วิธีสองขั้นตอนสำหรับการหาผลเฉลยสมการไม่เชิงเส้น
ON TWO-STEP METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

ลลิดภัทร เพียรประเสริฐ
สุวรรณนิสา แก้วขอมดี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2557

วิธีสองขั้นตอนสำหรับการหาผลเฉลยสมการไม่เชิงเส้น
ON TWO-STEP METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

ลลิตภัทร เพียรประเสริฐ
สุวรรณนิสา แก้วขอมดี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2557

ON TWO-STEP METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

LALITPAT PEANPRASERT
SUWANNISA KEAWKOMDEE

A SPECIAL PROJECT EDUCATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENTS FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2014

หัวข้อปัญหาพิเศษ	วิธีสองขั้นตอนสำหรับการหาผลเฉลยสมการไม่เชิงเส้น On two-step methods for solving nonlinear equations
ชื่อนักศึกษา	นางสาวลลิตภัทร เพียรประเสริฐ 54050066 นางสาวสุวรรณนิสา แก้วขอมดี 54050103
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2557

คณะกรรมการสอบ	**ลายมือชื่อ**
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล ประธานกรรมการ	
อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการ	
ผศ. ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	วิธีสองขั้นตอนสำหรับการหาผลเฉลยสมการไม่เชิงเส้น
	On two-step methods for solving nonlinear equations
ชื่อนักศึกษา	นางสาวลลิตภัทร เพียรประเสริฐ 54050066
	นางสาวสุวรรณนิสา แก้วขอมดี 54050103
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
ปีการศึกษา	2557
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

บทคัดย่อ

การหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น สามารถทำได้โดยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลข ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการไม่เชิงเส้นและระบบสมการไม่เชิงเส้น โดยศึกษาวิธีขั้นตอนเดียว (One-step methods) และวิธีสองขั้นตอน (Two-step methods) จากงานวิจัยเรื่อง On iterative methods for nonlinear equations (M. Aslam Noor.*et al*, 2006) โดยเป็นวิธีซึ่งให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำ ผู้วิจัยได้ปรับปรุงวิธีสองขั้นตอนขึ้นมาใหม่ เพื่อหาผลเฉลยในปัญหาเดียวกัน โดยพบว่าวิธีที่พัฒนาขึ้นสามารถหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพเป็นที่น่าพอใจ

Title	ON TWO-STEP METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS
Students	Ms. Lalitpat Peanprasert 54050066
	Ms. Suwannisa Keawkomdee 54050103
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics and Computer Science
Academic Year	2014
Advisor	Assist.Prof.Dr. Nopparat Pochai

Abstract

The solutions of a nonlinear equation can be obtained by the analytical method and the numerical method. In this research, the numerical methods for solving the single nonlinear equation and the system of nonlinear equations are proposed. The one-step methods and the two-step methods for solving nonlinear equations that provided by M. Aslam Noor, et al., 2006 gives accurately solutions. The modified two-step methods are developed to approximate the solutions of their classical equations. It turned out that the modified two-step methods give good agreement solutions and computing times.

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง (ต่อ)

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การแก้ปัญหาด้านวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ มักจะทำโดยการจำลองแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ โดยสำหรับการประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขพบอุปสรรคที่สำคัญคือปัญหาการประมาณผลเฉลยของสมการพีชคณิต มีทั้งแบบตัวแปรเดียว และแบบที่เป็นระบบสมการ การประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการส่วนใหญ่ จำเป็นต้องประมาณผลเฉลยของสมการพีชคณิต ทั้งที่อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น (linear equations) และสมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equations)

ปัญหาพิเศษนี้ต้องการปรับปรุงวิธีที่ใช้ในการประมาณผลเฉลยของสมการแบบไม่เชิงเส้นที่สะดวก รวดเร็ว และแม่นยำ ซึ่งจะแบ่งพิจารณาได้เป็นวิธีการประมาณผลเฉลยวิธีขั้นตอนเดียว (One-step methods) และวิธีสองขั้นตอน (Two-step methods) แต่ในปัญหาพิเศษนี้จะนำเสนอการประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นวิธีสองขั้นตอน ซึ่งในการศึกษานี้ได้รับแรงบันดาลใจมาจากการศึกษางานวิจัยเรื่อง On iterative methods for nonlinear equations (M. Aslam Noor.*et al*, 2006)

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. ต้องการที่จะปรับปรุงวิธีเชิงตัวเลขที่มีความแม่นยำ เพื่อที่จะประมาณค่าผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น
2. ต้องการนำเสนอวิธีเชิงตัวเลข เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น
3. สร้างโปรแกรมที่จะคำนวณวิธีเชิงตัวเลขจากงานวิจัยและวิธีที่ได้ปรับปรุงขึ้น

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ปรับปรุงวิธีสองขั้นตอน (two-step method) เพื่อประมาณค่าผลเฉลยของสมการแบบไม่เชิงเส้นแบบสองขั้นตอน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้พัฒนาวิธีเชิงตัวเลขในอีกแนวทางหนึ่ง สำหรับประมาณค่าผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นและระบบสมการไม่เชิงเส้น
2. ได้พัฒนาโปรแกรมขึ้นมาใหม่ สำหรับประมาณค่าผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นและระบบสมการไม่เชิงเส้น

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการเชิงเส้น และสมการไม่เชิงเส้น (Linear equation and Non-Linear equation)

2.1.1 สมการเชิงเส้น (Linear equation)

<u>บทนิยาม 2.1</u> สมการในรูป $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ เรียกว่าสมการเชิงเส้น (Linear equation) ซึ่งมีตัวแปร n ตัวแปรคือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ตามลำดับ และ b เรียกว่า เทอมคงตัวของสมการ ระบบสมการเชิงเส้นเป็นระบบที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่มีจำนวนสมการเป็นจำนวนจำกัด ตัวอย่างเช่น

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \tag{2.1}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \tag{2.2}$$

เป็นสมการเชิงเส้นทั้ง 2 สมการ สัมประสิทธิ์ของสมการ (2.1) คือ 1,2,3 สมการ (2.2) คือ 1,1,-1,-1 และเทอมคงตัวคือ 5 และ 0 ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่าตัวแปรแต่ละตัวในสมการเชิงเส้นจะมีเลขชี้กำลังเป็น 1 (พัชรินทร์ & ไพรบูลย์, 2555)

2.1.2 สมการไม่เชิงเส้น (Non-Linear equation)

สมการไม่เชิงเส้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น $f(x) = 0$ สำหรับทุกๆ $x \in D_f$ โดยที่ $f(x)$ อาจเป็นฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial equations) หรือฟังก์ชันอดิศัย(Transcendental equations) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีเทอมที่เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric) หรือเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential functions) หรือลอการิทึม (Natural logarithmic) ตัวอย่างเช่น (พัชรินทร์ & ไพรบูลย์, 2555)

$$x^3 + 4x^2 - x + 3 = 0 \tag{2.3}$$

$$\sin x + 2 = xe^{-3x} \tag{2.4}$$

$$\ln x + \tanh^3 x = 2x \tag{2.5}$$

$$\sqrt{(x^2+1)} - 5 = 0 \tag{2.6}$$

2.2 ผลเฉลย (Solutions)

<u>บทนิยาม 2.2</u> กำหนดให้สมการเชิงเส้น $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$
ถ้าแทน $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ แล้วทำให้ $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$ เรียกลำดับ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ว่าเป็นผลเฉลยของสมการ (พัชรินทร์ & ไพรบูลย์, 2555)

2.3 ค่าคลาดเคลื่อน (Errors)

ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข เกิดจากการนำค่าประมาณ (Approximation) มาใช้แทนค่าจริง ค่าคลาดเคลื่อนแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ

1) ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Errors) เกี่ยวข้องกับการตัดค่าในพจน์ท้ายๆ ทิ้ง เพราะถือว่ามีค่าน้อยมาก ซึ่งนิยมใช้มากในเรื่องค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์

2) ค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ (Round off Errors) เกี่ยวข้องกับการเก็บค่าตัวเลขในคอมพิวเตอร์ ซึ่งค่าผลลัพธ์ที่ได้มีทศนิยมมากกว่าที่จะเก็บบันทึกไว้ได้ เช่น ค่า π เป็นค่าตัวเลขที่เก็บ ซึ่งไม่สามารถแทนค่าด้วยจำนวนที่แท้จริงได้ จึงมีค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดขึ้น

ถ้าให้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ E_t แทนค่าคลาดเคลื่อน จะได้

$$E_t = \text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}$$

<u>บทนิยาม 2.3</u> ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ $\dfrac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}}$

การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของข้อมูลแต่ละชุดนั้น ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบทางตรงได้ทันที ดังนั้นถ้าต้องการเปรียบเทียบค่าจะต้องคิดเป็นร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

$$\varepsilon_t = \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}} \times 100\%$$

<u>บทนิยาม 2.4</u> ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ε_t

$$\varepsilon_t = \left| \frac{E_t}{\text{ค่าจริง}} \right| \times 100\% \quad ; \qquad \varepsilon_t = \left| \frac{\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}}{\text{ค่าจริง}} \right| \times 100\%$$

โดยทั่วไปการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ไม่จำเป็นเสมอไปที่จะต้องทราบค่าจริง แต่จะสามารถนำค่าประมาณมาใช้แทนค่าจริงได้ และวิธีที่จะทราบได้ว่าจะนำค่าประมาณครั้งใดมาใช้ จะต้องพิจารณาจากค่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ (ε_a)

$$\varepsilon_t = \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ}}{\text{ค่าจริง}} \times 100\%$$

<u>บทนิยาม 2.5</u> ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ (ε_a)

$$\varepsilon_t = \left| \frac{\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนสุดท้าย}}{\text{ค่าประมาณสุดท้าย}} \right| \times 100\%$$

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t) และร้อยละค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ (ε_a) สามารถเป็นได้ทั้งค่าบวก หรือค่าลบ เช่น

รูปที่ 2.1 กราฟแสดงค่าจริง และค่าประมาณที่มีค่าคลาดเคลื่อน +5% (1) และ -5% (2)

จากรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าค่าประมาณ (1) หรือค่าประมาณ (2) ต่ามีค่าคลาดเคลื่อน 5% ทั้งสิ้น คือค่าประมาณ (1) มีค่าคลาดเคลื่อน +5% แต่ค่าประมาณ (2) มีค่าคลาดเคลื่อน -5% ซึ่งถ้าไม่พิจารณาเครื่องหมายทั้งค่าประมาณ (1) และ (2) ต่างมีค่าคลาดเคลื่อน 5% ด้วยกันทั้งสิ้น ในเรื่องของค่าคลาดเคลื่อน เครื่องหมายหน้าค่าคลาดเคลื่อน ไม่มีผลกับค่าที่ได้ ดังนั้นการพิจารณาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อน จะพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $|\varepsilon_s|$ เท่านั้น

<u>บทนิยาม 2.6</u> ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (ε_s) คือ

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$ เมื่อ n คือตำแหน่งที่

$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ หมายความว่า ค่าประมาณที่ได้จะมีค่าร้อยละของความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ n หรือในทางสถิติ เรียกการยอมรับได้ในระดับนัยสำคัญที่ ε_s หรือข้อมูลที่ได้ให้ความเชื่อมั่นที่ 95% นั่นเอง (กาญจนา, 2554)

2.4 ทฤษฎีเทย์เลอร์ (Taylor Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f และอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ ของ f ต่อเนื่องในช่วง I ซึ่งทั้ง a และ x อยู่ในช่วง I แล้วค่าของ $f(x)$ คือ

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n \quad (2.7)$$

เมื่อ R_n คือ เศษเหลือ โดย $R_n=\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$ (2.8)

ที่มี t เป็นตัวแปรอิสระ สมการ (2.7) เรียกว่าอนุกรมเทย์เลอร์ หรือสูตรของเทย์เลอร์ ถ้าตัดเศษเหลือทิ้งแล้ว สมการ (2.8) คือ ค่าประมาณฟังก์ชันพหุนามด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ สำหรับ R_n สามารถนำมาใช้ในทฤษฎีการหาค่าปริพันธ์ได้ (กาญจนา, 2554)

2.4.1 ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ เป็นวิธีการหนึ่งที่นิยมนำมาศึกษาในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์ทีละพจน์ และคำนวณหาค่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณแต่ละครั้งที่เพิ่มจำนวนพจน์ จนกระทั่งค่าประมาณที่ได้มีความถูกต้องถึงทศนิยมในตำแหน่งที่ต้องการ โดยพิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์ทีละพจน์เรื่อยๆ ไป เช่น พิจารณาเฉพาะพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{k+1})\approx f(x_k) \quad (2.9)$$

สมการ (2.9) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์ และจะเป็นค่าประมาณที่มีค่าเท่ากับค่าจริง กรณีถ้าฟังก์ชันที่นำมาหาค่าประมาณเป็นฟังก์ชันของค่าคงที่ และถ้าฟังก์ชันที่นำมาหาค่าประมาณไม่ใช่ค่าคงที่ ค่าประมาณที่ได้จะเพิ่มจำนวนพจน์ไปเรื่อยๆ ดังนี้

$$f(x_{k+1})\approx f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k) \quad (2.10)$$

สมการ (2.10) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง

$$f(x_{k+1})\approx f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\frac{f''(x_k)(x_{k+1}-x_k)^2}{2!} \quad (2.11)$$

สมการ (2.11) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง

ในทำนองเดียวกันการเพิ่มพจน์ไปเรื่อยๆ จะได้ ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ n คือ

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\frac{f''(x_k)(x_{k+1}-x_k)^2}{2!}+$$
$$\frac{f'''(x_k)(x_{k+1}-x_k)^3}{3!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_k)(x_{k+1}-x_k)^n}{n!}+R_n \quad (2.12)$$

เมื่อ R_n คือ เศษเหลือสำหรับค่าประมาณ

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{k+1}-x_k)^{n+1} \quad (2.13)$$

ξ คือ ค่าของ x จะอยู่ระหว่าง x_k และ x_{k+1}

เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ จะกำหนดให้ระดับขั้นหรือช่วงกว้าง คือ $h = x_{k+1} - x_k$ จากสมการ (2.12) และสมการ (2.13) จะได้ (กาญจนา, 2554)

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_k)h^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_k)h^n}{n!} + R_n \quad (2.14)$$

และ $$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (2.15)$$

2.5 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

2.5.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ $$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + R_1 \quad (2.16)$$

จะได้ $$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} + \frac{R_1}{x_{k+1} - x_k} \quad (2.17)$$

โดยที่ $$R_1 = \frac{f''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2}{2!} \quad (2.18)$$

แทนค่า R_1 ในสมการ (2.11) จะได้ $$f'(x_k) = \frac{\Delta f_k}{h} - \frac{f''(\xi)h^2}{2!} \quad (2.19)$$

หรือ $$f'(x_k) = \frac{\Delta f_k}{h} + O(h) \quad (2.20)$$

เมื่อ Δf_k คือ ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference)

h คือ ระดับขั้น หรือช่วงกว้าง (Step Size) หรือ $x_{k+1} - x_k$

ในสมการ (2.17) หรือสมการ (2.20) จะเป็นผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง เพราะการหาค่า x จะอยู่ที่ k และ $k+1$ โดยที่ในพจน์ของ $\Delta f_k / h$ เรียกว่า ผลต่างจำกัดอันดับหนึ่ง (First Finite Divided Difference) (กาญจนา, 2554)

2.5.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)

จากอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถพิจารณาช่วงกว้าง h ที่เป็นค่าย้อนหลังคือ x_k และ x_{k+1}

ได้ดังสมการ $$f(x_{k-1}) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)h^2}{2!} - \cdots \quad (2.21)$$

จะได้ $$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} = \frac{\nabla f_k}{h} \quad (2.22)$$

เมื่อ $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อน

∇f_k คือ ผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference) (กาญจนา, 2554)

2.5.3 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ
$$f\left(x_{k+1}\right)=f\left(x_k\right)+f'\left(x_k\right)h+\frac{f''\left(x_k\right)h^2}{2!}+\cdots \tag{2.23}$$

และ
$$f\left(x_{k-1}\right)=f\left(x_k\right)-f'\left(x_k\right)h+\frac{f''\left(x_k\right)h^2}{2!}-\cdots \tag{2.24}$$

จะได้
$$f\left(x_{k+1}\right)=f\left(x_{k-1}\right)+2f'\left(x_k\right)h+\frac{f'''\left(x_k\right)h^3}{3!}+\cdots \tag{2.25}$$

$$f'\left(x_k\right)=\frac{f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_{k-1}\right)}{2h}-\frac{f'''\left(x_k\right)h^2}{6}+\cdots \tag{2.26}$$

หรือ
$$f'\left(x_k\right)=\frac{f\left(x_{k+1}\right)-f\left(x_{k-1}\right)}{2h}-O\left(h^2\right) \tag{2.27}$$

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลายของการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลางเป็นการตัดปลายอันดับสอง คือพจน์ของ $O\left(h^2\right)$ ซึ่งจะแตกต่างจากการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าและผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังที่มีค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายอันดับหนึ่ง คือพจน์ $O(h)$ โดยการตัดปลายของพจน์ที่แตกต่างกัน สามารถสรุปความสัมพันธ์ของค่าคลาดเคลื่อนที่ได้กับความแตกต่างของค่า h คือ ถ้าลดค่า h ไปครึ่งหนึ่ง ค่าประมาณที่เกิดจากการตัดปลายของการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลางจะมีค่าคลาดเคลื่อน $1/4$ แต่ถ้าเป็นการประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า และผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง จะมีค่าคลาดเคลื่อน $1/2$ นั่นคือสามารถสรุปความสัมพันธ์ของการประมาณค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข และช่วงกว้างได้ดังนี้

1) ถ้าเปรียบเทียบการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ผลต่างสืบเนื่องข้างหลัง และผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง เมื่อ h มีค่าเท่ากัน การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง จะให้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด

2) ถ้าการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องที่เหมือนกัน แต่เมื่อใช้ค่า h ที่แตกต่างกัน การใช้ค่า h ที่มีค่าน้อยกว่าจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่า (กาญจนา, 2554)

2.6 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการไม่เชิงเส้น (Solution of Nonlinear Equation)

พิจารณาฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y=f\left(x\right)$ การประมาณค่ารากของสมการ หรือคำตอบ(ผลเฉลย) ของสมการ คือค่าของ x เมื่อ $y=f\left(x\right)=0$ ถ้าต้องการประมาณค่ารากของสมการพหุนามกำลังสอง $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ สามารถทำได้โดยให้ $ax^2+bx+c=0$ แล้วใช้การแยกตัวประกอบ หรือสามารถใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์ในการประมาณค่ารากของสมการ คือ

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ แต่ในกรณีที่เป็นฟังก์ชันซับซ้อน การประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นวิธีที่ง่ายที่สุด (กาญจนา, 2554)

2.6.1 วิธีทำซ้ำอย่างง่าย (Simple One Point Iteration Method)

ในการประมาณค่ารากของสมการ จะให้ $f(x) = 0$ ซึ่งสามารถเขียนในรูป $x = g(x)$ เช่น $x^2 - 2x + 3 = 0$ สามารถเขียนในรูป $x = \dfrac{x^2+3}{2}$ ซึ่งสามารถประมาณค่ารากของสมการได้ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น x_k และค่ารากของสมการที่ต้องการ $x_{k+1} = g(x_k)$ คือสมการ (2.28) ค่าประมาณที่ใช้วิธีทำซ้ำอย่างง่ายในการประมาณค่ารากของสมการ ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ คือสมการ (2.29)

$$x_{k+1} = g(x_k) \tag{2.28}$$

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right| \times 100\% < \varepsilon_s \tag{2.29}$$

สรุปขั้นตอนการประมาณค่ารากของสมการ คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกค่าเริ่มต้น x_k หรือ x_0 1 ค่า เพื่อแทนในขั้นตอนที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $x_{k+1} = g(x_k)$

ขั้นตอนที่ 3 นำค่า x_{k+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหา $|\varepsilon_a| = \left|\dfrac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right| \times 100\%$ และตรวจสอบกับเงื่อนไข $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอนที่ 2 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{k+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

หมายเหตุ

วิธีทำซ้ำอย่างง่าย เป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ โดยทั่วไปสามารถจัดสมการ $x = g(x)$ ได้หลายรูป เช่น สามารถจัดสมการได้ คือ $x = \dfrac{x^2+3}{2}$ หรือ $x = \sqrt{2x-3}$ หรือ $x = -\sqrt{2x-3}$ และพบว่า $g(x)$ มีหลายฟังก์ชัน ซึ่งจะพิจารณาได้อย่างไรว่าจะเลือกฟังก์ชันไหนในการประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีทำซ้ำอย่างง่ายที่จะได้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้า เงื่อนไขที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้า คือ $|g'(x)| < 1$ ดังนั้นจะสามารถเลือกฟังก์ชันใดก็ได้ที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ เมื่อ $|g'(x)| < 1$

<u>**ตัวอย่าง 2.7**</u> วิธีทำซ้ำอย่างง่าย เพื่อประมาณค่ารากของสมการของ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยกำหนดให้มีความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3

<u>**วิธีทำ**</u> โจทย์กำหนดให้มีความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 คือ

$$\varepsilon_s = \left(0.5 \times 10^{2-3}\right)\% = 0.05\%$$

จากโจทย์ต้องการประมาณค่ารากของสมการ ดังนั้น เมื่อ $f(x)=0$

จะได้ $e^{-x}-x=0$

$x_{k+1}=e^{-x_k}$

กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0=0$

ครั้งที่ 1 $x_1=e^{-x_0}=e^0=1$

ครั้งที่ 2 $x_2=e^{-x_1}=\frac{1}{e}=0.367879$

$$|\varepsilon_a|=\left|\frac{0.367879-1}{0.367879}\right|\times 100=171.5\%$$

ครั้งที่ 3 $x_3=e^{-x_2}=e^{-0.367879}=0.69221$

$$|\varepsilon_a|=\left|\frac{0.69221-0.367879}{0.69221}\right|\times 100=46.85\%$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งค่าประมาณที่ได้มีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้ ซึ่งสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 2.1

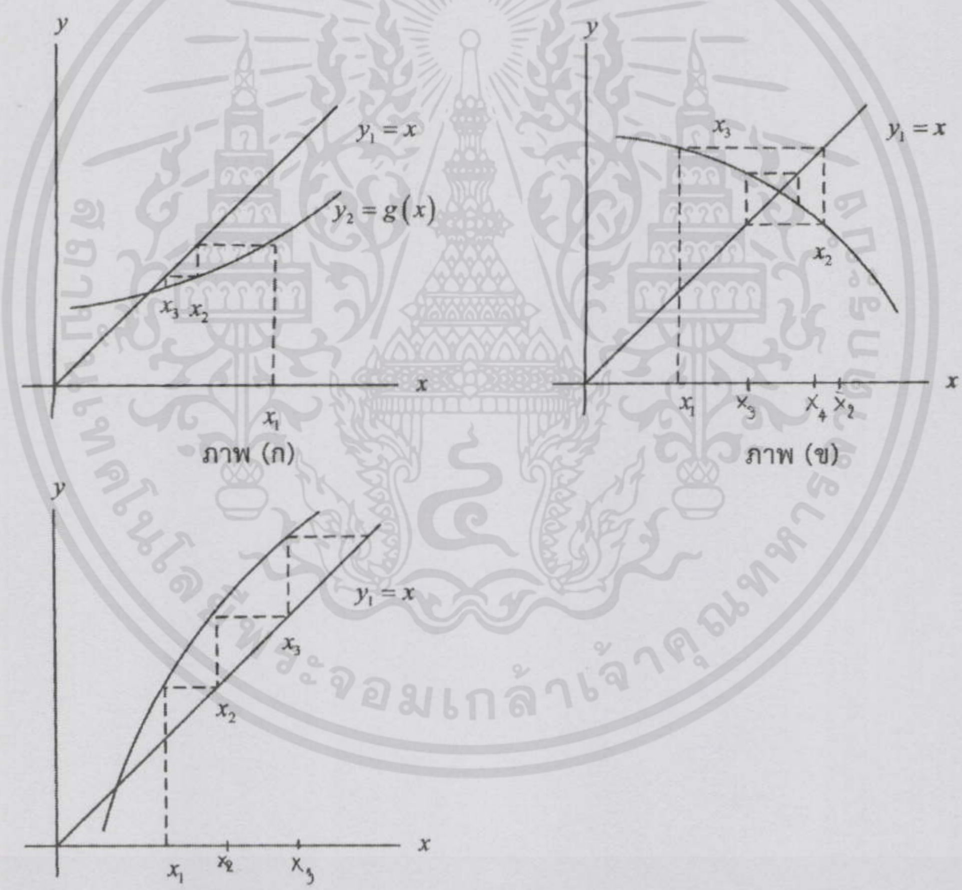
ตารางที่ 2.1 แสดงค่าประมาณที่ได้จากวิธีทำซ้ำอย่างง่าย

x_k	$f(x_k)$	$\|\varepsilon_a\|\%$
0.000000	1.000000	100.000000
1.000000	0.367879	171.8282
0.367879	0.692201	46.85364
0.692201	0.500474	38.30915
0.500474	0.606244	17.44679
0.606244	0.545396	11.15662
0.545396	0.579612	5.903351
0.579612	0.560115	3.480867
0.560115	0.571143	1.930804
0.571143	0.564879	1.108868
0.564879	0.568429	0.624419
0.568429	0.566415	0.355568
0.566415	0.567557	0.201197
0.567557	0.566909	0.114256
0.566909	0.567276	0.064752
0.567276	0.567068	0.036739

การประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีทำซ้ำอย่างง่าย นอกจากจะสามารถคำนวณได้โดยตรงตามขั้นตอนข้างต้นแล้ว สามารถหาได้โดยใช้การพิจารณาจากกราฟ ซึ่งจะต้องพิจารณารวมถึงความหมายของการลู่เข้า และการลู่ออก (กาญจนา, 2554)

2.6.1.1 การลู่เข้า และการลู่ออก (Convergence and Divergence)

วิธีเชิงกราฟ 2 เส้น (Two Curve Graphical Method) เป็นวิธีการเขียนกราฟโดยนำการเขียนกราฟของสองฟังก์ชันมาพิจารณา โดยที่จากการประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีการทำซ้ำอย่างง่าย สมการที่ใช้คือ $x = g(x)$ ดังนั้นในการพิจารณากราฟจะมี 2 สมการ คือ $y = x$ และ $x = g(x)$ โดยอาศัยหลักการที่กราฟสองเส้นตัดกัน ตรงบริเวณจุดตัดกันของกราฟ คือค่ารากของสมการนั่นเอง

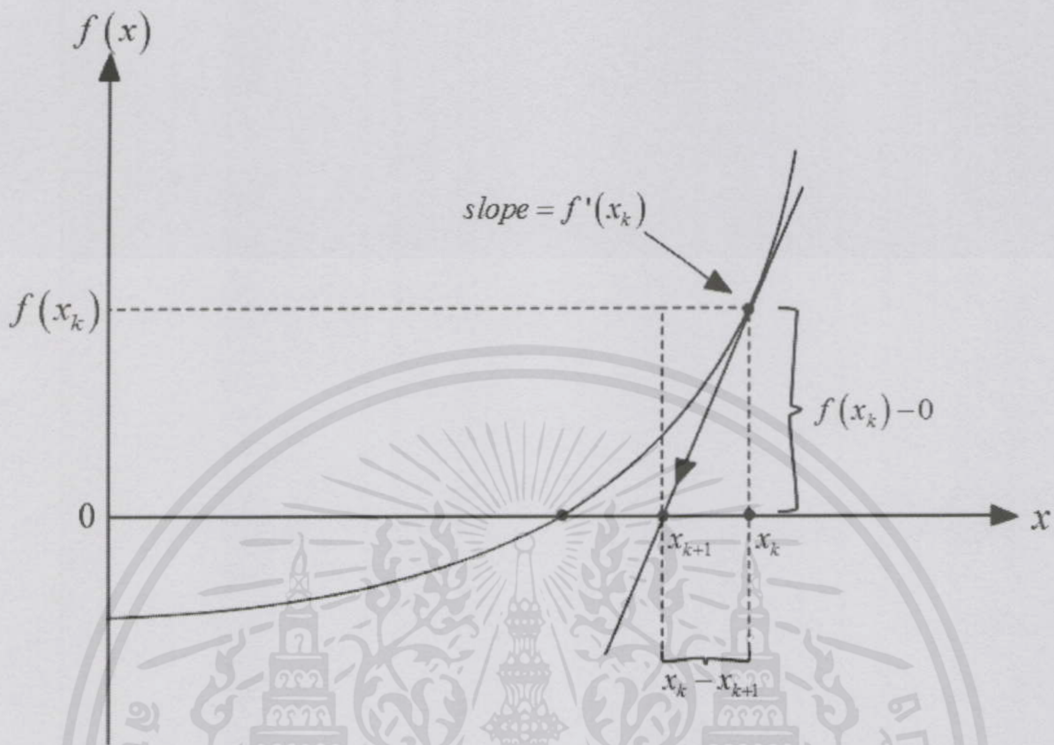


รูปที่ 2.2 กราฟแสดงลักษณะการลู่เข้าและลู่ออก

ภาพ (ก) และ (ข) เป็นลักษณะการลู่เข้า

ภาพ (ค) เป็นลักษณะการลู่ออก

2.6.2 วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



รูปที่ 2.3 กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยอาศัยความชัน

วิธีนิวตันราฟสัน เป็นวิธีที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง

จากรูปที่ 2.3 จะได้ $$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - 0}{x_k - x_{k+1}} \tag{2.30}$$

จัดสมการใหม่ จะได้ $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2.31}$$

สมการ (2.31) เรียกว่าสูตร หรือสมการนิวตันราฟสัน

สรุปขั้นตอนการประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีนิวตันราฟสัน

ขั้นตอนที่ 1 หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$

ขั้นตอนที่ 2 เลือกค่าเริ่มต้น x_0 หรือ x_k

ขั้นตอนที่ 3 หาประมาณรากของสมการจาก $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

ขั้นตอนที่ 4 นำค่า x_0 หรือ x_k ในขั้นตอน 2 มาคำนวณหา $|\varepsilon_a| = \left|\dfrac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right| \times 100\%$ และตรวจสอบกับเงื่อนไข $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไข $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{k+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

<u>ตัวอย่าง 2.8</u> วิธีนิวตันราฟสันเพื่อประมาณค่ารากของสมการโดยประมาณของ $e^{-x}-x$ โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0=0,\varepsilon_s=0.05\%$

<u>วิธีทำ</u>

จาก $$f(x)=0=e^{-x}-x$$

$$f'(x)=-e^{-x}-1$$

โดยใช้ $$x_{k+1}=x_k-\left[\frac{e^{-x_k}-x_k}{-e^{-x_k}-1}\right]$$

เมื่อ $x_0=0$

จะได้ $$x_1=x_0-\left[\frac{e^{-x_0}-x_0}{-e^{-x_0}-1}\right]$$

$$=x_0-\left[\frac{e^{0}-0}{-e^{0}-1}\right]$$

$$=0-\frac{1}{(-2)}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=x_1-\left[\frac{e^{-x_1}-x_1}{-e^{-x_1}-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}{-e^{-\frac{1}{2}}-1}\right]$$

$$=0.566311$$

ให้ทำไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าประมาณที่ได้มีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้ตามต้องการ (กาญจนา, 2554)

ตารางที่ 2.2 แสดงการคำนวณประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีนิวตันราฟสัน

k	x_k	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$	$\lvert\varepsilon_a\rvert\%$
1	0.500000	11.838300	
2	0.566311	0.146200	11.700000
3	0.567143	0.000000	0.146000
4	0.567143	0.000000	0.000000

2.6.3 วิธีเซแคนต์ (Secant Method)

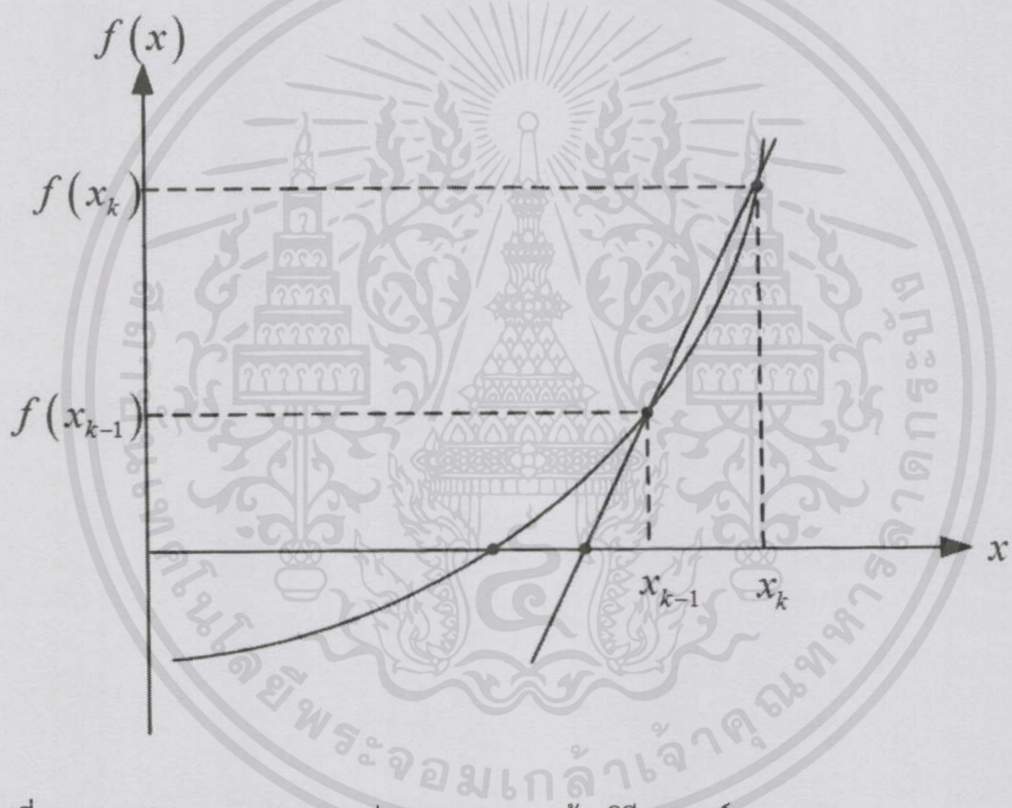
จากวิธีประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Finite Backward Divided Difference)

$$f'(x) = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} \tag{2.32}$$

แทนค่าในสูตรนิวตันราฟสัน จะได้

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \tag{2.33}$$

สมการ (2.33) เรียกว่า สูตรเซแคนต์



รูปที่ 2.4 กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีเซแคนต์

สรุปขั้นตอนการประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีเซแคนต์ ให้ทำเช่นเดียวกับวิธีนิวตันราฟสัน แต่ในขั้นตอนที่ 3 ใช้ $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}$ แทน

ตัวอย่าง 2.9 วิธีเซแคนต์ เพื่อประมาณค่ารากของสมการ $f(x)=e^{-x}-x$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_{-1}=0$ และ $x_0=1.0$ โดยให้ค่ารากของสมการจนกระทั่งค่าคลาดเคลื่อนที่ได้น้อยกว่า $\varepsilon_s=0.05\%$ (ค่าจริงคือ 0.56714329)

วิธีทำ ครั้งที่ 1

$$x_{-1}=0; f(x_{-1})=e^{-0}-0=1$$

$$x_0=1; \quad f(x_0)=e^{-1}-1=-0.63212$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)(x_{-1}-x_0)}{f(x_{-1})-f(x_0)}$$

$$x_1=1-\frac{-0.56714329-0.61270}{0.56714329}=0.61270$$

ครั้งที่ 2

$$x_0=1, x_1=0.61270$$

จาก

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_{k-1}-x_k)}{f(x_{k-1})-f(x_k)}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งค่าประมาณที่ได้มีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ในตาราง ดังนี้ (กาญจนา, 2554)

ตารางที่ 2.3 แสดงค่าประมาณที่ได้จากวิธีเซแคนต์

k	x_k	$\lvert\varepsilon_t\rvert\%$	$\lvert\varepsilon_a\rvert\%$
1	0.612700	0.800000	
2	0.563838	0.580000	11.700000
3	0.567143	0.005300	0.588000
4	0.567143	0.005300	0.000000

2.7 การหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น (Solution of Nonlinear System)

วิธีที่กล่าวในหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการประมาณค่ารากของสมการหนึ่งสมการ แต่ถ้าต้องการประมาณค่ารากของระบบสมการ ซึ่งอยู่ในรูป

$$f_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=0$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=0$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=0$$

และในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะระบบสมการไม่เชิงเส้น เช่น

$$u(x,y) = x^2 + xy - 10 = 0$$
$$v(x,y) = y + 3xy^2 - 57 = 0$$

สิ่งที่จะต้องหา คือค่า x, y โดยหาค่า x, y ที่ทำให้ $u(x,y) = 0$ และ $v(x,y) = 0$ ซึ่งสามารถหาด้วยวิธีการต่างๆ ดังต่อไปนี้ (กาญจนา, 2554)

2.7.1 วิธีทำซ้ำ (One Point Iteration Method)

พิจารณาแก้ปัญหาเรื่องการประมาณค่ารากของระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มี 2 สมการ และเนื่องจากเป็นวิธีทำซ้ำ จากการประมาณค่ารากของสมการ คือหา $x_{k+1} = g(x_k)$ ในทำนองเดียวกันการประมาณค่ารากของระบบสมการ $u(x,y) = 0$ และ $v(x,y) = 0$ แล้วจัดสมการให้อยู่ในรูป $x_{k+1} = u^*(x_k, y_k)$ และ $y_{k+1} = v^*(x_k, y_k)$ จะมีลักษณะเช่นเดียวกับตัวอย่างต่อไปนี้

<u>**ตัวอย่าง 2.10**</u> วิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่ารากของระบบสมการ

$$x^2 + xy - 10 = 0 \qquad (1)$$
$$y + 3xy^2 - 57 = 0 \qquad (2)$$

กำหนดค่าเริ่มต้น $x = 1.5$ และ $y = 3.5$ ค่าจริงคือ $x = 2$ และ $y = 3$

<u>**วิธีทำ**</u>

โดยการจัดสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $x = f(x)$ และ $y = g(x)$

จะได้
$$x_{k+1} = \frac{10 - x_k^2}{y_k}$$
$$y_{k+1} = 57 - 3x_k y_k^2$$

ครั้งที่ 1

$$x_1 = \frac{10 - (1.5)^2}{3.5} = 2.21429$$
$$y_1 = 57 - 3(2.21429)(3.5)^2 = -24.37516$$
$$\varepsilon_{t,x} = \left|\frac{2 - 2.21429}{2}\right| \times 100 = 10.71\%$$
$$\varepsilon_{t,y} = \left|\frac{3 - (-24.37516)}{3}\right| \times 100 = 912.51\%$$

ครั้งที่ 2

$$x_1 = \frac{10 - (2.21429)^2}{-24.37516} = -0.20910$$
$$y_1 = 57 - 3(-0.20910)(-24.37516)^2 = 429.709$$
$$\varepsilon_{t,x} = 110.45\% \text{ และ } \varepsilon_{t,y} = 14{,}223.63\%$$

จากวิธีทำซ้ำทั้งสองครั้งจะเห็นได้ว่า ค่าที่ประมาณได้จะลู่ออกห่างจากค่าจริง แสดงว่าสมการเริ่มต้นในการประมาณค่ารากของระบบสมการไม่เหมาะสม จะต้องทำการจัดรูปสมการใหม่

ดังนี้ $x_{k+1}=\sqrt{10-x_k y_k}$ และ $y_{k+1}=\sqrt{\dfrac{57-y_k}{3x_k}}$

ครั้งที่ 1

$$x_1=\sqrt{10-1.5(3.5)}=2.17945$$

$$y_1=\sqrt{\frac{57-3.5}{3(2.17945)}}=2.86051$$

$\varepsilon_{t,x}=8.97\%$ และ $\varepsilon_{t,y}=4.56\%$

ครั้งที่ 2

$$x_2=\sqrt{10-2.17945(2.86051)}=1.94053$$

$$y_2=\sqrt{\frac{57-2.86051}{3(1.94053)}}=3.04955$$

$\varepsilon_{t,x}=2.97\%$ และ $\varepsilon_{t,y}=1.65\%$

จากวิธีทำซ้ำทั้งสองครั้ง ถ้าแทนค่า x_k และ y_k ด้วยสมการใหม่ ค่าที่ได้จะลู่เข้าและมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริง (ค่าจริง คือ $x=2$ และ $y=3$)

<u>**ข้อสังเกต**</u>

การประมาณค่ารากของสมการด้วยวิธีทำซ้ำ ค่าประมาณที่ได้บางครั้งลู่เข้าหาค่าจริง แต่บางครั้งค่าประมาณที่ได้จะลู่ออกจากค่าจริง ดังนั้นเพื่อให้ค่าประมาณที่ได้ลู่เข้าเสมอ จะต้องทำการจัดรูปสมการใหม่ให้เป็นไปตามเงื่อนไข คือ $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|+\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|<1$ และ $\left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|+\left|\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|<1$ (กาญจนา, 2554)

2.7.2 วิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

จากอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k) \tag{2.34}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2.35}$$

สมการที่ (2.35) เรียกว่า **วิธีนิวตันราฟสัน** ในทำนองเดียวกันอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร สามารถเขียนได้เป็น

$$u_{k+1}=u_k+(x_{k+1}-x_k)\frac{\partial u_k}{\partial x}+(y_{k+1}-y_k)\frac{\partial u_k}{\partial y} \tag{2.36}$$

$$v_{k+1}=v_k+(x_{k+1}-x_k)\frac{\partial v_k}{\partial x}+(y_{k+1}-y_k)\frac{\partial v_k}{\partial y} \tag{2.37}$$

เมื่อให้ u_{k+1} และ v_{k+1} มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะสามารถจัดสมการ (2.36) และ (2.37) ได้เป็น

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}x_{k+1}+\frac{\partial u_k}{\partial y}y_{k+1}=-u_k+x_k\frac{\partial u_k}{\partial x}+y_k\frac{\partial u_k}{\partial y} \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x}x_{k+1}+\frac{\partial v_k}{\partial y}y_{k+1}=-v_k+x_k\frac{\partial v_k}{\partial x}+y_k\frac{\partial v_k}{\partial y} \tag{2.39}$$

จะได้

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u_k\dfrac{\partial v_k}{\partial y_k}-v_k\dfrac{\partial u_k}{\partial y_k}}{\dfrac{\partial u_k}{\partial x}\dfrac{\partial v_k}{\partial y}-\dfrac{\partial u_k}{\partial y}\dfrac{\partial v_k}{\partial x}} \tag{2.40}$$

และ

$$y_{k+1}=y_k-\frac{u_k\dfrac{\partial v_k}{\partial x_k}-v_k\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial u_k}{\partial x}\dfrac{\partial v_k}{\partial y}-\dfrac{\partial u_k}{\partial y}\dfrac{\partial v_k}{\partial x}} \tag{2.41}$$

หาค่าจาก Jacobian Matrix

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_k}{\partial u_k} & \dfrac{\partial x_k}{\partial v_k}\\ \dfrac{\partial y_k}{\partial u_k} & \dfrac{\partial y_k}{\partial v_k}\end{vmatrix} \tag{2.42}$$

สมการ (2.40) และสมการ (2.41) เรียกว่า วิธี **Two Equation Form of the Newton Raphson**

ตัวอย่าง 2.11 วิธี Two Equation Form of the Newton Raphson เพื่อประมาณค่ารากของ

ระบบสมการ $\quad x^2+xy-10=0 \quad (1)$

และ $\quad y+3xy^2-57=0 \quad (2)$

กำหนดค่าเริ่มต้น $x=1.5$ และ $y=3.5$ (ค่าจริงคือ $x=2\ ,y=3$) โดยกำหนด $\varepsilon_s=0.05\%$

วิธีทำ

ครั้งที่ 1

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y=2(1.5)+3.5=6.5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x=1.5$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3y^2=3(3.5)^2=36.75$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=1+6xy=1+6(1.5)(3.5)=32.5$$

ค่าของ Jacobian คือ $6.5(32.5)-1.5(36.75)=156.125$

โดยแทนค่าเริ่มต้นจะได้

$$u_0=(1.5)^2+(1.5)(3.5)-10=-2.5$$

$$v_0=3.5+3(1.5)(3.5)^2-57=1.625$$

แทนค่าในสมการ (2.40) และสมการ (2.41)

จะได้ $$x_1 = 1.5 - \frac{-2.5(32.5) - 1.625(1.5)}{156.125} = 2.03603$$

$$y_1 = 3.5 - \frac{-2.5(36.75) - 1.625(6.5)}{156.125} = 2.84388$$

$$\varepsilon_{t,x} = \left|\frac{2 - 2.03603}{2}\right| \times 100 = 1.8015\%$$

$$\varepsilon_{t,y} = \left|\frac{3 - 2.84388}{3}\right| \times 100 = 5.204\%$$

ครั้งที่ 2 $$u_1 = -0.064$$

$$v_1 = -4.756$$

ค่าของ Jacobian คือ $-3xy^2 + (2x+y)(1+6xy) = 197.785$

จะได้

$$x_2 = 2.03603 - \frac{(-0.064)(35.7413) - (-4.756)(2.03603)}{197.785} = 1.9986$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$y_2 = 3.0023$$

$$\varepsilon_{t,x} = \left|\frac{2 - 1.9986}{2}\right| \times 100 = 0.07\%$$

$$\varepsilon_{t,y} = \left|\frac{3 - 3.0023}{3}\right| \times 100 = 0.08\%$$

ให้ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่ง $\varepsilon_s = 0.05\%$ จะทำให้ได้ค่ารากของระบบสมการที่ได้เข้าใกล้ค่าจริง คือ $x = 2$, $y = 3$ (กาญจนา, 2554)

บทที่ 3
วิธีขั้นตอนเดียวและวิธีสองขั้นตอน สำหรับการประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น

3.1 วิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น

จากการศึกษางานวิจัย เรื่อง On iterative methods for nonlinear equations (M. Aslam Noor. et al, 2006) มีวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น (Solution of Nonlinear System) โดย กำหนดสมการไม่เชิงเส้นในรูป $f(x)=0$ สำหรับบาง $x \in D_f$

3.1.1 วิธีขั้นตอนเดียว

3.1.1.1 Algorithm 2.1 (M. Aslam Noor. et al, 2006)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ โดยที่

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (3.1)$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,...,n$ เมื่อ $f'(x_k) \neq 0$

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> $\sin\frac{1}{x} - x = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = \sqrt{2}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = \sin\frac{1}{x} - x = 0$

จะได้ $f'(x) = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} - 1$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = \sqrt{2}$

จะได้ $f(x_0) = -0.7645766233$ และ $f'(x_o) = -1.380122299$

ดังนั้น $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \sqrt{2} - \frac{(-0.7645766233)}{(-1.380122299)} = 0.8602216271$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 0.8602216271$

จะได้ $f(x_1) = 0.05757343738$ และ $f'(x_1) = -1.536573637$

ดังนั้น $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$= 0.8602216271 - \frac{0.05757343738}{(-1.536573637)} = 0.8976903406$$

ครั้งที่ 3 $x_2 = 0.8976903406$

จะได้ $f(x_2) = -0.0002334652564$ และ $f'(x_2) = -1.547376472$

ดังนั้น $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$$= 0.8976903406 - \frac{(-0.0002334652564)}{(-1.547376472)} = 0.8975394625$$

ครั้งที่ 4 $x_3 = 0.8975394625$

จะได้ $f(x_3) = -0.000000001887017$ และ $f'(x_3) = -1.547351563$

ดังนั้น $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

$$= 0.8975394625 - \frac{(-0.000000001887017)}{(-1.547351563)} = 0.8975394613$$

ครั้งที่ 5 $x_4 = 0.8975394613$

จะได้ $f(x_4) = -0.00000000003$

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.1

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	$\sqrt{2}$	-0.764577	-1.380122
1	0.860222	0.057573	-1.536574
2	0.897690	-0.000233	-1.547376
3	0.897540	0.000000	-1.547352
4	0.897540	0.000000	

จะเห็นว่าในการทำซ้ำ โดยวิธีนิวตันราฟสัน จะใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำเพียง 5 ครั้ง ที่ $k = 4$ ซึ่งจะให้ค่ารากที่มีความแม่นยำสูง

3.1.1.2 Algorithm 2.2 (M. Aslam Noor. et al, 2006)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ โดยที่

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}} \tag{3.2}$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2} \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}$ มีขนาดใหญ่

<u>**ตัวอย่าง 3.2**</u> $\sin\frac{1}{x} - x = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = \sqrt{2}$ โดยเลือก $p = 1$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = \sin\frac{1}{x} - x = 0$

จะได้ $f'(x) = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} - 1$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = \sqrt{2}$

จะได้ $f(x_0) = -0.7645766233$ และ $f'(x_o) = -1.380122299$

จาก $\frac{2f(x_0)}{f'(x_0) + \sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_0)\right)^2}} = -2.249603256$ เมื่อ $p = 1$

และ $\frac{2f(x_0)}{f'(x_0) - \sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_0)\right)^2}} = 0.4445228274$ เมื่อ $p = 1$

ดังนั้น $x_1 = x_0 - 0.4445228274$

$= \sqrt{2} - 0.4445228274 = 0.969690735$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 0.969690735$

จะได้ $f(x_1) = -0.1117454858$ และ $f'(x_1) = -1.546358677$

จาก $\frac{2f(x_1)}{f'(x_1) + \sqrt{\left(f'(x_1)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_1)\right)^2}} = -13.9101107$ เมื่อ $p = 1$

และ $\frac{2f(x_1)}{f'(x_1) - \sqrt{\left(f'(x_1)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_1)\right)^2}} = 0.071890154$ เมื่อ $p = 1$

ดังนั้น $x_2 = x_1 - 0.071890154$

$= 0.969690735 - 0.071890154 = 0.897800581$

ครั้งที่ 3 $x_2 = 0.897800581$

จะได้ $f(x_2) = -0.0004040496436$ และ $f'(x_2) = -1.547394347$

จาก $\dfrac{2f(x_2)}{f'(x_2)+\sqrt{(f'(x_2))^2+4p^2(f(x_2))^2}}=-3829.713777$ เมื่อ $p=1$

และ $\dfrac{2f(x_2)}{f'(x_2)-\sqrt{(f'(x_2))^2+4p^2(f(x_2))^2}}=0.0002611161252$ เมื่อ $p=1$

ดังนั้น $x_3=x_2-0.0002611161252$

$$=0.897800581-0.0002611161252=0.8975394649$$

ครั้งที่ 4 $x_3=0.8975394649$

จะได้ $f(x_3)=-0.00000000560066$

ตารางที่ 3.2 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.2

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	$\sqrt{2}$	-0.764577	-1.380122
1	0.969691	-0.111745	-1.546359
2	0.897801	-0.000404	-1.547394
3	0.897540	0.000000	-1.547352

ตารางที่ 3.3 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.2

k	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)+\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^2(f(x_k))^2}}$	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)-\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^2(f(x_k))^2}}$
0	-2.249603	0.444523
1	-13.910111	0.071890
2	-3829.713777	0.000261

จะเห็นว่าในการทำซ้ำโดย Algorithm 2.2 จะใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำ ที่ $k=3$ ซึ่งจะได้ค่ารากที่มีความแม่นยำสูง

3.1.1.3 Algorithm 2.3 (M. Aslam Noor. et al, 2006)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \dots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ โดยที่

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}} \tag{3.3}$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\dots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3} \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}$ มีขนาดใหญ่

<u>**ตัวอย่าง 3.3**</u> $\sin\frac{1}{x} - x = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = \sqrt{2}$ โดยเลือก $p = -1$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = \sin\frac{1}{x} - x = 0$

จะได้ $f'(x) = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} - 1$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = \sqrt{2}$

จะได้ $f(x_0) = -0.7645766233$ และ $f'(x_o) = -1.380122299$

จาก $\frac{2f(x_0)}{f'(x_0) + \sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_0)\right)^3}} = -2.824026623$ เมื่อ $p = -1$

และ $\frac{2f(x_0)}{f'(x_0) - \sqrt{\left(f'(x_0)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_0)\right)^3}} = 0.4631377676$ เมื่อ $p = -1$

ดังนั้น $x_1 = x_0 - 0.4631377676$

$= \sqrt{2} - 0.4631377676 = 0.9510757948$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 0.9510757948$

จะได้ $f(x_1) = -0.0829365144$ และ $f'(x_1) = -1.548696373$

จาก $\frac{2f(x_1)}{f'(x_1) + \sqrt{\left(f'(x_1)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_1)\right)^3}} = -225.2049766$ เมื่อ $p = -1$

และ $\frac{2f(x_1)}{f'(x_1) - \sqrt{\left(f'(x_1)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_1)\right)^3}} = 0.05353973749$ เมื่อ $p = -1$

ดังนั้น $x_2 = x_1 - 0.05353973749$

$= 0.9510757948 - 0.05353973749 = 0.8975360573$

ครั้งที่ 3 $x_2 = 0.8975360573$

จะได้ $f(x_2) = 0.000005267154691$

ตารางที่ 3.4 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.3

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	$\sqrt{2}$	-0.764577	-1.380122
1	0.951076	-0.082937	-1.548696
2	0.897536	0.000005	-1.547351

ตารางที่ 3.5 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.3

k	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)+\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^2(f(x_k))^2}}$	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)-\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^2(f(x_k))^2}}$
0	-2.824027	0.463138
1	-225.204977	0.053540

จะเห็นว่าในการทำซ้ำโดย Algorithm 2.3 จะใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำ ที่ $k = 2$ ซึ่งจะได้ค่ารากที่มีความแม่นยำสูง

3.1.2 วิธีสองขั้นตอน

3.1.2.1 Algorithm 2.4 (M. Aslam Noor. et al, 2006)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ $\alpha \in (0,1]$ โดยที่

$$\text{ตัวทำนาย } (predictor); z_k = x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{3.4}$$

$$\text{ตัวแก้ไข } (corrector); x_{k+1} = x_k + 4(z_k - x_k)\frac{f(x_k)}{3f(x_k) - 2f(z_k)} \tag{3.5}$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \neq 0$ และ $3f(x_k) - 2f(z_k) \neq 0$

<u>**ตัวอย่าง 3.4**</u> $\sin\frac{1}{x} - x = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = \sqrt{2}$ โดยเลือก $\alpha = 0.5$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = \sin\frac{1}{x} - x = 0$

จะได้ $f'(x) = -\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} - 1$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0=\sqrt{2}$

จะได้ $f(x_0)=-0.7645766233$ และ $f'(x_o)=-1.380122299$

Step 1: $z_0=x_0-\alpha\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$=\sqrt{2}-(0.5)\frac{-0.7645766233}{-1.380122299}=1.137217595$$

Step 2: $f(z_0)=-0.3668999195$

ดังนั้น $x_1=x_0+4(z_0-x_0)\dfrac{f(x_0)}{3f(x_0)-2f(z_0)}=0.8711516629$

ครั้งที่ 2 $x_1=0.8711516629$

จะได้ $f(x_1)=0.04075480013$ และ $f'(x_1)=-1.540776492$

Step 1: $z_1=x_1-\alpha\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$=0.8711516629-(0.5)\frac{0.04075480013}{-1.540776492}=0.8843770724$$

Step 2: $f(z_1)=0.02035034188$

ดังนั้น $x_2=x_1+4(z_1-x_1)\dfrac{f(x_1)}{3f(x_1)-2f(z_1)}=0.8975849314$

ครั้งที่ 3 $x_2=0.8975849314$

จะได้ $f(x_2)=-0.00007035844417$ และ $f'(x_2)=-1.547359313$

Step 1: $z_2=x_2-\alpha\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$$=0.8975849314-(0.5)\frac{-0.00007035844417}{-1.547359313}=0.8975621964$$

Step 2: $f(z_0)=-0.00003517927236$

ดังนั้น $x_3=x_2+4(z_2-x_2)\dfrac{f(x_2)}{3f(x_2)-2f(z_2)}=0.8975394614$

ครั้งที่ 4 $x_3=0.8975394614$

จะได้ $f(x_3)=-0.000000000184929$

ตารางที่ 3.6 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.4

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	$\sqrt{2}$	-0.764577	-1.380122
1	0.871152	0.040755	-1.540776
2	0.897585	-0.000070	-1.547359
3	0.897540	0.000000	

ตารางที่ 3.7 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.4

k	z_k	$f(z_k)$
0	1.137218	-0.366900
1	0.884377	0.020350
2	0.897562	-0.000035

จะเห็นว่าในการทำซ้ำโดย Algorithm 2.4 จะใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำ ที่ $k=3$ ซึ่งจะได้ค่ารากที่มีความแม่นยำสูง

3.1.2.2 Algorithm 2.5 (M. Aslam Noor. et al, 2006)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ และ $\alpha \in (0,1]$ โดยที่

ตัวทำนาย $(predictor); z_k = x_k - \alpha \dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^3(f(x_k))^3}}$ (3.6)

ตัวแก้ไข $(corrector); x_{k+1} = x_k + 4(z_k - x_k)\dfrac{f(x_k)}{3f(x_k) - 2f(z_k)}$ (3.7)

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \pm \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^3(f(x_k))^3} \neq 0$ และ $3f(x_k) - 2f(z_k) \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^3(f(x_k))^3}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^3(f(x_k))^3}$ มีขนาดใหญ่

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> $\sin\frac{1}{x} - x = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = \sqrt{2}$ โดยเลือก $\alpha = 0.5$ และ $p = -1$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = \sin\frac{1}{x} - x = 0$

จะได้ $f'(x) = -\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} - 1$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = \sqrt{2}$

จะได้ $f(x_0) = -0.7645766233$ และ $f'(x_o) = -1.380122299$

จาก $\dfrac{2f(x_0)}{f'(x_0) + \sqrt{(f'(x_0))^2 + 4p^3(f(x_0))^3}} = -2.824026623$ เมื่อ $p = -1$

และ $$\frac{2f(x_0)}{f'(x_0)-\sqrt{(f'(x_0))^2+4p^3(f(x_0))^3}}=0.4631377676 \qquad \text{เมื่อ } p=-1$$

จะได้ $z_0=x_0-\alpha(0.4631377676)=1.182644679$

และ $f(z_0)=-0.4343003315$

ดังนั้น $$x_1=x_0+4(z_0-x_0)\frac{f(x_0)}{3f(x_0)-2f(z_0)}=0.917270116$$

ครั้งที่ 2 $x_1=0.917270116$

จะได้ $f(x_1)=-0.03055469403$ และ $f'(x_1)=-1.549470152$

จาก $$\frac{2f(x_1)}{f'(x_1)+\sqrt{(f'(x_1))^2+4p^3(f(x_1))^3}}=-1659.711092 \qquad \text{เมื่อ } p=-1$$

และ $$\frac{2f(x_0)}{f'(x_1)-\sqrt{(f'(x_1))^2+4p^3(f(x_1))^3}}=0.01971921238 \qquad \text{เมื่อ } p=-1$$

จะได้ $z_1=x_1-\alpha(0.01971921238)=0.9074105098$

และ $f(z_1)=-0.01528100214$

ดังนั้น $$x_2=x_1+4(z_1-x_1)\frac{f(x_1)}{3f(x_1)-2f(z_1)}=0.8975485444$$

ครั้งที่ 3 $x_2=0.8975485444$

จะได้ $f(x_2)=-0.00001405478888$ และ $f'(x_2)=-1.547353374$

จาก $$\frac{2f(x_2)}{f'(x_2)+\sqrt{(f'(x_2))^2+4p^3(f(x_2))^3}}=2977709.492 \qquad \text{เมื่อ } p=-1$$

และ $$\frac{2f(x_0)}{f'(x_2)-\sqrt{(f'(x_2))^2+4p^3(f(x_2))^3}}=0.000009083115 \qquad \text{เมื่อ } p=-1$$

จะได้ $z_2=x_2-\alpha(0.000009083115)=0.8975440028$

และ $f(z_2)=-0.000007027330486$

ดังนั้น $$x_3=x_2+4(z_2-x_2)\frac{f(x_2)}{3f(x_2)-2f(z_2)}=0.8975394612$$

ครั้งที่ 4 $x_3=0.8975394612$

จะได้ $f(x_3)=0.000000000124543$

ตารางที่ 3.8 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.5

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	$\sqrt{2}$	-0.764577	-1.380122
1	0.917270	-0.030555	-1.549470
2	0.897549	-0.000014	-1.547353
3	0.897539	0.000000	

ตารางที่ 3.9 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.5

k	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)+\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^3(f(x_k))^3}}$	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)-\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^3(f(x_k))^3}}$
0	-2.824027	0.463138
1	-1659.711092	0.019719
2	2977709.492000	0.000009

ตารางที่ 3.10 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.5

k	z_k	$f(z_k)$
0	1.182645	-0.434300
1	0.907411	-0.015281
2	0.897544	-0.000007

จะเห็นว่าในการทำซ้ำโดย Algorithm 2.5 จะใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำ ที่ $k=3$ ซึ่งจะได้ค่ารากที่มีความแม่นยำสูง

3.1.2.3 Algorithm 2.6 (M. Aslam Noor. et al, 2006)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ โดยที่

ตัวทำนาย $(predictor); z_k = x_k - \dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^2(f(x_k))^2}}$ (3.8)

ตัวแก้ไข $(corrector); x_{k+1} = z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)}$ (3.9)

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \pm \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^2(f(x_k))^2} \neq 0$ และ $f'(z_k) \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^2(f(x_k))^2}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{(f'(x_k))^2 + 4p^2(f(x_k))^2}$ มีขนาดใหญ่

<u>**ตัวอย่าง 3.6**</u> $\sin\frac{1}{x} - x = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = \sqrt{2}$ โดยเลือก $p = 1$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = \sin\frac{1}{x} - x = 0$

จะได้ $f'(x) = -\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} - 1$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = \sqrt{2}$

จะได้ $f(x_0) = -0.7645766233$ และ $f'(x_o) = -1.380122299$

จาก $\dfrac{2f(x_0)}{f'(x_0) + \sqrt{(f'(x_0))^2 + 4p^2(f(x_0))^2}} = -2.249603256$ เมื่อ $p = 1$

และ $\dfrac{2f(x_0)}{f'(x_0) - \sqrt{(f'(x_0))^2 + 4p^2(f(x_0))^2}} = 0.4445228274$ เมื่อ $p = 1$

จะได้ $z_0 = x_0 - 0.4445228274 = 0.969690735$

และ $f(z_0) = -0.1117454858$ และ $f'(z_o) = -1.546358677$

ดังนั้น $x_1 = z_0 - \dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)} = 0.8974271085$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 0.8974271085$

จะได้ $f(x_1) = 0.0001738461657$ และ $f'(x_1) = -1.547333496$

จาก $\dfrac{2f(x_1)}{f'(x_1) + \sqrt{(f'(x_1))^2 + 4p^2(f(x_1))^2}} = 89.00601542$ เมื่อ $p = 1$

และ $\dfrac{2f(x_0)}{f'(x_1)-\sqrt{(f'(x_1))^2+4p^2(f(x_1))^2}}=-0.0001123519569$ เมื่อ $p=1$

จะได้ $z_1=x_1-(-0.0001123519569)=0.8975394618$

และ $f(z_1)=-0.000000000803872$ และ $f'(z_1)=-1.54735189$

ดังนั้น $x_2=z_1-\dfrac{f(z_1)}{f'(z_1)}=0.8975394613$

ครั้งที่ 3 $x_2=0.8975394613$

จะได้ $f(x_2)=-0.000000000030195$ และ $f'(x_2)=-1.54735189$

จาก $\dfrac{2f(x_2)}{f'(x_2)+\sqrt{(f'(x_2))^2+4p^2(f(x_2))^2}}=-1771.408279000$ เมื่อ $p=1$

และ $\dfrac{2f(x_0)}{f'(x_2)-\sqrt{(f'(x_2))^2+4p^2(f(x_2))^2}}=0$ เมื่อ $p=1$

จะได้ $z_2=x_2-0=0.8975394613$

และ $f(z_2)=-0.000000000030195$ และ $f'(z_2)=-1.54735189$

ดังนั้น $x_3=z_2-\dfrac{f(z_2)}{f'(z_2)}=0.8975394613$

ครั้งที่ 4 $x_3=0.8975394613$

จะได้ $f(x_3)=-0.000000000030195$

ตารางที่ 3.11 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.6

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	$\sqrt{2}$	-0.7645773	-1.380122
1	0.897427	0.000174	-1.547333
2	0.897539	0.000000	-1.549435
3	0.897539	0.000000	-1.547352

ตารางที่ 3.12 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.6

k	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)+\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^2(f(x_k))^2}}$	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)-\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^2(f(x_k))^2}}$
0	-2.249603	0.444523
1	89.006015	-0.000112
2	-1771.408279	0.000000

ตารางที่ 3.13 แสดงค่าประมาณที่ได้จาก Algorithm 2.6

k	z_k	$f(z_k)$	$f'(z_k)$
0	0.969691	-0.111745	-1.546359
1	0.897539	0.000000	-1.547352
2	0.897539	0.000000	

จะเห็นว่าในการทำซ้ำโดย Algorithm 2.6 จะใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำ ที่ $k=3$ ซึ่งจะได้ค่ารากที่มีความแม่นยำสูง

บทที่ 4
วิธีสองขั้นตอนปรับปรุง
สำหรับการประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น

4.1 วิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น

จากการศึกษาในบทที่ 3 สามารถนำ Algorithm 2.1 ถึง Algorithm 2.6 มาปรับปรุงวิธีการประมาณผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นใหม่ได้ดังนี้

4.1.1 Algorithm 1

ได้มาจากการนำ Algorithm 2.1 มาใช้เป็นตัวทำนาย (predictor) และนำ Algorithm 2.2 มาใช้เป็นตัวแก้ไข (corrector) จะได้ดังนี้

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ โดยที่

$$\text{ตัวทำนาย } (predictor): z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{4.1}$$

$$\text{ตัวแก้ไข } (corrector): x_{k+1} = z_k - \frac{2f(z_k)}{f'(z_k) \pm \sqrt{\left(f'(z_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(z_k)\right)^2}} \tag{4.2}$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \neq 0$ และ $f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2} \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}$ มีขนาดใหญ่

<u>ตัวอย่าง 4.1</u> $\sin(x) - e^{-x} = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 3$ โดยเลือก $p = 1$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$

จะได้ $f'(x) = \cos(x) + e^{-x}$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = 3$

จะได้ $f(x_0) = 0.091332940$

และ $f'(x_0) = -0.940205428$

Step 1 : $z_0 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$= 3 - \frac{-0.091332940}{-0.940205428} = 3.097141472$$

Step 2 : จะได้ $f(z_0) = -0.000741617$ และ $f'(z_0) = -0.953834048$

จาก $\dfrac{2f(z_0)}{f'(z_0) + \sqrt{(f'(z_0))^2 + 4p^2(f(z_0))^2}} = -1286.15532023$ เมื่อ $p = 1$

และ $\dfrac{2f(z_0)}{f'(z_0) - \sqrt{(f'(z_0))^2 + 4p^2(f(z_0))^2}} = 0.000777511$ เมื่อ $p = 1$

ดังนั้น $x_1 = z_0 - 0.000777511 = 3.096363961$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 3.096363961$

จะได้ $f(x_1) = -0.000000028$

และ $f'(x_1) = -0.953764056$

Step 1 : $z_1 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$= 3.096363961 - \frac{-0.000000028}{-0.953764056} = 3.096363932$$

Step 2 : จะได้ $f(z_1) = 0.000000000$ และ $f'(z_1) = -0.953764053$

จาก $\dfrac{2f(z_1)}{f'(z_1) + \sqrt{(f'(z_1))^2 + 4p^2(f(z_1))^2}}$ ไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อ $p = 1$

และ $\dfrac{2f(z_1)}{f'(z_1) - \sqrt{(f'(z_1))^2 + 4p^2(f(z_1))^2}} = 0.000000000$ เมื่อ $p = 1$

ดังนั้น $x_2 = z_1 - 0.000000000 = 3.096363932$

$$\vdots$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

ครั้งที่ 3 $x_2 = 3.096363932$

จะได้ $f(x_2) = 0.000000000$

ดังนั้น ค่ารากของสมการที่ประมาณได้คือ $x = 3.096363932$

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.1

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	z_k
0	3.000000	0.091333	-0.940205	3.097141
1	3.096364	0.000000	-0.953764	3.096364
2	3.096364	0.000000		

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.1

k	$f(z_k)$	$f'(z_k)$
0	-0.000742	-0.953834
1	0.000000	-0.953764

ตารางที่ 4.3 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.1

k	$\dfrac{2f(z_k)}{f'(z_k)+\sqrt{(f'(z_k))^2+4p^2(f(z_k))^2}}$	$\dfrac{2f(z_k)}{f'(z_k)-\sqrt{(f'(z_k))^2+4p^2(f(z_k))^2}}$
0	-1286.155320	0.000778
1	ไม่สามารถหาค่าได้	0.000000

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ชื่อไฟล์ Algorithm1.m (ดูที่ภาคผนวกหน้า 65)

ตารางที่ 4.4 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 1

No.	Equation	x_0	**จำนวนรอบ**
1	$x^{10}-1=0$	0.5	15
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	20
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	10
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	$>2000^*$
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	$>2000^*$
6	$1/x-1=0$	2.7	หาค่าไม่ได้
7	$e^{1-x}-1=0$	3	38^*
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	330^*
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	2^*
10	$\sin(x)=0$	1.5	116^*
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	29^*
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	88^*
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	1^*
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	13^*

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.1.2 Algorithm 2

ได้ปรับปรุงมาจาก Algorithm 2.4 โดยให้ α มีค่าเท่ากับ 1 จะได้ดังนี้
กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ โดยที่

ตัวทำนาย $(predictor): z_k = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (4.3)

ตัวแก้ไข $(corrector): x_{k+1} = x_k + 4(z_k - x_k)\dfrac{f(x_k)}{3f(x_k)-2f(z_k)}$ (4.4)

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \neq 0$ และ $3f(x_k)-2f(z_k) \neq 0$

<u>ตัวอย่างที่ 4.2</u> $\sin(x) - e^{-x} = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 3$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$

จะได้ $f'(x) = \cos(x) + e^{-x}$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = 3$

จะได้ $f(x_0) = 0.091332940$

และ $f'(x_0) = -0.940205428$

Step 1 : $z_0 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= 3 - \dfrac{-0.091332940}{-0.940205428} = 3.097141472$

Step 2 : จะได้ $f(z_0) = -0.000741617$

ดังนั้น $x_1 = x_0 + 4(z_0 - x_0)\dfrac{f(x_0)}{3f(x_0)-2f(z_0)} = 3.003240863$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 3.003240863$

จะได้ $f(x_1) = 0.088284866$

และ $f'(x_1) = -0.940818671$

Step 1 : $z_1 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$= 3.003240863 - \dfrac{0.088284866}{-0.940818671} = 3.097079207$

Step 2 : จะได้ $f(z_1) = -0.000682226$

ดังนั้น $x_2 = x_1 + 4(z_1 - x_1)\dfrac{f(x_1)}{3f(x_1)-2f(z_1)} = 3.006162940$

$\vdots$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

ตารางที่ 4.5 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.2

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	3.000000	0.091333	-0.940205
1	3.003241	0.088285	-0.940819
2	3.006163	0.085535	-0.941362
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	3.041280	0.052371	-0.947199
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 4.6 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.2

k	z_k	$f(z_k)$
0	3.097141	-0.000742
1	3.097079	-0.000682
2	3.097026	-0.000631
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	3.096570	-0.000197
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ชื่อไฟล์ Algorithm2.m (ดูที่ภาคผนวกหน้า 66)

ตารางที่ 4.7 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 2

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
1	$x^{10}-1=0$	0.5	หาค่าไม่ได้
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	6
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	หาค่าไม่ได้
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	6^*
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	หาค่าไม่ได้
6	$1/x-1=0$	2.7	หาค่าไม่ได้
7	$e^{1-x}-1=0$	3	หาค่าไม่ได้
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	หาค่าไม่ได้

ตารางที่ 4.7 (ต่อ) แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 2

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	หาค่าไม่ได้
10	$\sin(x)=0$	1.5	19^{*}
11	$e^{x}+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	หาค่าไม่ได้
12	$(x-2)^{2}-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้
13	$e^{x}-3x^{2}=0$	0.5	หาค่าไม่ได้
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	17^{*}
15	$x^{2}-10\cos(x)=0$	-2	หาค่าไม่ได้

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.1.3 Algorithm 3

ได้มาจากการนำ Algorithm 2.1 มาใช้เป็นตัวทำนาย (predictor) และนำ Algorithm 2.3 ที่ปรับปรุงแล้วมาใช้เป็นตัวแก้ไข (corrector) จะได้ดังนี้

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ และ $\alpha \in (0,1]$ โดยที่

$$\text{ตัวทำนาย } (predictor): z_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{4.5}$$

$$\text{ตัวแก้ไข } (corrector): x_{k+1} = z_k - \alpha \frac{2f(z_k)}{f'(z_k) \pm \sqrt{\left(f'(z_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(z_k)\right)^3}} \tag{4.6}$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \neq 0$ และ

$f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3} \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}$ มีขนาดใหญ่

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3**</u> $\sin(x) - e^{-x} = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 3$ โดยเลือก $p = -1$ และ $\alpha = 0.5$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$

จะได้ $f'(x) = \cos(x) + e^{-x}$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = 3$

จะได้ $f(x_0) = 0.091332940$

และ $f'(x_0) = -0.940205428$

Step 1 : $z_0 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$= 3 - \frac{-0.091332940}{-0.940205428} = 3.097141472$$

Step 2 : จะได้ $f(z_0) = -0.000741617$ และ $f'(z_0) = -0.953834048$

จาก $\dfrac{2f(z_0)}{f'(z_0) + \sqrt{(f'(z_0))^2 + 4p^3(f(z_0))^3}} = -1734257.11973$ เมื่อ $p = -1$

และ $\dfrac{2f(z_0)}{f'(z_0) - \sqrt{(f'(z_0))^2 + 4p^3(f(z_0))^3}} = 0.000777512$ เมื่อ $p = -1$

ดังนั้น $x_1 = z_0 - (0.5)0.000777512 = 3.096752717$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 3.096752717$

จะได้ $f(x_1) = -0.000370815$

และ $f'(x_1) = -0.953799131$

Step 1 : $z_1 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$= 3.096752717 - \frac{-0.000370815}{-0.953799131} = 3.096363940$$

Step 2 : จะได้ $f(z_1) = -0.000000007$ และ $f'(z_1) = -0.953764054$

จาก $\dfrac{2f(z_1)}{f'(z_1) + \sqrt{(f'(z_1))^2 + 4p^3(f(z_1))^3}} = -122739852.2500$ เมื่อ $p = -1$

และ $\dfrac{2f(z_1)}{f'(z_1) - \sqrt{(f'(z_1))^2 + 4p^3(f(z_1))^3}} = 0.000000007$ เมื่อ $p = -1$

ดังนั้น $x_2 = z_1 - (0.5)0.000000007 = 3.096363936$

$$\vdots$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

ครั้งที่ 4 $x_3 = 3.096363932$

จะได้ $f(x_3) = 0.000000000$

ดังนั้น ค่ารากของสมการที่ประมาณได้คือ $x = 3.096363932$

ตารางที่ 4.8 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.3

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	z_k
0	3.000000	0.091333	-0.940205	3.097141
1	3.096753	-0.000371	-0.953799	3.096364
2	3.096364	0.000000	-0.953764	3.096364
3	3.096364	0.000000		

ตารางที่ 4.9 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.3

k	$f(z_k)$	$f'(z_k)$
0	-0.000742	-0.953834
1	0.000000	-0.953764
2	0.000000	-0.953764

ตารางที่ 4.10 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.3

k	$\dfrac{2f(z_k)}{f'(z_k)+\sqrt{(f'(z_k))^2+4p^3(f(z_k))^3}}$	$\dfrac{2f(z_k)}{f'(z_k)-\sqrt{(f'(z_k))^2+4p^3(f(z_k))^3}}$
0	-1734257.119737	0.000778
1	-122739852.25	0.000000
2	ไม่สามารถหาค่าได้	0.000000

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ชื่อไฟล์ Algorithm3.m (ดูที่ภาคผนวกหน้า 66)

ตารางที่ 4.11 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 3

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
1	$x^{10}-1=0$	0.5	23
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	2
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	17
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	16*
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	16
6	$1/x-1=0$	2.7	หาค่าไม่ได้
7	$e^{1-x}-1=0$	3	8

ตารางที่ 4.11 (ต่อ) แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 3

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	16^*
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	17
10	$\sin(x)=0$	1.5	3^*
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	16^*
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	16^*
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	13^*
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	16^*

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.1.4 Algorithm 4

ได้มาจากการใช้ตัวทำนายจาก Algorithm 2.4 และและใช้ตัวแก้ไขจาก Algorithm 2.6 จะได้ดังนี้

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ $\alpha \in (0,1]$ โดยที่

ตัวทำนาย $(predictor): z_k = x_k - \alpha \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (4.7)

ตัวแก้ไข $(corrector): x_{k+1} = z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)}$ (4.8)

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \neq 0$ และ $f'(z_k) \neq 0$

<u>ตัวอย่างที่ 4.4</u> $\sin(x)-e^{-x}=0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0=3$ โดยเลือก $\alpha=0.5$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x)=\sin(x)-e^{-x}$

จะได้ $f'(x)=\cos(x)+e^{-x}$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0=3$

จะได้ $f(x_0)=0.091332940$

และ $f'(x_0)=-0.940205428$

Step 1 : $z_0 = x_0 - \alpha \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= 3-(0.5)\dfrac{(0.091332940)}{-0.940205428} = 3.048570736$

Step 2 : จะได้ $f(z_0)=0.045461160$

และ $f'(z_0) = -0.948249919$

ดังนั้น $x_1 = z_0 - \alpha \dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$

$$= 3.048570736 - \frac{0.045461160}{-0.948249919} = 3.096512907$$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 3.096512907$

จะได้ $f(x_1) = -0.000142088$

และ $f'(x_1) = -0.953777513$

Step 1 : $z_1 = x_1 - \alpha \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$= 3.096512907 - (0.5)\frac{(-0.000142088)}{-0.953777513} = 3.096438420$$

Step 2 : จะได้ $f(z_1) = -0.000071044$

และ $f'(z_1) = -0.953770786$

ดังนั้น $x_2 = z_1 - \dfrac{f(z_1)}{f'(z_1)}$

$$= 3.096438420 - \frac{-0.000071044}{-0.953770786} = 3.096363933$$

$$\vdots$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

ครั้งที่ 3 $x_2 = 3.096363933$

จะได้ $f(x_2) = 0.000000000$

ดังนั้น ค่ารากของสมการที่ประมาณได้คือ $x = 3.096363933$

ตารางที่ 4.12 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.4

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	3.000000	0.091333	-0.940205
1	3.096513	-0.000142	-0.953778
2	3.096364	0.000000	

ตารางที่ 4.13 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.4

k	z_k	$f(z_k)$	$f'(z_k)$
0	3.048571	0.045461	-0.948250
1	3.096438	-0.000071	-0.953771

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ชื่อไฟล์ Algorithm4.m (ดูที่ภาคผนวกหน้า 67)

ตารางที่ 4.14 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 4

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
1	$x^{10}-1=0$	0.5	หาค่าไม่ได้
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	3
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	1^*
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	3
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	3
6	$1/x-1=0$	2.7	5
7	$e^{1-x}-1=0$	3	3^*
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	3
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	3
10	$\sin(x)=0$	1.5	4^*
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	2
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	3
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	3
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	3

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.1.5 Algorithm 5

ได้มาจากการใช้ตัวทำนายจาก Algorithm 2.5 และใช้ตัวแก้ไขจาก Algorithm 2.6 จะได้ดังนี้

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ และ $\alpha \in (0,1]$ โดยที่

$$\text{ตัวทำนาย } (predictor): z_k = x_k - \alpha \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}} \tag{4.9}$$

$$\text{ตัวแก้ไข } (corrector): x_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \tag{4.10}$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3} \neq 0$ และ $f'(z_k) \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^3\left(f(x_k)\right)^3}$ มีขนาดใหญ่

<u>**ตัวอย่างที่ 4.5**</u> $\sin(x) - e^{-x} = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 3$ โดยเลือก $p = -1$ และ $\alpha = 0.5$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$

จะได้ $f'(x) = \cos(x) + e^{-x}$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = 3$

จะได้ $f(x_0) = 0.091332940$

และ $f'(x_0) = -0.940205428$

Step 1 : $z_0 = x_0 - \alpha \dfrac{2f(x_0)}{f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 + 4p^3(f(x_0))^3}}$

จาก $\dfrac{2f(x_0)}{f'(x_0) + \sqrt{(f'(x_0))^2 + 4p^3(f(x_0))^3}} = -112.614184$ เมื่อ $p = -1$

และ $\dfrac{2f(x_0)}{f'(x_0) - \sqrt{(f'(x_0))^2 + 4p^3(f(x_0))^3}} = -0.097225339$ เมื่อ $p = -1$

จะได้ $z_0 = 3 - (0.5)(-0.097225339) = 59.307092181$

Step 2 : จะได้ $f(z_0) = 0.373860833$ และ $f'(z_0) = 9.077362526 \times 10^{16}$

ดังนั้น $x_1 = z_0 - \dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$

$$= 59.307092181 - \frac{0.373860833}{9.077362526 \times 10^{16}} = 59.307092181$$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 59.307092181$

จะได้ $f(x_1) = 0.373860833$

และ $f'(x_1) = -0.927484813$

Step 1 : $z_1 = x_1 - \alpha \dfrac{2f(x_1)}{f'(x_1) \pm \sqrt{(f'(x_1))^2 + 4p^3(f(x_1))^3}}$

จาก $\dfrac{2f(x_1)}{f'(x_1) + \sqrt{(f'(x_1))^2 + 4p^3(f(x_1))^3}} = -6.204603953$ เมื่อ $p = -1$

และ $\dfrac{2f(x_1)}{f'(x_1) - \sqrt{(f'(x_1))^2 + 4p^3(f(x_1))^3}} = -0.431097958$ เมื่อ $p = -1$

จะได้ $z_1 = 59.307092181 - (0.5)(-0.431097958) = 59.522641160$

Step 2 : จะได้ $f(z_1) = 0.166835449$ และ $f'(z_1) = 9.378637343 \times 10^{16}$

ดังนั้น $x_2 = z_1 - \dfrac{f(z_1)}{f'(z_1)}$

$$= 59.522641160 - \frac{0.166835449}{9.378637343 \times 10^{16}} = 59.522641160$$

$$\vdots$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

ครั้งที่ 32 $x_{31} = 59.690260418$

จะได้ $f(x_{31}) = 0.000000000$

ดังนั้น ค่ารากของสมการที่ประมาณได้คือ $x = 59.690260418$

ตารางที่ 4.15 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.5

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	3.000000	0.091333	-0.940206
1	59.307092	0.373861	-0.927485
2	59.522641	0.166835	-0.985985
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	59.690260	0.000000	-1.000000
31	59.690260	0.000000	

ตารางที่ 4.16 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.5

k	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)+\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^3(f(x_k))^3}}$	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)-\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^3(f(x_k))^3}}$
0	-112.614184	-0.097225
1	-6.204604	-0.431098
2	-35.253645	-0.170023
⋮	⋮	⋮
30	ไม่สามารถหาค่าได้	0.000000

ตารางที่ 4.17 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.5

k	z_k	$f(z_k)$	$f'(z_k)$
0	59.307092	0.373861	9.077363×10^{16}
1	59.522641	0.166835	9.378637×10^{16}
2	59.607653	0.082514	9.499881×10^{16}
⋮	⋮	⋮	⋮
30	59.690260	0.000000	9.619030×10^{16}

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ชื่อไฟล์ Algorithm5.m (ดูที่ภาคผนวกหน้า 67)

ตารางที่ 4.18 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 5

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
1	$x^{10}-1=0$	0.5	3
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	3
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	4
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	4
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	4
6	$1/x-1=0$	2.7	หาค่าไม่ได้
7	$e^{1-x}-1=0$	3	6
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	3
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	3

ตารางที่ 4.18 (ต่อ) แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 5

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
10	$\sin(x)=0$	1.5	4^*
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	5
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	4
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	3
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	3

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.1.6 Algorithm 6

ได้มาจากการนำตัวทำนายของ Algorithm 2.6 ที่ปรับปรุงแล้วมาใช้ และใช้ตัวแก้ไขจาก Algorithm 2.5 จะได้ดังนี้

กำหนดให้ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น สำหรับคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ และ $\alpha \in (0,1]$ โดยที่

$$\text{ตัวทำนาย } (predictor): z_k = x_k - \alpha \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}} \quad (4.11)$$

$$\text{ตัวแก้ไข } (corrector): x_{k+1} = x_k + 4(z_k - x_k)\frac{f(x_k)}{3f(x_k) - 2f(z_k)} \quad (4.12)$$

สำหรับทุกๆ $k = 0,1,2,\ldots,n$ เมื่อ $f'(x_k) \pm \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2} \neq 0$ และ $3f(x_k) - 2f(z_k) \neq 0$ โดยเลือกเครื่องหมายที่ทำให้ตัวหาร (divisor) $f'(x_k) + \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}$ หรือ $f'(x_k) - \sqrt{\left(f'(x_k)\right)^2 + 4p^2\left(f(x_k)\right)^2}$ มีขนาดใหญ่

<u>**ตัวอย่างที่ 4.6**</u> $\sin(x) - e^{-x} = 0$ เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $x_0 = 3$ โดยเลือก $p = 1$ และ $\alpha = 0.5$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$

จะได้ $f'(x) = \cos(x) + e^{-x}$ หาได้ทุกค่าของ x

ครั้งที่ 1 $x_0 = 3$

จะได้ $f(x_0) = 0.091332940$

และ $f'(x_0) = -0.940205428$

Step 1 : $z_0 = x_0 - \alpha \dfrac{2f(x_0)}{f'(x_0) \pm \sqrt{(f'(x_0))^2 + 4p^2(f(x_0))^2}}$

จาก $\dfrac{2f(z_0)}{f'(z_0) + \sqrt{(f'(z_0))^2 + 4p^2(f(z_0))^2}} = 10.390506088$ เมื่อ $p = 1$

และ $\dfrac{2f(z_0)}{f'(z_0) - \sqrt{(f'(z_0))^2 + 4p^2(f(z_0))^2}} = -0.096241703$ เมื่อ $p = 1$

จะได้ $z_0 = 3 - (0.5)(10.390506088) = -7.390506088$

Step2 จะได้ $f(z_0) = -1621.420537917$

ดังนั้น $x_1 = x_0 + 4(z_0 - x_0)\dfrac{f(x_0)}{3f(x_0) - 2f(z_0)} = 2.998833366$

ครั้งที่ 2 $x_1 = 2.998833366$

จะได้ $f(x_1) = 0.092429685$

และ $f'(x_1) = -0.939982002$

Step 1 : $z_1 = x_1 - \alpha \dfrac{2f(x_1)}{f'(x_1) \pm \sqrt{(f'(x_1))^2 + 4p^2(f(x_1))^2}}$

จาก $\dfrac{2f(z_1)}{f'(z_1) + \sqrt{(f'(z_1))^2 + 4p^2(f(z_1))^2}} = 10.267096720$ เมื่อ $p = 1$

และ $\dfrac{2f(z_1)}{f'(z_1) - \sqrt{(f'(z_1))^2 + 4p^2(f(z_1))^2}} = -0.097398518$ เมื่อ $p = 1$

จะได้ $z_1 = 2.998833366 - (0.5)(10.267096720) = -7.268263354$

Step 2 : จะได้ $f(z_1) = -1434.891153473$

ดังนั้น $x_2 = x_1 + 4(z_1 - x_1)\dfrac{f(x_1)}{3f(x_1) - 2f(z_1)} = 2.997515605$

$\vdots$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

ตารางที่ 4.19 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.6

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	3.000000	0.091333	-0.940205
1	2.998833	0.092430	-0.939982
2	2.997516	0.093668	-0.939728
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	0.615696	0.037263	1.356636
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 4.20 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.6

k	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)+\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^3(f(x_k))^3}}$	$\dfrac{2f(x_k)}{f'(x_k)-\sqrt{(f'(x_k))^2+4p^3(f(x_k))^3}}$
0	10.390506	-0.096242
1	10.267097	-0.097399
2	10.131224	-0.098705
⋮	⋮	⋮
30	0.027446	-36.434782
⋮	⋮	⋮

ตารางที่ 4.21 แสดงค่าประมาณที่ได้จากตัวอย่าง 4.6

k	z_k	$f(z_k)$
0	-7.390506	-1621.420538
1	-7.268263	-1434.891153
2	-7.133709	-1254.26877
⋮	⋮	⋮
30	0.588250	-0.000392
⋮	⋮	⋮

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ชื่อไฟล์ Algorithm6.m (ดูที่ภาคผนวกหน้า 68)

ตารางที่ 4.22 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 6

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
1	$x^{10}-1=0$	0.5	16^*
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	$>2000^*$
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	2^*
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	$>2000^*$
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	$>2000^*$
6	$1/x-1=0$	2.7	4^*
7	$e^{1-x}-1=0$	3	$>2000^*$

ตารางที่ 4.22 (ต่อ) แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 6

No.	Equation	x_0	จำนวนรอบ
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	$>2000^*$
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	7^*
10	$\sin(x)=0$	1.5	$>2000^*$
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	3^*
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	$>2000^*$
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	1^*
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	$>2000^*$

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.2 ตารางแสดงจำนวนรอบการประมาณค่า

ตารางที่ 4.23 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 2.1 ถึง Algorithm 2.3 จากงานวิจัย เรื่อง On iterative methods for nonlinear

No.	Equation	x_0	Algorithm 2.1	Algorithm 2.2	Algorithm 2.3
1	$x^{10}-1=0$	0.5	44	9	10
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	6	4	4
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	17	11	12
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	7	4	4
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	7	4	5
6	$1/x-1=0$	2.7	D	6	6
7	$e^{1-x}-1=0$	3	11	6	6
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	5	5	4
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	5	4	3
10	$\sin(x)=0$	1.5	4^*	4	4
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	7	5	4
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	7	5	5
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	6	5	5
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	4	3	3
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	5	4	4

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

D หมายถึง ค่าที่ได้ลู่ออก (divergent)

ตารางที่ 4.24 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 2.4 ถึง Algorithm 2.6 จากงานวิจัย เรื่อง On iterative methods for nonlinear

No.	Equation	x_0	Algorithm 2.4	Algorithm 2.6	Algorithm 2.5
1	$x^{10}-1=0$	0.5	1^*	6	7
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	5	3	4
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	8	7	D
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	6	3	5
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	6	3	6
6	$1/x-1=0$	2.7	7	5	D
7	$e^{1-x}-1=0$	3	6	4	6
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	5	3	5
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	4	3	4
10	$\sin(x)=0$	1.5	5^*	3	4
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	6	4	6
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	6	3	6
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	5	3	5
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	4	3	4
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	4	3	6

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

D หมายถึง ค่าที่ได้ลู่ออก (divergent)

ตารางที่ 4.25 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 1 ถึง Algorithm 3

No.	Equation	x_0	Algorithm 1	Algorithm 2	Algorithm 3
1	$x^{10}-1=0$	0.5	15	หาค่าไม่ได้	23
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	20	6	2
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	10	หาค่าไม่ได้	17
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	$>2000^*$	6^*	16^*
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	$>2000^*$	หาค่าไม่ได้	16
6	$1/x-1=0$	2.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	12^*
7	$e^{1-x}-1=0$	3	38^*	หาค่าไม่ได้	8
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	330^*	หาค่าไม่ได้	16^*
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	2^*	หาค่าไม่ได้	17^*
10	$\sin(x)=0$	1.5	116^*	19^*	3^*
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	29^*	หาค่าไม่ได้	16^*
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	88^*	หาค่าไม่ได้	16^*
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	1^*	17^*	13^*
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	13^*	หาค่าไม่ได้	16^*

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

ตารางที่ 4.26 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของ Algorithm 4 ถึง Algorithm 6

No.	Equation	x_0	Algorithm 4	Algorithm 5	Algorithm 6
1	$x^{10}-1=0$	0.5	หาค่าไม่ได้	3	16^*
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	3	3	$>2000^*$
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	1^*	4	2^*
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	3	4	$>2000^*$
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	3	4	$>2000^*$
6	$1/x-1=0$	2.7	5	หาค่าไม่ได้	4^*
7	$e^{1-x}-1=0$	3	3^*	6	$>2000^*$
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	3	3	$>2000^*$
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	3	3	7^*
10	$\sin(x)=0$	1.5	4^*	4^*	$>2000^*$
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	2	5	3^*
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	$>2000^*$
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	3	4	$>2000^*$
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	3	3	1^*
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	3	3	$>2000^*$

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.3 ตารางแสดงค่าประมาณ

ตารางที่ 4.27 แสดงค่าประมาณของ Algorithm 2.1 ถึง Algorithm 2.3 จากงานวิจัย เรื่อง On iterative methods for nonlinear

No.	Equation	x_0	Algorithm 2.1	Algorithm 2.2	Algorithm 2.3
1	$x^{10}-1=0$	0.5	1.000000	1.000000	-0.506444
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	2.025495	-0.818716	-1.263566
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	1.380230	D	1.870892
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	0.601347	-2.789107	0.601347
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	2.690647	2.690647	2.690647
6	$1/x-1=0$	2.7	D	1.000000	1.000000
7	$e^{1-x}-1=0$	3	1.000000	1.000000	1.000000
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	0.964334	0.964334	0.964334
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	0.897539	0.897539	0.897539
10	$\sin(x)=0$	1.5	-12.566371	3.141593	3.141593
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	1.829384	1.829384	1.829384
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	3.057104	1.412391	3.057104
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	0.910008	0.910008	0.910008
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	3.096364	3.096364	3.096364
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	-1.379365	-1.379365	-1.379365

หมายเหตุ : D หมายถึง ค่าที่ได้ลู่ออก (divergent)

ตารางที่ 4.28 แสดงค่าประมาณของ Algorithm 2.4 ถึง Algorithm 2.6 จากงานวิจัย เรื่อง On iterative methods for nonlinear

No.	Equation	x_0	Algorithm 2.4	Algorithm 2.6	Algorithm 2.5
1	$x^{10}-1=0$	0.5	0.500000	1.000000	D
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	-1.664008	-1.341380	-0.711244
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	2.894846	D	2.300872
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	2.016983	0.601347	-1.798341
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	-8.015061	2.690647	2.154849
6	$1/x-1=0$	2.7	-14.483713	1.000000	1.252147
7	$e^{1-x}-1=0$	3	4.535242	1.000000	1.069417
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	-13.466140	0.964334	1.897792
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	5.601067	0.897539	0.783048
10	$\sin(x)=0$	1.5	9.632969	3.141593	0.679098
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	-2.924382	1.829384	1.962931
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	2.179383	1.412391	1.731505
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	0.689447	0.910008	-0.278893
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	2.295227	3.096364	3.000601
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	-1.674140	-1.379365	-1.725877

หมายเหตุ : D หมายถึง ค่าที่ได้ลู่ออก (divergent)

ตารางที่ 4.29 แสดงค่าประมาณของ Algorithm 1 ถึง Algorithm 3

No.	Equation	x_0	Algorithm 1	Algorithm 2	Algorithm 3
1	$x^{10}-1=0$	0.5	0.933809	หาค่าไม่ได้	1.008684
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	-1.325171	-4.852930	-1.476287
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	2.975276	หาค่าไม่ได้	3.000008
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	-0.220069	-4.852930	0.601331
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	1.739332	หาค่าไม่ได้	2.690632
6	$1/x-1=0$	2.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
7	$e^{1-x}-1=0$	3	0.752645	หาค่าไม่ได้	1.013428
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	0.714557	หาค่าไม่ได้	0.964320
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	0.358011	หาค่าไม่ได้	0.897528
10	$\sin(x)=0$	1.5	91.135171	-257.246189	-12.729789
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	2.074484	หาค่าไม่ได้	1.829374
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	3.488023	หาค่าไม่ได้	0.909997
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	3.192895	863.527623	3.096376
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	8.886685	หาค่าไม่ได้	-1.379376

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

ตารางที่ 4.30 แสดงค่าประมาณของ Algorithm 4 ถึง Algorithm 6

No.	Equation	x_0	Algorithm 4	Algorithm 5	Algorithm 6
1	$x^{10}-1=0$	0.5	หาค่าไม่ได้	1.000000	0.968313
2	$\tan^{-1}(x)=0$	-1	-1.570796	-1.570796	-0.866323
3	$e^{x^2+7x-30}-1=0$	2.8	3.201781	3.000000	13.576012
4	$e^x-1-\cos(x)=0$	-0.10	0.601347	0.601347	-0.127052
5	$x^3-2x^2-5=0$	2	2.690647	2.690647	1.933355
6	$1/x-1=0$	2.7	1.000000	หาค่าไม่ได้	-0.624126
7	$e^{1-x}-1=0$	3	0.999781	1.000000	1.326101
8	$x-0.8-0.2\sin(x)=0$	0	0.964334	0.964334	0.072552
9	$\sin(1/x)-x=0$	$\sqrt{2}$	0.897539	0.897539	0.062821
10	$\sin(x)=0$	1.5	-6.283185	0.000000	1.224242
11	$e^x+2^{-x}+2\cos(x)-6=0$	1.3	1.829385	1.829384	1.817037
12	$(x-2)^2-\ln(x)=0$	2.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
13	$e^x-3x^2=0$	0.5	0.910008	0.910008	3.146267
14	$\sin(x)-e^{-x}=0$	3	3.096364	3.096364	3.384034
15	$x^2-10\cos(x)=0$	-2	-1.379365	-1.379365	-2.839053

หมายเหตุ : * หมายถึง สมการนั้นสามารถหาค่ารากได้ แต่ค่านั้นไม่ถูกต้อง

4.4 วิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น

4.4.1 วิธีนิวตันราฟสันสำหรับการแก้ระบบสมการ (Newton's Method for a System of Nonlinear Equations) (Bradie, 2006)

จากวิธีนิวตันราฟสัน $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (4.13)

จะได้ว่า $x_{k+1} = x_k - \dfrac{F(x_k)}{F'(x_k)}$ (4.14)

โดย
$$F'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} \end{bmatrix} = J(x) \quad (4.15)$$

จะได้ $x_{k+1} = x_k - \left[J(x_k)\right]^{-1} F(x_k)$ (4.16)

ให้ $v_k = -\left[J(x_k)\right]^{-1} F(x_k)$ (4.17)

และ $\left[J(x_k)\right] v_k = -F(x_k)$ (4.18)

ดังนั้น $x_{k+1} = x_k + v_k$ (4.19)

<u>ตัวอย่างที่ 4.7</u> วิธีนิวตันราฟสัน เพื่อประมาณค่ารากของสมการของ

$$x^3 - 2y - 2 = 0 \quad (1)$$
$$x^3 - 5z^2 + 7 = 0 \quad (2)$$
$$yz^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

<u>วิธีทำ</u>

จัดให้อยู่ในรูป $F(x) = 0$ จะได้

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - 2y - 2 = 0 \\ x^3 - 5z^2 + 7 = 0 \\ yz^2 - 1 = 0 \end{bmatrix}$$

และ
$$J(x) = \begin{bmatrix} 3x^2 & -2 & 0 \\ 3x^2 & 0 & -10z \\ 0 & z^2 & 2yz \end{bmatrix}$$

ครั้งที่ 1 ให้ $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $F(x_0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

และ $J(x_0) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จาก $v_k = -\left[J(x_k)\right]^{-1} F(x_k)$

จะได้ $v_0 = \begin{bmatrix} 0.4286 \\ -0.8571 \\ 0.4286 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $x_1 = x_0 + v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4286 \\ -0.8571 \\ 0.4286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4286 \\ 0.1429 \\ 1.4286 \end{bmatrix}$

ครั้งที่ 2 $x_1 = \begin{bmatrix} 1.4286 \\ 0.1429 \\ 1.4286 \end{bmatrix}$

จะได้ $F(x_1) = \begin{bmatrix} 0.6297 \\ -0.2886 \\ -0.7085 \end{bmatrix}$

และ $J(x_1) = \begin{bmatrix} 6.1224 & -2 & 0 \\ 6.1224 & 0 & -14.2857 \\ 0 & 2.0408 & 0.4082 \end{bmatrix}$

จาก $v_k = -\left[J(x_k)\right]^{-1} F(x_k)$

จะได้ $v_1 = \begin{bmatrix} 0.0115 \\ 0.3502 \\ -0.0153 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $x_2 = x_1 + v_1 = \begin{bmatrix} 0.4286 \\ -0.8571 \\ 0.4286 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0115 \\ 0.3502 \\ -0.0153 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4401 \\ 0.4931 \\ 1.4133 \end{bmatrix}$

ครั้งที่ 3 $x_2 = \begin{bmatrix} 1.4401 \\ 0.4931 \\ 1.4133 \end{bmatrix}$

จะได้ $F(x_2) = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.0006 \\ -0.0152 \end{bmatrix}$

และ $J(x_2) = \begin{bmatrix} 6.2218 & -2 & 0 \\ 6.2218 & 0 & -14.1331 \\ 0 & 1.9975 & 1.3937 \end{bmatrix}$

จาก $v_k = -\left[J(x_k)\right]^{-1} F(x_k)$

จะได้ $v_2 = \begin{bmatrix} 0.0021 \\ 0.0070 \\ 0.0009 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $x_3 = x_2 + v_2 = \begin{bmatrix} 0.0115 \\ 0.3502 \\ -0.0153 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0021 \\ 0.0070 \\ 0.0009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4423 \\ 0.500 \\ 1.4142 \end{bmatrix}$

ครั้งที่ 4 $x_3 = \begin{bmatrix} 1.4423 \\ 0.500 \\ 1.4142 \end{bmatrix}$

จะได้ $F(x_3) = \begin{bmatrix} 0.00001987 \\ 0.00001580 \\ 0.00001814 \end{bmatrix}$

และ $J(x_3) = \begin{bmatrix} 6.2403 & -2 & 0 \\ 6.2403 & 0 & -14.1421 \\ 0 & 2 & 1.4142 \end{bmatrix}$

จาก $v_k = -\left[J(x_k)\right]^{-1} F(x_k)$

จะได้ $v_3 = \begin{bmatrix} 0.000005768 \\ -0.000008062 \\ -0.000001428 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $x_4 = x_3 + v_3 = \begin{bmatrix} 1.4423 \\ 0.500 \\ 1.4142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.000005768 \\ -0.000008062 \\ -0.000001428 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4422 \\ 0.5000 \\ 1.4142 \end{bmatrix}$

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ชื่อไฟล์ Newton.m (ดูที่ภาคผนวกหน้า 77)

ตารางที่ 4.31 แสดงจำนวนรอบในการประมาณค่าของวิธีนิวตันราฟสันสำหรับการแก้ระบบสมการ

k	x	y	z
0	1.000000	1.000000	1.000000
1	1.428571	0.142857	1.428571
2	1.440111	0.493051	1.413313
3	1.442255	0.500008	1.413315
4	1.442250	0.500000	1.414214
5	1.442250	0.500000	1.414214

4.5 อภิปรายผล

ตารางที่ 4.32 ตารางแสดงจำนวนตัวอย่างที่แต่ละ Algorithm สามารถหาค่าประมาณได้ และผลรวมของจำนวนรอบในการทำซ้ำของตัวอย่างที่หาค่าประมาณได้

Algorithm	**จำนวนตัวอย่างที่สามารถหาค่าประมาณได้**	**จำนวนรอบการทำซ้ำทั้งหมด**
2.1	13	131
2.2	15	79
2.3	15	79
2.4	13	72
2.5	15	56
2.6	13	68
1	3	45
2	1	6
3	6	83
4	10	31
5	12	45
6	0	0

หมายเหตุ : หากตัวอย่างใดมีจำนวนรอบการทำคำนวณ $k > 2000$ จะไม่ถูกนำมาวิเคราะห์

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษนี้ได้มุ่งที่จะหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น และระบบสมการไม่เชิงเส้น ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณจากการศึกษางานวิจัยก่อนหน้า (M. Aslam Noor. et al, 2006) และผู้วิจัยได้นำวิธีเชิงตัวเลขนั้นมาจัดรูปแบบใหม่ ซึ่งพบว่าสามารถหาผลเฉลยได้ โดยมีความแม่นยำอยู่ในระดับที่น่าพอใจ ซึ่งวิธีที่ได้นำเสนอเอาไว้นั้นเป็นวิธี 2 ขั้นตอน จึงให้ผลเฉลยที่แม่นยำกว่าวิธีขั้นตอนเดียว

ผู้วิจัยได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อช่วยในการคำนวณ เนื่องจากขั้นตอนการหาผลเฉลยจะต้องใช้วิธีทำซ้ำ จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (MATLAB) พบว่าบางวิธีมีจำนวนครั้งในการทำซ้ำน้อย บางวิธีมีจำนวนครั้งในการทำซ้ำมาก บางวิธีผลเฉลยลู่เข้า และบางวิธีมีการพบว่าผลเฉลยลู่ออก อีกทั้งผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งการใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ในการหาผลเฉลยถือเป็นเรื่องที่ยุ่งยากมาก แต่ผู้วิจัยพบว่าสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับปัญหานี้ได้โดยไม่ยุ่งยากมากนัก

5.2 ข้อเสนอแนะ

ปัญหาเปิดสำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษาต่อได้คือ การพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยที่ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันระหว่างขั้นตอนการคำนวณ ซึ่งจะทำให้ลดข้อจำกัดของวิธีเชิงตัวเลขที่ผู้วิจัยได้นำเสนอไว้ได้

เอกสารอ้างอิง

Brain Bradie, “A Friendly Introduction to Numerical Analysis”, Pearson Education, *Inc*, New Jersey, 2006.

M. Aslam Noor, K. Inayat Noor, Waseem Asghar Khan, F. Ahmad, “On iterative methods for nonlinear equations”, Appl. Math. Comput. 183 (2006) 128-133.

กาญจนา คำนึงนิจ, “หนังสือการวิเคราะห์เชิงตัวเลข”, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2554.

พัชรินทร์ เหมโชติ, ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์, “หนังสือพีชคณิตเชิงเส้น 1” สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2555.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

โปรแกรม MatLab สำหรับใช้ในการหาค่าประมาณของสมการไม่เชิงเส้น

ชื่อไฟล์ Algorithm1.m

ใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallAlgorithm.m

```
function [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)
syms fx(x)
fx(x) = diff(f,x);
c = 1;
Er = Tol+1;
while Er >= Tol && c<=2000
    zk = x0 - f(x0)/fx(x0);
    if fx(zk)>0
        B = fx(zk)+sqrt(fx(zk)^2+4*p^2*f(zk)^2);
    else
        B = fx(zk)-sqrt(fx(zk)^2+4*p^2*f(zk)^2);
    end
    x = double(zk - 2*f(x0)/B);
    Er = norm(x-x0,inf);
    x0 = x;
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = double(x);
```

ชื่อไฟล์ Algorithm2.m

ใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallAlgorithm.m

```
function [x c] = Algorithm2(f,x0,p,a,Tol)
syms fx(x)
fx(x) = diff(f,x);
c = 1;
Er = Tol+1;
while Er > Tol && c<=2000
    zk = x0 - f(x0)/fx(x0);
    B = f(x0)/(3*f(x0)-2*f(zk));
    x = double(x0 + 4*(zk-x0)/B);
    Er = norm(x-x0,inf);
    x0 = x;
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = double(x);
```

ชื่อไฟล์ Algorithm3.m

ใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallAlgorithm.m

```
function [x c] = Algorithm3(f,x0,p,a,Tol)
syms fx(x)
fx(x) = diff(f,x);
c = 1;
Er = Tol+1;
while Er > Tol && c<=2000
    zk = x0 - f(x0)/fx(x0);
    if fx(zk)>0
        B = fx(zk)+sqrt(fx(zk)^2+4*p^2*f(zk)^2);
    else
        B = fx(zk)-sqrt(fx(zk)^2+4*p^2*f(zk)^2);
    end
    x = double(zk - a*2*f(x0)/B);
    Er = norm(x-x0,inf);
    x0 = x;
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = double(x);
```

ชื่อไฟล์ Algorithm4.m

ใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallAlgorithm.m

```
function [x c] = Algorithm4(f,x0,p,a,Tol)
syms fx(x)
fx(x) = diff(f,x);
c = 1;
Er = Tol+1;
while Er > Tol && c<=2000
    zk = x0 - a*f(x0)/fx(x0);
    x = zk - f(zk)/fx(zk);
    Er = norm(x-x0,inf);
    x0 = x;
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = double(x);
```

ชื่อไฟล์ Algorithm5.m

ใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallAlgorithm.m

```
function [x c] = Algorithm5(f,x0,p,a,Tol)
syms fx(x)
fx(x) = diff(f,x);
c = 1;
Er = Tol+1;
while Er > Tol && c<=2000
    if fx(x0)>0
        B = fx(x0)+sqrt(fx(x0)^2+4*p^2*f(x0)^2);
    else
        B = fx(x0)-sqrt(fx(x0)^2+4*p^2*f(x0)^2);
    end
    zk = x0 - a*2*f(x0)/B;
    x = double(zk - f(zk)/fx(zk));
    Er = norm(x-x0,inf);
    x0 = x;
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = double(x);
```

ชื่อไฟล์ Algorithm6.m

ใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallAlgorithm.m

```
function [x c] = Algorithm6(f,x0,p,a,Tol)
syms fx(x)
fx(x) = diff(f,x);
c = 1;
Er = Tol+1;
while Er > Tol && c<=2000
    if fx(x0)>0
        B = fx(x0)+sqrt(fx(x0)^2+4*p^2*f(x0)^2);
    else
        B = fx(x0)-sqrt(fx(x0)^2+4*p^2*f(x0)^2);
    end
    zk = x0 - a*2*f(x0)/B;
    B = f(x0)/(3*f(x0)-2*f(zk));
    x = double(x0 + 4*(zk-x0)/B);
    Er = norm(x-x0,inf);
    x0 = x;
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = double(x);
```

ชื่อไฟล์ CallAlgorithm.m

สำหรับไว้เรียกใช้ไฟล์ Algorithm1.m ถึงไฟล์ Algorithm6.m โดยให้นำเครื่องหมาย % ออกจากหน้าตัวอย่างที่ต้องการเรียกใช้ และถ้าต้องการให้คำนวณโดยใช้ Algorithm ไหน ก็ให้เปลี่ยนตัวเลขเป็น Algorithm ที่ต้องการใช้งาน เช่น

```
[x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)
```

```
format long
clear all
clc
% Example 1 -----------------------------------
f = @(x) x^10-1;
x0 = 0.5;
p = 1;
a = 0.5;
Tol = 5*10^-1;
[x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)
```

ชื่อไฟล์ CallAlgorithm.m (ต่อ)

```
% Example 2 ---------------------------------------
% f = @(x) tan(x)^-1;
% x0 = -1;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 3 ---------------------------------------
% f = @(x) exp(x^2+7*x-30)-1;
% x0 = 2.8;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 4 ---------------------------------------
% f = @(x) exp(x)-1-cos(x);
% x0 = -0.10;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 5 ---------------------------------------
% f = @(x) x^3-2*x^2-5;
% x0 = 2;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 6 ---------------------------------------
% f = @(x) 1/x-1;
% x0 = 2.7;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)
```

ชื่อไฟล์ CallAlgorithm.m (ต่อ)

```
% Example 7 -----------------------------------------
% f = @(x) exp(1-x)-1;
% x0 = 3;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 8 -----------------------------------------
% f = @(x) x-0.8-0.2*sin(x);
% x0 = 0;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 9 -----------------------------------------
% f = @(x) sin(1/x)-x;
% x0 = sqrt(2);
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-2;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 10 ----------------------------------------
% f = @(x) sin(x);
% x0 = 1.5;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 11 ----------------------------------------
% f = @(x) exp(x)+2^(-x)+2*cos(x)-6;
% x0 = 1.3;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)
```

ชื่อไฟล์ CallAlgorithm.m (ต่อ)

```
% Example 12 --------------------------------------
% f = @(x) (x-2)^2-ln(x);
% x0 = 2.5;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-5;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 13 --------------------------------------
% f = @(x) exp(x)-3*(x^2);
% x0 = 0.5;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-5;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 14 --------------------------------------
% f = @(x) sin(x)-exp(-x);
% x0 = 3;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-1;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)

% Example 15 --------------------------------------
% f = @(x) x^2-10*cos(x);
% x0 = -2;
% p = 1;
% a = 0.5;
% Tol = 5*10^-5;
% [x c] = Algorithm1(f,x0,p,a,Tol)
```

ภาคผนวก ข

โปรแกรม MatLab สำหรับใช้ในการหาค่าประมาณของระบบสมการไม่เชิงเส้น

<u>วิธีที่ 1</u>

ชื่อไฟล์ System.m

สามารถคำนวณได้ 6 แบบ โดยถ้าต้องการใช้วิธีไหนให้นำเครื่องหมาย % หน้าวิธีนั้นๆ ออก และใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallSystem.m

```
function [x y z c] = System(f1,f2,f3,x0,p,Tol)

syms f1x(x,y,z) f1y(x,y,z) f1z(x,y,z)...
     f2x(x,y,z) f2y(x,y,z) f2z(x,y,z)...
     f3x(x,y,z) f3y(x,y,z) f3z(x,y,z)
f1x(x,y,z) = diff(f1,x);
f1y(x,y,z) = diff(f1,y);
f1z(x,y,z) = diff(f1,z);

f2x(x,y,z) = diff(f2,x);
f2y(x,y,z) = diff(f2,y);
f2z(x,y,z) = diff(f2,z);

f3x(x,y,z) = diff(f3,x);
f3y(x,y,z) = diff(f3,y);
f3z(x,y,z) = diff(f3,z);

c = 1;
Er = Tol+1;
while Er > Tol && c <= 100
    x = x0(1);
    y = x0(2);
    z = x0(3);
```

ชื่อไฟล์ System.m (ต่อ)

```
% Type 1 ---------------------------------------------------------
%      if f1x(x,y,z)>0
%          B = f1x(x,y,z)+sqrt(f1x(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f1x(x,y,z)-sqrt(f1x(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      end
%      x = double(x - 2*f1(x,y,z)/B);
%
%      if f2y(x,y,z)>0
%          B = f2y(x,y,z)+sqrt(f2y(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f2y(x,y,z)-sqrt(f2y(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      end
%      y = double(y - 2*f2(x,y,z)/B);
%
%      if f3z(x,y,z)>0
%          B = f3z(x,y,z)+sqrt(f3z(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f3z(x,y,z)-sqrt(f3z(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      end
%      z = double(z - 2*f3(x,y,z)/B);

% Type 2 ------------------------------------------------------
%      if f1x(x,y,z)>0
%          B = f1x(x,y,z)+sqrt(f1x(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f1x(x,y,z)-sqrt(f1x(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      end
%      x = double(x - 2*f1(x,y,z)/B);
%
%      if f3y(x,y,z)>0
%          B = f3y(x,y,z)+sqrt(f3y(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f3y(x,y,z)-sqrt(f3y(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      end
%      y = double(y - 2*f3(x,y,z)/B);
%
%      if f2z(x,y,z)>0
%          B = f2z(x,y,z)+sqrt(f2z(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f2z(x,y,z)-sqrt(f2z(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      end
%      z = double(z - 2*f2(x,y,z)/B);
```

ชื่อไฟล์ System.m (ต่อ)

```
% Type 3 ------------------------------------------------
%      if f2x(x,y,z)>0
%          B = f2x(x,y,z)+sqrt(f2x(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f2x(x,y,z)-sqrt(f2x(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      end
%      x = double(x - 2*f2(x,y,z)/B);
%
%      if f1y(x,y,z)>0
%          B = f1y(x,y,z)+sqrt(f1y(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f1y(x,y,z)-sqrt(f1y(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      end
%      y = double(y - 2*f1(x,y,z)/B);
%
%      if f3z(x,y,z)>0
%          B = f3z(x,y,z)+sqrt(f3z(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f3z(x,y,z)-sqrt(f3z(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      end
%      z = double(z - 2*f3(x,y,z)/B);

% Type 4 ------------------------------------------------
%      if f2x(x,y,z)>0
%          B = f2x(x,y,z)+sqrt(f2x(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f2x(x,y,z)-sqrt(f2x(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%      end
%      x = double(x - 2*f2(x,y,z)/B);
%
%      if f3y(x,y,z)>0
%          B = f3y(x,y,z)+sqrt(f3y(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f3y(x,y,z)-sqrt(f3y(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%      end
%      y = double(y - 2*f3(x,y,z)/B);
%
%      if f1z(x,y,z)>0
%          B = f1z(x,y,z)+sqrt(f1z(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      else
%          B = f1z(x,y,z)-sqrt(f1z(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%      end
%      z = double(z - 2*f1(x,y,z)/B);
```

ชื่อไฟล์ System.m (ต่อ)

```
% Type 5 ---------------------------------------------------
%     if f3x(x,y,z)>0
%         B = f3x(x,y,z)+sqrt(f3x(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%     else
%         B = f3x(x,y,z)-sqrt(f3x(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%     end
%     x = double(x - 2*f3(x,y,z)/B);
%
%     if f1y(x,y,z)>0
%         B = f1y(x,y,z)+sqrt(f1y(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%     else
%         B = f1y(x,y,z)-sqrt(f1y(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%     end
%     y = double(y - 2*f1(x,y,z)/B);
%
%     if f2z(x,y,z)>0
%         B = f2z(x,y,z)+sqrt(f2z(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%     else
%         B = f2z(x,y,z)-sqrt(f2z(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%     end
%     z = double(z - 2*f2(x,y,z)/B);

% Type 6 ---------------------------------------------------
%     if f3x(x,y,z)>0
%         B = f3x(x,y,z)+sqrt(f3x(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%     else
%         B = f3x(x,y,z)-sqrt(f3x(x,y,z)^2+4*p^2*f3(x,y,z)^2);
%     end
%     x = double(x - 2*f3(x,y,z)/B);
%
%     if f2y(x,y,z)>0
%         B = f2y(x,y,z)+sqrt(f2y(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%     else
%         B = f2y(x,y,z)-sqrt(f2y(x,y,z)^2+4*p^2*f2(x,y,z)^2);
%     end
%     y = double(y - 2*f2(x,y,z)/B);
%
%     if f1z(x,y,z)>0
%         B = f1z(x,y,z)+sqrt(f1z(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%     else
%         B = f1z(x,y,z)-sqrt(f1z(x,y,z)^2+4*p^2*f1(x,y,z)^2);
%     end
%     z = double(z - 2*f1(x,y,z)/B);
```

ชื่อไฟล์ System.m (ต่อ)

```
    Er = norm([x y z]-x0,inf);
    x0 = [x y z];
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = x0(1);
y = x0(2);
z = x0(3);
```

ชื่อไฟล์ CallSystem.m

สำหรับไว้เรียกใช้ไฟล์ System.m

```
format long
clear all
clc

f1 = @(x,y,z) x^3-2*y-2;
f2 = @(x,y,z) x^3-5*z^2+7;
f3 = @(x,y,z) y*z^2-1;
x0 = [1 1 1];
p = 1;
Tol = 10^-5;
[x y z c] = System(f1,f2,f3,x0,p,Tol)
```

วิธีที่ 2

ชื่อไฟล์ Newton.m

ใช้งานโดยผ่านการเรียกใช้โดยไฟล์ CallNewton.m

```
function [x y z c] = Newton(f1,f2,f3,x0)

syms f1x(x,y,z) f1y(x,y,z) f1z(x,y,z)...
     f2x(x,y,z) f2y(x,y,z) f2z(x,y,z)...
     f3x(x,y,z) f3y(x,y,z) f3z(x,y,z)

f1x(x,y,z) = diff(f1,x);
f1y(x,y,z) = diff(f1,y);
f1z(x,y,z) = diff(f1,z);

f2x(x,y,z) = diff(f2,x);
f2y(x,y,z) = diff(f2,y);
f2z(x,y,z) = diff(f2,z);

f3x(x,y,z) = diff(f3,x);
f3y(x,y,z) = diff(f3,y);
f3z(x,y,z) = diff(f3,z);

er = 1; c = 1;
while (er>10^-6 && c<=50)
    x = x0(1);
    y = x0(2);
    z = x0(3);
    J = double([f1x(x,y,z) f1y(x,y,z) f1z(x,y,z);
                f2x(x,y,z) f2y(x,y,z) f2z(x,y,z);
                f3x(x,y,z) f3y(x,y,z) f3z(x,y,z)]);
    F = [f1(x,y,z) f2(x,y,z) f3(x,y,z)];
    dx = -J\F';
    xn = x0+dx';
    er = norm(xn-x0,inf)/norm(xn,inf);
    x0 = xn;
    c = c+1;
end
c = c-1;
x = x0(1);
y = x0(2);
z = x0(3);
```

ชื่อไฟล์ CallNewton.m

สำหรับไว้เรียกใช้ไฟล์ Newton.m

```
format long
clear all
clc
f1 = @(x,y,z) (x^3)-(2*y)-2;
f2 = @(x,y,z) (x^3)-(5*(z^2))+7;
f3 = @(x,y,z) (y*(z^2))-1;
x0 = [1 1 1];
[x y z c] = Newton(f1,f2,f3,x0)
```