ปัญหาการเดินทางของเซอร์เมโล

ZERMELO'S NAVIGATION PROBLEM

สัณหจุฑา ถิรางกูร

สารัตน์ แซ่ช่าย

อารยา เขียวบริสุทธิ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

ปัญหาการเดินทางของเซอร์เมโล

ZERMELO'S NAVIGATION PROBLEM

สัณหจุฑา ถิรางกูร

สารัตน์ แซ่ช่าย

อารยา เขียวบริสุทธิ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2557

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ZERMELO'S NAVIGATION PROBLEM

SUNHAJUTHA TIRANGKOOR

SARAT SAECHAI

ARAYA KHEAWBORISUT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENTS FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2013

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ปัญหาการเดินทางของเซอร์เมโล Zermelo's Navigation Problem		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสัณหจุฑา	ถิรางกูร	54050089
	นายสารัตน์	แซ่ช่าย	54050091
	นางสาวอารยา	เขียวบริสุทธิ์	54050113
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์		
ปีการศึกษา	2557		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.ภัคคินี ชิตสกุล		
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อาจารย์ ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์		

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ประธานกรรมการ	
อ.ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร กรรมการ	
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อ.ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ปัญหาการเดินทางของเซอร์เมโล		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสัณหจุฑา	ถิรางกูร	54050089
	นายสารัตน์	แซ่ช่าย	54050091
	นางสาวอารยา	เขียวบริสุทธิ์	54050113
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.ภัคคินี ชิตสกุล		
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อ.ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์		

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นการศึกษาปัญหาการเดินทางของเซอร์เมโลทางเรือ โดยมีจุดประสงค์จัดทำขึ้นเพื่อคำนวณหาเส้นทางที่มีระยะทางสั้นที่สุดหรือจีออเดซิกเพื่อที่เรือจะใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด โดยงานวิจัยนี้พิจารณาเส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีกระแสลมและมีกระแสลมที่พัดมากระทบกับเรือ จากการวิจัยพบว่าการเดินทางของเรือไปยังจุดหมายโดยไม่มีกระแสลมพัด เส้นทางการเดินเรือที่สั้นที่สุดจะเป็นเส้นตรง ทว่าเมื่อมีกระแสลมพัดตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกา เส้นทางการเดินเรือที่สั้นที่สุดนั้นจึงไม่ใช่เส้นตรงอีกต่อไป แต่จะเปลี่ยนไปเส้นโค้งเอนไปตามกระแสลมในทิศทางนั้นๆ ซึ่งเป็นไปตามหลักความเป็นจริง

คำสำคัญ : จีออเดซิก ปริภูมิยุคลิด ปัญหาการเดินทางของเซอร์เมโล สนามเวกเตอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Problem Title	Zermelo's Navigation Problem	
Students	Ms. Sunhajutha Tirangkoor	54050089
	Mr. Sarat Saechai	54050091
	Ms. Araya Kheawborisut	54050113
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Academic Year	2014	
Advisor	Assoc. Prof. Dr. Pakkinee Chitsakul	
Co-Advisor	Dr. Siripawn H.Winter	

Abstract

In this project, we study Zermelo's navigation problem which deals with how to navigate a boat in order to minimize the total traveling time. The solution can be obtained by working out geodesic curves on a space. Without considering the wind or current, a boat following a straight line will reach the destination in the least possible time. However, this path is not the optimal solution if the wind or current are considered. We show the optimal paths to the destination when the wind direction is both clockwise and counterclockwise.

Keywords: Geodesic, Euclidean Space, Zermelo's navigation problem, Vector field

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง ปัญหาการเดินทางของเชอร์เมโล สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นั้น คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล และ ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษและคณะกรรมการ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือในส่วนของคำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการ ปรับปรุง เปลี่ยนแปลง แก้ปัญหารายละเอียดเนื้อหา รวมทั้งเป็นผู้ช่วยเหลือคณะผู้วิจัยในการช่วยตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่มอบความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้วิจัย มาโดยตลอดการศึกษาเล่าเรียนที่มีส่วนช่วยเหลือให้คณะผู้วิจัยสามารถจัดทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนทางด้านกำลังใจและทุนทรัพย์ รวมทั้งขอขอบคุณ รุ่นพี่รุ่นน้องและเพื่อนๆที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ทั้งด้านกำลังใจและความช่วยเหลือเกี่ยวกับงานวิจัย

นางสาวสัณหจุฑา ถิรางกูร
นายสารัตน์ แซ่ช่าย
นางสาวอารยา เขียวบริสุทธิ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข
กิตติกรรมประกาศ ..... ค
สารบัญ ..... ง
สารบัญรูปภาพ ..... ฉ
สารบัญตาราง ..... ซ

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1
1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ 2
1.3 ขอบเขตของปัญหา 2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน 2
1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน 3

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ปริภูมิเมตริก 4
2.2 ปริภูมิเวกเตอร์ 5
2.3 ผลคูณจุด 6
2.4 เส้น 6
2.5 พื้นผิวในปริภูมิยุคลิด 7
2.6 เส้นโค้งบนพื้นผิวในปริภูมิยุคลิด 7
2.7 จีออเดซิก 8
2.8 การแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ 10
2.9 สนามเวกเตอร์ 12
2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 15

บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1 เส้นทางการเดินเรือขณะไม่มีลม 16
3.2 เส้นทางการเดินเรือขณะมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา 17
3.2 เส้นทางการเดินเรือขณะมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา 22

บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล

4.1 ผลการศึกษาจากสมการ 26
4.2 ผลการศึกษาเมื่อนำสมการมาเขียน 35

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย..... 43

5.2 ข้อเสนอแนะ..... 47

เอกสารอ้างอิง..... 48

ภาคผนวก..... 49

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ 1.1 เส้นทางการเคลื่อนที่ของเรือขณะไม่มีลมพัด 1
รูปที่ 1.2 เส้นทางการเคลื่อนที่ของเรือขณะมีลมพัด 1
รูปที่ 2.1 เส้นตรงบนระนาบ $\mathbb{R}^2$ 7
รูปที่ 2.2 เส้นโค้งเรียบบนระนาบ $\mathbb{R}^2$ 8
รูปที่ 2.3 เส้นโค้งไม่เรียบบนระนาบ $\mathbb{R}^2$ 8
รูปที่ 2.4 จีออเดซิกในทรงกลม 9
รูปที่ 2.5 สนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(v,-u)$ 12
รูปที่ 2.6 สนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(-v,u)$ 12
รูปที่ 2.7 กระแสน้ำในมหาสมุทร 13
รูปที่ 2.8 กระแสลมในมหาสมุทร 13
รูปที่ 4.1 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.1 และ แบบที่ 1 – 4 35
รูปที่ 4.2 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 5 – 8 35
รูปที่ 4.3 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 1 – 4 36
รูปที่ 4.4 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 5 – 8 36
รูปที่ 4.5 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 1 – 4 37
รูปที่ 4.6 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 5 – 8 37
รูปที่ 4.7 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 1 – 4 38
รูปที่ 4.8 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมพัดตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 5 – 8 38
รูปที่ 4.9 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.1 และ แบบที่ 1 – 4 39
รูปที่ 4.10 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.1 และ แบบที่ 5 – 8 39

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.11 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 1 – 4..... 40
รูปที่ 4.12 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 1 – 4..... 40
รูปที่ 4.13 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 1 – 4..... 41
รูปที่ 4.14 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 5 – 8..... 41
รูปที่ 4.15 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 1 – 4..... 42
รูปที่ 4.16 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 5 – 8..... 42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน..... 3
ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงจุดหมายของการเดินเรือในขณะที่ไม่มีลมพัด
ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$..... 17
ตารางที่ 4.1 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา t ใดๆ
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (0,0)$..... 27
ตารางที่ 4.2 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา t ใดๆ
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$..... 28
ตารางที่ 4.3 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา t ใดๆ
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$..... 29
ตารางที่ 4.4 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา t ใดๆ
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$..... 30
ตารางที่ 4.5 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (0,0)$..... 31
ตารางที่ 4.6 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$..... 32
ตารางที่ 4.7 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$..... 33
ตารางที่ 4.8 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$
โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$..... 34
ตารางที่ 5.1 ตำแหน่งต่างของเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วย และไม่มีลมพัดผ่าน..... 44
ตารางที่ 5.2 ตำแหน่งต่างของเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วย
และมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกาพัดผ่าน..... 45
ตารางที่ 5.3 ตำแหน่งต่างของเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วย
และมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกาพัดผ่าน..... 46

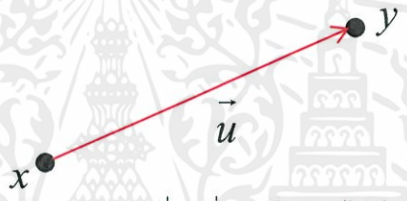
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

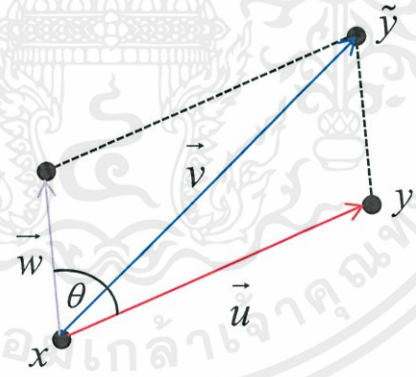
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันการขนส่งสินค้าระหว่างประเทศ มีผลต่อเศรษฐกิจของประเทศ ซึ่งการขนส่งสินค้าสามารถทำได้หลายรูปแบบ อาทิเช่น ทางน้ำ, ทางอากาศ เป็นต้น ดังนั้นหากเราสามารถคำนวณหาเส้นทาง ที่ใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด หรือระยะทางที่สั้นที่สุดได้ ย่อมทำให้การค้าขายมีกำไรมากขึ้นจากการลดต้นทุนค่าขนส่ง

หากเราต้องการบังคับเรือให้เคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังอีกจุดหมาย แน่นอนว่าเส้นทางที่จะใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุดจะเป็นเส้นตรง รูปที่ 1.1 แต่ถ้าหากในระหว่างที่เรากำลังบังคับให้เรือเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงนั้น เกิดมีกระแสลมพัดผ่านมา เรือก็จะไม่แล่นตรงไปยังจุดหมายที่เราต้องการอย่างแน่นอน รูปที่ 1.2 ดังนั้นเราควรจะบังคับเรือไปในทิศทางใด เพื่อที่จะใช้ระยะเวลาน้อยที่สุดในการเคลื่อนที่เรือไปยังจุดหมายที่เราต้องการ ซึ่งนี่ก็คือ ปัญหาการเคลื่อนที่ของเซอร์เมโล



รูปที่ 1.1 เส้นทางการเคลื่อนที่ของเรือขณะไม่มีลมพัด



รูปที่ 1.2 เส้นทางการเคลื่อนที่ของเรือขณะมีลมพัด

คณะผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษา การเคลื่อนที่ของเรือ เมื่อมีลมหมุนพัดผ่านมา จะสามารถหาเส้นทางที่สั้นที่สุดได้หรือไม่ และเส้นทางที่สั้นที่สุดในการเดินเรือจะเป็นอย่างไร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

เพื่อคำนวณหาเส้นทางที่สั้นที่สุด และสมการการเคลื่อนที่ของเรือขณะเกิดลมหมุน

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ศึกษาการเดินทางของเรือเมื่อมีกระแสลมหมุนพัดผ่านมา โดยพิจารณา 2 ทิศทาง คือ กระแสลมหมุนตามเข็มนาฬิกา และทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งศึกษาบนระนาบยุคลิด

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถหาเส้นทางที่มีระยะทางที่สั้นที่สุดในการเดินทาง

1.4.2 เพื่อประหยัดพลังงาน และค่าใช้จ่ายในการขนส่งสินค้า

1.4.3 สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาวงโคจรของดาวเทียม และเส้นทางการบินเป็นต้น

1.4.4 สามารถเป็นแนวทางในการทำงานวิจัยขั้นสูงต่อไป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 ศึกษาค้นคว้าความรู้เกี่ยวกับการหาจีออเดซิกจากตำราเรียน เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย

1.5.2 ศึกษาปัญหาการเคลื่อนที่ของเซอร์เมโล

1.5.3 ศึกษาระยะทางที่เครื่องบินควรจะใช้ในการเดินทาง โดยใช้เวลาน้อยที่สุด เมื่อมีกระแสลมพัดมากระทบกับเครื่องบินในทิศทางต่างๆ

1.5.4 สรุปผลการศึกษา

1.5.5 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ และนำเสนอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน							
	ปี 2557				ปี 2558			
	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาหาข้อมูลและกำหนดหัวข้อโครงงาน								
2. ศึกษาค้นคว้าเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง								
3. ศึกษาและคำนวณหาเส้นทางตามวัตถุประสงค์								
4. สรุปผลการศึกษา								
5. จัดทำรูปเล่มและนำเสนอ								

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปัจจุบันงานวิจัยเรื่องปัญหาการเดินเรือมีไม่มากนักในประเทศไทย ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะทำการศึกษาปัญหาการเดินเรือโดยงานวิจัยนี้มีต้นแบบมาจากเซอร์เมโลซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ที่มีความสนใจด้านการเดินทาง โดยการใช้เรือเหาะ แต่ต่อมาหลังจากการเกิดการระเบิดของเรือเหาะฮินเดนบูร์ก เรือเหาะก็มีบทบาทน้อยลง และเรือก็เข้ามามีบทบาทมากขึ้น ในการเดินทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งโดยไม่คำนึงถึงปัจจัยใดๆนั้น วิถีการเดินทางจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง แต่ในทางด้านความเป็นจริงแล้วในการเดินเรือมีปัจจัยหลายอย่างเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น ทิศทางของลม ทิศทางของกระแสน้ำ และลักษณะทิศทางการเดินเรือ โดยต้องเดินเรืออย่างไรให้เรือไปยังจุดหมายปลายทางที่ต้องการและมีวิถีการเดินเรือที่เหมาะสมที่สุด

2.1 ปริภูมิเมตริก

นิยาม1 กำหนดให้ X เป็นเซตใดๆ ซึ่ง $X \neq \varnothing$ และ d เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $X \times X$ ไปยัง $\mathbb{R}$ หรือ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ แล้ว d จะเรียกว่า เมตริก (metric) บนเซต X ก็ต่อเมื่อ d มีสมบัติดังต่อไปนี้ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$ สมมาตร
4. $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$ อสมการสามเหลี่ยม

จะเรียก (X,d) ว่า ปริภูมิเมตริก (metric space)

ตัวอย่าง1

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ 1 & ; \ x \neq y \end{cases} \quad \text{สำหรับ } x, y \in X \quad \text{เมื่อ } X \text{ เป็นเซตใดๆ ซึ่ง } X \neq \varnothing$$

เรียกว่า เมตริกเต็มหน่วย (Discrete metric)

ตัวอย่าง2

$$d(x,y) = |x - y| \quad \text{สำหรับ } x, y \in \mathbb{R}$$

เรียกว่า เมตริกปกติ (Usual metric) บน $\mathbb{R}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง3

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \text{ สำหรับ } x=(x_1,...,x_n) \quad y=(y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

เรียกว่า เมตริกยุคลิด (Euclidean metric) ใน $\mathbb{R}^n$

2.2 ปริภูมิเวกเตอร์

นิยาม2 กำหนดให้ V เป็นเซตใดๆ ซึ่ง $V \neq \varnothing$ จะเรียก $(V,+,\times)$ ว่า ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) ถ้า V มีการดำเนินการบวก $(+)$ และการคูณ $(\times)$ ด้วยสเกลาร์เป็นไปตามสัจพจน์ต่อไปนี้ สำหรับทุกๆ $u,v,w \in V$ และ $a,b \in \mathbb{R}$

สัจพจน์สำหรับการบวกเวกเตอร์	สัจพจน์สำหรับการคูณด้วยสเกลาร์
1. $u+v \in V$	6. $av \in V$
2. $u+v=v+u$	7. $a(v+w)=av+aw$
3. $u+(v+w)=(u+v)+w$	8. $(a+b)v=av+bv$
4. $\exists 0 \in V$ ซึ่ง $v+0=v=0+v$	9. $a(bv)=(ab)v$
5. $\exists(-v) \in V$ ซึ่ง $-v+v=0$ และ $v+(-v)=0$	10. $1v=v$

นิยาม3 ให้ $(V,+,\times)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ นอร์ม (norm) บน V คือ ฟังก์ชัน $\|\bullet\|:V \to [0,\infty)$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้ สำหรับทุกๆ $u,v \in V$ และ $a \in \mathbb{R}$

1. $\|v\|>0$ เมื่อ $v \neq 0$ หรือ $\|v\|=0$ เมื่อ $v=0$
2. $\|av\|=|a|\,\|v\|$
3. $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$

และจะเรียก $(V,\|\bullet\|)$ ว่าปริภูมินอร์ม (norm space)

ตัวอย่าง4

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} \text{ สำหรับ } x=(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

เรียกว่า นอร์มยุคลิด (Euclidean norm)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 ผลคูณจุด

นิยาม4 ให้ $(V,+,\times)$ เป็นเป็นปริภูมิเวกเตอร์ ผลคูณภายใน(Inner Product) ของ V คือฟังก์ชัน $\langle \bullet,\bullet \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ เมื่อ $u,v \in V$ และ $a,b \in \mathbb{R}$ มีสมบัติดังนี้

1. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$
2. $\langle au+bv,w \rangle = a\langle u,w \rangle + b\langle v,w \rangle$
3. $\langle u,u \rangle > 0$ ถ้า $u \neq 0$ และ $\langle u,u \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u = 0$

นิยาม5 ให้ $u = (u_1,u_2,...,u_n)$ และ $u = (u_1,u_2,...,u_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ผลคูณสเกลาร์(Dot Product) $u \bullet v$ (อ่านว่า " u dot v ") คือ

$$u \bullet v = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$$

ตัวอย่าง5

ก. $\langle 1,-2 \rangle \bullet \langle -6,2 \rangle = (1)(-6)+(-2)(2)$

$= -6-4$

$= -10$

ข. $\left(\frac{1}{2}i+3j\right) \bullet (4i-j) = \left(\frac{1}{2}\right)(4)+(3)(-1)$

$= 2-3$

$= -1$

ทฤษฎี6 ให้ $\bullet$ เป็นผลคูณจุดของระหว่างสองเวกเตอร์ในปริภูมิยุคลิด นิยามโดย $a \bullet b = \|a\|\|b\|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ a กับ b ในปริภูมิยุคลิด และ $\|\bullet\|$ คือ นอร์มยุคลิด

2.4 เส้น

นิยาม7 ให้ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ และ $t \in \mathbb{R}$ จะเรียก $r(t) = (x(t),y(t))$ ว่าสมการพาราเมตริก (parametric equation)ของเส้นโค้ง เมื่อ x,y แปรผันตาม t นั่นคือ t เป็นตัวแปรต้นหรือพารามิเตอร์ของฟังก์ชัน x และ y

ตัวอย่าง6

$r(t) = (t,t)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ เรียกว่า เส้นตรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง7

$r(t)=(t,t^2)$ เมื่อ $t\in\mathbb{R}$ เรียกว่า เส้นโค้งพาราโบลา

ตัวอย่าง8

$r(t)=(\cos t,\sin t)$ เมื่อ $t\in\mathbb{R}$ เรียกว่า เส้นวงกลมรัศมี 1 หน่วย

2.5 พื้นผิวในปริภูมิยุคลิด

นิยาม8 เรียก M ว่าเป็นพื้นผิวในปริภูมิยุคลิด $\mathbb{R}^n$ เมื่อ M นิยามโดย

$$M:S\to\mathbb{R}^n \text{ เมื่อ } S\subset\mathbb{R}^n$$

ตัวอย่าง9

$M:=\{u,v\}\subset\mathbb{R}^2$ สำหรับทุกๆ $(u,v)\subset\mathbb{R}^2$ เรียกว่า ระนาบใน $\mathbb{R}^2$

ตัวอย่าง10

$S^2:=(\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v))\subset\mathbb{R}^3$ สำหรับทุกๆ $(u,v)\subset\mathbb{R}^2$

เรียกว่า ทรงกลม S^2 ใน $\mathbb{R}^2$

2.6 เส้นโค้งบนพื้นผิวในปริภูมิยุคลิด

นิยาม9 เรียก C ว่าเส้นโค้งบนพื้นผิวในปริภูมิยุคลิด $\mathbb{R}^n$ เมื่อ C นิยามโดย

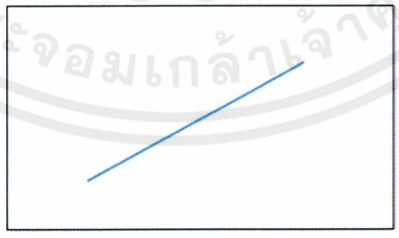
$$C:[a,b]\to\mathbb{R}^n \text{ สำหรับ } [a,b]\subset\mathbb{R}$$

จะเรียก C ว่าเส้นโค้งเรียบก็ต่อเมื่อ C สามารถหาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่าง11

$C(s)=(ps+q,rs+t)$ สำหรับ $s\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ และ $p,q,r,t\in\mathbb{R}$

เรียกว่า เส้นตรงบนระนาบ $\mathbb{R}^2$

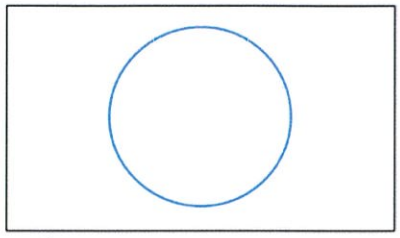


รูปที่ 2.1 เส้นตรงบนระนาบ $\mathbb{R}^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง12

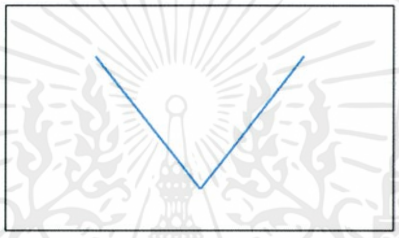
$C(s)=(\cos(s),\sin(s))$ สำหรับ $s\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ เรียกว่า เส้นโค้งเรียบบนระนาบ $\mathbb{R}^2$



รูปที่ 2.2 เส้นโค้งเรียบบนระนาบ $\mathbb{R}^2$

ตัวอย่าง13

$C(s)=(s,|s|)$ สำหรับ $s\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ เนื่องจาก $|s|$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $s=0$ เรียกว่า เส้นโค้งไม่เรียบบนระนาบ $\mathbb{R}^2$



รูปที่ 2.3 เส้นโค้งไม่เรียบบนระนาบ $\mathbb{R}^2$

2.7 จีออเดซิก

นิยาม10 ให้ $S\subset\mathbb{R}^2$ เป็นพื้นผิวที่หาอนุพันธ์ได้ และให้ $\alpha:(a,b)\to S$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว เส้นโค้ง α เป็นจีออเดซิก ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{d\alpha'}{dt}=0 \quad \text{สำหรับทุก } t\in(a,b)$$

หรือ

$$\alpha''(t)=0 \quad \text{สำหรับทุก } t\in(a,b) \qquad (1)$$

นิยาม11 ให้ α เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็ว $\|\alpha'\|^2$ เป็นค่าคงที่บนพื้นผิว และมีสมบัติที่เวกเตอร์สัมผัส (α') ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับปริภูมิหรือพื้นผิว (α'') นั่นคือ

$$\alpha'\bullet\alpha''=0$$

จะเรียกว่า α จีออเดซิก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง14 จงแสดงว่าเส้นตรงบนระนาบเป็นจีออเดซิก

จากสมการ (1) จะได้ว่า จีออเดซิกในระนาบคือเส้น $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ ซึ่ง $\alpha''(t)=0$ สำหรับทุก $t\in(a,b)$

ให้ $ax+by=c$ เป็นสมการที่ให้กราฟเป็นเส้นตรงในระนาบ xy เมื่อ a,b และ c เป็นค่าคงที่ แล้วสามารถจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ โดยให้

$x=mt+p$ เมื่อ m และ p เป็นค่าคงที่ แล้ว $a(mt+p)+by=c$

จะได้ $y=nt+q$ เมื่อ $n=\dfrac{-am}{b}$ และ $q=\dfrac{c-ap}{b}$

ดังนั้น α ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ t ของเส้นตรงในระนาบ คือ $\alpha(t)=(mt+p,nt+q)$ เมื่อ m,n,p และ q เป็นค่าคงที่

โดยการหาอนุพันธ์ของ α ได้ $\alpha'(t)=(m,n)$ และเมื่อหาอนุพันธ์ซ้ำได้ $\alpha''(t)=0$

นั่นคือเส้นตรงเป็นจีออเดซิกในระนาบ

ตัวอย่าง15 จงแสดงว่าวงกลมใหญ่ในทรงกลมเป็นจีออเดซิก

วิธีทำ ให้ a เป็นรัศมีของทรงกลม แล้วสมการของทรงกลมใหญ่เมื่อพิจารณาในระนาบ xy คือ

$$\mathbf{x}(t)=(a\cos t,a\sin t,0)$$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ได้ $\mathbf{x}'(t)=(-a\sin t,a\cos t,0)$

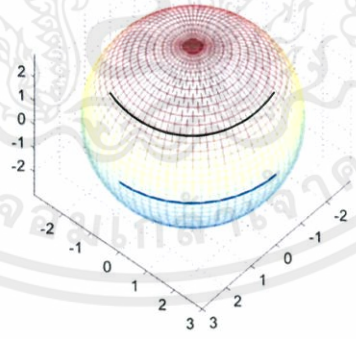
และหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ได้ $\mathbf{x}''(t)=(-a\cos t,-a\sin t,0)$

เนื่องจาก $|\mathbf{x}'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=a\neq 0$

แล้ว $\mathbf{x}(t)$ เป็นจีออเดซิก นอกจากนี้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\mathbf{x}'(t)$ และ $\mathbf{x}''(t)$ คือ

$$\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}''(t)=a^2\cos t\sin t-a^2\sin t\cos t+0=0$$

นั่นคือวงกลมใหญ่ในทรงกลมเป็นจีออเดซิกดังรูป #



รูปที่ 2.4 จีออเดซิกในทรงกลม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.8 การแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์

การแก้ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ปัญหารูปแบบที่หนึ่ง

$$\frac{dx}{dt} = y \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \tag{3}$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0) = x_0 \,,\; y(0) = y_0$$

ขั้นตอนการหาผลเฉลย

หาอนุพันธ์ของสมการ (2) จะได้ $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$ (4)

จาก (3) และ (4) $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$

หรือ $x'' + x = 0$ (5)

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์อันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

โดยจากสมมติ $x = e^{rt}$

ซึ่งหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ $x' = re^{rt}$

และอนุพันธ์อันดับที่สองได้ $x'' = r^2e^{rt}$

แทนค่าลงใน (5) จะได้ $r^2e^{rt} + e^{rt} = 0$

หรือ $r^2 + 1 = 0$ (6)

เรียก (6) ว่าสมการช่วยในการหาผลเฉลยของ (5)

เนื่องจาก $r = \pm i$

จะได้ผลเฉลยของ (5) คือ

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{rt} + c_2e^{rt} \\ &= c_1e^{it} + c_2e^{-it} \\ &= c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\cos(-t) + \sin(-t)) \\ &= c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\cos t - \sin t) \\ &= c_1\cos t + c_1\sin t + c_2\cos t - c_2\sin t \\ &= (c_1 + c_2)\cos t + (c_1 - c_2)\sin t \\ &= a\cos t + b\sin t \;\; ; \; a=c_1 + c_2 \,,\; b=c_1 - c_2 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x(t) = a\cos t + b\sin t \quad (7)$$

โดยการหาอนุพันธ์ของ (7) และจาก (2)

จะได้ $y(t) = -a\cos t + b\sin t$

จากเงื่อนไข $x(0) = x_0$ และ $y(0) = y_0$

จะได้ $x(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a = x_0$

$y(0) = -a\cos 0 + b\sin 0 = b = y_0$

$\therefore\ x(t) = x_0\cos t + y_0\sin t \quad (8)$

$y(t) = -x_0\sin t + y_0\cos t \quad (9)$

จาก (8) และ (9) สามารถเขียนเป็นรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

หรือ $x = Ax_0$

เมื่อ $x = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & \sin t \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ เรียก A ว่าเมทริกซ์ของการหมุน

<u>ปัญหารูปแบบที่สอง</u>

$$\frac{dx}{dt} = -y$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$$

ขั้นตอนการหาผลเฉลย เป็นไปในทำนองเดียวกันกับของระบบสมการในปัญหารูปแบบที่หนึ่ง จะได้ผลเฉลยคือ

$\therefore\ x(t) = x_0\cos t - y_0\sin t \quad (10)$

$y(t) = x_0\sin t + y_0\cos t \quad (11)$

จาก (10) และ (11) สามารถเขียนเป็นรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

หรือ $x = Ax_0$

เมื่อ $x = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ เรียก A ว่าเมทริกซ์ของการหมุน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9 สนามเวกเตอร์

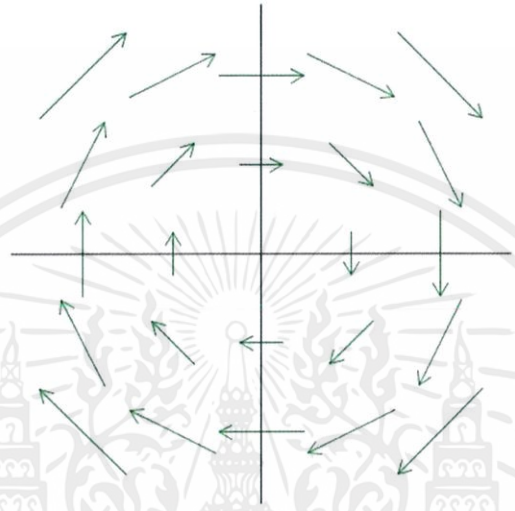
นิยาม12 ให้ $W:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$W(u,v) = P(u,v)\hat{i} + Q(u,v)\hat{j} = (P(u,v), Q(u,v))$$

โดยที่ P และ Q เป็นฟังก์ชันค่าสเกลาร์

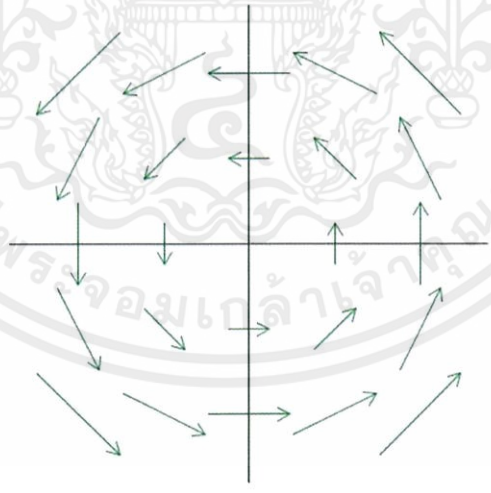
จะเรียกฟังก์ชัน W ว่าเป็นสนามเวกเตอร์ (Vector Field)

ตัวอย่าง16 สนามเวกเตอร์ $W(u,v) = (v,-u)$



รูปที่ 2.5 สนามเวกเตอร์ $W(u,v) = (v,-u)$

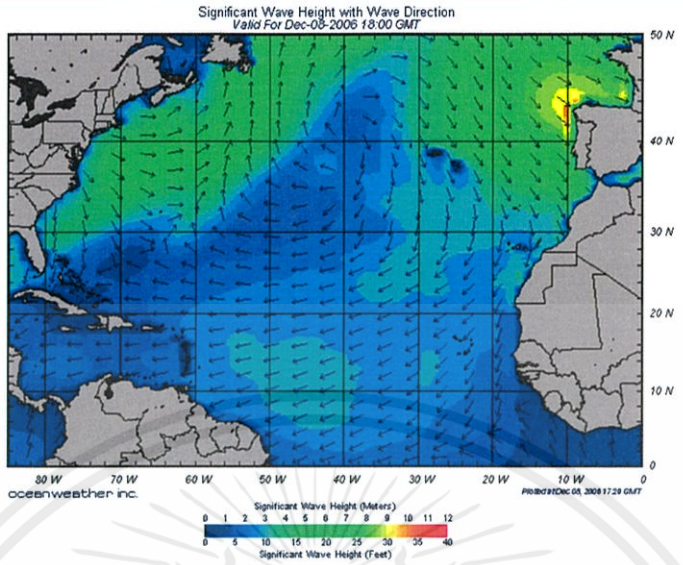
ตัวอย่าง17 สนามเวกเตอร์ $W(u,v) = (-v,u)$



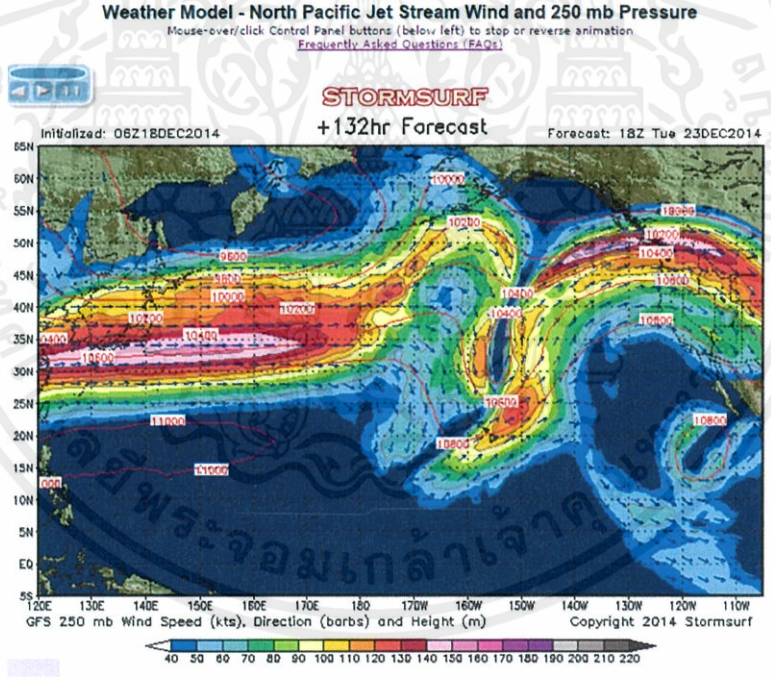
รูปที่ 2.6 สนามเวกเตอร์ $W(u,v) = (-v,u)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งสามารถใช้สนามเวกเตอร์พิจารณาการไหลของกระแสน้ำในมหาสมุทร กระแสลม เป็นต้น



รูปที่ 2.7 กระแสน้ำในมหาสมุทร



รูปที่ 2.8 กระแสลมในมหาสมุทร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม13 ให้ $\varphi(u(t),v(t))$ เป็นการไหลของสนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(W_1,W_2)$ บนระนาบ u,v ใน $\mathbb{R}^2$ นิยามโดย

$$\frac{d\varphi_i}{dt}=W_i \text{ เมื่อ } i=\{1,2\} \ , \ \forall t\in\mathbb{R} \qquad (12)$$

โดยมีเงื่อนไข $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$ และ $\varphi_1=u,\varphi_2=v$

ตัวอย่าง18 $\varphi(u(t),v(t))$ เป็นการไหลของสนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(v,-u)$

จากสมการที่ (12) จะได้

$$\frac{du}{dt}=v \quad \text{และ} \quad \frac{dv}{dt}=-u$$

โดยมีเงื่อนไข $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$

จากการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในปัญหารูปแบบที่หนึ่งสมการที่ (8) และ (9) จะได้ผลเฉลยดังนี้

$$u(t)=u_0\cos t+v_0\sin t$$

และ $$v(t)=-u_0\sin t+v_0\cos t$$

ดังนั้น การไหลของสนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(v,-u)$ คือ

$$\varphi(u(t),v(t))=(u_0\cos t+v_0\sin t,-u_0\sin t+v_0\cos t) \qquad (13)$$

ตัวอย่าง19 $\varphi(u(t),v(t))$ เป็นการไหลของสนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(-v,u)$

จากสมการที่ (11) จะได้

$$\frac{du}{dt}=-v \quad \text{และ} \quad \frac{dv}{dt}=u$$

โดยมีเงื่อนไข $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$

จากการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในปัญหารูปแบบที่สองสมการที่ (10) และ (11) จะได้ผลเฉลยดังนี้

$$u(t)=u_0\cos t-v_0\sin t$$

และ $$v(t)=u_0\sin t+v_0\cos t$$

ดังนั้น การไหลของสนามเวกเตอร์ $W=(-v,u)$ คือ

$$\varphi(u(t),v(t))=(u_0\cos t-v_0\sin t,u_0\sin t+v_0\cos t) \qquad (14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เอิร์นส์ฟรีดริชเฟอร์ดินานด์เซอร์เมโล (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo)เป็นนักตรรกวิทยา นักคณิตศาสตร์ และนักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน มีผลงานวิจัยครั้งแรกในวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในแคลคูลัสหลายตัวแปร วิทยานิพนธ์ปริญญาเอกของเขาในปีค.ศ. 1894 ที่มหาวิทยาลัยเบอร์ลิน ซึ่งได้ขยายความบางส่วนของวิธี Karl Weierstrass ในทฤษฎีของความพอเพียง และยังเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ผลงานมีความสำคัญมากสำหรับพื้นฐานของคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ทำให้เขาเป็นที่รู้จักและยอมรับกัน คือเรื่องของการมีบทบาทในการพัฒนาทฤษฎีเซตเชิงสัจพจน์

ในปี ค.ศ. 1929 งานวิจัยของเขามีความสนใจเกี่ยวกับเส้นทางการเดินทางโดยเรือเหาะ พิจารณาการเดินทางระหว่างจุดสองจุดบนโลกของเรือเหาะหรือเครื่องบินที่อยู่ใต้ความเร็วสัมพัทธ์ในอากาศ เนื่องจากการกระทำของลม ทำให้การเคลื่อนที่ของเรือเหาะเปลี่ยนไป สมมติให้ทิศทางของลมเป็นฟังก์ชันที่มีความสัมพันธ์กับตำแหน่งและเวลา ปัญหาการหาเส้นโคจรของเรือเหาะและการหมุนพวงมาลัยอย่างไรให้สอดคล้องกันและใช้เวลาการเดินทางให้น้อยที่สุด หลังจากที่เกิดระเบิดของเรือเหาะฮินเดนบูร์กของปี 1937 การขนส่งโดยเรือเหาะจึงยุติ ปัญหาการเดินทางจึงถูกแทนที่โดยทางเรือและเครื่องบิน

เซอร์เมโล ได้นำเสนอ ปัญหาการเดินทางทางเรือที่เหมาะสมที่สุด โดยเรือมีจุดเริ่มต้นที่จุด O แล้ว ไปยังจุดหมายปลายทางที่จุด D โดยปัญหาดังกล่าวจะสนใจว่า ทำอย่างไร ให้เรือสามารถเดินทางได้เร็วที่สุด และใช้เวลาให้น้อยที่สุด ซึ่งจะต้องควบคุมให้เรือไปยังจุดหมายที่ถูกต้องในที่นี้คือจุดหมาย D โดยไม่คำนึงถึงปัจจัยภายนอกเช่นการเปลี่ยนแปลงสภาพอากาศและทิศทางลม การควบคุมที่ดีที่สุดคือการปฏิบัติตามส่วนของเส้นตรงจาก O ไป D ซึ่งในความเป็นจริงแล้วจะต้องคำนึงถึงปัจจัยภายนอก ณ เวลานั้นๆเข้ามาพิจารณาร่วมด้วย เช่น กระแสของน้ำที่อาจแปรเปลี่ยนไปตามทิศทางของลม ทำให้เส้นทางที่สั้นที่สุดไม่เป็นส่วนของเส้นตรงจาก O ไป D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
วิธีดำเนินการงานวิจัย

ในปัญหาพิเศษฉบับนี้คณะผู้จัดทำได้ศึกษาปัญหาการเดินทางของเซอร์เมโล ในบทนี้จะกล่าวถึงการคำนวณหาจุดหมายเมื่อไม่มีลมพัดและมีลมพัดผ่าน ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$ ซึ่งในที่นี้จะคำนวณจากสนามเวกเตอร์ของลม 2 แบบ คือ ลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v)=(v,-u)$ และลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v)=(-v,u)$ โดยกำหนดจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) 4 แบบ คือ $(0,0),(\frac{2}{3},0),(0,\frac{2}{3})$ และ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ สามารถแสดงการคำนวณหาจุดหมายได้จากการหาผลเฉลยการไหลของสนามเวกเตอร์

3.1 เส้นทางการเดินเรือขณะไม่มีลมพัด

จากการศึกษาจีออเดซิกในระนาบในบทที่ 2 ตัวอย่าง16 จะได้ว่าเส้นตรงบนระนาบเป็นจีออเดซิก นั่นคือเส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดเป็นเส้นตรง
กำหนดให้เส้นทางการเดินเรือแบบต่างๆ แสดงดังนี้

แบบที่ 1 $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออก

แบบที่ 2 $(u(t),v(t))=(u_0,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศเหนือ

แบบที่ 3 $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตก

แบบที่ 4 $(u(t),v(t))=(u_0,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศใต้

แบบที่ 5 $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

แบบที่ 6 $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงเหนือ

แบบที่ 7 $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงใต้

แบบที่ 8 $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงใต้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงจุดหมายของการเดินเรือในขณะที่ไม่มีลมพัด ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$

แบบที่	จุดเริ่มต้น (u_0, v_0)			
	$(0,0)$	$(\frac{2}{3},0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
1	$(1,0)$	$(\frac{5}{3},0)$	$(1,\frac{2}{3})$	$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$
2	$(0,1)$	$(\frac{2}{3},1)$	$(0,\frac{5}{3})$	$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$
3	$(-1,0)$	$(-\frac{1}{3},0)$	$(0-1,\frac{2}{3})$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
4	$(0,-1)$	$(\frac{2}{3},-1)$	$(0,-\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
5	$(1,1)$	$(\frac{5}{3},1)$	$(1,\frac{5}{3})$	$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$
6	$(-1,1)$	$(-\frac{1}{3},1)$	$(-1,\frac{5}{3})$	$(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$
7	$(-1,-1)$	$(-\frac{1}{3},-1)$	$(-1,-\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
8	$(1,-1)$	$(\frac{5}{3},-1)$	$(1,-\frac{1}{3})$	$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$

3.2 เส้นทางการเดินเรือขณะมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา

ลมหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นสนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(v,-u)$ จากการศึกษาสนามเวกเตอร์ในบทที่ 2 ทำให้ได้ว่าเส้นทางหรือสมการการเคลื่อนที่ของเรือขณะมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกาจะเป็นไปตามสมการที่ (13) นั่นคือ

$$\varphi\big(u(t),v(t)\big)=(u(t)\cos t+v(t)\sin t,-u(t)\sin t+v(t)\cos t)$$ เมื่อ t เป็นเวลาใดๆ

กำหนดให้

<u>แบบที่ 1</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออก สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi\big(u_0+t,v_0\big)=((u_0+t)\cos t+v_0\sin t,-(u_0+t)\sin t+v_0\cos t)$$

พิจารณาที่ $t=1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(0,0)$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1,-\sin 1)=(0.5403,-0.8415)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{5}{3}\cos 1, -\frac{5}{3}\sin 1) = (0.9005, -1.4025)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1 + \frac{2}{3}\sin 1, -\sin 1 + \frac{2}{3}\cos 1) = (1.1013, -0.4813)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{3}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1, -\frac{3}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1) = (1.2312, -0.9921)$

<u>แบบที่ 2</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศเหนือ สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi\big(u(t), v(t)\big) = (u_0 \cos t + (v_0 + t)\sin t, -u_0 \sin t + (v_0 + t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\sin 1, \cos 1) = (0.8415, 0.5403)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{2}{3}\cos 1 + \sin 1, -\frac{2}{3}\sin 1 + \cos 1) = (1.2017, -0.0207)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{5}{3}\sin 1, \frac{5}{3}\cos 1) = (1.4025, 0.9005)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{3}{2}\sin 1, -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{3}{2}\cos 1) = (1.5324, 0.3897)$

<u>แบบที่ 3</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันตก สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi\big(u_0 - t, v_0\big) = ((u_0 - t)\cos t + v_0 \sin t, -(u_0 - t)\sin t + v_0 \cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1, \sin 1) = (-0.5403, 0.8415)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{3}\cos 1, \frac{1}{3}\sin 1) = (-0.1801, 0.2805)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 + \frac{2}{3}\sin 1, \sin 1 + \frac{2}{3}\cos 1) = (0.0207, 1.2017)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1, \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1) = (0.1506, 0.6909)$

<u>แบบที่ 4</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศใต้ สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0, v_0 - t) = (u_0 \cos t + (v_0 - t)\sin t, -u_0 \sin t + (v_0 - t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\sin 1, -\cos 1) = (-0.8415, -0.5403)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{2}{3}\cos 1 - \cos 1, -\frac{2}{3}\sin 1 - \sin 1) = (-0.4813, -1.1013)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{3}\sin 1, -\frac{1}{3}\cos 1) = (-0.2805, -0.1801)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1, -\frac{1}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\cos 1) = (-0.1506, -0.6909)$

<u>แบบที่ 5</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ
สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0 + t, v_0 + t) = ((u_0 + t)\cos t + (v_0 + t)\sin t, -(u_0 + t)\sin t + (v_0 + t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1 + \sin 1, -\sin 1 + \cos 1) = (1.3818, -0.3012)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{5}{3}\cos 1 + \sin 1, -\frac{5}{3}\sin 1 + \cos 1) = (1.7420, -0.8621)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1 + \frac{5}{3}\sin 1, -\sin 1 + \frac{5}{3}\cos 1) = (1.9428, 0.0590)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{3}{2}\cos 1 + \frac{3}{2}\sin 1, -\frac{3}{2}\sin 1 + \frac{3}{2}\cos 1) = (2.0727, -0.4518)$

<u>แบบที่ 6</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงเหนือ
สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u(t), v(t)) = ((u_0 - t)\cos t + (v_0 + t)\sin t, -(u_0 - t)\sin t + (v_0 + t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 + \sin 1, \sin 1 + \cos 1) = (0.3012, 1.3818)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{3}\cos 1 + \sin 1, \frac{1}{3}\sin 1 + \cos 1) = (0.6614, 0.8208)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 + \frac{5}{3}\sin 1, \sin 1 + \frac{5}{3}\cos 1) = (0.8621, 1.7420)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{3}{2}\sin 1, \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{3}{2}\cos 1) = (0.9921, 1.2312)$

<u>แบบที่ 7</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงใต้
สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u(t), v(t)) = ((u_0 - t)\cos t + (v_0 - t)\sin t, -(u_0 - t)\sin t + (v_0 - t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 - \sin 1, \sin 1 - \cos 1) = (-1.3818, 0.3012)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{3}\cos 1 - \sin 1, \frac{1}{3}\sin 1 - \cos 1) = (-1.0216, -0.2598)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 - \frac{1}{3}\sin 1, \sin 1 - \frac{1}{3}\cos 1) = (-0.8208, 0.6614)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1, \frac{1}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\cos 1) = (-0.6909, 0.1506)$

<u>แบบที่ 8</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงใต้

สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi\big(u(t), v(t)\big) = ((u_0 + t)\cos t + (v_0 - t)\sin t, -(u_0 + t)\sin t + (v_0 - t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1 - \sin 1, -\sin 1 - \cos 1) = (-0.3012, -1.3818)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{5}{3}\cos 1 - \sin 1, -\frac{5}{3}\sin 1 - \cos 1) = (0.0590, -1.9428)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1 - \frac{1}{3}\sin 1, -\sin 1 - \frac{1}{3}\cos 1) = (0.2598, -1.0216)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{3}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1, \frac{1}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\cos 1) = (0.3897, -1.5324)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 เส้นทางการเดินเรือขณะมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา

ลมหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นสนามเวกเตอร์ $W(u,v)=(-v,u)$ จากการศึกษาสนามเวกเตอร์ในบทที่ 2 ทำให้ได้ว่าเส้นทางหรือสมการการเคลื่อนที่ของเรือขณะมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกาจะเป็นไปตามสมการที่ (14) นั่นคือ

$\varphi(u(t),v(t))=(u(t)\cos t-v(t)\sin t,u(t)\sin t+v(t)\cos t)$ เมื่อ t เป็นเวลาใดๆ

กำหนดให้

<u>แบบที่ 1</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออก สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0+t,v_0)=((u_0+t)\cos t-v_0\sin t,(u_0+t)\sin t+v_0\cos t)$$

พิจารณาที่ $t=1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(0,0)$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1,\sin 1)=(0.5403,0.8415)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(\frac{2}{3},0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{5}{3}\cos 1,\frac{5}{3}\sin 1)=(0.9005,1.4025)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(0,\frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(\cos 1-\frac{2}{3}\sin 1,\sin 1+\frac{2}{3}\cos 1)=(-0.0207,1.2017)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{3}{2}\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1,\frac{3}{2}\sin 1+\frac{1}{2}\cos 1)=(0.3897,1.5324)$

<u>แบบที่ 2</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศเหนือ สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0,v_0+t)=(u_0\cos t-(v_0+t)\sin t,u_0\sin t+(v_0+t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t=1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(0,0)$

  จุดหมาย คือ $(-\sin 1,\cos 1)=(-0.8415,0.5403)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(\frac{2}{3},0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{2}{3}\cos 1-\sin 1,\frac{2}{3}\sin 1+\cos 1)=(-0.4813,1.1013)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0,v_0)=(0,\frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{5}{3}\sin 1,\frac{5}{3}\cos 1)=(-1.4025,0.9005)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1, \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{3}{2}\cos 1) = (-0.9921, 1.2312)$

แบบที่ 3 เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันตก สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0 - t, v_0) = ((u_0 - t)\cos t - v_0 \sin t, (u_0 - t)\sin t + v_0 \cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1, -\sin 1) = (-0.5403, -0.8415)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{3}\cos 1, -\frac{1}{3}\sin 1) = (-0.1801, -0.2805)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 - \frac{2}{3}\sin 1, -\sin 1 + \frac{2}{3}\cos 1) = (-1.1013, -0.4813)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1, -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1) = (-0.6909, -0.1506)$

แบบที่ 4 เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศใต้ สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u(t), v(t)) = (u_0 \cos t - (v_0 - t)\sin t, u_0 \sin t + (v_0 - t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\sin 1, -\cos 1) = (0.8415, -0.5403)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

  จุดหมาย คือ $(\frac{2}{3}\cos 1 + \sin 1, \frac{2}{3}\sin 1 - \cos 1) = (1.2017, 0.0207)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{1}{3}\sin 1, -\frac{1}{3}\cos 1) = (0.2805, -0.1801)$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

  จุดหมาย คือ $(\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1, \frac{1}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\cos 1) = (0.6909, 0.1506)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>แบบที่ 5</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ
สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0+t, v_0+t) = ((u_0+t)\cos t - (v_0+t)\sin t, (u_0+t)\sin t + (v_0+t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t=1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0,0)$
  จุดหมาย คือ $(\cos 1 - \sin 1, \sin 1 + \cos 1) = (-0.3012, 1.3818)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$
  จุดหมาย คือ $(\frac{5}{3}\cos 1 - \sin 1, \frac{5}{3}\sin 1 + \cos 1) = (0.0590, 1.9428)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$
  จุดหมาย คือ $(\cos 1 - \frac{5}{3}\sin 1, \sin 1 + \frac{5}{3}\cos 1) = (-0.8621, 1.7420)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
  จุดหมาย คือ $(\frac{3}{2}\cos 1 - \frac{3}{2}\sin 1, \frac{3}{2}\sin 1 + \frac{3}{2}\cos 1) = (-0.4518, 2.0727)$

<u>แบบที่ 6</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงเหนือ
สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0-t, v_0+t) = ((u_0-t)\cos t - (v_0+t)\sin t, (u_0-t)\sin t + (v_0+t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t=1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0,0)$
  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 - \sin 1, -\sin 1 + \cos 1) = (-1.3818, -0.3012)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$
  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{3}\cos 1 - \sin 1, -\frac{1}{3}\sin 1 + \cos 1) = (-1.0216, 0.2598)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$
  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 - \frac{5}{3}\sin 1, -\sin 1 + \frac{5}{3}\cos 1) = (-1.9428, 0.0590)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{2}\cos 1 - \frac{3}{2}\sin 1, -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{3}{2}\cos 1) = (-1.5324, 0.3897)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>แบบที่ 7</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงใต้
สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0 - t, v_0 - t) = ((u_0 - t)\cos t - (v_0 - t)\sin t, (u_0 - t)\sin t + (v_0 - t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$
  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 + \sin 1, -\sin 1 - \cos 1) = (0.3012, -1.3818)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$
  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{3}\cos 1 + \sin 1, -\frac{1}{3}\sin 1 - \cos 1) = (0.6614, -0.8208)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$
  จุดหมาย คือ $(-\cos 1 + \frac{1}{3}\sin 1, -\sin 1 - \frac{1}{3}\cos 1) = (-0.2598, -1.0216)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
  จุดหมาย คือ $(-\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1, -\frac{1}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\cos 1) = (0.1506, -0.6909)$

<u>แบบที่ 8</u> เส้นทางที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0, v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงใต้
สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\varphi(u_0 + t, v_0 - t) = ((u_0 + t)\cos t - (v_0 - t)\sin t, (u_0 + t)\sin t + (v_0 - t)\cos t)$$

พิจารณาที่ $t = 1$

- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, 0)$
  จุดหมาย คือ $(\cos 1 + \sin 1, \sin 1 - \cos 1) = (1.3818, 0.3012)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$
  จุดหมาย คือ $(\frac{5}{3}\cos 1 + \sin 1, \frac{5}{3}\sin 1 - \cos 1) = (1.7420, 0.8621)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$
  จุดหมาย คือ $(\cos 1 + \frac{1}{3}\sin 1, \sin 1 - \frac{1}{3}\cos 1) = (0.8208, 0.6614)$
- จุดเริ่มต้น $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
  จุดหมาย คือ $(\frac{3}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1, \frac{3}{2}\sin 1 - \frac{1}{2}\cos 1) = (1.2312, 0.9921)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

จากการศึกษาจะได้ว่าเส้นทางการเดินเรือจะเป็นไปตามสมการการเคลื่อนที่ ณ เวลาใดๆ และตำแหน่งของเส้นทางการเดินเรือบนระนาบยุคลิดเมื่อมีลมพัดผ่านแบบตามเข็มและทวนเข็มนาฬิกา เปรียบเทียบกับตำแหน่งการเดินเรือเมื่อไม่มีลมพัดผ่าน ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$ โดยกำหนดจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) 4 แบบ คือ $(0,0),(\frac{2}{3},0),(0,\frac{2}{3})$ และ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

สมการรูปทั่วไปของการเดินเรือ ณ เวลาและจุดเริ่มต้นใดๆ ที่ได้มีดังนี้

แบบไม่มีลมคือ เส้นตรง $(u(t),v(t))$

แบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกาคือ

$$\varphi(u(t),v(t))=(u(t)\cos t+v(t)\sin t,-u(t)\sin t+v(t)\cos t) \qquad (4.1)$$

แบบมีลมหมุนทวนเข้มนาฬิกาคือ

$$\varphi(u(t),v(t))=(u(t)\cos t-v(t)\sin t,u(t)\sin t+v(t)\cos t) \qquad (4.2)$$

เนื่องจากเส้นตรงเป็นจีออเดซิกบนระนาบยุคลิด จะทำให้ได้ว่าเส้นทางการเดินเรือที่สั้นที่สุดเมื่อไม่มีลมพัดผ่านจะต้องเดินทางเป็นเส้นตรง แต่เมื่อมีกระแสลมพัดตามเข็มนาฬิกา หรือทวนเข็มนาฬิกา เส้นทางการเดินเรือที่สั้นที่สุดนั้น จะไม่เป็นเส้นตรง แต่จะเปลี่ยนไปเป็นเส้นโค้งบนระนาบยุคลิดที่เอนไปตามกระแสลมในทิศทางนั้นๆ ซึ่งสามารถคำนวณหาตำแหน่งและเส้นทางได้จากสมการที่ (4.1) และ (4.2) ซึ่งตรงกับปัญหาการเดินทางที่เซอร์เมโลได้ทำการศึกษาและพบว่าในการเดินทางจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดหมายจะทำให้เรือสามารถเดินทางได้เร็วที่สุด และใช้เวลาน้อยที่สุด

4.1 ผลการศึกษาจากสมการ

กำหนดให้

<u>แบบที่ 1</u> $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออก

<u>แบบที่ 2</u> $(u(t),v(t))=(u_0,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศเหนือ

<u>แบบที่ 3</u> $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบที่ 4 $(u(t),v(t))=(u_0,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศใต้

แบบที่ 5 $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

แบบที่ 6 $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงเหนือ

แบบที่ 7 $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงใต้

แบบที่ 8 $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงใต้

ตารางที่ 4.1 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา t ใดๆ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0,v_0)=(0,0)$

แบบที่	ไม่มีลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v)=(v,-u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v)=(-v,u)$
1	$(t,0)$	$(t\cos t,-t\sin t)$	$(t\cos t,t\sin t)$
2	$(0,t)$	$(t\sin t,t\cos t)$	$(-t\sin t,t\cos t)$
3	$(-t,0)$	$(-t\cos t,t\sin t)$	$(-t\cos t,-t\sin t)$
4	$(0,-t)$	$(-t\sin t,-t\cos t)$	$(t\sin t,-t\cos t)$
5	(t,t)	$(t\cos t+t\sin t,-t\sin t+t\cos t)$	$(t\cos t-t\sin t,t\sin t+t\cos t)$
6	$(-t,t)$	$(-t\cos t+t\sin t,t\sin t+t\cos t)$	$(-t\cos t-t\sin t,-t\sin t+t\cos t)$
7	$(-t,-t)$	$(-t\cos t-t\sin t,t\sin t-t\cos t)$	$(-t\cos t+t\sin t,-t\sin t-t\cos t)$
8	$(t,-t)$	$(t\cos t-t\sin t,-t\sin t-t\cos t)$	$(t\cos t+t\sin t,t\sin t-t\cos t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา tใดๆ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

แบบที่	ไม่มี ลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (v, -u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (-v, u)$
1	$(\frac{2}{3}+t, 0)$	$((\frac{2}{3}+t)\cos t, -(\frac{2}{3}+t)\sin t)$	$((\frac{2}{3}+t)\cos t, (\frac{2}{3}+t)\sin t)$
2	$(\frac{2}{3}, t)$	$(\frac{2}{3}\cos t + t\sin t, -\frac{2}{3}\sin t + t\cos t)$	$(\frac{2}{3}\cos t - t\sin t, \frac{2}{3}\sin t + t\cos t)$
3	$(\frac{2}{3}-t, 0)$	$((\frac{2}{3}-t)\cos t, -(\frac{2}{3}-t)\sin t)$	$((\frac{2}{3}-t)\cos t, (\frac{2}{3}-t)\sin t)$
4	$(\frac{2}{3}, -t)$	$(\frac{2}{3}\cos t - t\sin t, -\frac{2}{3}\sin t - t\cos t)$	$(\frac{2}{3}\cos t + t\sin t, \frac{2}{3}\sin t - t\cos t)$
5	$(\frac{2}{3}+t, t)$	$((\frac{2}{3}+t)\cos t + t\sin t, -(\frac{2}{3}+t)\sin t + t\cos t)$	$((\frac{2}{3}+t)\cos t - t\sin t, (\frac{2}{3}+t)\sin t + t\cos t)$
6	$(\frac{2}{3}-t, t)$	$((\frac{2}{3}-t)\cos t + t\sin t, -(\frac{2}{3}-t)\sin t + t\cos t)$	$((\frac{2}{3}-t)\cos t - t\sin t, (\frac{2}{3}-t)\sin t + t\cos t)$
7	$(\frac{2}{3}-t, -t)$	$((\frac{2}{3}-t)\cos t - t\sin t, -(\frac{2}{3}-t)\sin t - t\cos t)$	$((\frac{2}{3}-t)\cos t + t\sin t, (\frac{2}{3}-t)\sin t - t\cos t)$
8	$(\frac{2}{3}+t, -t)$	$((\frac{2}{3}+t)\cos t - t\sin t, -(\frac{2}{3}+t)\sin t - t\cos t)$	$((\frac{2}{3}+t)\cos t + t\sin t, (\frac{2}{3}+t)\sin t - t\cos t)$

ตารางที่ 4.3 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา tใดๆ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

แบบที่	ไม่มี ลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (v, -u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (-v, u)$
1	$(t, \frac{2}{3})$	$(t\cos t + \frac{2}{3}\sin t, -t\sin t + \frac{2}{3}\cos t)$	$(t\cos t - \frac{2}{3}\sin t, t\sin t + \frac{2}{3}\cos t)$
2	$(0, \frac{2}{3} + t)$	$((\frac{2}{3} + t)\sin t, (\frac{2}{3} + t)\cos t)$	$(-(\frac{2}{3} + t)\sin t, (\frac{2}{3} + t)\cos t)$
3	$(-t, \frac{2}{3})$	$(-t\cos t + \frac{2}{3}\sin t, t\sin t + \frac{2}{3}\cos t)$	$(-t\cos t - \frac{2}{3}\sin t, -t\sin t + \frac{2}{3}\cos t)$
4	$(0, \frac{2}{3} - t)$	$((\frac{2}{3} - t)\sin t, (\frac{2}{3} - t)\cos t)$	$(-(\frac{2}{3} - t)\sin t, (\frac{2}{3} - t)\cos t)$
5	$(t, \frac{2}{3} + t)$	$(t\cos t + (\frac{2}{3} + t)\sin t, -t\sin t + (\frac{2}{3} + t)\cos t)$	$(t\cos t - (\frac{2}{3} + t)\sin t, t\sin t + (\frac{2}{3} + t)\cos t)$
6	$(-t, \frac{2}{3} + t)$	$(-t\cos t + (\frac{2}{3} + t)\sin t, t\sin t + (\frac{2}{3} + t)\cos t)$	$(-t\cos t - (\frac{2}{3} + t)\sin t, -t\sin t + (\frac{2}{3} + t)\cos t)$
7	$(-t, \frac{2}{3} - t)$	$(-t\cos t + (\frac{2}{3} - t)\sin t, t\sin t + (\frac{2}{3} - t)\cos t)$	$(-t\cos t - (\frac{2}{3} - t)\sin t, -t\sin t + (\frac{2}{3} - t)\cos t)$
8	$(t, \frac{2}{3} - t)$	$(t\cos t + (\frac{2}{3} - t)\sin t, -t\sin t + (\frac{2}{3} - t)\cos t)$	$(t\cos t - (\frac{2}{3} - t)\sin t, t\sin t + (\frac{2}{3} - t)\cos t)$

ตารางที่ 4.4 สมการการเคลื่อนที่ ณ เวลา tใดๆ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

แบบที่	ไม่มี ลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (v, -u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (-v, u)$
1	$(\frac{1}{2}+t, \frac{1}{2})$	$((\frac{1}{2}+t)\cos t+(\frac{1}{2})\sin t, -(\frac{1}{2}+t)\sin t+(\frac{1}{2})\cos t)$	$((\frac{1}{2}+t)\cos t-(\frac{1}{2})\sin t, (\frac{1}{2}+t)\sin t+(\frac{1}{2})\cos t)$
2	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+t)$	$((\frac{1}{2})\cos t+(\frac{1}{2}+t)\sin t, -(\frac{1}{2})\sin t+(\frac{1}{2}+t)\cos t)$	$((\frac{1}{2})\cos t-(\frac{1}{2}+t)\sin t, (\frac{1}{2})\sin t+(\frac{1}{2}+t)\cos t)$
3	$(\frac{1}{2}-t, \frac{1}{2})$	$((\frac{1}{2}-t)\cos t+(\frac{1}{2})\sin t, -(\frac{1}{2}-t)\sin t+(\frac{1}{2})\cos t)$	$((\frac{1}{2}-t)\cos t-(\frac{1}{2})\sin t, (\frac{1}{2}-t)\sin t+(\frac{1}{2})\cos t)$
4	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-t)$	$((\frac{1}{2})\cos t+(\frac{1}{2}-t)\sin t, -(\frac{1}{2})\sin t+(\frac{1}{2}-t)\cos t)$	$((\frac{1}{2})\cos t-(\frac{1}{2}-t)\sin t, (\frac{1}{2})\sin t+(\frac{1}{2}-t)\cos t)$
5	$(\frac{1}{2}+t, \frac{1}{2}+t)$	$((\frac{1}{2}+t)\cos t+(\frac{1}{2}+t)\sin t, -(\frac{1}{2}+t)\sin t+(\frac{1}{2}+t)\cos t)$	$((\frac{1}{2}+t)\cos t-(\frac{1}{2}+t)\sin t, (\frac{1}{2}+t)\sin t+(\frac{1}{2}+t)\cos t)$
6	$(\frac{1}{2}-t, \frac{1}{2}+t)$	$((\frac{1}{2}-t)\cos t+(\frac{1}{2}+t)\sin t, -(\frac{1}{2}-t)\sin t+(\frac{1}{2}+t)\cos t)$	$((\frac{1}{2}-t)\cos t-(\frac{1}{2}+t)\sin t, (\frac{1}{2}-t)\sin t+(\frac{1}{2}+t)\cos t)$
7	$(\frac{1}{2}-t, \frac{1}{2}-t)$	$((\frac{1}{2}-t)\cos t+(\frac{1}{2}-t)\sin t, -(\frac{1}{2}-t)\sin t+(\frac{1}{2}-t)\cos t)$	$((\frac{1}{2}-t)\cos t-(\frac{1}{2}-t)\sin t, (\frac{1}{2}-t)\sin t+(\frac{1}{2}-t)\cos t)$
8	$(\frac{1}{2}+t, \frac{1}{2}-t)$	$((\frac{1}{2}+t)\cos t+(\frac{1}{2}-t)\sin t, -(\frac{1}{2}+t)\sin t+(\frac{1}{2}-t)\cos t)$	$((\frac{1}{2}+t)\cos t-(\frac{1}{2}-t)\sin t, (\frac{1}{2}+t)\sin t+(\frac{1}{2}-t)\cos t)$

ตารางที่ 4.5 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (0,0)$

แบบที่	ไม่มี ลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (v,-u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (-v,u)$
1	(1, 0)	(0.5403, −0.8415)	(0.5403, 0.8415)
2	(0, 1)	(0.8415, 0.5403)	(−0.8415, 0.5403)
3	(−1, 0)	(−0.5403, 0.8415)	(−0.5403, −0.8415)
4	(0, −1)	(−0.8415, −0.5403)	(0.8415, −0.5403)
5	(1, 1)	(1.3818, −0.3012)	(−0.3012, 1.3818)
6	(−1, 1)	(0.3012, 1.3818)	(−1.3818, −0.3012)
7	(−1, −1)	(−1.3818, 0.3012)	(0.3012, −1.3818)
8	(1, −1)	(−0.3012, −1.3818)	(1.3818, 0.3012)

ตารางที่ 4.6 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{2}{3}, 0)$

แบบที่	ไม่มี ลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (v, -u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (-v, u)$
1	$(\frac{5}{3}, 0)$	$(0.9005, -1.4025)$	$(0.9005, 1.4025)$
2	$(\frac{2}{3}, 1)$	$(1.2017, -0.0207)$	$(-0.4813, 1.1013)$
3	$(-\frac{1}{3}, 0)$	$(-0.1801, 0.2805)$	$(-0.1801, -0.2805)$
4	$(\frac{2}{3}, -1)$	$(-0.4813, -1.1013)$	$(1.2017, 0.0207)$
5	$(\frac{5}{3}, 1)$	$(1.7420, -0.8621)$	$(0.0590, 1.9428)$
6	$(-\frac{1}{3}, 1)$	$(0.6614, 0.8208)$	$(-1.0216, 0.2598)$
7	$(-\frac{1}{3}, -1)$	$(-1.0216, -0.2598)$	$(0.6614, -0.8208)$
8	$(\frac{5}{3}, -1)$	$(0.0590, -1.9428)$	$(1.7420, 0.8621)$

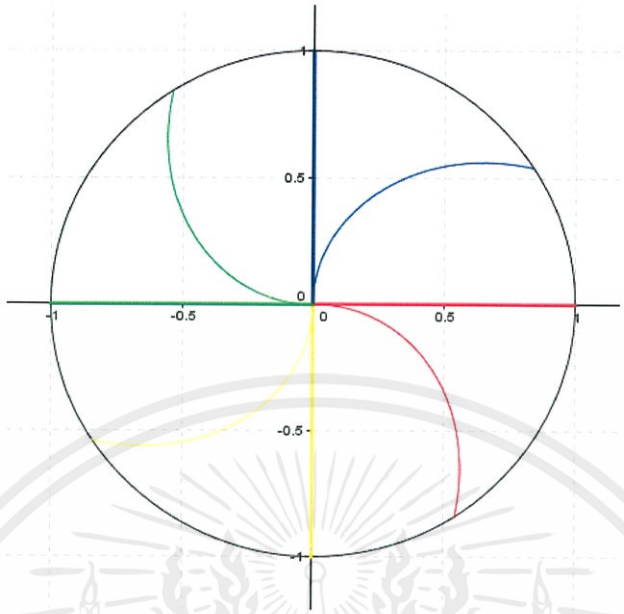
ตารางที่ 4.7 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (0, \frac{2}{3})$

แบบที่	ไม่มี ลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (v, -u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (-v, u)$
1	$(1, \frac{2}{3})$	$(1.1013, -0.4813)$	$(-0.0207, 1.2017)$
2	$(0, \frac{5}{3})$	$(1.4025, 0.9005)$	$(-1.4025, 0.9005)$
3	$(0-1, \frac{2}{3})$	$(0.0207, 1.2017)$	$(-1.1013, -0.4813)$
4	$(0, -\frac{1}{3})$	$(-0.2805, -0.1801)$	$(0.2805, -0.1801)$
5	$(1, \frac{5}{3})$	$(1.9428, 0.0590)$	$(-0.8621, 1.7420)$
6	$(-1, \frac{5}{3})$	$(0.8621, 1.7420)$	$(-1.9428, 0.0590)$
7	$(-1, -\frac{1}{3})$	$(-0.8208, 0.6614)$	$(-0.2598, -1.0216)$
8	$(1, -\frac{1}{3})$	$(0.2598, -1.0216)$	$(0.8208, 0.6614)$

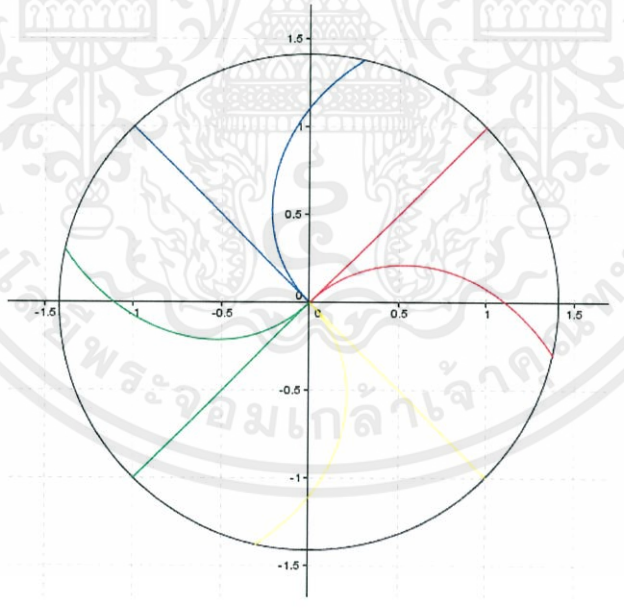
ตารางที่ 4.8 จุดหมายของเรือ ณ หนึ่งหน่วยเวลา $(t=1)$ โดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

แบบที่	ไม่มี ลมพัดผ่าน	มีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (v, -u)$	มีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v) = (-v, u)$
1	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(1.2312, -0.9921)$	$(0.3897, 1.5324)$
2	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(1.5324, 0.3897)$	$(-0.9921, 1.2312)$
3	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0.1506, 0.6909)$	$(-0.6909, -0.1506)$
4	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-0.1506, -0.6909)$	$(0.6909, 0.1506)$
5	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(2.0727, -0.4518)$	$(-0.4518, 2.0727)$
6	$(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(0.9921, 1.2312)$	$(-1.5324, 0.3897)$
7	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-0.6909, 0.1506)$	$(0.1506, -0.6909)$
8	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(0.3897, -1.5324)$	$(1.2312, 0.9921)$

4.2 ผลการศึกษาเมื่อนำสมการมาเขียนกราฟ

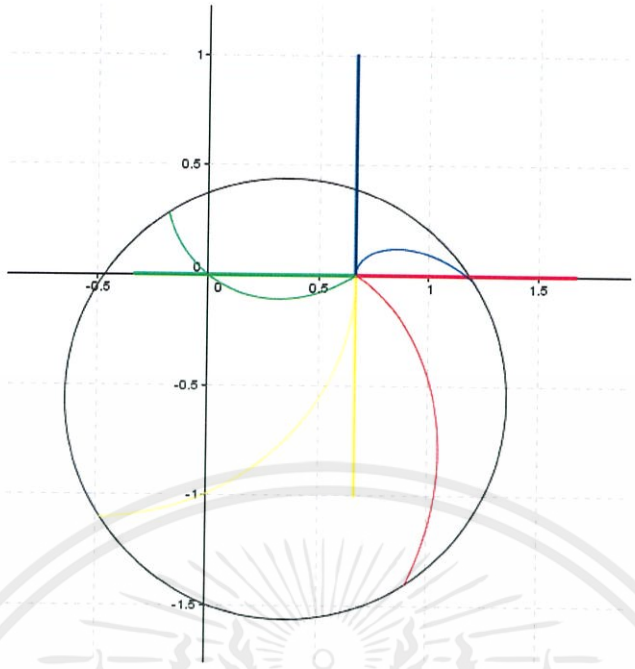


รูปที่ 4.1 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.1 และ แบบที่ 1 – 4

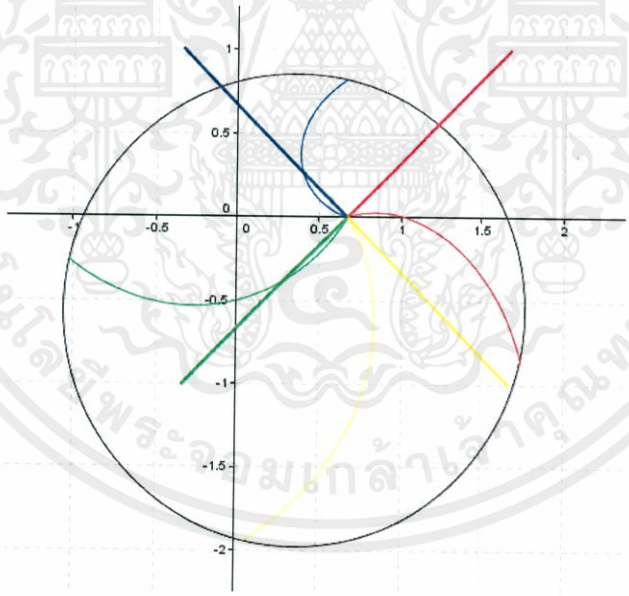


รูปที่ 4.2 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 5 - 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

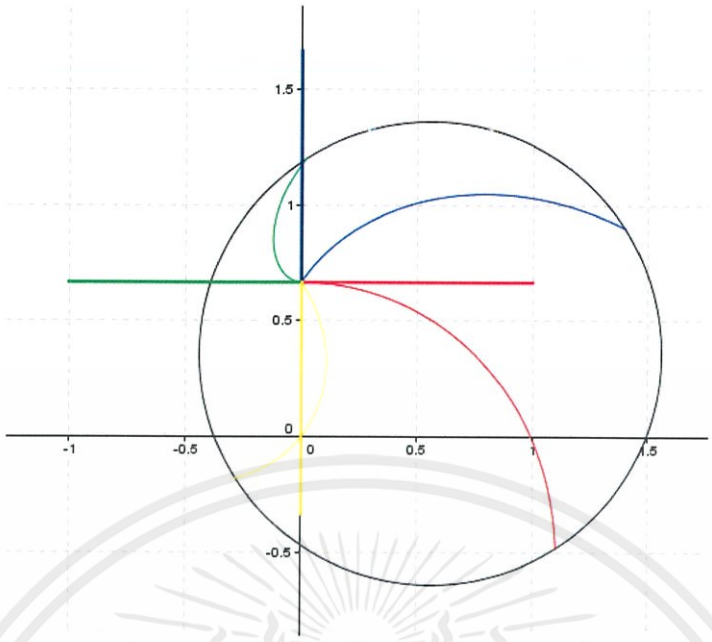


รูปที่ 4.3 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 1 - 4

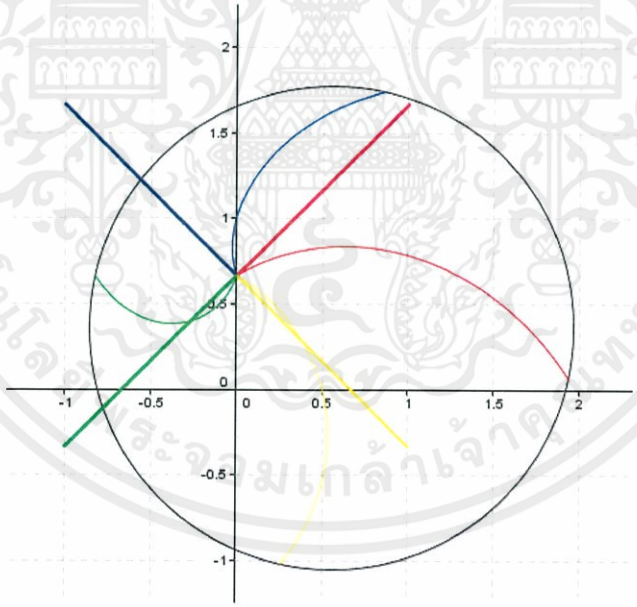


รูปที่ 4.4 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 5 - 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

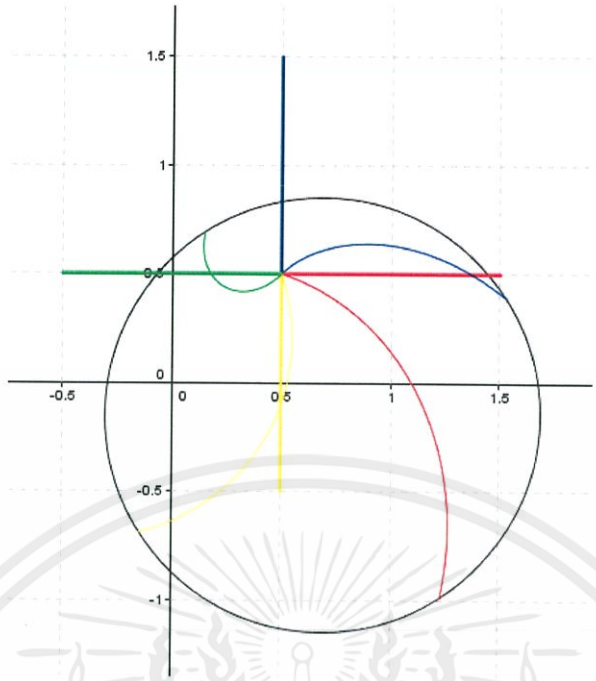


รูปที่ 4.5 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 1 - 4

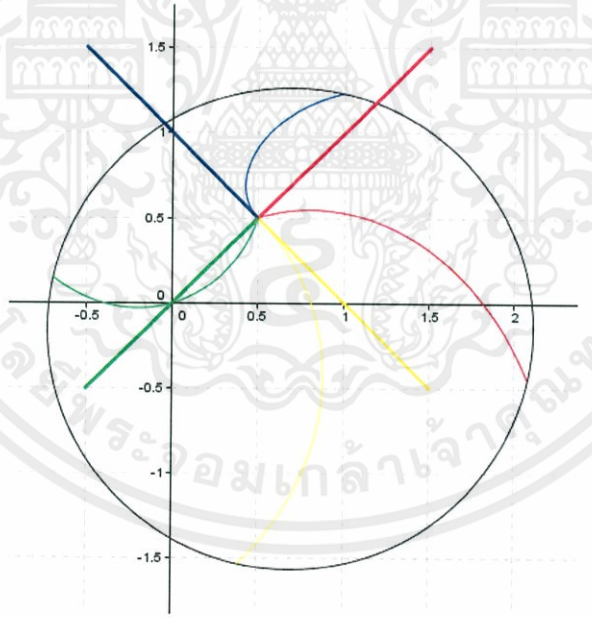


รูปที่ 4.6 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 5 - 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

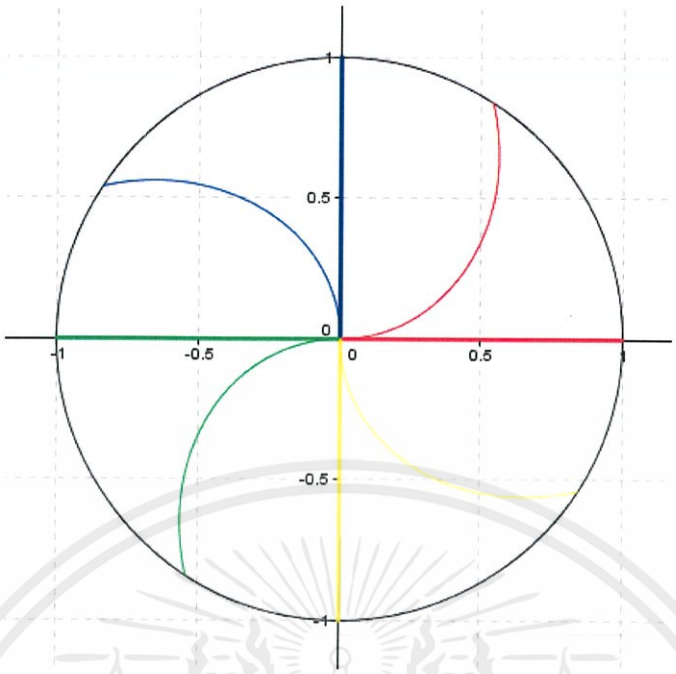


รูปที่ 4.7 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 1 - 4

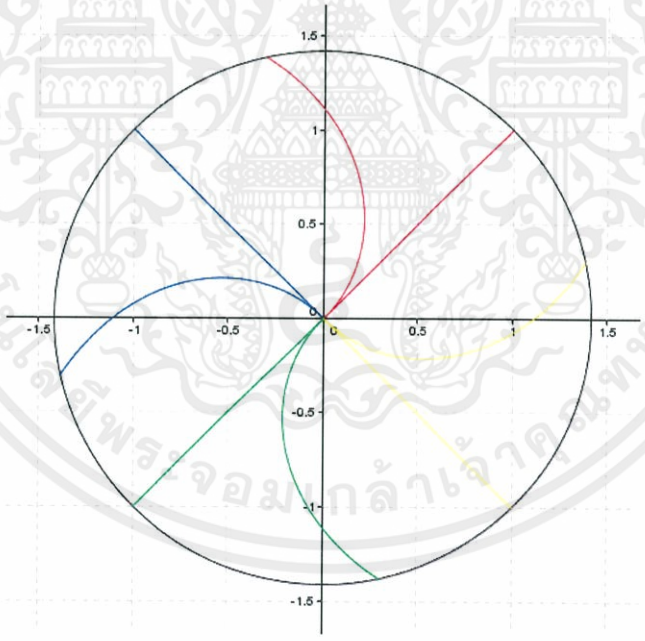


รูปที่ 4.8 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมพัดตามเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 5 - 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

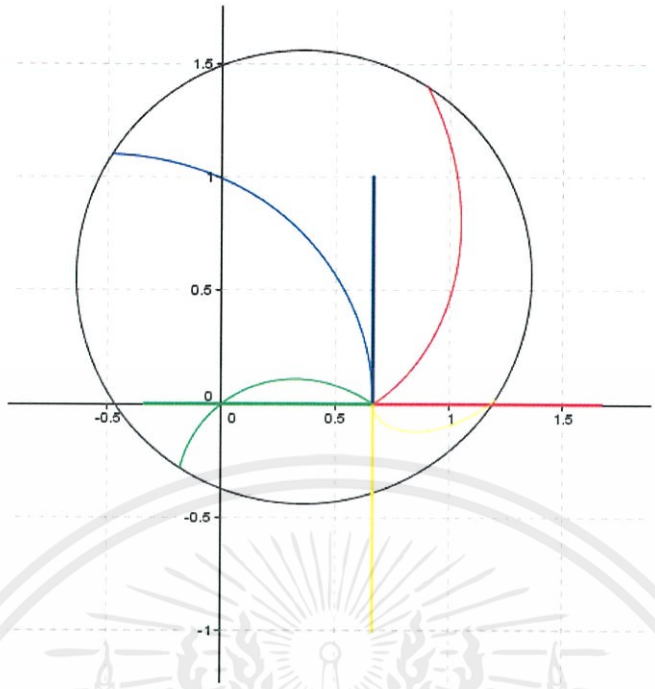


รูปที่ 4.9 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.1 และ แบบที่ 1 - 4

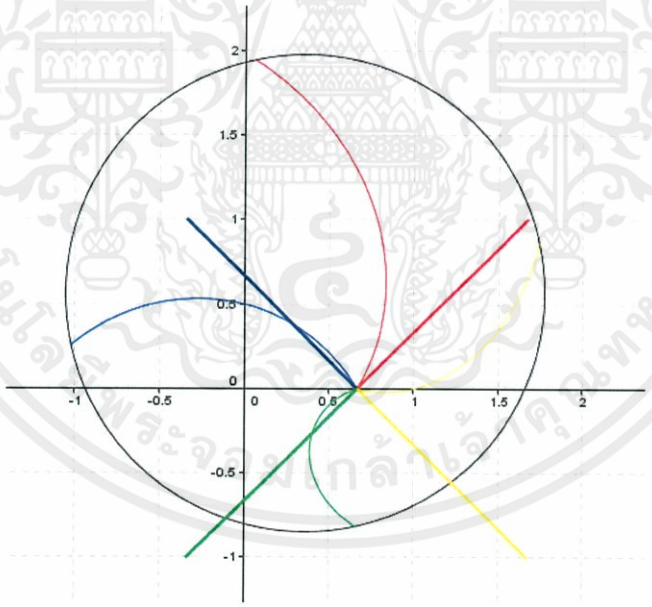


รูปที่ 4.10 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ จากตารางที่ 4.1 และ แบบที่ 5 - 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

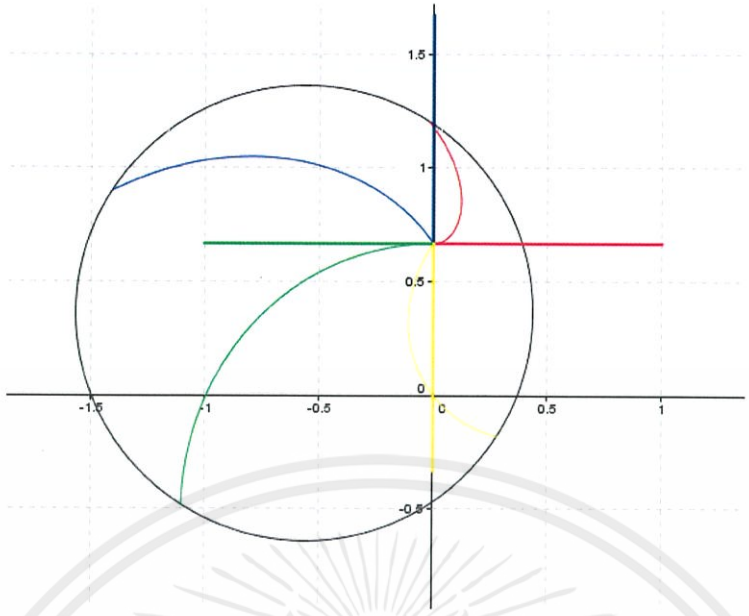


รูปที่ 4.11 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 1 - 4

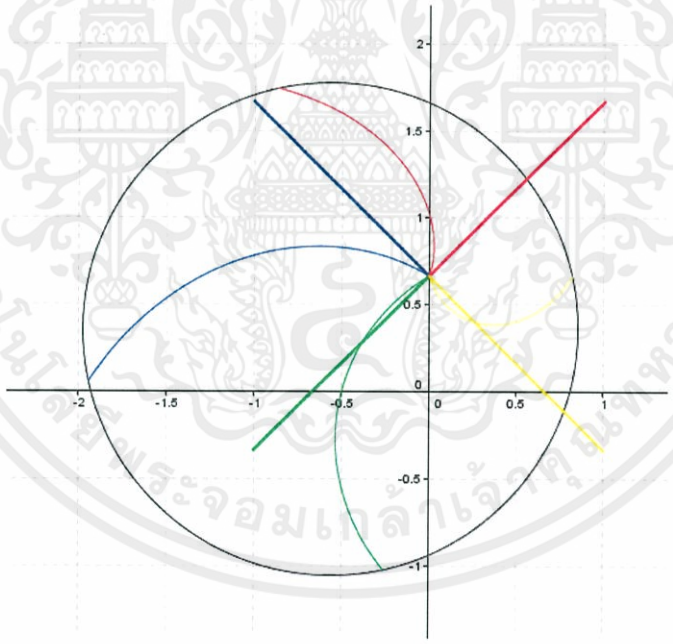


รูปที่ 4.12 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{2}{3},0)$ จากตารางที่ 4.2 และ แบบที่ 1 - 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

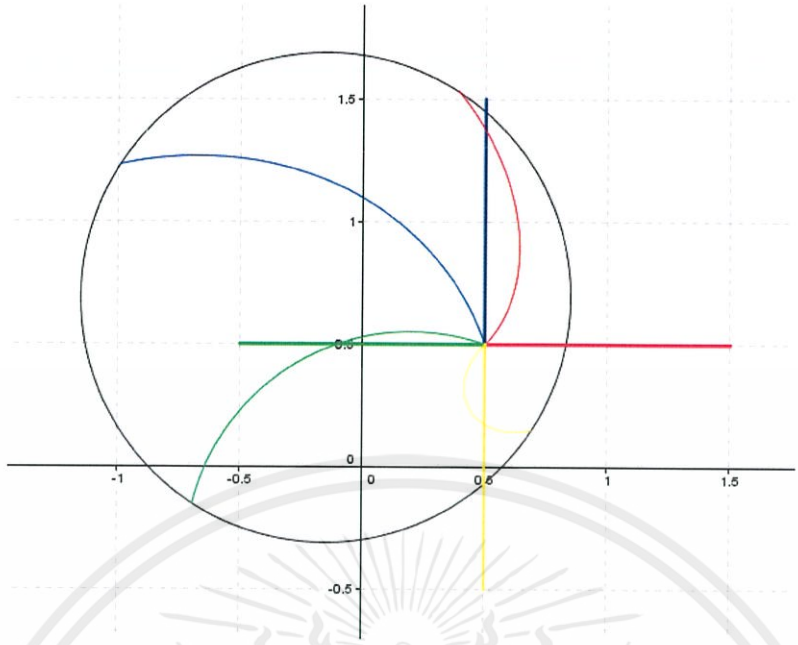


รูปที่ 4.13 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 1 - 4

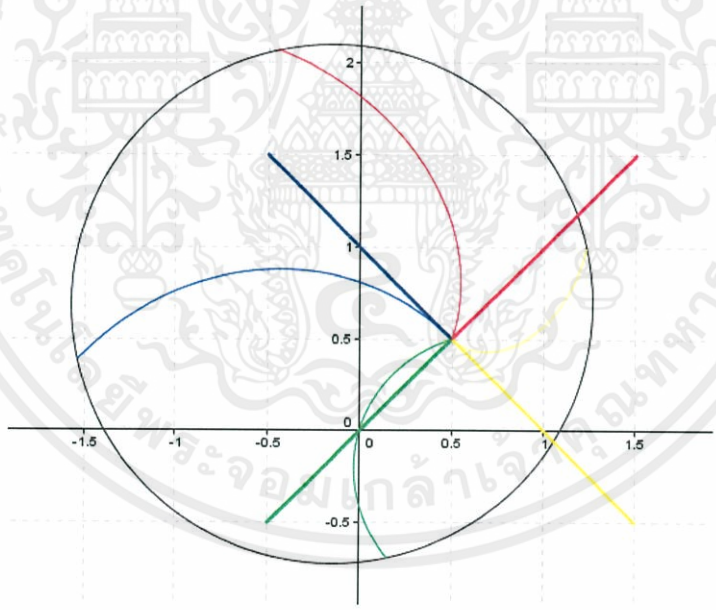


รูปที่ 4.14 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(0,\frac{2}{3})$ จากตารางที่ 4.3 และ แบบที่ 5 - 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 1 - 4



รูปที่ 4.16 เส้นทางการเดินเรือแบบไม่มีลมพัดและแบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ณ หนึ่งหน่วยเวลา เมื่อเริ่มต้นที่จุด $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ จากตารางที่ 4.4 และ แบบที่ 5 - 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การหาเส้นทางการเดินทางหรือสมการการเคลื่อนที่ของเรือ $\varphi(u(t),v(t))$ สามารถหาได้จากการหาผลเฉลยของสนามเวกเตอร์ ซึ่งสมการที่ได้จะขึ้นอยู่กับตัวแปรหรือพารามิเตอร์เวลา (t) ดังนี้

แบบไม่มีลมคือ เส้นตรง $(u(t),v(t))$

แบบมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกา $W(u,v)=(v,-u)$ คือ

$$\varphi(u(t),v(t))=(u(t)\cos t+v(t)\sin t,-u(t)\sin t+v(t)\cos t)$$

แบบมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกา $W(u,v)=(-v,u)$ คือ

$$\varphi(u(t),v(t))=(u(t)\cos t-v(t)\sin t,u(t)\sin t+v(t)\cos t)$$

จากการวิจัยเมื่อคำนวณค่าโดยแทนค่าเวลา $t=1$ และจุดเริ่มต้น 4 แบบ คือ $(0,0),(\frac{2}{3},0),(0,\frac{2}{3})$ และ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ซึ่งจะได้ตำแหน่งต่างๆของเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วย โดยกำหนดให้เส้นทางการเดินเรือแบบต่างๆ แสดงดังนี้

<u>แบบที่ 1</u> $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออก

<u>แบบที่ 2</u> $(u(t),v(t))=(u_0,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศเหนือ

<u>แบบที่ 3</u> $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตก

<u>แบบที่ 4</u> $(u(t),v(t))=(u_0,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศใต้

<u>แบบที่ 5</u> $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

<u>แบบที่ 6</u> $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0+t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงเหนือ

<u>แบบที่ 7</u> $(u(t),v(t))=(u_0-t,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันตกเฉียงใต้

<u>แบบที่ 8</u> $(u(t),v(t))=(u_0+t,v_0-t)$ เป็นเส้นตรงที่ออกจากจุดเริ่มต้น (u_0,v_0) ไปในทิศตะวันออกเฉียงใต้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.1ตำแหน่งต่างของเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วยและไม่มีลมพัดผ่าน

รูปแบบ	จุดเริ่มต้น			
	$(0,0)$	$(\frac{2}{3},0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
1	$(1,0)$	$(\frac{5}{3},0)$	$(1,\frac{2}{3})$	$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$
2	$(0,1)$	$(\frac{2}{3},1)$	$(0,\frac{5}{3})$	$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$
3	$(-1,0)$	$(-\frac{1}{3},0)$	$(0-1,\frac{2}{3})$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
4	$(0,-1)$	$(\frac{2}{3},-1)$	$(0,-\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
5	$(1,1)$	$(\frac{5}{3},1)$	$(1,\frac{5}{3})$	$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$
6	$(-1,1)$	$(-\frac{1}{3},1)$	$(-1,\frac{5}{3})$	$(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$
7	$(-1,-1)$	$(-\frac{1}{3},-1)$	$(-1,-\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
8	$(1,-1)$	$(\frac{5}{3},-1)$	$(1,-\frac{1}{3})$	$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$

ตารางที่ 5.2ตำแหน่งต่างของเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วยและมีลมหมุนตามเข็มนาฬิกาพัดผ่าน

รูปแบบ	จุดเริ่มต้น			
	$(0,0)$	$(\frac{2}{3},0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
1	(0.5403, −0.8415)	(0.9005, −1.4025)	(1.1013, −0.4813)	(1.2312, −0.9921)
2	(0.8415, 0.5403)	(1.2017, −0.0207)	(1.4025, 0.9005)	(1.5324, 0.3897)
3	(−0.5403, 0.8415)	(−0.1801, 0.2805)	(0.0207, 1.2017)	(0.1506, 0.6909)
4	(−0.8415, −0.5403)	(−0.4813, −1.1013)	(−0.2805, −0.1801)	(−0.1506, −0.6909)
5	(1.3818, −0.3012)	(1.7420, −0.8621)	(1.9428, 0.0590)	(2.0727, −0.4518)
6	(0.3012, 1.3818)	(0.6614, 0.8208)	(0.8621, 1.7420)	(0.9921, 1.2312)
7	(−1.3818, 0.3012)	(−1.0216, −0.2598)	(−0.8208, 0.6614)	(−0.6909, 0.1506)
8	(−0.3012, −1.3818)	(0.0590, −1.9428)	(0.2598, −1.0216)	(0.3897, −1.1506)

ตารางที่ 5.3ตำแหน่งต่างของเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วยและมีลมหมุนทวนเข็มนาฬิกาพัดผ่าน

รูปแบบ	จุดเริ่มต้น			
	$(0,0)$	$(\frac{2}{3},0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
1	(0.5403, 0.8415)	(0.9005, 1.4025)	(−0.0207, 1.2017)	(0.3897, 1.5324)
2	(−0.8415, 0.5403)	(−0.4813, 1.1013)	(−1.4025, 0.9005)	(−0.9921, 1.2312)
3	(−0.5403, −0.8415)	(−0.1801, −0.2805)	(−1.1013, −0.4813)	(−0.6909, −0.1506)
4	(0.8415, −0.5403)	(1.2017, 0.0207)	(0.2805, −0.1801)	(0.6909, 0.1506)
5	(−0.3012, 1.3818)	(0.0590, 1.9428)	(−0.8621, 1.7420)	(−0.4518, 2.0727)
6	(−1.3818, −0.3012)	(−1.0216, 0.2598)	(−1.9428, 0.0590)	(−1.5324, 0.3897)
7	(0.3012, −1.3818)	(0.6614, −0.8208)	(−0.2598, −1.0216)	(0.1506, −0.6909)
8	(1.3818, 0.3012)	(1.7420, 0.8621)	(0.8208, 0.6614)	(1.2312, 0.9921)

ซึ่งเมื่อนำมาเขียนกราฟจะพบว่าหากไม่มีกระแสลมพัด การเดินทางของเรือไปยังจุดหมายเส้นทางการเดินเรือที่สั้นที่สุดจะเป็นเส้นตรง แต่เมื่อมีกระแสลมพัดตามเข็มนาฬิกา หรือทวนเข็มนาฬิกา เส้นทางการเดินเรือที่สั้นที่สุดนั้น ไม่ใช่เส้นตรงอีกต่อไป แต่จะเปลี่ยนไปเส้นโค้งเอนไปตามกระแสลมในทิศทางนั้นๆ ซึ่งเป็นไปตามหลักความเป็นจริง

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ศึกษาเส้นทางการเดินทางของเรือเมื่อมีกระแสลมลักษณะอื่นๆพัดผ่าน เช่น มีพายุ

2. การศึกษาหาเส้นทางที่สั้นที่สุดอาจเพิ่มเงื่อนไขในการคำนวณ เช่น ความเร็วของกระแสน้ำ ความเร็วของกระแสลม เป็นต้น

3. การหาเส้นทางที่สั้นที่สุดนั้นอาจเปลี่ยนการพิจารณาจากระนาบยุคลิด เป็นพื้นผิวอื่นๆ เช่น ทรงกลม , ทรงรี และทรงกระบอก เป็นต้น

4. สามารถนำไปต่อยอดเพื่อศึกษาการหาเส้นทางการเดินทางที่สั้นที่สุดของเครื่องบิน หรือยานพาหนะอื่นๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] ณัฐพล บุญนำ, "เส้นโค้งจีออเดสิกบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบที่มีการศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณ", วิทยานิพนธ์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2553.

[2] ภัคคินี ชิตสกุล, "เอกสารประกอบการเรียน รายวิชา Differential Geometry", สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2554.

[3] วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง, "บางคุณสมบัติของจีออเดซิกบนบางพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟ วิทยานิพนธ์,สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2555.

[4] เลิศ สิทธิโกศล. 2546. **เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส III.** พิมพ์ครั้งที่ 1. **กรุงเทพมหานคร :** สกายบุ๊คส์

[5] ทศพร คล้ายอุดม. 2539. **โทโพโลยีเบื้องต้น**. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง

[6] พัชรินทร์ เหมโชติ และไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์. 2555. **พีชคณิตเชิงเส้น 1**. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพมหานคร : มีนเซอร์วิส ซัพพลาย

[7] พัชรินทร์ เหมโชติ. 2555. **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ**. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : มีนเซอร์วิส ซัพพลาย

[8] Fraser, C. 2556. **Zermelo's navigation problem in the calculus of variations.** [Online]. Available : http://www.ichstm2013.com/programme/guide/p/0773.html

[9] Colleen, R. 2550. "Geodesics in randers space of constant curvature." Trans. AMS 19(4) : 1633–1651.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

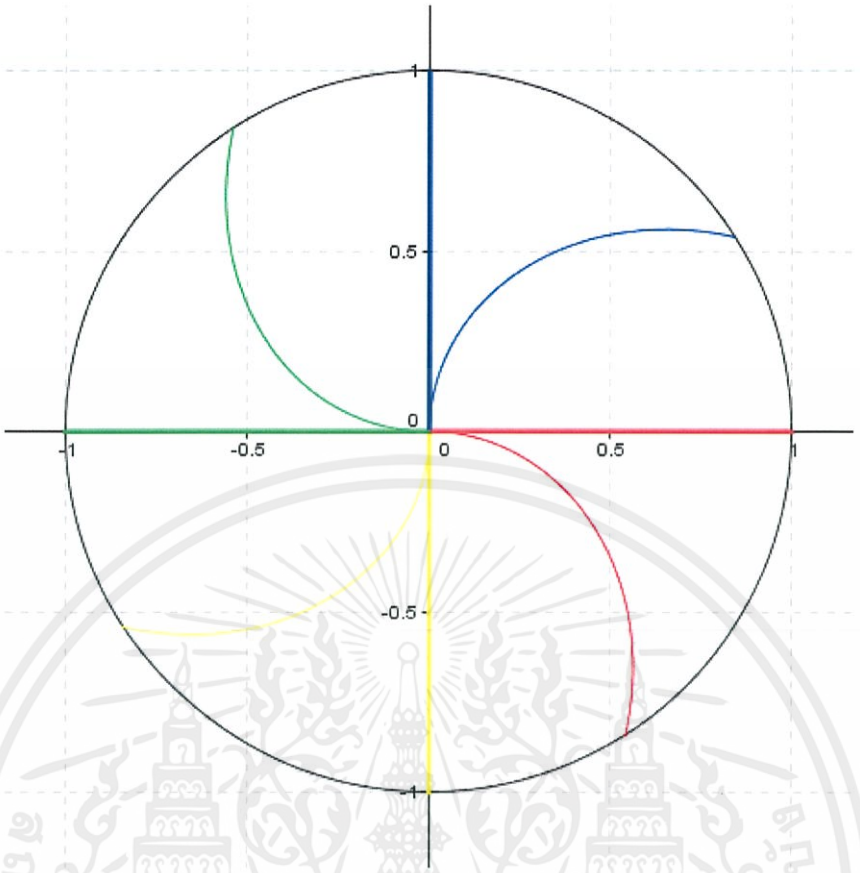
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรมในการแสดงเส้นทางการเดินเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วย

สำหรับโปรแกรมในการแสดงเส้นทางการเดินเรือเมื่อเวลาผ่านไปหนึ่งหน่วย จะเขียนบน Geogebra แสดงดังนี้

- จำนวน
  - n = 1
- จุด
  - A = (-0.54, 0.84)
  - B = (0.84, 0.54)
  - C = (0.54, -0.84)
  - D = (-0.84, -0.54)
- ภาคตัดกรวย
  - h: $x^2 + y^2 = 1$
- เส้นโค้งพาราเมตริก
  - a : $\left.\begin{matrix} x = 1\,t\,\cos(1\,t) \\ y = -1\,t\,\sin(1\,t) \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$
  - b : $\left.\begin{matrix} x = 1\,t \\ y = 0 \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$
  - c : $\left.\begin{matrix} x = 1\,t\,\sin(1\,t) \\ y = 1\,t\,\cos(1\,t) \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$
  - d : $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1\,t \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$
  - e : $\left.\begin{matrix} x = -1\,t \\ y = 0 \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$
  - f : $\left.\begin{matrix} x = -1\,t\,\cos(1\,t) \\ y = 1\,t\,\sin(1\,t) \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$
  - g : $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = -1\,t \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$
  - j : $\left.\begin{matrix} x = -1\,t\,\sin(1\,t) \\ y = -1\,t\,\cos(1\,t) \end{matrix}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

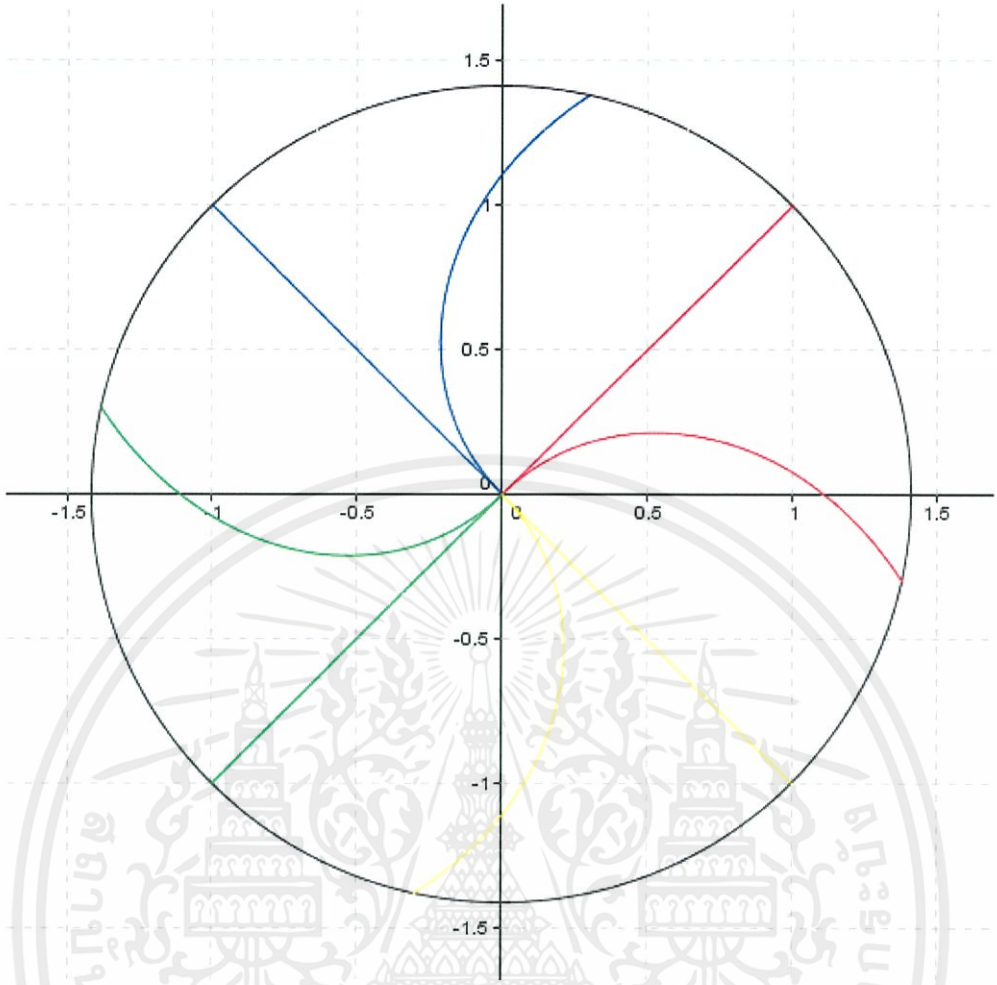
จำนวน
- $n = 1$

จุด
- A = (0.3, 1.38)
- B = (-1.38, 0.3)
- C = (-0.3, -1.38)
- D = (1.38, -0.3)

ภาคตัดกรวย
- $k: x^2 + y^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -1\,t\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t \\ y &= -1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= -1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- h : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -1\,t\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

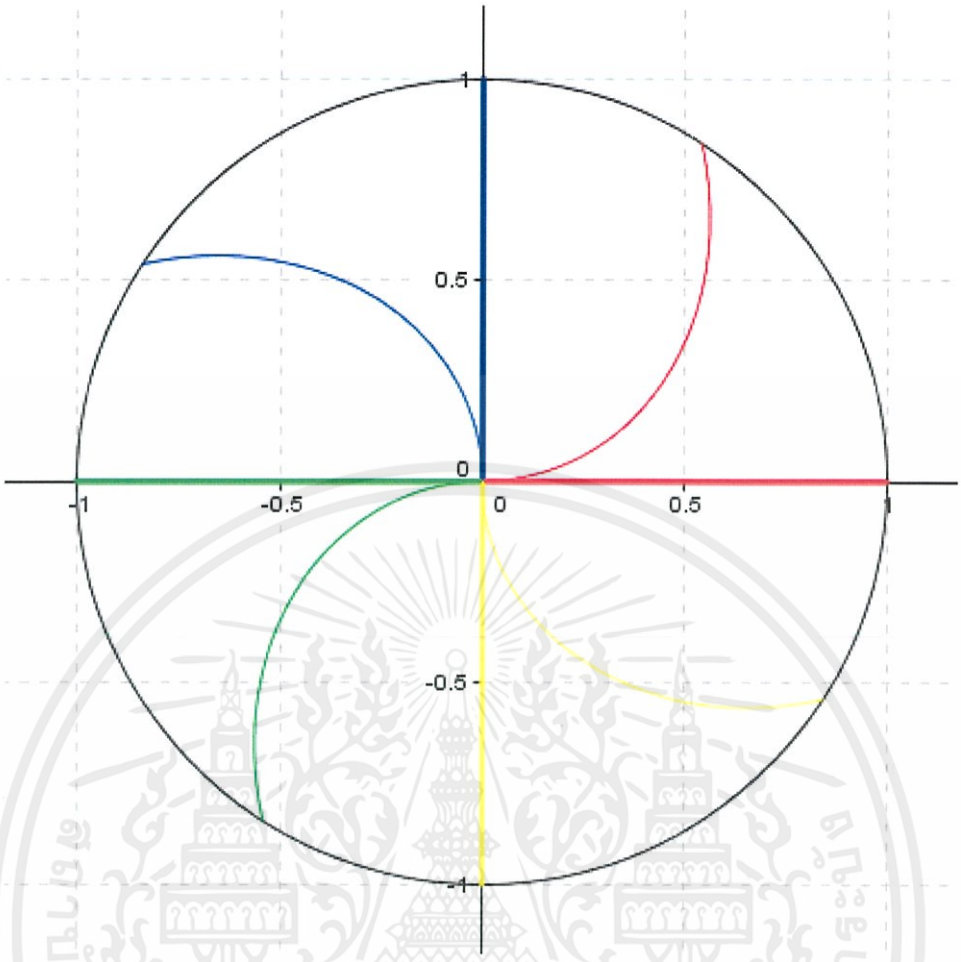
จำนวน
- $n = 1$

จุด
- A = (0.54, 0.84)
- B = (-0.84, 0.54)
- C = (-0.54, -0.84)
- D = (0.84, -0.54)

ภาคตัดกรวย
- $h: x^2 + y^2 = 1$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- $a: \begin{cases} x = 1\,t\,\cos(1\,t) \\ y = 1\,t\,\sin(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $b: \begin{cases} x = 1\,t \\ y = 0 \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $c: \begin{cases} x = -1\,t\,\sin(1\,t) \\ y = 1\,t\,\cos(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $d: \begin{cases} x = -1\,t \\ y = 0 \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $e: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1\,t \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $f: \begin{cases} x = -1\,t\,\cos(1\,t) \\ y = -1\,t\,\sin(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $g: \begin{cases} x = 0 \\ y = -1\,t \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $j: \begin{cases} x = 1\,t\,\sin(1\,t) \\ y = -1\,t\,\cos(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

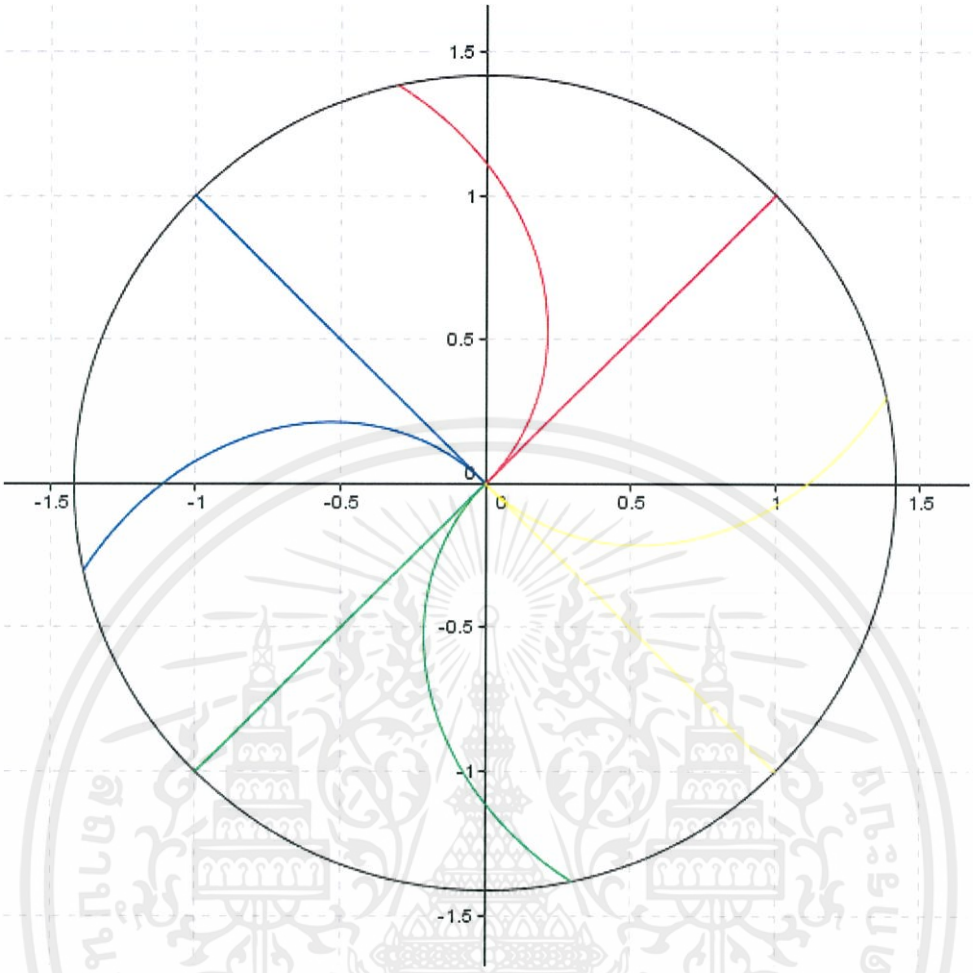
จำนวน
- $n = 1$

จุด
- A = (-0.3, 1.38)
- B = (-1.38, -0.3)
- C = (0.3, -1.38)
- D = (1.38, 0.3)

ภาคตัดกรวย
- $k: x^2 + y^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -1\,t\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t \\ y &= -1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -1\,t\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= -1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- h : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

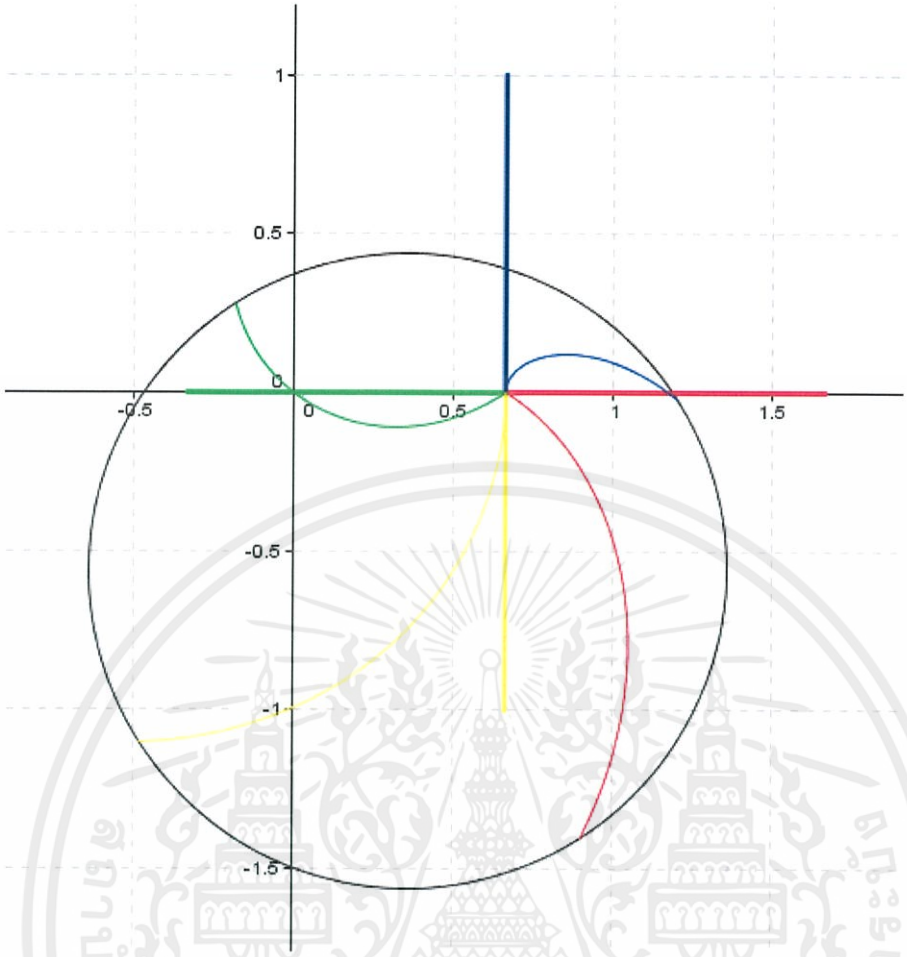
จำนวน
- $n = 1$

จุด
- $A = (-0.18, 0.28)$
- $B = (-0.48, -1.1)$
- $C = (0.9, -1.4)$
- $D = (1.2, -0.02)$

ภาคตัดกรวย
- $h: (x - 0.36)^2 + (y + 0.56)^2 = 1$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- $a: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} + 1t\right)\cos(1t) \\ y &= -\left(\frac{2}{3} + 1t\right)\sin(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $b: \left.\begin{aligned} x &= 1t + \frac{2}{3} \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $c: \left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}\cos(1t) + 1t\sin(1t) \\ y &= -\frac{2}{3}\sin(1t) + 1t\cos(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $d: \left.\begin{aligned} x &= 0.67 \\ y &= 1t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $e: \left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} - 1t \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $f: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} - 1t\right)\cos(1t) \\ y &= -\left(\frac{2}{3} - 1t\right)\sin(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $g: \left.\begin{aligned} x &= 0.67 \\ y &= -1t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $j: \left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}\cos(1t) - 1t\sin(1t) \\ y &= -\frac{2}{3}\sin(1t) - 1t\cos(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

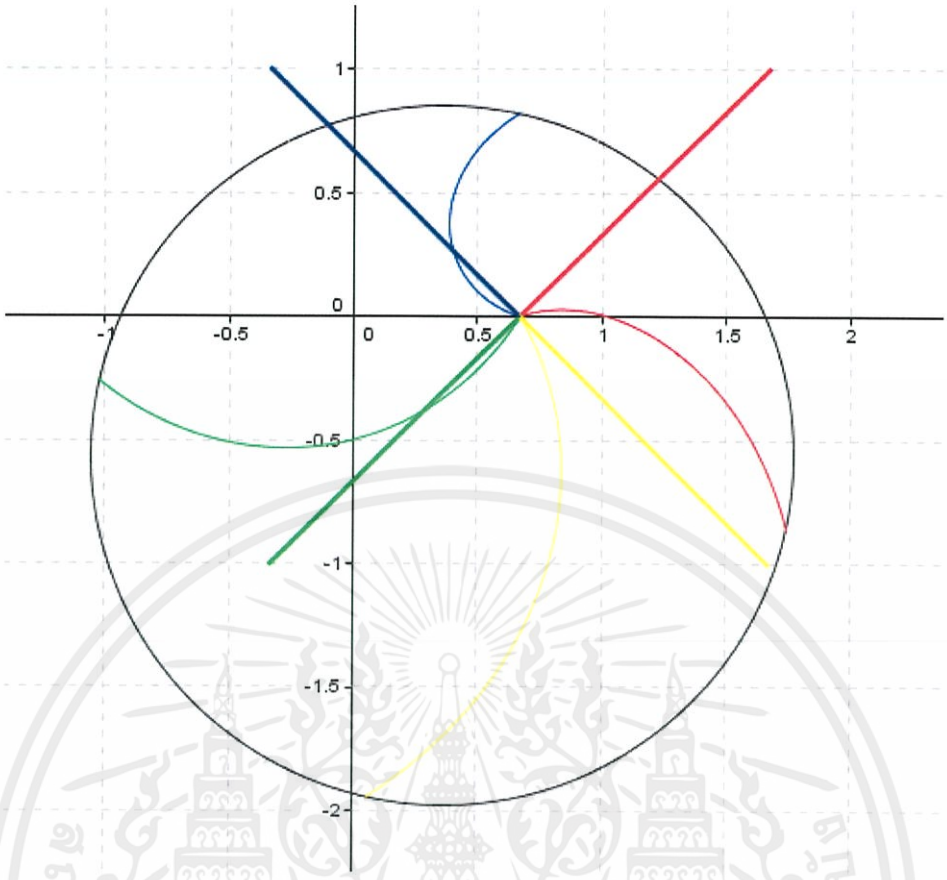
จำนวน
- n = 1

จุด
- A = (0.66, 0.82)
- B = (1.02, 0.26)
- C = (0.06, -1.94)
- D = (1.74, -0.86)

ภาคตัดกราย
- h: $(x - 0.36)^2 + (y + 0.56)^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} + 1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} - 1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} - 1\,t \\ y &= -(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} + 1\,t \\ y &= -1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- j : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

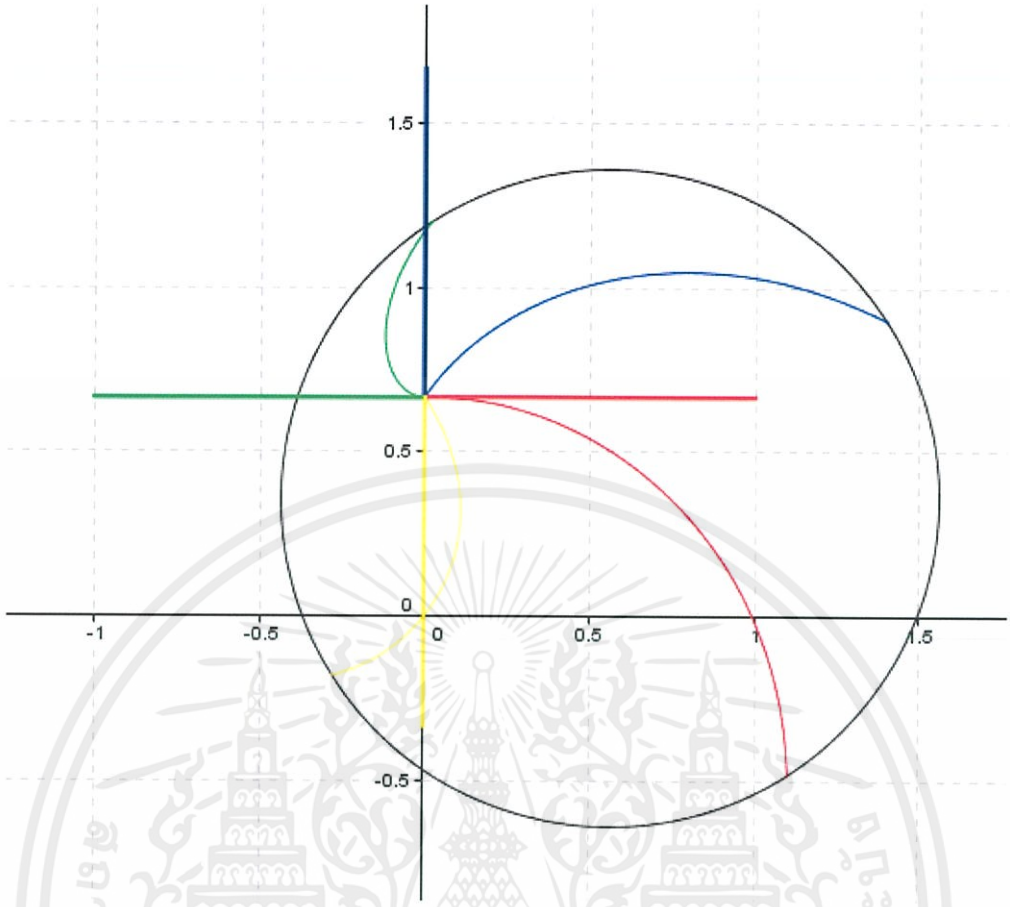
จำนวน
- n = 1

จุด
- A = (1.4, 0.9)
- B = (1.1, -0.48)
- C = (-0.28, -0.18)
- D = (0.02, 1.2)

ภาคตัดกรวย
- h: $(x - 0.56)^2 + (y - 0.36)^2 = 1$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\,\cos(1\,t) + \frac{2}{3}\sin(1\,t) \\ y &= -1\,t\,\sin(1\,t) + \frac{2}{3}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= 0.67 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 < t < 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{2}{3} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t \\ y &= 0.67 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t\,\cos(1\,t) + \frac{2}{3}\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\,\sin(1\,t) + \frac{2}{3}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{2}{3} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- j : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

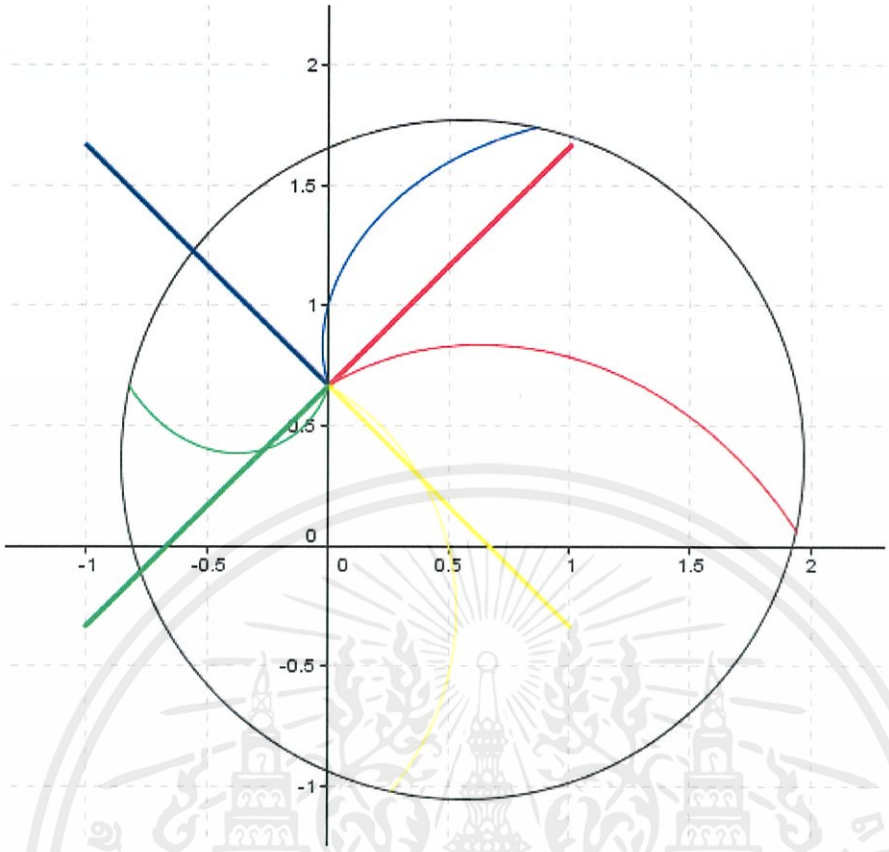
จำนวน
- n = 1

จุด
- A = (0.86, 1.74)
- B = (-0.82, 0.66)
- C = (0.26, -1.02)
- D = (1.94, 0.06)

ภาคตัดกราย
- h: $(x - 0.56)^2 + (y - 0.36)^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= 1t\cos(1t) + \left(\frac{2}{3} + 1t\right)\sin(1t) \\ y &= -1t\sin(1t) + \left(\frac{2}{3} + 1t\right)\cos(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= 1t \\ y &= \frac{2}{3} + 1t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= -1t\cos(1t) + \left(\frac{2}{3} + 1t\right)\sin(1t) \\ y &= 1t\sin(1t) + \left(\frac{2}{3} + 1t\right)\cos(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= -1t \\ y &= \frac{2}{3} + 1t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= -1t \\ y &= \frac{2}{3} - 1t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= -1t\cos(1t) + \left(\frac{2}{3} - 1t\right)\sin(1t) \\ y &= 1t\sin(1t) + \left(\frac{2}{3} - 1t\right)\cos(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= 1t \\ y &= \frac{2}{3} - 1t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- j : $\left.\begin{aligned} x &= 1t\cos(1t) + \left(\frac{2}{3} - 1t\right)\sin(1t) \\ y &= -1t\sin(1t) + \left(\frac{2}{3} - 1t\right)\cos(1t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

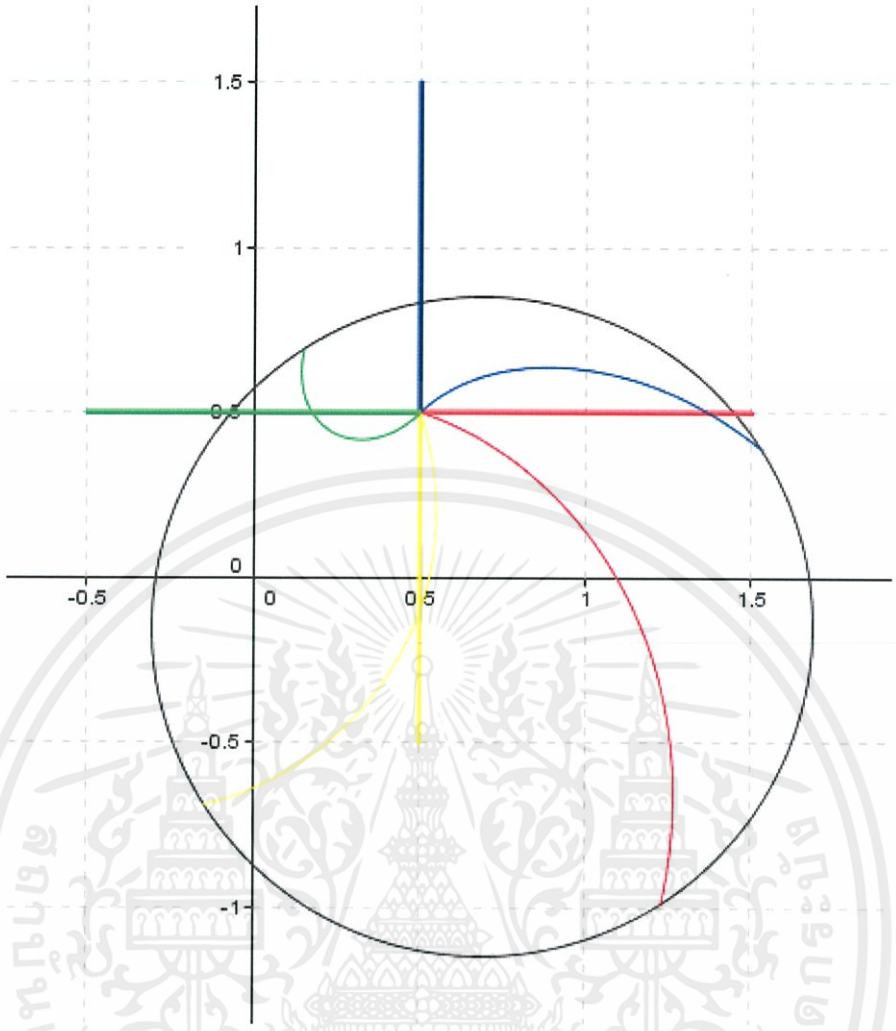
จำนวน
- $n = 1$

จุด
- A = (-0.15, -0.69)
- B = (1.23, -0.99)
- C = (1.53, 0.39)
- D = (0.15, 0.69)

ภาคตัดกราย
- $h: (x - 0.69)^2 + (y + 0.15)^2 = 1$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- $a: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) + \frac{1}{2}\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + \frac{1}{2}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $b: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + 1\,t \\ y &= 0.5 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $c: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cos(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -\frac{1}{2}\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $d: \left.\begin{aligned} x &= 0.5 \\ y &= \frac{1}{2} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $e: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - 1\,t \\ y &= 0.5 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $f: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) + \frac{1}{2}\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + \frac{1}{2}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $g: \left.\begin{aligned} x &= 0.5 \\ y &= \frac{1}{2} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $j: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cos(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -\frac{1}{2}\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จำนวน

- $n = 1$

จุด

- $A = (0.39, -1.53)$
- $B = (2.07, -0.45)$
- $C = (0.99, 1.23)$
- $D = (-0.69, 0.15)$

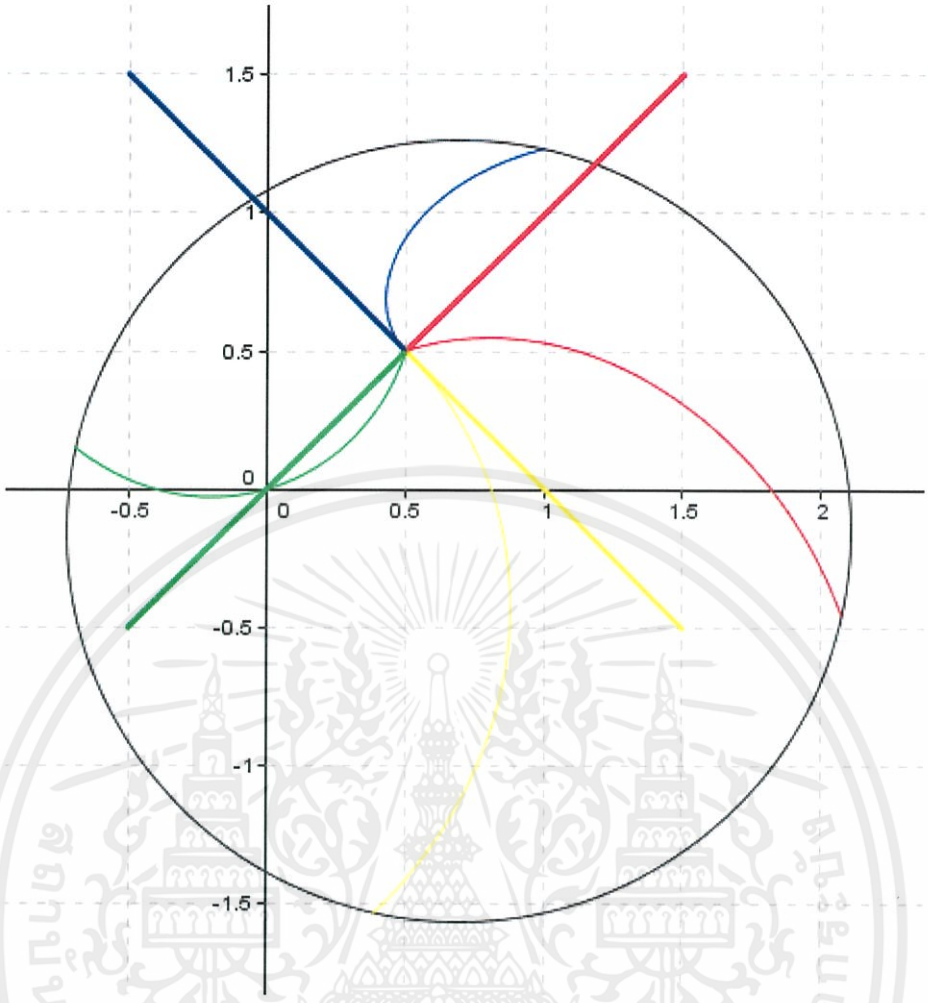
ภาคตัดกรวย

- $h: (x - 0.69)^2 + (y + 0.15)^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก

- $a: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $b: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $c: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $d: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $e: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $f: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $g: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $j: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -\left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

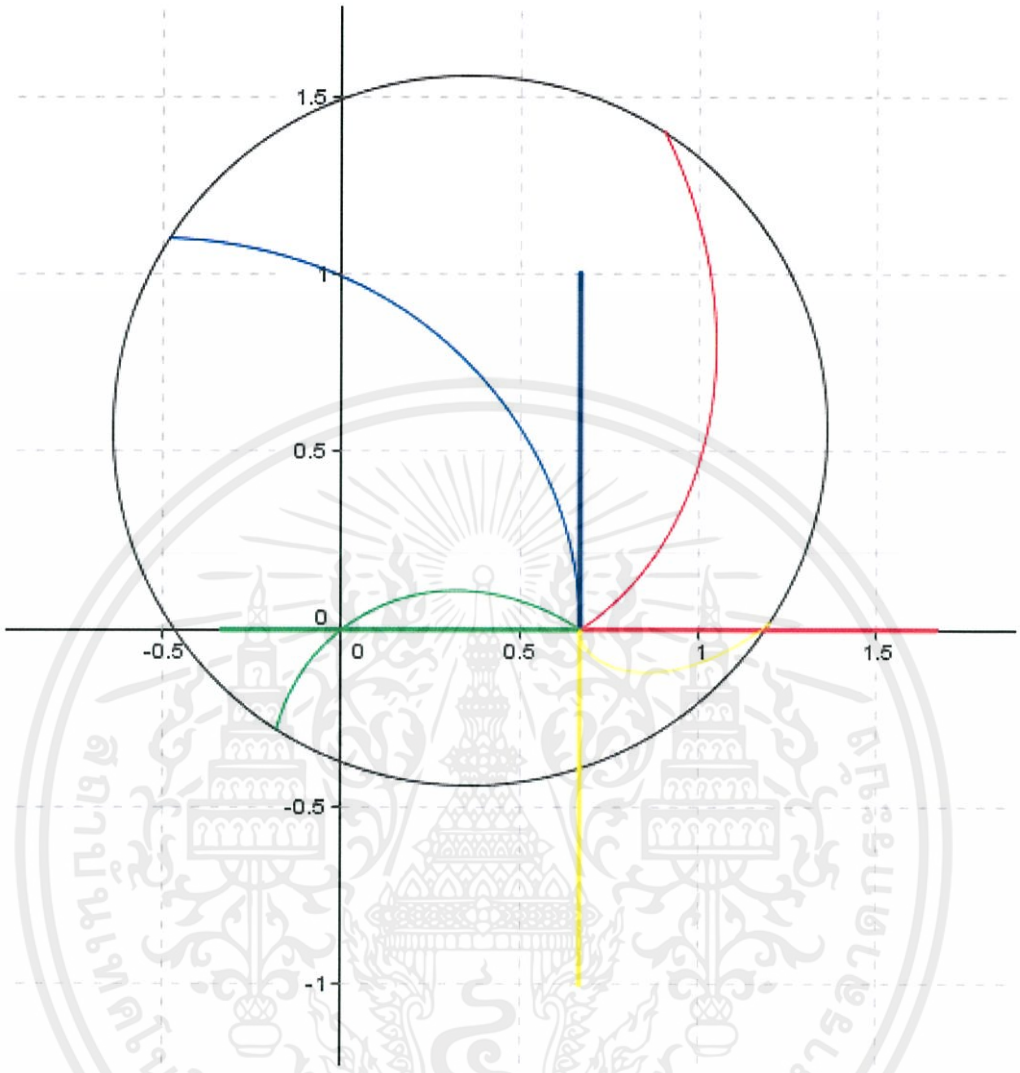
จำนวน
- $n = 1$

จุด
- $A = (0.9, 1.4)$
- $B = (-0.48, 1.1)$
- $C = (-0.18, -0.28)$
- $D = (1.2, 0.02)$

ภาคตัดกรวย
- $h: (x - 0.36)^2 + (y - 0.56)^2 = 1$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- $a: \begin{cases} x = \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \\ y = \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $b: \begin{cases} x = \frac{2}{3} + 1\,t \\ y = 0 \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $c: \begin{cases} x = \frac{2}{3}\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y = \frac{2}{3}\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $d: \begin{cases} x = 0.67 \\ y = 1\,t \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $e: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - 1\,t \\ y = 0 \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $f: \begin{cases} x = \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \\ y = \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $g: \begin{cases} x = 0.67 \\ y = -1\,t \end{cases} 0 \le t \le 1$
- $j: \begin{cases} x = \frac{2}{3}\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y = \frac{2}{3}\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{cases} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

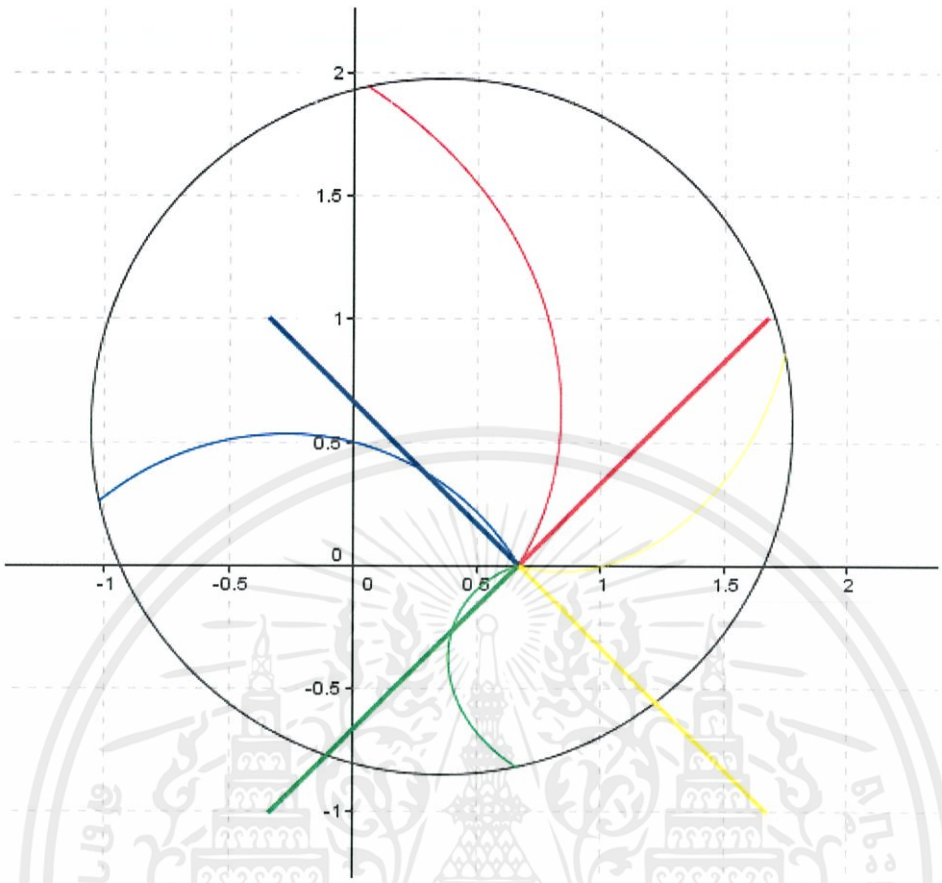
จำนวน
- n = 1

จุด
- A = (0.06, 1.94)
- B = (-1.02, 0.26)
- C = (0.66, -0.82)
- D = (1.74, 0.86)

ภาคตัดกรวย
- h: $(x - 0.36)^2 + (y - 0.56)^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} + 1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) - 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= 0.67 - 1\,t \\ y &= 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} - 1\,t \\ y &= -1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= 0.67 + 1\,t \\ y &= -1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- j : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) + 1\,t\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) - 1\,t\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

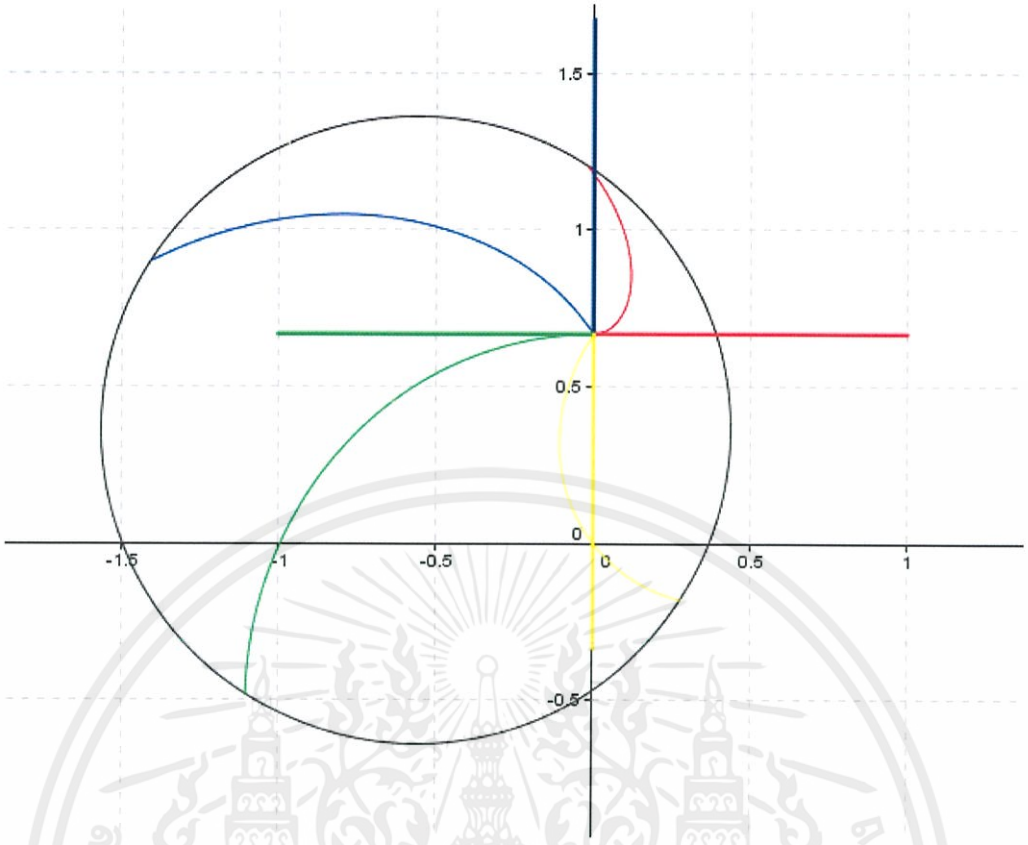
จำนวน
- n = 1

จุด
- A = (-1.4, 0.9)
- B = (-1.1, -0.48)
- C = (0.28, -0.18)
- D = (-0.02, 1.2)

ภาคตัดกรวย
- h: $(x + 0.56)^2 + (y - 0.36)^2 = 1$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\,\cos(1\,t) - \frac{2}{3}\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\,\sin(1\,t) + \frac{2}{3}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= 0.67 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= -\left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{2}{3} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t \\ y &= 0.67 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t\,\cos(1\,t) - \frac{2}{3}\sin(1\,t) \\ y &= -1\,t\,\sin(1\,t) + \frac{2}{3}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{2}{3} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- j : $\left.\begin{aligned} x &= -\left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

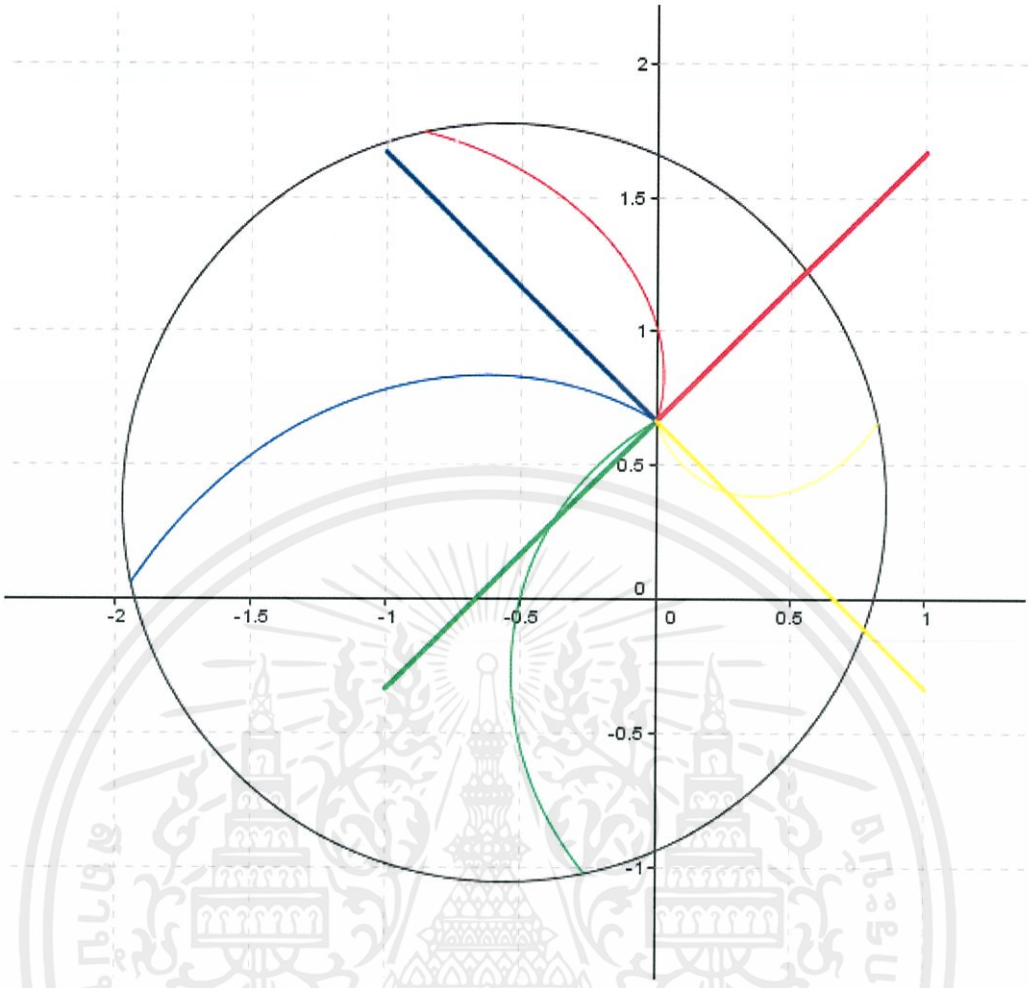
จำนวน
- n = 1

จุด
- A = (-0.86, 1.74)
- B = (-1.94, 0.06)
- C = (-0.26, -1.02)
- D = (0.82, 0.66)
- E = (0, 0.67)

ภาคตัดกรวย
- h: $(x + 0.56)^2 + (y - 0.36)^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\,\cos(1\,t) - \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\,\sin(1\,t) + \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= \frac{2}{3} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= -(1\,t)\cos(1\,t) - \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -(1\,t)\sin(1\,t) + \left(\frac{2}{3} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= -(1\,t) \\ y &= \frac{2}{3} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t \\ y &= \frac{2}{3} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= -1\,t\,\cos(1\,t) - \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= -1\,t\,\sin(1\,t) + \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t \\ y &= \frac{2}{3} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- j : $\left.\begin{aligned} x &= 1\,t\,\cos(1\,t) - \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= 1\,t\,\sin(1\,t) + \left(\frac{2}{3} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จำนวน

- $n = 1$

จุด

- $A = (0.39, 1.53)$
- $B = (-0.99, 1.23)$
- $C = (-0.69, -0.15)$
- $D = (0.69, 0.15)$

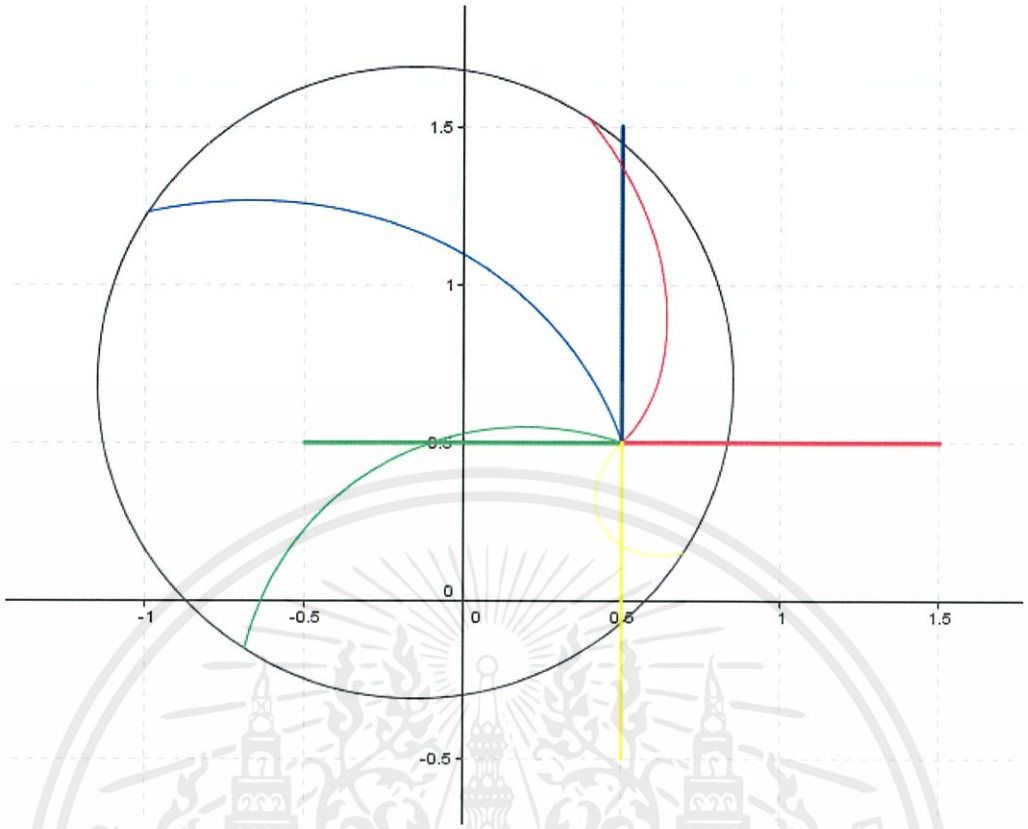
ภาคตัดกรวย

- $h: (x + 0.15)^2 + (y - 0.69)^2 = 1$

เส้นโค้งพาราเมตริก

- $a: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) - \frac{1}{2}\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + \frac{1}{2}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $b: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + 1\,t \\ y &= 0.5 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $c: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cos(1\,t) - \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \frac{1}{2}\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $d: \left.\begin{aligned} x &= 0.5 \\ y &= \frac{1}{2} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $e: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - 1\,t \\ y &= 0.5 \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $f: \left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) - \frac{1}{2}\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + \frac{1}{2}\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $g: \left.\begin{aligned} x &= 0.5 \\ y &= \frac{1}{2} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- $j: \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cos(1\,t) - \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \frac{1}{2}\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

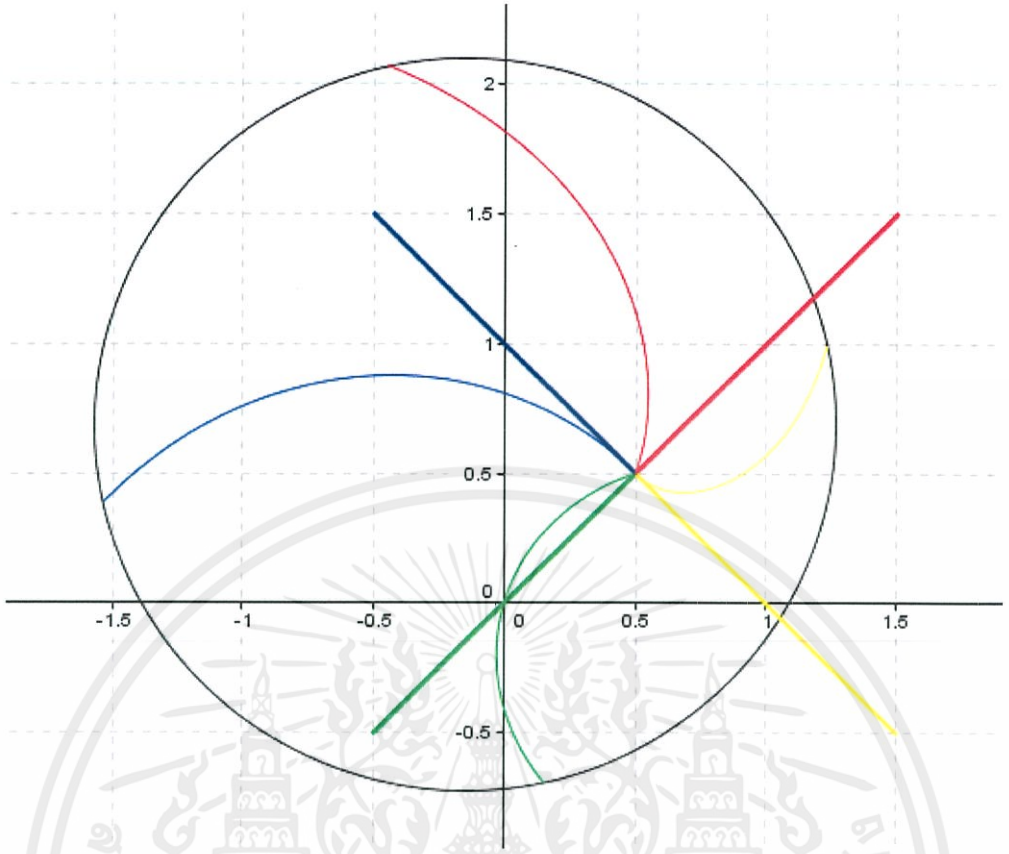
จำนวน
- n = 1

จุด
- A = (-0.45, 2.07)
- B = (-1.53, 0.39)
- C = (0.15, -0.69)
- D = (1.23, 0.99)

ภาคตัดกรวย
- h: $(x + 0.15)^2 + (y - 0.69)^2 = 2$

เส้นโค้งพาราเมตริก
- a : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) - \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- b : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- c : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) - \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- d : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} + 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- e : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- f : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) - \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- g : $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + 1\,t \\ y &= \frac{1}{2} - 1\,t \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$
- j : $\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\cos(1\,t) - \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\sin(1\,t) \\ y &= \left(\frac{1}{2} + 1\,t\right)\sin(1\,t) + \left(\frac{1}{2} - 1\,t\right)\cos(1\,t) \end{aligned}\right\} 0 \le t \le 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้