะถูกนำมาวิเคราะห์ลักษณะการกระจายกระแสไฟฟ้าเชิงผิวของสายอากาศได้ ตลอดจนมีประโยชน์สำหรับการศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศเมื่อสายอากาศมีการเปลี่ยนแปลงความยาวโพรบและความยาววงแหวน เพื่อหาขนาดที่เหมาะสมของสายอากาศ

### 5.2 ขั้นตอนการคำนวณของระเบียบวิธีโมเมนต์

ลำดับขั้นตอนการจำลองแบบสายอากาศด้วยการคำนวณแบบระเบียบวิธีโมเมนต์ร่วมกับฟังก์ชันฐาน RWG สามารถแสดงเป็นบล็อกไดอะแกรมการทำงานของการจำลองแบบสายอากาศได้ดังรูปที่ 5.1 จากบล็อกไดอะแกรมเริ่มต้นจากสายอากาศจะถูกแบ่งออกเป็นชิ้นส่วนองค์ประกอบเล็กๆ ที่มีลักษณะเป็นรูปแผ่นสามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 5.2 ขั้นตอนที่สองเป็นการกำหนดองค์ประกอบขอบ RWG ให้กับแบบจำลองสายอากาศที่สร้างขึ้น หลังจากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าเมตริกซ์อิมพีแดนซ์ในขั้นตอนที่สาม โดยอาศัยหลักการวิธีช่องว่างเล็ก (Delta Gap) ทำให้สามารถหาค่าแรงดันกระตุ้นที่จุดป้อนสัญญาณได้ ซึ่งจะถูกนำมาคำนวณหาผลเฉลยสมการโมเมนต์ หลังจากได้ผลเฉลยโมเมนต์แล้วก็จะทำให้สามารถคำนวณหาค่ากระแสเชิงผิวได้ หลังจากนั้นก็นำไปคำนวณหาค่าอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศต่อไป



รูปที่ 5.1 แบบจำลองสายอากาศที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนสามเหลี่ยม



รูปที่ 5.2 บล็อกไดอะแกรมอัลกอริทึมการคำนวณสายอากาศด้วยระเบียบวิธีโมเมนต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษายเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่ ใช้อื่นๆ ไซ้บนกระดาน การค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 5.3 ฟังก์ชันฐาน RWG (Rao-Wilton-Glisson Basis Function)

อัลกอริทึมที่ใช้ในการคำนวณเมตริกซ์อิมพีแดนซ์เป็นอัลกอริทึมที่คำนวณหาค่าผลรวมจากการปริพันธ์ของแผ่นสามเหลี่ยมจำนวนมาก ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำระเบียบวิธีโมเมนต์ (Method of Moments: MoM) มาใช้ร่วมกับฟังก์ชันฐาน RWG (Rao-Wilton-Glisson Basis Function) โดยจะมีการแบ่งพื้นผิวสายอากาศส่วนที่เป็นโลหะออกเป็นแผ่นสามเหลี่ยมเล็ก ๆ จำนวนมากเรียงต่อกัน การคำนวณด้วยระเบียบวิธีโมเมนต์ใช้สำหรับหาค่ากระแสไฟฟ้าเชิงผิวของสายอากาศที่เกิดจากผลรวมของฟังก์ชันฐานคูณกับสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าของทุกด้านประกอบของสามเหลี่ยมแต่ละคู่ โดยสามเหลี่ยมหนึ่งคู่ที่มีด้านประกบกันจะประกอบด้วยสามเหลี่ยมแผ่นแรกมีสัญลักษณ์  $T^+$  และสามเหลี่ยมแผ่นที่สองมีสัญลักษณ์  $T^-$  สำหรับตัวห้อย  $n$  จะบอกให้ทราบว่า การพิจารณากระทำบนคู่ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมลำดับที่  $n$  ฟังก์ชันฐาน RWG มีสมการดังนี้

$$\bar{f}_n(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \bar{\rho}_n^+(\bar{r}) & \bar{r} \text{ บน } T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \bar{\rho}_n^-(\bar{r}) & \bar{r} \text{ บน } T_n^- \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases} \quad (5.1)$$

และ

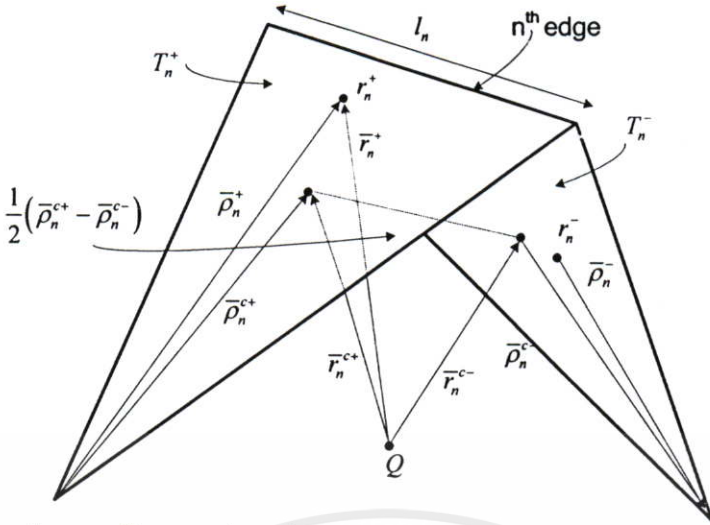
$$\nabla \cdot \bar{f}_n(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^+} \bar{\rho}_n^+(\bar{r}) & \bar{r} \text{ บน } T_n^+ \\ -\frac{l_n}{A_n^-} \bar{\rho}_n^-(\bar{r}) & \bar{r} \text{ บน } T_n^- \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases} \quad (5.2)$$

กำหนดให้  $l_n$  คือ ความยาวขอบ

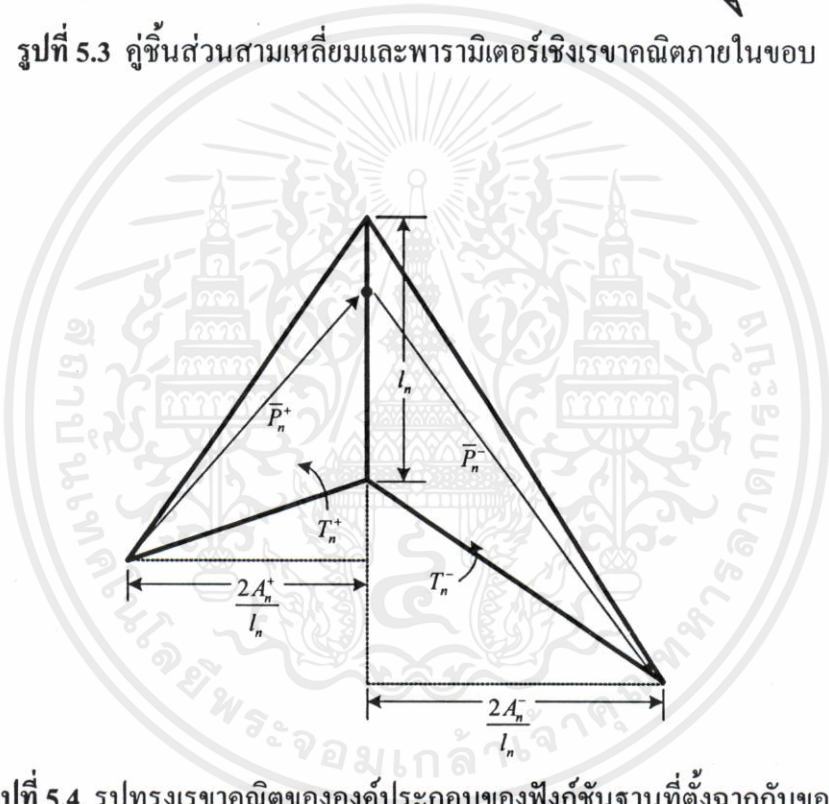
$A_n^\pm$  คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยม  $T_n^\pm$

$\bar{\rho}_n^+(\bar{r})$  คือ เวกเตอร์จากจุดยอดของสามเหลี่ยม  $T_n^+$  ไปยังจุดสังเกต  $r_n^+$

$\bar{\rho}_n^-(\bar{r})$  คือ เวกเตอร์จากจุดสังเกต  $r_n^-$  ไปยังจุดยอดของสามเหลี่ยม  $T_n^-$



รูปที่ 5.3 กลุ่มชิ้นส่วนสามเหลี่ยมและพารามิเตอร์เชิงเรขาคณิตภายในขอบ



รูปที่ 5.4 รูปทรงเรขาคณิตขององค์ประกอบของฟังก์ชันฐานที่ตั้งฉากกับขอบ

เมื่อพิจารณาให้มีโคโพลีจิวที่ค้ำยันประกบของสามเหลี่ยมแต่ละคู่ กระแสไฟฟ้าเชิงผิวสายอากาศ ( $\bar{J}$ ) จะเป็นผลรวมของกระแสไฟฟ้าที่เกิดจากโคโพลีจิว ( $\bar{I}$ ) บนค้ำยันประกบสามเหลี่ยมคูณกับสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่หาได้จากผลเฉลยของสมการโมเมนต์ ซึ่งสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่านั้นคือองค์ประกอบของเมตริกซ์อิมพีแดนซ์นั่นเอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\bar{I} = \bar{r}_c^- - \bar{r}_c^+ \tag{5.3}$$

$r_c^+$  และ  $r_c^-$  คือจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยม  $T^+$  และ  $T^-$  ตามลำดับ

จากหลักการที่กล่าวมากระแสไฟฟ้าเชิงผิวของสายอากาศสามารถเขียนเป็นสมการดังนี้

$$\bar{J} = \sum_{n=1}^N \bar{I}_n l_n \quad (5.4)$$

กำหนดให้  $n$  คือ ลำดับของด้านประกบสามเหลี่ยมคู่ที่  $n$

$N$  คือ จำนวนของด้านประกบสามเหลี่ยมทั้งหมด

ในการคำนวณจะกำหนดให้ใช้ฟังก์ชันทดสอบแบบกาลูเอกิน (Galerkin) เมตริกซ์อิมพีแดนซ์  $Z$  จะมีปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ระหว่างไดโพลจิวด้วยกัน องค์ประกอบในเมตริกซ์อิมพีแดนซ์  $Z_{mn}$  หมายถึงปฏิสัมพันธ์ที่เกิดจากไดโพล  $n$  ที่เกิดจากสนามระยะไกลกับกระแสไฟฟ้าของไดโพล ขนาดของเมตริกซ์อิมพีแดนซ์เท่ากับจำนวนองค์ประกอบด้านประกบของสามเหลี่ยมกระแสไฟฟ้าของไดโพลสามารถหาได้จากการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากไดโพลขนาดจำกัด (Analytical Solution for the Finite Dipole) หรือจากการใช้สมการอินทิกรัลสนามไฟฟ้า (Electric Field Integral Equation: EFIE)

#### 5.4 สมการอินทิกรัลสนามไฟฟ้า (Electric Field Integral Equation: EFIE)

สายอากาศสำหรับรับสัญญาณอาจถูกพิจารณาให้มองเป็นวัตถุโลหะใดที่ทำหน้าที่เป็นวัตถุที่ทำให้คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้ากระจัดกระจาย (Scatterer) เมื่อมีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางมาตกกระทบจะเป็นสาเหตุให้เกิดกระแสไฟฟ้าเกิดขึ้นที่พื้นผิวสายอากาศและทำให้เกิดสนามไฟฟ้าตามมา ถ้าตัดพื้นผิวสายอากาศให้เกิดช่องว่างลักษณะแคบ จะพบว่ามีความต่างศักย์แรงดันไฟฟ้าเกิดคร่อมที่ช่องว่างนั้น ทำให้เกิดสัญญาณรับขึ้นได้ เมื่อมองในทฤษฎีของการแพร่กระจายคลื่นซึ่งเป็นการส่งผ่านกำลังงาน สายอากาศที่กำลังทำหน้าที่รับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถที่ดึงพลังงานพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามาไว้บนพื้นที่หนึ่ง ๆ ได้ และหลังจากนั้นก็สามารถที่จะปลดปล่อยพลังงานที่อยู่ในช่องว่างแรงดัน (Voltage Gap) ออกมาสู่อากาศได้

$$\bar{E} = \bar{E}^i + \bar{E}^s \quad (5.5)$$

สนามไฟฟ้าลัพธ์เป็นผลรวมของสนามไฟฟ้าตกกระทบ (ตัวห้อย  $i$ ) และสนามไฟฟ้ากระจัดกระจาย (ตัวห้อย  $s$ ) สนามไฟฟ้าตกกระทบคือสัญญาณที่เดินทางเข้ามาสำหรับปัญหาเชิงกระจัดกระจาย (Scattering Problem) หรือเป็นสนามไฟฟ้าที่กระตุ้นให้กับสายอากาศสำหรับปัญหาเชิงการแพร่กระจายคลื่น (Radiation Problem) สนามไฟฟ้ากระจัดกระจายเกิดขึ้นจากกระแสเชิงผิว

และประจุมิระที่อยู่บนพื้นผิวโลหะ  $S$  ในกรณีคำนวณด้วยศักย์แบบผสม (Mixed-potential Formulation) เมื่อใช้สมการอินทิกริดิเฟอเรนเชียล (Integrodifferential Equation) สำหรับ  $\bar{J}$  โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต  $\hat{n} \times (\bar{E}^i + \bar{E}^s) = 0$  บนผิวดำนำ  $S$  จะได้

$$\bar{E}_{\text{tan}}^s(\bar{r}) = -j\omega\bar{A} - \nabla\Phi \quad (5.6)$$

บนแผ่นโลหะสนามไฟฟ้าในทิศทางสัมผัสมีค่าเป็นศูนย์ทำให้

$$-\bar{E}_{\text{tan}}^i = (-j\omega\bar{A} - \nabla\Phi)_{\text{tan}} \quad \bar{r} \text{ บน } S \quad (5.7)$$

กำหนดให้ศักย์เวกเตอร์แม่เหล็กและศักย์ไฟฟ้ามีค่าตาม (5.8) และ (5.9)

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \bar{J}(\bar{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5.8)$$

$$\Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \sigma \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (5.9)$$

กำหนดให้  $R = \bar{r} - \bar{r}'$   
จากสมการแมกซ์เวลล์

$$\nabla'_s \cdot \bar{J} = -j\omega\sigma \quad (5.10)$$

จะได้

$$\sigma = \frac{-1}{j\omega} \nabla'_s \cdot \bar{J} \quad (5.11)$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าใน (5.6) และ (5.7) จะหาค่าได้ถ้าทราบค่า  $\bar{J}$  และสามารถประมาณค่า  $\bar{J}$  ในพจน์ของฟังก์ชันฐาน  $\bar{f}_n$  ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกหรือทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการใช้

$$\bar{J}(\bar{r}') \approx \sum_{n=1}^N I_n \bar{f}_n(\bar{r}') \quad (5.12)$$

เมื่อ  $g(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jk(r-r')}}{r-r'}$  แทนลงใน (5.8) และ (5.9) จะทำให้ได้ (5.7) ในรูปใหม่ดังนี้

$$\bar{E}'_{\tan}(\bar{r}) = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_s \bar{J}(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' + \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \nabla \int_s \nabla'_s \cdot \bar{J}(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' \quad (5.13)$$

$$\bar{E}'_{\tan}(\bar{r}) = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_n \left[ \int_s \bar{f}_n(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' \right] + \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n \left[ \nabla \int_s \nabla'_s \cdot \bar{f}_n(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' \right] \quad (5.14)$$

## 5.5 สมการโมเมนต์

การคำนวณด้วยระเบียบวิธีโมเมนต์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ฟังก์ชันทดสอบแบบกาเลอจิน ซึ่งกำหนดคสัญลักษณ์ฟังก์ชันทดสอบแทนด้วย  $\bar{f}_m(\bar{r})$  เมื่อใช้ฟังก์ชันทดสอบนี้กับ (5.14) จะได้

$$\int_s \bar{f}_m(\bar{r}) \cdot \bar{E}'_{\tan}(\bar{r}) dS = j\omega \int_s \bar{f}_m(\bar{r}) \cdot \bar{A}(\bar{r}) dS - \int_s \Phi(\bar{r}) (\nabla \cdot \bar{f}_m(\bar{r})) dS \quad (5.15)$$

$$\text{เนื่องจากอาศัยทฤษฎีสโตกส์} \quad \int_s \nabla \Phi(\bar{r}) \cdot \bar{f}_m dS = - \int_s \Phi(\bar{r}) (\nabla \cdot \bar{f}_m) dS$$

โดยทั่วไปสมการโมเมนต์จะอยู่ในรูป  $V = ZI$  สมการโมเมนต์ในรูปของเมตริกซ์จะมีค่า  $Z = [Z_{mn}]$ ,  $I = [I_n]$  และ  $V = [V_m]$

$$V_m = \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n \quad (5.16)$$

$$V_m = \int_s \bar{f}_m(\bar{r}) \cdot \bar{E}'_{\tan}(\bar{r}) dS \quad (5.17)$$

ใช้ค่า  $\bar{E}'_{\tan}(\bar{r})$  ใน (5.14) แทนลงใน (5.15)  $V_m$  จะมีค่า

$$V_m = \sum_{n=1}^N I_n \left[ \frac{j\omega\mu}{4\pi} \iint_s \bar{f}_m(\bar{r}) \bar{f}_n(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS - \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \iint_s (\nabla \cdot \bar{f}_m(\bar{r})) (\nabla'_s \cdot \bar{f}_n(\bar{r}')) g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS \right] \quad (5.18)$$

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_s \int_s \bar{f}_m(\bar{r}) \bar{f}_n(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS$$

$$- \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \int_s \int_s (\nabla \cdot \bar{f}_m(\bar{r})) (\nabla'_s \cdot \bar{f}_n(\bar{r}')) g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS \quad (5.19)$$

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \left[ \frac{l_m l_n}{4A_m^+ A_m^- T_m^+ T_m^-} \int \int \bar{\rho}_m^+(\bar{r}) \bar{\rho}_n^+(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS \right.$$

$$+ \frac{l_m l_n}{4A_m^+ A_m^-} \int \int \bar{\rho}_m^+(\bar{r}) \bar{\rho}_n^-(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS$$

$$+ \frac{l_m l_n}{4A_m^- A_m^+} \int \int \bar{\rho}_m^-(\bar{r}) \bar{\rho}_n^+(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS$$

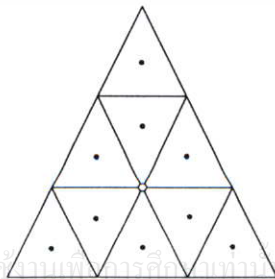
$$+ \left. \frac{l_m l_n}{4A_m^- A_m^+} \int \int \bar{\rho}_m^-(\bar{r}) \bar{\rho}_n^-(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS \right]$$

$$- \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{l_m l_n}{A_m^+ A_m^+ T_m^+ T_m^+} \int \int g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS - \frac{l_m l_n}{A_m^+ A_m^- T_m^+ T_m^-} \int \int g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS \right.$$

$$\left. - \frac{l_m l_n}{A_m^- A_m^+ T_m^- T_m^+} \int \int g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS + \frac{l_m l_n}{A_m^- A_m^- T_m^- T_m^-} \int \int g(\bar{r}, \bar{r}') dS' dS \right] \quad (5.20)$$

ในการปริพันธ์เชิงเลขบนพื้นผิวชิ้นส่วนสามเหลี่ยม การคำนวณหาค่าจุดกึ่งกลางของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีธรรมดาจะทำให้เกิดปัญหา Singularity ได้เพราะตำแหน่งที่แหล่งกำเนิดจะเป็นจุดเดียวกับตำแหน่งจุดสังเกต เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวจึงได้ทำการแบ่งชิ้นส่วนสามเหลี่ยมออกเป็น 9 ชิ้นส่วนย่อยโดยใช้กฎหนึ่งส่วนสามดังแสดงในรูปที่ 5.5 ซึ่งจะทำให้ได้ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน  $g$  มีค่าเป็น

$$\int_{T_m} g(\bar{r}, \bar{r}') dS' = \frac{A_m}{9} \sum_{k=1}^9 g(\bar{r}_k^c, \bar{r}') \quad (5.21)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเฉพาะเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.5 การแบ่งชิ้นส่วนสามเหลี่ยมออกเป็น 9 ชิ้นส่วนย่อย จุดสีขาวแสดงจุดกึ่งกลางของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม จุดสีดำแสดงจุดกึ่งกลางของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อย

เมื่อทราบค่า  $Z_{mn}$  และ  $V_{mn}$  จะทำให้ได้  $I_n$  และเมื่อนำค่า  $I_n$  ไปแทนใน (5.12) จะทำให้ทราบค่า  $\bar{J}(\bar{r})$  ซึ่งในที่สุดก็จะได้ผลเฉลยของ  $\bar{E}'_{tan}(\bar{r})$  ซึ่งเป็นสนามไฟฟ้าที่กระตุ้นให้กับสายอากาศ การหาอินเวอร์สของสมการที่มีค่าคำสั่ง  $I = \text{inv}(Z) \cdot V$  นั้นทางปฏิบัติทำได้ยาก สิ้นเปลืองทั้งเวลา และไม่มีคามแม่นยำ จึงต้องใช้โอเปอร์เรเตอร์  $I = Z \cdot V$  โดยที่  $V$  เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ ซึ่งคำสั่งนี้ จะเป็นการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination) ซึ่งจะไม่อยู่ในรูปแบบที่มีการอินเวอร์ส แต่ถ้าเมตริกซ์มีขนาดที่ใหญ่กว่า  $4000 \times 4000$  เพื่อความเร็วในการคำนวณจะแนะนำให้ใช้ฟังก์ชัน gmres แทน ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธี Generalized Minimum Residual

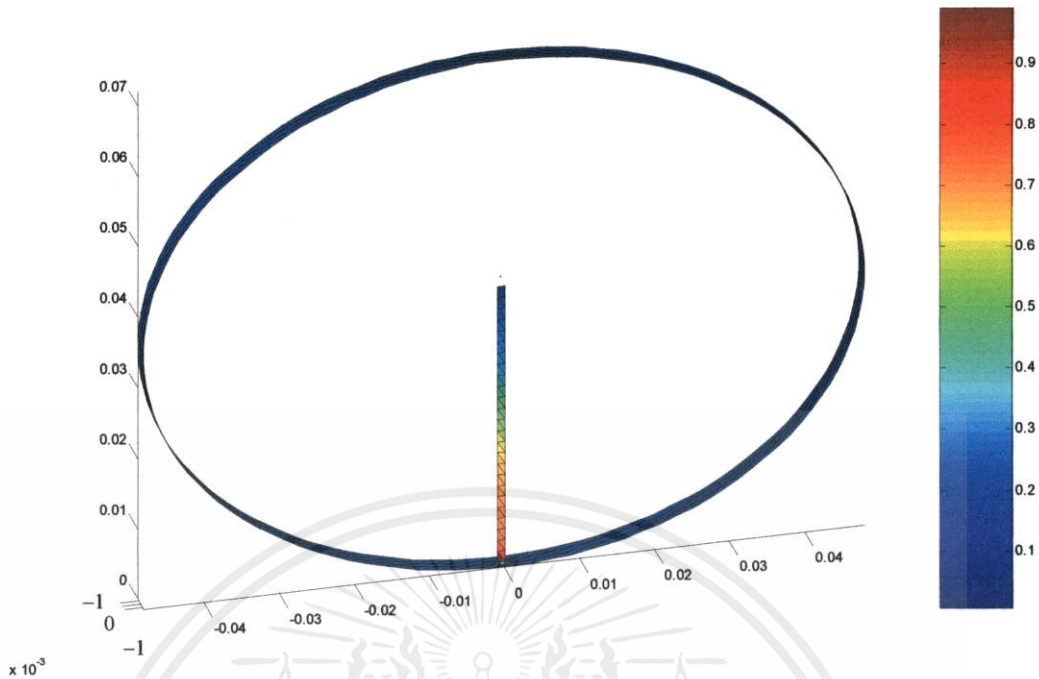


รูปที่ 5.6 การจำลองจุดกระตุ้นที่โพรบไฟฟ้า

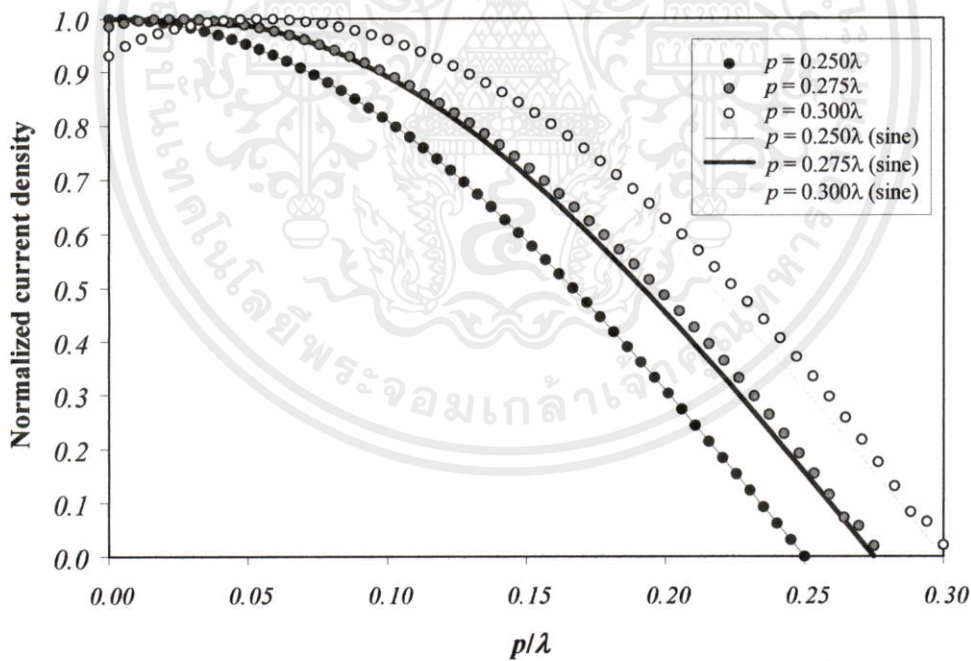
กำหนดให้แบบจำลองจุดกระตุ้นที่โพรบไฟฟ้าเป็นดังแสดงในรูปที่ 5.6 ดังนั้นอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศจะหาได้จาก

$$Z_{in} = \frac{V}{I_{n1}I_{n1} + I_{n2}I_{n2}} \quad (5.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.7 การกระจายกระแสเชิงผิวของสายอากาศ

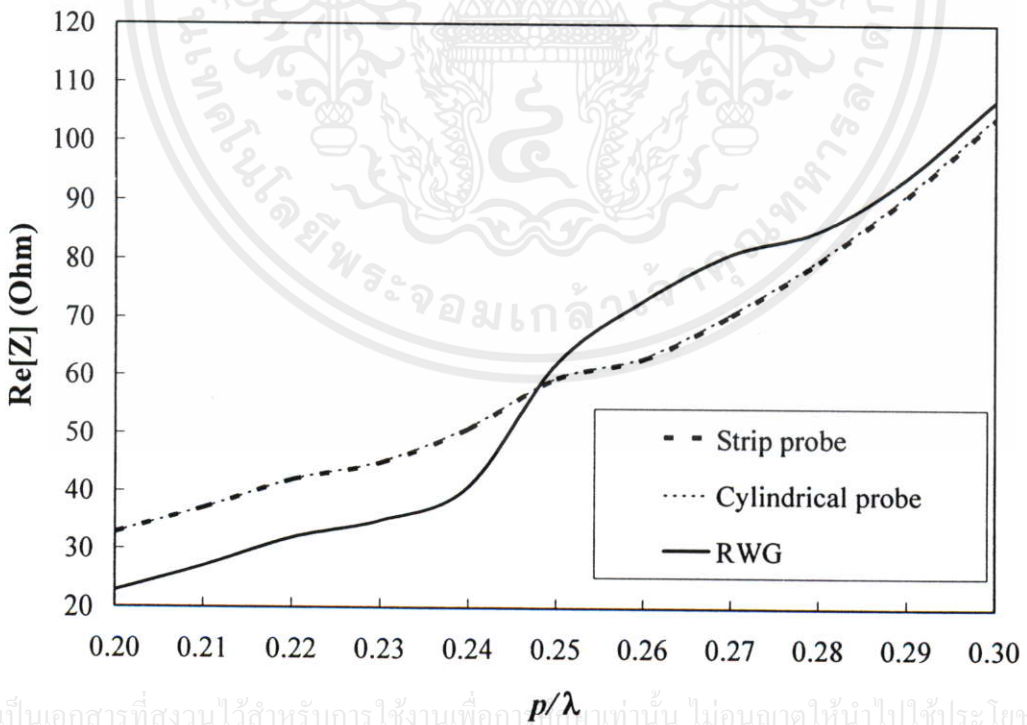


รูปที่ 5.8 การกระจายกระแสเชิงผิวที่ความยาวโพรบต่างๆ

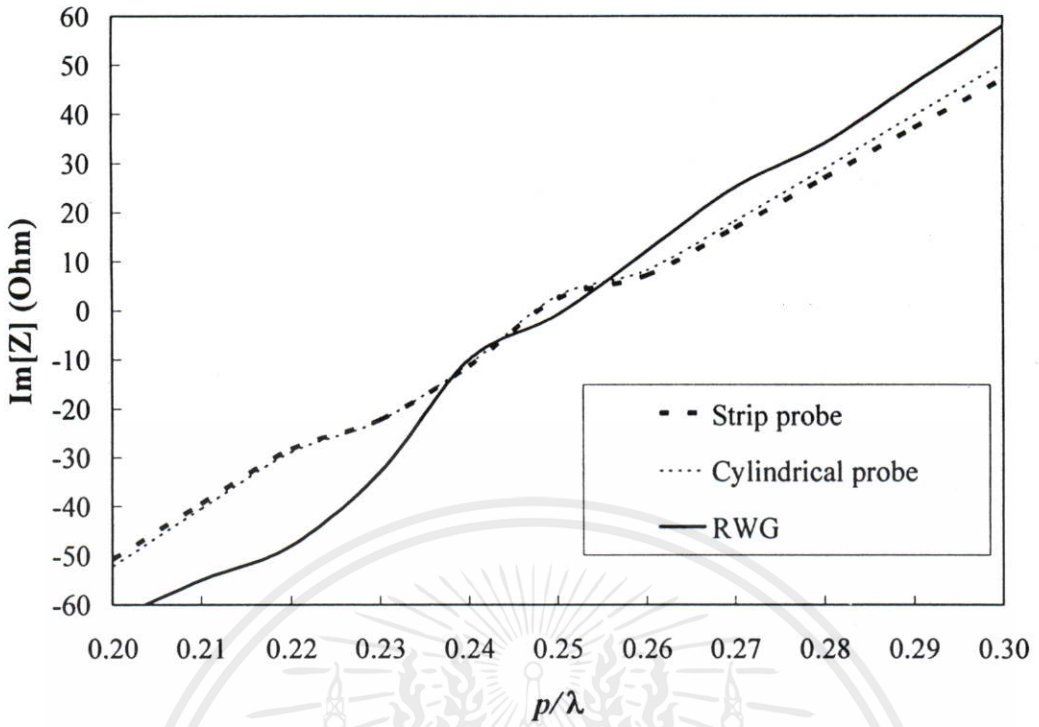
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 รูปที่ 5.7 แสดงการกระจายกระแสเชิงผิวของแบบจำลองสายอากาศ โดยค่ากระแสเชิงผิวที่  
 ไม่ว่ากรณีใดๆนั้นแล้ว อีกทั้งห้ามมิให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
 ถูกนอร์มัลไลซ์ของสายอากาศจะมีค่าเปลี่ยนแปลงมากบนบริเวณโพรบ โดยมีค่ากระแส  
 นอร์มัลไลซ์ที่มากที่สุดที่จุดป้อนสัญญาณ และค่อยๆ ลดลงตามแนวแกนยาวของโพรบ จากการ

วิเคราะห์กระแสที่ไหลบนโพรบที่มีความยาว  $0.25\lambda$  พบว่าการกระจายกระแสที่โพรบจะมีการเปลี่ยนแปลงตามความยาวโพรบเป็นฟังก์ชันไซน์ ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 5.8 และเมื่อเปลี่ยนความยาวโพรบให้มีค่า  $0.75\lambda$  และ  $0.30\lambda$  ก็จะพบว่าการกระจายกระแสดังกล่าวก็คล้ายกับฟังก์ชันไซน์ เมื่อความถี่ปฏิบัติการคือ 1.92 GHz

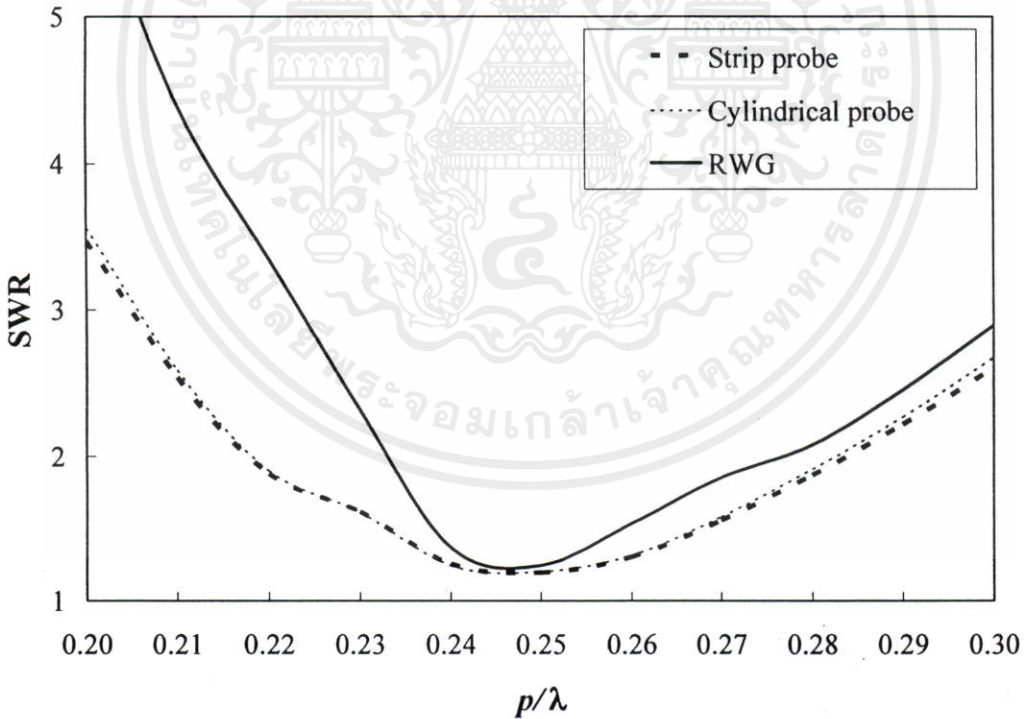
เมื่อพิจารณาคูณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศเมื่อความยาวโพรบมีค่า  $0.25\lambda-0.30\lambda$  จากการคำนวณด้วยวิธี RWG เปรียบเทียบกับแบบจำลองสายอากาศที่มีโพรบมีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมแถบยาวกับแบบจำลองที่มีโพรบมีลักษณะเป็นทรงกระบอก ในการคำนวณกำหนดให้ความกว้างของโพรบสี่เหลี่ยมแถบยาว 2 mm (4 เท่าของรัศมีโพรบไฟฟ้าที่ใช้งานจริง) และรัศมีของโพรบทรงกระบอกมีค่า 0.5 mm (เท่ากับรัศมีโพรบไฟฟ้าที่ใช้งานจริง) พบว่าค่าความต้านทานอินพุตของสายอากาศที่ความยาวโพรบ  $0.20\lambda$ ,  $0.25\lambda$  และ  $0.30\lambda$  สำหรับวิธี RWG มีค่า 22  $\Omega$ , 62  $\Omega$  และ 107  $\Omega$  ตามลำดับ จากรูปที่ 5.9 ผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นทรงกระบอก โดยที่ค่าความต้านทานที่ความยาวโพรบ  $0.20\lambda$ ,  $0.25\lambda$  และ  $0.30\lambda$  มีค่า 33  $\Omega$ , 59  $\Omega$  และ 104  $\Omega$  ตามลำดับ แนวโน้มการเปลี่ยนแปลงกราฟผลค่าความต้านทานที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี RWG สอดคล้องกับแบบจำลองที่นำมาเปรียบเทียบ



รูปที่ 5.9 ค่าความต้านทานอินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda-0.30\lambda$



รูปที่ 5.10 ค่ารีแอกแตนซ์อินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda$ – $0.30\lambda$



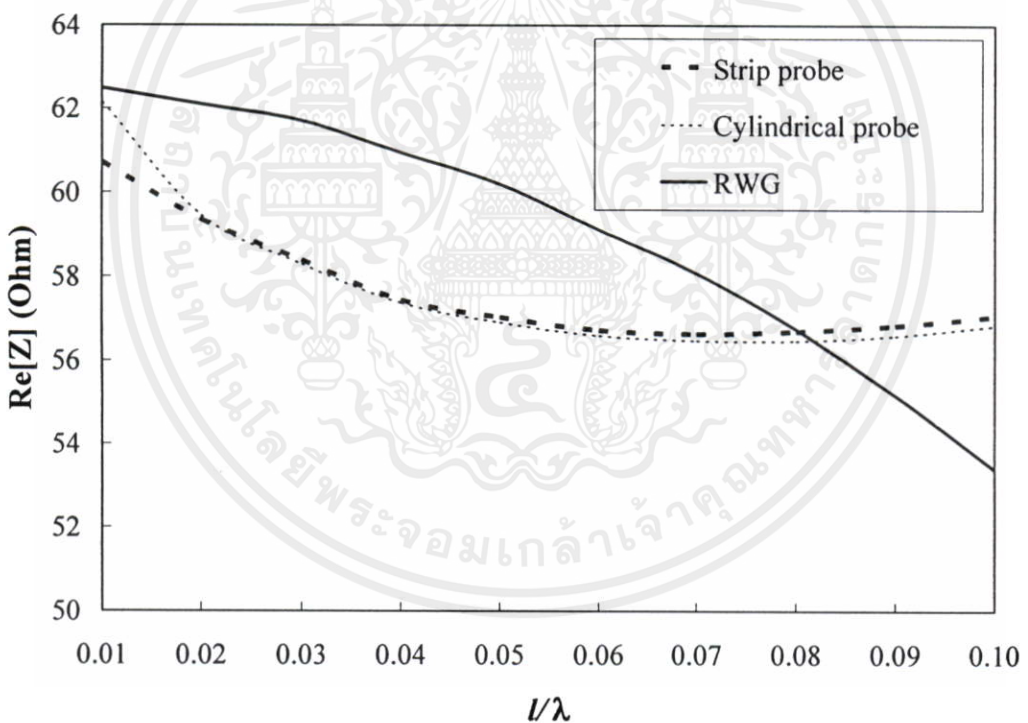
รูปที่ 5.11 ค่า SWR ของสายอากาศ เมื่อความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda$ – $0.30\lambda$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้ง จากรูปที่ 5.10 ค่ารีแอกแตนซ์อินพุตของสายอากาศที่ความยาวโพรบ  $0.20\lambda$ ,  $0.25\lambda$  และ  $0.30\lambda$  สำหรับวิธี RWG มีค่า  $-63 \Omega$ ,  $-0.8 \Omega$  และ  $58 \Omega$  ตามลำดับ ผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบ เป็นสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นทรงกระบอก โดยที่ค่าความ

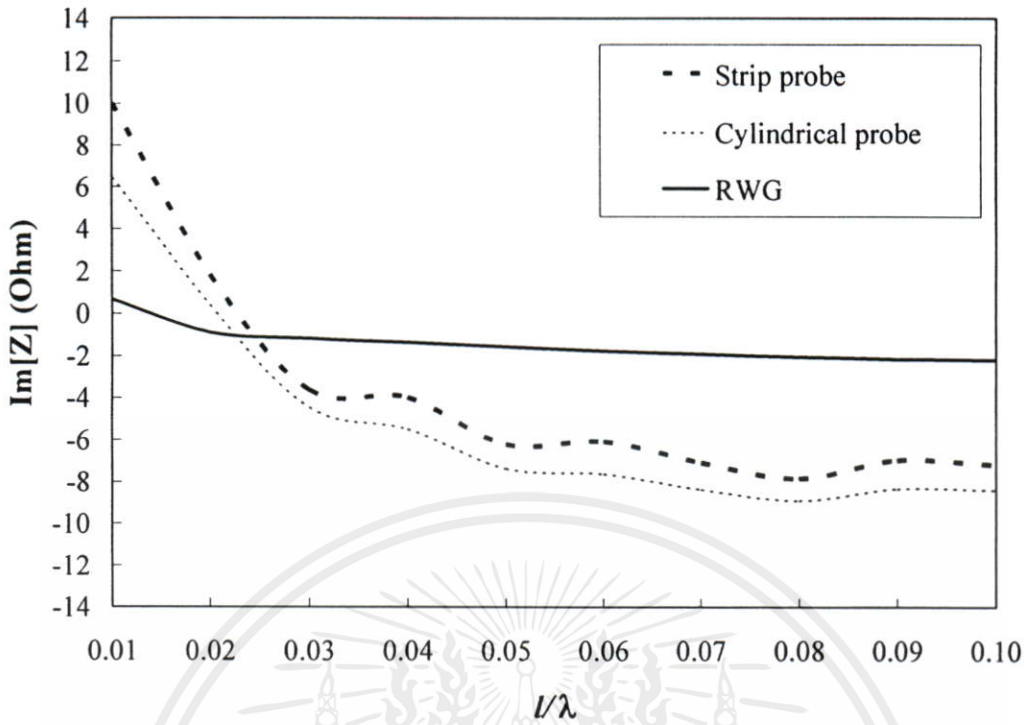
ด้านทานที่ความยาวโพรบ  $0.20\lambda$ ,  $0.25\lambda$  และ  $0.30\lambda$  สำหรับโพรบสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่า  $-51 \Omega$ ,  $2 \Omega$  และ  $47 \Omega$  ตามลำดับ สำหรับโพรบทรงกระบอกมีค่า  $-52 \Omega$ ,  $3 \Omega$  และ  $50 \Omega$  ตามลำดับ แนวโน้มการเปลี่ยนแปลงกราฟผลค่าความต้านทานที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี RWG สอดคล้องกับแบบจำลองที่นำมาเปรียบเทียบ

จากรูปที่ 5.11 ค่า SWR ของสายอากาศที่ความยาวโพรบ  $0.20\lambda$ ,  $0.25\lambda$  และ  $0.30\lambda$  สำหรับวิธี RWG มีค่า  $5.97:1$ ,  $1.24:1$  และ  $2.89:1$  ตามลำดับ ผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นทรงกระบอก โดยที่ค่าความต้านทานที่ความยาวโพรบ  $0.20\lambda$ ,  $0.25\lambda$  และ  $0.30\lambda$  สำหรับโพรบสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่า  $3.47:1$ ,  $1.19:1$  และ  $2.60:1$  ตามลำดับ สำหรับโพรบทรงกระบอกมีค่า  $3.56:1$ ,  $1.20:1$  และ  $2.67:1$  ตามลำดับ แนวโน้มการเปลี่ยนแปลงกราฟผลค่าความต้านทานที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี RWG สอดคล้องกับแบบจำลองที่นำมาเปรียบเทียบ

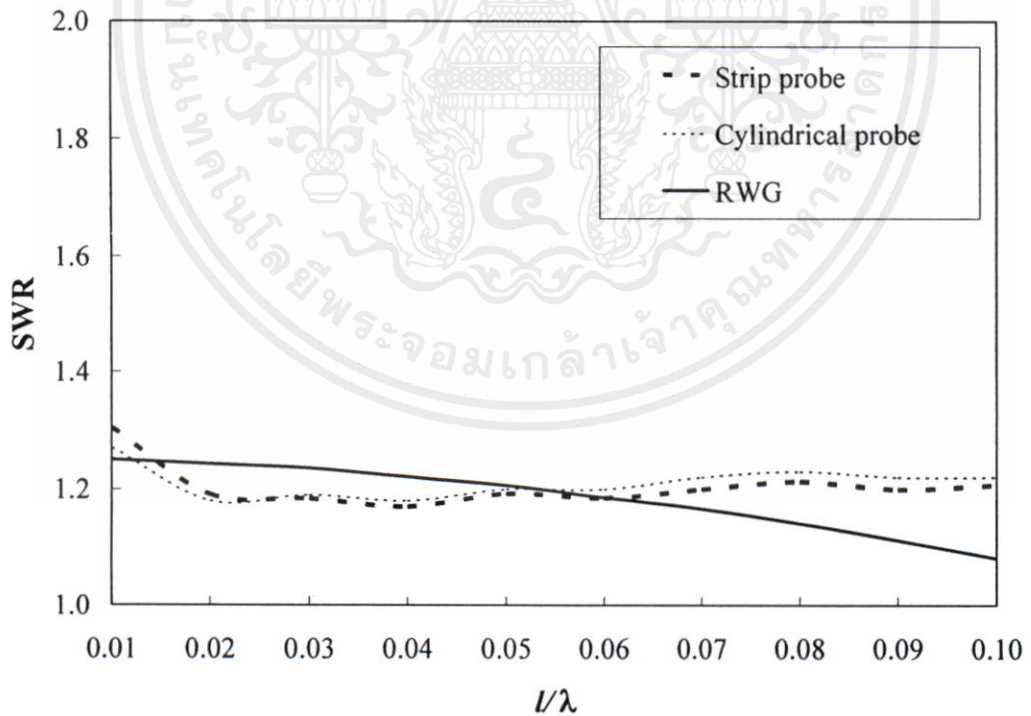


รูปที่ 5.12 ค่าความต้านทานอินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาววงแหวนมีค่า  $0.01\lambda$ – $0.10\lambda$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.13 ค่ารีแอกแตนซ์อินพุตของสายอากาศ เมื่อความยาววงแหวนมีค่า  $0.01\lambda-0.10\lambda$



รูปที่ 5.14 ค่า SWR ของสายอากาศ เมื่อความยาววงแหวนมีค่า  $0.01\lambda-0.10\lambda$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่ควรนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าความต้านทานอินพุตของสายอากาศที่ความยาววงแหวน  $0.01\lambda$ ,  $0.05\lambda$  และ  $0.10\lambda$  สำหรับวิธี RWG มีค่า  $62 \Omega$ ,  $60 \Omega$  และ  $53 \Omega$  ตามลำดับ จากรูปที่ 5.12 ผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นทรงกระบอก โดยที่ค่าความต้านทานที่ความยาวโพรบ  $0.01\lambda$ ,  $0.05\lambda$  และ  $0.10\lambda$  สำหรับโพรบสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่า  $60 \Omega$ ,  $57 \Omega$  และ  $57 \Omega$  ตามลำดับ สำหรับโพรบทรงกระบอกมีค่า  $62 \Omega$ ,  $57 \Omega$  และ  $57 \Omega$  ตามลำดับ

จากรูปที่ 5.13 ค่ารีแอกแตนซ์อินพุตของสายอากาศที่ความยาวโพรบ  $0.01\lambda$ ,  $0.05\lambda$  และ  $0.10\lambda$  สำหรับวิธี RWG มีค่า  $1 \Omega$ ,  $-2 \Omega$  และ  $-2 \Omega$  ตามลำดับ ผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นทรงกระบอก โดยที่ค่าความต้านทานที่ความยาวโพรบ  $0.01\lambda$ ,  $0.05\lambda$  และ  $0.10\lambda$  สำหรับโพรบสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่า  $10 \Omega$ ,  $-6 \Omega$  และ  $7 \Omega$  ตามลำดับ สำหรับโพรบทรงกระบอกมีค่า  $6 \Omega$ ,  $-7 \Omega$  และ  $-8 \Omega$  ตามลำดับ

จากรูปที่ 5.14 ค่า SWR ของสายอากาศที่ความยาวโพรบ  $0.01\lambda$ ,  $0.05\lambda$  และ  $0.10\lambda$  สำหรับวิธี RWG มีค่า  $1.25:1$ ,  $1.20:1$  และ  $1.08:1$  ตามลำดับ ผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากแบบจำลองโพรบเป็นทรงกระบอก โดยที่ค่าความต้านทานที่ความยาวโพรบ  $0.01\lambda$ ,  $0.05\lambda$  และ  $0.10\lambda$  สำหรับโพรบสี่เหลี่ยมแถบยาวมีค่า  $1.30:1$ ,  $1.19:1$  และ  $1.27:1$  ตามลำดับ สำหรับโพรบทรงกระบอกมีค่า  $1.27:1$ ,  $1.20:1$  และ  $1.22:1$  ตามลำดับ

ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงความยาวโพรบ จะพบว่าการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างมากเมื่อเทียบกับกรณีเปลี่ยนแปลงความยาววงแหวน โดยเมื่อความยาวโพรบเพิ่มขึ้น ค่าความต้านทานและค่ารีแอกแตนซ์จะมีค่ามากขึ้น เมื่อความยาววงแหวนมีค่ามากขึ้น ค่าความต้านทานและค่ารีแอกแตนซ์จะมีค่าลดลง ความยาวโพรบที่เหมาะสมนั้นสามารถเลือกจากค่าที่ทำให้ได้ค่า SWR ต่ำสุด ซึ่งคือความยาวโพรบที่มีค่าประมาณ  $0.25\lambda$  ( $39 \text{ mm}$ ) สำหรับการเลือกความยาววงแหวนที่เหมาะสมนั้นเนื่องจาก SWR มีค่าใกล้เคียงกัน จึงเลือกจากความยาวโพรบที่ให้ค่าเรโซแนนซ์ที่ดี นั่นคือมีค่ารีแอกแตนซ์เท่ากับศูนย์ ซึ่งคือความยาวโพรบที่มีค่า  $0.01\lambda - 0.02\lambda$  ( $1.56 \text{ mm} - 3.12 \text{ mm}$ ) จะพบว่าขนาดที่เหมาะสมของสายอากาศที่เลือกไว้จากบทที่ 3 นั้น (ความยาวโพรบมีค่า  $39 \text{ mm}$  และความยาววงแหวนมีค่า  $3 \text{ mm}$ ) เป็นค่าที่เหมาะสมสอดคล้องกับผลคำนวณที่ได้จากวิธี RWG

## 5.6 บทสรุป

เอกสารนี้เป็นเอกสารผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีโมเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันฐาน RWG พบว่าการกระจายกระแสไฟฟ้าที่ผิวของสายอากาศจะมีค่ามากที่สุดบริเวณจุดป้อนสัญญาณ ซึ่งการกระจายกระแสไฟฟ้าไปตามความยาวโพรบนั้นจะมีการเปลี่ยนแปลงแบบไซน์ นอกจากนั้นยังศึกษาผลกระทบการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความยาวโพรบและความวง

แหวน โดยพบว่าเมื่อความยาวโพรบเพิ่มขึ้น ค่าความต้านทานและค่ารีแอกแตนซ์จะมีค่ามากขึ้น เมื่อความยาววงแหวนมีค่ามากขึ้น ค่าความต้านทานและค่ารีแอกแตนซ์จะมีค่าลดลง ความยาวโพรบที่เหมาะสมนั้นสามารถเลือกจากค่าที่ทำให้ได้ค่า SWR ต่ำสุด ซึ่งคือความยาวโพรบที่มีค่าประมาณ  $0.25\lambda$  (39 mm) สำหรับการเลือกความยาววงแหวนที่เหมาะสมนั้นเนื่องจาก SWR มีค่าใกล้เคียงกัน จึงเลือกจากความยาววงแหวนที่ให้ค่าเรโซแนนซ์ที่ดี นั่นคือมีค่ารีแอกแตนซ์เท่ากับศูนย์ ซึ่งคือความยาววงแหวนที่มีค่า  $0.01\lambda - 0.02\lambda$  (1.56 mm – 3.12 mm) ซึ่งจะได้ว่าขนาดของสายอากาศที่เหมาะสมจากวิธี RWG นั้นสอดคล้องกับผลที่ได้จากการจำลองแบบด้วยโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบทที่ 3 ที่ได้ค่าความยาวโพรบและความยาววงแหวน 39 mm และ 3 mm ตามลำดับ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 6

### ผลการทดสอบสายอากาศและผลการวิเคราะห์

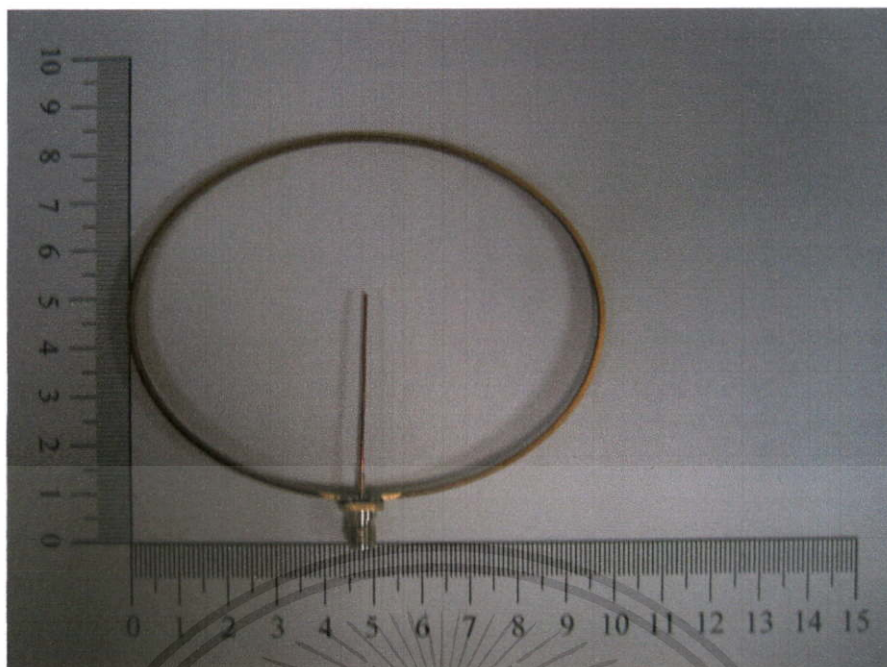
#### 6.1 บทนำ

หลังจากที่ได้ทำการวิเคราะห์ขนาดของสายอากาศที่เหมาะสมจากการจำลองแบบในบทที่ 3 ทำการวิเคราะห์แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นด้วยฟังก์ชันกรีนไดแอดิกในบทที่ 4 และทำการวิเคราะห์คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศด้วยวิธีฟังก์ชันฐาน RWG ในบทที่ 5 ทำให้จำเป็นที่จะต้องมีการทดสอบสายอากาศที่สร้างขึ้นจริงเพื่อหาค่า  $|S_{11}|$  อิมพีแดนซ์อินพุต แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น และอัตราขยายของสายอากาศ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงการทดสอบและผลทดสอบคุณลักษณะของสายอากาศเพื่อเปรียบเทียบและยืนยันผลที่ได้จากการคำนวณว่ามีความถูกต้องมากน้อยเพียงใด ซึ่งการทดสอบสายอากาศนี้จะทำที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz โดยสายอากาศต้นแบบมีแบนด์วิดธ์ครอบคลุมการใช้งานของระบบ PCS ช่วงกว้างความถี่ 1.85 GHz ถึง 1.99 GHz พร้อมทั้งได้ทำการทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายของสายอากาศในกรณีขนาดช่องเปิดวงแหวนที่มีค่าความถี่ต่าง ๆ เพื่อพิจารณาผลกระทบที่มีต่อคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่น

#### 6.2 การสร้างสายอากาศและการทดสอบ

สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรีที่สร้างขึ้นเป็นสายอากาศต้นแบบสำหรับทำการทดสอบแสดงในรูปที่ 6.1 องค์ประกอบของสายอากาศที่เป็นวงแหวนวงรีสร้างขึ้นจากวัสดุที่เป็นทองเหลืองซึ่งเป็นโลหะที่มีค่าความนำไฟฟ้า  $1.57 \times 10^7$  S/m วงแหวนวงรีสร้างขึ้นด้วยการใช้เครื่องตัดแบบเส้นลวด (Wire-cut Machine) ทำให้ขนาดของวงแหวนวงรีมีความแม่นยำและมีความคงทน คอนเนกเตอร์ที่ใช้คือชนิด SMA โพรบที่ใช้ทำจากลวดตัวนำทองแดงที่มีรัศมี 0.7 mm โดยขนาดของสายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้นสร้างตามขนาดที่แสดงไว้ในตารางที่ 3.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

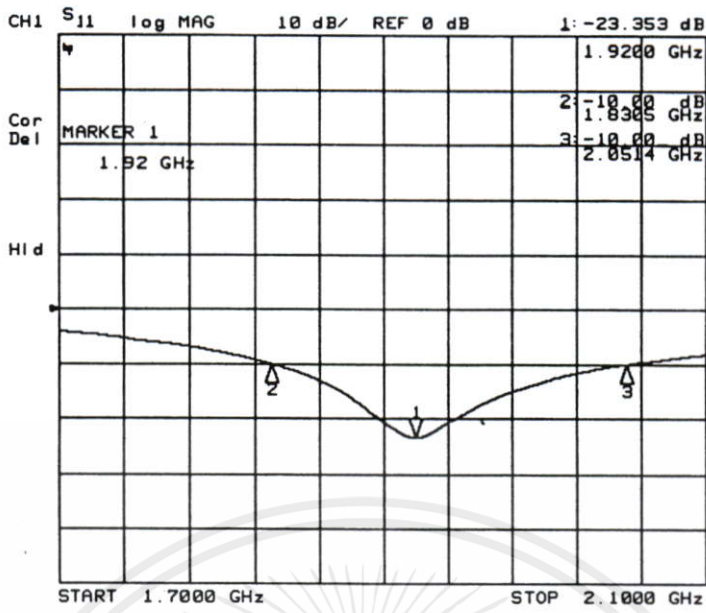


รูปที่ 6.1 สายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้น

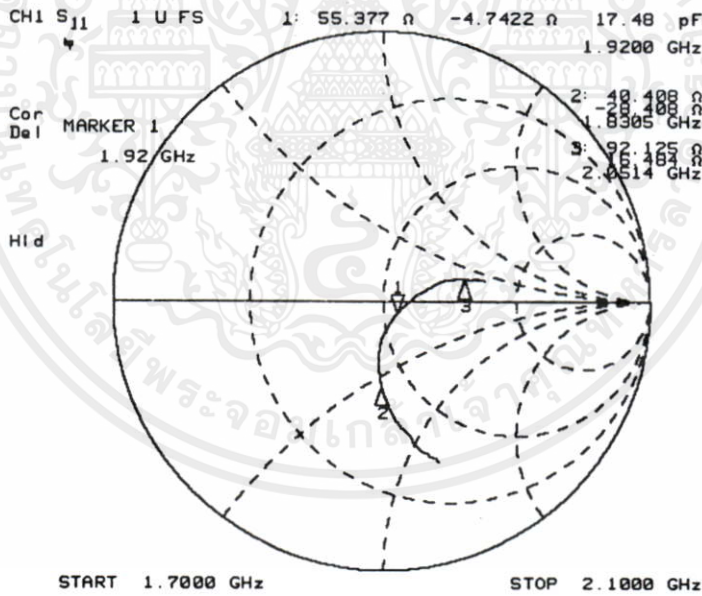
### 6.2.1 การทดสอบ $|S_{11}|$ และอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศต้นแบบ

เมื่อทำการทดสอบ  $|S_{11}|$  ของสายอากาศต้นแบบพบว่าอิมพีแดนซ์ที่  $|S_{11}| < -10$  dB มีค่า 1.8305 GHz ถึง 2.0514 GHz ซึ่งครอบคลุมย่านความถี่ในระบบ PCS ที่มีแบนด์วิดท์มีค่า 1.85 GHz ถึง 1.99 GHz โดยมีค่า  $|S_{11}|$  ต่ำสุดมีค่า  $-23.353$  dB ที่ความถี่ 1.92 GHz ผลการทดสอบ  $|S_{11}|$  ของสายอากาศต้นแบบที่ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.2 ตัวชี้ (Marker) ที่ 1 แสดงค่าที่ความถี่ 1.92 GHz ซึ่งเป็นความถี่กลางของย่านความถี่ในระบบ PCS ตัวชี้ที่ 2 แสดงค่าที่ความถี่ขอบต่ำแบนด์วิดท์ของสายอากาศ ตัวชี้ที่ 3 แสดงค่าที่ความถี่ขอบสูงแบนด์วิดท์ของสายอากาศ จากผลการทดสอบสายอากาศพบว่าสายอากาศมีความกว้างแถบความถี่เท่ากับ 11.5%

เมื่อทำการทดสอบอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศต้นแบบพบว่ามีความต้านทานอินพุตมีค่า  $40.408 \Omega$ ,  $55.377 \Omega$  และ  $92.125 \Omega$  และมีค่ารีแอคแตนซ์อินพุตมีค่า  $-28.408 \Omega$ ,  $-4.742 \Omega$  และ  $16.484 \Omega$  ที่ความถี่ 1.8305 GHz, 1.9200 GHz และ 2.0514 GHz ตามลำดับ ผลการทดสอบอินพุตอิมพีแดนซ์ของสายอากาศต้นแบบที่ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.3 เมื่อความถี่สูงขึ้นค่าความต้านทานอินพุตและค่ารีแอคแตนซ์อินพุตของสายอากาศมีค่าเพิ่มมากขึ้น



รูปที่ 6.2 ผลการทดสอบค่า  $|S_{11}|$



รูปที่ 6.3 ผลการทดสอบค่าอิมพีแดนซ์อินพุต

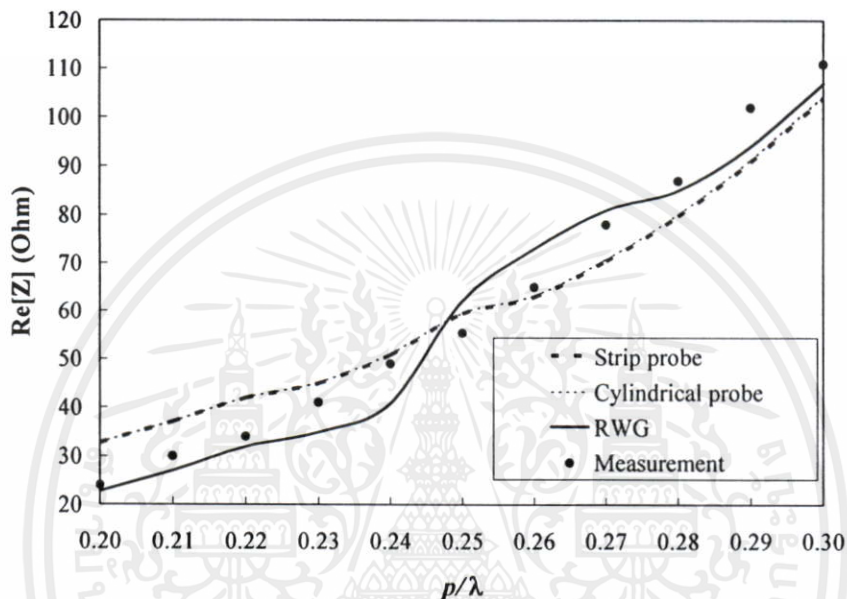
ตารางที่ 6.1 การเปรียบเทียบค่าอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศต้นแบบที่ความถี่ปฏิบัติการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ 1.92 GHz สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

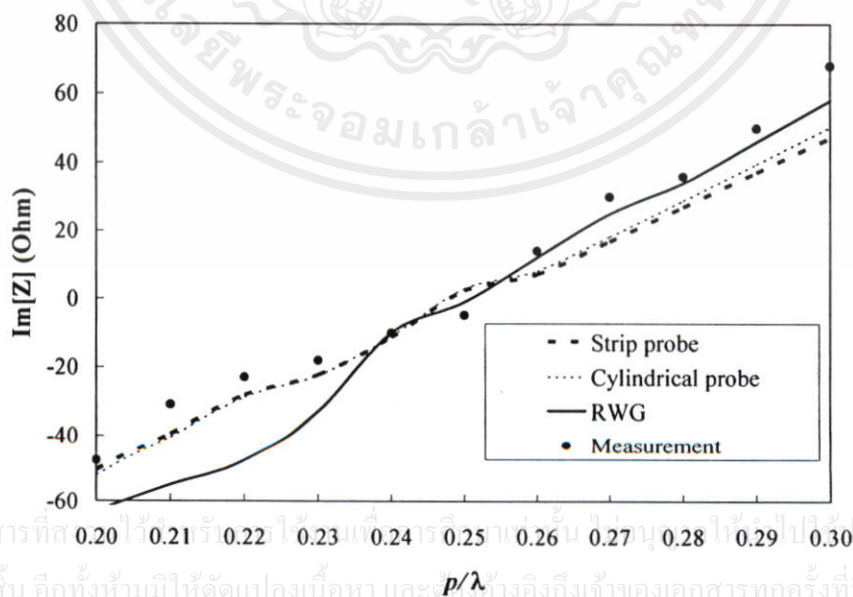
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้เผยแพร่เอกสารฉบับนี้ไปใช้

	ผลการทดสอบ	วิธี RWG	แบบจำลองที่มีโพรบทรงกระบอก
ค่าความต้านทาน ( $\Omega$ )	55.38	62.00	59.00
ค่ารีแอกแตนซ์ ( $\Omega$ )	-4.74	-0.80	3.00

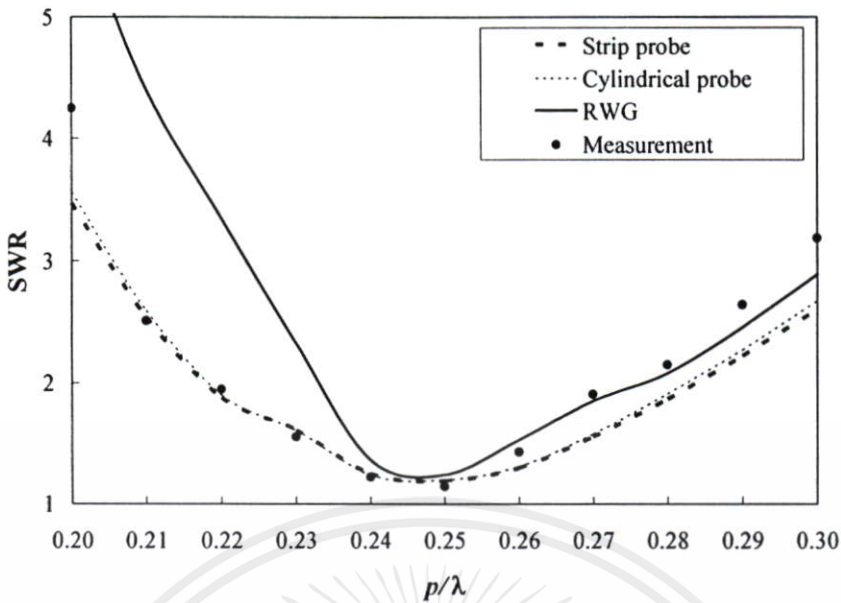
จากตารางที่ 6.1 พบว่าค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากวิธี RWG ค่าความผิดของค่ารีแอกแตนซ์อินพุตที่ได้จากวิธี RWG ค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และค่าความผิดพลาดของค่ารีแอกแตนซ์อินพุตที่ได้จากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีแบบจำลองเป็นโพรบทรงกระบอก มีค่าไม่เกิน  $8 \Omega$  ซึ่งถือผลการคำนวณมีความแม่นยำ



รูปที่ 6.4 ผลการทดสอบค่าอิมพีแดนซ์อินพุต เมื่อความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda - 0.30\lambda$



รูปที่ 6.5 ผลการทดสอบค่ารีแอกแตนซ์อินพุต เมื่อความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda - 0.30\lambda$



รูปที่ 6.6 ผลการทดสอบค่า SWR เมื่อความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda-0.30\lambda$

จากรูปที่ 6.4–6.6 เมื่อพิจารณาในกรณีที่สายอากาศมีความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda-0.30\lambda$  พบว่าค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากวิธี RWG ค่าความผิดของค่ารีแอกแตนซ์อินพุตที่ได้จากวิธี RWG ค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และค่าความผิดพลาดของค่ารีแอกแตนซ์อินพุตที่ได้จากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีแบบจำลองเป็นโพรบทรงกระบอก มีค่าไม่เกิน  $9 \Omega$  และ  $25 \Omega$  ตามลำดับ ซึ่งถือผลการคำนวณมีความแม่นยำ เมื่อความยาวโพรบยาวตั้งแต่  $0.23\lambda-0.30\lambda$  ค่าความผิดพลาดของค่า SWR มีค่าไม่เกิน 0.7 : 1

## 6.2.2 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศต้นแบบ

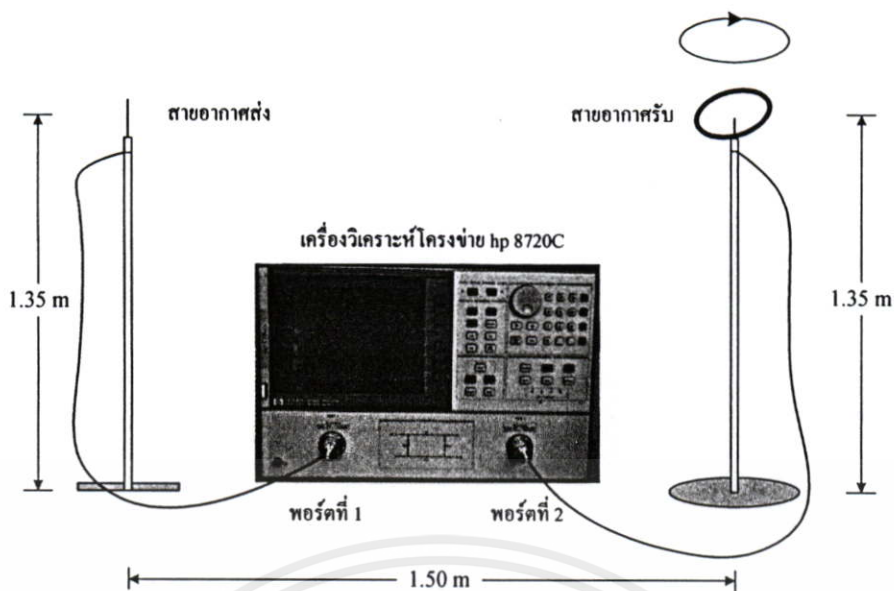
อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดสอบสายอากาศประกอบด้วย

1. สายอากาศแบบสองทิศทางที่ใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงรีซึ่งเป็นสายอากาศต้นแบบ ดังแสดงในรูปที่ 6.1 ทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับ โดยสายอากาศนี้จะถูกหมุนรอบตัวเพื่อบันทึกค่าความเข้มสนามไฟฟ้าที่รับได้ในมุมต่างๆ

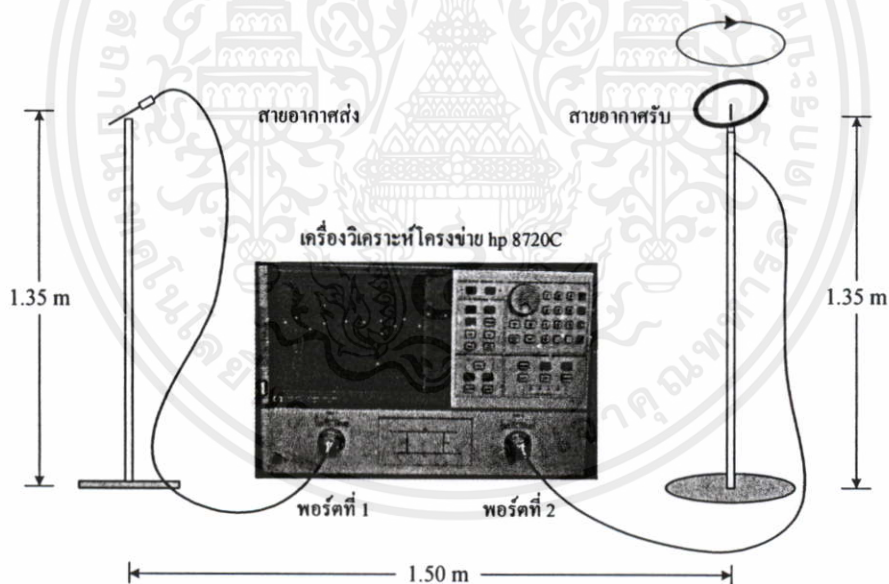
2. สายอากาศโมโนโพลที่มีความถี่ปฏิบัติการที่ 1.92 GHz ดังแสดงในรูปที่ 6.7 (ก) และมีคุณลักษณะ  $|S_{11}|$  ที่ทดสอบได้ดังรูปที่ 6.7 (ข) ทำหน้าที่เป็นสายอากาศรับ ซึ่งสายอากาศรับและสายอากาศส่งจะต้องวางห่างกันมากกว่าค่าสนามระยะไกล (สนามระยะไกล =  $2D^2/\lambda$  เมื่อ  $D$  คือมิติที่ใหญ่ที่สุดของสายอากาศ)

3. เครื่องวิเคราะห์โครงข่าย (Network Analyzer) รุ่น hp 8720C ซึ่งรองรับการทดสอบย่านความถี่ 50 MHz จนถึง 20 GHz โดยพอร์ตที่ 1 ของเครื่องวิเคราะห์โครงข่ายต่อกับสายอากาศส่ง



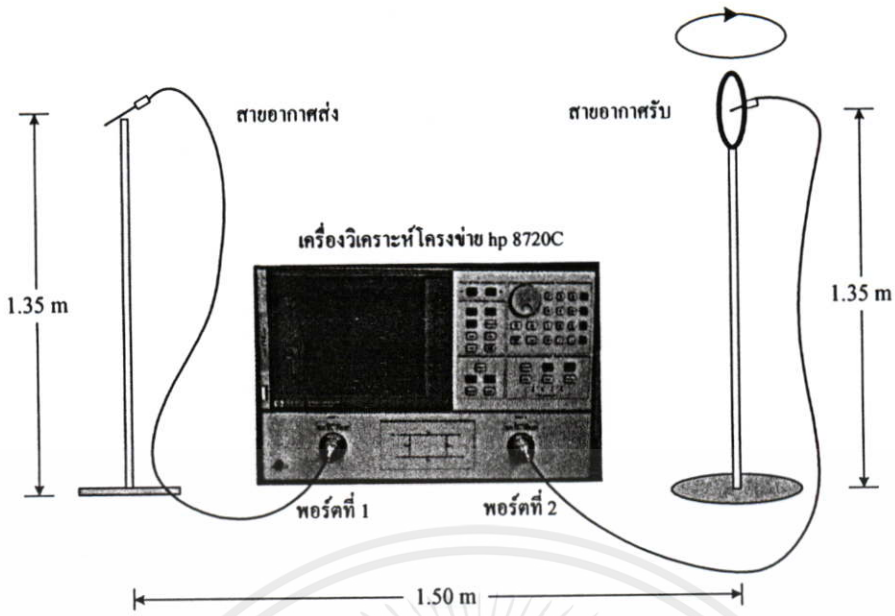


รูปที่ 6.8 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็กที่มีโพลาไรเซชันร่วม (Co-polarization)

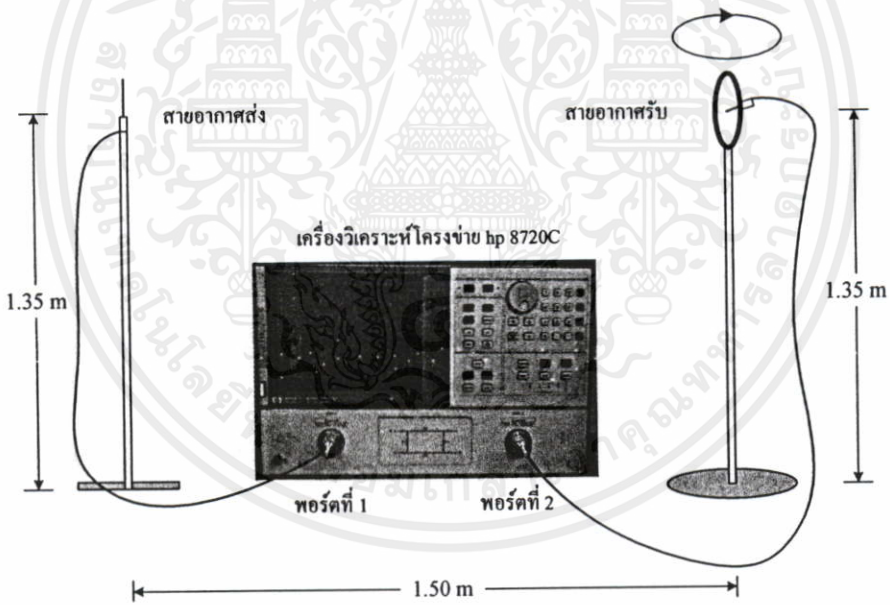


รูปที่ 6.9 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็กที่มีโพลาไรเซชันไขว้ (Cross-polarization)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



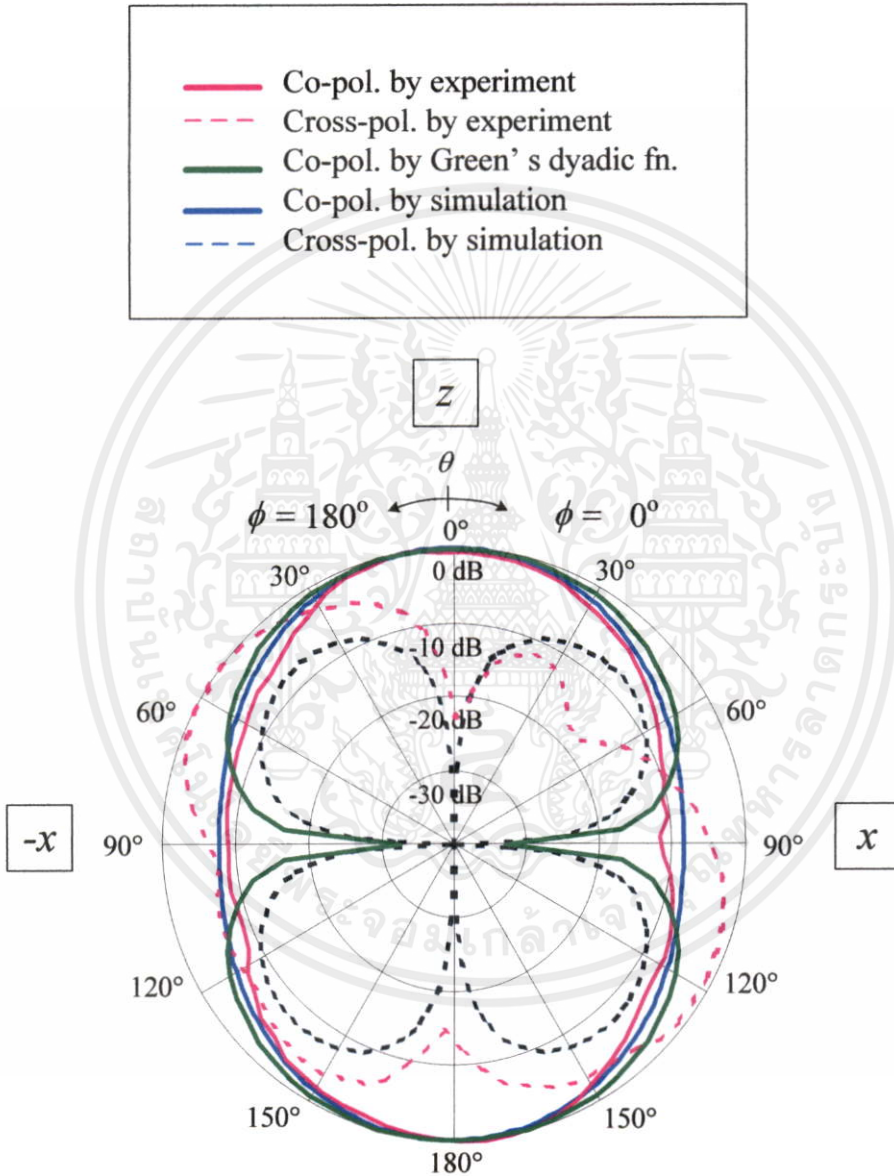
รูปที่ 6.10 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้าที่มีโพลาไรเซชันร่วม (Co-polarization)



รูปที่ 6.11 การทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในระนาบสนามไฟฟ้าที่มีโพลาไรเซชันไขว้ (Cross-polarization)

ในรูปที่ 6.12 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็ก ระดับโพลาไรซ์ไขว้ที่ได้จากการทดสอบจะมีค่าสูงกว่าผลที่ได้จากแบบจำลอง เนื่องจากมีผลจากสภาพแวดล้อมของการทดสอบ และในทางปฏิบัติสายอากาศโมโนโพลที่ใช้ในการทดสอบจะมีระดับโพลาไรซ์ไขว้ปนอยู่ ผลทดสอบที่ได้พบว่ามีความไม่สมมาตรเกิดขึ้นมากกับระดับโพลาไรซ์

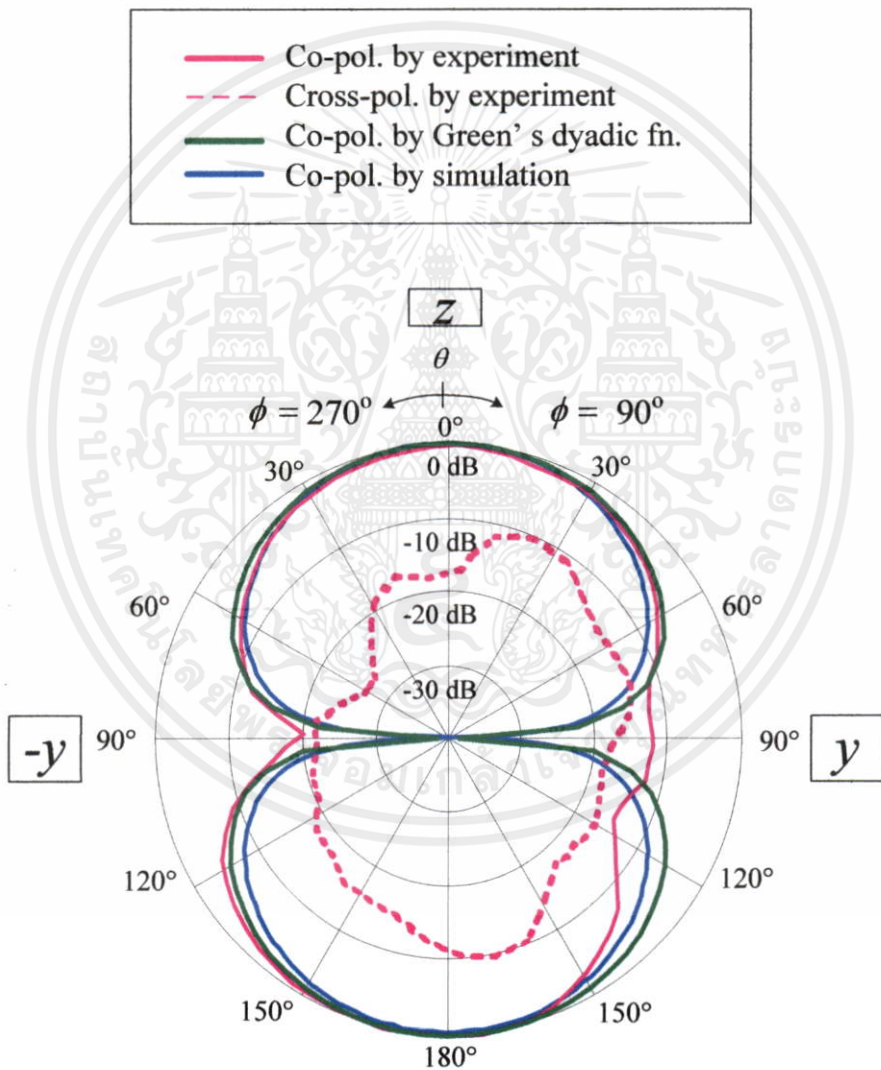
ไขว้เนื่องจากผลจากการติดตั้งสายส่งกับคอนเนกเตอร์ที่สายอากาศโมโนโพลวางในแนวนอน สำหรับการทดสอบระดับโพลาริซัฟในระนาบสนามแม่เหล็ก และสำหรับระดับโพลาริซัฟร่วมที่ได้จากวิธีฟังก์ชันกรีนโคแอดิกจะไม่ได้แสดงค่าไว้เนื่องจากว่าสามารถหาค่าได้เฉพาะระดับโพลาริซัฟที่นอร์มัลไลซ์แล้วเนื่องจากไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์ที่แท้จริง จึงทำให้ไม่สามารถเปรียบเทียบระดับโพลาริซัฟไขว้กับระดับโพลาริซัฟร่วมได้จึงไม่แสดงระดับโพลาริซัฟไขว้ไว้



รูปที่ 6.12 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศต้นแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ในรูปที่ 6.13 แสดงแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้า ระดับโพลาริซัฟไขว้ที่ได้จากการทดสอบจะมีค่าสูงกว่า เนื่องจากมีผลจากสภาพแวดล้อมของการทดสอบ และในทางปฏิบัติสายอากาศโมโนโพลที่ใช้ในการทดสอบจะมีระดับโพลาริซัฟไขว้ป็นอยู่ ผลทดสอบที่

ได้พบว่ามีความไม่สมมาตรเกิดขึ้นมากทั้งระดับโพลาริซั่วมและระดับโพลาริซั้วเนื่องจากผลจากการติดตั้งสายส่งกับคอนเนกเตอร์ที่สายอากาศโมโนโพลและสายอากาศวงแหวนแบบวงรีที่วางในแนวนอนสำหรับการทดสอบระดับโพลาริซั่วม และเนื่องจากผลการติดตั้งสายส่งกับคอนเนกเตอร์ที่สายอากาศวงแหวนแบบวงรีในแนวนอนสำหรับการทดสอบระดับโพลาริซั้วซึ่งสามารถสรุปค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ได้จากผลการทดสอบเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกและแบบจำลองจากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ในตารางที่ 6.2



รูปที่ 6.13 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศต้นแบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์และสงวนสิทธิ์ในเนื้อหาและข้อมูลทั้งหมดไว้เป็นทรัพย์สินของหน่วยงานต้นทาง  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 6.2 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศต้นแบบที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz

	ผลการทดสอบ	วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก	แบบจำลอง
HPBW ใน H-plane (องศา)	70	90	78
HPBW ใน E-plane (องศา)	75	90	74

ในการทำนายค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกพบว่ามีความผิดพลาด 20 องศาและ 15 องศาในระนาบสนามแม่เหล็กและระนาบสนามไฟฟ้าตามลำดับ ทั้งนี้เนื่องจากว่าในการคำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกนั้นได้มีการสมมุติให้คลื่นแพร่กระจายออกจากช่องเปิดที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีขนาดอนันต์ทำให้ไม่คิดผลของการเลี้ยวเบนคลื่นที่ขอบของวงแหวนวงรี และเนื่องจากแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศโมโนโพลเป็นแบบรอบตัวในระนาบสนามแม่เหล็กทำให้เกิดการเหนี่ยวนำคลื่นที่ช่องเปิดของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็กมากกว่าระนาบสนามไฟฟ้าทำให้เกิดค่าความผิดพลาดในระนาบสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่า

### 6.2.3 ผลการทดสอบแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศที่มีค่าความรีต่าง ๆ

รายละเอียดของการทดสอบอาศัยหลักการปฏิบัติเช่นเดียวกับหัวข้อที่ 6.2.2 โดยสายอากาศที่ถูกพิจารณามีทั้งหมด 4 ขนาด ซึ่งพารามิเตอร์อื่น ๆ ในโครงสร้างสายอากาศมีค่าเท่ากับขนาดสายอากาศต้นแบบ ยกเว้น  $b$  รายละเอียดของสายอากาศที่ทดสอบมีดังนี้

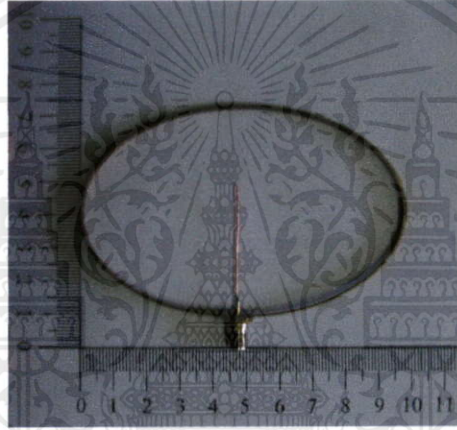
1. สายอากาศที่ 1 มีค่า  $b = 2.6$  cm และ  $e = 0.841$
2. สายอากาศที่ 2 มีค่า  $b = 3.1$  cm และ  $e = 0.763$
3. สายอากาศที่ 3 มีค่า  $b = 4.1$  cm และ  $e = 0.520$
4. สายอากาศที่ 3 มีค่า  $b = 4.6$  cm และ  $e = 0.286$

รูปภาพสายอากาศที่ 1–4 แสดงไว้ในรูปที่ 6.14–6.17 ตามลำดับ จากการทดสอบสายอากาศสามารถสรุปค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ได้จากผลการทดสอบเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกและแบบจำลองจากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ในตารางที่ 6.3–6.6 โดยเป็นกรณีของสายอากาศที่ 1–4 ตามลำดับ

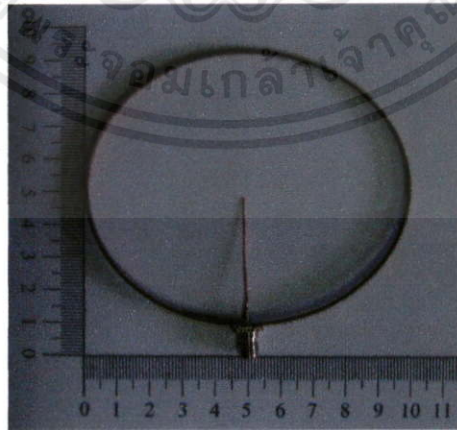
ในการทำนายค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 1–4 ด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกพบว่ามีความผิดพลาดไม่เกิน 21 องศาและ 28 องศาในระนาบสนามแม่เหล็กและระนาบสนามไฟฟ้าตามลำดับ



รูปที่ 6.14 สายอากาศที่ 1



รูปที่ 6.15 สายอากาศที่ 2

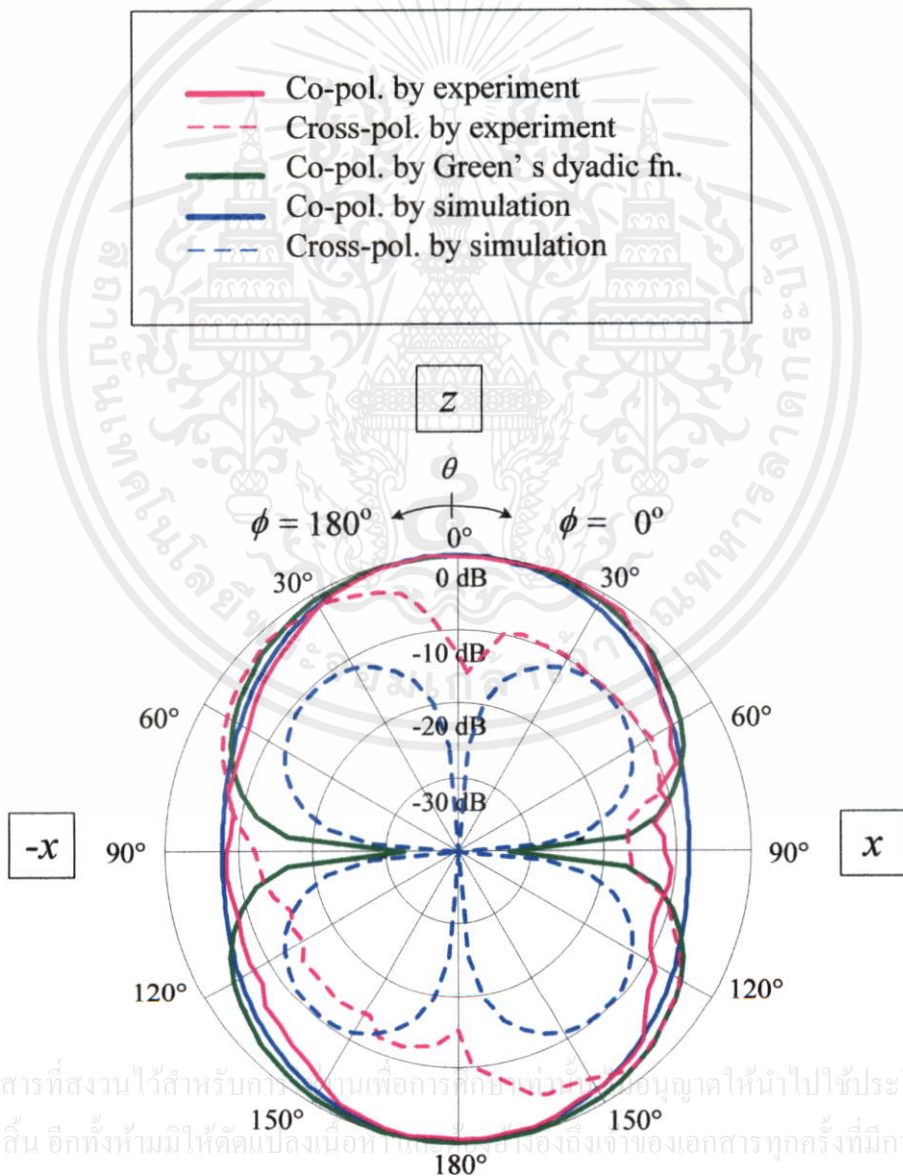


รูปที่ 6.16 สายอากาศที่ 3

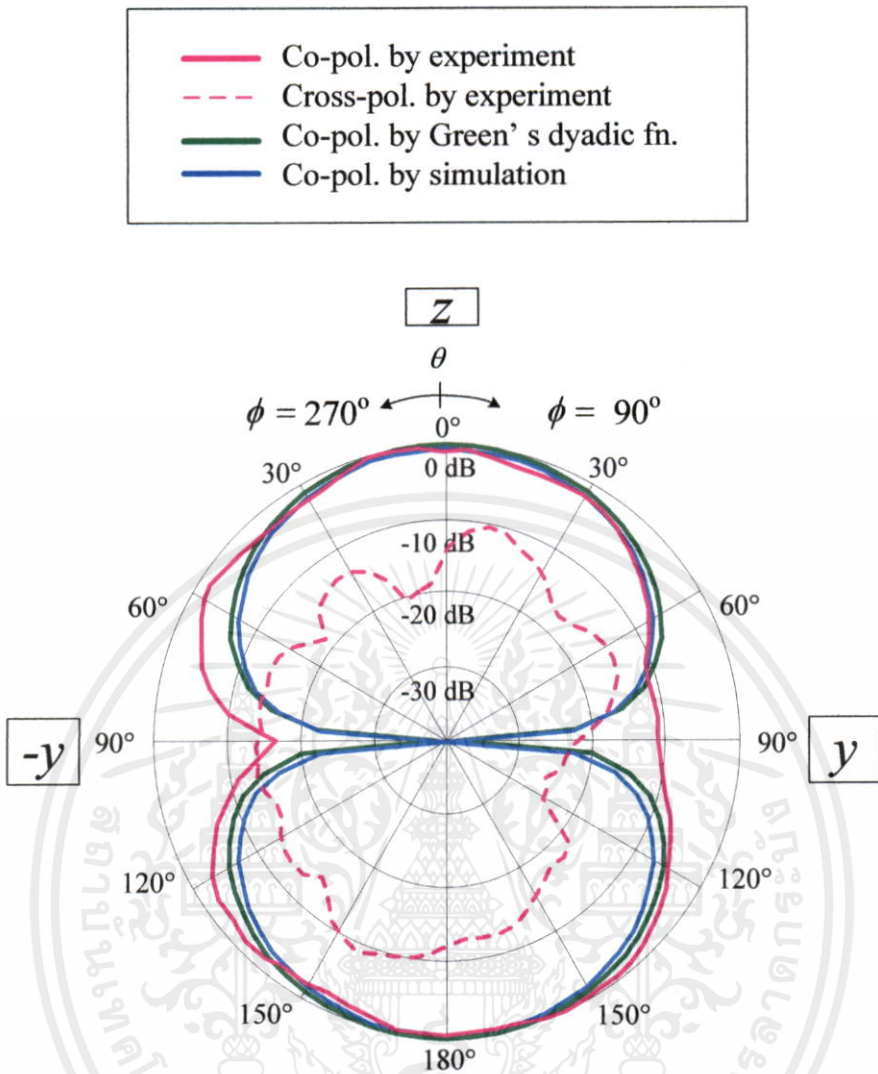
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.17 สายอากาศที่ 4

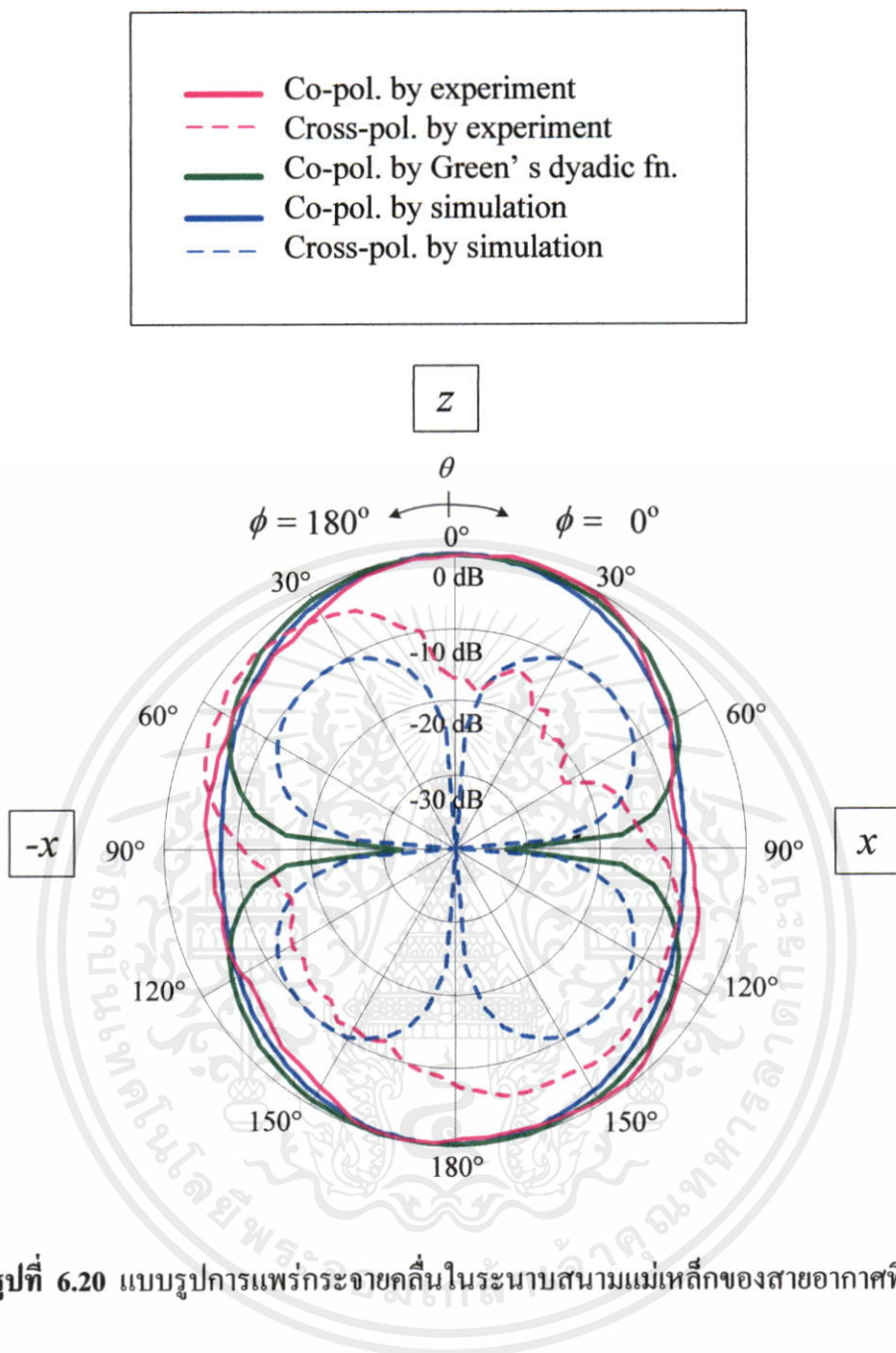


รูปที่ 6.18 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ 1

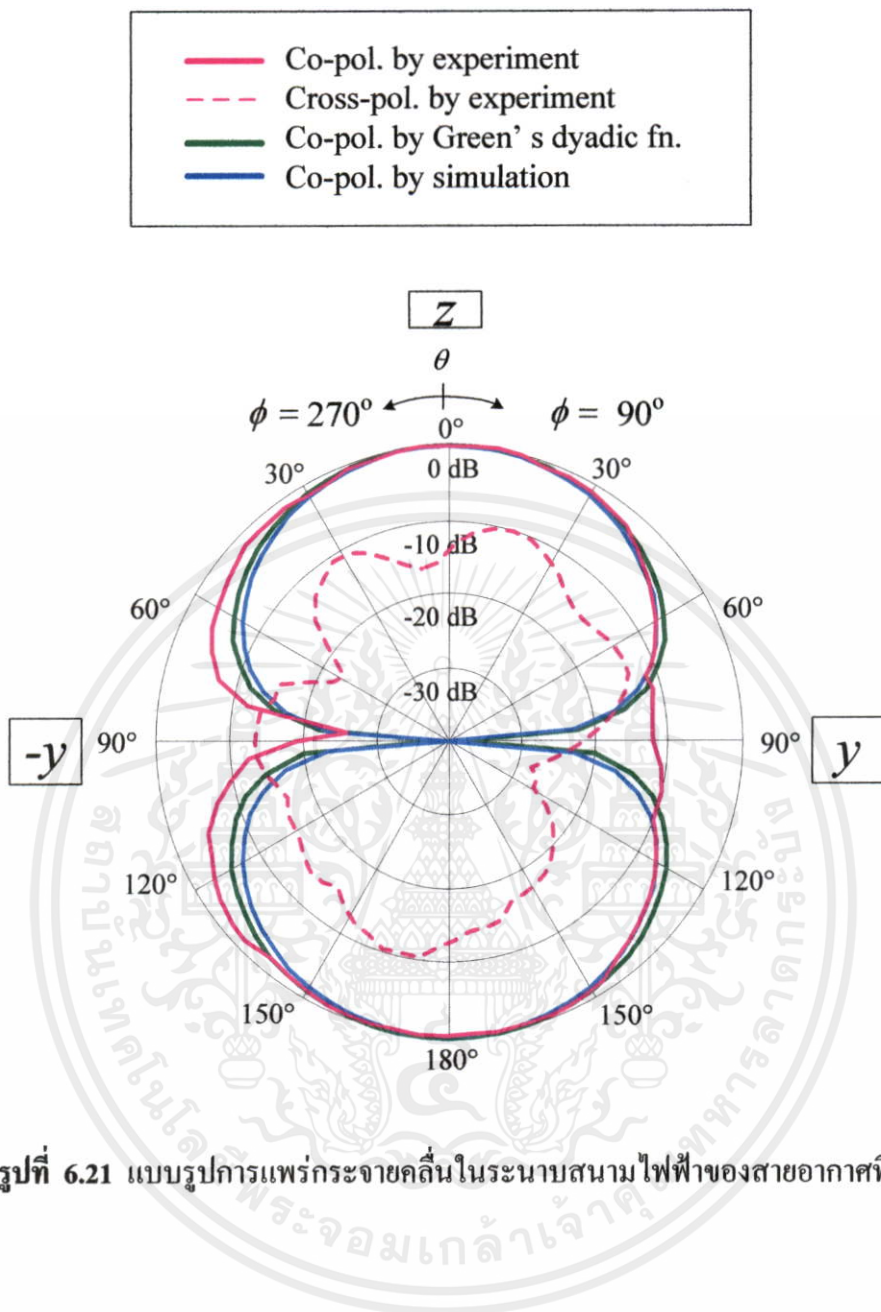


รูปที่ 6.19 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

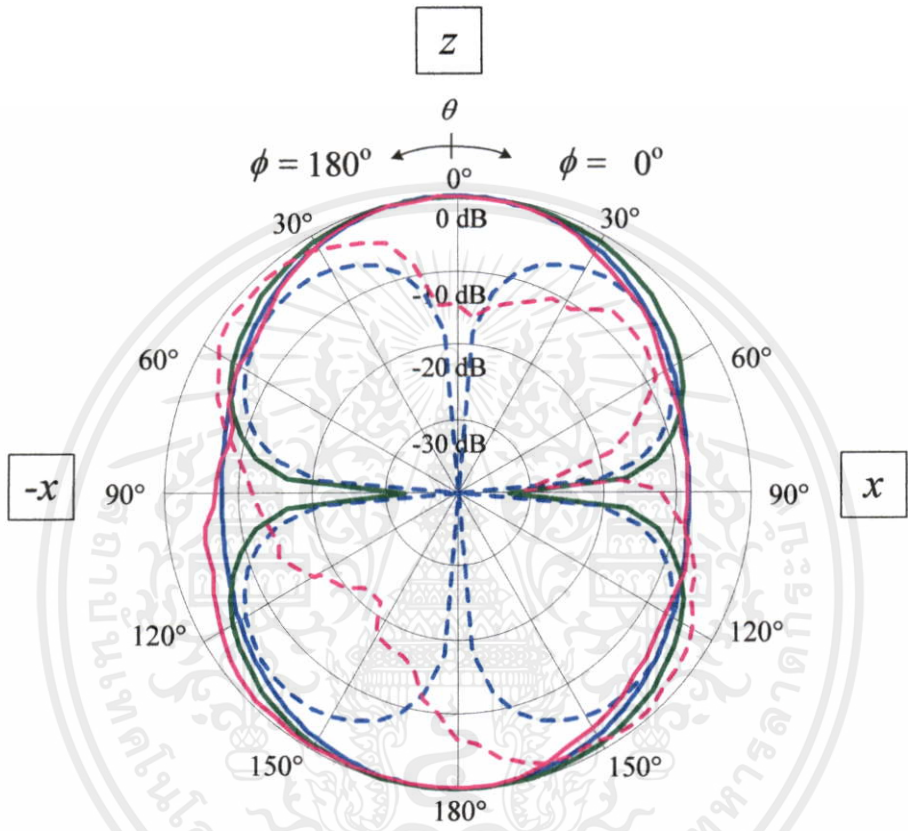
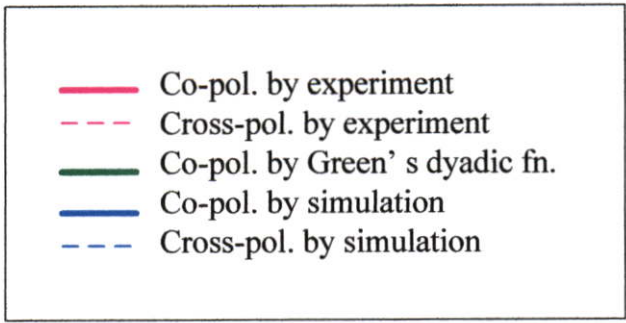


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



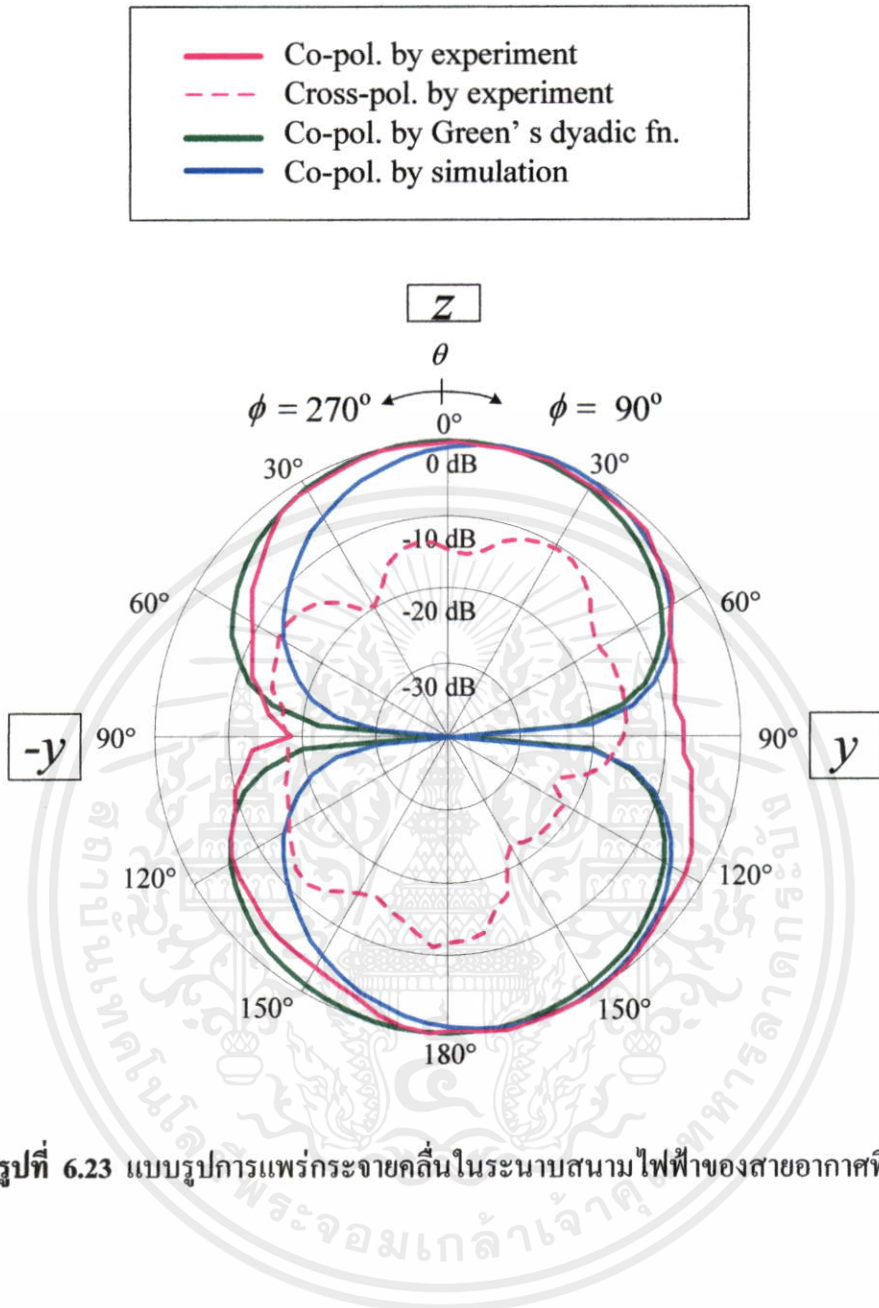
รูปที่ 6.21 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



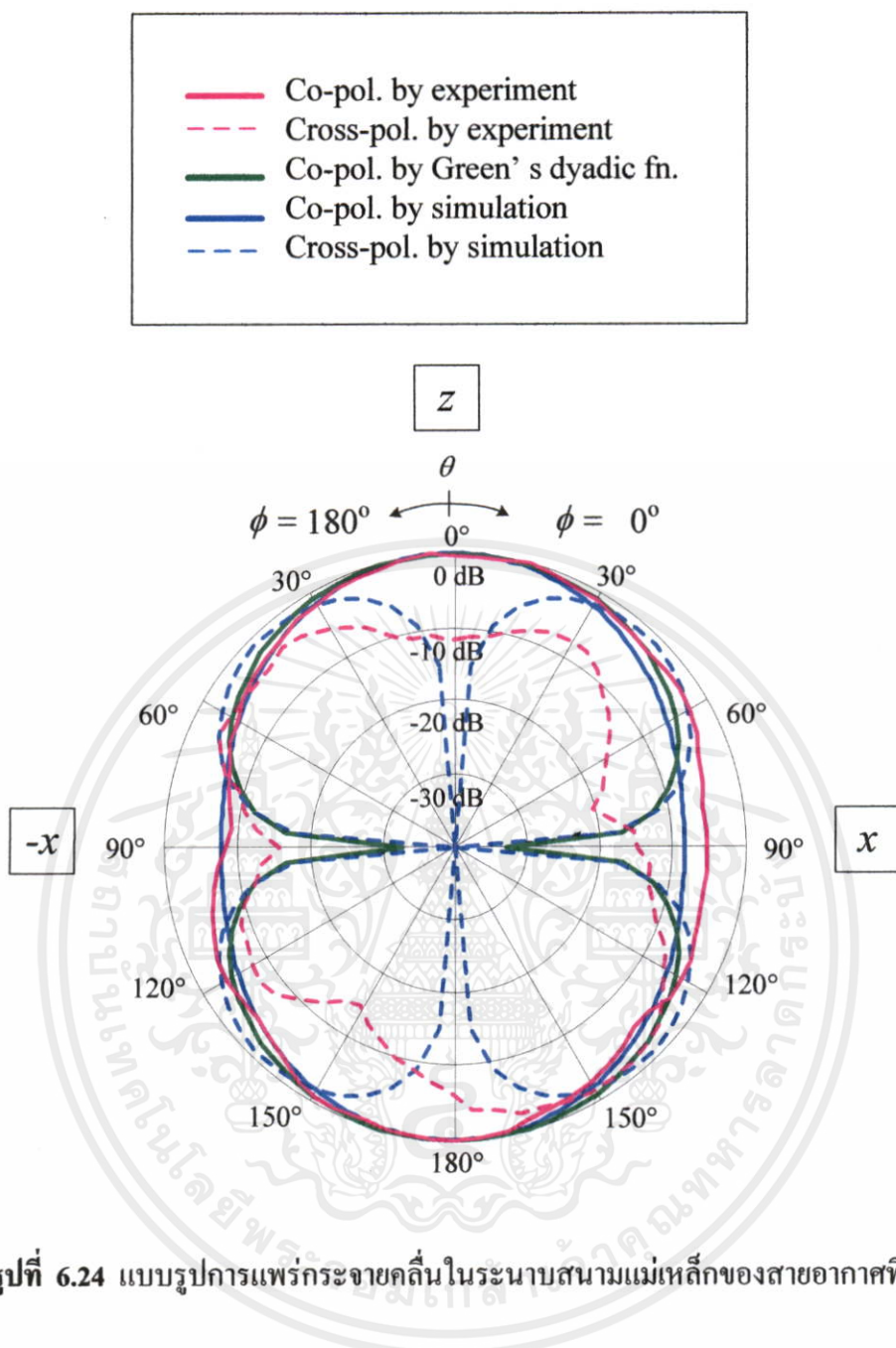
รูปที่ 6.22 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กของสายอากาศที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

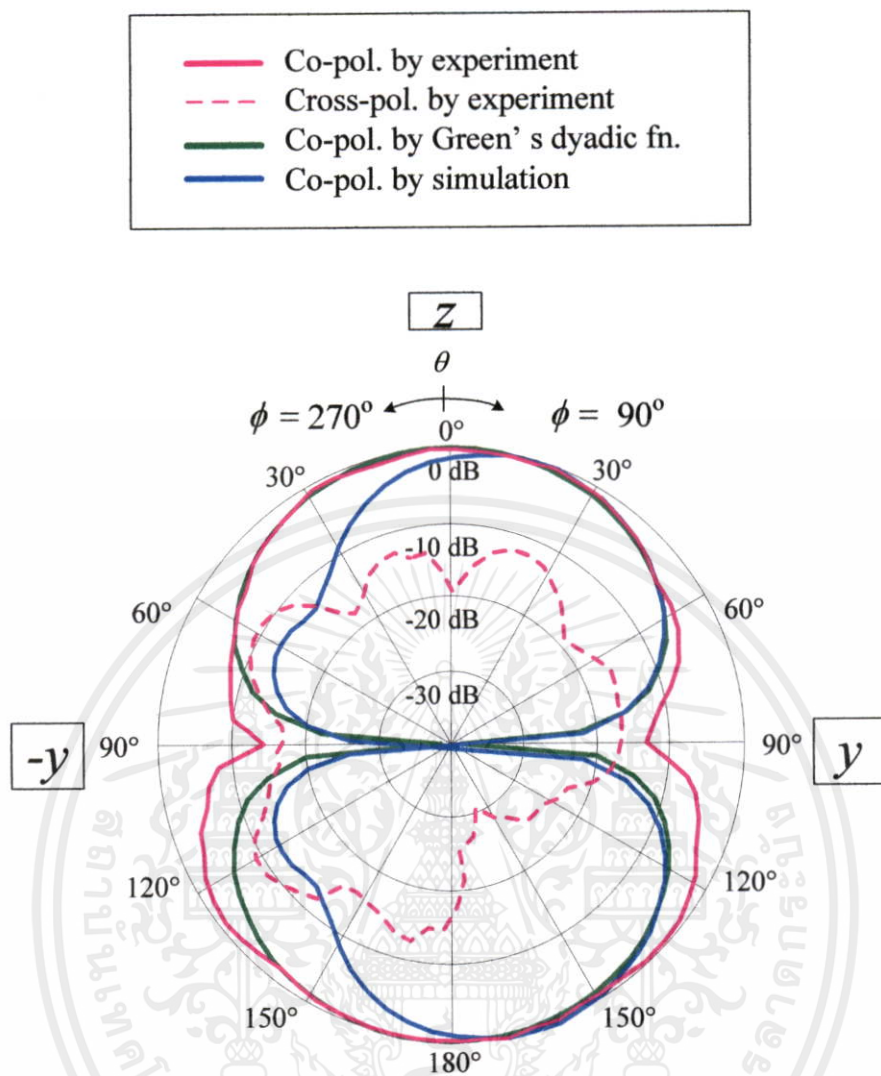


รูปที่ 6.23 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.25 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 4

ตารางที่ 6.3 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 1 ที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz

	ผลการทดสอบ	วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก	แบบจำลอง
HPBW ใน H-plane (องศา)	69	90	78
HPBW ใน E-plane (องศา)	68	96	82

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 6.4 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 2 ที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz

	ผลการทดสอบ	วิธีฟังก์ชันกรีนโคแอดิก	แบบจำลอง
HPBW ใน H-plane (องศา)	70	90	78
HPBW ใน E-plane (องศา)	69	93	76

ตารางที่ 6.5 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 3 ที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz

	ผลการทดสอบ	วิธีฟังก์ชันกรีนโคแอดิก	แบบจำลอง
HPBW ใน H-plane (องศา)	72	90	78
HPBW ใน E-plane (องศา)	73	88	68

ตารางที่ 6.6 การเปรียบเทียบค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 4 ที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz

	ผลการทดสอบ	วิธีฟังก์ชันกรีนโคแอดิก	แบบจำลอง
HPBW ใน H-plane (องศา)	75	90	78
HPBW ใน E-plane (องศา)	75	85	57

### 6.3 บทสรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการสร้าง และการทดสอบสายอากาศต้นแบบ โดยได้ทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณและผลการทดสอบว่ามีความสอดคล้องใกล้เคียงกันมากน้อยเพียงใด ซึ่งคุณลักษณะของสายอากาศที่พิจารณาได้แก่คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์และแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ในทางทฤษฎีค่าอิมพีแดนซ์อินพุตของสายอากาศจะมีค่า  $50 \Omega$  แต่ในทางปฏิบัติไม่สามารถทำได้ดังนั้นจึงต้องออกแบบสายอากาศให้มีค่าใกล้เคียง และเมื่อพิจารณาค่าที่ใกล้เคียงนั้นในพจน์ของค่าการสูญเสียย้อนกลับที่มากกว่า 10 dB (ค่าอัตราส่วนคลื่นนิ่ง 1.92:1) ซึ่งเป็นค่าที่ยอมรับได้ว่ามีกำลังงานที่สะท้อนกลับไม่เกิน 10% สายอากาศต้นแบบที่ทำการทดสอบมีค่าอิมพีแดนซ์อินพุต  $55.38 - j 4.74 \Omega$  ซึ่งมีค่าการสูญเสียย้อนกลับ 23.35 dB มีความกว้างแถบความถี่เท่ากับ 11.5% (เมื่อคิดที่ค่าการสูญเสียย้อนกลับมากกว่า 10 dB) อัตราขยายที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz มีค่า 3.6 dB และค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กมีค่า 75 องศา และ 70 องศาตามลำดับ

สำหรับผลการคำนวณคุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศต้นแบบด้วยวิธี RWG ค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากวิธี RWG มีค่า 6.62  $\Omega$  และค่าความผิดของค่าความรีแอกแตนซ์อินพุตมีค่า 3.94  $\Omega$  ซึ่งถือผลการคำนวณที่ได้จากวิธี RWG นี้มีความแม่นยำ นอกจากนี้เมื่อพิจารณาในกรณีที่สายอากาศมีความยาวโพรบมีค่า  $0.20\lambda - 0.30\lambda$  พบว่าค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากวิธี RWG ค่าความผิดของค่ารีแอกแตนซ์อินพุตที่ได้จากวิธี RWG ค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และค่าความผิดพลาดของค่ารีแอกแตนซ์อินพุตที่ได้จากโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีแบบจำลองเป็นโพรบทรงกระบอก มีค่าไม่เกิน 9  $\Omega$  และ 25  $\Omega$  ตามลำดับ

สำหรับผลการคำนวณแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศด้วยวิธีฟังก์ชันกรีน ไดแอดิกพบว่าค่าความผิดพลาดของค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กมีค่า 15 องศา และ 20 องศาตามลำดับ ในการทำนายค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของสายอากาศที่ 1-4 ด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกพบว่ามีความผิดพลาดไม่เกิน 21 องศาและ 28 องศาในระนาบสนามแม่เหล็กและระนาบสนามไฟฟ้าตามลำดับ ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเป็นผลเนื่องจากพิจารณาเฉพาะกรณีแหล่งกำเนิดความหนาแน่นของกระแสสมมูลที่เกิดจากโหมด  $TM_{Co1}$  เท่านั้นไม่ได้พิจารณาผลที่เกิดจากการรวมโหมด นอกจากนี้ยังได้มีการพิจารณาให้คลื่นแพร่กระจายออกจากช่องเปิดที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีขนาดอนันต์ทำให้ไม่คิดผลของการเลี้ยวเบนคลื่นที่ขอบของวงแหวนวงรี และเนื่องจากแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศโมโนโพลเป็นแบบรอบตัวทำให้เกิดการเหนี่ยวนำคลื่นที่ช่องเปิดของสายอากาศในระนาบสนามแม่เหล็กมากกว่าระนาบสนามไฟฟ้าทำให้เกิดค่าความผิดพลาดในระนาบสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่าที่มุม  $\theta$  มีค่าประมาณ  $\pm 90$  องศา ซึ่งนอกเหนือจากที่มุมดังกล่าวแล้วโดยภาพรวมพบว่าแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่ได้จากผลการทดสอบและผลการคำนวณมีลักษณะที่สอดคล้องกันคือให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทางโดยคลื่นจะเคลื่อนที่ออกจากสายอากาศโดยที่มุม  $\theta$  มีค่า 0 องศา และ  $\pm 180$  องศา

## บทที่ 7

# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทนี้จะกล่าวถึงการสรุปเนื้อหาโดยรวม ข้อเสนอแนะต่างๆ และแนวทางในการพัฒนาต่อสำหรับวิทยานิพนธ์

### 7.1 สรุปผลการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์สายอากาศชนิดใหม่ที่มีการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการสื่อสารแบบไร้สายที่ความถี่ 1.92 GHz โดยสายอากาศนี้เหมาะสำหรับใช้งานเป็นสายอากาศที่สถานีฐานในพื้นที่ให้บริการที่มีลักษณะเป็นทางตรงยาว เช่น อุโมงค์ ทางเดิน ทางคว้น ทางรถไฟ เป็นต้น โดยสายอากาศนี้มีแนวความคิดจากการเปลี่ยนแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบรอบตัวของสายอากาศโมนโพลให้เป็นแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทางโดยการใช้วงแหวนวงรีล้อมรอบ ทำให้คลื่นมีการแพร่กระจายออกสู่ช่องเปิดด้านหน้าและด้านหลังของวงแหวนวงรี

เนื่องจากสายอากาศที่นำเสนอนี้มีองค์ประกอบที่เป็นวงแหวนวงรี ในบทที่ 2 จึงได้อธิบายเกี่ยวกับหลักการทํางานและทฤษฎีที่สำคัญของสายอากาศ โดยได้ทำการพิจารณาองค์ประกอบวงแหวนวงรีจากทฤษฎีที่อนาคลื่นทรงกระบอกวงรี ซึ่งทำให้สามารถทราบโหมคคลื่นที่สำคัญของท่อนาคลื่นที่มีขนาดหน้าตัดเท่ากับวงแหวนวงรีได้ ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงการจำลองแบบของสายอากาศโดยใช้โปรแกรมคำนวณแม่เหล็กไฟฟ้าทำการออกแบบสายอากาศเพื่อหาขนาดสายอากาศที่เล็กกะทัดรัด พร้อมทั้งให้คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์และคุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทางที่เหมาะสมสำหรับใช้งานในระบบ PCS ขนาดของสายอากาศที่เหมาะสมมีรายละเอียดดังนี้คือ ขอบวงแหวนวงรีด้านในมีความยาวครึ่งแกนหลักเท่ากับ 48 mm มีค่าความยาวครึ่งแกนนอนเท่ากับ 36 mm ความยาววงแหวนมีค่า 3 mm ขอบวงแหวนวงรีมีความหนา 1 mm ความยาวโพรบมีค่า 39 mm รัศมีโพรบมีค่า 0.7 mm จากผลที่คำนวณได้พบว่าสายอากาศที่มีพารามิเตอร์ที่เหมาะสมนั้นจะมีสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity) 4.4 dBi มีอัตราขยาย (Gain) เท่ากับ 4.2 dBi ค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่ง (HPBW) ในระนาบสนามไฟฟ้าและในระนาบสนามแม่เหล็กมีค่า 74 องศาและ 78 องศา ตามลำดับ จากการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนช่องเปิดของสายอากาศกับคลื่นโหมคคลื่นต่างๆ ที่เกิดใน

ท่อนำคลื่นทรงกระบอกวงรีที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัดเท่ากับพื้นที่หน้าตัด (ช่องเปิด) ของสายอากาศ พบว่าสนามไฟฟ้าโหมคคลื่น  $TM_{CO1}$  มีอิทธิพลต่อการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศมากที่สุด ลำดับรองลงมาคือโหมคคลื่นเป็นใหญ่  $TE_{C11}$

เพื่อที่จะอธิบายถึงกลไกการแพร่กระจายคลื่นของโหมคคลื่นภายในวงแหวนและการแพร่กระจายคลื่นจากช่องเปิดสายอากาศ เริ่มต้นจะทำการวิเคราะห์แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศโดยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิก และเมื่อกำหนดให้สนามบนช่องเปิดเป็นโหมคคลื่นชนิด  $TM_{CO1}$  แล้วจึงใช้หลักการแปลงฟูเรียร์คำนวณหาคลื่นในระยะไกล ซึ่งรายละเอียดการคำนวณได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 โดยผลคำนวณที่ได้พบว่าสนามที่แพร่กระจายออกไปจากช่องเปิดนั้น ให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง เมื่อพิจารณาให้คลื่นที่แพร่กระจายออกจากช่องเปิดนั้น ไม่มีการสะท้อนกลับของคลื่น พบว่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณมีแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง ซึ่งมีค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเท่ากันคือ 90 องศา ซึ่งแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นนี้สอดคล้องกับค่าที่คำนวณจากแบบจำลองของโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบทที่ 3 ว่าสนามภายในสายอากาศจะมีอิทธิพลจากโหมคคลื่น  $TM_{CO1}$  มากที่สุด

สำหรับการวิเคราะห์คุณลักษณะเชิงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศได้นำเสนอไว้ในบทที่ 5 ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณโดยระเบียบวิธีโมเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันฐาน RWG นั้น มีประโยชน์สำหรับการศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอิมพีแดนซ์ของสายอากาศเมื่อสายอากาศมีการเปลี่ยนแปลงความยาวโพรบและความยาววงแหวน และสามารถเป็นแนวทางในการหาขนาดที่เหมาะสมของสายอากาศได้ในกรณีที่ไม่มีโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าไว้ใช้งาน โดยความยาวโพรบที่เหมาะสมนั้นสามารถเลือกจากค่าที่ทำให้ได้ค่า SWR ต่ำสุด ซึ่งคือความยาวโพรบที่มีค่าประมาณ  $0.25\lambda$  (39 mm) สำหรับการเลือกความยาววงแหวนที่เหมาะสมนั้นเนื่องจาก SWR มีค่าใกล้เคียงกัน จึงเลือกจากความยาววงแหวนที่ให้ค่าเรโซแนนซ์ที่ดี นั่นคือมีค่ารีแอกแตนซ์เท่ากับศูนย์ ซึ่งคือความยาววงแหวนที่มีค่าในช่วงระหว่าง  $0.01\lambda$  และ  $0.02\lambda$  (1.56 mm–3.12 mm) ซึ่งจะได้ว่าขนาดของสายอากาศที่เหมาะสมจากวิธี RWG นั้นสอดคล้องกับผลที่ได้กล่าวมาแล้วในการจำลองแบบด้วยโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบทที่ 3

จากการทดสอบสายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้น สายอากาศมีค่าอิมพีแดนซ์อินพุต  $55.38 - j4.74 \Omega$  ซึ่งมีค่าการสูญเสียย้อนกลับ 23.35 dB มีความกว้างแถบความถี่เท่ากับ 11.5% (เมื่อคิดที่ค่าการสูญเสียย้อนกลับมากกว่า 10 dB) อัตราขยายที่ความถี่ปฏิบัติการ 1.92 GHz มีค่า 3.6 dBi และค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งในระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กมีค่า 75 องศา และ 70 องศาตามลำดับ จากผลการทดสอบนี้ทำให้ทราบว่าผลการคำนวณที่ได้จากวิธี RWG นั้นมีความแม่นยำ เนื่องจากมีค่าความผิดพลาดของค่าความต้านทานอินพุตที่ได้จากวิธี RWG มีค่าเพียง  $6.62 \Omega$  และค่าความผิดของค่าความรีแอกแตนซ์อินพุตมีค่าเพียง  $3.94 \Omega$  โดย

ภาพรวมพบว่าแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่ได้จากผลการทดสอบและผลการคำนวณมีลักษณะที่สอดคล้องกันคือให้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง โดยคลื่นจะเคลื่อนที่ออกจากสายอากาศโดยซิมุม  $\theta$  มีค่า 0 องศา และ  $\pm 180$  องศา สำหรับความผิดพลาดในการทำนาค่าความกว้างลำคลื่นที่กำลังงานลดลงครึ่งหนึ่งนั้นยังมีค่ายอมรับได้อยู่ในระดับความผิดพลาด 30 องศา

## 7.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการพัฒนา

ในการวิเคราะห์คุณลักษณะการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศด้วยวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกร่วมกับการแปลงฟูเรียร์เพื่อหาสนามระยะไกล โดยที่พิจารณาเพียงแหล่งกำเนิดความหนาแน่นของกระแสสมมูลที่เกิดจากโหมด  $TM_{Co1}$  เพียงโหมดคลื่นเดียว ไม่ได้พิจารณาผลที่เกิดจากการรวมโหมด และกำหนดให้คลื่นแพร่กระจายออกจากช่องเปิดที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีขนาดอนันต์โดยไม่คิดผลของการเลี้ยวเบนคลื่นที่ขอบของวงแหวนวงรี และผลกระทบจากการสะท้อนกลับของคลื่นที่แพร่กระจายออกจากช่องเปิดของสายอากาศ เพื่อลดความซับซ้อนในการคำนวณทำให้ผลการคำนวณแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นที่ได้มีความแม่นยำลดลง

วิธีการหนึ่งที่จะลดความซับซ้อนในการพิจารณาเรื่องโหมดคลื่นรวมของสายอากาศคือการคำนวณแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจากกระแสเชิงผิวที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีโมเมนต์

เนื่องจากระเบียบวิธีโมเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันฐานแบบ RWG นี้ไม่ได้คิดผลความหนาของวงแหวน ทำให้อาจจะไม่มีความเหมาะสมสำหรับหาขนาดที่เหมาะสมของสายอากาศด้วยการใช้วิธีนี้เพียงวิธีเดียว และโพรบที่ใช้ควรจะต้องมีรัศมีที่เล็กมากๆ เมื่อเทียบกับความยาวคลื่น เพื่อให้การกระจายกระแสไหลอยู่ในทิศทางเดียว ซึ่งจะทำให้ค่าอิมพีแดนซ์ที่คำนวณได้มีความแม่นยำ

การเปลี่ยนแปลงตัวป้อนสัญญาณจากโพรบเป็นโมโนโพลชนิดแผ่นเช่น โมโนโพลแบบแผ่นวงกลม จะสามารถปรับปรุงให้สายอากาศวงแหวนวงรีมีแบนด์วิดท์ที่กว้างขึ้นอย่างมากได้เมื่อสายอากาศถูกออกแบบให้มีขนาดที่เหมาะสมสำหรับการใช้งานในระบบความถี่กว้างยิ่งยวด (Ultra-Wideband System) ในย่านความถี่ตั้งแต่ 3.1 GHz ถึง 10.6 GHz

## เอกสารอ้างอิง

- [1] <http://www.mosmicro.com/WirelessData.html>
- [2] [http://www.eetasia.com/ART\\_8800459335\\_590626\\_NT\\_c9b3f479.HTM](http://www.eetasia.com/ART_8800459335_590626_NT_c9b3f479.HTM)
- [3] K. Cho and T. Hori, "Bidirectional rod antenna composed of narrow patches," *Proc. IEEE Antenna Propagat. Soc. Symp.*, pp. 174-177, June 1994.
- [4] K.Cho, *et .al*, "Bidirectional collinear antenna with arc parasitic patches, *Proc. IEEE Antennas Propagat. Soc. Symp.*, pp. 1414-1417, June 1995.
- [5] T. Hori, K. Cho, and K. Kagoshima, "Bidirectional base station antenna illuminating a street microcell for personal communication system," *Proc. 9<sup>th</sup> Inst. Elect. Eng. Conf. Antennas Propagat.*, pp. 419-422, Apr. 1995
- [6] T. Mukaiyama, H. Arai, and Y. Ebine, "Bi-directional notch and crank-shaped antenna," *Proc. 1997 Asia-Pacific Microwave Conf.*, pp. 417-420, Dec. 1997.
- [7] S. Kosulvit, C. Phongcharoenpanich, M. Krairiksh, and T. Wakabayashi, "Design of a bidirectional antenna using a probe excited circular ring," *Proceedings of the 1999 Thailand-Japan Joint Symposium on Microwaves*, pp. 61-68, Sept. 1999.
- [8] S. Kosulvit, C. Phongcharoenpanich, M. Krairiksh, and T. Wakabayashi, "Radiation characteristics of a bidirectional antenna using a linear probe in rectangular ring," *Proceedings of the 1998 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology*, pp. 337-340, Aug.1998.
- [9] A. Kalis and T. Antonakopoulos, "A switched dual antenna array for mobile computing networks," *Inter. J. Elect.*, vol. 89, pp. 325-335.
- [10] L. J. Chu, "Electromagnetic waves in elliptic hollow pipes of metal," *J. Appl. Phys.*, vol. 9, pp. 583-591, Sept. 1938.
- [11] J. G. Kretzchmar, "Wave propagation in hollow conduction, elliptical waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-18, no. 9, pp. 547-554, Sept. 1970.
- [12] D. A. Goldberg, L. J. Laslett, and R. A. Rimmer, "Modes of elliptical waveguides: A correction," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 38, no. 11, pp. 1603-1608, Nov. 1990.
- [13] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [14] The Computation Laboratory of the National Applied Mathematics Laboratory National Bureau of Standards, *Tables Relating to Mathieu Functions*, New York: Columbia Univ. Press, 1951.

- [15] S. L. and Bai-Suo Wang, "Field expressions and patterns in elliptical waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 48, No. 5, May 2000.
- [16] C. A. Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 1997.
- [17] S. N. Makarov, *Antenna and EM Modeling with MATLAB*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2002.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

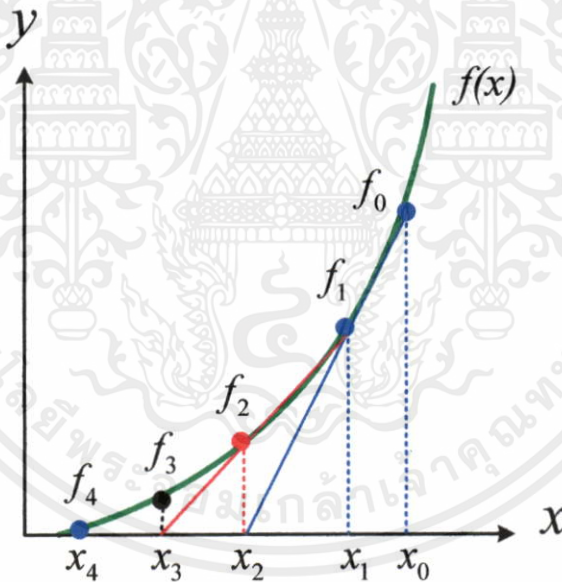
## ภาคผนวก ก

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีเซแคนต์เป็นระเบียบวิธีที่ใช้หลักการและขั้นตอนเดียวกันกับระเบียบวิธีของนิวตัน ยกเว้นวิธีการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จะใช้การประมาณค่าความชันโดยการคำนวณค่าฟังก์ชันที่จุด  $x_0$  และ  $x_1$  แทน ดังนั้นค่ารากจึงสามารถ หาได้จากสูตรดังต่อไปนี้ [1]

$$x_n = x_{n-1} - y_{n-1} \left( \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}} \right) \quad (\text{ก.1})$$

ค่า  $x_0, x_1$  คือค่าที่เลือกมาใช้ในการเริ่มต้น (Initial guess) และ  $n$  เริ่มต้นที่ 2 เป็นต้นไป



รูปที่ ก.1 การคำนวณหาค่ารากด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์

จากกราฟในรูปที่ ก.1 เมื่อทำซ้ำไปเรื่อย ๆ ค่า  $x_{n-1}$  อาจจะมีค่าใกล้กับ  $x_n$  ซึ่งอาจจะเป็นผลให้  $y_{n-1}$  มีค่าใกล้กับ  $y_n$  ด้วย ซึ่งอาจจะทำให้เกิดค่า Round-off Error ได้

ขั้นตอนการคำนวณของระเบียบวิธีเซแคนต์ประกอบด้วย 5 ข้อดังต่อไปนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้น  $x_0$  และ  $x_1$
2. คำนวณค่า  $f(x_0)$  และ  $f(x_1)$

3. เริ่มการทำซ้ำรอบที่ 1 ( $1^{\text{st}}$  Iteration ( $n = n + 1$ )) โดยการนำค่าทั้งหมดที่คำนวณไปแทนในสูตรเพื่อหาค่า  $x_2$
  4. ทำการตรวจสอบค่าความผิดพลาดโดยการเปรียบเทียบ  $|x_2 - x_1| <$  ค่าความผิดพลาดที่กำหนดไว้หรือไม่  
ถ้าใช่ จะได้  $x_2$  เป็นรากของสมการ  
ถ้าไม่ใช่ ให้ทำงานขั้นตอนต่อไป
  5. ทำการตรวจสอบจำนวนรอบ โดยการเปรียบเทียบ  $n >$  จำนวนรอบที่กำหนดหรือไม่  
ถ้าใช่ จะได้  $x_2$  เป็นรากของสมการ  
ถ้าไม่ใช่ กลับไปทำในขั้นตอนที่ 2 เพื่อคำนวณหาค่า  $f(x)$  ในลำดับต่อไป
- สิ่งที่พึงระวังสำหรับระเบียบวิธีเซแคนด์ก็คือ ระเบียบวิธีเซแคนด์ถือได้ว่าเป็นระเบียบวิธีของนิวตันแบบหนึ่ง แต่มีประสิทธิภาพการคำนวณที่ต่ำกว่า แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าการประมาณค่าของฟังก์ชัน  $x$  ที่ติดกันมีค่าใกล้เคียงกันมากอาจทำให้ Round-off Error ขึ้นได้ วิธีที่จะหลีกเลี่ยงการเกิดค่าความผิดพลาด มีด้วยกัน 2 วิธีคือ
1. ให้ทำการคงค่าใดค่าหนึ่งไว้ไม่ให้เปลี่ยนแปลง หรือ
  2. แทนค่า  $x$  ด้วยการบวกค่าคงที่มีค่าน้อย ๆ (เช่น 0.00001) ที่ได้มีการกำหนดไว้ตั้งแต่แรกเข้าไป



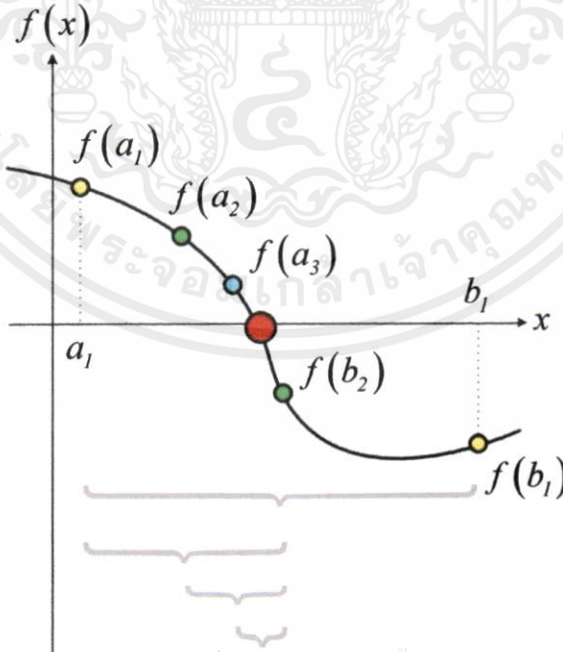
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ภาคผนวก ข

## ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method)

ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงเป็นระเบียบวิธีที่ใช้คำนวณหาค่ารากซึ่งจะมีการแบ่งช่วงออกเป็นครึ่งหนึ่งไปเรื่อยๆ จนในที่สุดค่ารากจะอยู่บนช่วงแบ่งที่เล็กนั้น

สมมุติว่าเราต้องการหาผลเฉลยของสมการ  $f(x) = 0$  กำหนดให้จุดสองจุดคือ  $a$  และ  $b$  ทำให้เกิด  $f(a)$  และ  $f(b)$  ที่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกัน จากทฤษฎีบทค่าตรงกลาง (Intermediate Value Theorem) ทำให้เราทราบว่าอย่างน้อยจะมีค่ารากเกิดขึ้นหนึ่งค่าบนช่วง  $[a, b]$  เมื่อฟังก์ชันนั้นมีความต่อเนื่องบนช่วงนี้ ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะแบ่งช่วงออกเป็นสองส่วนโดยคำนวณจาก  $c = (a + b)/2$  ดังนั้นจะทำให้มีความเป็นไปได้สองอย่างที่เกิเกิดขึ้นคือ  $f(a)$  และ  $f(c)$  มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือ  $f(c)$  และ  $f(b)$  มีเครื่องหมายตรงกันข้าม การคำนวณด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะถูกใช้เมื่อพบว่าช่วงเล็กๆที่แบ่งนั้นมีเครื่องหมายที่ต่างกัน ซึ่งก็หมายความว่าอัลกอริทึมของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะเป็นแบบเวียนบังเกิด (Recursive)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

รูปที่ ข.1 การคำนวณหาค่ารากด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงบนช่วง  $[a_1, b_1]$  วงกลมใหญ่คือค่ารากของฟังก์ชัน [2]

ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงจะมีประสิทธิภาพที่ด้อยกว่าระเบียบวิธีนิวตัน แต่จะก่อให้เกิดความผิดพลาดที่น้อยกว่า เนื่องจากความผิดพลาดจะถูกลดลงทีละครั้งหนึ่งทุกครั้งจึงทำให้ระเบียบวิธีนี้มีการลู่อเข้าแบบเชิงเส้น ซึ่งจะทำให้เสียเวลาในการคำนวณ แต่ข้อดีก็คือวิธีนี้จะรับประกันว่าจะมีการลู่อเข้าถ้า  $f(a)$  และ  $f(b)$  มีเครื่องหมายที่ต่างกัน [2]

ขั้นตอนการคำนวณของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

1. กำหนดช่วง  $[a, c]$  ที่คาดว่าจะมีค่ารากอยู่
2. นำค่า  $a$  และ  $c$  ไปแทนในสมการ  $f(x)$  เพื่อหา  $f(a)$  และ  $f(c)$
3. ตรวจสอบช่วง  $[a, c]$  ที่กำหนดว่าใช้ได้หรือไม่ โดยการเปรียบเทียบค่า  $f(a) * f(c) < 0$  หรือไม่  
ถ้าใช่ แสดงว่าช่วง  $[a, c]$  ใช้ได้ให้ทำขั้นตอนต่อไป  
ถ้าไม่ใช่ แสดงว่าช่วง  $[a, c]$  ใช้ไม่ได้ให้กลับไปทำในขั้นที่ 1 ใหม่
4. เริ่มการทำซ้ำรอบที่ 1 ( $1^{\text{st}}$  Iteration ( $n = n + 1$ )) หาค่า  $b$  จาก  $b = (a + c) / 2$
5. นำค่า  $b$  ไปแทนใน  $f(x)$  เพื่อหา  $f(b)$
6. หาช่วงใหม่ โดยการเปรียบเทียบ  $f(a) * f(b) < 0$  หรือไม่  
ถ้าใช่ ช่วง  $[a, c]$  ใช้ได้ ดังนั้นให้เปลี่ยนตำแหน่งของ  $c$  มาใช้เป็น  $b$  แทนจะได้  $c = b$   $f(c) = f(b)$   
ถ้าไม่ใช่ ช่วง  $[a, c]$  ใช้ไม่ได้ ต้องเปลี่ยนมาใช้ช่วง  $[b, c]$  ดังนั้นให้เปลี่ยนตำแหน่งของ  $a$  มาเป็น  $b$  จะได้  $a = b$   $f(a) = f(b)$
7. ทำการตรวจสอบค่าความผิดพลาด โดยการเปรียบเทียบ  $|b-a| <$  ค่าความผิดพลาด หรือไม่  
ถ้าใช่ ได้  $b$  เป็นรากของสมการ  
ถ้าไม่ใช่ ทำขั้นตอนต่อไป
8. ทำการตรวจสอบจำนวนรอบ โดยการเปรียบเทียบ  $n >$  จำนวนรอบที่กำหนด หรือไม่  
ถ้าใช่ ได้  $b$  เป็นรากของสมการ  
ถ้าไม่ใช่ กลับไปทำในขั้นตอนที่ 4 เพื่อคำนวณหาค่า  $b$  ต่อไป  
การหารากของสมการโดยใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วงนั้นสามารถคำนวณหาจำนวนรอบที่ต้องใช้ในการทำซ้ำ (Iteration) ทั้งหมดได้จากการนำค่าความผิดพลาดที่ตั้งไว้มาแทนลงในสูตรต่อไปนี้

$$n \geq \frac{\ln \frac{(c-a)}{e}}{0.6931} \quad (\text{ข.1})$$

เมื่อ  $a$  และ  $c$  คือ ค่าขอบเขตแรกที่กำหนดไว้เพื่อใช้หารากของสมการ

$e$  คือ ค่าความผิดพลาด

$n$  คือ จำนวนรอบที่ต้องทำซ้ำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อุตสาหกรรมให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ภาคผนวก ค

## ระเบียบวิธีการประมาณนอกเส้น (Extrapolation Method)

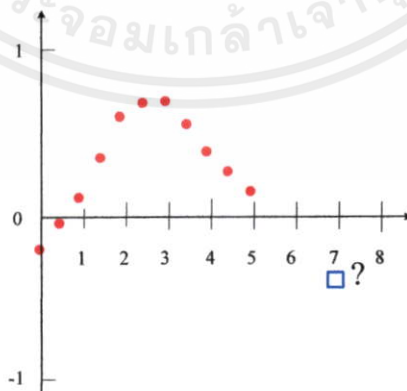
ระเบียบวิธีการประมาณนอกเส้นเป็นระเบียบวิธีของการประมาณค่าจากกระบวนการสร้างข้อมูลขึ้นมาใหม่ซึ่งไม่ได้อยู่ในขอบเขตข้อมูลที่เราทราบค่าแล้ว โดยที่ชุดข้อมูลที่เราทราบว่าแล้วจะเป็นชุดข้อมูลแบบคิสคริต ระเบียบวิธีนี้มีความคล้ายคลึงกับระเบียบวิธีการประมาณค่าในเส้น (Interpolation method) ซึ่งเป็นวิธีที่สร้างข้อมูลขึ้นมาใหม่เกิดขึ้นระหว่างจุดที่เราทราบค่ามาก่อน ผลลัพธ์ของระเบียบวิธีการประมาณนอกเส้นที่คำนวณได้บ่อยครั้งจะไม่ค่อยมีความสำคัญซึ่งจะถือว่าข้อมูลนั้นมีความไม่แน่นอนสูง [3]

ระเบียบวิธีการประมาณนอกเส้นเชิงแบบเส้นเป็นวิธีที่คำนวณง่าย จากการสร้างเส้นสัมผัสที่ปลายของข้อมูลที่ทราบค่าแล้วขยายขอบเขตเส้นตรงออกไปเกินกว่าลิมิต วิธีนี้จะให้ผลลัพธ์ที่ดีเมื่อการขยายกราฟซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นมีค่าไม่ห่างไกลจากชุดข้อมูลที่ทราบค่า

ถ้าจุดข้อมูลสองจุดที่ใกล้จุด  $x^*$  ที่สุด คือ  $(x_{k-1}, y_{k-1})$  และ  $(x_k, y_k)$  ถูกทำการประมาณนอกเส้นฟังก์ชันของการประมาณนอกเส้นแบบเชิงเส้น เมื่อ  $x_{k-1} < x^* < x_k$  จะแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$y(x^*) = y_{k-1} + \frac{x^* - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(y_k - y_{k-1}) \quad (\text{ค.1})$$

คุณภาพของระเบียบวิธีการประมาณนอกเส้นแบบเชิงเส้นนี้จะขึ้นกับความเรียบ (Smooth) ของข้อมูล



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**รูปที่ ค.1** ตัวอย่างปัญหาการหาค่าตอบค่าประมาณของฟังก์ชันด้วยระเบียบวิธีการประมาณนอกเส้นที่ตำแหน่งสี่เหลี่ยม เมื่อ  $x = 7$  โดยกำหนดให้จุดคือข้อมูลที่ทราบค่า [3]

## ภาคผนวก ง

## ฟังก์ชันแมททิว (Mathieu functions)

ฟังก์ชันแมททิวเป็นฟังก์ชันที่รู้จักกันดีในอีกชื่อหนึ่งว่าฟังก์ชันทรงกระบอกวงรี เนื่องจากฟังก์ชันแมททิวชนิดที่หนึ่งถือว่ามีควมสำคัญคั้งนั้นเราจึงได้กล่าวถึงคุณสมบัติของฟังก์ชันไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ด้วย แต่สำหรับฟังก์ชันแมททิวชนิดที่สองจะไม่ขอกกล่าวถึงในรายละเอียดเนื่องจากไม่เกี่ยวข้องกับการใช้งาน นอกจากนี้ยังได้รวบรวมเนื้อหาฟังก์ชันแมททิวคัดแปลง (Modified Mathieu Functions) ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองและความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันแมททิวกับแสงเคล (Related Mathieu-Hankel Functions) และในหัวข้อสุดท้ายเป็นการรวบรวมโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณฟังก์ชันแมททิวและฟังก์ชันแมททิวคัดแปลง สำหรับผู้สนใจเนื้อหาทฤษฎีฟังก์ชันแมททิวอย่างลึกซึ้งให้ศึกษาใน [4] สำหรับ [5] จะเหมาะสำหรับผู้ที่ต้องการทราบถึงสูตรต่างๆ ที่ปรากฏตามหนังสือและบทความทั่วไป

## ง.1 คำจำกัดความของฟังก์ชันแมททิว

สมการอนุพันธ์อันดับที่สองที่แสดงใน (ง.1) เรียกว่าสมการแมททิว โดย  $\lambda$  และ  $q$  เป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าเป็นจำนวนจริง (ง.1) เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับระบบพิกัดเชิงมุมซึ่งหาได้จากผลเฉลยของสมการคลื่นในระบบพิกัดวงรีด้วยวิธีการแยกตัวแปร

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\lambda - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (ง.1)$$

สำหรับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับฟิสิกส์ ส่วนใหญ่ผลเฉลยของ (ง.1) จะเป็นฟังก์ชันรายคาบแบบหนึ่งค่าในช่วง  $\pi$  หรือ  $2\pi$  ซึ่งจะเกิดได้ก็ต่อเมื่อ  $\lambda$  และ  $q$  มีความสัมพันธ์กันในลักษณะ  $F(\lambda, q) = 0$  หรือมีสมการคุณลักษณะเป็น  $\lambda = \lambda(0)$  ดังนั้น  $\lambda$  จึงเรียกว่าเป็นค่าคุณลักษณะ และเรียกผลเฉลยของ (ง.1) ว่าฟังก์ชันคุณลักษณะ

เมื่อ  $q = 0$  แทนใน (ง.1) จะได้

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda(0)y = 0 \quad (ง.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นผลเฉลยแบบเชิงเส้นอิสระของ (ง.2) จะได้

$$y(z) = \begin{cases} \cos mz \\ \sin mz \end{cases} \quad (\text{ง.3})$$

โดยที่  $m$  ถูกกำหนดโดย  $\lambda(0) = m^2$

เมื่อ  $q \neq 0$  (ง.1) จะมีสองผลเฉลยที่สอดคล้องกับ  $\lambda = \lambda(q)$  และ  $\lambda(0) = m^2$  ได้แก่  $ce_m(z, q)$  และ  $se_m(z, q)$  ผลเฉลยนี้เรียกว่าฟังก์ชันเมทริวอันดับที่  $m$  สัญลักษณ์ย่อ  $ce$  มาจาก Cosine Elliptic และสัญลักษณ์ย่อ  $se$  มาจาก Sine Elliptic ในกรณี  $q \rightarrow 0$   $ce_m(z, q)$  และ  $se_m(z, q)$  จะมีค่าเป็น  $\cos mz$  และ  $\sin mz$  ตามลำดับ เนื่องจาก  $ce_m(z, q)$  และ  $se_m(z, q)$  เป็นฟังก์ชันรายคาบจึงสามารถกระจายเป็นอนุกรมฟูเรียร์ไซน์และโคไซน์ได้ ไม่ว่า  $m$  จะเป็นจำนวนเต็มคู่หรือจำนวนเต็มคี่ ค่าคาบจะเป็น  $\pi$  หรือ  $2\pi$  ดังนั้นการกระจายอนุกรมฟูเรียร์จะเขียนได้ดังนี้

$$ce_{2r}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) \cos 2kz \quad (\text{ง.4})$$

$$ce_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \cos(2k+1)z \quad (\text{ง.5})$$

$$se_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \sin(2k+1)z \quad (\text{ง.6})$$

$$se_{2r+2}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \sin(2k+2)z \quad (\text{ง.7})$$

โดยที่  $r = 0, 1, 2, \dots$   $A$  และ  $B$  เป็นสัมประสิทธิ์การกระจาย (Expansion Coefficient) ที่จะต้องคำนวณหาต่อไป

ฟังก์ชันเมทริวของอันดับคู่ ( $ce_{2r}, se_{2r+2}$ ) จะมีคาบเป็น  $\pi$  ฟังก์ชันเมทริวของอันดับคี่ ( $ce_{2r+1}, se_{2r+2}$ ) จะมีคาบเป็น  $2\pi$  นอกจากนั้น  $ce_m(z, q)$  ยังเป็นฟังก์ชันคู่ของ  $z$  จึงเรียกว่าผลเฉลยคู่ของสมการเมทริว สำหรับ  $se_m(z, q)$  เป็นฟังก์ชันคี่ของ  $z$  จึงเรียกว่าผลเฉลยคี่ของสมการเมทริว เพื่อความสะดวกค่าคุณลักษณะของผลเฉลยคู่  $ce_m(z, q)$  จะกำหนดเป็น  $a$  และคุณลักษณะของผลเฉลยคี่  $se_m(z, q)$  จะกำหนดเป็น  $b$

ในกรณี  $q \neq 0$  ค่าคุณลักษณะสำหรับฟังก์ชันทั้งสี่ใน (ง.4)–(ง.7) จะมีค่าแตกต่างกันออกไป ดังนั้นฟังก์ชันทั้งสี่ไม่ได้เป็นผลเฉลยของสมการเมทริวที่เหมือนกัน เนื่องจากผลเฉลยมีสองผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น ผลเฉลยที่หนึ่งจะเป็นผลเฉลยแบบรายคาบซึ่งกำหนดไว้ใน (ง.4)–(ง.7) ในกรณีที่ค่าคุณลักษณะเหมือนเดิมผลเฉลยอันดับที่สองเมื่อ  $q \neq 0$  จะเป็นผลเฉลยแบบไร้คาบ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่เราไม่ต้องการนำไปใช้

## ง.2 การหาสัมประสิทธิ์การกระจายและค่าคุณลักษณะ

ในการที่เราจะคำนวณหาค่าฟังก์ชันแมทริชจาก (ง.4)–(ง.7) ได้นั้น ในขั้นตอนแรกจำเป็นที่จะต้องคำนวณหาสัมประสิทธิ์การกระจายจากการคำนวณหาค่าคุณลักษณะก่อน

(1) การหาสัมประสิทธิ์การกระจาย  $A(q)$  และ  $B(q)$

เมื่อแทนค่าแต่ละอนุกรมใน (ง.4)–(ง.7) ลงใน (ง.1) แล้วกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของ  $\cos 2kz$ ,  $\cos (2k + 1)z$ ,  $\sin (2k + 1)z$  และ  $\sin (2k + 2)z$  มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ  $k = 0, 1, 2, \dots$  เราจะได้ชุดความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (Recurrence Relation) ของสัมประสิทธิ์การกระจาย ซึ่งชุดความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนี้สามารถหาค่าได้จากอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ เพื่อให้การหาค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าเดียวกันจึงต้องกำหนดความสัมพันธ์รีอร์มัลไลซ์ขึ้น แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m^2(z, q) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m^2(z, q) dz = 1 \quad (ง.8)$$

จากการใช้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดและความสัมพันธ์รีอร์มัลไลซ์ สามารถสรุปผลที่ได้ดังนี้  
กรณี  $ce_{2r}(z, q)$

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด:

$$\begin{aligned} aA_0^{2r} - qA_2^{2r} &= 0 \\ (a) - 4A_2^{2r} - q(2A_0^{2r} + A_4^{2r}) &= 0 \\ (a - (2k)^2)A_{2k}^{2r} - q(A_{2k-2}^{2r} + A_{2k+2}^{2r}) &= 0 \quad (k \geq 2) \end{aligned} \quad (ง.9)$$

ความสัมพันธ์รีอร์มัลไลซ์:

$$a(A_0^{2r})^2 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k}^{2r})^2 = 0 \quad (ง.10)$$

กรณี  $ce_{2r+1}(z, q)$

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด:

$$\begin{aligned} (a-1-q)A_1^{2r+1} - qA_3^{2r+1} &= 0 \\ (a - (2k+1)^2)A_{2k+1}^{2r+1} - q(A_{2k-1}^{2r+1} + A_{2k+3}^{2r+1}) &= 0 \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (ง.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดก็ตามหากผู้ใดนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำ (ง.12)

ความสัมพันธ์รีอร์มัลไลซ์:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_{2k+1}^{2r+1})^2 = 0$$

กรณี  $se_{2r+1}(z, q)$

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด:

$$(a-1+q)B_1^{2r+1} - qB_3^{2r+1} = 0$$

$$(a - (2k + 1)^2)B_{2k+1}^{2r+1} - q(B_{2k-1}^{2r+1} + B_{2k+3}^{2r+1}) = 0 \quad k \geq 1 \quad (\text{ง.13})$$

ความสัมพันธ์นอร์มัลไลซ์: 
$$\sum_{k=0}^{\infty} (B_{2k+1}^{2r+1})^2 = 0 \quad (\text{ง.14})$$

กรณี  $se_{2r+2}(z, q)$

ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด: 
$$(b - 4)B_2^{2r+2} - qB_4^{2r+2} = 0$$

$$(b - (2k + 2)^2)B_{2k+2}^{2r+2} - q(B_{2k}^{2r+2} + B_{2k+4}^{2r+2}) = 0 \quad k \geq 1 \quad (\text{ง.15})$$

ความสัมพันธ์นอร์มัลไลซ์: 
$$\sum_{k=0}^{\infty} (B_{2k+2}^{2r+2})^2 = 0 \quad (\text{ง.16})$$

ในการคำนวณสัมประสิทธิ์ด้วยความสัมพันธ์เวียนบังเกิด จะต้องให้ความสนใจกับเสถียรภาพด้วย โดยส่วนใหญ่เมื่ออันดับน้อย การเวียนบังเกิดแบบย้อนกลับจะมีเสถียรภาพที่ดีกว่าจึงนิยมใช้มากกว่า แต่สำหรับอันดับมากการผสมผสานการเวียนบังเกิดจะสามารถปรับปรุงให้ผลลัพธ์มีความถูกต้องมากขึ้นได้ การคำนวณหาสัมประสิทธิ์จำเป็นที่จะใช้ค่าคุณลักษณะ  $a$  และ  $b$  ในหัวข้อถัดไปจึงได้นำเสนอการหาค่าคุณลักษณะ

(2) การหาค่าคุณลักษณะ  $a(q)$  และ  $b(q)$

การหาค่าคุณลักษณะ  $a(q)$  และ  $b(q)$  สามารถหาได้ทั้งจากการแก้ปัญหาค่าไอเกน (Eigenvalue Problem) หรือหาจากสมการทรานส์เซนเดนทอล (Transcendental Equation) วิธีแรกจะเริ่มจากการพิจารณา (ง.4) ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดใน (ง.9) ถือได้ว่าเป็นชุดของสมการพีชคณิตเชิงเส้นที่มีขนาดไม่จำกัดซึ่งเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a & -q & & & & \\ -2q & a-4 & -q & & & \\ & -q & a-16 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & -q & a-(2k)^2 & -q & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^{2r} \\ A_2^{2r} \\ A_4^{2r} \\ \vdots \\ A_{2k}^{2r} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{ง.17})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(ง.17) เป็นสมการที่มีผลเฉลยในรูปแบบไม่ชัดเจน (Nontrivial Solution) Determinant จะมีค่า

เป็นศูนย์ ทำให้

$$\begin{vmatrix} a & -q & & & \\ -2q & a-4 & -q & & \\ & -q & a-16 & & \\ & & & \ddots & \\ & & -q & a-(2k)^2 & -q \\ & & & & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (ง.18)$$

(ง.18) เป็นสมการคุณลักษณะที่ใช้ในการหาค่าคุณลักษณะของฟังก์ชันแมทริวใน (ง.4) พบว่าจะมีการกระจายเป็นพหุนามอนันต์ของ  $a$  ที่มี  $q$  เป็นตัวแปร ดังนั้นเมื่อกำหนดค่า  $q$  ค่าหนึ่ง จะมีค่าคุณลักษณะเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งใช้สัญลักษณ์  $a_{2r}$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) ตัวห้อยนี้แสดงค่าอันดับของฟังก์ชันแมทริว

เนื่องจากค่า  $q$  ที่มีค่าจำกัดหนึ่งค่า ค่าสัมประสิทธิ์ใน (ง.4) จะมีค่าลดลงขณะ  $k$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือ  $A_{2k}^{2r}(q) \rightarrow 0$  เมื่อ  $k \rightarrow \infty$  ในการหาค่าประมาณผลเฉลยของ  $a$  เราสามารถที่จะหยุดการกระจายพหุนามอนันต์ได้ที่  $k = N$  ดังนั้นอนุกรมใน (ง.4) จะกลายเป็นอนุกรมที่มีขนาดจำกัด ซึ่งจะทำให้ Determinant ใน (ง.18) กลายเป็นมีขนาดจำกัด เพื่อให้ได้ความแม่นยำ ค่า  $N$  จะเพิ่มมากขึ้นตามค่า  $q$  และอันดับของฟังก์ชันแมทริว ในทางปฏิบัติเราต้องการเฉพาะค่าคุณลักษณะที่มีจำนวนจำกัด ดังนั้น  $N$  จึงเป็นค่าที่จำกัดเสมอ

การหาค่าตอบของ (ง.18) เป็นการหาค่าตอบของปัญหาค่าไอเกนซึ่ง

$$\{[C_i] - a[I]\}[A] = 0 \quad (ง.19)$$

กรณี  $ce_{2r}(z, q)$

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 0 & -q & & & \\ 2q & 4 & q & & \\ & q & 16 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q & (2k)^2 & q \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (ง.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมตริกซ์จะเป็นเมตริกซ์แบบทแยงมุมสาม (Tridiagonal Matrix) เมื่อหาผลเฉลยค่าไอเกนของ (ง.19) เราก็คจะสามารถหาผลเฉลยของเวกเตอร์ไอเกน  $[A]$  ได้ ซึ่งจะมีองค์ประกอบเป็นค่าสัมประสิทธิ์การ

กระจาย แต่อย่างไรก็ตามโดยปกติการคำนวณหาสัมประสิทธิ์สามารถทำได้สะดวกด้วยการใช้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดซึ่งได้กล่าวรายละเอียดไว้แล้ว

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถที่จะหาค่าคุณลักษณะของฟังก์ชันแมทริวของ (ง.5)–(ง.7) ได้โดยการหาผลเฉลยของปัญหาค่าไอเกนที่มีเมตริกซ์ดังนี้

กรณี  $ce_{2r+1}(z, q)$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 1+q & q & & & & \\ q & 9 & q & & & \\ & q & 25 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & q & (2k+1)^2 & q \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{ง.21}$$

กรณี  $se_{2r+1}(z, q)$

$$[C_3] = \begin{bmatrix} 1-q & q & & & & \\ q & 9 & q & & & \\ & q & 25 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & q & (2k+1)^2 & q \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{ง.22}$$

กรณี  $se_{2r+2}(z, q)$

$$[C_4] = \begin{bmatrix} 4 & q & & & & \\ q & 16 & q & & & \\ & q & 36 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & q & (2k+2)^2 & q \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{ง.23}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อีกทางเลือกในการคำนวณหาค่าคุณลักษณะก็คือการหา Determinant ของ (ง.18) ตามหลักการแล้วจะต้องถูกกระจายเป็นพหุนามอนันต์ ทำให้ได้สมการทรานส์เซนเดนทอลในรูปแบบเศษส่วนที่ต่อเนื่องจำนวนอนันต์ สำหรับฟังก์ชันแมทริวทั้งสี่สมการ (ง.4)–(ง.7) จะได้สมการทรานส์เซนเดนทอลแสดงได้ดังนี้

$$F_i(\lambda, q) = (2r + p)^2 + T_1 + T_2 - \lambda = 0 \quad (\text{ง.24})$$

กำหนดให้  $r = 0, 1, 2, \dots$   $p = 0$  เมื่อฟังก์ชันแมทริวเป็นอันดับคู่  $p = 1$  เมื่อฟังก์ชันแมทริวเป็นอันดับคี่  $i = 1, 2, 3$  และ  $4$  สำหรับกรณีคำนวณ  $ce_{2r}(z, q)$ ,  $ce_{2r+1}(z, q)$ ,  $se_{2r+1}(z, q)$  และ  $se_{2r+2}(z, q)$  ตามลำดับ

$$T_1 = -\frac{q^2}{(2r+2+p)^2 - \lambda} - \frac{q^2}{(2r+4+p)^2 - \lambda} - \frac{q^2}{(2r+6+p)^2 - \lambda} - \dots \quad (\text{ง.25})$$

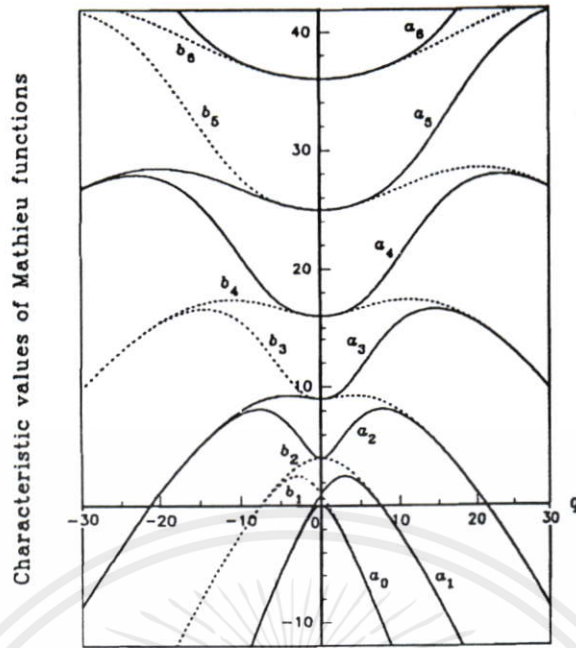
$$T_2 = -\frac{q^2}{(2r-2+p)^2 - \lambda} - \frac{q^2}{(2r-4+p)^2 - \lambda} - \dots - \frac{q^2}{(4-p)^2 - \lambda} - \frac{q^2}{T_{0i}} \quad (\text{ง.26})$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} T_{01} &= 4 - \lambda + \frac{2q^2}{\lambda} & \lambda &= a \\ T_{02} &= 1 + q - \lambda & \lambda &= a \\ T_{03} &= 1 - q - \lambda & \lambda &= b \\ T_{04} &= 4 - \lambda & \lambda &= b \end{aligned} \quad (\text{ง.27})$$

การหาค่าคุณลักษณะสามารถหาได้จาก (ง.24) โดยการใช่วิธีเชิงเลข เช่น ระเบียบวิธีเซแคนต์ เมื่อเปรียบเทียบวิธีการหาค่าคุณลักษณะพบว่าวิธีแรกจะเป็นวิธีที่ง่ายกว่า โดยจะต้องคำนวณค่าคุณลักษณะเป็นลำดับ ขณะที่วิธีที่สองจะมีประสิทธิภาพมากกว่าเมื่อเราต้องการหาค่าคุณลักษณะใดๆ สมการทรานส์เซนเดนทอลที่ใช้นี้สามารถปรับปรุงความเสถียรภาพของกระบวนการทำซ้ำได้สำหรับการหาค่า  $\lambda$  โดยใช้ค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมสำหรับ  $\lambda$  เราจะได้ค่าคุณลักษณะสำหรับการคำนวณหาฟังก์ชันแมทริวที่แม่นยำได้จากระเบียบวิธีเซแคนต์ รูปที่ ง.1 แสดงกราฟค่าคุณลักษณะหาค่าแรกที่เป็นฟังก์ชันของ  $q$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 1.1 ค่าคุณลักษณะของฟังก์ชันเมทิว [6]

(3) การคำนวณค่าประมาณของค่าคุณลักษณะ

การหาค่าคุณลักษณะของฟังก์ชันเมทิวสามารถหาค่าประมาณได้จากการกระจายพหุนามและการกระจายเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic) ดังต่อไปนี้

(3.1) กรณี  $q < 1$

$$a_0 = -0.5q^2 + 0.0546875q^4 - 0.01258680556q^6 + 0.003639168209q^8 + O(q^{10}) \quad (จ.28)$$

$$b_1 = 1 - q - 0.125q^2 + 0.015625q^3 - 6.510416667 \times 10^{-4}q^4 - 2.983940972 \times 10^{-4}q^5 + 8.307562934 \times 10^{-5}q^6 - 5.828009711 \times 10^{-6}q^7 - 2.345332393 \times 10^{-6}q^8 + O(q^9) \quad (จ.29)$$

$$a_1 = b_1(-q) \quad (จ.30)$$

$$b_2 = 4 - 0.08333333333q^2 + 3.616898148 \times 10^{-4}q^4 - 3.629456822 \times 10^{-6}q^6 + 4.663933997 \times 10^{-8}q^8 + O(q^{10}) \quad (จ.31)$$

$$a_2 = 4 + 0.4166666667q^2 - 0.05519386574q^4 + 0.0125888275q^6 - 0.003639112177q^8 + O(q^{10}) \quad (จ.32)$$

$$a_3 = b_3(-q) \quad (จ.33)$$

$$b_4 = 16 + 0.03333333333q^2 - 3.668981481 \times 10^{-4}q^4 + 3.692313345 \times 10^{-6}q^6 + O(q^8) \quad (จ.34)$$

$$a_4 = 16 + 0.03333333333q^2 + 5.011574074 \times 10^{-4}q^4 - 2.094723692 \times 10^{-6}q^6 + O(q^8) \quad (จ.35)$$

$$b_5 = 25 + 0.02083333333q^2 + 1.420924272 \times 10^{-5}q^4 - 6.781684028 \times 10^{-6}q^5 \\ + 4.148847702 \times 10^{-8}q^6 + O(q^7) \quad (จ.36)$$

$$a_5 = b_5(-q) \quad (จ.37)$$

$$b_6 = 36 + 0.01428571429q^2 + 4.259293003 \times 10^{-6}q^4 - 6.307172471 \times 10^{-8}q^6 + O(q^8) \quad (จ.38)$$

$$a_6 = 36 + 0.01428571429q^2 + 4.259293003 \times 10^{-6}q^4 + 7.25619 \times 10^{-8}q^6 + O(q^8) \quad (จ.39)$$

กรณี  $m \geq 7$  และ  $q < 3m$

$$a_m, b_m = m^2 + \frac{1}{2(m^2-1)}q^2 + \frac{5m^2+7}{32(m^2-1)(m^2-4)}q^4 \\ + \frac{9m^4+58m^2+29}{64(m^2-1)^5(m^2-4)(m^2-9)}q^6 + O(q^7 \sim q^8) \quad (จ.40)$$

(3.2) กรณี  $1 < q < 10$  หรือ  $1 < q < m^2$

$$a_0 \approx 0.5542818 - 0.88297q - 0.09638957q^2 + 0.003999267q^3 \quad (1 < q < 10) \quad (จ.41)$$

$$a_1 \approx 0.811752 + 1.33372q - 0.3089229q^2 + 0.0192917q^3 - 0.000494603q^4 \\ (1 < q < 10) \quad (จ.42)$$

$$b_1 \approx 1.10427 - 1.152218q - 0.05482465q^2 + 0.001971096q^3 \\ (1 < q < 10) \quad (จ.43)$$

$$a_2 \approx 3.3290504 + 0.992q - 0.0001829032q^2 - 0.008667445q^3 + 0.0003200972q^4 \\ (1 < q < 15) \quad (จ.44)$$

$$b_2 \approx 4.00909 - 0.004732542q - 0.08725329q^2 + 0.00238446q^3 \\ (1 < q < 10) \quad (จ.45)$$

$$a_3 \approx 8.9449274 - 0.1039356q + 0.19069602q^2 - 0.01453021q^3 + 0.0003035731q^4 \\ (1 < q < 20) \quad (จ.46)$$

$$b_3 \approx 8.771735 + 0.2689874q - 0.03569325q^2 + 0.00009369364q^3 \quad (1 < q < 15) \quad (จ.47)$$

$$a_4 \approx 16.620847 - 0.5924058q + 0.17344854q^2 - 0.0079684875q^3 + 0.0001076676q^4 \\ (1 < q < 25) \quad (จ.48)$$

$$b_4 \approx 15.744 + 0.1907493q + 0.0038216144q^2 - 0.000708719q^3 \quad (1 < q < 20) \quad (จ.49)$$

$$a_5 \approx 25.93515 - 0.600205q + 0.10706975q^2 - 0.002983416q^3 + 0.00002238231q^4 \\ (1 < q < 25) \quad (จ.50)$$

$$b_5 \approx 24.897 + 0.0416399q + 0.0218225q^2 - 0.0007425364q^3 \quad (1 < q < 25) \quad (จ.51)$$

$$a_6 \approx 36.423 - 0.181233q + 0.0253998q^2 + 0.000480263q^3 - 0.0000166846q^4$$

$$(1 < q < 40) \quad (จ.52)$$

$$b_6 \approx 35.9925 - 0.02349616q + 0.0216609q^2 - 0.000457146q^3 \quad (1 < q < 35) \quad (จ.53)$$

$$a_7 \approx 49.0547 + 0.0353597q - 0.003097887q^2 + 0.0009730514q^3 - 0.00001411114q^4$$

$$(10 < q < 50) \quad (จ.54)$$

$$b_7 \approx 49.19035 - 0.0916292q + 0.0205511q^2 - 0.0003043872q^3 \quad (10 < q < 40) \quad (จ.55)$$

(3.3) กรณี  $q \geq 10$  หรือ  $q \geq m^2$

$$\left. \begin{matrix} a_r \\ b_r \end{matrix} \right\} \approx -2q + 2w\sqrt{q} - \frac{w^2 + 1}{8} + \frac{w + 3/w}{2^7 \sqrt{\varphi}} - \frac{d_1}{2^{12} \varphi} - \frac{d_2}{2^{17} \varphi^{3/2}} - \frac{d_3}{2^{20} \varphi^2} - \frac{d_4}{2^{25} \varphi^{5/2}} \quad (จ.56)$$

กำหนดให้

$$w = 2r + 1, \quad \varphi = \frac{q}{w^4} \quad \varphi \text{ เป็นจำนวนจริง} \quad (จ.57)$$

$$d_1 = 5 + \frac{34}{w^2} + \frac{9}{w^4} \quad (จ.58)$$

$$d_2 = \frac{33}{w} + \frac{410}{w^3} + \frac{405}{w^5} \quad (จ.59)$$

$$d_3 = \frac{63}{w^2} + \frac{1260}{w^4} + \frac{2943}{w^6} + \frac{486}{w^8} \quad (จ.60)$$

$$d_4 = \frac{527}{w^3} + \frac{15617}{w^5} + \frac{69001}{w^7} + \frac{41607}{w^9} \quad (จ.61)$$

ค่าประมาณของค่าคุณลักษณะที่คำนวณได้จาก (จ.28)–(จ.61) จะใช้เป็นค่าเริ่มต้นของผลเฉลยแบบทำซ้ำ (Iterative Solution) ใน (จ.24) หลังจากการทำซ้ำไม่กี่ครั้ง ในที่สุดก็จะได้ค่าคุณลักษณะที่มีความแม่นยำตามต้องการ

### จ.3 การกระจายฟังก์ชันแมทริวในกรณี $|q| < 1$

สัมประสิทธิ์การกระจายสามารถหาได้จากค่าประมาณของค่าคุณลักษณะ ดังนั้นจะได้การ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

กระจายของฟังก์ชันแมทริวในกรณี  $|q| < 1$  ดังต่อไปนี้

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$ce_0(z, q) = 2^{1/2} \left[ 1 - \frac{q}{2} \cos 2z + q^2 \left( \frac{\cos 4z}{32} - \frac{1}{16} \right) - q^3 \left( \frac{\cos 6z}{1152} - \frac{11 \cos 2z}{128} \right) \right] + O(q^4) \quad (3.62)$$

$$ce_1(z, q) = \cos z - \frac{q}{8} \cos 3z + q^2 \left( \frac{\cos 5z}{192} - \frac{\cos 3z}{64} - \frac{\cos z}{128} \right) - q^3 \left( \frac{\cos 7z}{9216} - \frac{\cos 5z}{1152} - \frac{\cos 3z}{3072} + \frac{\cos z}{512} \right) + O(q^4) \quad (3.63)$$

$$se_1(z, q) = \sin z - \frac{q}{8} \sin 3z + q^2 \left( \frac{\sin 5z}{192} + \frac{\sin 3z}{64} - \frac{\sin z}{128} \right) - q^3 \left( \frac{\sin 7z}{9216} + \frac{\sin 5z}{1152} - \frac{\sin 3z}{3072} - \frac{\sin z}{512} \right) + O(q^4) \quad (3.64)$$

$$ce_2(z, q) = \cos 2z - q \left( \frac{\cos 4z}{12} - \frac{1}{4} \right) + q^2 \left( \frac{\cos 6z}{384} - \frac{19 \cos 2z}{288} \right) + O(q^3) \quad (3.65)$$

$$se_2(z, q) = \sin 2z - \frac{q}{12} \sin 4z + q^2 \left( \frac{\sin 6z}{384} - \frac{\sin 2z}{288} \right) + O(q^3) \quad (3.66)$$

$$ce_3(z, q) = \cos 3z - q \left( \frac{\cos 5z}{16} - \frac{\cos z}{8} \right) - q^2 \left( \frac{\cos 7z}{640} - \frac{5 \cos 3z}{512} + \frac{\cos z}{64} \right) + O(q^3) \quad (3.67)$$

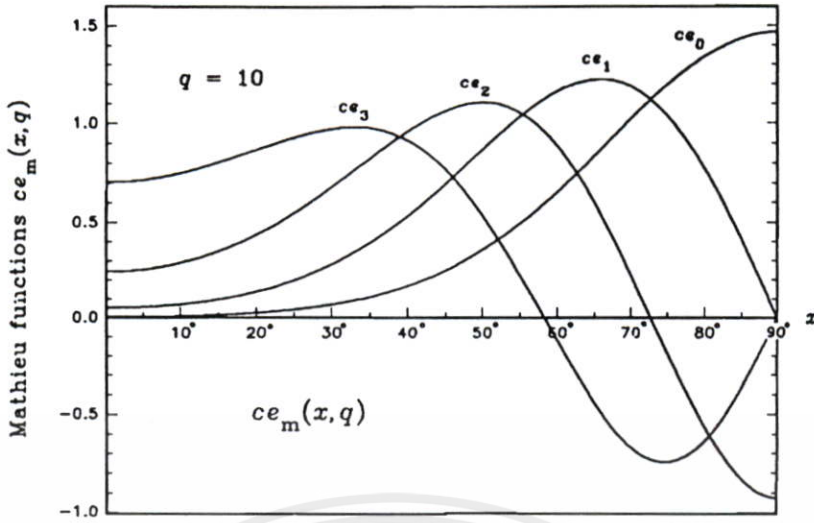
$$se_3(z, q) = \sin 3z - q \left( \frac{\sin 5z}{16} - \frac{\sin z}{8} \right) - q^2 \left( \frac{\sin 7z}{640} - \frac{5 \sin 3z}{512} - \frac{\sin z}{64} \right) + O(q^3) \quad (3.68)$$

กรณี  $m \geq 4$

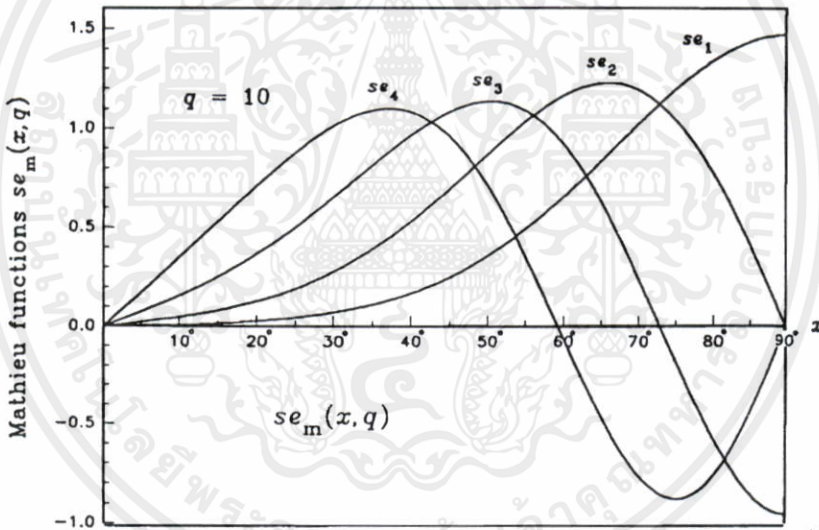
$$ce_m(z, q) = \cos mz - q \left[ \frac{\cos(m+2)z}{4(m+1)} - \frac{\cos(m-2)z}{4(m-1)} \right] + q^2 \left[ \frac{\cos(m+4)z}{32(m+1)(m+2)} + \frac{\cos(m-4)z}{32(m-1)(m-2)} - \frac{1}{32} \left( \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m-1)^2} \right) \cos mz \right] + O(q^3) \quad (3.69)$$

$$se_m(z, q) = \sin mz - q \left[ \frac{\sin(m+2)z}{4(m+1)} - \frac{\sin(m-2)z}{4(m-1)} \right] + q^2 \left[ \frac{\sin(m+4)z}{32(m+1)(m+2)} + \frac{\sin(m-4)z}{32(m-1)(m-2)} - \frac{1}{32} \left( \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m-1)^2} \right) \sin mz \right] + O(q^3) \quad (3.70)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ง.2 ฟังก์ชันแมทิว  $ce_m(x, q)$  กรณี  $q = 10$  [6]



รูปที่ ง.3 ฟังก์ชันแมทิว  $se_m(x, q)$  กรณี  $q = 10$  [6]

รูปที่ ง.2 และ ง.3 แสดงตัวอย่างฟังก์ชันแมทิวในกรณี  $q = 10$

### ง.4 คุณสมบัติของฟังก์ชันแมทิว

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ (1) ถ้าพิเศษ ห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A_0^0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad A_m^m(0) = 1 \quad B_m^m(0) = 1 \quad \text{เมื่อ } m > 0 \quad (ง.71)$$

$$A_k^m(0) = 0 \quad B_k^m(0) = 0 \quad \text{เมื่อ } k \neq m \quad (\text{จ.72})$$

ค่าฟังก์ชันแมทริวเมื่อ  $z = 0$  และ  $\pi/2$  สามารถหาได้จาก (จ.4)–(จ.7) ในพจน์ของสัมประสิทธิ์การกระจาย

(2) ค่าคาบ

ถ้า  $m$  เป็นเลขคู่  $ce_m(z, q)$  และ  $se_m(z, q)$  จะมีคาบเท่ากับ  $\pi$  แต่ถ้า  $m$  เป็นเลขคี่  $ce_m(z, q)$  และ  $se_m(z, q)$  จะมีคาบเท่ากับ  $2\pi$

(3) ความสมมาตรที่เกี่ยวข้องกับ  $z$

เมื่อ  $z = 0$  และ  $\pi$  ฟังก์ชัน  $ce_m(z, q)$  มีความสมมาตร ขณะที่  $se_m(z, q)$  ไม่มีความสมมาตร เมื่อ  $z = \pi/2$  ฟังก์ชัน  $ce_m(z, q)$  มีความสมมาตร ถ้า  $m$  เป็นเลขคู่ ฟังก์ชัน  $ce_m(z, q)$  ไม่มีความสมมาตร ถ้า  $m$  เป็นเลขคี่ ฟังก์ชัน  $se_m(z, q)$  ไม่มีความสมมาตร ถ้า  $m$  เป็นเลขคู่ ฟังก์ชัน  $se_m(z, q)$  มีความสมมาตร ถ้า  $m$  เป็นเลขคี่

(4) ความสมมาตรที่เกี่ยวข้องกับ  $q$

ค่าคุณลักษณะ

$$a_{2r}(-q) = a_{2r}(q) \quad (\text{จ.73})$$

$$a_{2r+1}(-q) = b_{2r+1}(q) \quad (\text{จ.74})$$

$$b_{2r+1}(-q) = a_{2r+1}(q) \quad (\text{จ.75})$$

$$b_{2r+2}(-q) = b_{2r+2}(q) \quad (\text{จ.76})$$

ค่าการกระจายสัมประสิทธิ์

$$A_{2k}^{2r}(-q) = (-1)^{k-r} A_{2k}^{2r}(q) \quad (\text{จ.77})$$

$$A_{2k+1}^{2r+1}(-q) = (-1)^{k-r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \quad (\text{จ.78})$$

$$B_{2k+1}^{2r+1}(-q) = (-1)^{k-r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \quad (\text{จ.79})$$

$$B_{2k+2}^{2r+2}(-q) = (-1)^{k-r} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \quad (\text{จ.80})$$

(5) ค่ารากของฟังก์ชันแมทริว

เอกสารนี้เป็น... ในช่วง  $[0, \pi]$   $ce_m(z, q)$  และ  $se_m(z, q)$  จะมีจำนวนค่ารากเท่ากันเหมือนกับ  $\cos mz$  และ  $\sin mz$  หมายความว่า  $mz$  คือ  $m$  เมื่อ  $q = 0$  ค่ารากจะอยู่ห่างเท่าๆกัน เมื่อ  $q \rightarrow \infty$  ค่ารากจะกระจุกตัวอยู่รอบ  $z = \pi/2$  ไปใช้

(6) ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันแมทริวที่มี  $q$  และ  $-q$

$$ce_{2r}(z, -q) = (-1)^r ce_{2r}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right) \quad (จ.81)$$

$$ce_{2r+1}(z, -q) = (-1)^r se_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right) \quad (จ.82)$$

$$se_{2r+1}(z, -q) = (-1)^r ce_{2r+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right) \quad (จ.83)$$

$$se_{2r+2}(z, -q) = (-1)^r se_{2r+2}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right) \quad (จ.84)$$

(7) ความสัมพันธ์เชิงออร์โธโกนัล (Orthogonal Relations)

$$\int_0^{2\pi} ce_m(z, q) ce_{m'}(z, q) dz = \begin{cases} 0 & m' \neq m \\ \pi & m' = m \end{cases} \quad (จ.85)$$

$$\int_0^{2\pi} se_m(z, q) se_{m'}(z, q) dz = \begin{cases} 0 & m' \neq m \\ \pi & m' = m \end{cases} \quad (จ.86)$$

$$\int_0^{2\pi} ce_m(z, q) se_{m'}(z, q) dz = 0 \quad (จ.87)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ภาคผนวก จ

## ฟังก์ชันแมทิวดัดแปลง (Modified Mathieu Function)

สมการแมทิวดัดแปลงคือสมการอนุพันธ์ใน (จ.1)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - (\lambda - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (\text{จ.1})$$

สมการนี้เป็นสมการอันดับที่สองที่เกี่ยวข้องกับระบบพิกัดเชิงรัศมี (Radial Coordinate) เป็นผลเฉลยที่ได้จากการหาผลเฉลยสมการคลื่นในระบบพิกัดวงรีด้วยวิธีการแยกตัวแปร  $q$  เป็นตัวแปร และ  $\lambda$  คือ ค่าคุณลักษณะเช่นเดียวกับกรณีของสมการแมทิว ผลเฉลยของ (จ.1) เรียกว่าฟังก์ชันแมทิวดัดแปลง (จ.1) สามารถหาคำตอบจาก (จ.1) จากการให้  $z$  เป็น  $iz$  ดังนั้นผลเฉลยของฟังก์ชันแมทิวดัดแปลงซึ่งแทนด้วย  $Ce_m(z, q)$  และ  $Se_m(z, q)$  สามารถหาได้จากการแทนค่า  $iz$  ใน  $z$  ของ  $ce_m(z, q)$  และ  $se_m(z, q)$  ตามลำดับ

$$Ce_m(z, q) = ce_m(iz, q)$$

$$Se_m(z, q) = -i se_m(iz, q)$$

จาก (จ.4)–(จ.7) จะได้ว่า

$$Ce_{2r}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) \cosh 2kz \quad (\text{จ.2})$$

$$Ce_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \cosh (2k+1)z \quad (\text{จ.3})$$

$$Se_{2r+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \sinh (2k+1)z \quad (\text{จ.4})$$

$$Se_{2r+2}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \sinh (2k+2)z \quad (\text{จ.5})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ฟังก์ชันแมทิวดัดแปลงสามารถกระจายได้ในรูปของอนุกรมฟังก์ชันเบสเซลได้ดังต่อไปนี้ [5] นำไปใช้

$$\begin{aligned}
 Ce_{2r}(z, q) &= \frac{ce_{2r}(\pi/2, q)}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k}^{2r}(q) J_{2k}(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{ce_{2r}(0, q)}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) J_{2k}(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{จ.6}$$

$$\begin{aligned}
 Ce_{2r+1}(z, q) &= \frac{ce'_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q} A_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} A_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{ce'_{2r+1}(0, q)}{\sqrt{q} A_1^{2r+1}(q)} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) A_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{จ.7}$$

$$\begin{aligned}
 Se_{2r+1}(z, q) &= \frac{se_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q} B_1^{2r+1}(q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{se'_{2r+1}(0, q)}{\sqrt{q} B_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) J_{2k+1}(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{จ.8}$$

$$\begin{aligned}
 Se_{2r+2}(z, q) &= \frac{se'_{2r+2}(\pi/2, q)}{\sqrt{q} B_2^{2r+2}(q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) J_{2k+2}(2\sqrt{q} \cosh z) \\
 &= \frac{se'_{2r+2}(0, q)}{q B_2^{2r+2}(q)} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) J_{2k+2}(2\sqrt{q} \sinh z)
 \end{aligned} \tag{จ.9}$$

หรือฟังก์ชันแมทริวดีคัลแปลงสามารถกระจายได้ในรูปของอนุกรมฟังก์ชันเบสเชลในรูปแบบอื่นได้ดังต่อไปนี้ [4]

$$Ce_{2r}(z, q) = \frac{ce_{2r}(0, q) ce_{2r}(\pi/2, q)}{[A_0^{2r}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k}^{2r}(q) J_k(\sqrt{q} e^{-z}) J_k(\sqrt{q} e^z) \tag{จ.10}$$

$$\begin{aligned}
 Ce_{2r+1}(z, q) &= \frac{ce_{2r+1}(0, q) ce'_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q} [A_1^{2r+1}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} A_{2k+1}^{2r+1}(q) \\
 &\quad \times [J_k(\sqrt{q} e^{-z}) J_{k+1}(\sqrt{q} e^z) + J_{k+1}(\sqrt{q} e^{-z}) J_k(\sqrt{q} e^z)]
 \end{aligned} \tag{จ.11}$$

$$\begin{aligned}
 Se_{2r+1}(z, q) &= \frac{se'_{2r+1}(0, q) se_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q} [B_1^{2r+1}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{2k+1}^{2r+1}(q) \\
 &\quad \times [J_k(\sqrt{q} e^{-z}) J_{k+1}(\sqrt{q} e^z) - J_{k+1}(\sqrt{q} e^{-z}) J_k(\sqrt{q} e^z)]
 \end{aligned} \tag{จ.12}$$

$$\begin{aligned}
 Se_{2r+2}(z, q) &= \frac{se'_{2r+2}(0, q) se_{2r+2}(\pi/2, q)}{\sqrt{q} [B_1^{2r+2}(q)]^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \\
 &\quad \times [J_k(\sqrt{q} e^{-z}) J_{k+2}(\sqrt{q} e^z) - J_{k+2}(\sqrt{q} e^{-z}) J_k(\sqrt{q} e^z)]
 \end{aligned} \tag{จ.13}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เนื่องจากฟังก์ชันแมทริวดีคัลแปลงเป็นฟังก์ชันแมทริวธรรมดามีอาร์กิวเมนต์เป็นจำนวนจินตภาพดังนั้นค่าคุณลักษณะและสัมประสิทธิ์การกระจายจะมีค่าเหมือนกันกับกรณีฟังก์ชันแมทริวธรรมดา ฟังก์ชันแมทริวดีคัลแปลงสามารถหาได้จากทั้งการใช้ (จ.2)–(จ.5) หรือ (จ.6)–(จ.9) หรือ

(จ.10)–(จ.13) อัลกอริทึมการคำนวณใน (จ.2)–(จ.5) จะถือว่าง่ายที่สุด แต่ว่าการลู่อเข้าสู่ผลเฉลยจะค่อนข้างช้า ดังนั้นจึงเหมาะกับการคำนวณที่มีอันดับน้อยที่มีค่า  $q$  และ  $z$  ที่ไม่มาก สำหรับอัลกอริทึมการคำนวณใน (จ.10)–(จ.13) จะมีอัตราการลู่อเข้าสู่ผลเฉลยที่รวดเร็ว เนื่องจาก  $J_k$  จะลดลงเมื่อ  $k$  มีค่ามากขึ้น โดยเฉพาะที่เวลา  $k > |z|$  และอัลกอริทึมนี้ยังเหมาะสำหรับค่า  $q$  และ  $z$  ที่มีค่ามาก ถึงแม้ว่า (จ.6)–(จ.9) จะเกี่ยวข้องกับการคำนวณฟังก์ชันเบสเซลเพียงหนึ่งค่า เวลาที่ใช้คำนวณสัมประสิทธิ์การกระจายจะเท่ากับกรณี (จ.10)–(จ.13)

เนื่องจากสมการเมทริวัดแปลงเป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่สอง ผลเฉลยที่สมบูรณ์จึงเป็นผลเฉลยเชิงเส้นอิสระสองผลเฉลย เหมือนกับกรณีของฟังก์ชันเมทริว  $Ce_{2r}(z, q)$ ,  $Ce_{2r+1}(z, q)$ ,  $Se_{2r+1}(z, q)$  และ  $Se_{2r+2}(z, q)$  จะไม่เป็นผลเฉลยของฟังก์ชันเมทริวัดแปลงเดียวกัน เพราะค่าคุณลักษณะสำหรับฟังก์ชันเหล่านี้มีค่าต่างกัน ดังนั้นผลเฉลยที่สมบูรณ์ของสมการเมทริวัดแปลงจึงไม่ได้เกิดจากผลเฉลยของการรวมสองฟังก์ชันจากทั้งหมดสี่ฟังก์ชันนี้

ฟังก์ชันเมทริวัดแปลงอีกรูปแบบหนึ่งที่กำหนดใช้กันอย่างกว้างและมีประโยชน์ได้แก่ [5]

$$\begin{aligned} Mc_{2r}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{ce_{2r}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) Z_{2k}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &= \frac{1}{ce_{2r}(\pi/2, q)} (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) Z_{2k}^{(j)}(2\sqrt{q} \sinh z) \end{aligned} \quad (จ.14)$$

$$\begin{aligned} Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{ce_{2r+1}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &= \frac{1}{ce'_{2r}(\pi/2, q)} (-1)^{r+1} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) A_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \sinh z) \end{aligned} \quad (จ.15)$$

$$\begin{aligned} Ms_{2r+1}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{se'_{2r+1}(0, q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &= \frac{1}{se_{2r+1}(\pi/2, q)} (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \sinh z) \end{aligned} \quad (จ.16)$$

$$\begin{aligned} Ms_{2r+2}^{(j)}(z, q) &= \frac{1}{se'_{2r+2}(0, q)} \tanh z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &= \frac{1}{se'_{2r+2}(\pi/2, q)} (-1)^{r+1} \coth z \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^{(j)}(2\sqrt{q} \sinh z) \end{aligned} \quad (จ.17)$$

เมื่อ  $r = 0, 1, 2, \dots$  ฟังก์ชันที่เมื่อ  $j = 1$  และ  $Z_k^{(1)}(x) \equiv J_k(x)$  จะเป็นฟังก์ชันเมทริวัดแปลงชนิดที่หนึ่ง เหมือนกับที่ได้กำหนดใน (จ.6)–(จ.9) ฟังก์ชันที่เมื่อ  $j = 2$  และ  $Z_k^{(2)}(x) \equiv Y_k(x)$  จะเป็นฟังก์ชันเมทริวัดแปลงชนิดที่สอง ที่มีค่า  $Y_k(x)$  เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สอง

$Mc_m^{(j)}(z, q)$  และ  $Ms_m^{(j)}(z, q)$  สามารถแสดงได้ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันเบสเซลคูณกัน [5]

ดังนี้

$$Mc_{2r}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) J_k(u_1) Z_k^{(j)}(u_2) \quad (จ.18)$$

$$Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{A_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) [J_k(u_1) Z_{k+1}^{(j)}(u_2) + J_{k+1}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (จ.19)$$

$$Ms_{2r+1}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{B_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) [J_k(u_1) Z_{k+1}^{(j)}(u_2) - J_{k+1}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (จ.20)$$

$$Ms_{2r+2}^{(j)}(z, q) = \frac{1}{B_2^{2r+2}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+2}^{2r+2}(q) [J_k(u_1) Z_{k+2}^{(j)}(u_2) - J_{k+2}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (จ.21)$$

กำหนดให้  $u_1 = \sqrt{q}e^{-z}$  และ  $u_2 = \sqrt{q}e^z$

เมื่อนำ (จ.14)–(จ.17) และ (จ.18)–(จ.21) มาทำอนุพันธ์เทียบกับค่า  $z$  พบว่าฟังก์ชันแมทริวคัดแปลงในพจน์ของฟังก์ชันเบสเซลและผลคูณของฟังก์ชันเบสเซลที่ได้จะมีค่าดังนี้

$$\frac{d}{dz} Mc_{2r}^{(j)}(z, q) = \frac{2\sqrt{q} \sinh z}{ce_{2r}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) Z_{2k}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \quad (จ.22)$$

$$\frac{d}{dz} Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q) = \frac{2\sqrt{q} \sinh z}{ce_{2r+1}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \quad (จ.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} Ms_{2r+1}^{(j)}(z, q) &= \frac{2\sqrt{q} \sinh z \tanh z}{se'_{2r+1}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &+ \frac{1}{se'_{2r+1}(0, q) \cosh^2 z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+1) B_{2k+1}^{2r+1}(q) Z_{2k+1}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \end{aligned} \quad (จ.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} Ms_{2r+2}^{(j)}(z, q) &= \frac{2\sqrt{q} \sinh z \tanh z}{se'_{2r+2}(0, q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \\ &+ \frac{1}{se'_{2r+2}(0, q) \cosh^2 z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} (2k+2) B_{2k+2}^{2r+2}(q) Z_{2k+2}^{(j)}(2\sqrt{q} \cosh z) \end{aligned} \quad (จ.25)$$

และ

$$\frac{d}{dz} Mc_{2r}^{(j)}(z, q) = \frac{\sqrt{q}}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) [e^z J_k(u_1) Z_k^{(j)}(u_2) - e^{-z} J'_k(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (จ.26)$$

$$\frac{d}{dz} Mc_{2r+1}^{(j)}(z, q) = \frac{\sqrt{q}}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) [e^z J_k(u_1) Z_k^{(j)}(u_2) - e^{-z} J'_k(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \quad (จ.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} Ms_{2r+1}^{(j)}(z, q) &= \frac{\sqrt{q}}{B_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) \\ &\cdot [e^z J_k(u_1) Z_{k+1}^{(j)}(u_2) - e^z J_{k+1}(u_1) Z_{k+1}^{(j)}(u_2) \\ &- e^{-z} J'_k(u_1) Z_{k+1}^{(j)}(u_2) + e^{-z} J'_{k+1}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \end{aligned} \quad (จ.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} Ms_{2r+2}^{(j)}(z, q) &= \frac{\sqrt{q}}{B_1^{2r+2}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+2}^{2r+2}(q) \\ &\cdot [e^z J_k(u_1) Z_{k+2}^{(j)}(u_2) - e^z J_{k+2}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2) \\ &- e^{-z} J'_k(u_1) Z_{k+2}^{(j)}(u_2) + e^{-z} J'_{k+2}(u_1) Z_k^{(j)}(u_2)] \end{aligned} \quad (จ.29)$$

สำหรับ  $j = 1$  และ  $2$

$Mc_{2r}^{(1)}(z, q)$ ,  $Mc_{2r+1}^{(1)}(z, q)$ ,  $Ms_{2r+1}^{(1)}(z, q)$  และ  $Ms_{2r+2}^{(1)}(z, q)$  มีความสัมพันธ์กับ  $Ce_{2r}(z, q)$ ,  $Ce_{2r+1}(z, q)$ ,  $Se_{2r+1}(z, q)$  และ  $Se_{2r+2}(z, q)$  ดังนี้

$$Ce_{2r}(z, q) = \frac{ce_{2r}(0, q) ce_{2r}(\pi/2, q)}{(-1)^r A_0^{2r}(q)} Mc_{2r}^{(1)}(z, q) \quad (จ.30)$$

$$Ce_{2r+1}(z, q) = \frac{ce_{2r+1}(0, q) ce'_{2r+1}(\pi/2, q)}{(-1)^{r+1} \sqrt{q} A_1^{2r+1}(q)} Mc_{2r+1}^{(1)}(z, q) \quad (จ.31)$$

$$Se_{2r+1}(z, q) = \frac{se'_{2r+1}(0, q) se_{2r+1}(\pi/2, q)}{(-1)^r \sqrt{q} B_1^{2r+1}(q)} Ms_{2r+1}^{(1)}(z, q) \quad (จ.32)$$

$$Se_{2r+2}(z, q) = \frac{se'_{2r+2}(0, q) se'_{2r+2}(\pi/2, q)}{(-1)^{r+1} q B_2^{2r+2}(q)} Ms_{2r+2}^{(1)}(z, q) \quad (จ.33)$$

เช่นเดียวกับกรณีฟังก์ชันแฮนเคิล ฟังก์ชันเมทริว-แฮนเคิลแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$M_m^{(3)}(z, q) = M_m^{(1)}(z, q) + iM_m^{(2)}(z, q) \quad (จ.34)$$

$$M_m^{(4)}(z, q) = M_m^{(1)}(z, q) + iM_m^{(2)}(z, q) \quad (จ.35)$$

โดยที่  $M_m$  สามารถเป็นได้ทั้ง  $Mc_m$  หรือ  $Ms_m$   $M_m^{(3)}(z, q)$  และ  $M_m^{(4)}(z, q)$  เป็นฟังก์ชันเมทริวตัดแปลงชนิดที่สามและสี่ ตามลำดับ

ฟังก์ชันเมทริวตัดแปลงชนิดที่หนึ่งและสองเป็นอิสระเชิงเส้นกัน ดังนั้นการรวมแบบเชิงเส้นของสองค่าใน  $M_m^{(1)}(z, q)$ ,  $M_m^{(2)}(z, q)$ ,  $M_m^{(3)}(z, q)$  และ  $M_m^{(4)}(z, q)$  จะสามารถทำให้ได้ผลเฉลยที่สมบูรณ์ของสมการเมทริวตัดแปลง (จ.1)

ในกรณี  $-q$  ( $q \geq 0$ )

$$Mc_{2r}^{(1)}(z, -q) = \frac{1}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k}^{2r}(q) I_k(u_1) I_k(u_2) \quad (จ.36)$$

$$Mc_{2r+1}^{(1)}(z, -q) = \frac{i}{B_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+1}^{2r+1}(q) [I_k(u_1) I_{k+1}(u_2) + I_{k+1}(u_1) I_k(u_2)] \quad (จ.37)$$

$$Ms_{2r+1}^{(1)}(z, -q) = \frac{1}{A_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} A_{2k+1}^{2r+1}(q) [I_k(u_1)I_{k+1}(u_2) - I_{k+1}(u_1)I_k(u_2)] \quad (จ.38)$$

$$Ms_{2r+2}^{(1)}(z, -q) = \frac{1}{B_2^{2r+2}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+r} B_{2k+2}^{2r+2}(q) [I_k(u_1)I_{k+2}(u_2) - I_{k+2}(u_1)I_k(u_2)] \quad (จ.39)$$

กำหนดให้  $I_k(x)$  เป็นฟังก์ชันเบสเซลตัดแปลงชนิดที่หนึ่งอันดับที่  $k$

ฟังก์ชันเมทริวตัดแปลงชนิดที่สองในกรณี  $-q$  ( $q \geq 0$ ) คือ

$$Mc_{2r}^{(2)}(z, -q) = -i [Mc_{2r}^{(3)}(z, -q) - Mc_{2r}^{(1)}(z, -q)] \quad (จ.40)$$

$$Mc_{2r+1}^{(2)}(z, -q) = -i [Mc_{2r+1}^{(3)}(z, -q) - Mc_{2r+1}^{(1)}(z, -q)] \quad (จ.41)$$

$$Ms_{2r+1}^{(2)}(z, -q) = -i [Ms_{2r+1}^{(3)}(z, -q) - Ms_{2r+1}^{(1)}(z, -q)] \quad (จ.42)$$

$$Ms_{2r+2}^{(2)}(z, -q) = -i [Ms_{2r+2}^{(3)}(z, -q) - Ms_{2r+2}^{(1)}(z, -q)] \quad (จ.43)$$

โดยที่  $Mc_m^{(3)}(z, -q)$  และ  $Ms_m^{(3)}(z, -q)$  หาได้ดังนี้

$$Mc_{2r}^{(3)}(z, -q) = \frac{2i}{\pi} (-1)^{r+1} \frac{1}{A_0^{2r}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{2r}(q) I_k(u_1) K_k(u_2) \quad (จ.44)$$

$$Mc_{2r+1}^{(3)}(z, -q) = \frac{2}{\pi} (-1)^{r+1} \frac{1}{B_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2r+1}(q) [I_k(u_1)K_{k+1}(u_2) - I_{k+1}(u_1)K_k(u_2)] \quad (จ.45)$$

$$Ms_{2r+1}^{(3)}(z, -q) = \frac{2}{\pi} (-1)^{r+1} \frac{1}{A_1^{2r+1}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2r+1}(q) [I_k(u_1)K_{k+1}(u_2) + I_{k+1}(u_1)K_k(u_2)] \quad (จ.46)$$

$$Ms_{2r+2}^{(3)}(z, -q) = \frac{2i}{\pi} (-1)^r \frac{1}{B_1^{2r+2}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}^{2r+2}(q) [I_k(u_1)K_{k+2}(u_2) - I_{k+2}(u_1)K_k(u_2)] \quad (จ.47)$$

กำหนดให้  $K_k(x)$  เป็นฟังก์ชันเบสเซลตัดแปลงชนิดที่สองอันดับที่  $k$

คุณสมบัติของฟังก์ชันเมทริวตัดแปลงมีหลายอย่าง แต่จะขอกล่าวถึงเฉพาะความสัมพันธ์วโรน-สเคียน (Wronski Relations) ซึ่งจะใช้ในการตรวจสอบค่าผลเฉลย

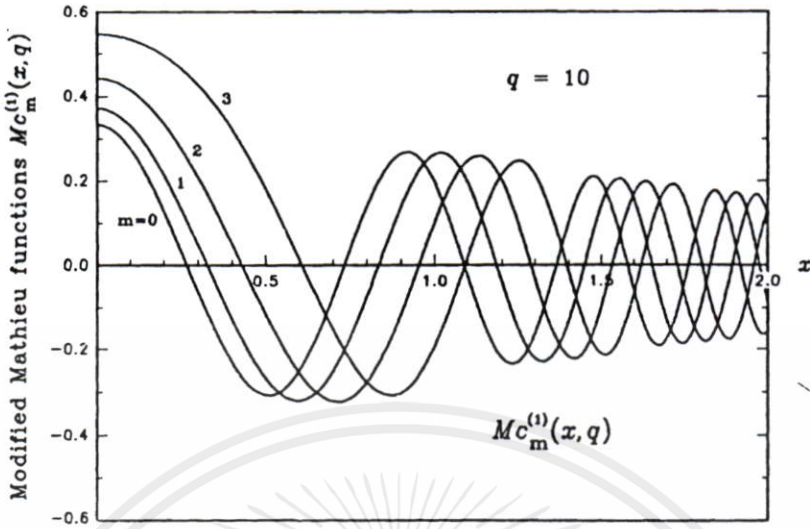
ความสัมพันธ์วโรนสเคียน แสดงได้ดังต่อไปนี้

$$W[Mc_m^{(1)}(z, q), Mc_m^{(2)}(z, q)] = Mc_m^{(1)}(z, q) \frac{d}{dz} Mc_m^{(2)}(z, q) - Mc_m^{(2)}(z, q) \frac{d}{dz} Mc_m^{(1)}(z, q) = \frac{2}{\pi} \quad (จ.48)$$

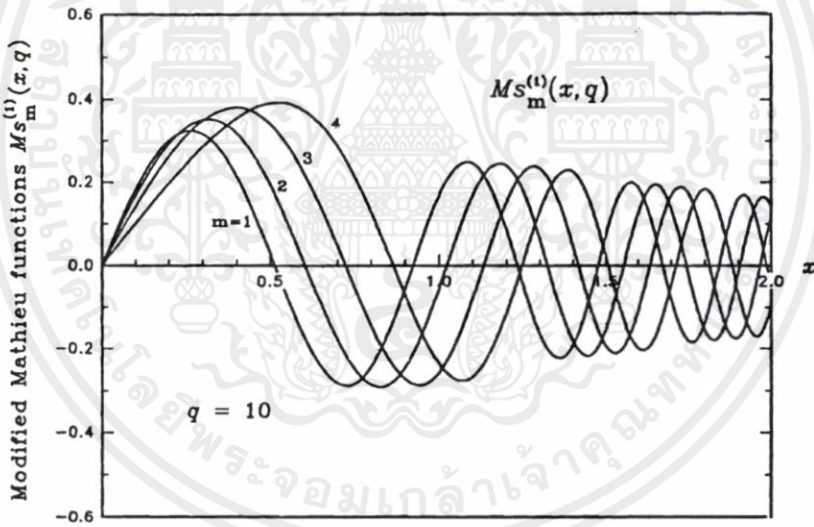
$$W[Ms_m^{(1)}(z, q), Ms_m^{(2)}(z, q)] = Ms_m^{(1)}(z, q) \frac{d}{dz} Ms_m^{(2)}(z, q) - Ms_m^{(2)}(z, q) \frac{d}{dz} Ms_m^{(1)}(z, q) = \frac{2}{\pi} \quad (จ.49)$$

รูปที่ จ.1-จ.2 และ จ.3-จ.4 แสดงตัวอย่างกราฟฟังก์ชันเมทริวตัดแปลงชนิดที่หนึ่งและสอง

เมื่อเปลี่ยนแปลงไปตามค่า  $x$  สำหรับ  $q = 10$  รูปที่ จ.5-จ.6 และ จ.7-จ.8 แสดงตัวอย่างกราฟฟังก์ชันเมทริวตัดแปลงชนิดที่หนึ่งและสองเมื่อเปลี่ยนแปลงไปตามค่า  $q$  สำหรับ  $x = 1.317$

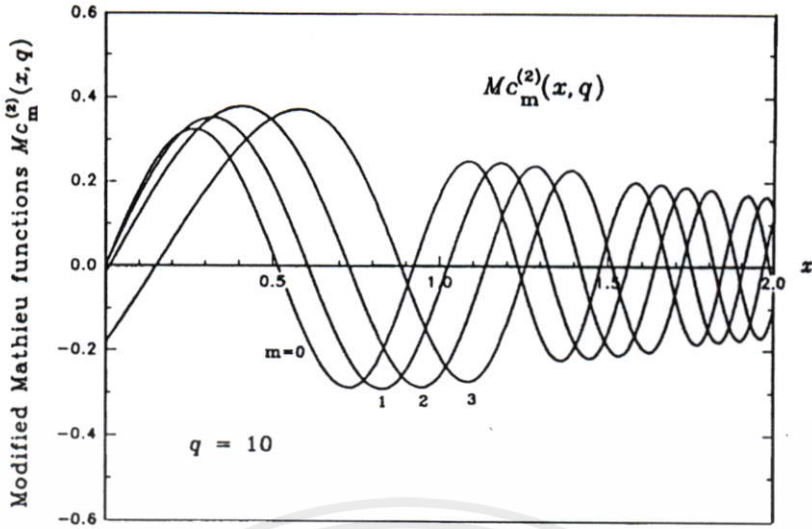


รูปที่ จ.1 ฟังก์ชันเมทริวคัดแปลง  $Mc_m^{(1)}(x, q)$  กรณี  $q = 10$  [6]

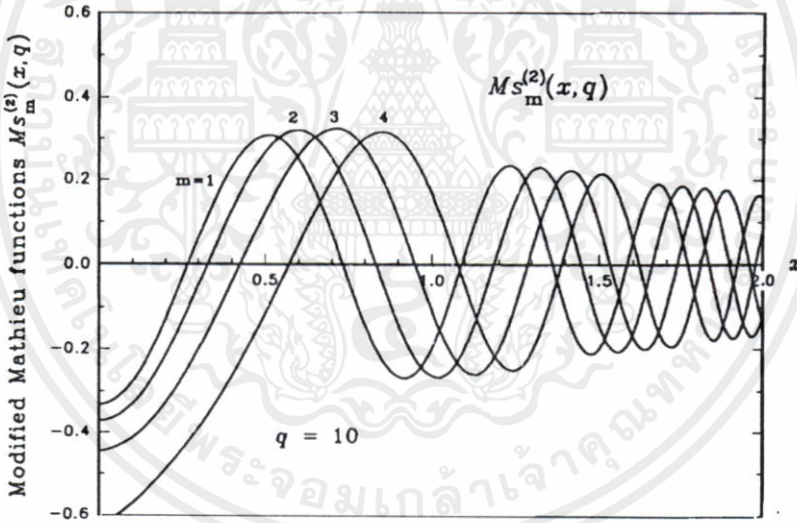


รูปที่ จ.2 ฟังก์ชันเมทริวคัดแปลง  $Ms_m^{(1)}(x, q)$  กรณี  $q = 10$  [6]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

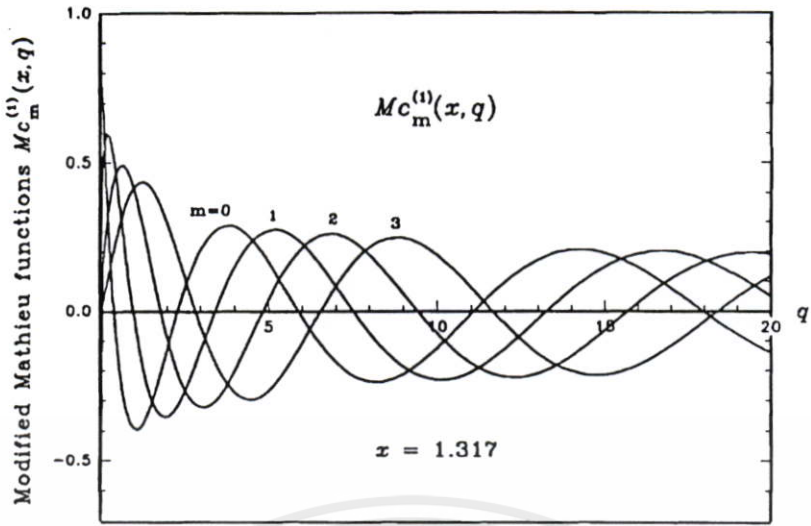


รูปที่ จ.3 ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลง  $Mc_m^{(2)}(x, q)$  กรณี  $q = 10$  [6]

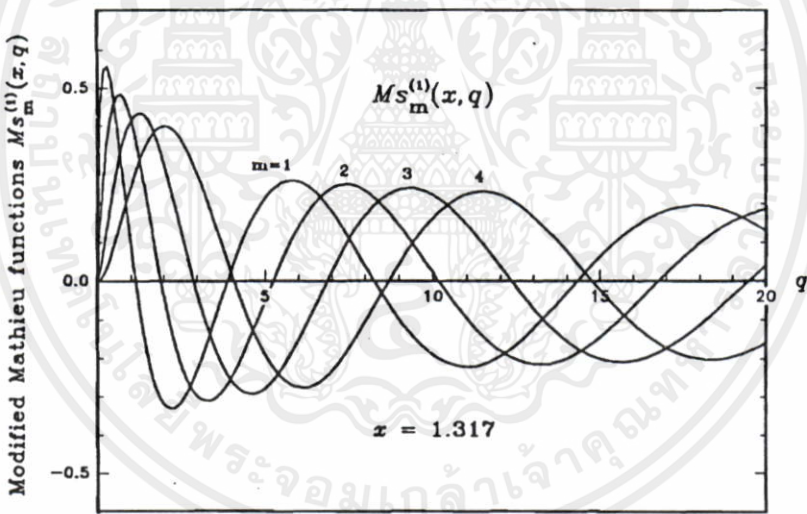


รูปที่ จ.4 ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลง  $Ms_m^{(2)}(x, q)$  กรณี  $q = 10$  [6]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

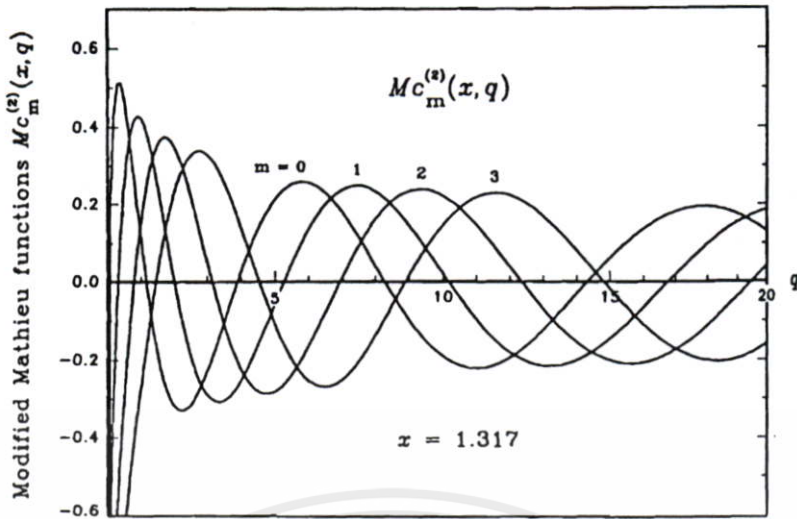


รูปที่ ๑.๕ ฟังก์ชันเมทริวคัดแปลง  $Mc_m^{(1)}(x, q)$  กรณี  $x = 1.317$  [6]

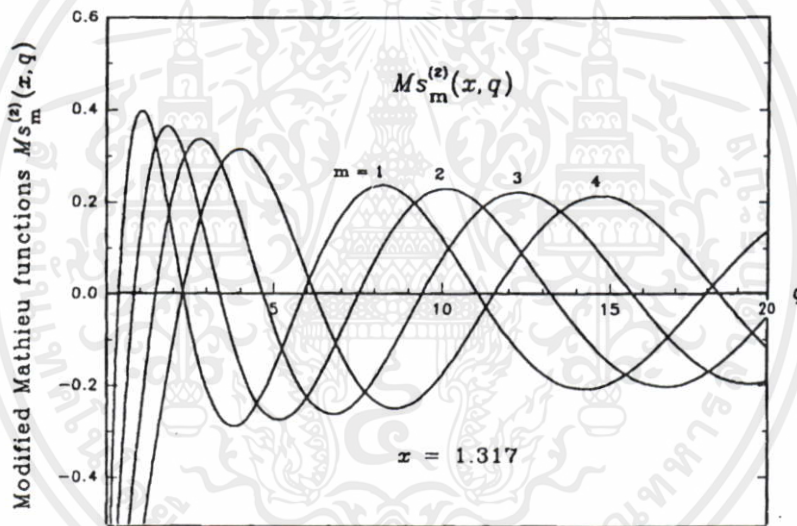


รูปที่ ๑.๖ ฟังก์ชันเมทริวคัดแปลง  $Ms_m^{(1)}(x, q)$  กรณี  $x = 1.317$  [6]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ จ.7 ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลง  $Mc_m^{(2)}(x, q)$  กรณี  $x = 1.317$  [6]

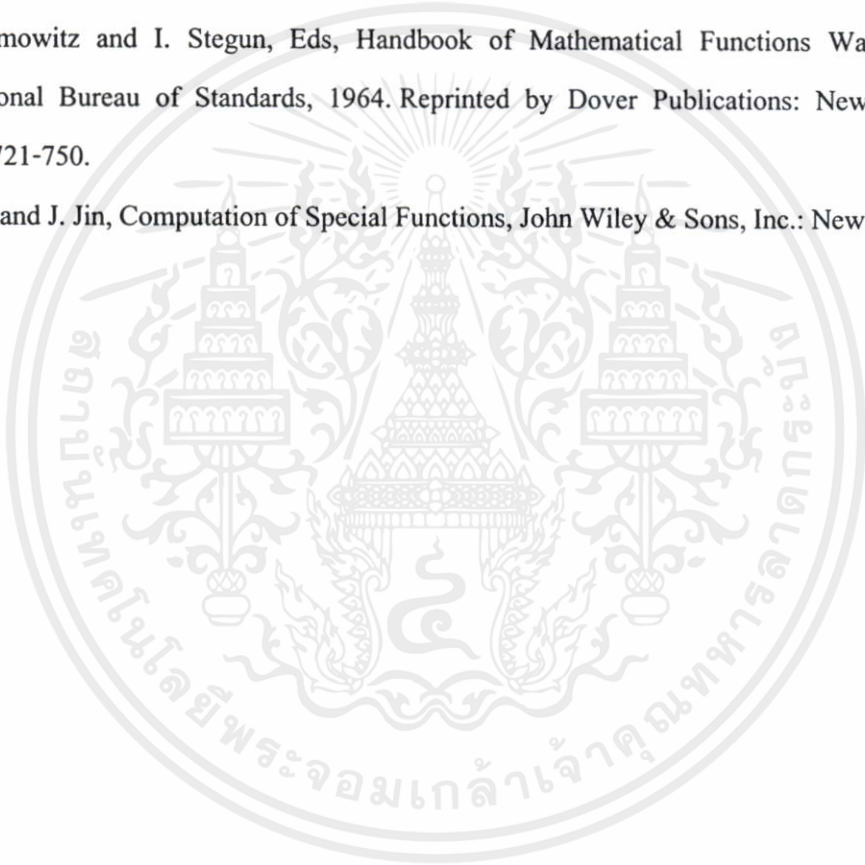


รูปที่ จ.8 ฟังก์ชันแมทริวคัดแปลง  $Ms_m^{(2)}(x, q)$  กรณี  $x = 1.317$  [6]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## หนังสืออ้างอิงของภาคผนวก ก-จ

- [1] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, Numerical Recipes (2nd ed.), Cambridge University Press, 1992.
- [2] <http://ced.kmitnb.ac.th/scc/SlideNumerical/Chapter3/secant.html#4>
- [3] C. Brezinski and M. Redivo Zaglia, Extrapolation Methods: Theory and Practice, North-Holland, 1991.
- [4] N. W. McLachlan, Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford: Clarendon Press, 1947.
- [5] M. Abramowitz and I. Stegun, Eds, Handbook of Mathematical Functions Washington DC, National Bureau of Standards, 1964. Reprinted by Dover Publications: New York, 1968, pp. 721-750.
- [6] S. Zhang and J. Jin, Computation of Special Functions, John Wiley & Sons, Inc.: New York, 1996.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นางกฤตยา ชวานนท์พิทักษ์ (นามสกุลเดิม นาคประสิทธิ์)
วัน เดือน ปีเกิด	13 พฤศจิกายน พ.ศ. 2518 ที่จังหวัดชัยนาท
ที่อยู่	198/1 ถนนพชัยพิศ ตำบลในเมือง อำเภอเมืองนครราชสีมา รหัสไปรษณีย์ 30000
ประวัติการศึกษา	
ปริญญาตรี	วศ.บ. (เกียรตินิยม) สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม จากคณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง พ.ศ. 2541
ปริญญาโท	วศ.ม. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จากคณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง พ.ศ. 2546
ประสบการณ์การทำงาน	รับราชการตั้งแต่วันที่ 1 มิถุนายน พ.ศ. 2544 ตำแหน่งอาจารย์โปรแกรมวิชาอิเล็กทรอนิกส์และโทรคมนาคม คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา
ทุนการศึกษาที่เคยได้รับ	
พ.ศ. 2541-2542	ทุนนักศึกษาโครงการ JUSST Program ไปศึกษาภาษา วัฒนธรรม และงานวิจัย ที่มหาวิทยาลัย UEC (Electro-Communication University) เมืองโตเกียว ประเทศญี่ปุ่น ระยะเวลา 10 เดือน
พ.ศ. 2546-2548	ทุนสนับสนุนการศึกษาต่อปริญญาเอกจากกองทุนพัฒนาบุคลากร จากมหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา
พ.ศ. 2547	ทุนสนับสนุนการนำเสนองานวิจัยในงานประชุมวิชาการ APMC 2004 เมืองนิวเดลี ประเทศอินเดีย จากมหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา
พ.ศ. 2549-2550	ทุนสนับสนุนการศึกษาจากโครงการเครือข่ายเชิงกลยุทธ์ ๗ ประเภท ทุนปริญญาเอกในประเทศสำหรับอาจารย์และผู้สมัครทั่วไป (CHE-PhD-THA-INV) จากสภาการอุดมศึกษา
บทความงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์	
	1. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "Characteristics of an elliptical ring antenna excited by a linear electric probe," International Journal of Electronics, vol. 94, no. 10, pp. 973–984, 2007.

2. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "5.8 GHz notched UWB bidirectional elliptical ring antenna excited by circular monopole with curved slot," *Proceedings of the 2007 Asia-Pacific Microwave Conference (APMC 2007)*, vol. 2, pp. 653-656, Dec. 2007.
3. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "An ultra-wideband bidirectional antenna with modified circular disc monopole excited elliptical ring," *Proceedings of the 2007 IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS 2007)*, pp. 261–264, Long Beach, Jan. 2007.
4. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "Performance of bidirectional and unidirectional ellipse ring antennas fed by circular disc monopole," *Proceedings of the 2006 International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP 2006)*, Singapore, p.conf99a213\_r156, 4 pages, Nov. 2006.
5. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "A triple-band bidirectional antenna using a disc monopole excited elliptical ring," *Proceedings of the 2006 International Technical Conference on Circuits/Systems Computers and Communications (ITC-CSCC 2006)*, Chiangmai, vol. 1, pp. 285–288, July 2006.
6. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "MoM simulation of an elliptical ring antenna excited by an electric probe using triangular patch model," *Proceedings of Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications, and Information Technology (ECTI) International Conference*, Ubonratchatani, vol. 1, pp. 328–331, May 2006.
7. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "Electromagnetic coupling of a probe inside elliptical ring," *Proceedings of the 2005 Asia Pacific Microwave Conference*, Suzhou, vol. 3, pp. 925–928, Dec. 2005.
8. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "NEC simulation of a bidirectional antenna using a probe excited elliptical ring," *Proceedings of the 2005 Fifth International Conference on Information, Communications and Signal Processing*, Bangkok, pp. 120–124, Dec. 2005.
9. K. Nakprasit, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "Linear array of a probe-fed elliptical ring antenna," *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI Nation Radio Science Meeting*, Washington DC, vol. 2A, pp. 458–461, July 2005.
10. K. Chawanonphithak, C. Phongcharoenpanich, S. Kosulvit and M. Krairiksh, "Analysis of an elliptical ring antenna fed by probe for base stations," *Proceedings of the 2005 Electrical*

*Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications, and Information Technology (ECTI) International Conference, Pattaya, vol. 2, pp. 722–725, May 2005.*



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้