โปรแกรมสำหรับหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง

PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION OF SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION

ธนภัทร ว่องวิษณุพงศ์
ภัทรวรินทร์ ประทิน
ลลิตา เลาะหะนะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2555

โปรแกรมสำหรับหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง

PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION OF SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION

ธนภัทร ว่องวิษณุพงศ์

ภัทรวรินทร์ ประทิน

ลลิตา เลาะหะนะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปีการศึกษา 2555

PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION OF SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION

Mr.Tanapat Wongvisanupong
Ms. Phattharawarin Prathin
Ms. Lalita Lorhana

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OFTECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2012

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมสำหรับหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง Program for Finding the Exact Solution of Suspended String Vibrating Equation
ชื่อนักศึกษา	นายธนภัทร ว่องวิษณุพงศ์ 52050034 นางสาวภัทรวรินทร์ ประทิน 52050077 นางสาวลลิตา เลาะหะนะ 52050079
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2555

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ประธานกรรมการ	
อ.เทิดขวัญ ช้างเผือก กรรมการ	
รศ.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงแหล่งที่มาของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมสำหรับหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง
ชื่อนักศึกษา	นายธนภัทร ว่องวิษณุพงศ์ 52050034
	นางสาวภัทรวรินทร์ ประทิน 52050077
	นางสาวลลิตา เลาะหะนะ 52050079
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2555
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล
	ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ทำการศึกษาปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง และหาผลเฉลยโดยใช้วิธีแบบแยกตัวแปรของสมการการสั่นของเส้นลวดดังกล่าว ซึ่งผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ซึ่งเป็นผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเซิล พร้อมทั้งพัฒนาโปรแกรมโดยใช้ MATLAB เพื่อคำนวณหาผลเฉลยแบบแม่นตรง จากการพิจารณาผลรวมของอนุกรมในพจน์จำกัดจะพบว่า จำนวนพจน์ของอนุกรมมีผลต่อลักษณะของผลเฉลย ถ้าจำนวนพจน์ของอนุกรมเท่ากับ 1,2,3 และ 5 พจน์จะให้ค่าผลเฉลยที่สอดคล้องกับรูปร่างเริ่มต้น กราฟผลเฉลยได้ถูกนำมาแสดงเพื่อใช้วิเคราะห์และเปรียบเทียบลักษณะกราฟภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน

คำสำคัญ: สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง วิธีแบบแยกตัวแปร ผลเฉลยแม่นตรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Program for Finding the Exact Solution of Suspended String Vibrating Equation
Students	Mr.Tanapat Wongvisanupong 52050034
	Ms.Phattharawarin Prathin 52050077
	Ms.Lalita Lorhana 52050079
Degree	Bachelor of Science
Major	Applied Mathematics
Academic Year	2012
Adviser	Assoc.Prof.Pakkinee Chitsakul
	Dr.Jaipong Kasemsuwan

ABSTRACT

This project is concerned with the initial boundary value problem of suspended string equation and finding the solution by using the method of separation of variables. The solution is of the infinite series in which linear combination of Bessel functions. The MATLAB program is implemented to find the exact solution. It is founded that the number of series term plays a role in characteristic vibration namely, when the series is of 1,2,3 and 5 terms, they give the solutions corresponding to the initial shape. The results are graphically displayed and analysed under the different initial conditions.

Keywords: Suspended String Equation, Method of Separation of Variables, Exact Solution

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง โปรแกรมสำหรับหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง ให้สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย และอาจารย์เทิดขวัญ ช้างเผือก ซึ่งเป็นท่านคณะกรรมการและอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ การเรียบเรียง และการหาข้อมูล รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ กำลังใจ และคำแนะนำจนการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี รวมทั้งรุ่นพี่นักศึกษาปริญญาโท เอก สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ เพื่อนๆ และน้องๆทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆเกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

นายธนภัทร ว่องวิษณุพงศ์
นางสาวภัทรวรินทร์ ประทิน
นางสาวลลิตา เลาะหะนะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

หน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

คลื่นในแนวดิ่งหรือ คลื่นตามขวาง (Transverse Wave) เป็นคลื่นที่อนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ในทิศตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า คลื่นน้ำ คลื่นในเส้นเชือก เป็นต้น ในธรรมชาติคลื่นแนวดิ่งเป็นสาเหตุของการเกิดแผ่นดินไหว การระเบิดที่รุนแรงหรือภูเขาไฟระเบิด เป็นต้น

บ่อยครั้งเราสามารถพบปัญหาการสั่น (Vibrations) ปรากฏอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งที่ผ่านมาได้มีงานวิจัยและศึกษาถึงปัญหาการสั่นของคลื่นในแนวนอน (Standing Wave) ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกันอย่างแพร่หลาย อาทิเช่น คลื่นบนผิวน้ำ (Water Wave) การสั่นของเครื่องดนตรี (Standing Acoustic Wave) เป็นต้น และปัญหาการสั่นของคลื่นในแนวดิ่งของเส้นลวด ซึ่งมีการศึกษาวิธีหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) หรืออาจเรียกว่า ผลเฉลยเชิงคณนา (Computational Solution) ซึ่งจะเป็นผลเฉลยโดยประมาณ [10]-[12]

สำหรับปัญหาพิเศษนี้จะทำการศึกษาถึงการสั่นของคลื่นในแนวดิ่ง ซึ่งรูปแบบของผลเฉลยที่ได้จากวิธีแบบแยกตัวแปรอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเซิลและทำการพัฒนาโปรแกรมที่ช่วยหาผลเฉลยแบบแม่นตรง (Exact Solution) ของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง โดยใช้โปรแกรม MATLAB เพื่อหาตำแหน่งของเส้นเชือก ณ เวลาใดๆในช่วงของการสั่น

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) เพื่อศึกษาและอธิบายที่มาของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง

2) เพื่อศึกษาวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีแบบแยกตัวแปรของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งที่กำหนดค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตมาให้

3) ศึกษาผลเฉลยในรูปผลรวมของอนุกรมอนันต์ของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเซิล

4) พัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งโดยใช้โปรแกรม MATLAB

5) วิเคราะห์และเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่คำนวณจากโปรแกรมภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สามารถใช้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ให้เส้นลวดถูกแขวนติดอยู่บนเพดาน ปลายด้านบนของเส้นลวดตรึงอยู่กับที่ ปลายด้านล่างปล่อยอิสระตกลงมาภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลกโดยไม่มีเงื่อนไขใดๆมากำหนด และไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับเส้นลวด

2) กำหนดให้เส้นลวดยาว 1 หน่วย มีรูปร่างเริ่มต้นคือ $u(x,0)=\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $0,1,-1,x,\sin(x),\cos(x)$

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย

1) ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาปัญหาและที่มาของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง

3) ศึกษาการหาผลเฉลยแบบเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution)

4) ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยแบบแยกตัวแปรของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง

5) ศึกษาวิธีการใช้งานของโปรแกรม MATLAB

6) ออกแบบโครงสร้างของโปรแกรม

7) เขียนโปรแกรมตามโครงสร้างที่ออกแบบด้วยโปรแกรม MATLAB

8) ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่สร้างขึ้นโดยเปรียบเทียบกราฟของผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมกับรูปร่างเริ่มต้น $\left(\sin(7x)-\sin(7)\right)$

9) จัดทำคู่มือการใช้งานโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น

10) เรียบเรียงปริญญานิพนธ์และจัดทำเป็นรูปเล่ม

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้รับความรู้ในการศึกษาแบบจำลองการสั่นในแนวดิ่ง

2) โปรแกรมที่พัฒนาสามารถช่วยในการหาผลเฉลยของแบบจำลองการสั่นในแนวดิ่งของเส้นลวดที่กำหนดค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตมาให้

3) เพื่อประโยชน์และเป็นแนวทางในการทำงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสั่นในแนวดิ่ง

4) เพื่อประโยชน์และเป็นแนวทางในการศึกษาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ภายใต้เงื่อนไขอื่นๆได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ โดยมีนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย วิธีการแบบแยกตัวแปร ความรู้เกี่ยวกับคลื่น ปัญหาการสั่นของเส้นลวด

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations)

ฟังก์ชันหลายตัวแปร (Function of Several Variables) คือ ฟังก์ชันซึ่งตัวแปรตาม u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น มากกว่าหนึ่งตัว ตัวอย่างเช่น

u เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรต้นสองตัว คือ x และ y เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $u = u(x, y)$

u เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรต้นสามตัว คือ x, y และ z เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $u = u(x, y, z)$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยฟังก์ชันหลายตัวแปร และอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันนั้น

เช่น
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$
$$\frac{\partial^4 \varnothing}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \varnothing}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varnothing}{\partial y^4} = 0$$

อันดับ (Order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ อันดับของอนุพันธ์ย่อยสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการนั้น

ดีกรี (Degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์ย่อยที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการนั้น

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1**</u>

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + xt_u = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสามดีกรีหนึ่ง

$(u_x)^3 + xu_{yy} = x - y$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองดีกรีหนึ่ง

$(u_{xxx})^2 + u_{yy} + u_z = 4z$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสามดีกรีสอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เรียกว่า **สมการเชิงเส้น** (Linear Equation) ถ้าตัวแปรตาม และอนุพันธ์ย่อยอันดับต่างๆของตัวแปรตามที่ปรากฏมีดีกรีหนึ่ง และ ไม่มีการคูณกันระหว่างตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตาม

สมการต่อไปนี้ในตัวอย่างที่2.2ไม่ใช่เชิงเส้น (Non-linear Equation)

<u>**ตัวอย่างที่ 2.2**</u>

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=u^2$$

นิยาม 1.1 การแบ่งประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์

รูปแบบทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเชิงเส้นของสองตัวแปรอิสระ x และ y คือ

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

เมื่อ A,B,C,D,E,F และ G เป็นฟังก์ชันของ x และ y

1) สมการเชิงไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic) ถ้า $B^2-4AC>0$
2) สมการเชิงพาราโบลา (Parabolic) ถ้า $B^2-4AC=0$
3) สมการเชิงวงรี (Elliptic) ถ้า $B^2-4AC<0$

ถ้า $G(x,y)=0$ เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเอกพันธ์** (Homogeneous Equation)

เช่น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u=0$$

ถ้า $G(x,y)\neq 0$ เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เอกพันธ์** (Nonhomogeneous Equation)

เช่น

$$u_{xy}+u_x+x+y=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=x^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอกจากนี้ ยังมีชื่อเรียกเฉพาะสำหรับสมการต่างๆดังนี้

$u_{xx}+u_{yy}=0$ เรียกว่า Laplace's Equation

$u_{tt}+c^2u_{xx}=0$ เรียกว่า Wave Equation

$u_t+ku_{xx}=0$ เรียกว่า Heat Equation

$u_{tt}-c^2u_{xx}+2\beta u_t+\alpha u=0$ เรียกว่า Telegraph Equation

$u_{xx}+u_{yy}=G$ เรียกว่า Poisson's Equation

2.1.1 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ผลเฉลย (Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของตัวแปร x และ y คือ ฟังก์ชัน $u(x,y)$ ใดๆที่เป็นไปตามสมการนั้นๆ สมการหนึ่งอาจมีผลเฉลยมากกว่าหนึ่ง เช่น

$$u_{xx}-u_{yy}=0$$

มีผลเฉลยคือ $u_1(x,y)=(x+y)^2$ และ $u_2(x,y)=\cos(x-y)$

เนื่องจาก $u_1(x,y)=(x+y)^2$

จะได้ $\frac{\partial u_1}{\partial x}=2(x+y)\Rightarrow\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=2$ และ $\frac{\partial u_1}{\partial y}=2(x+y)\Rightarrow\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=2$

แล้ว $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0$

เนื่องจาก $u_2(x,y)=\cos(x-y)$

จะได้ $\frac{\partial u_2}{\partial x}=-\sin(x-y)\Rightarrow\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=-\cos(x-y)$

และ $\frac{\partial u_2}{\partial y}=\sin(x-y)\Rightarrow\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-\cos(x-y)$

แล้ว $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0$

นอกจากนี้ ถ้า $u_3(x,y)=c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)=c_1(x+y)^2+c_2\cos(x-y)$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}=2c_1(x+y)-c_2\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y}=2c_1(x+y)+c_2\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}=2c_1-c_2\cos(x-y)v$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}=2c_1-c_2\cos(x-y)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้ว $$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}=0$$

ดังนั้น $$u_3(x,y)=c_1(x+y)^2+c_2\cos(x-y)$$

หรือ รูปแบบทั่วไป $$u_3(x,y)=c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ถ้า $u_1(x,y)$ และ $u_2(x,y)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เมื่อ c_1,c_2 เป็นค่าคงที่

__ทฤษฎีบท 1__ **หลักการซ้อนทับ (Superposition Principle)**

ถ้า $u_1,u_2,...,u_k$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นเอกพันธุ์ แล้วจะได้ว่า

$$u=c_1u_1+c_2u_2+...+c_ku_k$$

(เมื่อ $c_1,c_2,...,c_k$ เป็นค่าคงที่) เป็นผลเฉลยของสมการด้วย สำหรับ $u_1,u_2,...,u_k$ ที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous linear equation) แล้ว ผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบอนุอนันต์โดย

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}c_nu_n$$

เช่น $$u_x+u_y=0$$

มีผลเฉลย
$$u_1(x,y)=(x-y)$$
$$u_2(x,y)=(x-y)^2$$
$$u_3(x,y)=(x-y)^3$$
$$\vdots$$
$$u_n(x,y)=(x-y)^n$$

แล้ว $u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}c_ku_k(x,y)$ เป็นผลเฉลยของ $u_x+u_y=0$

โดย $u_x=n(x-y)^{n-1}\ ;u_y=-n(x-y)^{n-1}$

แล้ว $u_x+u_y=0$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งแบบเอกพันธ์ $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$ คือ

$$x^2+y^2=c_1 \qquad ;\text{เมื่อ } c_1 \text{ คงที่}$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองแบบไม่เอกพันธ์ $\frac{d^2y}{dx}-2\frac{dy}{dx}+y=4x^2e^x$ คือ

$$(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{3}x^3e^x \qquad ;\text{เมื่อ } c_1,c_2 \text{ คงที่}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง เมื่อหาผลเฉลยมีค่าคงที่หนึ่งตัว
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง เมื่อหาผลเฉลยมีค่าคงที่สองตัว
ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n จะขึ้นอยู่กับ arbitrary constant n ตัว
สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น ผลเฉลยจะขึ้นกับ arbitrary function ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.3 จงหาผลเฉลย $u(x,y)$ ของสมการ $u_{xx}=0$

วิธีทำ จาก $u_{xx}=0$ หรือ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ หรือ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0$

โดยการอินทิเกรตเทียบกับ x ทั้งสองข้างได้ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(y)$

อินทิเกรตเทียบกับ x ทั้งสองข้างอีกครั้งได้ $u=xf(y)+g(y)$

ดังนั้น $u=xf(y)+g(y)$ เป็นผลเฉลยของ $u_{xx}=0$

$u_{xx}=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง เมื่อหาผลเฉลยได้ $u=xf(y)+g(y)$ มี arbitrary function สองฟังก์ชัน คือ $f(y)$ และ $g(y)$

2.2 การหาผลเฉลยของวิธีแยกตัวแปร (Separation of Variable)

เมื่อผลเฉลย $u(x,y)$ สามารถแยกเป็นฟังก์ชันของ x และฟังก์ชันของ y โดย

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

และให้ $u_x=X'Y \qquad u_y=XY'$

$$u_{xx}=X''Y \qquad u_{yy}=XY''$$

วิธีการหาผลเฉลย PDE พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาผลเฉลยของ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\dfrac{\partial u}{\partial y}$

วิธีทำ ให้ $u(x,y)=X(x)Y(y)$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น $X''Y=4XY'$

หารทั้งสองข้างด้วย $4XY$ จะได้

$$\frac{X''}{4X}=\frac{Y'}{Y}=\lambda^2$$

เนื่องจากทางซ้ายและขวาไม่มีตัวแปร x หรือ y อื่นๆ อยู่อีก แสดงว่าทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น และทางขวาเป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น และซ้ายเท่ากับขวา ดังนั้น แต่ละข้างต้องเป็นค่าคงที่โดยจะกำหนดให้เป็น λ^2 แล้วแบ่งเป็น 3 กรณีที่จะพิจารณาคือ $\lambda^2>0, -\lambda^2<0$ และ $\lambda^2=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 1</u> $\lambda^2 > 0$

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda^2$$

แล้ว $X'' - 4\lambda^2 X = 0$ และ $Y' - \lambda^2 Y = 0$

จาก $$X'' - 4\lambda^2 X = 0$$

มีสมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 - 4\lambda^2 = 0$ จะได้รากของสมการคือ $r = \pm 2\lambda$

ดังนั้นผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $X = c_1' e^{2\lambda x} + c_2' e^{-2\lambda x}$

จาก $e^{-z} = \sinh z - \cosh z$, $e^{z} = \sinh z + \cosh z$

$$\Rightarrow c_1 e^{z} + c_2 e^{-z} = c_1' \sinh z - c_1' \cosh z + c_2' \sinh z + c_2' \cosh z$$

จะได้ผลเฉลย

$$X = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x$$

จาก $Y' - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow \ln Y = \lambda^2 y + c \Rightarrow Y = c_3 e^{\lambda^2 y}$

แล้วผลเฉลยของสมการคือ
$$\begin{aligned} u &= XY \\ &= (c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x) c_3 e^{\lambda^2 y} \\ &= A_1 e^{\lambda^2 y} \cosh 2\lambda x + B_1 e^{\lambda^2 y} c_2 \sinh 2\lambda x \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 2</u> $-\lambda^2 < 0$

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda^2$$

แล้ว $X'' + 4\lambda^2 X = 0$ และ $Y' + \lambda^2 Y = 0$

จาก $$X'' + 4\lambda^2 X = 0$$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $r^2 + 4\lambda^2 = 0$ จะได้รากของสมการคือ $r = \pm 2\lambda i$

ดังนั้นผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $X = c_1 e^{2\lambda i x} + c_2 e^{-2\lambda i x}$

จาก $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\Rightarrow c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{-i\theta} = c_1 \cos\theta + c_1 i \sin\theta + c_2 \cos\theta - c_2 i \sin\theta$$

จะได้ผลเฉลย $X = c_4 \cos 2\lambda x + c_5 \sin 2\lambda x$

จาก $Y' + \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow \ln Y = -\lambda^2 y + c \Rightarrow Y = c_6 e^{-\lambda^2 y}$

แล้วผลเฉลยของสมการ คือ $u = A_2 e^{-\lambda^2 y} \cos 2\lambda x + B_2 e^{-\lambda^2 y} \sin 2\lambda x$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2 = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$X'' = 0 \quad \text{และ} \quad Y'' = 0$$

จะได้ $X = c_7 x + c_8$ และ $Y = c_9$

ดังนั้น $u = A_3 x + B_3$

<u>ตัวอย่างที่ 2.5</u> จงหาผลเฉลย $u_t - u_{xx} = -u$

วิธีทำ ให้ $u = u(x,t) = f(x)g(t)$

$$u_t = f(x)g'(t), \quad u_{xx} = f''(x)g(t)$$

จาก $u_t - u_{xx} = -u$

จะได้ $f(x)g'(t) - f''(x)g(t) = -f(x)g(t)$

หารตลอดด้วย $f(x)g(t)$ ทั้งสมการ

$$\frac{f(x)g'(t)}{f(x)g(t)} - \frac{f''(x)g(t)}{f(x)g(t)} = \frac{-f(x)g(t)}{f(x)g(t)}$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} - \frac{f''(x)}{f(x)} = -1$$

จัดสมการใหม่ จะได้ $\dfrac{g'(t)}{g(t)} + 1 = \dfrac{f''(x)}{f(x)}$

<u>กรณีที่ 1</u> $\lambda^2 > 0$

จะได้ $\dfrac{g'(t)}{g(t)} + 1 = \lambda^2$ และ $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = \lambda^2$

พิจารณา $g'(t) + (\lambda^2 - 1)g(t) = 0$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r + \lambda^2 - 1 = 0$ จะได้รากของสมการคือ $r = -\lambda^2 + 1$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $g(t) = c_1 e^{(-\lambda^2+1)t}$

พิจารณา $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = \lambda^2$

$$f''(x) - \lambda^2 f(x) = 0$$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 - \lambda^2 = 0$ จะได้รากของสมการคือ $r^2 = \lambda^2 \Rightarrow r = \pm\lambda$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $f(x) = c_2 e^{\lambda x} + c_3 e^{-\lambda x}$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$u(x,t) = e^{(-\lambda^2+1)t}(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})$$

<u>กรณีที่ 2</u> $-\lambda^2 < 0$ จะได้ $\dfrac{g'(t)}{g(t)} + 1 = -\lambda^2$ และ $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา $g'(t) = (-\lambda^2 - 1)g(t)$

$$g'(t) - (-\lambda^2 - 1)g(t) = 0$$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r-\left(-\lambda^2-1\right)=0$ จะได้รากของสมการคือ $r=-\lambda^2-1$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $g\left(t\right)=c_4e^{\left(-\lambda^2-1\right)t}$

พิจารณา

$$f''\left(x\right)=-\lambda^2 f\left(x\right)$$

$$f''\left(x\right)+\lambda^2 f\left(x\right)=0$$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2=-\lambda^2$ จะได้รากของสมการคือ $r=\pm\lambda i$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $f\left(x\right)=c_5e^{\lambda ix}+c_6e^{-\lambda ix}$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$u\left(x,t\right)=e^{\left(-\lambda^2-1\right)t}\left(Ae^{\lambda ix}+Be^{-\lambda ix}\right)$$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2=0$ จะได้ $\dfrac{g'\left(t\right)}{g\left(t\right)}+1=0$ และ $\dfrac{f''\left(x\right)}{f\left(x\right)}=0$

พิจารณา $g'\left(t\right)=-g\left(t\right)$

$$g'\left(t\right)+g\left(t\right)=0$$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r-1=0$ จะได้รากของสมการคือ $r=1$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $g\left(t\right)=c_7e^{-t}$

พิจารณา $f''\left(x\right)=0$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2=0$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $f\left(x\right)=c_8x+c_9$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$u\left(x,t\right)=e^{-t}(Ex+F)$$

<u>ตัวอย่างที่2.6</u> $a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$

ให้ $u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right)$

ดังนั้น $a^2X''T=XT''$

หารตลอดด้วย a^2TX ตลอดทั้งสมการ $\dfrac{a^2X''T}{a^2XT}=\dfrac{XT''}{a^2XT}$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ 1 $\lambda^2 > 0$ จะได้ $X'' = \lambda^2 X$ และ $\frac{T''}{a^2 T} = \lambda^2$

พิจารณา $X'' = \lambda^2 X$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 = \lambda^2$ จะได้รากของสมการคือ $r = \pm\lambda$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$

พิจารณา $\frac{T''}{a^2 T} = \lambda^2$

$T'' = \lambda^2 a^2 T$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 = \lambda^2 a^2$ จะได้รากของสมการคือ $r = \pm a\lambda$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $T(t) = c_3 e^{a\lambda t} + c_4 e^{-a\lambda t}$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$u(x,t) = \left(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}\right)\left(c_3 e^{a\lambda t} + c_4 e^{-a\lambda t}\right)$$

กรณีที่ 2 $-\lambda^2 < 0$ จะได้ $\frac{X''}{X} = -\lambda^2$ และ $\frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2$

พิจารณา $\frac{X''}{X} = -\lambda^2$

$X'' = -\lambda^2 X$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 = -\lambda^2$ จะได้รากของสมการคือ $r = \pm\lambda i$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $X(x) = c_5 e^{\lambda ix} + c_6 e^{-\lambda ix}$

พิจารณา $\frac{T''}{a^2 T} = \lambda^2$

$T'' = -\lambda^2 a^2 T$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 = -\lambda^2 a^2$ จะได้รากของสมการคือ $r = \pm a\lambda i$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $T(t) = c_7 e^{a\lambda it} + c_8 e^{-a\lambda it}$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$u(x,t) = \left(c_5 e^{\lambda ix} + c_6 e^{-\lambda ix}\right)\left(c_7 e^{a\lambda it} + c_8 e^{-a\lambda it}\right)$$

กรณีที่ 3 $\lambda^2 = 0$ จะได้ $\frac{X''}{X} = 0$ และ $\frac{T''}{a^2 T} = 0$

พิจารณา $\frac{X''}{X} = 0$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 = 0$

ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $X(x) = c_9 x + c_{10}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารฉบับเต็ม สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น และต้องไม่ทำให้เกิดความเสียหาย และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา $$\frac{T''}{a^2T}=0$$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2=0$

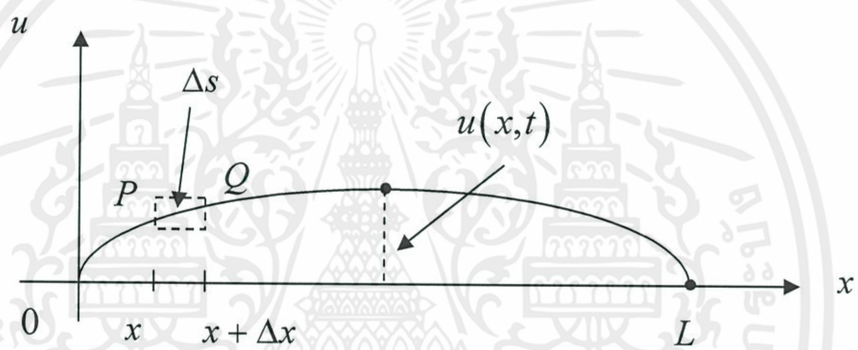
ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $T(t)=c_{11}t+c_{12}$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$u(x,t)=\left(c_9x+c_{10}\right)\left(c_{11}t+c_{12}\right)$$

2.3 คลื่น (Wave)

พิจารณาเส้นลวดยาว L ขึงให้ตึงระหว่างจุดสองจุดบนแกน x คือ $x=0$ และ $x=L$ แล้วดีดให้เส้นลวดสั่นในแนวระนาบ xy หรือ ในแนวตั้งฉากกับแกน x (transverse vibration) ดังรูปที่ 2.1

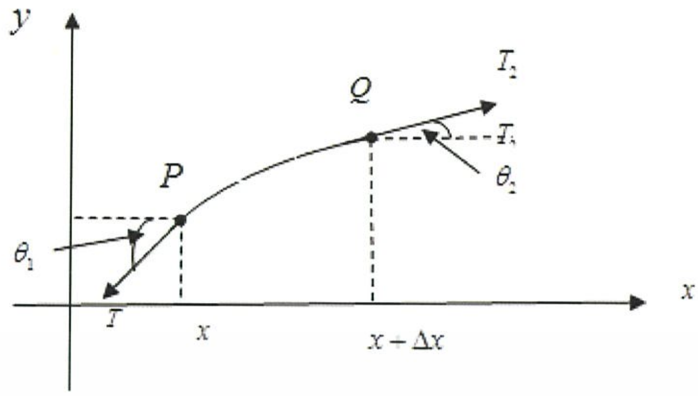


รูปที่ 2.1 เส้นลวดยาว L ขึงให้ตึงระหว่างจุดสองจุดบนแกน x

ให้ $u(x,t)$ แทนตำแหน่งของเส้นลวด ณ จุด x ใดๆ ที่เส้นลวดเคลื่อนที่ห่างจากแกน x ในแนวตั้งฉาก (vertical displacement) มีข้อกำหนดดังนี้

- เส้นลวดเป็น perfectly flexible
- เส้นลวดเป็นสารเนื้อเดียว โดยความหนาแน่นหรือมวลต่อปริมาตร ρ มีค่าคงที่
- Displacement u มีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับความยาวเส้นลวด
- ความชันของเส้นโค้งมีค่าน้อยมากที่ทุกๆจุด
- ความตึง T ของเส้นลวดมีค่าคงที่
- ความตึงมีค่ามากกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับแรงดึงดูดของโลก
- ไม่มีแรงภายนอกอื่นใดมากระทำ กับเส้นลวด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2 แสดงแรงตึงของเส้นลวดที่จุดปลาย P และ Q

ให้ T_1 และ T_2 เป็นแรงตึงของเส้นลวดที่จุดปลาย P และ Q ตามลำดับ เนื่องจากไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวราบดังนั้น แรงตึงที่แตกมาในแนวราบต้องมีค่าคงที่สมมติเท่ากับ T ดังนั้น

$$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 = T \;;\; T \text{ คงที่}$$

แรงตึง ณ จุด P ในแนวดิ่ง $= -T_1\sin\theta_1 = -\dfrac{T}{\cos\theta_1}\sin\theta_1 = -T\tan\theta_1$

แรงตึง ณ จุด Q ในแนวดิ่ง $= T_2\sin\theta_2 = \dfrac{T}{\cos\theta_2}\sin\theta_2 = T\tan\theta_2$

แรงลัพธ์ในแนวดิ่งในช่วง $PQ = T\left(\tan\theta_2 - \tan\theta_1\right) = T\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right)$

จากกฎของนิวตัน $F = ma$

แล้วแรงลัพธ์ในช่วง PQ คือ $\Delta m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho\Delta x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

โดย ρ เป็นความหนาแน่นของเส้นลวด ดังนั้น

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho\Delta x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

Take limit เมื่อ $\Delta x \to 0$ ได้

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ เมื่อ } a^2 = \frac{T}{\rho}$$

เรียก one-dimensional wave equation

เนื่องจากปลายทั้งสองข้างของเส้นลวดถูกตรึงอยู่กับที่ตลอดเวลา ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$u(0,t) = 0 \quad,\quad u(L,t) = 0 \quad;\; 0 < x < L \quad,\quad t > 0$$

ไม่ว่ากรณีใดทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าเมื่อเวลาเริ่มต้น $t = 0$ รูปร่างของเส้นลวดแสดงได้ด้วยฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนั้น

$$u(x,0) = f(x) \quad;\quad 0 < x < L$$

และเมื่อเวลาเริ่มต้น $t=0$ ความเร็วของเส้นลวดแสดงได้ดังฟังก์ชั่น $g(x)$

ดังนั้น $$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$$

ปัญหาเงื่อนไขค่าขอบเขต (boundary value problem) สำหรับการสั่นของเส้นลวดคือ

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,;\ 0<x<L\ ,t>0 \qquad (2\text{-}1)$$

$$u(0,t)=0\ ,u(L,t)=0\quad ;\ 0<x<L\ ,t>0 \qquad (2\text{-}2)$$

$$u(x,0)=f(x)\ ,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)\quad ;\quad 0<x<L \qquad (2\text{-}3)$$

ต้องการหา vertical displacement $u(x,t)$ ของเส้นลวด

สมมติให้ $u(x,t)=X(x)T(t)$ เป็นผลเฉลยของ (2-1)

ดังนั้น $$a^2X''T=XT''$$

หารตลอดด้วย a^2TX จะได้ $$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}$$

เศษส่วนทั้งสองเท่ากัน ให้เท่ากับ λ^2 ซึ่งอาจมากกว่าศูนย์หรือเท่ากับศูนย์ หรือน้อยกว่าศูนย์ได้

ถ้า $\lambda^2>0$

จะได้ $$X''=\lambda^2X$$

ผลเฉลยคือ $$X=A\cosh\lambda x+B\sinh\lambda x$$

และ $$T''=a^2\lambda^2T$$

ผลเฉลยคือ $$T=C\cosh a\lambda t+D\sinh a\lambda t$$

จากเงื่อนไข (2-2) $u(0,t)=0=X(0)T(t)$, $u(L,t)=0=X(L)T(t)$

ดังนั้น $X(0)=0$ และ $X(L)=0$

จาก $X(0)=0 \rightarrow 0=A\cosh\lambda(0)+B\sinh\lambda(0)$

เนื่องจาก $\cosh\lambda(0)=1$, $\sinh\lambda(0)=0$ ดังนั้น $A=0$, $B\neq 0$ ได้ $X=B\sinh\lambda x$

จาก $X(L)=0 \rightarrow 0=B\sinh\lambda L$

เนื่องจาก $\sinh\lambda L\neq 0$ ดังนั้น $B=0 \rightarrow X=0$ ทำให้ $u(x,t)=0$ ด้วย

จาก $u(x,t)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x,0)=f(x)$

ดังนั้น $u(x,t)=0$ ไม่ใช่ผลเฉลยตามต้องการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $\lambda^2=0$

จะได้ $X''=0$ และ $T''=0$

ผลเฉลยคือ $X=Ax+B$ และ $T=Ct+D$

จาก $X(0)=0 \rightarrow 0=A(0)+B \rightarrow B=0$ จะได้ $X = Ax$

จาก $X(L)=0 \rightarrow 0=A(L) \rightarrow A=0$ จะได้ $X=0$

ทำให้ $u(x,t)=0$ ซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยเช่นกัน

ถ้า $-\lambda^2<0$

แล้ว $X''=-\lambda^2 X$ และ $T''=-a^2\lambda^2 T$

ผลเฉลยคือ $X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$ และ $T=C\cos a\lambda t+D\sin a\lambda t$

จาก $X(0)=0 \rightarrow 0=A\cos\lambda 0+B\sin\lambda 0$

เนื่องจาก $\cos\lambda 0=1$, $\sin\lambda 0=0 \rightarrow A=0$, $B\neq 0$

จะได้ $X=B\sin\lambda x$

จาก $X(L)=0$ ได้ $0=B\sin\lambda L$

เมื่อ $B=0$ แล้วได้ $X=0$ ซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยที่ต้องการ ดังนั้น $\sin\lambda L=0$

เมื่อ $\lambda=\dfrac{n\pi}{L};n=1,2,3,\ldots$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ(Eigenvalue)

และมีฟังก์ชันเจาะจง (Eigenfunction) ที่สมนัย คือ $X=B\sin\dfrac{n\pi}{L}x \quad ;n=1,2,3,\ldots$

จาก $\lambda=\dfrac{n\pi}{L}$ จะได้ $T=C\cos\dfrac{n\pi a}{L}t+D\sin\dfrac{n\pi a}{L}t$

ดังนั้น
$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{L}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (2\text{-}4)$$

จากหลักการซ้อนทับ (Superposition Principle) จะได้ผลเฉลยคือ

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{L}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (2\text{-}5)$$

ที่ $t=0$ จะได้ $u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi}{L}x$

พิจารณาหา A_n ได้จาก
$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad (2\text{-}6)$$

ในการหา B_n จะหาอนุพันธ์ของ (2-5) เทียบกับ t แล้วให้ $t=0$ โดย

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}(-A_n\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi a}{L}t+B_n\frac{n\pi a}{L}\cos\frac{n\pi a}{L}t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)=\sum_{n-1}^{\infty}(B_n\frac{n\pi a}{L})\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$B_n\frac{n\pi a}{L}=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ
$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad (2\text{-}7)$$

แล้วผลเฉลยของปัญหานี้คือ อนุกรม (2-5) ซึ่ง A_n และ B_n นิยามตาม (2-6) และ (2-7) ตามลำดับ ถ้าเส้นเชือกไม่มีความเร็วต้นกล่าวคือ $g(x)=0$ สำหรับทุกๆ x ในช่วง $0 \le x \le L$ แล้ว $B_n = 0$

จาก $u_{\mathrm{n}} = \left(A_n \cos\frac{n\pi a}{L}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{L}t \right)\sin\frac{n\pi}{L}x$ สามารถเขียน u_n ในรูปแบบใหม่ได้โดย

$$u_n = C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \varnothing_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{2-8}$$

$$u_n = C_n\left[\cos\varnothing_n \sin\frac{n\pi a}{L}t + \sin\varnothing_n \cos\frac{n\pi a}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u_n = \left[(C_n\cos\varnothing_n)\sin\frac{n\pi a}{L} + (C_n\sin\varnothing_n)\cos\frac{n\pi a}{L}t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$C_n \sin\varnothing_n = A_n \;\; ; C_n\cos\varnothing_n = B_n$

ดังนั้น $C_n = \sqrt{A_n^{\,2} + B_n^{\,2}}$ และ $\sin\varnothing_n = \frac{A_n}{C_n}$, $\cos\varnothing_n = \frac{B_n}{C_n}$

จาก $\quad u_n = C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \varnothing_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$

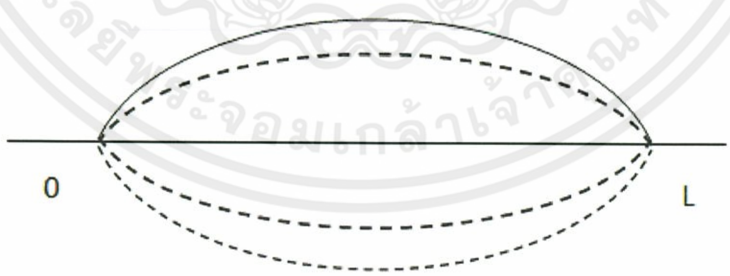
พจน์ $C_n \sin(\frac{n\pi a}{L}t + \varnothing_n)$ เป็นพจน์ที่กำหนดแอมพลิจูดของการสั่นเส้นลวด เมื่อ t เป็นเวลาที่เปลี่ยนไป โดยมีความถี่ (f)

$$f = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

เมื่อ T เป็นแรงตึงในเส้นลวด ถ้าแรงดึงมากความถี่ก็มากด้วย

จากการที่ปลายทั้งสองของเส้นลวดถูกตรึงไว้ที่ 0 และ L ดังนั้นที่ 0 และ L นี้ $\sin\frac{n\pi}{L}x = 0$

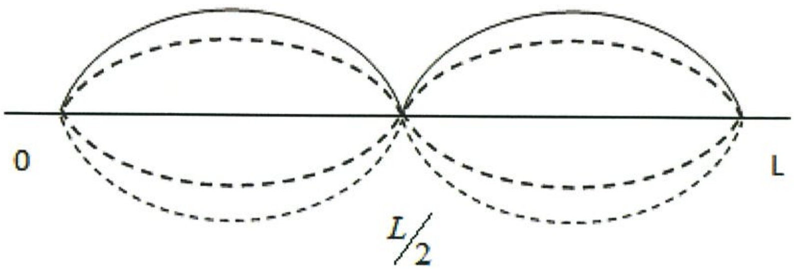
$n=1$, $x = L \to \sin\pi$ ได้ first standing wave ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดง first standing wave

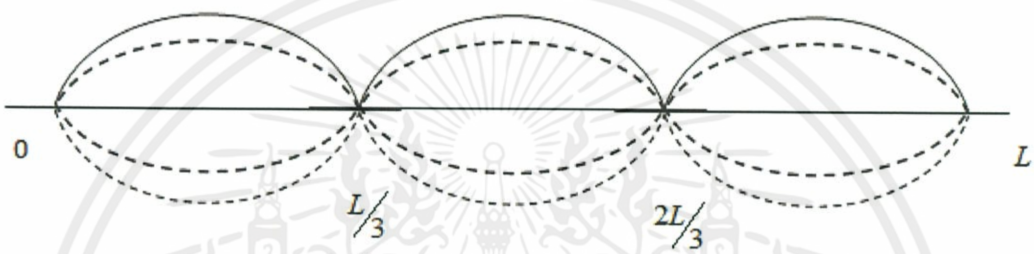
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=2\ ,x=L\rightarrow\sin 2\pi$ ได้ second standing wave ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดง second standing wave

$n=3,x=L\rightarrow\sin 3\pi$ ได้ third standing wave ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดง third standing wave

จุดในช่วง $(0,L)$ ซึ่ง $\sin\frac{n\pi}{L}x=0$ จะสมนัยกับ standing wave

เมื่อไม่มีการเคลื่อนที่ เรียกจุดเหล่านี้ว่า node

second standing wave อยู่ที่ $\frac{L}{2}$

third standing wave อยู่ที่ $\frac{L}{3}$ และ $\frac{2L}{3}$

กรณีทั่วไป n^{th} normal node ของการสั่นที่มี n-1 node

2.4 Bessel Equations

สมการเบสเซิลอันดับ n คือ

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0 \tag{2-9}$$

โดย n เป็นจำนวนจริงใดๆซึ่ง $n\geq 0$

เมื่อหารสมการเบสเซิลด้วย x^2 จะได้

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-n^2}{x^2}y=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ ดังนั้นผลเฉลยของ (2-9) อยู่ในรูป

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{m+k} \tag{2-10}$$

โดยการหาอนุพันธ์สมการที่ (2-10) จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)x^{m+k-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k-2}$$

แทนใน (2-9) สามารถจัดรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)x^{m+k-1}+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{m+k}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)(m+k-1)x^{m+k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m+k)x^{m+k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{m+k+2}-n^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{m+k}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[(m+k)(m+k-1)+(m+k)-n^2\right]x^{m+k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{m+k+2}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[(m+k)^2-n^2\right]x^{m+k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{m+k+2}=0$$

$$\begin{aligned}&a_0\left[(m+0)^2-n^2\right]x^m+a_1\left[(m+1)^2-n^2\right]x^{m+1}+a_2\left[(m+2)^2-n^2\right]x^{m+2}\\&\quad+a_3\left[(m+3)^2-n^2\right]x^{m+3}+a_4\left[(m+4)^2-n^2\right]x^{m+4}\\&\quad+a_5\left[(m+5)^2-n^2\right]x^{m+5}+a_6\left[(m+6)^2-n^2\right]x^{m+6}+\ldots\\&\quad+a_0x^{m+2}+a_1x^{m+3}+a_2x^{m+4}+a_3x^{m+5}+a_4x^{m+6}+\ldots=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_0\left[m^2-n^2\right]x^m+a_1\left[(m+1)^2-n^2\right]x^{m+1}+\left\{a_2\left[(m+2)^2-n^2\right]+a_0\right\}x^{m+2}\\&\quad+\left\{a_3\left[(m+3)^2-n^2\right]+a_1\right\}x^{m+3}\\&\quad+\left\{a_4\left[(m+4)^2-n^2\right]+a_2\right\}x^{m+4}\\&\quad+\left\{a_5\left[(m+5)^2-n^2\right]+a_3\right\}x^{m+5}\\&\quad+\left\{a_6\left[(m+6)^2-n^2\right]+a_4\right\}x^{m+6}+\ldots=0\end{aligned}$$

จากสมการสุดท้ายนี้สามารถสรุปได้ว่า

$$a_0[m^2-n^2]=0, a_0\neq0\rightarrow m^2-n^2=0\rightarrow m=\pm n, n=\pm m$$

$$a_1\left[(m+1)^2-n^2\right]=0,\because m=\pm n\rightarrow(m+1)^2-n^2\neq0\rightarrow a_1=0$$

$$a_2\left[(m+2)^2-n^2\right]+a_0=0\quad\rightarrow a_2=\frac{-a_0}{(m+2)^2-n^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a_3\left[(m+3)^2-n^2\right]+a_1=0 \quad \rightarrow a_3=\frac{-a_1}{(m+3)^2-n^2}=0 \leftarrow a_1=0$$

$$a_4\left[(m+4)^2-n^2\right]+a_2=0 \quad \rightarrow a_4=\frac{-a_2}{(m+4)^2-n^2}=\frac{a_0}{\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]}$$

$$a_5\left[(m+5)^2-n^2\right]+a_3=0 \quad \rightarrow a_5=\frac{-a_3}{(m+5)^2-n^2}=0 \leftarrow a_3=0$$

$$a_6\left[(m+6)^2-n^2\right]+a_4=0 \quad \rightarrow a_6=\frac{-a_4}{(m+6)^2-n^2}=\frac{-a_0}{\left[(m+6)^2-n^2\right]\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]}$$

$$a_{r+2}\left[(m+r+2)^2-n^2\right]+a_r=0 \quad \rightarrow a_{r+2}=\frac{-a_r}{(m+r+2)^2-n^2}\, a_{r+2}=\frac{-a_r}{(m+r+2)^2-n^2}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ใน (2-10) จะได้

$$y=a_0x^m-\left[\frac{a_0}{(m+2)^2-n^2}\right]x^{m+2}+\left[\frac{a_0}{\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]}\right]x^{m+4}$$

$$-\left[\frac{a_0}{\left[(m+6)^2-n^2\right]\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]}\right]x^{m+6}+\ldots$$

หรือ

$$y=a_0x^m\left[1-\left[\frac{1}{\left[(m+2)^2-n^2\right]}\right]x^2+\left[\frac{1}{\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]}\right]x^4\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{\left[(m+6)^2-n^2\right]\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]}\right]x^6+\ldots\right]$$

เมื่อ $m=n$

$$\begin{aligned}\left[(m+2)^2-n^2\right]&\\ &=(n+2)^2-n^2\\ &=n^2+4n+4-n^2\\ &=4(n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]&\\ &=\left[(n+4)^2-n^2\right][4(n+1)]\\ &=\left[n^2+8n+16-n^2\right][4(n+1)]\\ &=8(n+2)\cdot 4(n+1)\\ &=4^2\cdot 2(n+2)(n+1)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left[(m+6)^2-n^2\right]\left[(m+4)^2-n^2\right]\left[(m+2)^2-n^2\right]$$
$$=\left[(n+6)^2-n^2\right]\left[4^2\cdot 2(n+2)(n+1)\right]$$
$$=\left[n^2+12n+36-n^2\right]\left[4^2\cdot 2(n+2)(n+1)\right]$$
$$=12(n+3)\cdot 4^2\cdot 2(n+2)(n+1)$$
$$=4^3\cdot 3\cdot 2(n+3)(n+2)(n+1)$$
$$=4^3\cdot 3!(n+3)(n+2)(n+1)$$

ดังนั้น

$$y=a_0x^n\left[1-\left[\frac{1}{4(n+1)}\right]x^2+\left[\frac{1}{4^2\cdot 2(n+2)(n+1)}\right]x^4-\left[\frac{1}{4^3\cdot 3!(n+3)(n+2)(n+1)}\right]x^6+\dots\right]$$

เมื่อ $m=-n$ จะได้

$$y=a_0x^{-n}\left[1-\left[\frac{1}{4(1-n)}\right]x^2+\left[\frac{1}{4^2\cdot 2(2-n)(1-n)}\right]x^4-\left[\frac{1}{4^3\cdot 3!(3-n)(2-n)(1-n)}\right]x^6+\dots\right]$$

พิจารณาสัมประสิทธ์ค่าคงที่ในแต่ละพจน์ทางขวามือของสมการ

$$1=\frac{1}{2^0\cdot 0\cdot 2^0}=\frac{(-1)^0}{2^0\cdot 0!\cdot 2^0}=\frac{(-1)^0}{\left(2^0\right)^2\cdot 0!}$$

$$-\frac{1}{4}=\frac{-1}{2\cdot 2}=\frac{(-1)^1}{2^1\cdot 1!\cdot 2^1}=\frac{(-1)^1}{\left(2^1\right)^2\cdot 1!}$$

$$\frac{1}{4^2\cdot 2}=\frac{1}{4\cdot 4\cdot 2}=\frac{(-1)^2}{2^2\cdot 2!\cdot 2^2}=\frac{(-1)^2}{\left(2^2\right)^2\cdot 2!}$$

$$-\frac{1}{4^3\cdot 3!}=\frac{-1}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 3!}=\frac{(-1)^3}{4\cdot 2\cdot 3!\cdot 4\cdot 2}=\frac{(-1)^3}{\left(2^3\right)^2\cdot 3!}\Rightarrow\frac{(-1)^k}{2^{2k}\cdot k!}$$

จากสมการเบสเซิล (2-9)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-n^2\right)y=0$$ จะได้ผลเฉลยคือ

$$y=a_0x^n\left[\frac{(-1)^0}{\left(2^0\right)^2\cdot 0!}-\frac{(-1)^1}{\left(2^1\right)^2\cdot 1!}\frac{x^2}{n+1}+\left[\frac{(-1)^2}{\left(2^2\right)^2\cdot 2!}\right]\frac{x^4}{(n+1)(n+2)}\right.$$

$$=a_0x^n\left[\frac{(-1)^0}{\left(2^0\right)^2\cdot 0!}-\frac{(-1)^1}{\left(2^1\right)^2\cdot 1!}\frac{x^2}{n+1}+\left[\frac{(-1)^2}{\left(2^2\right)^2\cdot 2!}\right]\frac{x^4}{(n+1)(n+2)}\right.$$

$$=a_0\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{2k}\cdot k!(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+k)}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$, และ $n!(n+1)(n+2)\cdots(n+k) = (n+k)!$

แล้ว $y = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^n x^{2k}}{2^{2k}\cdot k!(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+k)}$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{x^n}{2^n}\cdot\frac{x^{2k}}{2^{2k}}\cdot\frac{1}{n!(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

ซึ่งจะถูกเรียกว่าฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่ง อันดับ n แทนด้วย $J_n(x)$

ดังนั้น
$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

สำหรับ $n=0,$ จะได้ฟังก์ชันเบสเซิลอันดับที่ 0

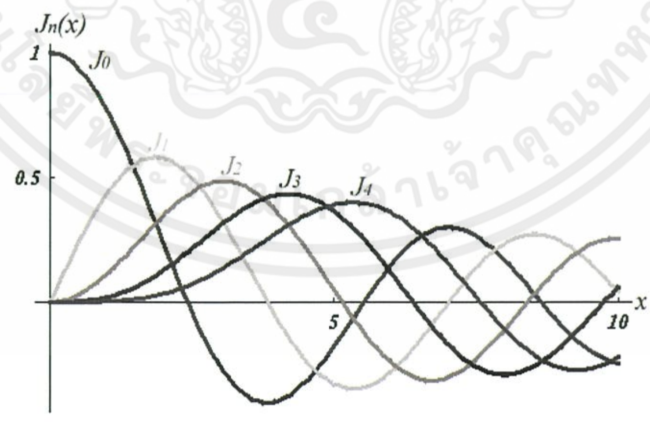
$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \cdots$$

ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับโคไซน์ฟังก์ชัน

สำหรับ $n=1,$ จะได้ฟังก์ชันเบสเซิลอันดับที่หนึ่ง

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + \cdots$$

ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับไซน์ฟังก์ชัน(ดังรูป 2.6)



รูปที่ 2.6 แสดงฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่ หนึ่ง สำหรับ n=0,1,2,3,4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันแกมมาหรือรูปทั่วไปของฟังก์ชันแฟกทอเรียล จะอยู่ในรูป

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

โดย $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$

รูปทั่วไปของฟังก์ชันแฟกทอเรียล

$$\mathrm{n}! = \Gamma(n+1)$$

$$(\mathrm{n}+\mathrm{k})! = \Gamma(n+k+1)$$

ดังนั้น

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+n+k)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

แทน n ด้วย $-n$ จะได้

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1-n+k)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

ฟังก์ชัน $J_n(x)$ และ $J_{-n}(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่ง อันดับที่ n และ $-n$ ตามลำดับ ผลเฉลยทั่วไปของ

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \qquad ;n \geq 0$$

คือ

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \qquad \text{เมื่อ } n \text{ ไม่ใช่จำนวนเต็ม}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
ขั้นตอนการดำเนินงาน

ในบทที่ 3 นี้จะกล่าวถึง การหาผลเฉลยของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งโดยใช้วิธีแบบแยกตัวแปร และขั้นตอนการหาผลเฉลยแบบเชิงวิเคราะห์ของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งที่มีปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการที่กำหนดมาให้ และผู้วิจัยได้พัฒนาโปรแกรมมาช่วยในการคำนวณหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม MATLAB

3.1 การหาผลเฉลยของสมการของการสั่นในแนวดิ่งโดยวิธีแบบแยกตัวแปร

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาการสั่นของเส้นลวดที่พิจารณา [3] คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad ;0<x<l;\, t>0 \tag{3-1}$$

โดยที่ $a=\sqrt{g} \quad (a^2=g)$

เนื่องจากจุดปลายด้านบนของเส้นลวดถูกตรึงไว้กับเพดาน จึงไม่มีการเคลื่อนที่ จะได้ว่า

เงื่อนไขขอบคือ $u(l,t)=0$ เมื่อ $t\in[0,T]$ (3-2)

และจากลักษณะการเคลื่อนที่ของเส้นลวดนี้ขึ้นอยู่กับรูปร่างเมื่อเริ่มต้นของเส้นลวดก่อนที่จะถูกปล่อยให้เกิดการสั่นและความเร็วต้นของจุดต่างๆบนเส้นลวด ค่าทั้งสองนี้ขึ้นอยู่กับ x โดยที่ $t=0$ ดังนั้น

เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $u(x,0)=f(x)$ และ $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)}=F(x)$ เมื่อ $x\in[0,l]$ (3-3)

จากสมการที่ (3-1) จัดสมการใหม่ โดยกำหนดตัวแปรให้ $x=y^2$ หรือ $y=\sqrt{x}$

จะได้
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y^2}{\partial y}=2y\frac{\partial u}{\partial x}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3-4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง จะได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial (2y)^2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial y^2}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3-5}$$

แทนสมการ (3-4) ในสมการที่ (3-5) จะได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4y^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

จาก $x = y^2$ โดยการคูณทางซ้ายด้วย x และทางขวาด้วย y^2

จะได้ $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\left[\frac{1}{4y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{4y^3}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] \tag{3-6}$$

บวกสมการ (3-4) กับสมการ (3-6) จะได้

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{4y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

นั่นคือ $$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{4y}\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{y}{y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{4y}\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{4y}\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{4y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงที่มาของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น จากสมการที่ (3-1) จะได้

$$\frac{1}{4y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3-7}$$

สมมติผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $u = T(t)W(y)$ (3-8)

พิจารณา $\dfrac{\partial u}{\partial y}=T(t)\dfrac{\partial W(y)}{\partial y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=W(y)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

แทนค่าในสมการ (3-7) $\dfrac{1}{4y}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\cdot T(t)\dfrac{\partial W(y)}{\partial y}\right)\right)=\dfrac{1}{a^2}W(y)\dfrac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$

$$\frac{1}{4y}\left(T(t)\left(\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial W(y)}{\partial y}+y\frac{\partial^2 W(y)}{\partial y^2}\right)\right)=\frac{1}{a^2}W(y)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{4y}\left(\frac{\partial W(y)}{\partial y}+y\frac{\partial^2 W(y)}{\partial y^2}\right)\frac{1}{W(y)}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{yW(y)}\left(\frac{\partial W(y)}{\partial y}+y\frac{\partial^2 W(y)}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{2}{a}\right)^2\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

สมการนี้พจน์ทางซ้ายและทางขวาเป็นฟังชันก์ตัวแปรเดียว ดังนั้นสามารถใช้สัญลักษณ์ของอนุพันธ์สามัญได้

ดังนั้น
$$\frac{1}{yW(y)}\frac{d}{dy}\left(y\frac{dW(y)}{dy}\right)=\left(\frac{2}{a}\right)^2\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} \tag{3-9}$$

เนื่องจากสมการ (3-9) พจน์ทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว และพจน์ทางขวาเป็นฟังก์ชันของตัวแปร t เพียงอย่างเดียว ดังนั้นแต่ละข้างจะเท่ากับค่าคงที่ กำหนดให้เป็น λ^2 แล้วแบ่งเป็น 3 กรณี คือ $\lambda^2>0, -\lambda^2<0$ และ $\lambda^2=0$

<u>กรณีที่ 1</u> $\lambda^2=0$

$$\frac{1}{yW(y)}\left(y\frac{d^2W(y)}{dy^2}+\frac{dW(y)}{dy}\right)=0$$

$$yW''(y)+W'(y)=0$$

คูณ y ตลอดทั้งสมการ $y^2W''(y)+yW'(y)=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นสำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$r(r-1)+r=0$$
$$r^2-r+r=0$$
$$r^2=0$$

มีรากคือ $r=0,0$ ซึ่งเป็นรากจริงซ้ำ

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$W(y)=c_1+c_2\ln y$$

จากเงื่อนไขขอบ $u(l,t)=0$

จึงได้ว่า $\ln\sqrt{l}\neq 0, c_2=0,\ c_1=0$

เนื่องจาก $u(x,t)=0$ จึงขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x,0)=f(x)$

ดังนั้นผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อยจึงไม่พิจารณากรณีนี้

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2>0$

$$\frac{1}{yW(y)}\left(y\frac{d^2W(y)}{dy^2}+\frac{dW(y)}{dy}\right)=\lambda^2$$
$$yW''(y)+W'(y)=\lambda^2 yW(y)$$
$$yW''(y)+W'(y)-y\lambda^2W(y)=0$$

เนื่องจากกรณี $\lambda^2>0$ ไม่อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่สามารถหาผลเฉลยได้อย่างง่าย จึงตัดการพิจารณากรณี $\lambda^2>0$ นี้ออกไปและพิจารณากรณี $-\lambda^2<0$ ต่อไป

<u>กรณีที่ 3</u> $-\lambda^2<0$ จะได้ 2 สมการคือ

$$\frac{1}{yW(y)}\frac{d}{dy}\left(y\frac{dW(y)}{dy}\right)=-\lambda^2 \tag{3-10}$$

และ

$$\left(\frac{2}{a}\right)^2\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=-\lambda^2 \tag{3-11}$$

พิจารณาสมการ (3-10)

$$\frac{1}{yW(y)}\frac{d}{dy}\left(y\frac{dW(y)}{dy}\right)=-\lambda^2$$
$$y\frac{d^2W(y)}{dy^2}+\frac{dW(y)}{dy}+\lambda^2yW(y)=0$$

คูณ y ตลอดทั้งสมการ

$$y^2\frac{d^2W(y)}{dy^2}+y\frac{dW(y)}{dy}+\lambda^2y^2W(y)=0 \tag{3-12}$$

กำหนดให้ $W(y)=F(\lambda y)=F(Y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องทำการอ้างอิงถึงแหล่งที่มาของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งและสองเทียบกับ y

จะได้
$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\frac{\partial(\lambda y)}{\partial y}$$
$$= \lambda\frac{\partial F}{\partial Y}$$

และ
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial W}{\partial y})$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial F}{\partial Y})$$
$$= \lambda\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial Y})$$
$$= \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}$$
$$= \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\cdot\frac{\partial(\lambda y)}{\partial y}$$
$$= \lambda^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}$$

แทนค่าในสมการ (3-12) จะได้
$$y^2\lambda^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + y\lambda\frac{\partial F}{\partial Y} + y^2\lambda^2 F(Y) = 0$$
$$Y^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Y^2 F(Y) = 0 \tag{3-13}$$

จากสมการรูปแบบของสมการเบสเซิล
$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{3-14}$$

จะพบว่า จากสมการที่ (3-14) ถ้า $v = 0$ จะเหมือนกับสมการที่ (3-13) ดังนั้นสมการ (3-13) จึงเป็นสมการเบสเซิล ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการที่ (3-13) คือ
$$W(y) = F(Y) = c_1 J_0(Y) + c_2 Z_0(Y)$$
$$= c_1 J_0(\lambda y) + c_2 Z_0(\lambda y)$$
$$= c_1 J_0(\lambda\sqrt{x}) + c_2 Z_0(\lambda\sqrt{x}) \tag{3-15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใด ๆ ... และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย $J_\upsilon(x)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่ง อันดับที่ υ
$$J_\upsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k+\upsilon}}{k!\,\tau(\upsilon+k+1)}$$

และ $Z_{\upsilon}(x)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่สอง อันดับที่ υ

$$Z_{\upsilon}(x)=\frac{J_{\upsilon}(x)\cos\upsilon\pi-J_{-\upsilon}(x)}{\sin\upsilon\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}J_{\upsilon}(x)\log\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}(\frac{x}{2})^{-n+2k}-......\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2}\frac{\tau'(k+1)}{\tau(k+1)}$$

เนื่องจาก $x\to 0$ และ $\log 0\to-\infty$

จากสมการ (3-15) จึงได้ว่า $y\to 0$ และ $Z_0(\lambda y)\to-\infty$

ดังนั้น c_2 จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ ทำให้

$$W(y)=c_1J_0(\lambda y)$$

$$W(\sqrt{x})=c_1J_0(\lambda\sqrt{x})$$

จากเงื่อนไขขอบ $u(l,t)=0$

$$W(\sqrt{l})=c_1J_0(\lambda\sqrt{l})=0$$

เนื่องจาก $c_1\neq 0$ ดังนั้น $J_0(\lambda\sqrt{l})=0$

กำหนดให้ $\mu_k=\lambda_k\sqrt{l}$ $(k=1,2,3,...)$ (3-16)

จะได้ $\lambda_k=\frac{\mu_k}{\sqrt{l}}$ เป็นค่าเจาะจง (Eigenvalue) ของปัญหา

ฟังก์ชันเจาะจง (Eigenfunctions) ซึ่งสอดคล้องกับค่าเจาะจงเหล่านี้คือ

$$W_k(y)=J_0(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}})$$

จะได้ผลเฉลยของสมการที่ (3-10) คือ

$$W_k(y)=CJ_0(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}})$$

จากในหลักการซ้อนทับ (Superposition Principle) [9] จะได้ว่า $C=\frac{1}{\sqrt{l}J_{m+1}(\mu_k)}$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการที่ (3-10) คือ

$$W_k(y)=\frac{1}{\sqrt{l}J_{m+1}(\mu_k)}J_0(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}})$$

พิจารณาสมการ (3-11)

$$\left(\frac{2}{a}\right)^2\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=-\lambda^2$$

$$T''(t)+\left(\frac{1}{2}a\lambda\right)^2T(t)=0$$

จะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2+\left(\frac{1}{2}a\lambda\right)^2=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มีรากของสมการคือ $r = \pm \frac{a}{2}\lambda i$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปคือ

$$T(t) = b_1 e^{-\frac{a}{2}\lambda it} + b_2 e^{\frac{a}{2}\lambda it}$$

จากรูปแบบ Euler's Formula; $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

จะได้ $$T(t) = b_1(\cos\frac{a}{2}\lambda t - i\sin\frac{a}{2}\lambda t\ ) + b_2(\cos\frac{a}{2}\lambda t + i\sin\frac{a}{2}\lambda t\ )$$

$$= (b_1 + b_2)\cos\frac{a}{2}\lambda t + i(b_2 - b_1)\sin\frac{a}{2}\lambda t$$

$$= A\cos\frac{a}{2}\lambda t + B\sin\frac{a}{2}\lambda t$$

จากสมการ (3-16) จะได้ว่าผลเฉลยของสมการ (3-11) คือ

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}$$

หาค่า A_k และ B_k

จากเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $u(x,0) = f(x)$

จะได้ $$T_k(0) = A_k \cos\frac{a\mu_k(0)}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{a\mu_k(0)}{2\sqrt{l}}$$

$$T_k(0) = A_k = f(x)$$

ดังนั้น A_k เป็นรูปร่างเริ่มต้น

พิจารณา

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(A_k \cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}})$$

$$= -\frac{a\mu_k}{2\sqrt{l}} A_k \sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + \frac{a\mu_k}{2\sqrt{l}} B_k \cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = F(x)$

และ $$\frac{\partial T(0)}{\partial t} = -\frac{a\mu_k}{2\sqrt{l}} A_k \sin(0) + \frac{a\mu_k}{2\sqrt{l}} B_k \cos(0)$$

$$= \frac{a\mu_k}{2\sqrt{l}} B_k$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า $$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = F(x) = \frac{a\mu_k}{2\sqrt{l}} B_k$$

นั่นคือ $$B_k = \frac{2\sqrt{l}F(x)}{a\mu_k}$$

จากสมการ (3-8) ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $u = T(t)W(y)$

ดังนั้นจะได้ว่า ผลเฉลยของสมการ (3-1) คือ

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} \right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{l}J_{m+1}(\mu_k)} J_0(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}) \right) \tag{3-17}$$

สำหรับปัญหาพิเศษนี้กำหนดให้ g มีค่าประมาณเท่ากับ 1 จาก $a = \sqrt{g} = \sqrt{1} = 1$, ดังนั้น $a = 1$ ให้ความยาวของเส้นลวด (l) มีค่าเท่ากับ 1 หน่วย และให้ $m = 0$ ใน (3-17)

ดังนั้น $$W_k(y) = \frac{1}{J_1(\mu_k)} J_0(\mu_k \sqrt{x}), \quad A_k = f(x), \quad B_k = \frac{2F(x)}{\mu_k}$$

จากหลักการซ้อนทับ (Superposition Principle) จะได้ผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูปของอนุกรม คือ

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\mu_k t}{2} + B_k \sin\frac{\mu_k t}{2} \right) W_k(y) \tag{3-18}$$

เมื่อ $$W_k(y) = \frac{1}{J_1(\mu_k)} J_0(\mu_k \sqrt{x})$$

$$A_k = f(x)$$

$$B_k = \frac{2F(x)}{\mu_k}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ขั้นตอนการหาผลเฉลยของปัญหาด้วยโปรแกรม MATLAB

จากการหาผลเฉลยโดยใช้วิธีแบบแยกตัวแปรที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ3.1 ผู้วิจัยจะพัฒนาโปรแกรมในการหาผลเฉลยโดยใช้โปรแกรมMATLAB ช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย คือค่าของตำแหน่ง (Displacement) การสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง ซึ่งคำนวณได้จากการรับค่าข้อมูลพื้นฐานของการหาผลเฉลย โดยการใช้โปรแกรมมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

3.2.1 ขั้นตอนการพิจารณาค่าจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากรูปแบบของผลเฉลยทั่วไปอยู่ในผลรวมของอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันเบสเซิล โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะหาค่าโดยพิจารณาผลรวมของอนุกรมในพจน์จำกัดของฟังก์ชันเบสเซิล ซึ่งมีขั้นตอนการหาผลเฉลยดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 รับค่าข้อมูลระยะเพิ่มขึ้นของระยะทาง ระยะเพิ่มขึ้นของเวลา จำนวนเส้นที่ต้องการแสดงตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วต้น จำนวนพจน์ของอนุกรมของฟังก์ชันเบสเซิล โดยพิจารณาจากช่วงของเวลา (t) และระยะทาง (x) ว่าต้องการให้มีผลต่างช่วงย่อยเท่าไหร่ เช่น ต้องการหาค่าของตำแหน่งการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง โดยที่ระยะทางห่างกันครั้งละ 0.5 และเวลาเพิ่มขึ้นครั้งละ 0.01

ขั้นที่ 2 คำนวณหาผลเฉลย

1) หาค่า μ_k ที่ทำให้ $J_0(\mu_k) = 0$

จากสมการ $J_0(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m! \tau(m+1)}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ (3-19)

2) หาค่า $J_1(\mu_k)$

จากสมการ
$$J_1(\mu_k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m \mu_k^{2m+1}}{2^{2m+1} m! \tau(m+2)} \tag{3-20}$$

3) หาค่า $J_0\left(\mu_k \sqrt{x}\right)$

โดยแทนค่าในสมการ (3-18) จะได้

$$J_0(\mu_k \sqrt{x}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m \left(\mu_k \sqrt{x}\right)^{2m}}{2^{2m} m! \tau(m+1)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4) หาค่า $$W_k(y) = \frac{1}{J_1(\mu_k)} J_0(\mu_k \sqrt{x})$$

5) แทนค่า $W_k(y)$ จากข้อ 4) ในสมการ

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\mu_k t}{2} + B_k \sin\frac{\mu_k t}{2} \right) W_k(y)$$

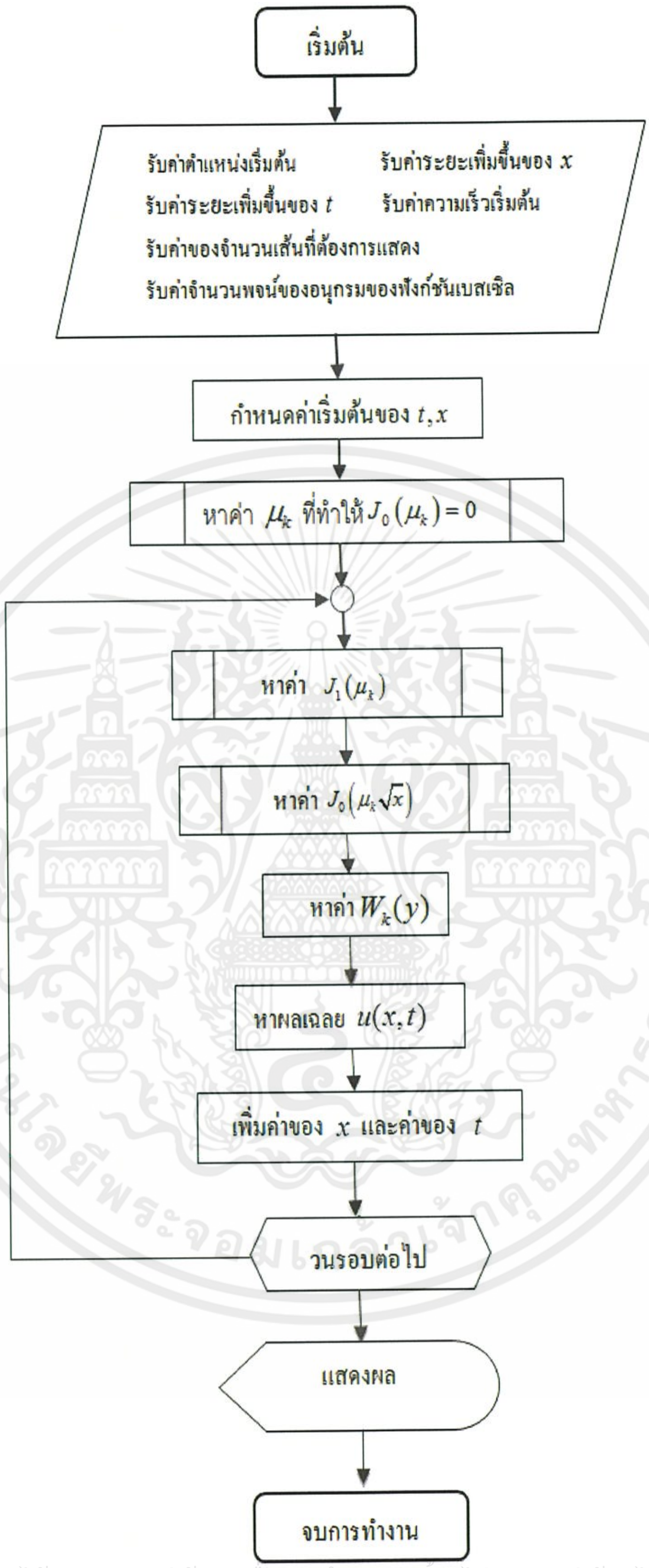
6) เพิ่มค่าของ x และวนทำซ้ำ

7) เพิ่มค่าของ t และวนทำซ้ำ

ขั้นที่ 3 แสดงผลค่าตำแหน่งที่ได้จากการคำนวณ ออกมาทางหน้าจอและแสดงในรูปแบบของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งการสั่นของเส้นลวดที่จุดต่างๆของเส้นลวด

จากการวิเคราะห์ข้างต้นจะวางแผนโครงสร้างโปรแกรมMATLAB เพื่อหาผลเฉลยได้ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.1 แผนภาพโครงสร้างการเขียนโปรแกรม

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

จากการศึกษาเนื้อหาที่ผ่านมาได้ศึกษาขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งโดยใช้วิธีแบบแยกตัวแปร ในบทนี้ได้ทำการพัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยในการหาค่าผลเฉลย ปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำ ในกรณีที่ฟังก์ชันตำแหน่งเริ่มต้น และความเร็วเริ่มต้นในรูปแบบต่างๆดังนี้

1) กำหนดฟังก์ชันตำแหน่งเริ่มต้นมีรูปแบบ $u(x,0) = \sin(7x) - \sin(7)$

2) กำหนดเงื่อนไขความเร็วต้นมีรูปแบบที่แตกต่างกันดังนี้

- $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = 0$
- $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = 1$
- $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = -1$
- $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = x$
- $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = \cos(x)$
- $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = \sin(x)$

ผลเฉลยที่ได้แสดงในรูปของกราฟ และวิเคราะห์เปรียบเทียบลักษณะของกราฟในแต่ละตัวอย่างดังต่อไปนี้

การหาค่าผลเฉลยของปัญหาที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาการสั่นของเส้นลวดที่พิจารณา [17] คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad 0 < x < 1, t \ge 0 \tag{4-1}$$

เงื่อนไขขอบเขตคือ $u(1,t) = 0$ เมื่อ $t \in [0,T]$ (4-2)

เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $u(x,0) = \sin(7x) - \sin(7)$ และ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = F(x)$ เมื่อ $x \in [0,1]$ (4-3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยของสมการปัญหาการสั่นของเส้นลวดที่พิจารณาโดยใช้วิธีแบบแยกตัวแปร อยู่ในรูป

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\mu_k t}{2}+B_k\sin\frac{\mu_k t}{2}\right)W_k(y) \tag{4-4}$$

เมื่อ $W_k(y)=\dfrac{1}{J_1(\mu_k)}J_0(\mu_k\sqrt{x})$

โดย $A_k=f(x)$ เป็นตำแหน่งเริ่มต้นของเส้นลวด

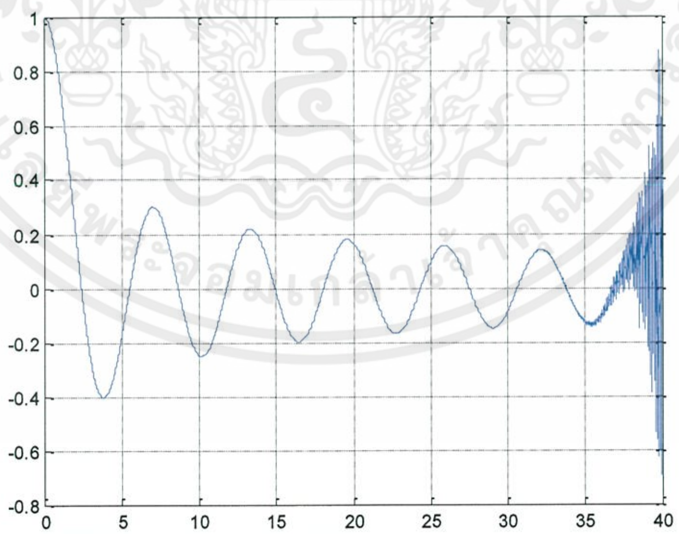
$B_k=\dfrac{2F(x)}{\mu_k}$ เมื่อ $F(x)$ คือความเร็วต้น

4.1 การพิจารณาหาค่า μ_k

จากขั้นตอนการพิจารณาหาค่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ในขั้นที่ 2 ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยมีการพิจารณาหาค่า μ_k โดยใช้สมการที่ (3-19) ในบทที่ 3 โดยกำหนดให้ $n=60$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 0 ผู้วิจัยได้ทำพัฒนาโปรแกรมหาผลรวมฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 0 เพื่อนำมาใช้ในการพิจารณาหาค่า μ_k โดยเลือกใช้จำนวนพจน์ของอนุกรมในสมการเป็นจำนวน 60 พจน์ นั่นคือ

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{60}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!\tau(m+1)} \quad \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนจริงใดๆ} \tag{4-5}$$

ซึ่งผลรวมของอนุกรมแสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 กราฟผลรวมจากโปรแกรมของสมการ (4-5) โดยใช้จำนวนพจน์ของอนุกรม $n=60$ เมื่อ $x\in[0,40]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรมสามารถคำนวณหาค่า μ_k ที่ทำให้ $J_0(\mu_k)=0$ ได้จำนวน 60 ค่า แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงค่า μ_k เมื่อ $k=1,2,3,...,60$

k	μ_k	k	μ_k	k	μ_k
1	2.4048	21	36.6350	41	36.7768
2	5.5201	22	36.6939	42	36.7779
3	8.6537	23	36.7406	43	36.7802
4	11.7916	24	36.7422	44	36.7806
5	14.9309	25	36.7426	45	36.7814
6	18.0711	26	36.7482	46	36.7842
7	21.2116	27	36.7483	47	36.7847
8	24.3525	28	36.7495	48	36.7858
9	27.4934	29	36.7596	49	36.7870
10	30.6347	30	36.7644	50	36.7883
11	33.7645	31	36.7668	51	36.7892
12	33.7648	32	36.7687	52	36.7893
13	33.7668	33	36.7701	53	36.7898
14	33.7669	34	36.7704	54	36.7914
15	33.7681	35	36.7706	55	36.7917
16	33.7682	36	36.7723	56	36.7924
17	33.7694	37	36.7737	57	36.7947
18	33.7712	38	36.7738	58	36.7951
19	33.7713	39	36.7741	59	36.7963
20	33.7718	40	36.7764	60	36.7979

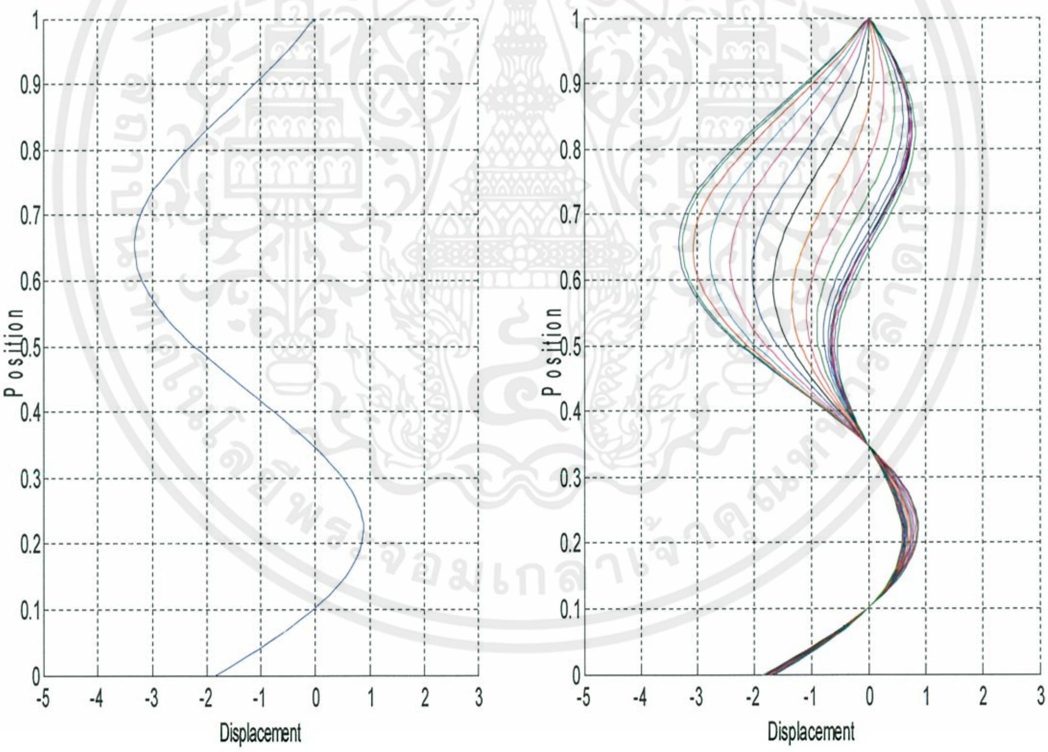
จากสมการ (4-5) และรูปที่ 4.1 จะเห็นว่าตั้งแต่ $x=33$ เป็นต้นไป กราฟจะแกว่งขึ้นลงเป็นอย่างมาก ซึ่งอยู่ในช่วง $x=33$ ถึง 40 ดังนั้นในการพัฒนาโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลย ผู้วิจัยเลือกใช้ μ_k ที่แสดงในตารางเพียง 11 ค่าแรกเท่านั้น คือ 2.4048 , 5.5201, 8.6537, 11.7916, 14.9309 , 18.0711, 21.2116, 24.3525, 27.4934, 30.6347, 33.7645

4.2 การพิจารณาจำนวนพจน์ของอนุกรมของฟังก์ชันเบสเซิล

เนื่องจากฟังก์ชันเบสเซิลอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ แต่ในการเขียนโปรแกรมจะใช้จำนวนพจน์ของอนุกรมในจำนวนจำกัด ดังนั้นจำนวนพจน์ (n) มีผลกับค่าของฟังก์ชันเบสเซิล โดยในปัญหาพิเศษนี้ เราจะเลือกให้ $n = 1,2,3$ และ 5 เนื่องจากจะทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันเบสเซิลที่ใช้แทนลงในผลเฉลยทั่วไปตามสมการ(4-4) มีค่าสอดคล้องกับตำแหน่งเริ่มต้น กล่าวคือ $u(x,0) = \sin(7x) - \sin(7)$ ซึ่งสามารถแสดงกราฟของผลเฉลยได้ดังต่อไปนี้

4.3 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นเมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x) - \sin(7)$ และความเร็วต้นเท่ากับ 0 เมื่อพิจารณาใช้จำนวนพจน์ (n) ของอนุกรมในสมการ (3-19) และ (3-20) เท่ากัน

<u>**ตัวอย่างที่ 4.1**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ** $0\ (F(x) = 0)$ **เมื่อ** $n = 1$

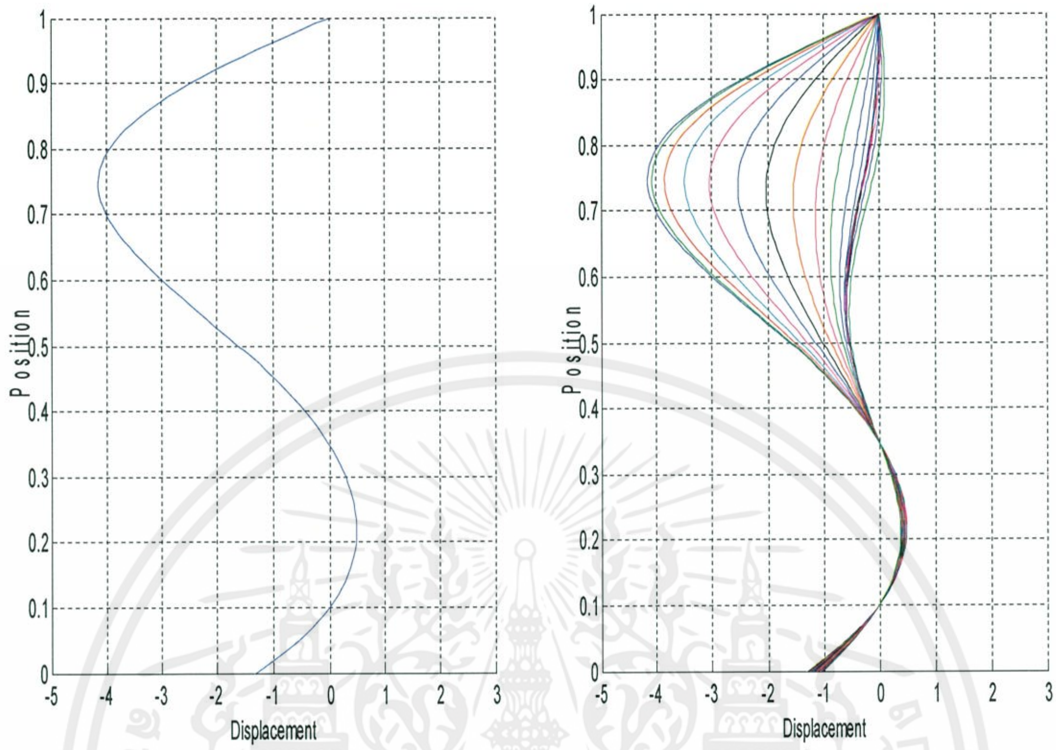


รูปที่ 4.2 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.1 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x) - \sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 0 เมื่อ $n = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ 4.1 เมื่อเวลา (t) ผ่านไปกราฟของการสั่น มีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลงในช่วงของการพิจารณา $x \in [0.4, 0.9]$ และในช่วงพิจารณา $x \in [0.1, 0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟจะมีแนวโน้มแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t = 0$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.2**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ** $0\ (F(x)=0)$ **เมื่อ** $n=2$

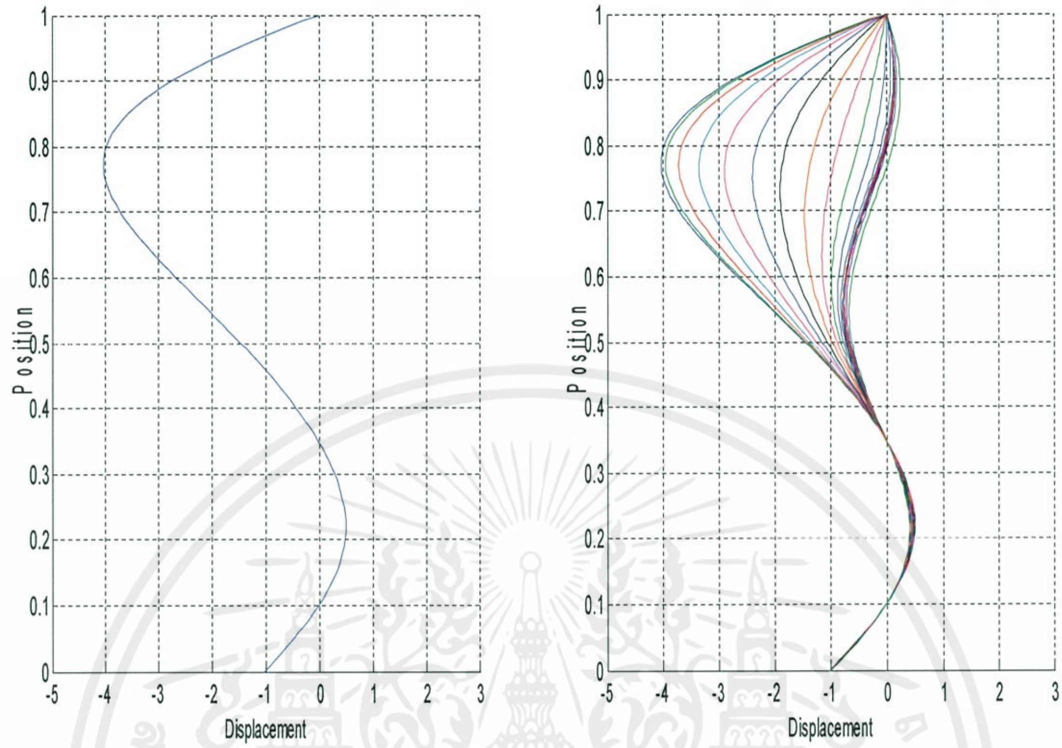


รูปที่ 4.3 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.2 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 0 เมื่อ $n=2$

จากตัวอย่างที่ 4.2 เมื่อเวลา (t) ผ่านไปกราฟของการสั่น มีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง ในช่วงของการพิจารณา $x\in[0.4,0.9]$ และพิจารณา $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟจะมีแนวโน้มของแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่4.3</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ $0 \ (F(x)=0)$ **เมื่อ** $n=3$

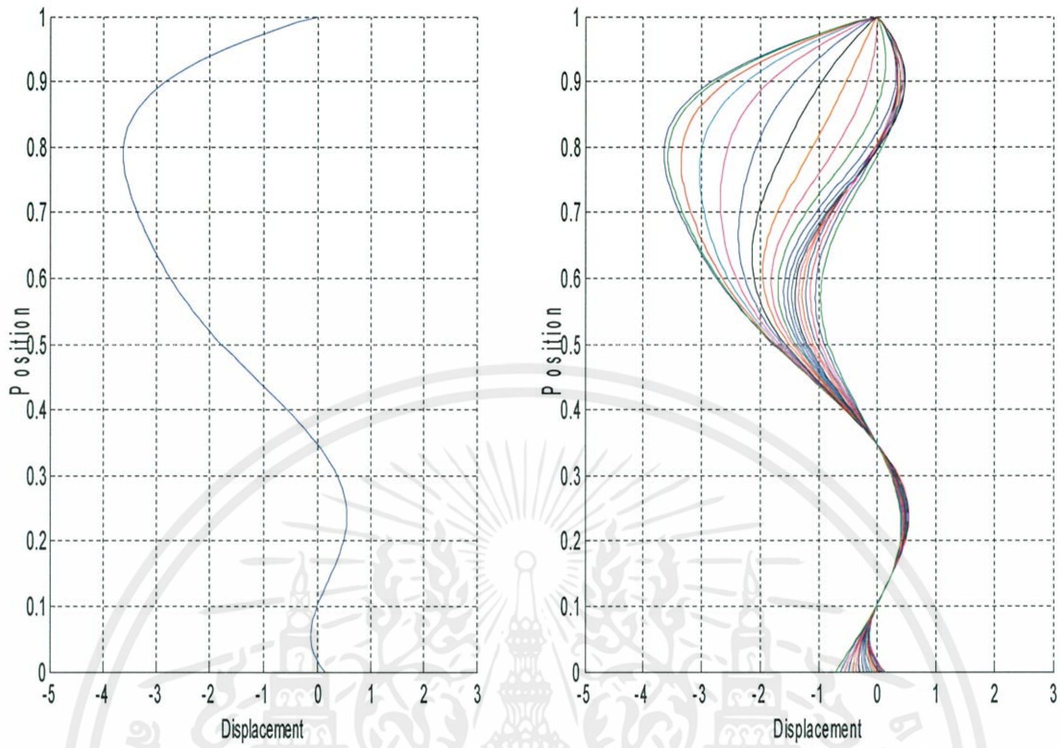


รูปที่ 4.4 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.3 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 0 เมื่อ $n=3$

จากตัวอย่างที่ 4.3 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่น มีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง ในช่วงของการพิจารณา $x\in[0.4,0.9]$ และในช่วงพิจารณา $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟจะมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 4.4</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ $0\ (F(x)=0)$ เมื่อ $n=5$



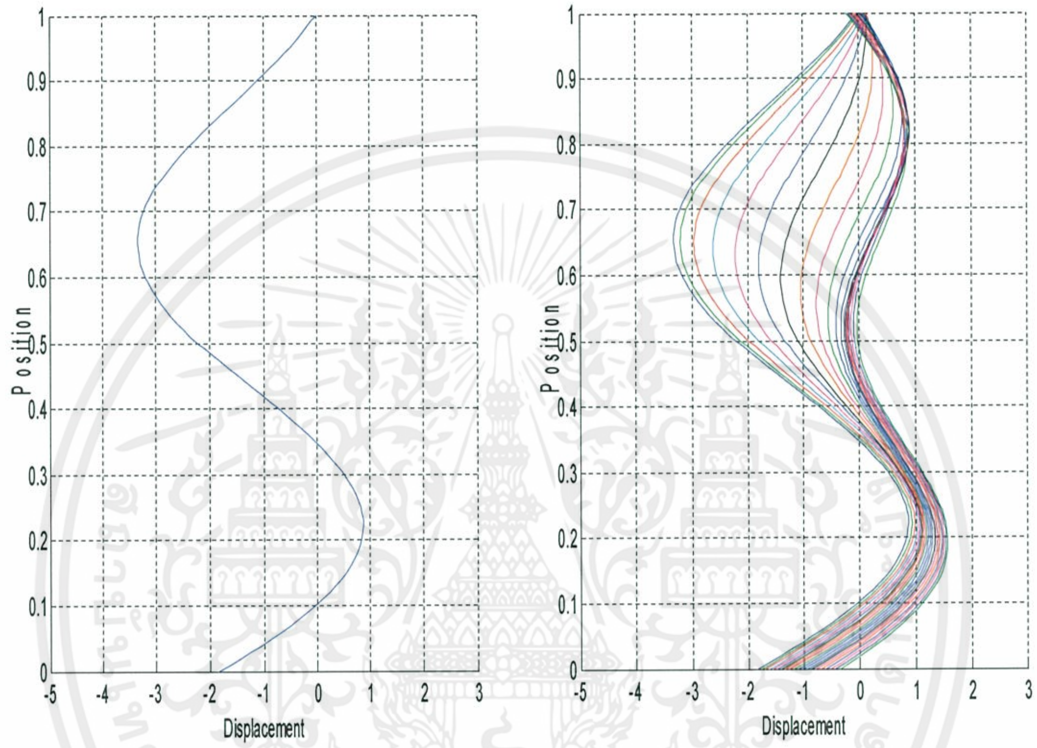
รูปที่ 4.5 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.4 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 0 เมื่อ $n=5$

จากตัวอย่างที่ 4.4 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่น มีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง ในช่วงของการพิจารณา $x\in[0.4,0.9]$ และในช่วงพิจารณา $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟจะมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นเมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นเท่ากับ 1 เมื่อพิจารณาใช้จำนวนพจน์ (n) ของอนุกรมในสมการ (3-19) และ (3-20) เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 4.5</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ 1 $\left(F(x)=1\right)$ เมื่อ $n=1$



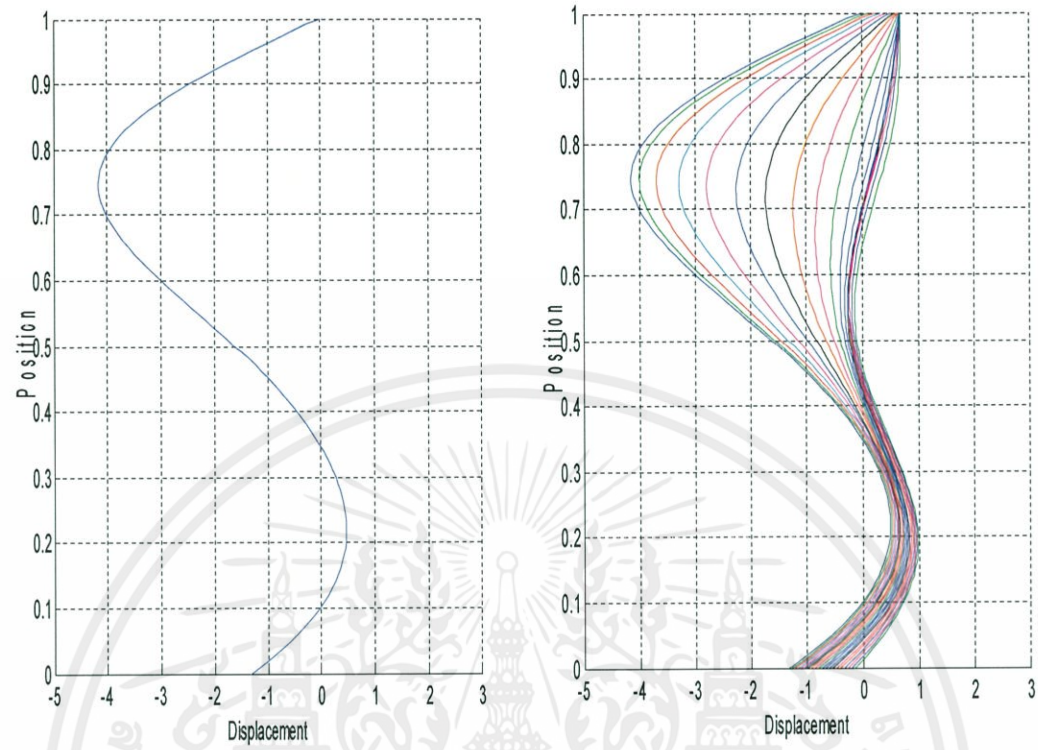
รูปที่ 4.6 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.5 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 1 เมื่อ $n=1$

จากตัวอย่างที่ 4.5 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดเพิ่มขึ้น เมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.1 และตัวอย่างที่ 4.5 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ 1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่ลดลงเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.1

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ ใช้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.6**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ** 1 $\left(F(x)=1\right)$ **เมื่อ** $n=2$



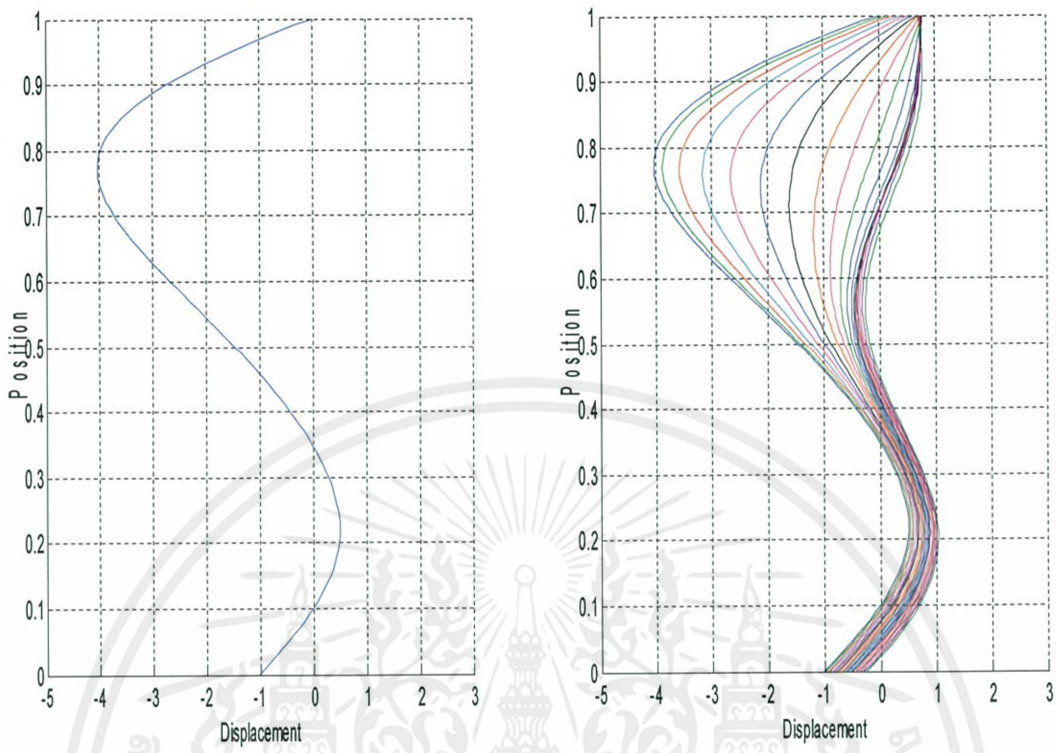
รูปที่ 4.7 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.6 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 1 เมื่อ $n=2$

จากตัวอย่างที่ 4.6 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x \in [0.4, 0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x \in [0.1, 0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.2 และตัวอย่างที่ 4.6 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ 1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่ลดลงเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 4.7</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ 1 $\left(F(x)=1\right)$ เมื่อ $n=3$



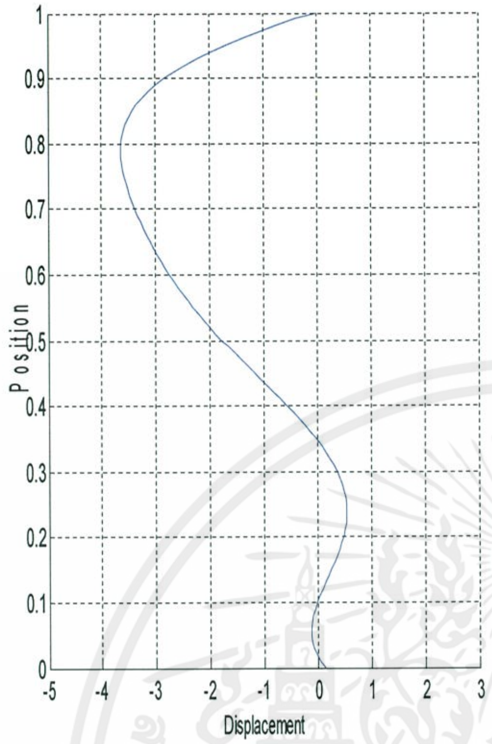
รูปที่ 4.8 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.7 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 1 เมื่อ $n=3$

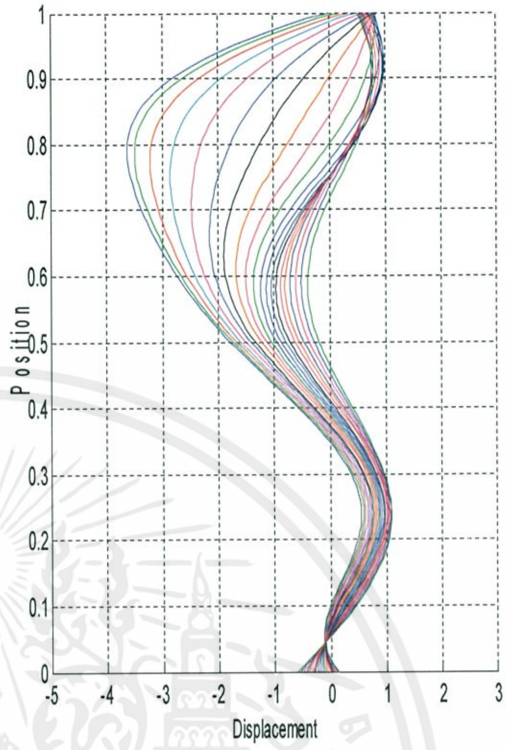
จากตัวอย่างที่ 4.7 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.3 และตัวอย่างที่ 4.7 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ 1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่ลดลงเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 4.8</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ $1\ (F(x)=1)$ **เมื่อ** $n=5$





รูปที่ 4.9 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.8 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ 1 เมื่อ $n=5$

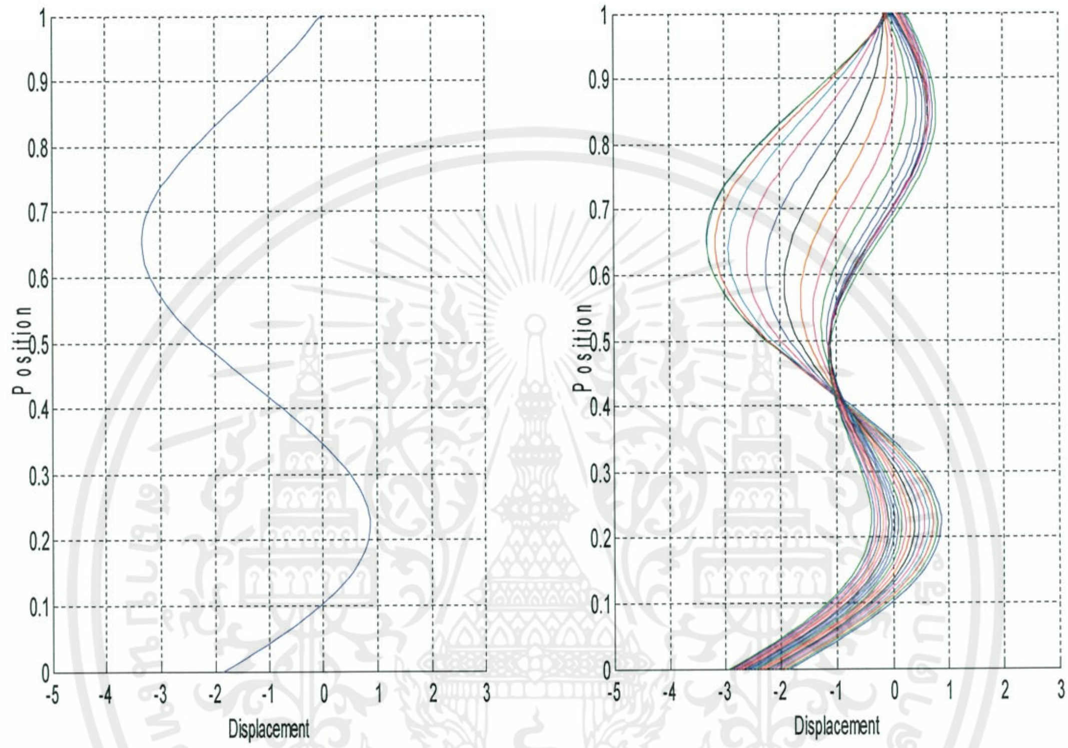
จากตัวอย่างที่ 4.8 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.4 และตัวอย่างที่ 4.8 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ 1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่ลดลงเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นเมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นเท่ากับ -1 เมื่อพิจารณาใช้จำนวนพจน์ (n) ของอนุกรมในสมการ (3-19) และ (3-20) เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 4.9</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ -1 $\left(F(x)=-1\right)$ เมื่อ $n=1$



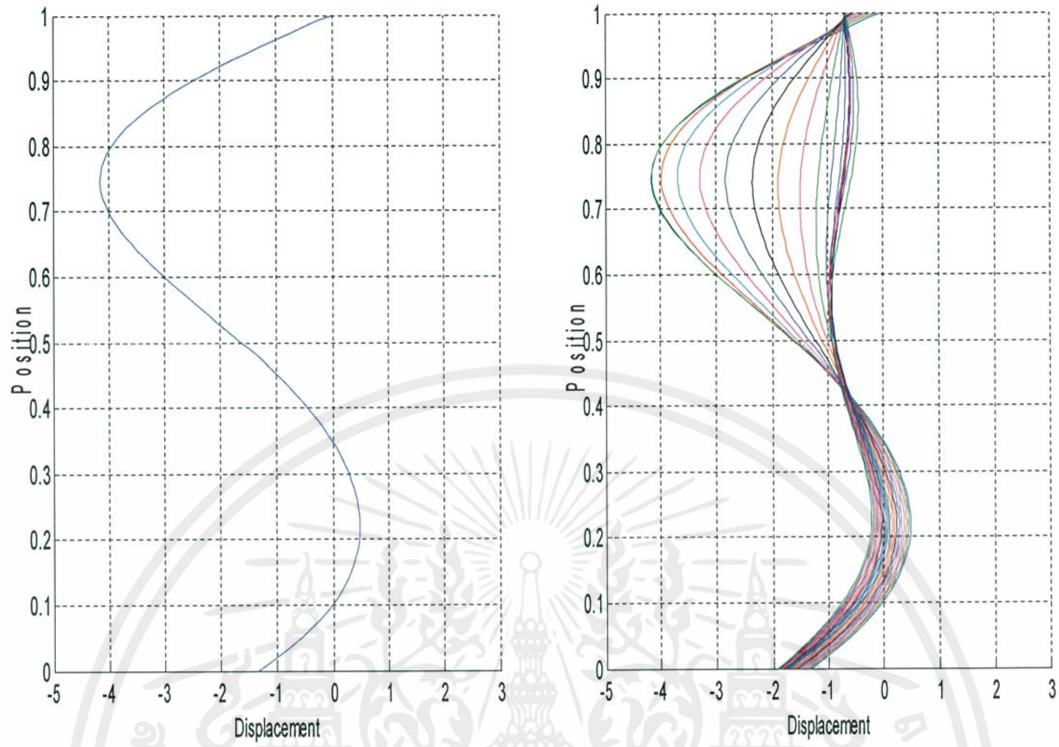
รูปที่ 4.10 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.9 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้น คือ -1 เมื่อ $n=1$

จากตัวอย่างที่ 4.9 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.1 และตัวอย่างที่ 4.9 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ -1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่มอบให้กับสถาบันที่มีการเรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.10**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ** $-1\ (F(x)=-1)$ **เมื่อ** $n=2$



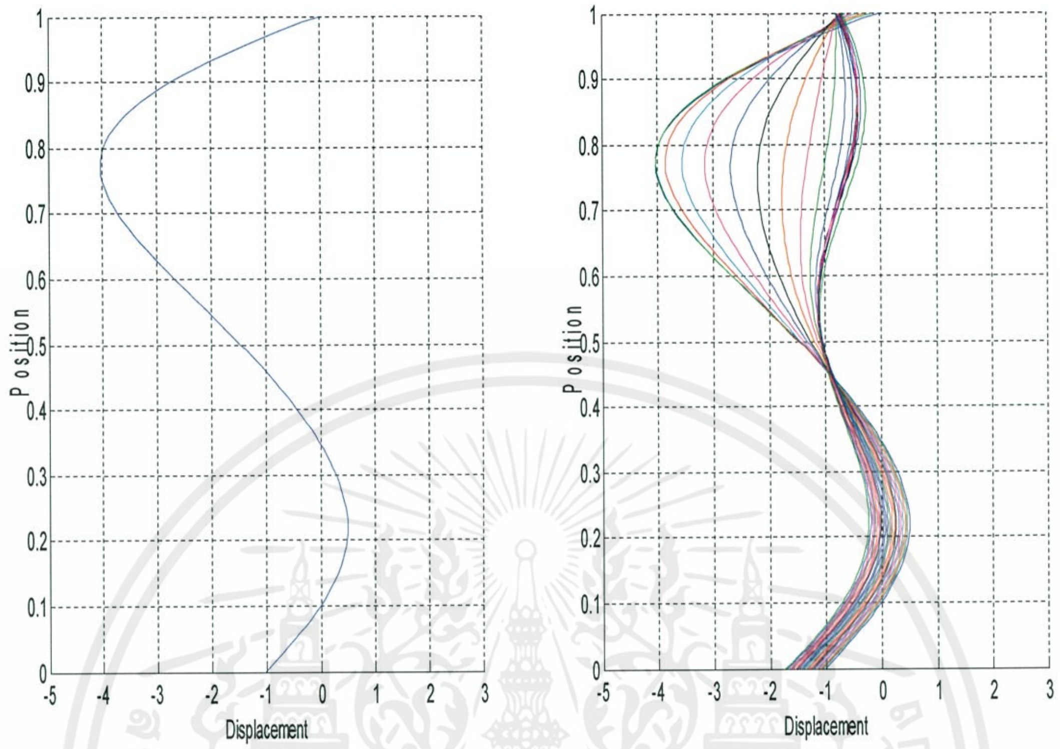
รูปที่ 4.11 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.10 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ -1 เมื่อ $n=2$

จากตัวอย่างที่ 4.10 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.2 และตัวอย่างที่ 4.10 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ -1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.11**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ** $-1\ (F(x)=-1)$ **เมื่อ** $n=3$



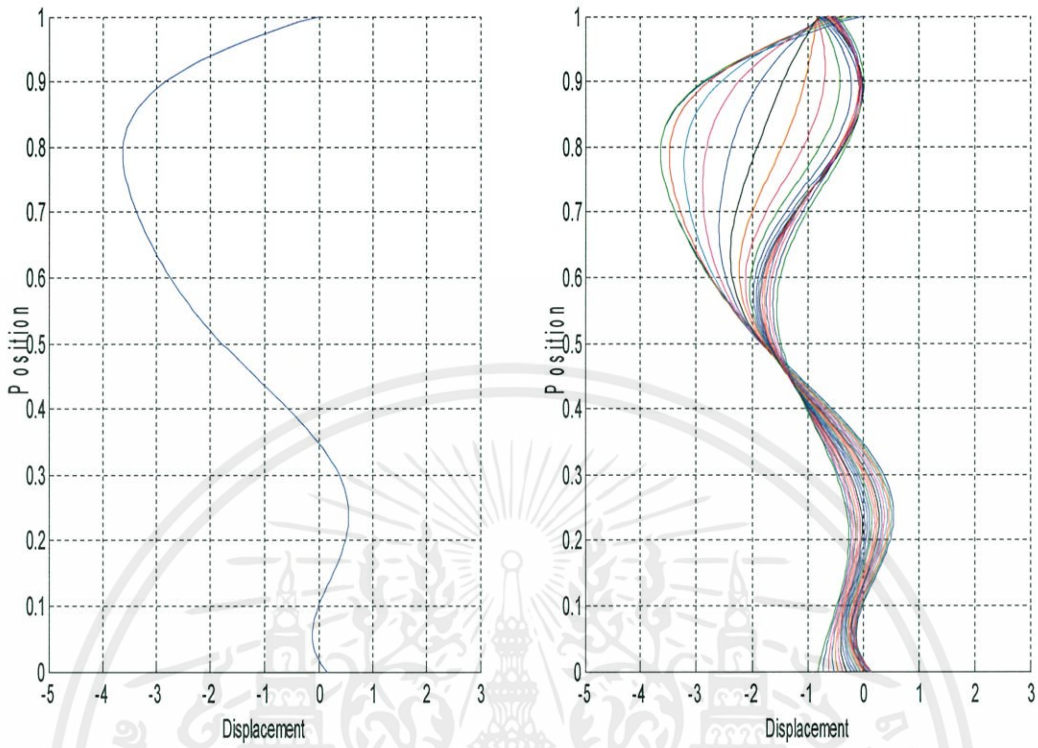
รูปที่ 4.12 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.11 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ -1 เมื่อ $n=3$

จากตัวอย่างที่ 4.11 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.3 และตัวอย่างที่ 4.11 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ -1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.12**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เท่ากับ** $-1\ (F(x)=-1)$ **เมื่อ** $n=5$



รูปที่ 4.13 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.12 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ -1 เมื่อ $n=5$

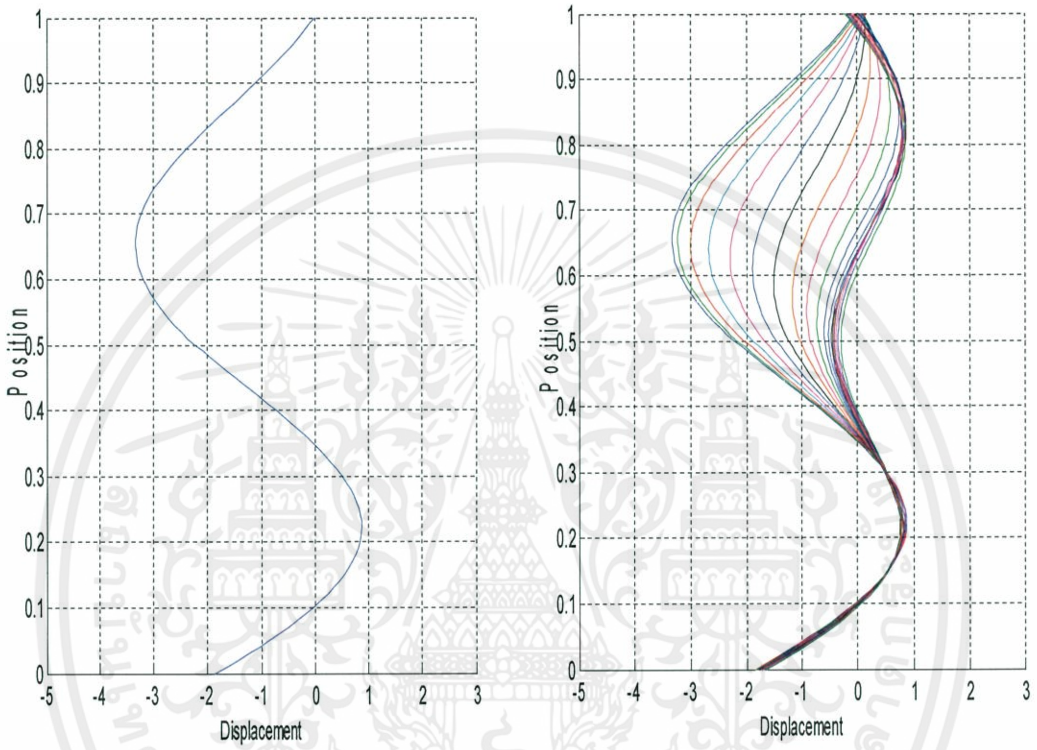
จากตัวอย่างที่ 4.12 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลง เมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.4 และตัวอย่างที่ 4.12 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ -1 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นเมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นเท่ากับ x เมื่อพิจารณาใช้จำนวนพจน์ (n) ของอนุกรมในสมการ (3-19) และ (3-20) เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 4.13</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ x $\left(F(x)=x\right)$ เมื่อ $n=1$



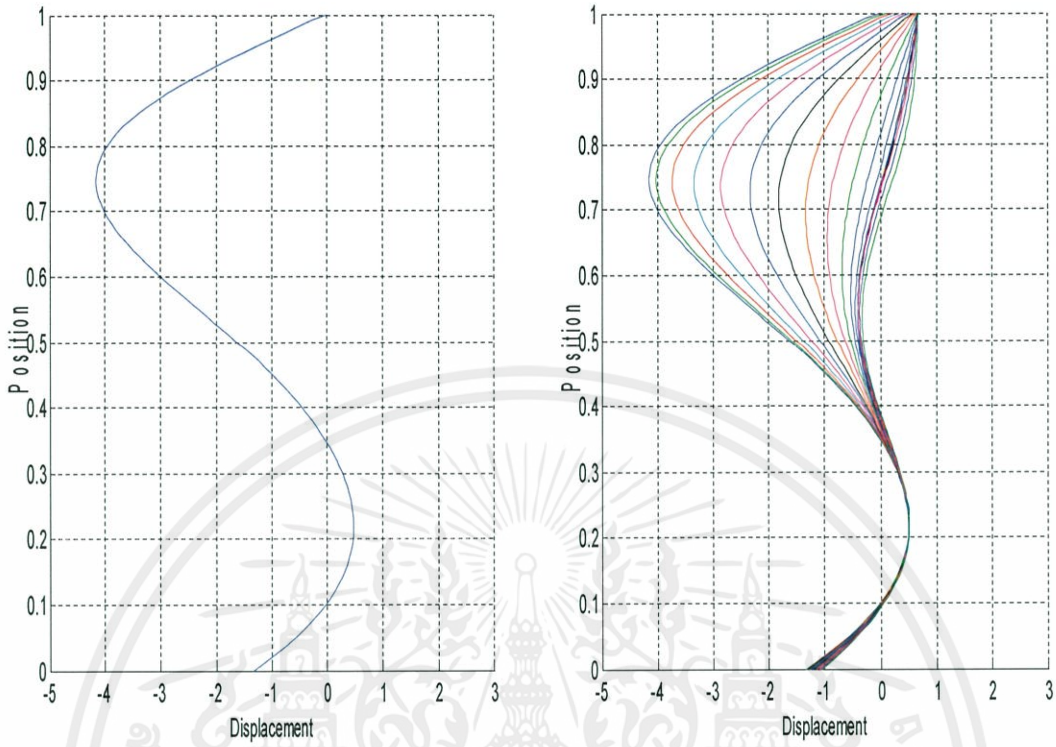
รูปที่ 4.14 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.13 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ x เมื่อ $n=1$

จากตัวอย่างที่ 4.13 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.1 และตัวอย่างที่ 4.13 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ x จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.14**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ x $\left(F(x)=x\right)$ เมื่อ $n=2$**



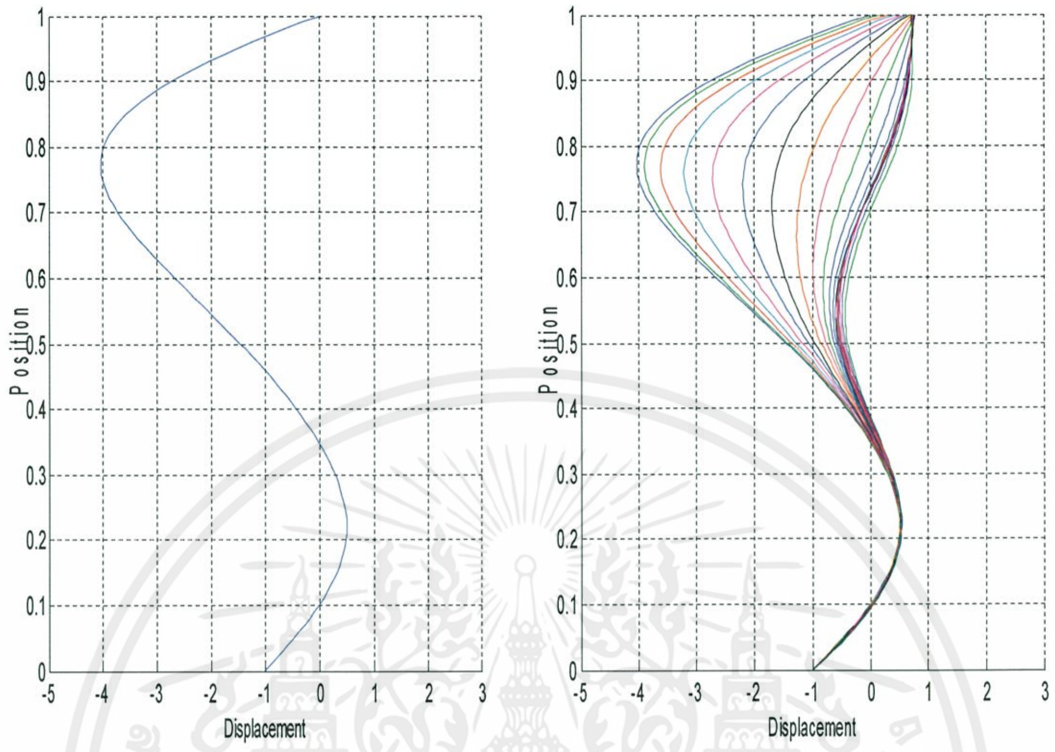
รูปที่ 4.15 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.14 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ x เมื่อ $n=2$

ตัวอย่างที่ 4.14 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.2 และตัวอย่างที่ 4.14 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ x จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

__ตัวอย่างที่ 4.15__ **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ x $\left(F(x)=x\right)$ เมื่อ $n=3$**



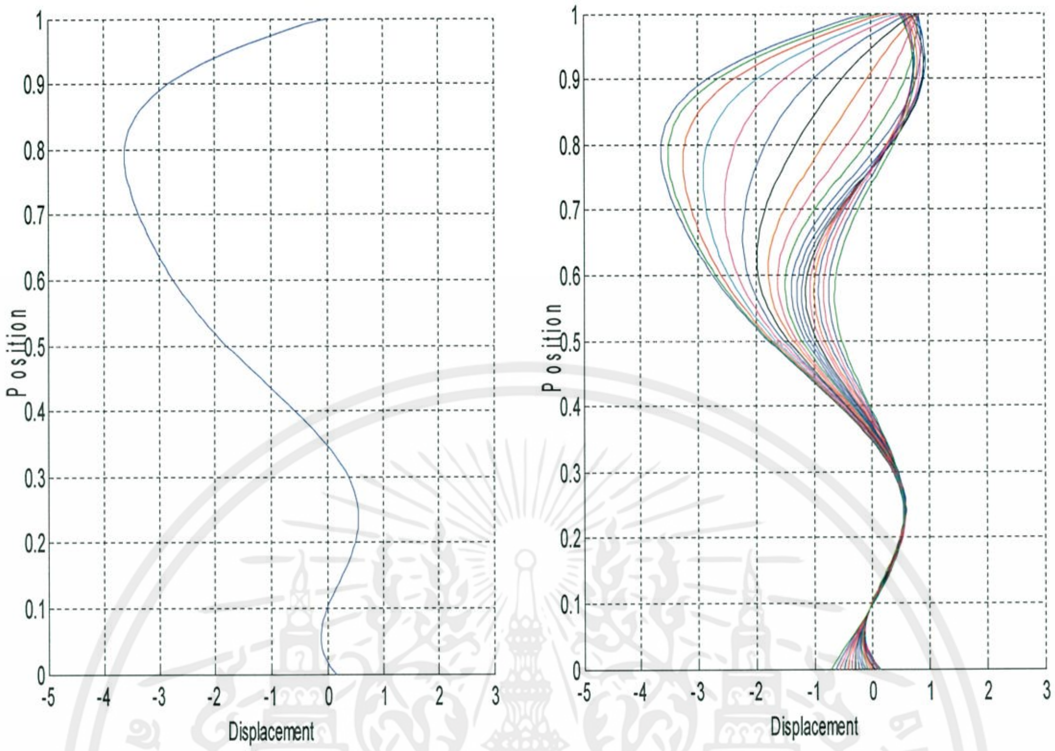
รูปที่ 4.16 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.15 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ x เมื่อ $n=3$

จากตัวอย่างที่ 4.15 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.3 และตัวอย่างที่ 4.15 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ x จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.16**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ** $x \ (F(x)=x)$ **เมื่อ** $n=5$



รูปที่ 4.17 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.16 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ x เมื่อ $n=5$

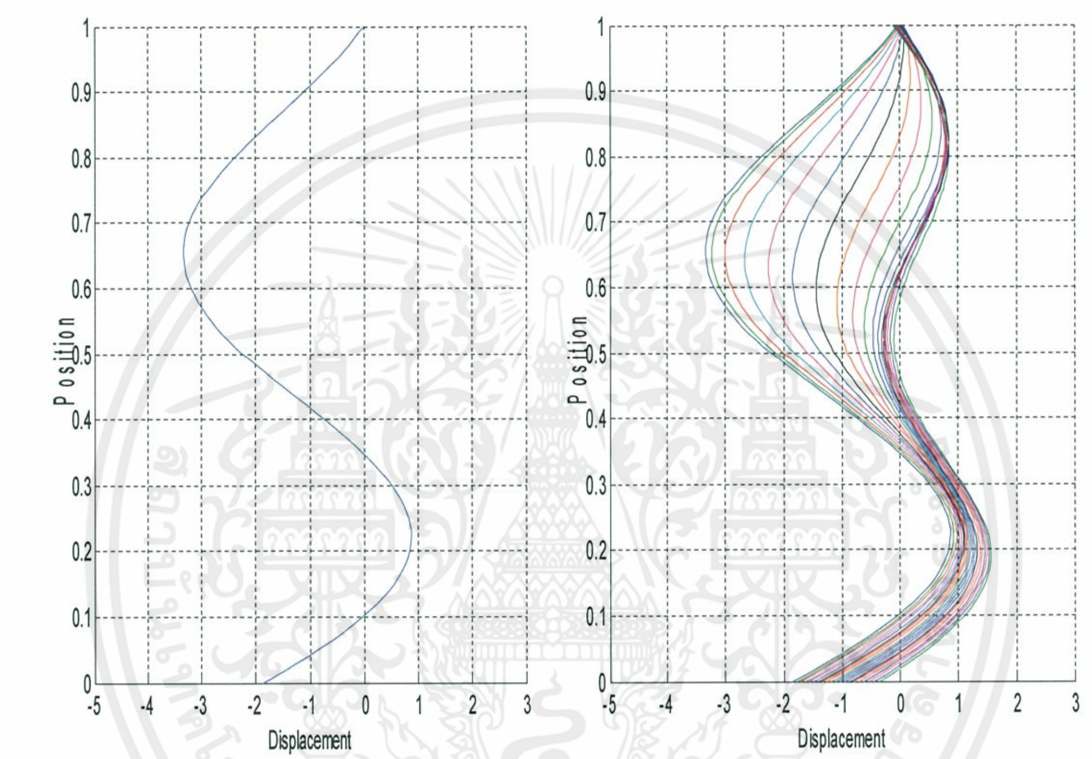
ตัวอย่างที่ 4.16 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.4 และตัวอย่างที่ 4.16 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ x จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.7 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นเมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นเท่ากับ $\cos x$ เมื่อพิจารณาใช้จำนวนพจน์ (n) ของอนุกรมในสมการ (3-19) และ (3-20) เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 4.17</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ $\cos(x)$ $\left(F(x)=\cos(x)\right)$ เมื่อ $n=1$



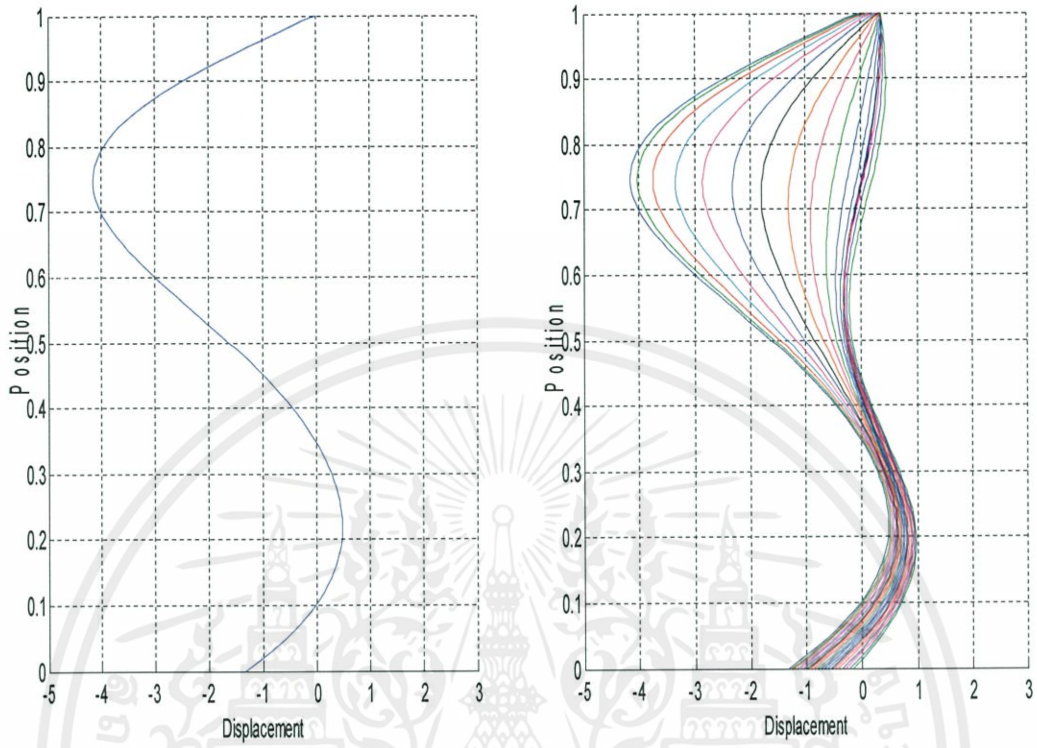
รูปที่ 4.18 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.17 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และ ความเร็วต้นคือ $\cos(x)$ เมื่อ $n=1$

ตัวอย่างที่ 4.17 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.1 และตัวอย่างที่ 4.17 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ $\cos(x)$ จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.1

เอกสารนี้ ... ารค้า
ไม่ว่ากรณี ... งเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 4.18</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ $\cos(x)$ $\left(F(x)=\cos(x)\right)$ **เมื่อ** $n=2$



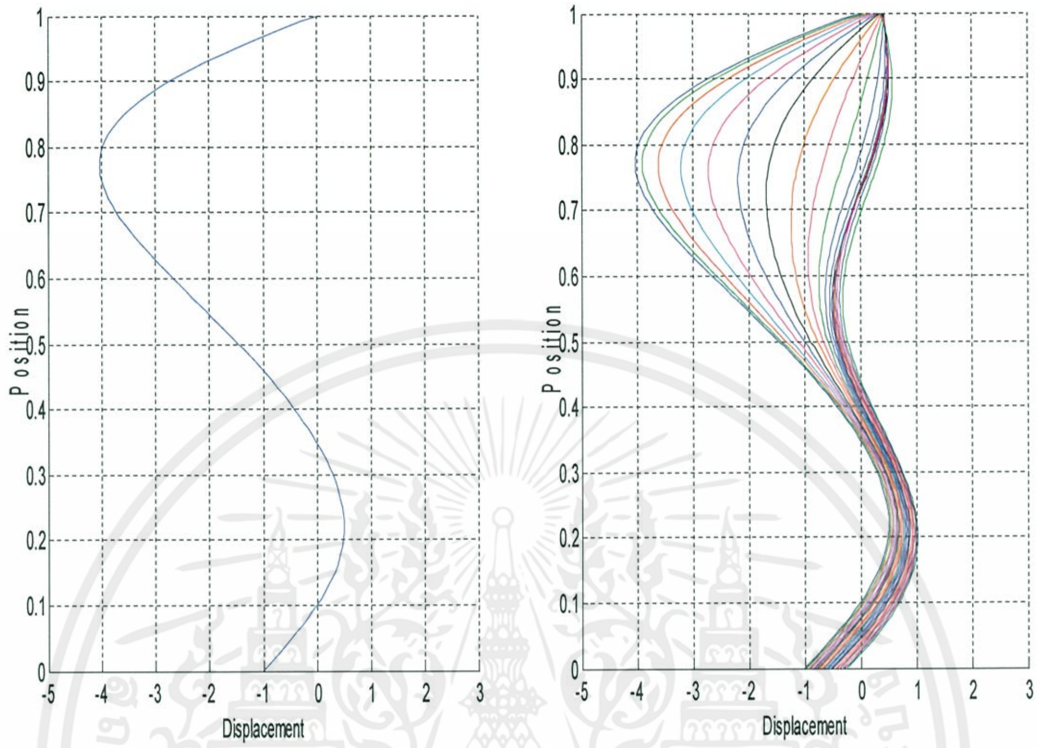
รูปที่ 4.19 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.18 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $\cos(x)$ เมื่อ $n=2$

ตัวอย่างที่ 4.18 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.2 และตัวอย่างที่ 4.18 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ $\cos(x)$ จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.19**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ** $\cos(x)$ $\left(F(x)=\cos(x)\right)$ **เมื่อ** $n=3$



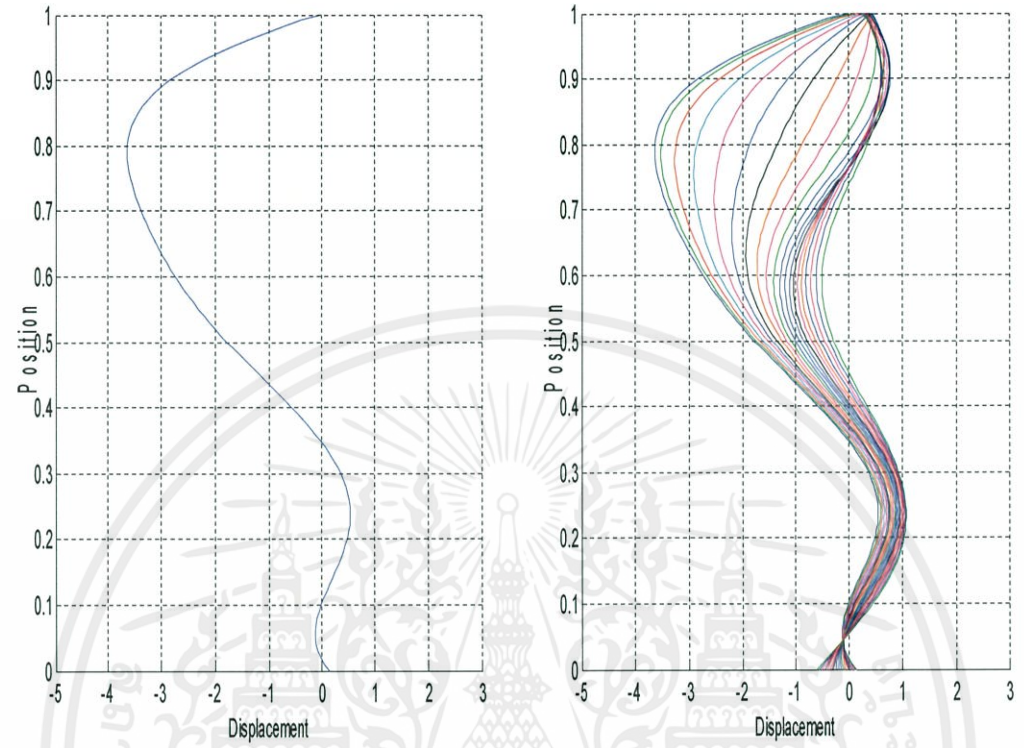
รูปที่ 4.20 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.19 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $\cos(x)$ เมื่อ $n=3$

ตัวอย่างที่ 4.19 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.3 และตัวอย่างที่ 4.19 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ $\cos(x)$ จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.20**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ** $\cos(x)$ $\left(F(x)=\cos(x)\right)$ **เมื่อ** $n=5$



รูปที่ 4.21 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.20 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $\cos(x)$ เมื่อ $n=5$

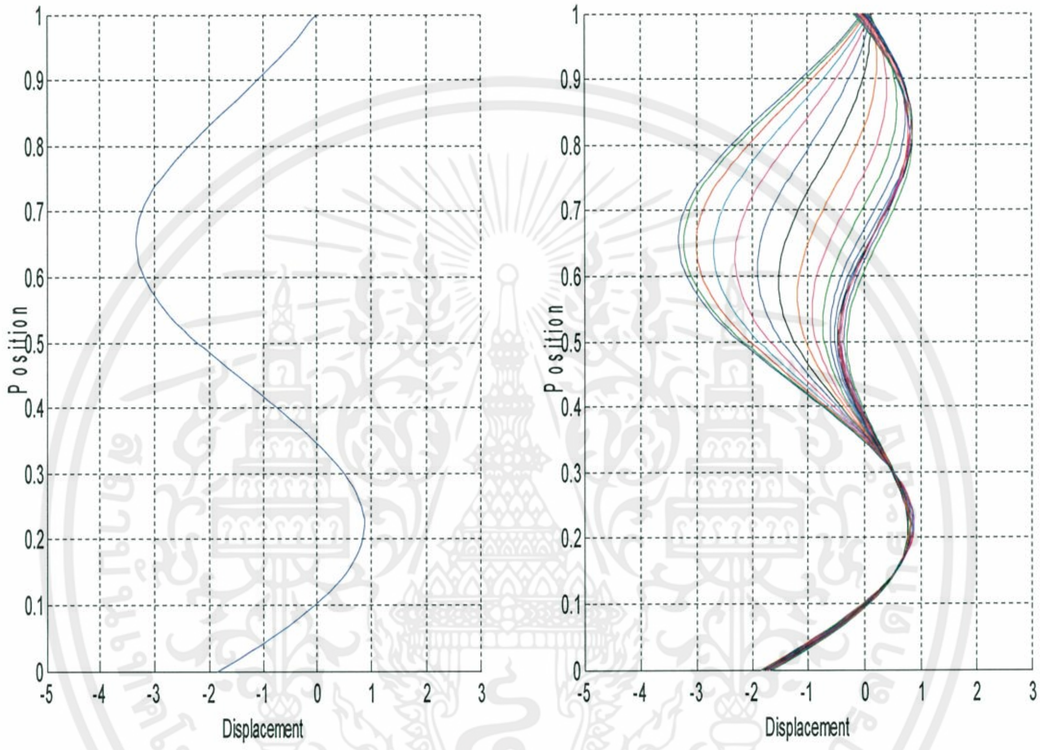
ตัวอย่างที่ 4.20 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.4 และตัวอย่างที่ 4.20 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ $\cos(x)$ จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.8 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นเมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นเท่ากับ $\sin(x)$ เมื่อพิจารณาใช้จำนวนพจน์ (n) ของอนุกรมในสมการ (3-19) และ (3-20) เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 4.21</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ $\sin(x)$ $\left(F(x)=\sin(x)\right)$ เมื่อ $n=1$



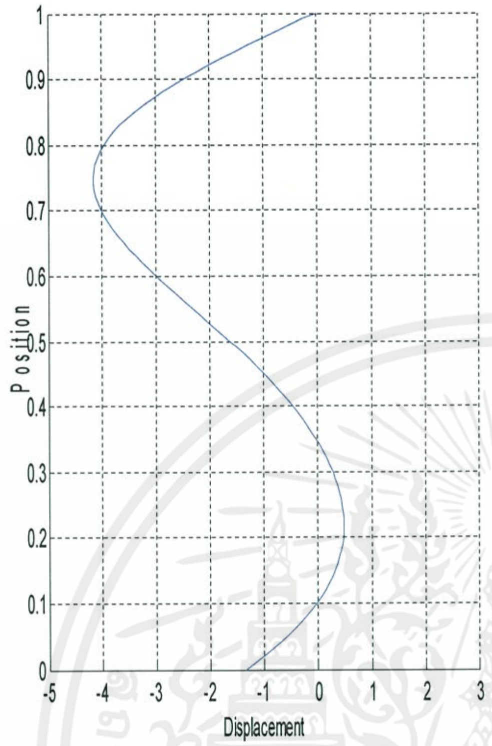
รูปที่ 4.22 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.21 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $\sin(x)$ เมื่อ $n=1$

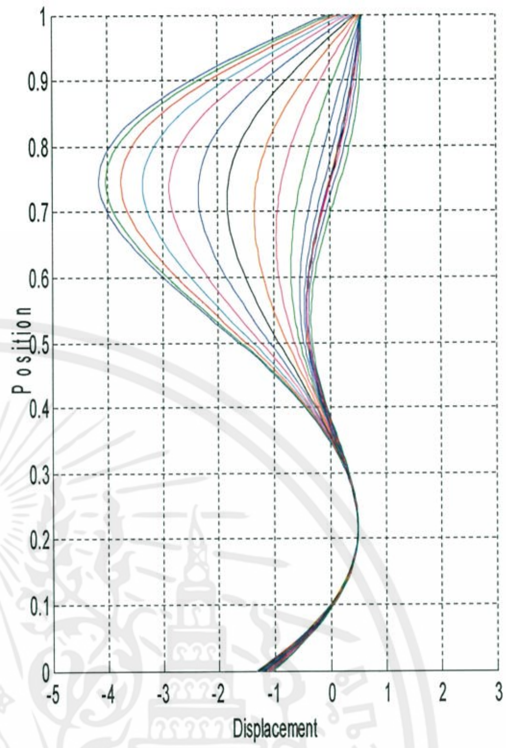
ตัวอย่างที่ 4.21 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลง เมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.1 และตัวอย่างที่ 4.21 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ $\sin(x)$ จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ห้ามมิให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่ 4.22</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ $\sin(x)$ $\left(F(x)=\sin(x)\right)$
เมื่อ $n=2$





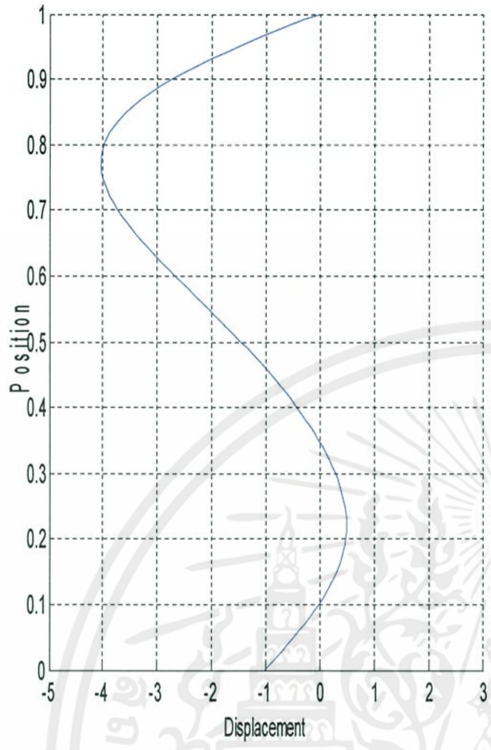
รูปที่ 4.23 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.22 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $\sin(x)$ เมื่อ $n=2$

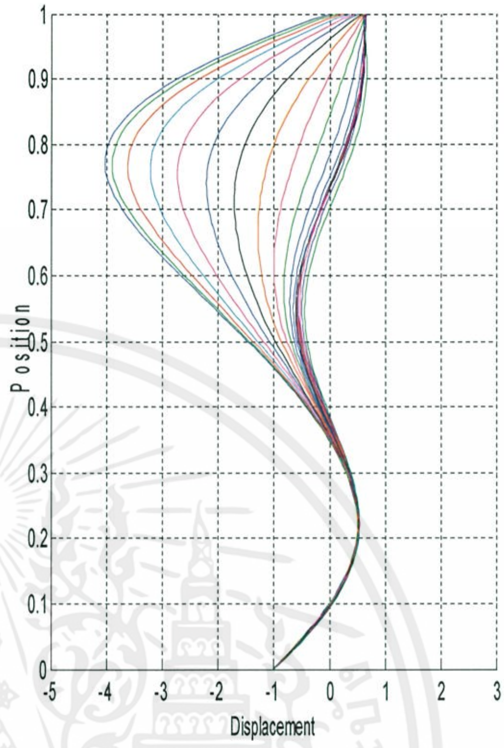
ตัวอย่างที่ 4.22 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.2 และตัวอย่างที่ 4.22 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเป็นค่าคงที่เท่ากับ 8 จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที 4.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ตัวอย่างที่ 4.23**</u> **กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ** $\sin(x)$ $\left(F(x)=\sin(x)\right)$ **เมื่อ** $n=3$





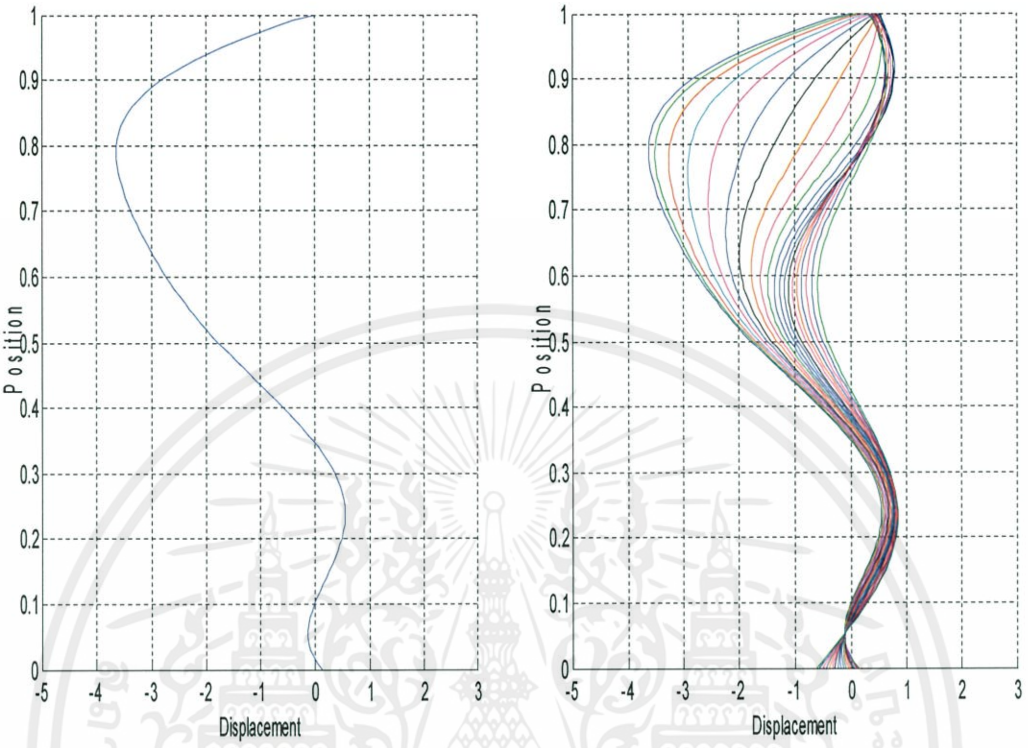
รูปที่ 4.24 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.23 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $\sin(x)$ เมื่อ $n=3$

ตัวอย่างที่ 4.23 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลงเมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.3 และตัวอย่างที่ 4.23 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ $\sin(x)$ จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่4. 24</u> กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ $\sin(x)$ $\left(F(x)=\sin(x)\right)$ **เมื่อ** $n=5$



รูปที่ 4.25 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4.24 เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ และความเร็วต้นคือ $\sin(x)$ เมื่อ $n=5$

ตัวอย่างที่ 4.24 เมื่อเวลา (t) ผ่านไป กราฟของการสั่นในช่วง $x\in[0.4,0.9]$ กราฟมีแนวโน้มของแอมพลิจูดลดลง และในช่วง $x\in[0.1,0.3]$ การสั่นของเส้นกราฟมีแอมพลิจูดลดลง เมื่อเทียบกับเส้นกราฟ ณ เวลา $t=0$

เมื่อเปรียบเทียบตัวอย่าง 4.4 และตัวอย่างที่ 4.24 ที่ตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นถูกกำหนดโดยฟังก์ชัน $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แต่ความเร็วต้นของการสั่นแตกต่างกันจะเห็นว่า เมื่อกำหนดความเร็วต้นให้กับเส้นลวดเท่ากับ $\sin(x)$ จะทำให้ เส้นลวดมีการสั่น โดยมีแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับตัวอย่างที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลวิจัย

ผู้วิจัยได้นำโปรแกรมสำเร็จรูปของปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งที่พัฒนาขึ้นมา โดยกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นเหมือนกัน ให้ความเร็วเริ่มต้นของการสั่นแตกต่างกัน และเลือกใช้จำนวนพจน์ของอนุกรมของฟังก์ชันเบสเซิลที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะสม และสอดคล้องกับตำแหน่งเริ่มต้นที่กำหนดไว้ ซึ่งสรุปผลจากกราฟผลเฉลยในกรณีต่างๆ ได้ดังนี้

1. การวิเคราะห์กราฟจากตัวอย่างในบทที่ 4 ผู้วิจัยได้พบว่า การคำนวณผลเฉลยนั้นจำนวนพจน์ของอนุกรมมีผลต่อค่าผลเฉลยที่จะได้รับ โดยจำนวนพจน์ที่น้อยจะให้ค่าผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดไว้ เมื่อกำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันต่างๆกันแล้ว เมื่อเวลา (t) ผ่านไป การสั่นของกราฟมีเปลี่ยนแปลงของแอมพลิจูดลดลงเป็นแนวโน้มเดียวกัน ทั้ง 4 กรณีที่ $n=1, n=2, n=3$ และ $n=5$

2. เมื่อกำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันต่างๆกันและฟังก์ชันตำแหน่งเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ เหมือนกัน แอมพลิจูดจะมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นแนวโน้มเดียวกันทั้ง 4 กรณีที่ $n=1, n=2, n=3, n=5$ เมื่อเปรียบเทียบกับความเร็วต้นเป็นศูนย์ ดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 ตารางสรุปการเปรียบเทียบค่าแอมพลิจูดของกราฟผลเฉลยที่มีฟังก์ชันความเร็วต้นคือ 0 ภายใต้ตำแหน่งเริ่มต้นเดียวกันคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ กับฟังก์ชันความเร็วต้นที่ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันต่างๆ

ฟังก์ชันความเร็วต้น	จำนวนพจน์ (n)			
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$
1	ลดลง	ลดลง	ลดลง	ลดลง
-1	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น
x	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น
$\cos x$	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น
$\sin x$	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ พิจารณาการเพิ่มขึ้นและลดลงของแอมพลิจูดของกราฟที่แสดง โดยพิจารณาการสั่นในช่วง $x \in [0.4, 0.9]$

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. เนื่องจากผลที่ได้ผู้วิจัยได้ทำการเลือกผลเฉลยที่ใกล้เคียงออกมาแสดง หากต้องการทราบผลเฉลยในกรณีอื่นๆสามารถป้อนค่าข้อมูลพื้นฐานในโปรแกรมตามคู่มือวิธีการใช้โปรแกรมในภาคผนวก ก.

2. เนื่องจาก μ_k ที่ใช้ในปัญหาพิเศษนี้มีความละเอียดอยู่ที่ทศนิยมตำแหน่งที่ 4 และเป็นค่าที่เลือกมาจากค่าที่ทำให้ผลรวมของฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ศูนย์ เข้าใกล้ศูนย์มากที่สุด สามารถนำโปรแกรมไปพัฒนาเพื่อหา μ_k ที่มีความละเอียดมากขึ้นได้ เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่เหมาะสมและใกล้เคียงมากขึ้นได้

3. ปัญหาพิเศษนี้สามารถนำไปพัฒนาและศึกษาต่อสำหรับปัญหาการสั่นในแนวดิ่งภายใต้เงื่อนไขและตำแหน่งเริ่มต้นลักษณะอื่นๆได้

4. งานวิจัยนี้สามารถพัฒนาโดยอาจจะพิจารณาเงื่อนไขเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำให้เส้นลวดเกิดการสั่น

5. จากรูปแบบของสมการการสั่นของงานวิจัยนี้ สามารถทำการหาผลเฉลยด้วยวิธีอื่นเพื่อให้ได้รูปแบบผลเฉลยทั่วไปที่ไม่อยู่ในรูปแบบของอนุกรมอนันต์ได้ และง่ายต่อการหาผลเฉลยแบบแม่นตรง

6. เนื่องจากในกรณีของปัญหาพิเศษนี้ พบว่า จำนวนพจน์ที่มีค่าน้อยๆจะทำให้รูปร่างของกราฟที่เวลา (t) เท่ากับศูนย์ ใกล้เคียงกับตำแหน่งเริ่มต้นที่กำหนดไว้ แต่ในกรณีอื่นจำนวนพจน์ที่มากอาจจะเหมาะสมและทำให้ผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไขและตำแหน่งเริ่มต้นที่ทำการศึกษาได้

7. หากเป็นไปได้ควรมีการทำการทดลองการสั่นของเส้นลวดโดยถ่ายรูปแล้วนำไปทำการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) เพื่อหาสมการที่แทนรูปร่างของเส้นลวด เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] **คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย, ใจปอง เกษมสุวรรณ์ .** 2554. “แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” การประชุมวิชาการ ครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 1486-1491.

[2] **ใจปอง เกษมสุวรรณ์.** 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย 30, 3: 101-111.

[3] **นางสาวนับเดือน สอระสัน ,นายสิทธิชัย มาละเงิน และนางสาวจุฑามาศ แซ่เบ๊.** (2552). *การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการเส้นลวดในแนวดิ่งโดยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง.* ปัญหาพิเศษวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

[4] **ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภาคย์.** (2554). *พื้นฐานแมทแลบ.* พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[5] **ภัคคินี ชิตสกุล.** *เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.*กรุงเทพฯ: แผนกผลิตตำราและสื่อการสอนคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ-ทหารลาดกระบัง

[6] **แมทแลปเบื้องต้น.** (24 ตุลาคม 2555). Available URL : http://teacher.en.rmutt.ac.th/ktw/04-720-101/intro_matlab.html

[7] **สัญฉกร วุฒิสิทธิกุลกิจ.** (2547). *MATLAB การประยุกต์ใช้งานทางวิศวกรรมไฟฟ้า.* กรุงเทพฯ:ด่านสุทธาการพิมพ์

[8] **อรพิน ประวัติบริสุทธิ์.** (2547). *คู่มือเรียนภาษาซี.* พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ:โปรวิชั่น

[9] **J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi**, *Global solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string,* Tokyo Journal of Mathematics 30, No. 2 (2007), 543-556.

[10] **Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit**, *Simulation of Suspended String Equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.

[11] **M. Yamaguchi**, *Almost Periodic Oscillations of Suspended String Under Quasiperiodic Linear Force,* Journal of Mathematical Analysis and Applications **303**, No.2 (2005), 643-660.

[12] **N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov**, *Differential Equations of Mathematical Physics,* Moscow, 1962 (in Russian). English Translation: North-Holland Publ. Co, 1964.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คู่มือการใช้โปรแกรม

ขั้นตอนที่ 1 เปิดไฟล์โปรแกรม Solution.m

ขั้นตอนที่ 2 คลิกปุ่ม Run จะปรากฏ ชื่อโปรแกรมและข้อความเพื่อให้ผู้ใช้ป้อนรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดบนหน้าจอ Command Window ดังรูปที่ ก-1

```
Command Window
  >> Solution
  PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
  SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
fx input Shape Start:
```

รูปที่ ก-1 แสดงผลเมื่อกดปุ่ม Run ในโปรแกรม

ขั้นตอนที่ 3 ให้ผู้ใช้ป้อนรูปร่างเริ่มต้นที่ต้องการ โดยรูปแบบการป้อนคือ

'ฟังก์ชันของรูปร่างเริ่มต้น'

ตัวอย่างเช่น

'$\sin(7*x)-\sin(7)$' หมายถึง ผู้ใช้ต้องการกำหนดให้รูปร่างเริ่มต้นคือ $\sin(7x)-\sin(7)$ แล้วกดปุ่ม Enter

```
Command Window
  >> Solution
  PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
  SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
fx input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
```

รูปที่ ก-2 แสดงการป้อนรูปร่างเริ่มต้น $\sin(7x)-\sin(7)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 4 ให้ผู้ใช้ป้อนช่วงระยะห่างของ x เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าแล้วให้กดปุ่ม Enter

```
Command Window
>> Solution
PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
fx input Interval x: 0.01
```

รูปที่ ก-3 แสดงการป้อนระยะห่างของ $x = 0.01$

ขั้นตอนที่ 5 ให้ผู้ใช้ป้อนช่วงระยะห่างของเวลา t เมื่อผู้ใช้ป้อนค่าแล้วให้กดปุ่ม Enter

```
Command Window
>> Solution
PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
input Interval x: 0.01
fx input Interval t: 0.025
```

รูปที่ ก-4 แสดงการป้อนระยะห่างของเวลา $t = 0.025$

ขั้นตอนที่ 6 ให้ผู้ใช้ป้อนจำนวนเส้นกราฟที่ต้องการคำนวณ เสร็จแล้วให้กดปุ่ม Enter

```
Command Window
>> Solution
PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
input Interval x: 0.01
input Interval t: 0.025
fx input Number of lines to calculate:20
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ ก-5 แสดงการป้อนจำนวนเส้นที่ต้องการให้คำนวณทั้งหมด 20 เส้น

ขั้นตอนที่ 7 ให้ผู้ใช้ป้อนว่าต้องการแสดงผลเฉลยที่ได้เป็นกราฟทุกๆกี่เส้น เช่น ต้องการกราฟจำนวน 20 เส้น ให้แสดงผลทุกๆ 1 เส้น เป็นต้น เสร็จแล้วให้กดปุ่ม Enter

```
Command Window
  >> Solution
  PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
  SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
  input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
  input Interval x: 0.01
  input Interval t: 0.025
  input Number of lines to calculate:20
fx input show line:1
```

รูปที่ ก-6 แสดงการป้อนจำนวนเส้นกราฟโดยต้องการให้แสดงทุกๆ 1 เส้น

ขั้นตอนที่ 8 ให้ผู้ใช้ป้อนจำนวนพจน์ (n) ที่ต้องการใช้ในอนุกรมของฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ศูนย์ เสร็จแล้วกดปุ่ม Enter

```
Command Window
  >> Solution
  PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
  SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
  input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
  input Interval x: 0.01
  input Interval t: 0.025
  input Number of lines to calculate:20
  input show line:1
fx input n term for Jo: 1
```

รูปที่ ก-7 แสดงการป้อนจำนวนพจน์ของฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ศูนย์ ที่ต้องการใช้ในการคำนวณจำนวน 1 พจน์ $(n=1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 9 ให้ผู้ใช้ป้อนจำนวนพจน์ (n) ที่ต้องการใช้ในอนุกรมของฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่ง อันดับที่หนึ่ง เสร็จแล้วกดปุ่ม Enter

```
Command Window
>> Solution
PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
input Interval x: 0.01
input Interval t: 0.025
input Number of lines to calculate:20
input show line:1
input n term for Jo: 1
fx input n term for J1: 1
```

รูปที่ ก-8 แสดงการป้อนจำนวนพจน์ของฟังก์ชันเบสเซิลชนิดที่หนึ่งอันดับที่หนึ่ง ที่ต้องการใช้ในการคำนวณจำนวน 1 พจน์ $(n=1)$

ขั้นตอนที่ 10 ให้ผู้ใช้ป้อนฟังก์ชันความเร็วเริ่มต้น โดยรูปแบบการป้อนคือ

'ฟังก์ชันของความเร็วเริ่มต้น'

ตัวอย่างเช่น

'0' หมายถึง ผู้ใช้ต้องการกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นของการสั่นคือ 0

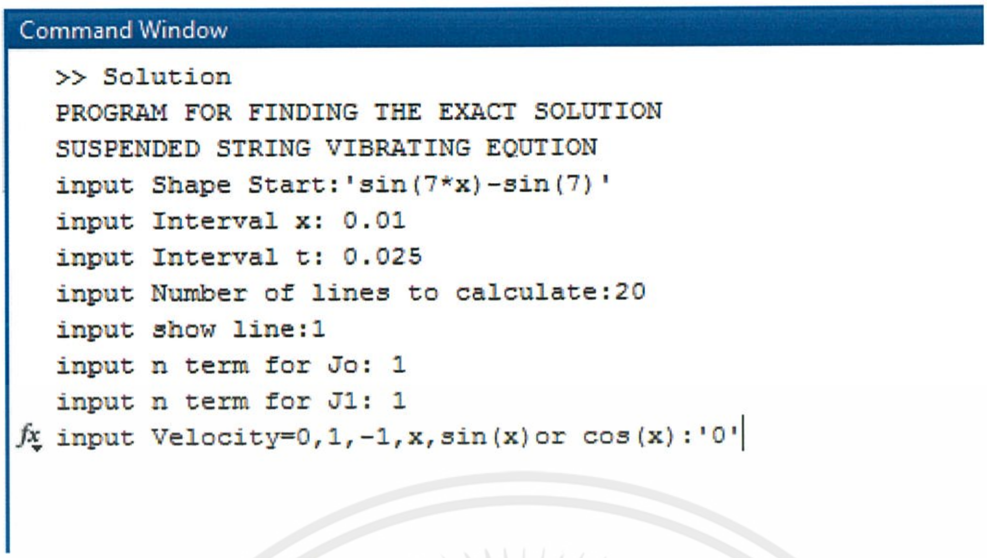
'-1' หมายถึง ผู้ใช้ต้องการกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นของการสั่นคือ -1

'x' หมายถึง ผู้ใช้ต้องการกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นของการสั่นคือ x

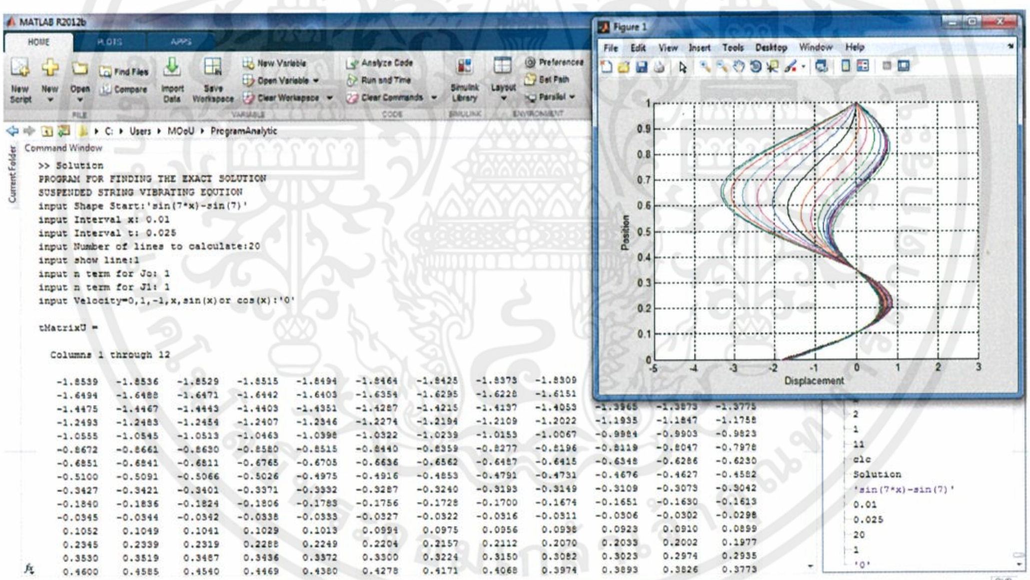
'$\cos(x)$' หมายถึง ผู้ใช้ต้องการกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นของการสั่นคือ $\cos(x)$

'$\sin(x)$' หมายถึง ผู้ใช้ต้องการกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นของการสั่นคือ $\sin(x)$ เป็นต้น เสร็จแล้วกดปุ่ม Enter โปรแกรมจะคำนวณผลเฉลยตามข้อมูลพื้นฐานที่ผู้ใช้ป้อนเข้ามา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



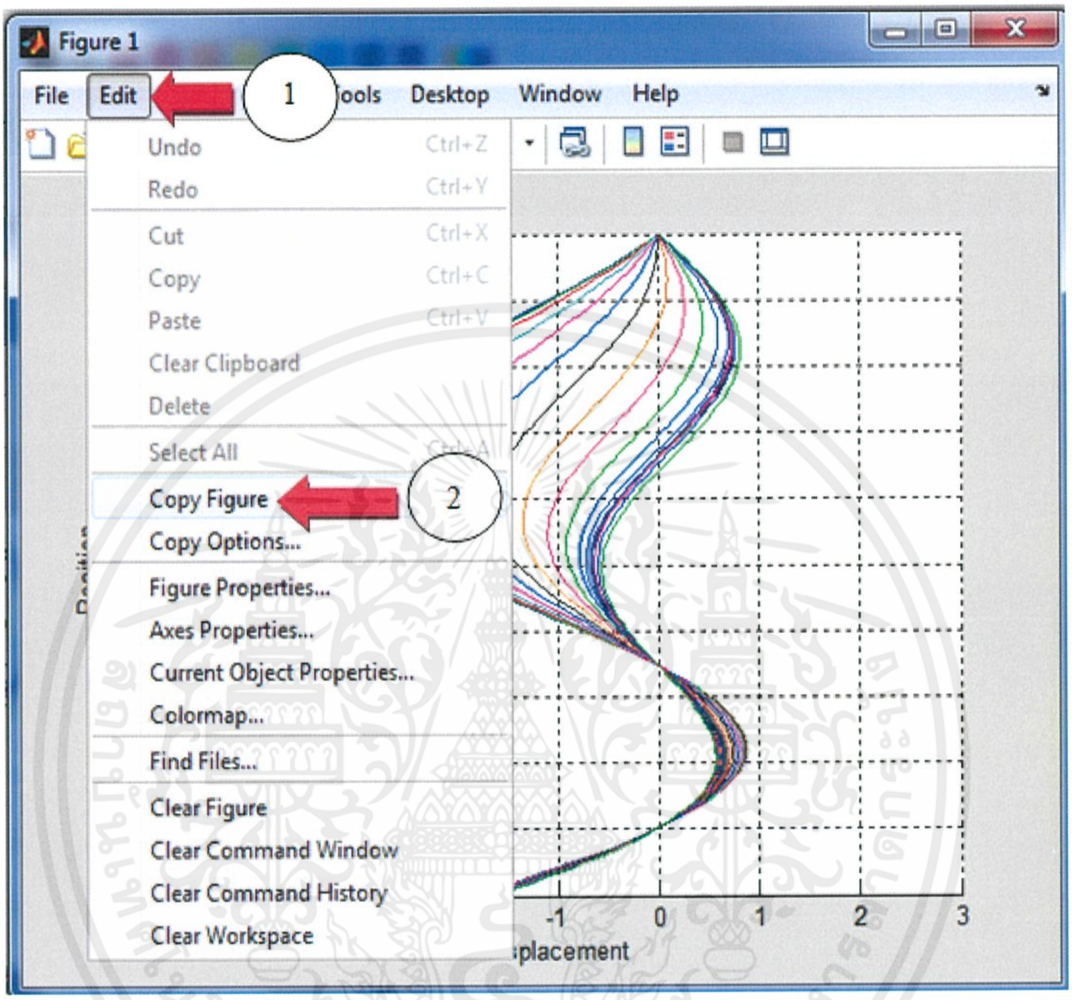
รูปที่ ก-9 แสดงการป้อนความเร็วเริ่มต้นที่ต้องการ คือ 0



รูปที่ ก-10 แสดงผลจากการรันโปรแกรมตามข้อมูลพื้นฐานที่ผู้ใช้ป้อนเข้ามา โดย tMatrixU= คือค่าตำแหน่งของการสั่นของเส้นลวด ณ ตำแหน่ง x ที่เวลา t พร้อมทั้งแสดงผลออกมาในรูปแบบของกราฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

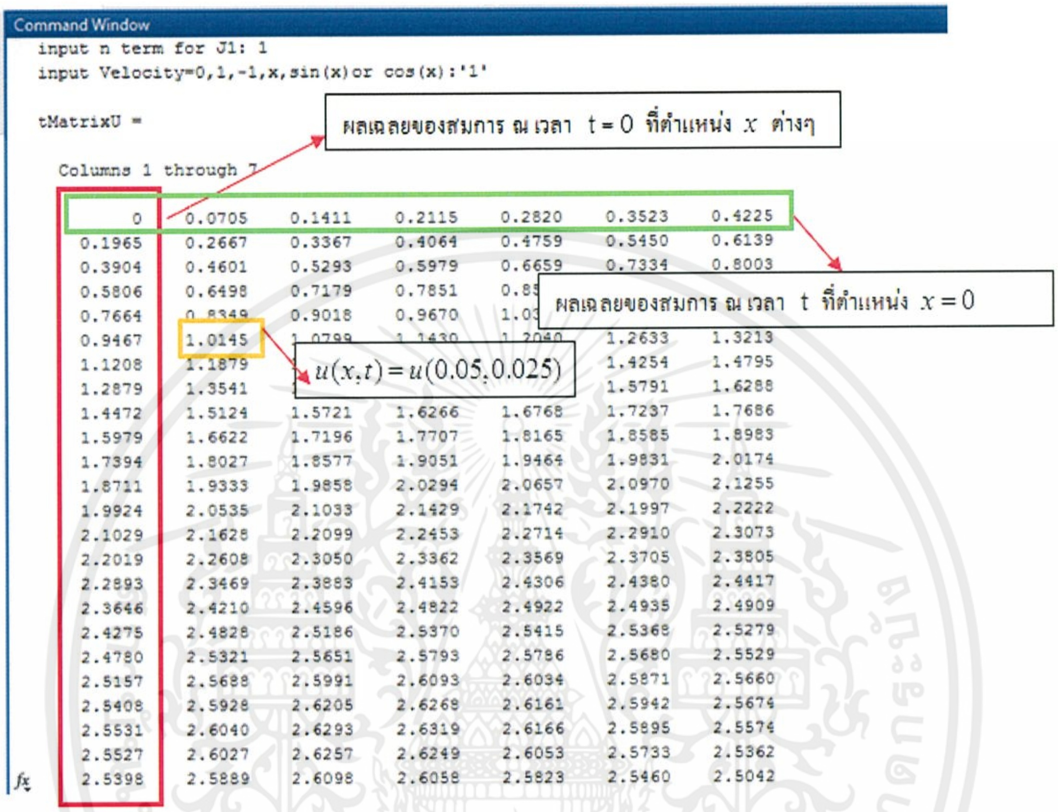
ขั้นตอนที่ 11 หากต้องการนำรูปไปใช้สามารถ คลิกที่ Edit ในหน้าต่างที่แสดงกราฟ แล้วเลือก Copy Figure แล้วกดวางรูปยังตำแหน่งที่ต้องการ



รูปที่ ก-11 แสดงวิธีการนำกราฟผลเฉลยที่แสดงผลไปใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 12 tMatrixU คือเมทริกซ์ที่เก็บผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณจากโปรแกรมทุกๆ เส้นกราฟที่ผู้ใช้ระบุในขั้นตอนที่ 6 โดยผลเฉลยจะแสดงออกมาคือ 1 หลัก หมายถึง ผลเฉลยของสมการ ณ เวลา t และแต่ละแถวหมายถึงตำแหน่ง x


Command Window

```
input n term for J1: 1
input Velocity=0,1,-1,x,sin(x)or cos(x):'1'

tMatrixU =

  Columns 1 through 7
```

0	0.0705	0.1411	0.2115	0.2820	0.3523	0.4225
0.1965	0.2667	0.3367	0.4064	0.4759	0.5450	0.6139
0.3904	0.4601	0.5293	0.5979	0.6659	0.7334	0.8003
0.5806	0.6498	0.7179	0.7851	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.7664	0.8349	0.9018	0.9670	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.9467	1.0145	1.0799	1.1430	1.2040	1.2633	1.3213
1.1208	1.1879	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.4254	1.4795
1.2879	1.3541	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.5791	1.6288
1.4472	1.5124	1.5721	1.6266	1.6768	1.7237	1.7686
1.5979	1.6622	1.7196	1.7707	1.8165	1.8585	1.8983
1.7394	1.8027	1.8577	1.9051	1.9464	1.9831	2.0174
1.8711	1.9333	1.9858	2.0294	2.0657	2.0970	2.1255
1.9924	2.0535	2.1033	2.1429	2.1742	2.1997	2.2222
2.1029	2.1628	2.2099	2.2453	2.2714	2.2910	2.3073
2.2019	2.2608	2.3050	2.3362	2.3569	2.3705	2.3805
2.2893	2.3469	2.3883	2.4153	2.4306	2.4380	2.4417
2.3646	2.4210	2.4596	2.4822	2.4922	2.4935	2.4909
2.4275	2.4828	2.5186	2.5370	2.5415	2.5368	2.5279
2.4780	2.5321	2.5651	2.5793	2.5786	2.5680	2.5529
2.5157	2.5688	2.5991	2.6093	2.6034	2.5871	2.5660
2.5408	2.5928	2.6205	2.6268	2.6161	2.5942	2.5674
2.5531	2.6040	2.6293	2.6319	2.6166	2.5895	2.5574
2.5527	2.6027	2.6257	2.6249	2.6053	2.5733	2.5362
2.5398	2.5889	2.6098	2.6058	2.5823	2.5460	2.5042

รูปที่ ก-12 แสดงคำอธิบายของค่าถูกเก็บไว้ในเมทริกซ์ tMatrixU

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

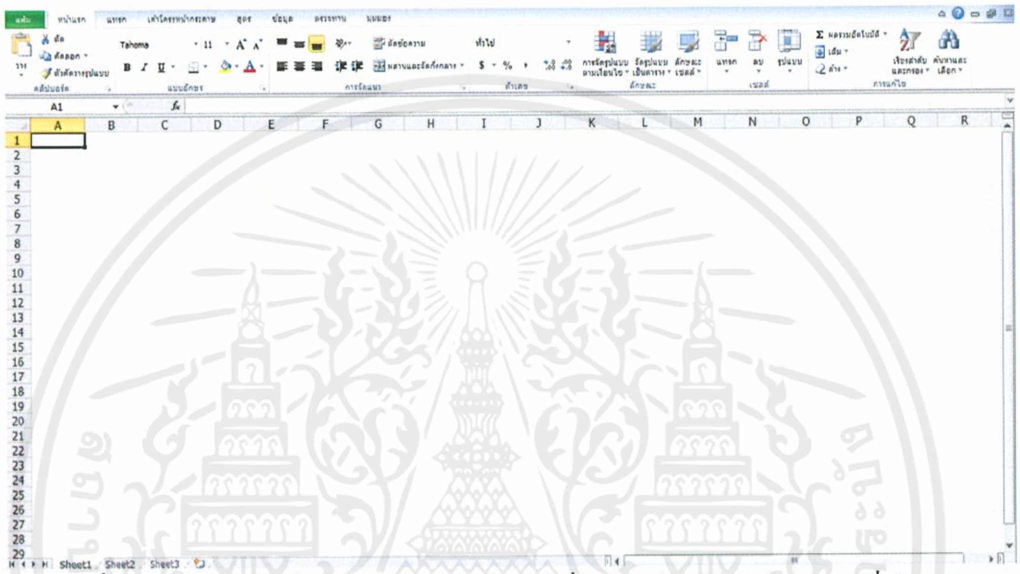
ขั้นตอนที่ 13 หากต้องการทราบผลเฉลยที่คำนวณได้ของแต่ละเส้นกราฟที่แสดงออกมาตามที่ผู้ใช้ระบุในขั้นตอนที่ 7 สามารถทำการคัดลอกผลเฉลยที่แสดงออกมาโดยโปรแกรมได้แสดงข้อความระบุ ไว้ว่า เป็นผลเฉลยของเส้นที่แสดงออกมาเป็นเส้นที่เท่าใด

```
Command Window
  time is 1 have displacement

  ans =

           0
      0.1965
      0.3904
      0.5806
      0.7664
      0.9467
      1.1208
      1.2879
      1.4472
      1.5979
      1.7394
      1.8711
      1.9924
      2.1029
      2.2019
      2.2893
      2.3646
      2.4275
      2.4780
      2.5157
      2.5408
      2.5531
      2.5527
      2.5398
      2.5145
fx    2.4771
```

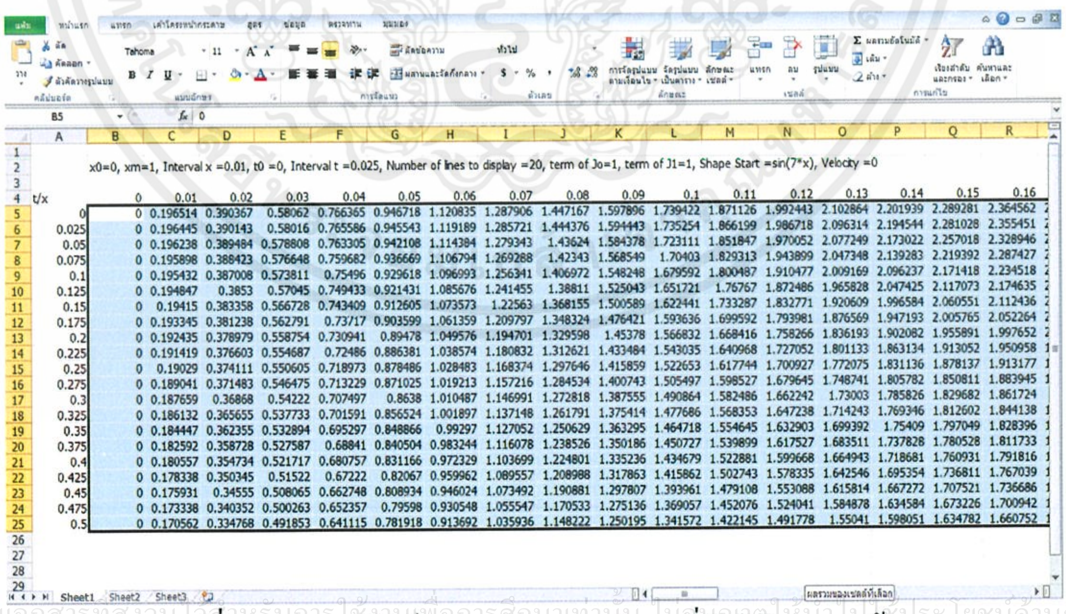
รูปที่ ก-13 แสดงค่าของผลเฉลยของกราฟที่แสดงออกมาเป็นเส้นที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 14 นอกจากนี้ผลเฉลยที่คำนวณได้ทั้งหมดในการรันโปรแกรมแต่ละครั้ง จะถูกส่งไปเก็บไว้ในไฟล์ของ Microsoft Excel ที่ชื่อว่า resultform.xls ซึ่งถูกเก็บไว้ในโฟลเดอร์เดียวกันกับโค้ดโปรแกรม ในการรันโปรแกรมผู้ใช้ควรตรวจสอบไฟล์ resultform.xls ก่อนทุกครั้งว่าเป็นไฟล์ว่างไม่มีข้อมูลในการรันครั้งก่อนหน้าค้างอยู่ ทั้งนี้เพราะการบันทึกข้อมูลจะบันทึกทับไฟล์เดิมอาจทำให้มีเกิดการสับสนในการนำข้อมูลไปใช้ได้



รูปที่ ก-14 แสดงไฟล์ resultform.xls ในขณะที่ในไฟล์ว่างไม่มีข้อมูลเดิมที่ค้างอยู่



x0=0, xm=1, Interval x =0.01, t0 =0, Interval t =0.025, Number of lines to display =20, term of Jo=1, term of J1=1, Shape Start =sin(7*x), Velocity =0

t/x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16
0	0	0.196514	0.390367	0.58062	0.766365	0.946718	1.120835	1.287906	1.447167	1.597896	1.739422	1.871126	1.992443	2.102864	2.201939	2.289281	2.364562
0.025	0	0.196445	0.390143	0.58016	0.765586	0.945543	1.119189	1.285721	1.444376	1.594443	1.735254	1.866199	1.986718	2.096314	2.194544	2.281028	2.355451
0.05	0	0.196238	0.389484	0.578808	0.763305	0.942108	1.114384	1.279343	1.43624	1.584378	1.723111	1.851847	1.970052	2.077249	2.173022	2.257018	2.328946
0.075	0	0.195898	0.388423	0.576648	0.759682	0.936669	1.106794	1.269288	1.42343	1.568549	1.70403	1.829313	1.943899	2.047348	2.139283	2.219392	2.287427
0.1	0	0.195432	0.387008	0.573811	0.75496	0.929618	1.096993	1.256341	1.406972	1.548248	1.679592	1.800487	1.910477	2.009169	2.096237	2.171418	2.234518
0.125	0	0.194847	0.3853	0.57045	0.749433	0.921431	1.085676	1.241455	1.38811	1.525043	1.651721	1.76767	1.872486	1.965828	2.047425	2.117073	2.174635
0.15	0	0.19415	0.383358	0.566728	0.743409	0.912605	1.073573	1.22563	1.368155	1.500589	1.622441	1.733287	1.832771	1.920609	1.996584	2.060551	2.112436
0.175	0	0.193345	0.381238	0.562791	0.73717	0.903599	1.061359	1.209797	1.348324	1.476421	1.593636	1.699592	1.793981	1.876569	1.947193	2.005765	2.052264
0.2	0	0.192435	0.378979	0.558754	0.730941	0.89478	1.049576	1.194701	1.329598	1.45378	1.566832	1.668416	1.758266	1.836193	1.902082	1.955891	1.997652
0.225	0	0.191419	0.376603	0.554687	0.72486	0.886381	1.038574	1.180832	1.312621	1.433484	1.543035	1.640968	1.727052	1.801133	1.863134	1.913052	1.950958
0.25	0	0.19029	0.374111	0.550605	0.718973	0.878486	1.028483	1.168374	1.297646	1.415859	1.522653	1.617744	1.700927	1.772075	1.831136	1.878137	1.913177
0.275	0	0.189041	0.371483	0.546475	0.713229	0.871025	1.019213	1.157216	1.284534	1.400743	1.505497	1.598527	1.679645	1.748741	1.805782	1.850811	1.883945
0.3	0	0.187659	0.36868	0.54222	0.707497	0.8638	1.010487	1.146991	1.272818	1.387555	1.490864	1.582486	1.662242	1.73003	1.785826	1.829682	1.861724
0.325	0	0.186132	0.365655	0.537733	0.701591	0.856524	1.001897	1.137148	1.261791	1.375414	1.477686	1.568353	1.647238	1.714243	1.769346	1.812602	1.844138
0.35	0	0.184447	0.362355	0.532894	0.695297	0.848866	0.99297	1.127052	1.250629	1.363295	1.464718	1.554645	1.632903	1.699392	1.75409	1.797049	1.828396
0.375	0	0.182592	0.358728	0.527587	0.68841	0.840504	0.983244	1.116078	1.238526	1.350186	1.450727	1.539899	1.617527	1.683511	1.737828	1.780528	1.811733
0.4	0	0.180557	0.354734	0.521717	0.680757	0.831166	0.972329	1.103699	1.224801	1.335236	1.434679	1.522881	1.599668	1.664943	1.718681	1.760931	1.791816
0.425	0	0.178338	0.350345	0.51522	0.67222	0.82067	0.959962	1.089557	1.208988	1.317863	1.415862	1.502743	1.578335	1.642546	1.695354	1.736811	1.767039
0.45	0	0.175931	0.34555	0.508065	0.662748	0.808934	0.946024	1.073492	1.190881	1.297807	1.393961	1.479108	1.553088	1.615814	1.667272	1.707521	1.736686
0.475	0	0.173338	0.340352	0.500263	0.652357	0.79598	0.930548	1.055547	1.170533	1.275136	1.369057	1.452076	1.524041	1.584878	1.634584	1.673226	1.700942
0.5	0	0.170562	0.334768	0.491853	0.641115	0.781918	0.913692	1.035936	1.148222	1.250195	1.341572	1.422145	1.491778	1.55041	1.598051	1.634782	1.660752

รูปที่ ก-15 แสดงไฟล์ resultform.xls หลังจากที่รันโปรแกรมแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หากผู้ใช้ต้องการนำข้อมูลไปใช้สามารถคัดลอกข้อมูลในไฟล์ resultform.xls ไปใช้ได้เลย

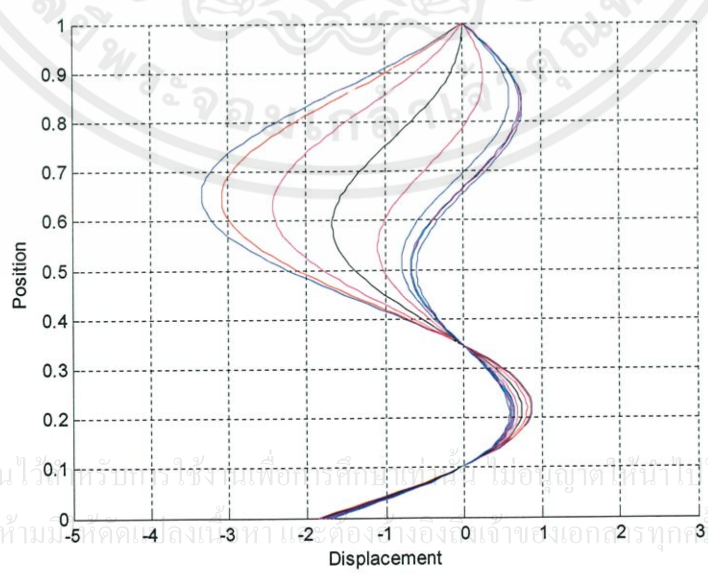
ตัวอย่างที่ 1ก แสดงการป้อนข้อมูลพื้นฐาน คือ ต้องการให้รูปร่างเริ่มต้นเป็น $\sin(7x)-\sin(7)$ ช่วงระยะห่างของ x เท่ากับ 0.01 ช่วงระยะห่าง t เท่ากับ 0.025 วินาที ต้องการคำนวณทั้งหมด 20 เส้น และแสดงผลออกมาทุกๆ 1 เส้น โดยให้ใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเบสเซิลเป็น 1 พจน์ทั้งคู่ และมีความเร็วต้นเป็น 1

Command Window

```
>> Solution
PROGRAM FOR FINDING THE EXACT SOLUTION
SUSPENDED STRING VIBRATING EQUTION
input Shape Start:'sin(7*x)-sin(7)'
input Interval x: 0.01
input Interval t: 0.025
input Number of lines to calculate:20
input show line:1
input n term for Jo: 1
input n term for J1: 1
input Velocity=0,1,-1,x,sin(x)or cos(x):'1'
```

รูปที่ ก-16 แสดงการป้อนข้อมูลตามตัวอย่างที่ 1ก

ตัวอย่างที่ 2ก แสดงกราฟแสดงผลที่ได้จากการป้อนข้อมูลพื้นฐานคือ ต้องการให้รูปร่างเริ่มต้นเป็น $\sin(7x)-\sin(7)$ ช่วงระยะห่างของ x เท่ากับ 0.01 ช่วงระยะห่าง t เท่ากับ 0.025 วินาที ต้องการคำนวณทั้งหมด 20 เส้น และแสดงผลออกมาทุกๆ 2 เส้น โดยให้ใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันเบสเซิลเป็น 1 พจน์ทั้งคู่ และมีความเร็วต้นเป็น 0



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ ก-17 แสดงกราฟผลเฉลยที่ได้จากการป้อนข้อมูลพื้นฐานตามตัวอย่างที่ ก2