

การออกแบบตัวกรองเชิงเลข NR แบบ Multiple notch  
โดยการปรับตำแหน่ง Pole ให้เหมาะสม

A DESIGN OF NR MULTIPLE NOTCH FILTER WITH  
OPTIMUM POLE POSITION



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของกรณีศึกษาโครงข่ายโครงข่ายการประมวลผลสัญญาณดิจิทัล

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2551

KMITL-2008-EN-M-010-229

**สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง**

การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
โดยการปรับตำแหน่ง Pole ให้เหมาะสม

**A DESIGN OF IIR MULTIPLE NOTCH FILTER WITH  
OPTIMUM POLE POSITION**



ปริญญ์ สูญทุกษ์  
PARINYA SOONTHUK

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 82880  
วัน,เดือน,ปี..... 25 ก.ค. 2551

|        |
|--------|
| b..... |
| i..... |

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อท.ศ.2551 เท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลง KMITL-2008-EN-M-010-229 งเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**A DESIGN OF IIR MULTIPLE NOTCH FILTER WITH  
OPTIMUM POLE POSITION**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATION ENGINEERING  
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
2008

**KMITL-2008-EN-M-010-229**



เอกสารนี้ **COPYRIGHT 2008** สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณี **SCHOOL OF GRADUATE STUDIES** และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**



|                             |   |
|-----------------------------|---|
| หัวข้อวิทยานิพนธ์           | การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch<br>โดยการปรับตำแหน่ง Pole ให้เหมาะสม |
| นักศึกษา                    | นายปริญญา สุญทุกซ์  |
| รหัสประจำตัว                | 48060934  |
| ปริญญา                      | วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  |
| สาขาวิชา                    | วิศวกรรมโทรคมนาคม   |
| พ.ศ.                        | 2551  |
| อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ | รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ   |

### บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการออกแบบและสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch โดยใช้เทคนิคการหาค่าแห่งการวางโพลที่เหมาะสม โดยในการออกแบบเริ่มต้นจากออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกัน โดยจะทำการหาค่าแห่งการวางโพลที่เหมาะสมและสอดคล้องกันระหว่างตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch เพื่อที่จะทำให้สามารถควบคุมอัตราขยายในช่วง Pass-band ที่ความถี่ DC,  $\pi$  และที่ความถี่ใดๆอีกหนึ่งความถี่ รวมทั้งสิ้น 3 ความถี่ ให้มีขนาดตามต้องการ จากนั้นก็จะนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกันมาต่อลำดับกัน ก็จะทำให้เกิดเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สามารถควบคุมอัตราขยายในช่วง Pass-band ได้และโดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงระหว่าง Notch frequency

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

|                       |  |
|-----------------------|--|
| <b>Thesis Title</b>   | A Design of IIR Multiple Notch Filter with Optimum Pole Position |
| <b>Student</b>        | Mr. Parinya Soonthuk   |
| <b>Student ID.</b>    | 48060934   |
| <b>Degree</b>         | Master of Engineering  |
| <b>Program</b>        | Telecommunication Engineering                                    |
| <b>Year</b>           | 2008   |
| <b>Thesis Advisor</b> | Assoc.Prof.Dr.Kobchai Dejhan                                     |

## ABSTRACT

This thesis proposes the new design and implementation of IIR multiple notch filters by the application of suitable pole placement technique. The initial step is to design the two IIR single notch filters with difference notch frequency to find suitable pole that can control the pass-band gain at 3 frequencies such as DC,  $\pi$  and frequency between the notch frequency. After that, connect the IIR single notch filters with difference notch frequency in cascade to create IIR multiple notch filters which can control the pass-band gains at DC and  $\pi$  frequency especially the frequency between the notch frequencies.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ด้วยความกรุณาของ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่กรุณาแนะนำให้คำปรึกษา คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหา ตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดีในการศึกษาวิจัยครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.สุรพันธ์ ยิ้มมั่น ที่มอบโอกาสและความรู้ต่างๆทั้งทางตรงและทางอ้อมจนสั่งสมเป็นความรู้ทางวิชาการและประสบการณ์ชีวิต ตลอดจนให้คำแนะนำและคำปรึกษาที่ดีในการศึกษาวิจัยครั้งนี้มาโดยตลอด และขอขอบคุณอาจารย์ทุกๆท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ต่างๆให้แก่ศิษย์

ขอขอบคุณ พี่ๆ เพื่อนๆ และน้องๆ นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกคนที่รู้จักสำหรับความเป็นมิตรและความช่วยเหลือต่างๆที่มีให้กันระหว่างศึกษาอยู่

ขอขอบคุณภาควิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรมและอุปกรณ์การแพทย์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่เอื้อเฟื้อสถานที่ วัสดุอุปกรณ์ และเครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย

ขอขอบคุณ พี่เปี๊ยก, พี่สุ, พี่สิงและพี่อู๋ สำหรับความช่วยเหลือต่างๆที่มีให้รุ่นน้องคนนี้ ขอขอบคุณ ก็และต๊ักเป็นเสมือนเพื่อนร่วมทางที่ดี

ขอขอบคุณ พี่ชัชวาล พงศ์เจริญสุข ที่สละเวลานั่งคุยเรื่องไร้สาระต่างๆ จนทำให้รู้อะไรเกี่ยวกับโลกใบนี้ในมุมที่ต่างไป ขอขอบคุณ พี่เปาโล มงกุฎวิสุทธิ์ ช่วยสอนการใช้บอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัลและเครื่องไดนามิกซิกแนลไลเซอร์ ขอขอบคุณ ปกรณ์ อินสุข ที่มีน้ำใจช่วยเหลือเพื่อนด้วยดีเสมอ

ขอบคุณ ดวงกมล ศรีทับทิม เป็นแรงบันดาลใจให้เพื่อนมาโดยตลอด ขอขอบคุณ จรรย์เรืองพลับพลา สำหรับคำว่าเพื่อนตลอดระยะเวลา 13 ปี ขอขอบคุณ อุปสรรคและปัญหาที่มีมาให้ฝ่าฟัน ขอขอบคุณ คุณวาสนาสำหรับกำลังใจ สุดท้ายขอขอบคุณบุพการี เหนือสิ่งอื่นใด รักและบูชาเสมอ

ปริญญา สุญทุกข์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

|  | หน้า |
|--|------|
| บทคัดย่อภาษาไทย.....   | I    |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....  | II   |
| กิตติกรรมประกาศ.....   | III  |
| สารบัญ.....  | IV   |
| สารบัญตาราง.....   | VIII |
| สารบัญภาพ.....   | IX   |
| บทที่ 1 บทนำ.....  | 1    |
| 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....                            | 1    |
| 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....                    | 2    |
| 1.3 สมมุติฐานการศึกษา.....   | 2    |
| 1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....                       | 2    |
| 1.5 การเปรียบเทียบระหว่างวิธีการที่นำเสนอกับวิธีการแบบพื้นฐาน..... | 3    |
| 1.6 ขอบเขตการวิจัย.....  | 3    |
| 1.7 ขั้นตอนของการศึกษา.....  | 3    |
| บทที่ 2 ทฤษฎีการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข.....                         | 5    |
| 2.1 สัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา.....                              | 5    |
| 2.1.1 ลำดับสัญญาณแบบยูนิตแซมเปิล (Unit sample sequence).....       | 7    |
| 2.1.2 ลำดับสัญญาณแบบยูนิตสเต็ป (Unit step sequence).....           | 7    |
| 2.1.3 ลำดับสัญญาณแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential sequence).....   | 7    |
| 2.1.4 ลำดับสัญญาณแบบไซน์ (Sinusoidal sequence).....                | 9    |
| 2.2 ลักษณะเฉพาะของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา.....                | 10   |
| 2.2.1 Energy signal และ Power signals.....                         | 10   |
| 2.2.2 Periodic signals และ Aperiodic signals.....                  | 10   |
| 2.2.3 Symmetric (even) และ Asymmetric (odd) signals.....           | 11   |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ(ต่อ)

หน้า

|   |    |
|---|----|
| 2.3 การกระทำของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา.....  | 12 |
| 2.3.1 การเลื่อนสัญญาณ.....  | 12 |
| 2.3.2 การบวก การคูณ การสเกลสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง<br>(Adding, Multiplication and scaling of Discrete Time Signal)..... | 15 |
| 2.4 ระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา.....   | 15 |
| 2.4.1 ไคอะแกรมที่ใช้แสดงในระบบไม่ต่อเนื่อง<br>(Block Diagram Representation of Discrete-Time System) .....            | 16 |
| 2.4.2 ชนิดของระบบแบบไม่ต่อเนื่อง .....  | 18 |
| 2.4.2.1 ระบบแบบ Static .....  | 18 |
| 2.4.2.2 ระบบแบบ Dynamic.....  | 18 |
| 2.4.2.3 ระบบแปรตามเวลา.....   | 18 |
| 2.4.2.4 ระบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น (Linear and nonlinear system).....   | 19 |
| 2.4.2.5 ระบบแบบ Causal และแบบ Noncausal .....   | 20 |
| 2.4.2.6 ระบบแบบ Stable และระบบแบบ Unstable .....  | 20 |
| 2.4.3 การเชื่อมต่อระบบแบบไม่ต่อเนื่อง<br>(Interconnection of Discrete-time System) .....                              | 20 |
| 2.5 การวิเคราะห์ระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลาแบบเชิงเส้นและแปรตามเวลา.....   | 22 |
| 2.5.1 ทฤษฎีการผสมผสาน (Convolution Sum).....  | 22 |
| 2.6 โครงสร้างของระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา .....  | 25 |
| 2.6.1 โครงสร้างของระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา<br>(Structures of the realization of linear time- invariant system).....  | 25 |
| 2.7 ทฤษฎีการสุมตัวอย่าง .....   | 28 |
| 2.8 สมการผลต่างสืบเนื่อง.....   | 31 |
| 2.9 การแปลงแซค.....   | 32 |
| 2.10 คุณสมบัติการแปลงแซค.....   | 36 |
| 2.10.1 คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น (Linearity Property) .....   | 36 |
| 2.10.2 คุณสมบัติการเลื่อนเฟส (Shift Property) .....   | 36 |
| 2.10.3 คุณสมบัติการประสาน (Convolution Property).....   | 37 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ดัดแปลงจากเอกสารต้นฉบับของภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เพื่อแจกจ่ายให้นักศึกษาใช้ประกอบการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่สามารถนำออกจำหน่ายหรือทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านอื่น ๆ ได้

# สารบัญ(ต่อ)

หน้า

|  |    |
|--|----|
| 2.11 การแปลงแซคในรูปเศษส่วน .....  | 39 |
| 2.11.1 โพลและซีโร (Pole and Zero).....   | 39 |
| 2.11.2 ลักษณะสัญญาณและการวางตำแหน่งของโพล .....  | 42 |
| 2.12 การแปลงแซคผกผัน.....  | 45 |
| 2.12.1 การแปลงแซคผกผันด้วยวิธีอนุกรมอนันต์ .....   | 45 |
| 2.12.2 การแปลงแซคผกผันด้วยวิธีแยกเศษส่วนย่อย.....  | 46 |
| 2.12.3 การแปลงแซคผกผันด้วยวิธี Residue.....  | 50 |
| 2.13 ฟังก์ชันระบบของระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา .....  | 52 |
| 2.14 ผลตอบสนองทางเวลาของระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา .....   | 54 |
| 2.15 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซค.....   | 55 |
| 2.16 ผลตอบสนองความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา.....   | 56 |
| 2.16.1 ผลตอบสนองทางขนาด.....   | 56 |
| 2.16.2 ผลตอบสนองทางเฟส.....  | 56 |
| 2.17 โครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR.....  | 60 |
| บทที่ 3 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Notch .....  | 65 |
| 3.1 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch.....   | 65 |
| 3.2 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch .....  | 67 |
| 3.3 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยหลักการที่นำเสนอ.....   | 70 |
| 3.4 ตัวอย่างการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch.....  | 76 |
| 3.5 การออกแบบตัวกรองเชิงเลขด้วยโปรแกรม MATLAB .....  | 80 |
| 3.6 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยโปรแกรม MATLAB.....   | 80 |
| บทที่ 4 ผลการทดลอง.....  | 78 |
| 4.1 ผลการทดลองการเปรียบเทียบระหว่างการจำลองการทำงานด้วย MATLAB กับ<br>การสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31.....  | 83 |
| 4.2 ผลการทดลองการเปรียบเทียบระหว่างหลักการเดิมกับหลักการที่นำเสนอ โยชน์ด้านการค้า<br>ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น นี้ โดยการประยุกต์ในการลดทอนสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับคลื่นไฟฟ้าหัวใจ..... | 97 |

## สารบัญ(ต่อ)

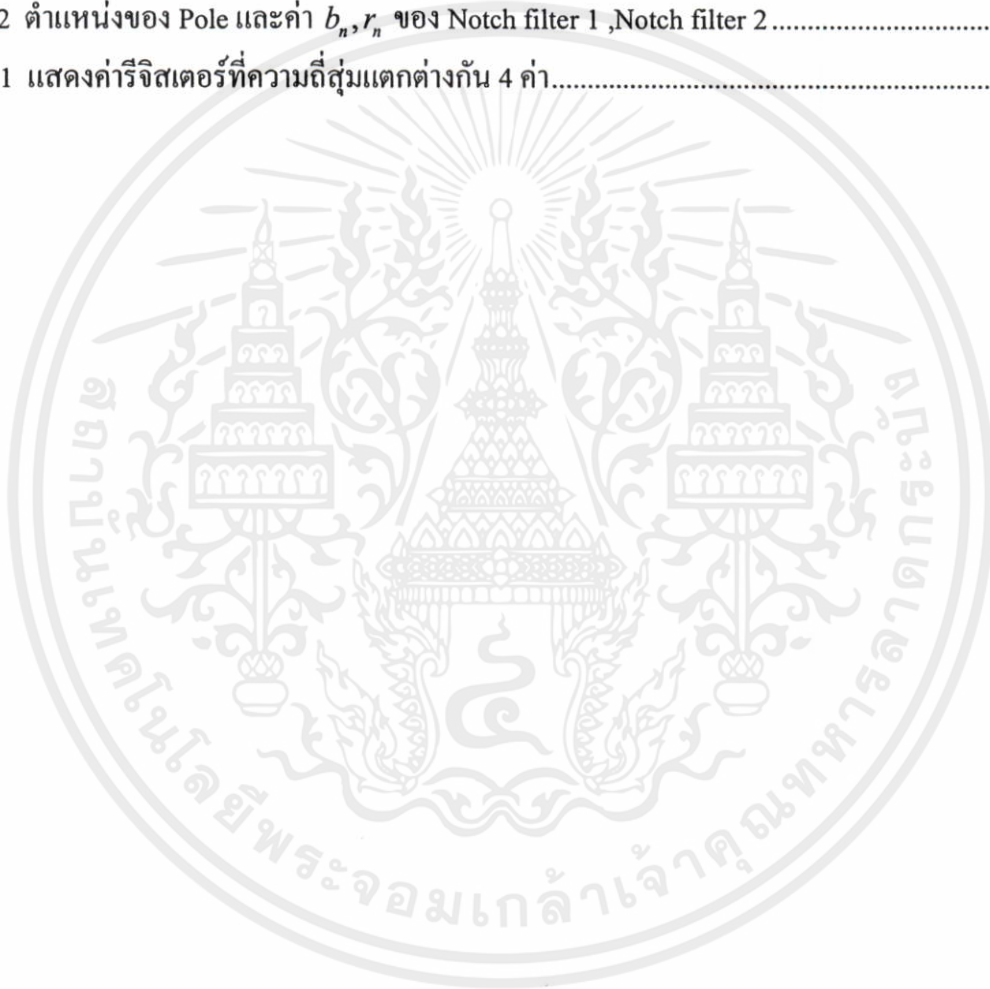
|   | หน้า |
|---|------|
| บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ .....                             | 107  |
| เอกสารอ้างอิง .....   | 108  |
| ภาคผนวก ก. บอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 DSP Starter Kit ..... | 109  |
| ภาคผนวก ข. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ .....                 | 119  |
| ประวัติผู้เขียน .....   | 127  |



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญตาราง

| ตารางที่   | หน้า |
|--|------|
| 2.1 แสดงผลของการแปลงแซด .....  | 38   |
| 2.2 สัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซด .....   | 55   |
| 3.1 อัตราการขยายที่ความถี่ DC, $\omega_1$ , $\omega_2$ , $\omega_c$ และ $\pi$ ของ Notch filter1, Notch filter2 และ<br>Multiple notch filter..... | 71   |
| 3.2 ตำแหน่งของ Pole และค่า $b_n, r_n$ ของ Notch filter 1, Notch filter 2.....  | 79   |
| ก.1 แสดงค่ารีจิสเตอร์ที่ความถี่สี่มุมแตกต่างกัน 4 ค่า.....   | 118  |



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญญภาพ

| ภาพที่   | หน้า |
|--|------|
| 2.1 แผนผังของระบบประมวลสัญญาณเชิงเลข.....  | 5    |
| 2.2 สัญญาณต่อเนื่องและสัญญาณไม่ต่อเนื่อง.....  | 6    |
| 2.3 Unit sample sequence.....  | 7    |
| 2.4 Unit step sequence.....  | 7    |
| 2.5 Exponential sequences $x(n) = A\alpha^n$ .....   | 8    |
| 2.6 Sinusoidal sequence.....   | 9    |
| 2.7 Periodic signals sequence.....   | 11   |
| 2.8 Symmetric (even) sequence.....   | 11   |
| 2.9 Asymmetric (odd) sequence.....   | 12   |
| 2.10 กราฟสัญญาณ $x(n)$ .....   | 12   |
| 2.11 กราฟสัญญาณ $x(n-3)$ .....   | 13   |
| 2.12 กราฟสัญญาณ $x(n+2)$ .....   | 14   |
| 2.13 กราฟสัญญาณ $x(n)$ .....   | 14   |
| 2.14 กราฟสัญญาณ $x(-n)$ .....  | 14   |
| 2.15 กราฟสัญญาณ $x(-n+2)$ .....  | 14   |
| 2.16 ไคอะแกรมของระบบแบบไม่ต่อเนื่อง.....   | 15   |
| 2.17 ไคอะแกรมการบวกในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง.....  | 16   |
| 2.18 ไคอะแกรมตัวคูณคงที่ในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง.....   | 16   |
| 2.19 ไคอะแกรมตัวคูณสัญญาณในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง.....  | 16   |
| 2.20 ไคอะแกรมตัวหวน่งในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง.....  | 17   |
| 2.21 ไคอะแกรมตัวล้าหน้าในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง.....  | 17   |
| 2.22 ไคอะแกรมของระบบแบบไม่ต่อเนื่องตามสมการที่ 2.24.....   | 17   |
| 2.23 ไคอะแกรมของระบบแบบไม่ต่อเนื่องตามสมการที่ 2.25.....   | 18   |
| 2.24 ตัวอย่างระบบแบบไม่ต่อเนื่องที่แปรตามเวลาและไม่แปรตามเวลา.....   | 19   |
| 2.25 ระบบ $\tau$ เป็นระบบที่เชิงเส้นและระบบที่ไม่มีคุณสมบัติสอดคล้องกับหลักการของ<br>Superposition จะเป็นระบบแบบไม่เชิงเส้น..... | 20   |
| 2.26 การเชื่อมต่อระบบแบบไม่ต่อเนื่องแบบอนุกรม.....   | 20   |
| 2.27 การเชื่อมต่อระบบแบบไม่ต่อเนื่องแบบขนาน.....   | 21   |

## สารบัญภาพ(ต่อ)

| ภาพที่   | หน้า |
|--|------|
| 2.28 คุณสมบัติการสลับที่ .....   | 23   |
| 2.29 คุณสมบัติการจัดกลุ่ม .....  | 23   |
| 2.30 คุณสมบัติการกระจาย .....  | 24   |
| 2.31 ผลตอบสนองทาง Impulse ของระบบแบบไม่ต่อเนื่อง .....   | 24   |
| 2.32 โครงสร้างของระบบเชิงเส้นแปรตามเวลา .....  | 26   |
| 2.33 โครงสร้างแบบตรง I ของระบบไม่ต่อเนื่องแบบ Recursive .....  | 27   |
| 2.34 โครงสร้างแบบตรง II ของระบบไม่ต่อเนื่องแบบ Recursive .....   | 28   |
| 2.35 การสุ่มตัวอย่างสัญญาณเชิงอุปมาน .....   | 29   |
| 2.36 สัญญาณสุ่มตัวอย่าง .....  | 29   |
| 2.37 สเปกตรัมของสัญญาณจากการสุ่มตัวอย่าง .....   | 30   |
| 2.38 ROC ของ $X(z)$ ในตัวอย่างที่ 2.9 .....  | 35   |
| 2.39 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.12 .....  | 39   |
| 2.40 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.13 .....  | 40   |
| 2.41 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.14 .....  | 41   |
| 2.42 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.15 .....  | 41   |
| 2.43 ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ .....  | 43   |
| 2.44 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซด .....  | 55   |
| 2.45 ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{1+z}{z}$ .....   | 58   |
| 2.46 ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบ $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$ .....  | 60   |
| 2.47 แสดงโคแอสแกรมการทำงานของตัวกรองเชิงเลขพื้นฐาน .....   | 60   |
| 2.48 แสดงองค์ประกอบพื้นฐานทั้ง 3 ตัวที่ใช้เป็นส่วนประกอบของตัวกรองเชิงเลข .....  | 61   |
| 2.49 แสดงโครงสร้างของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขแบบตรง I .....  | 62   |
| 2.50 แสดงโครงสร้างของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขแบบตรง II .....   | 63   |
| 2.51 แสดงโครงสร้างของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขที่มีโครงสร้างในแบบขนาน .....   | 63   |
| 2.52 แสดงโครงสร้างย่อยของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขที่มีโครงสร้างแบบขนาน .....   | 64   |
| 3.1 ตำแหน่งการวางโพล-ซีโรของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลง<br>ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น ก็ทั้งที่ให้มีให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้<br>การวางตำแหน่งโพล ..... | 65   |

## สารบัญภาพ(ต่อ)

| ภาพที่   | หน้า |
|--|------|
| 3.2 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลง<br>การวางตำแหน่งโพล .....   | 66   |
| 3.3 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch หลังเปลี่ยนแปลง<br>การวางตำแหน่งโพล .....   | 67   |
| 3.4 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจาก<br>ตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ก่อนทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง โพล.....      | 68   |
| 3.5 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจาก<br>ตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch หลังทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวาง โพล .....     | 69   |
| 3.6 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 .....   | 71   |
| 3.7 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 2 .....   | 71   |
| 3.8 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ที่ค่า $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$ และ $0.95$ .....   | 76   |
| 3.9 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ .....   | 77   |
| 3.10 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 2 ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ .....  | 77   |
| 3.11 ตำแหน่งการวาง โพล-ซีโรของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการ<br>ที่นำเสนอ.....  | 78   |
| 3.12 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการ<br>ที่นำเสนอ.....  | 78   |
| 3.13 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการเดิม<br>ก่อนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งโพลที่ค่า $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$ และ $0.95$ ..... | 79   |
| 3.14 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการเดิม<br>หลังการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งโพลที่ค่า $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$ และ $0.95$ ..... | 79   |
| 3.15 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการ<br>ที่นำเสนอที่ค่า $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$ และ $0.95$ .....                        | 80   |
| 3.16 โปรแกรม MATLAB .....  | 81   |
| 3.17 ข้อความหลังจากเรียกโปรแกรมให้ทำงาน .....  | 81   |
| 3.18 คำสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่ออกแบบด้วย<br>โปรแกรม MATLAB .....   | 82   |

## สารบัญญภาพ(ต่อ)

| ภาพที่  | หน้า |
|---|------|
| 3.19 กราฟจำลองการทำงานของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่ออกแบบด้วยโปรแกรม MATLAB.....  | 82   |
| 4.1 ไดอะแกรมการทดลองระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลข .....   | 84   |
| 4.2 อุปกรณ์ทั้งหมดที่ใช้ทดลองระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลข .....  | 84   |
| 4.3a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.6$ จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                            | 85   |
| 4.3b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.6$ จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....  | 85   |
| 4.4a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.7$ จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                            | 86   |
| 4.4b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.7$ จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....  | 86   |
| 4.5a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.8$ จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                            | 87   |
| 4.5b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.8$ จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....  | 87   |
| 4.6a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.9$ จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                            | 88   |
| 4.6b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.9$ จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....  | 88   |
| 4.7a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.95$ จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                           | 89   |
| 4.7b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.95$ จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์ ..... | 89   |
| 4.8a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.99$ จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                           | 90   |
| 4.8b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.99$ จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์ ..... | 90   |

เอกสารนี้เป็นเอกสารต้นฉบับที่จัดทำขึ้นเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆก็ตาม หากมีข้อสงสัย กรุณาติดต่อฝ่ายจัดพิมพ์เอกสารของสำนักพิมพ์ที่ปรากฏ

## สารบัญภาพ(ต่อ)

| ภาพที่  | หน้า |
|---|------|
| 4.9a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.6$<br>จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                                 | 91   |
| 4.9b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.6$<br>จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิคซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....       | 91   |
| 4.10a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.7$<br>จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                                | 92   |
| 4.10b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.7$<br>จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิคซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....      | 92   |
| 4.11a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.8$<br>จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                                | 93   |
| 4.11b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.8$<br>จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิคซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....      | 93   |
| 4.12a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.9$<br>จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                                | 94   |
| 4.12b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.9$<br>จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิคซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....      | 94   |
| 4.13a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.95$<br>จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                               | 95   |
| 4.13b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.95$<br>จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิคซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....     | 95   |
| 4.14a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.99$<br>จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB.....                               | 96   |
| 4.14b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ $BWF = 0.99$<br>จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิคซิกแนลอะนาไลเซอร์ .....     | 96   |
| 4.15 ไคอะแกรมการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50Hz และ 150Hz ที่ปะปนมากับ<br>สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch..... | 97   |

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญญภาพ(ต่อ)

| ภาพที่  | หน้า |
|---|------|
| 4.16a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ..... | 98   |
| 4.16b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล.....  | 98   |
| 4.16c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ .....                           | 99   |
| 4.17a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ..... | 99   |
| 4.17b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล.....  | 100  |
| 4.17c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ .....                           | 100  |
| 4.18a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ..... | 101  |
| 4.18b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล.....  | 101  |
| 4.18c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ .....                           | 102  |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งนี้ หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อสงสัย กรุณาแจ้งผู้จัดทำเพื่อปรับปรุงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญภาพ(ต่อ)

| ภาพที่   | หน้า |
|--|------|
| 4.19a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิม ก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ..... | 102  |
| 4.19b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิม หลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล.....  | 103  |
| 4.19c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ .....                            | 103  |
| 4.20a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิม ก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ..... | 104  |
| 4.20b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิม หลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล.....  | 104  |
| 4.20c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ .....                            | 105  |
| 4.21a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิม ก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ..... | 105  |
| 4.21b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิม หลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล.....  | 106  |
| 4.21c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ .....                            | 106  |

เอกสารนี้เป็นเอกสารตัวอย่างที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งนี้ หากมีให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญภาพ(ต่อ)

| ภาพที่   | หน้า |
|--|------|
| ก.1 ฮาร์ดแวร์ของบอร์ด TMS320C31 DSP Starter Kit .....  | 110  |
| ก.2 บล็อกไดอะแกรมของบอร์ด TMS320C31 DSP Starter Kit.....   | 111  |
| ก.3 การจัดแบ่งหน่วยความจำในโหมด Microcomputer/Boot Loader<br>ของบอร์ด TMS320C31 DSP Starter Kit..... | 112  |
| ก.4 ฟังก์ชันไดอะแกรมของชิป TLC32040 .....  | 113  |



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

แต่เดิมตัวกรองแบบ Notch สามารถสร้างได้ด้วยวงจรอนาล็อก แต่เนื่องจากการสร้างด้วยวงจรอนาล็อกมีข้อจำกัดอยู่หลายประการ[1] โดยเฉพาะอย่างยิ่งในแง่ของความเที่ยงตรง ซึ่งต่อมาจึงได้ถูกนำไปสร้างให้อยู่ในรูปของตัวกรองเชิงเลข (Digital Filter) แบบ FIR หรือ IIR แต่ในการสร้างด้วยตัวกรองเชิงเลขแบบ FIR จะมีข้อจำกัดคือไม่สามารถสร้างให้มีแบนด์วิดท์แคบๆ ได้ ดังนั้นในการสร้างจะกระทำด้วยตัวกรองเชิงเลขแบบ IIR ซึ่งการออกแบบสามารถกระทำได้หลายวิธีเช่นออกแบบโดยการเปลี่ยนรูปมาจากตัวกรองอนาล็อก[1] ออกแบบโดยอาศัยคุณสมบัติของตัวกรองเชิงเลขแบบออลพาส[2] และออกแบบโดยการกำหนดตำแหน่งโพล-ซีโร[6,8] ซึ่งการออกแบบด้วยวิธีหลังจะเป็นวิธีที่ง่าย แต่ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่บางประการเช่นจะมีอัตราการขยายในช่วง Pass-band ที่ไม่สมมาตรกัน และนอกจากนี้ยังไม่สามารถควบคุมให้มีขนาดตามต้องการได้ ซึ่งข้อจำกัดดังกล่าวนี้สามารถแก้ไขได้โดยการเปลี่ยนตำแหน่งของโพล ให้อยู่ในตำแหน่งที่เหมาะสมซึ่งจะทำให้อัตราการขยายในช่วง Pass-band มีความสมมาตรกัน และนอกจากนี้ยังมีการหาค่าคงที่สำหรับควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band ให้มีขนาดตามที่ต้องการได้อีกด้วย ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานตัวกรองแบบ Notch ได้แก่ การกำจัดสัญญาณรบกวนเฉพาะความถี่ แต่ในการประยุกต์ใช้งานบางประเภทอาจมีสัญญาณรบกวนมากกว่าหนึ่งความถี่ ดังนั้นในการกำจัดสัญญาณรบกวนที่มากกว่าหนึ่งความถี่ให้หมดไปจำเป็นต้องใช้ตัวกรองเชิงเลขที่มี Notch frequency มากกว่าหนึ่งความถี่ (Multiple notch filter) ซึ่งในการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch นั้นสามารถกระทำได้โดยการนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกันมาต่อลำดับกัน แต่ในการนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่ถูกออกแบบตามหลักการเดิมก่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล มาต่อลำดับกันเพื่อสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ผลตอบสนองทางขนาดที่ได้จะไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายให้มีขนาดตามที่ต้องการได้ แต่ถ้านำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่ถูกออกแบบตามหลักการเดิมโดยมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ซึ่งอาจจะยังอยู่ในตำแหน่งที่ไม่เหมาะสม มาต่อลำดับกันเพื่อสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ผลตอบสนองทางขนาดที่ได้นั้นสามารถควบคุมอัตราการขยายให้มีขนาดตามที่ต้องการได้เพียงบางความถี่เท่านั้น แต่บางความถี่โดยเฉพาะช่วงความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency อัตราการขยายจะไม่สามารถควบคุมได้[5]

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำเสนอการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch โดยที่ผลตอบสนองทางขนาดระหว่าง Notch frequency สามารถควบคุมอัตราการขยายให้เป็นไปตามที่ต้องการได้ โดยการออกแบบจะหาค่าแห่งการวางโพลที่เหมาะสมและสอดคล้องกันระหว่างตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ทั้งสองที่นำมาต่อลำดับกัน

## 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

- 1.2.1 เพื่อนำเสนอการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ด้วยวิธีกำหนดตำแหน่งโพล-ซีโร ที่เหมาะสมโดยใช้สมการหาความสัมพันธ์
- 1.2.2 ลक्षข้อจำกัดของการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ด้วยวิธีกำหนดตำแหน่งโพล-ซีโร
- 1.2.3 ต้องการสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ให้มีคุณสมบัติใกล้เคียงอุดมคติมากที่สุด
- 1.2.4 เพื่อนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ไปประยุกต์ใช้งานทางด้านการแพทย์

## 1.3 สมมติฐานของการศึกษา

หลักการเดิมที่ใช้ออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch เมื่อนำมาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ยังมีข้อจำกัดอยู่บางประการคือไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band ที่ความถี่ DC,  $\pi$  และความถี่ระหว่าง Notch frequency ได้ ดังนั้นจำเป็นต้องออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ด้วยวิธีการใหม่ โดยวิธีกำหนดตำแหน่งโพลเพื่อหาความสัมพันธ์ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่นำมาต่อลำดับกันเพื่อสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สามารถควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band ได้

## 1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีการหาค่าแห่งการวางโพลที่เหมาะสมสำหรับตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch โดยสร้างสมการหาความสัมพันธ์และแก้สมการ เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับ อัตราขยายในช่วงแถบความถี่ผ่าน ที่ไม่สมมาตรกันและควบคุมไม่ได้ และโดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency ลำดับขั้นตอนการออกแบบเริ่มจาก การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกัน โดยจะทำการหาค่าแห่งการวางโพลที่เหมาะสมและสอดคล้องกันระหว่างตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch เพื่อที่จะทำให้สามารถควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band ที่ความถี่ DC,  $\pi$  และที่ความถี่ใดๆอีกหนึ่งความถี่รวมทั้งสิ้น 3 ความถี่ให้มีขนาดตามต้องการจากนั้นนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่มี Notch frequency ต่างกันมาต่อลำดับกันก็

จะทำให้เกิดเป็นตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สามารถควบคุมอัตราขยายในช่วง Pass-band ได้และโดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงระหว่าง Notch frequency

## 1.5 การเปรียบเทียบระหว่างวิธีการที่นำเสนอกับวิธีการแบบพื้นฐาน

การสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่ถูกออกแบบตามหลักการเดิม ซึ่งตำแหน่งการวางโพลอาจจะยังอยู่ในตำแหน่งที่ไม่เหมาะสม ผลตอบสนองที่ได้นั้นสามารถควบคุมอัตราขยายได้เพียงบางความถี่ ส่วนการสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่ใช้เทคนิคการหาตำแหน่งการวางโพลที่เหมาะสมจะทำให้สามารถควบคุมอัตราขยายในช่วง Pass-band โดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงความถี่ระหว่าง Notch frequency

## 1.6 ขอบเขตการวิจัย

1.6.1 ออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยหลักการใหม่ที่นำเสนอและนำมาสร้างจริงบนบอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31

1.6.2 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ที่สร้างจากบอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 กับผลการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

## 1.7 ขั้นตอนของการศึกษา

1.7.1 การวิจัยมีขั้นตอนดังนี้

1.7.1.1 ศึกษาหลักการของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ตามหลักการเดิม

1.7.1.2 ศึกษาหลักการของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิม

1.7.1.3 ออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch โดยใช้เทคนิคการหาตำแหน่งการวางโพลที่เหมาะสม

1.7.1.4 ออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch จากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch โดยการหาตำแหน่งการวางโพลที่เหมาะสม

1.7.1.5 ออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมกับหลักการใหม่ที่นำเสนอและเปรียบเทียบผลการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB กับการสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31

1.7.2 เครื่องมือในการวิจัย

1.7.2.1 บอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 DSP Starter Kit

1.7.2.2 โปรแกรม MATLAB

1.7.2.3 เครื่องไดนามิกซิกแนลไลเซอร์ (Dynamic Signal Analyzer)

1.7.2.4 ออสซิลโลสโคป (Oscilloscopes)

1.7.3 วิธีเก็บรวบรวมผล

นำผลการทดลองของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างจริงบนบอร์ดประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 ที่ออกแบบด้วยหลักการเดิมกับหลักการที่นำเสนอและนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองด้วยโปรแกรม MATLAB

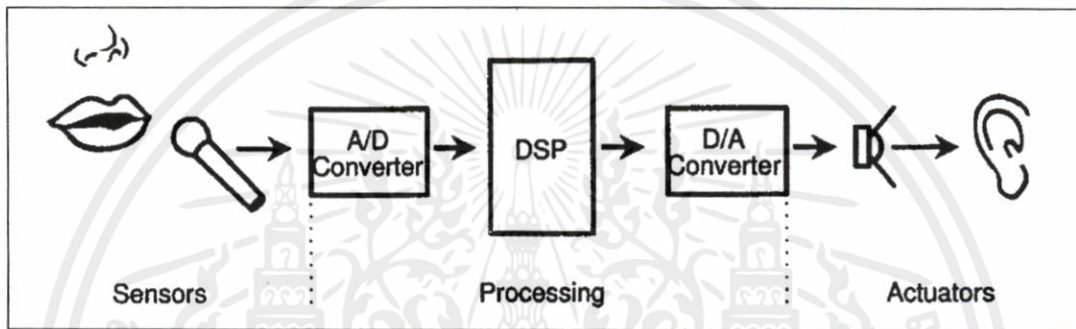


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

# ทฤษฎีการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

ระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลขประกอบด้วยตัวแปลงสัญญาณอนาลอกเป็นสัญญาณดิจิทัล (Analog to Digital Converter : A/D) ตัวประมวลผล (Processor) ตัวแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นอนาลอก (Digital to Analog Converter : D/A) ระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลขมีแผนผังแสดงดังภาพที่ 2.1



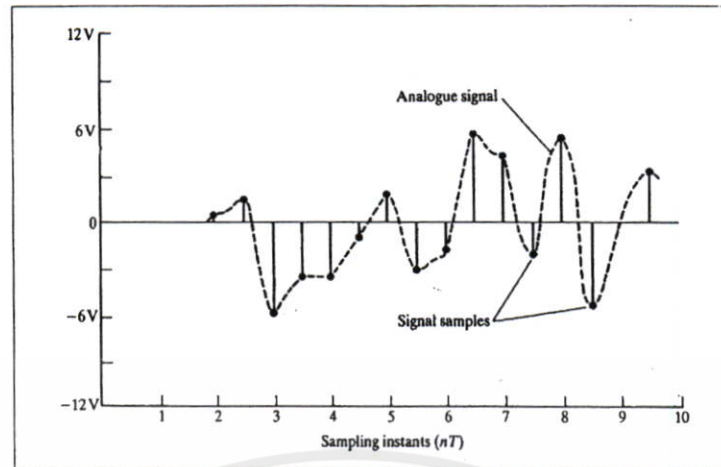
ภาพที่ 2.1 แผนผังของระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

จากภาพที่ 2.1 จะเห็นได้ว่าสัญญาณอนาลอกจะถูกแปลงเป็นสัญญาณดิจิทัลด้วย A/D สัญญาณดิจิทัลจะถูกคำนวณโดยตัวประมวลผล และผลที่ได้จากการประมวลผลจะถูกส่ง D/A เพื่อแปลงกลับให้เป็นสัญญาณอนาลอกต่อไป

### 2.1 สัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [1,6]

สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องนี้จะมีลักษณะดังภาพที่ 2.2 โดยจะเห็นได้ว่าสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องก็คือสัญญาณค่าหนึ่ง ณ เวลาหนึ่งบนสัญญาณที่ต่อเนื่องแต่จะมีระยะเวลาห่างที่เท่ากันในแต่ละจุด เรียกระยะเวลาห่างที่เท่ากันนี้ว่า Sampling time, Sampling rate หรือ Sampling periods สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสามารถเรียกเป็นลำดับสัญญาณ (Sequence signal) ก็ได้ และสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการคณิตศาสตร์ได้หลายรูปแบบดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.2 สัญญาณต่อเนื่องและสัญญาณไม่ต่อเนื่อง

- เขียนในรูปของฟังก์ชัน (Functional representation)

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, 3 \\ 4, & n = 2, 4 \\ 0, & n > 4 \end{cases} \quad (2.1)$$

- เขียนในรูปการแจกแจง (Tabular representation)

|        |     |    |    |   |   |   |   |   |     |
|--------|-----|----|----|---|---|---|---|---|-----|
| $n$    | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| $x(n)$ | ... | 0  | 0  | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 |     |

- เขียนในรูปลำดับ (Sequence representation)

$$x(n) = \{\dots, 0, 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots\} \quad (2.2)$$

$$x(n) = \{0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots\} \quad (2.3)$$

$$x(n) = \{3, -1, -2, 5, 0, 4, -1\} \quad (2.4)$$

$$x(n) = \{0, 1, 4, 1, \dots\} \quad (2.5)$$

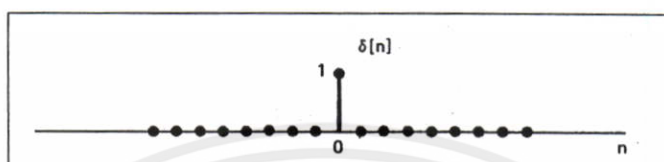
สมการที่ 2.2 และ 2.3 เป็นลำดับแบบไม่มีจุดจบ (Infinite-duration signal or sequence) ส่วนสมการที่ 2.4 และ 2.5 เป็นลำดับแบบมีจุดจบ (Finite-duration signal or sequence)

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.1 Unit sample sequence

มีนิยามดังสมการที่ 2.6 และมีรูปสัญญาณดังภาพที่ 2.3

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

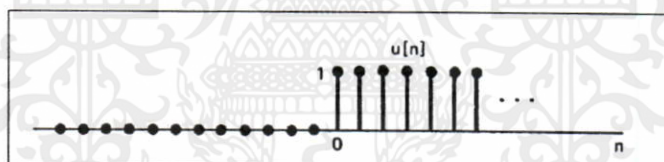


ภาพที่ 2.3 Unit sample sequence

### 2.1.2 Unit step sequence

มีนิยามดังสมการที่ 2.7 และมีรูปสัญญาณดังรูปที่ 2.4

$$u(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$



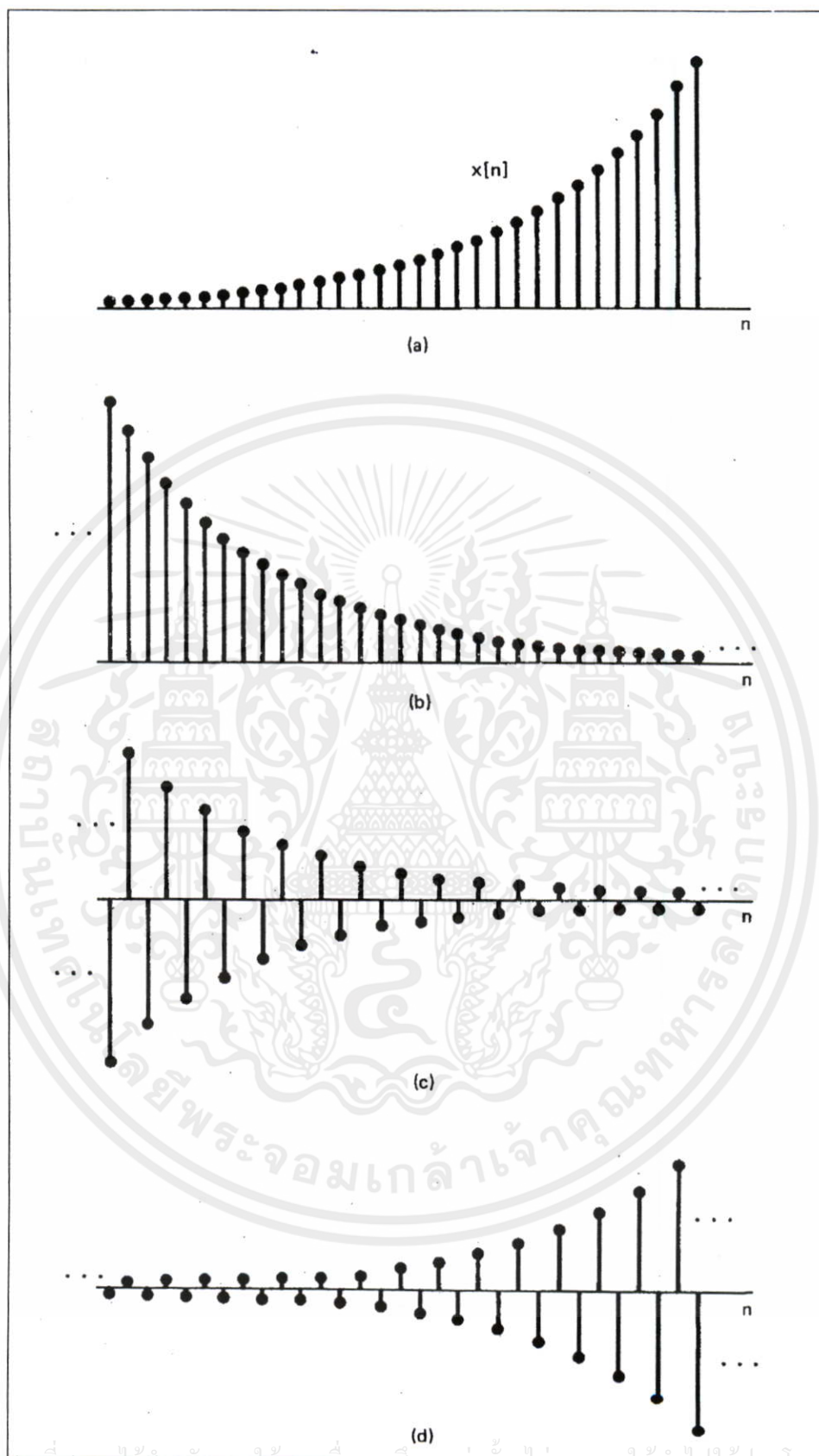
ภาพที่ 2.4 Unit step sequence

### 2.1.3 Exponential sequences

มีนิยามดังสมการที่ 2.8 และมีรูปสัญญาณดังภาพที่ 2.5

$$x(n) = \alpha^n \quad (2.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

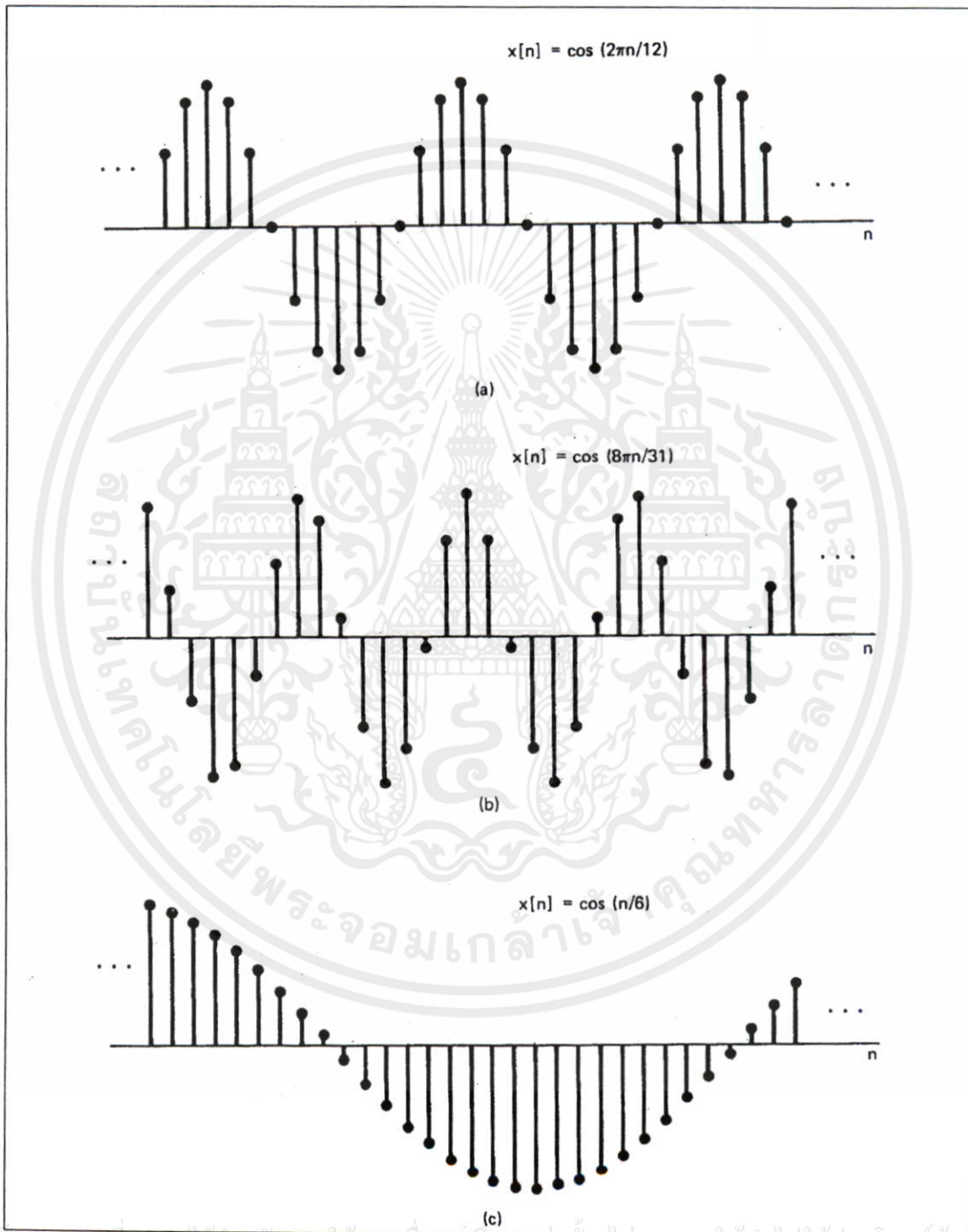
ภาพที่ 2.5 Exponential sequences  $x(n) = A\alpha^n$   
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(a)  $\alpha > 1$ ; (b)  $0 < \alpha < 1$ ; (c)  $-1 < \alpha < 0$ ; (d)  $\alpha < -1$

### 2.1.4 Sinusoidal sequences

มีนิยามดังสมการที่ 2.9 และมีรูปสัญญาณดังภาพที่ 2.6

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (2.9)$$



ภาพที่ 2.6 Sinusoidal sequences

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ส่วนตัวเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.2 ลักษณะเฉพาะของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [1,6]

### 2.2.1 Energy signal และ Power signals

Energy ของสัญญาณไม่ต่อเนื่อง  $x(n)$  สามารถหาได้จากสมการที่ 2.10

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (2.10)$$

และ Power ของสัญญาณไม่ต่อเนื่อง  $x(n)$  สามารถหาได้จากสมการที่ 2.11

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (2.11)$$

จากสมการที่ 2.5 กำหนดให้  $n$  อยู่ในช่วง  $-N$  ถึง  $N$  ดังสมการที่ 2.12

$$E_N = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (2.12)$$

แทนค่า  $E$  ลงในสมการที่ 2.12 และสมการที่ 2.6 จะได้ Power ดังสมการที่ 2.13

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N \quad (2.13)$$

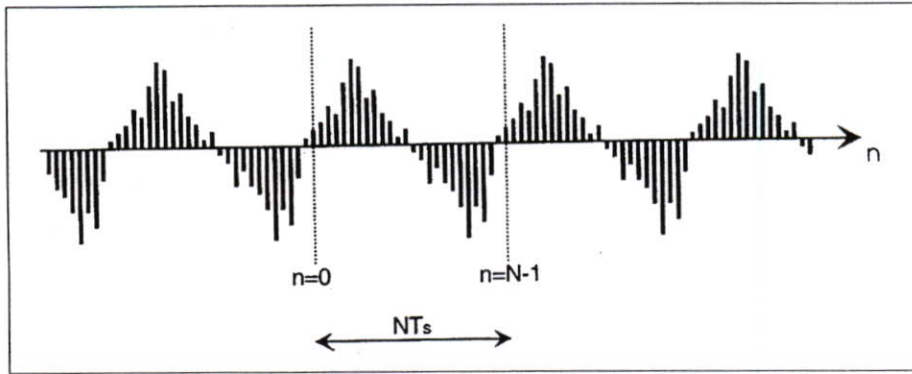
### 2.2.2 Periodic signals และ Aperiodic signals

Periodic signals sequence เป็นสัญญาณที่มีคาบซ้ำมีนิยามดังสมการที่ 2.14 และแสดงสัญญาณได้ดังภาพที่ 2.7

$$x(n+N) = x(n) \quad (2.14)$$

เมื่อ  $N$  คือ Fundamental period และลำดับที่ไม่เป็นดังสมการที่ 2.14 จะเป็นลำดับแบบ Aperiodic

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

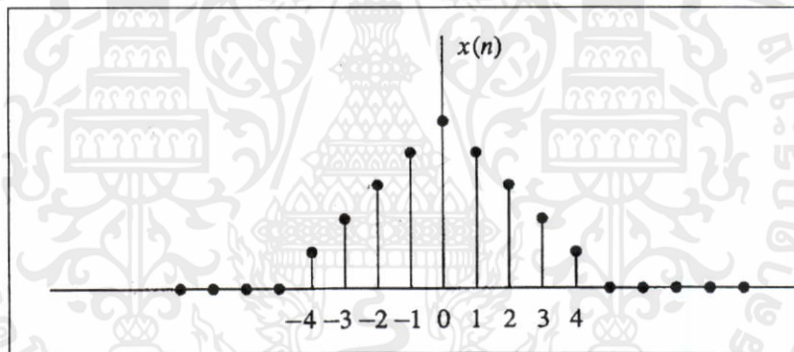


ภาพที่ 2.7 Periodic signals sequence

### 2.2.3 Symmetric (even) และ Asymmetric (odd) signals

ลำดับสัญญาณที่สมมาตรกัน(Symmetric) มีนิยามดังสมการที่ 2.15 มีรูปสัญญาณดังภาพที่ 2.8

$$x(-n) = x(n) \quad (2.15)$$

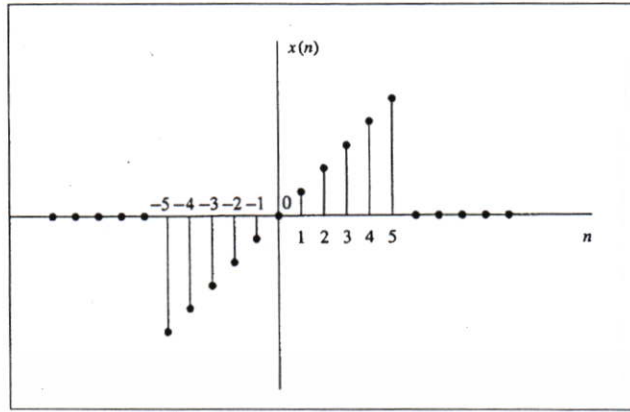


ภาพที่ 2.8 Symmetric (even) sequence

ลำดับสัญญาณที่ไม่สมมาตรกัน(Asymmetric) มีนิยามดังสมการที่ 2.16 มีรูปสัญญาณดังภาพที่ 2.9

$$x(-n) = -x(n) \quad (2.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.9 Asymmetric (odd) sequence

### 2.3 การกระทำของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [1, 6]

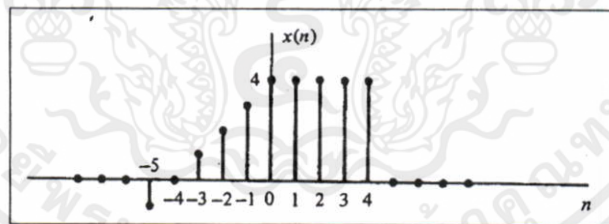
#### 2.3.1 การเลื่อนสัญญาณ

อาจเรียกว่าการหน่วงสัญญาณก็ได้เขียนเป็นสมการ ได้ดังสมการที่ 2.17

$$y(n] = x(n - k) \tag{2.17}$$

เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม (Integer)

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้สัญญาณ  $x(n]$  แสดงดังในภาพที่ 2.10 หา (a)  $x(n-3]$  และ (b)  $x(n+2]$



ภาพที่ 2.10 กราฟสัญญาณ  $x(n]$

วิธีการของกรณี (a)  $x(n-3]$  กำหนดให้  $y(n] = x(n-3]$

กรณี  $n = -6$

$$y(-6) = x(-6-3) = x(-9) = 0$$

กรณี  $n = -5$

$$y(-5) = x(-5-3) = x(-8) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์สงวนไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆที่ส่งออกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี  $n = -4$

$$y(-4) = x(-4-3) = x(-7) = 0$$

กรณี  $n = -3$

$$y(-3) = x(-3-3) = x(-6) = 0$$

กรณี  $n = -2$

$$y(-2) = x(-2-3) = x(-5) = -1$$

กรณี  $n = -1$

$$y(-1) = x(-1-3) = x(-4) = 0$$

กรณี  $n = 0$

$$y(0) = x(0-3) = x(-3) = 1$$

กรณี  $n = 1$

$$y(1) = x(1-3) = x(-2) = 2$$

กรณี  $n = 2$

$$y(2) = x(2-3) = x(-1) = 3$$

กรณี  $n = 3$

$$y(3) = x(3-3) = x(0) = 4$$

กรณี  $n = 4$

$$y(4) = x(4-3) = x(1) = 4$$

กรณี  $n = 5$

$$y(5) = x(5-3) = x(2) = 4$$

กรณี  $n = 6$

$$y(6) = x(6-3) = x(3) = 4$$

กรณี  $n = 7$

$$y(7) = x(7-3) = x(4) = 4$$

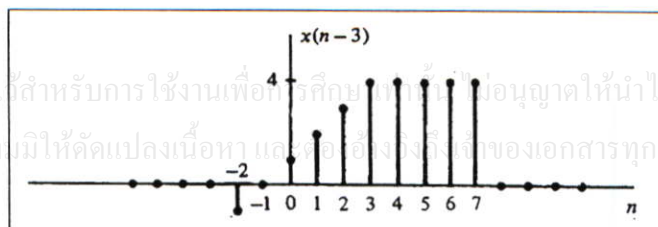
กรณี  $n = 8$

$$y(8) = x(8-3) = x(5) = 0$$

กรณี  $n = 9$

$$y(9) = x(9-3) = x(6) = 0$$

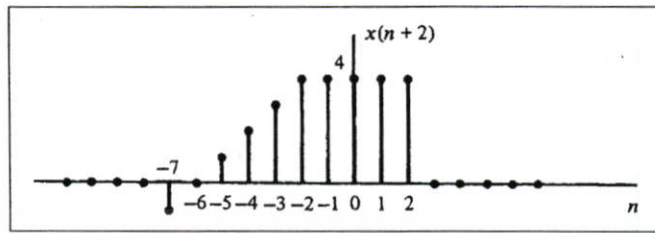
นำค่า  $y(n) = x(n-3)$  ไปเขียนเป็นกราฟได้ดังภาพที่ 2.11



ภาพที่ 2.11 กราฟสัญญาณ  $x(n-3)$

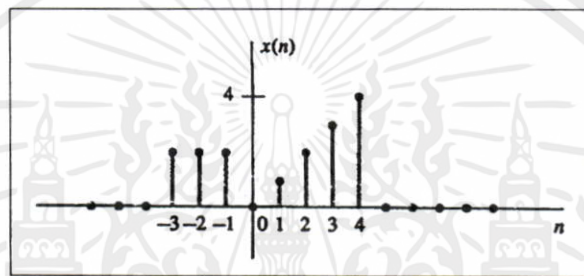
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และเพื่อป้องกันถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีการกรณี (b)  $x(n+2)$  กำหนดให้  $y(n) = x(n+2)$  ในการหาค่าสามารถทำได้เช่นเดียวกับข้อ (a) และเขียนเป็นกราฟได้ดังภาพที่ 2.12



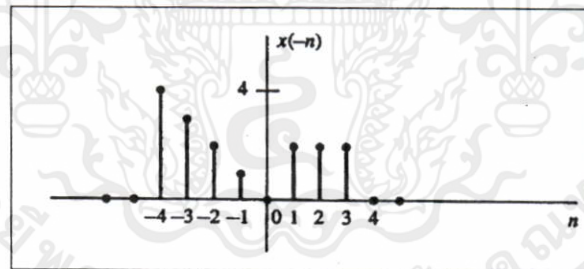
ภาพที่ 2.12 กราฟสัญญาณ  $x(n+2)$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้สัญญาณ  $x(n]$  แสดงดังในภาพที่ 2.13 หา (a)  $x(-n]$  และ (b)  $x(-n+2)$



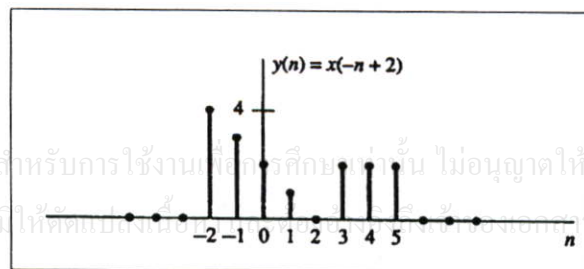
ภาพที่ 2.13 กราฟสัญญาณ  $x(n]$

วิธีการของกรณี (a)  $x(-n]$  กำหนดให้  $y(n) = x(-n]$  ที่  $n$  มีค่าตั้งแต่ -6 ถึง 5 จะได้สัญญาณ  $x(-n]$  แสดงดังภาพที่ 2.14



ภาพที่ 2.14 กราฟสัญญาณ  $x(-n]$

วิธีการของกรณี (b)  $x(-n+2)$  กำหนดให้  $y(n) = x(-n+2)$  ที่  $n$  มีค่าตั้งแต่ -5 ถึง 8 จะได้สัญญาณ  $x(-n+2)$  แสดงดังภาพที่ 2.15



ภาพที่ 2.15 กราฟสัญญาณ  $x(-n+2)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกส่งต่อให้ผู้อื่นโดยเด็ดขาด หากพบการละเมิดลิขสิทธิ์จะดำเนินการฟ้องดำเนินคดี  
ทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.3.2 การบวก การคูณและการสเกลสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง (Adding, Multiplication, and Scaling of Discrete Time Signal)

- การบวกสัญญาณ 2 สัญญาณ หรือ  $k$  สัญญาณเข้าด้วยกัน แสดงได้ดังสมการที่ 2.18 และสมการที่ 2.19

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (2.18)$$

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) + \dots + x_k(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (2.19)$$

- การคูณสัญญาณ 2 สัญญาณ หรือ  $k$  สัญญาณเข้าด้วยกัน แสดงได้ดังสมการที่ 2.20 และสมการที่ 2.21

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (2.20)$$

$$y(n) = x_1(n)x_2(n)\dots x_k(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (2.21)$$

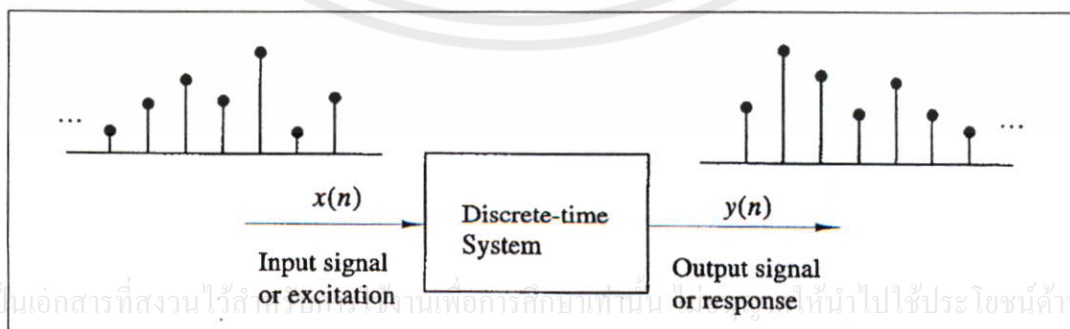
- การสเกลสัญญาณเป็นการปรับขนาดสัญญาณ กระทำได้โดยการคูณสัญญาณเข้ากับค่าคงที่ดังสมการที่ 2.22

$$y(n) = Ax(n) \quad -\infty < n < \infty \quad (2.22)$$

เมื่อ  $A$  เป็นค่าคงที่

### 2.4 ระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [6, 12]

ระบบแบบไม่ต่อเนื่องมีไดอะแกรมดังภาพที่ 2.16



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ห้ามนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้นำไปเผยแพร่ในที่สาธารณะหรือทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของลิขสิทธิ์

ภาพที่ 2.16 ไดอะแกรมของระบบแบบไม่ต่อเนื่อง

เมื่อ  $x(n)$  เป็นสัญญาณอินพุตหรือ Excitation ของระบบแบบไม่ต่อเนื่อง  
 $y(n)$  เป็นสัญญาณเอาต์พุตหรือผลตอบสนองของระบบแบบไม่ต่อเนื่อง  
 จากภาพที่ 2.16 สามารถนิยามความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตกับเอาต์พุตได้ดังสมการที่ 2.23

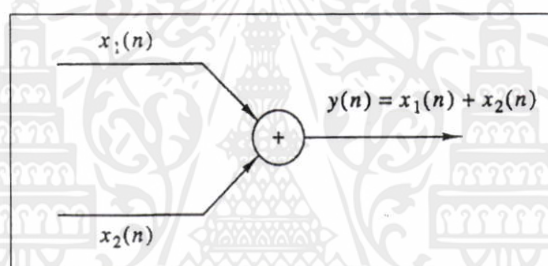
$$y(n) \equiv \tau[x(n)] \quad (2.23)$$

เมื่อ  $\tau$  เป็นตัวกระทำ (Operator)

#### 2.4.1 ไคอะแกรมที่ใช้แสดงในระบบไม่ต่อเนื่อง (Block Diagram Representation of Discrete-Time Systems)

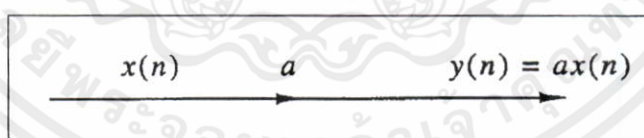
ในระบบแบบไม่ต่อเนื่องสามารถแทนได้ด้วยไคอะแกรมดังต่อไปนี้

- ตัวบวก (Adder) ใช้สำหรับบวกสัญญาณเข้าด้วยกันดังภาพที่ 2.17



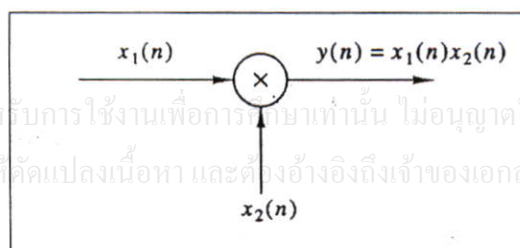
ภาพที่ 2.17 ไคอะแกรมการบวกในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง

- ตัวคูณคงที่ (Constant multiplier) ใช้คูณค่าคงที่กับสัญญาณดังภาพที่ 2.18



รูปที่ 2.18 ไคอะแกรมตัวคูณคงที่ในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง

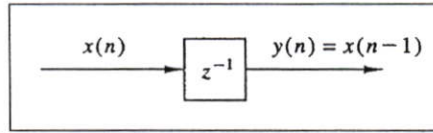
- ตัวคูณสัญญาณ (Signal multiplier) ใช้สำหรับคูณสัญญาณเข้าด้วยกันดังภาพที่ 2.19



ภาพที่ 2.19 ไคอะแกรมตัวคูณสัญญาณในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง

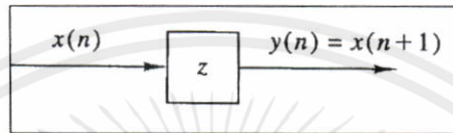
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษายเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- ตัวหน่วง (Delay element) ใช้สำหรับหน่วงสัญญาณดังภาพที่ 2.20



ภาพที่ 2.20 ไคอะแกรมตัวหน่วงในระบบไม่ต่อเนื่อง

- ตัวล้ำหน้า (Advance element) ใช้สำหรับกำหนดค่าล่วงหน้าให้กับระบบดังภาพที่ 2.21

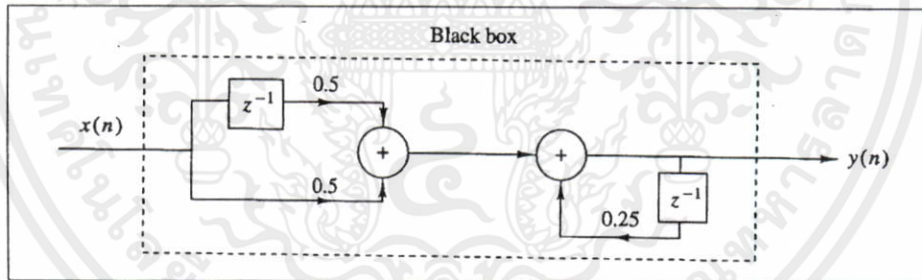


ภาพที่ 2.21 ไคอะแกรมตัวล้ำหน้าในระบบไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 2.3 ระบบแบบไม่ต่อเนื่องมีสมการเอาต์พุต ดังสมการที่ 2.24 จงเขียนไคอะแกรม

$$y(n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \quad (2.24)$$

วิธีการ จากสมการที่ 2.24 สามารถนำมาเขียนไคอะแกรมได้ดังภาพที่ 2.22

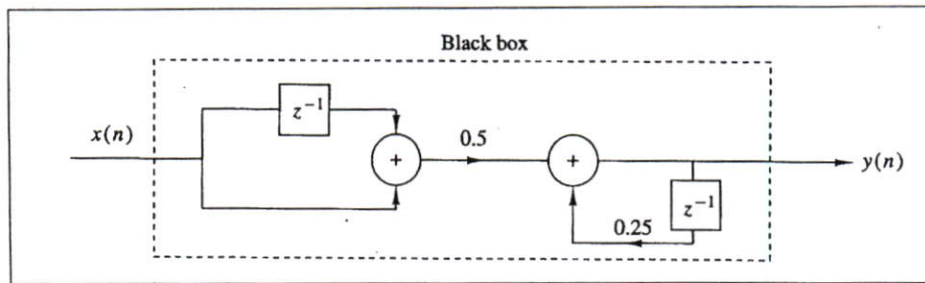


ภาพที่ 2.22 ไคอะแกรมของระบบไม่ต่อเนื่องตามสมการที่ 2.24

และถ้านำสมการที่ 2.24 มาจัดใหม่ดังสมการที่ 2.25 สามารถเขียนไคอะแกรมได้ใหม่ดังภาพที่ 2.23

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}[x[n] + x[n-1]] \quad (2.25)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.23 ไคอะแกรมของระบบไม่ต่อเนื่องตามสมการที่ 2.25

## 2.4.2 ชนิดของระบบแบบไม่ต่อเนื่อง

### 2.4.2.1 ระบบแบบ Static

เป็นระบบที่ไม่มีหน่วยความจำ ซึ่งสมการของระบบแสดงได้ดังสมการที่ 2.26 และสมการที่ 2.27

$$y(n) = ax(n) \quad (2.26)$$

$$y(n) = nx(n) + bx^3(n) \quad (2.27)$$

### 2.4.2.2 ระบบแบบ Dynamic

เป็นระบบที่มีหน่วยความจำซึ่งหมายถึงเป็นระบบที่สามารถบันทึกค่าอินพุตหรือเอาต์พุต ที่เวลาผ่านไปแล้ว สมการของระบบดังสมการที่ 2.28 – 2.30

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1) \quad (2.28)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(n-k) \quad (2.29)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k) \quad (2.30)$$

### 2.4.2.3 ระบบแบบแปรตามเวลา (Time-invariant system)

กำหนดให้  $x(n]$  เป็นระบบไม่ต่อเนื่อง  $x(n]$  เป็นอินพุตของระบบ  $y(n]$  เป็นเอาต์พุตของระบบ ดังสมการที่ 2.31 ถ้ามีการหน่วงอินพุตเป็น  $x(n-k]$  ถ้าเอาต์พุตที่ได้ถูกหน่วงไปเป็น  $y(n-k]$  เช่นเดียวกับอินพุตดังสมการที่ 2.32 สามารถสรุปได้ว่าระบบไม่ต่อเนื่อง  $T$  เป็นระบบไม่ต่อเนื่องที่แปรตามเวลา

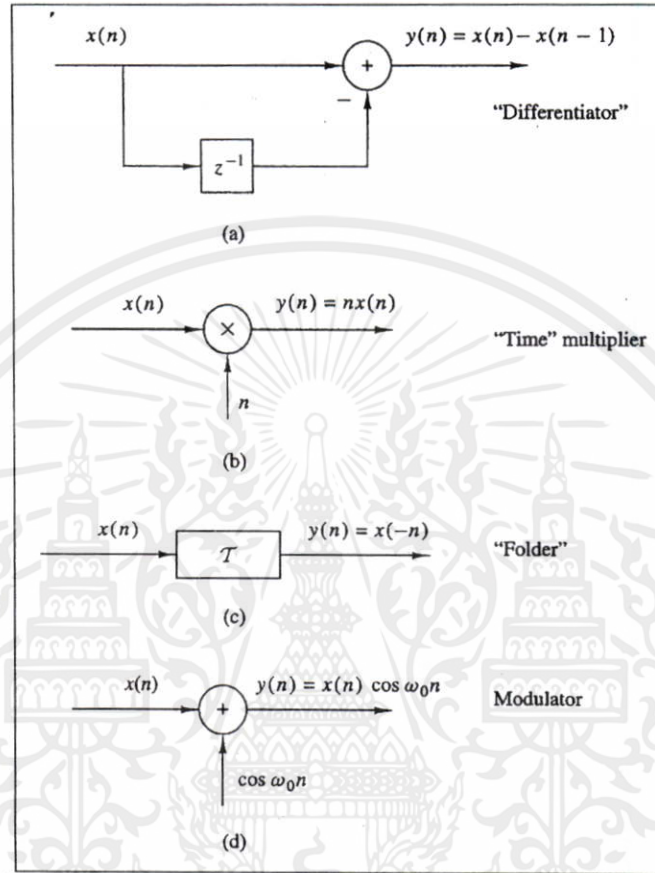
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n) \quad (2.31)$$

$$x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k) \quad (2.32)$$

และระบบที่อินพุตถูกหน่วงไป  $x(n-k)$  แต่ได้เอาต์พุตของระบบไม่เท่ากับ  $y(n-k)$  ระบบนั้นเป็นระบบที่ไม่แปรตามเวลา (Time-variant system หรือ Time-varying system) ภาพที่ 2.24 แสดงตัวอย่างระบบไม่ต่อเนื่องที่แปรตามเวลาและไม่แปรตามเวลา



ภาพที่ 2.24 ตัวอย่างระบบไม่ต่อเนื่องที่แปรตามเวลาและไม่แปรตามเวลา

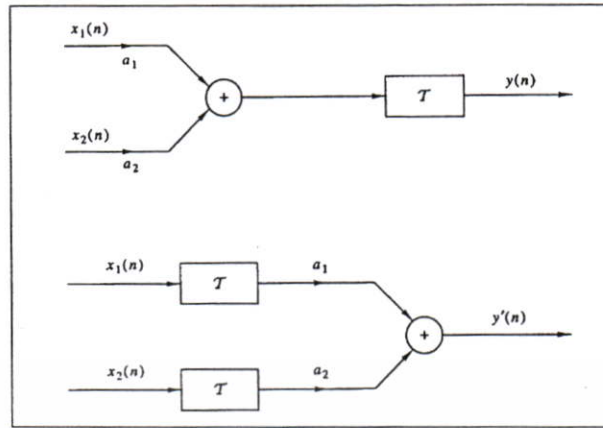
(a) ระบบแปรตามเวลา (b) - (d) ระบบที่ไม่แปรตามเวลา

#### 2.4.2.4 ระบบแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น (Linear and nonlinear systems)

ระบบไม่ต่อเนื่องแบบเชิงเส้นจะต้องมีคุณสมบัติสอดคล้องกับหลักการของ Superposition ดังสมการที่ 2.33 หรืออธิบายได้ดังภาพที่ 2.25

$$\tau[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\tau[x_1(n)] + a_2\tau[x_2(n)] \quad (2.33)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.25 ระบบ  $\tau$  เป็นระบบที่เชิงเส้นและระบบที่ไม่มีคุณสมบัติสอดคล้องกับหลักการของ Superposition จะเป็นระบบแบบไม่เชิงเส้น

2.4.2.5 ระบบแบบ Causal และแบบ Noncausal

ระบบแบบ Causal เป็นระบบที่สร้างได้จริงมีสมการของระบบดังสมการที่ 2.34

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-k), \dots, y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-k)]$$

$$y(n) = 2x(n) + 4.5x(n-2) - 3y(n-1) + 0.5y(n-2) \tag{2.34}$$

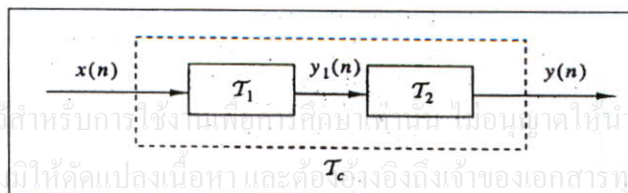
จะเห็นได้ว่าระบบแบบ Causal จะประกอบด้วยเทอมอินพุตปัจจุบัน อินพุตในอดีตหรือเอาต์พุตในอดีตเท่านั้น ระบบที่ไม่เป็นดังสมการที่ 2.34 จะเป็นระบบแบบ Noncausal

2.4.2.6 ระบบแบบ Stable และระบบแบบ Unstable

ระบบที่มีเอาต์พุตขึ้นอยู่กับอินพุตจะเป็นระบบแบบ Stable ส่วนระบบที่มีเอาต์พุตไม่ขึ้นอยู่กับอินพุตจะเป็นระบบแบบ Unstable

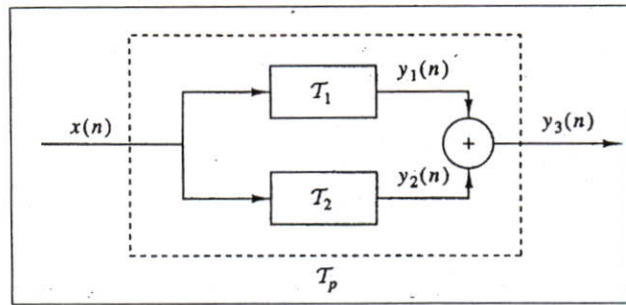
2.4.3 การเชื่อมต่อระบบไม่ต่อเนื่อง (Interconnection of Discrete-time Systems)

กระทำได้ 2 ลักษณะคือ การเชื่อมต่อระบบแบบอนุกรม(Cascade) ดังภาพที่ 2.26 และการเชื่อมต่อแบบขนาน (Parallel) ดังแสดงดังภาพที่ 2.27



ภาพที่ 2.26 การเชื่อมต่อระบบไม่ต่อเนื่องแบบอนุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ในเชิงวิชาการเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.27 การเชื่อมต่อระบบ ไม่ต่อเนื่องแบบขนาน

ในการเชื่อมต่อระบบดังภาพที่ 2.26 เขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ 2.35 – 2.36

$$y_1(n) = \tau_1[x(n)] \quad (2.35)$$

$$y(n) = \tau_2[y_1(n)] \quad (2.36)$$

แทนสมการที่ 2.35 ลงในสมการที่ 2.36 จะได้สมการ  $y(n)$  ดังสมการที่ 2.37

$$y(n) = \tau_2\{\tau_1[x(n)]\} \quad (2.37)$$

กำหนดให้  $\tau_c = \tau_1\tau_2$  จะได้  $y(n)$  ดังสมการที่ 2.38

$$y(n) = \tau_c[x(n)] \quad (2.38)$$

และถ้ามีการสลับที่ระบบ  $\tau_1$  กับ  $\tau_2$  ถ้า  $y(n)$  จะเปลี่ยนแปลงไปดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$\tau_1\tau_2 \neq \tau_2\tau_1 \quad (2.39)$$

นอกจากนี้ถ้าระบบ  $\tau_1$  และระบบ  $\tau_2$  เป็นระบบที่แปรตามเวลา ก็จะได้  $\tau_1\tau_2$  หรือ  $\tau_c$  เป็นระบบที่แปรตามเวลาด้วยดังสมการที่ 2.40

$$x(n-k) \xrightarrow{\tau_1} y_1(n-k)$$

$$y_1(n-k) \xrightarrow{\tau_2} y(n-k)$$

$$x(n-k) \xrightarrow{\tau_c = \tau_2\tau_1} y(n-k)$$

(2.40)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้แบบจำลอง  $y_1(n-k) \xrightarrow{\tau_2} y(n-k)$  ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนการเชื่อมต่อแบบระบบขนานเขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ 2.41

$$\begin{aligned}
 y_3(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\
 &= \tau_1[x(n)] + \tau_2[x(n)] \\
 &= (\tau_1 + \tau_2)[x(n)] \\
 &= \tau_p[x(n)]
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

เมื่อ  $\tau_p = \tau_1 + \tau_2$

## 2.5 การวิเคราะห์ระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลาแบบเชิงเส้นและแปรตามเวลา [6, 12]

### 2.5.1 Convolution Sum

เป็นการผสมผสานระหว่างสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง  $x(n)$  กับผลตอบสนองทางอิมพัลส์ของระบบไม่ต่อเนื่อง  $h(n)$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.42

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{2.42}$$

เมื่อ  $h(k)$  คือ ผลตอบสนองทางอิมพัลส์ของระบบไม่ต่อเนื่อง  
 $x(n)$  คือ สัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง

สำหรับระบบแบบ Causal การทำ Convolution จะทำตามสมการที่ 2.43

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) \tag{2.43}$$

นอกจากนี้สมการ Convolution สามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งดังสมการที่ 2.44

$$y(n) = h(n) * x(n) \tag{2.44}$$

### คุณสมบัติของการ Convolution และการเชื่อมต่อระบบ

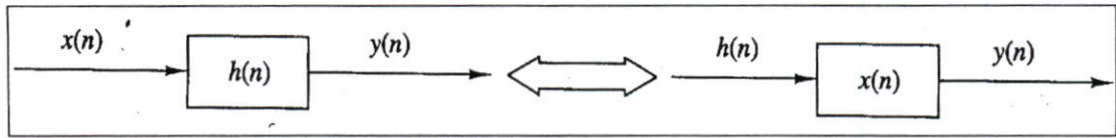
#### - คุณสมบัติการสลับที่ (Commutative law)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างถึงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{2.45}$$

เขียนเป็นไดอะแกรมได้ดังภาพที่ 2.28



ภาพที่ 2.28 คุณสมบัติการสลับที่

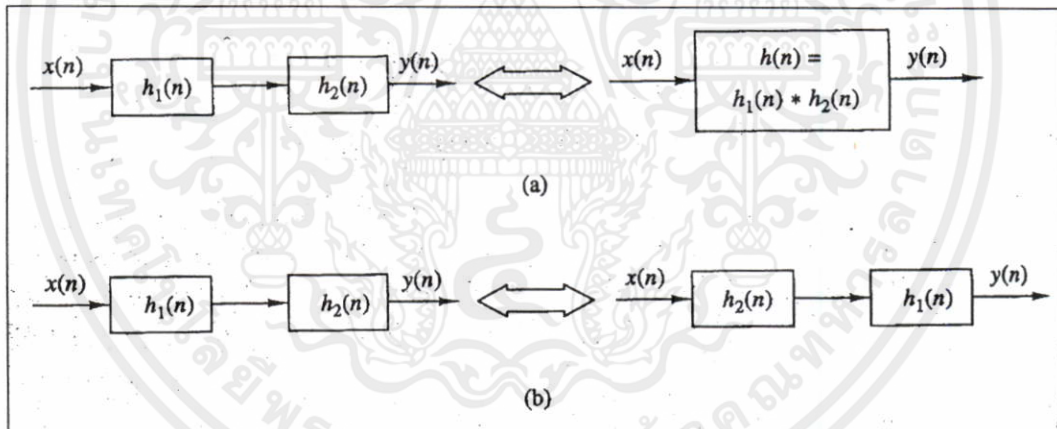
$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{2.46}$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \tag{2.47}$$

- คุณสมบัติการจับกลุ่ม (Associative law)

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \tag{2.48}$$

เขียนเป็นไดอะแกรมได้ดังภาพที่ 2.29



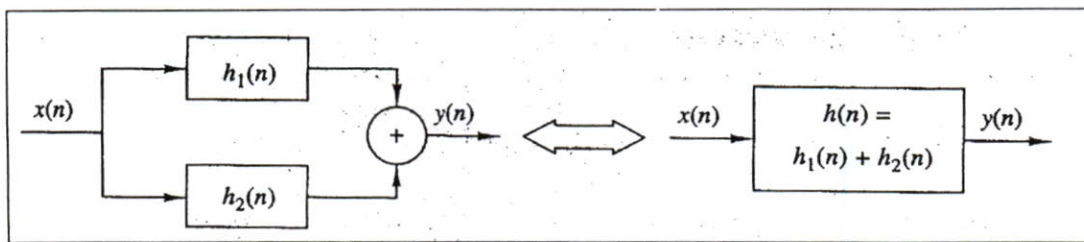
ภาพที่ 2.29 คุณสมบัติการจับกลุ่ม

- Distributive law

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \tag{2.49}$$

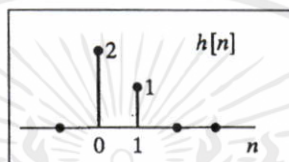
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในการเรียนเพื่อความรู้เท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.30 คุณสมบัติการกระจาย

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ระบบแบบไม่ต่อเนื่องมีผลตอบสนองทางอิมพัลส์  $h(n)$  ดังภาพที่ 2.31 ถ้ากำหนดให้ระบบแบบไม่ต่อเนื่องนี้มีอินพุตเป็น  $x(n) = \{1, 2, 4\}$  หาผลตอบสนองทางเอาต์พุต



ภาพที่ 2.31 ผลตอบสนองทางอิมพัลส์ของระบบไม่ต่อเนื่อง

วิธีการ ในการหาผลตอบสนองทางเอาต์พุต จะใช้สมการที่ 2.43 เนื่องจาก ทั้ง  $h(n)$  และ  $x(n)$  ต่างมีค่า  $n$  เริ่มต้นที่ 0 จากสมการที่ 2.43

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k)$$

กรณี  $n = 0$

$$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + h(3)x(-3) + \dots$$

$$y(0) = 2 + 0 + 0 + \dots = 2$$

กรณี  $n = 1$

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + h(3)x(-2) + \dots$$

$$y(1) = 4 + 1 + 0 + 0 + \dots = 5$$

กรณี  $n = 2$

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + h(3)x(-1) + \dots$$

$$y(2) = 8 + 2 + 0 + 0 + \dots = 10$$

กรณี  $n = 3$

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) + \dots$$

$$y(3) = 0 + 4 + 0 + 0 + \dots = 4$$

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆก็ตามหากมีข้อผิดพลาดประการใดขออภัยเป็นอย่างสูงและขออภัยทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี  $n = 4$

$$y(4) = h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + \dots$$

$$y(4) = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

ดังนั้นจะได้  $y(n) = \{2, 5, 10, 4, 0, \dots\}$

## 2.6 โครงสร้างของระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [6, 12]

### 2.6.1 โครงสร้างของระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา (Structures for the realization of linear time-invariant systems)

ระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลาจะมีสมการดังสมการที่ 2.50 และนำไปเขียนเป็นโครงสร้างได้ดังภาพที่ 2.32 (a)

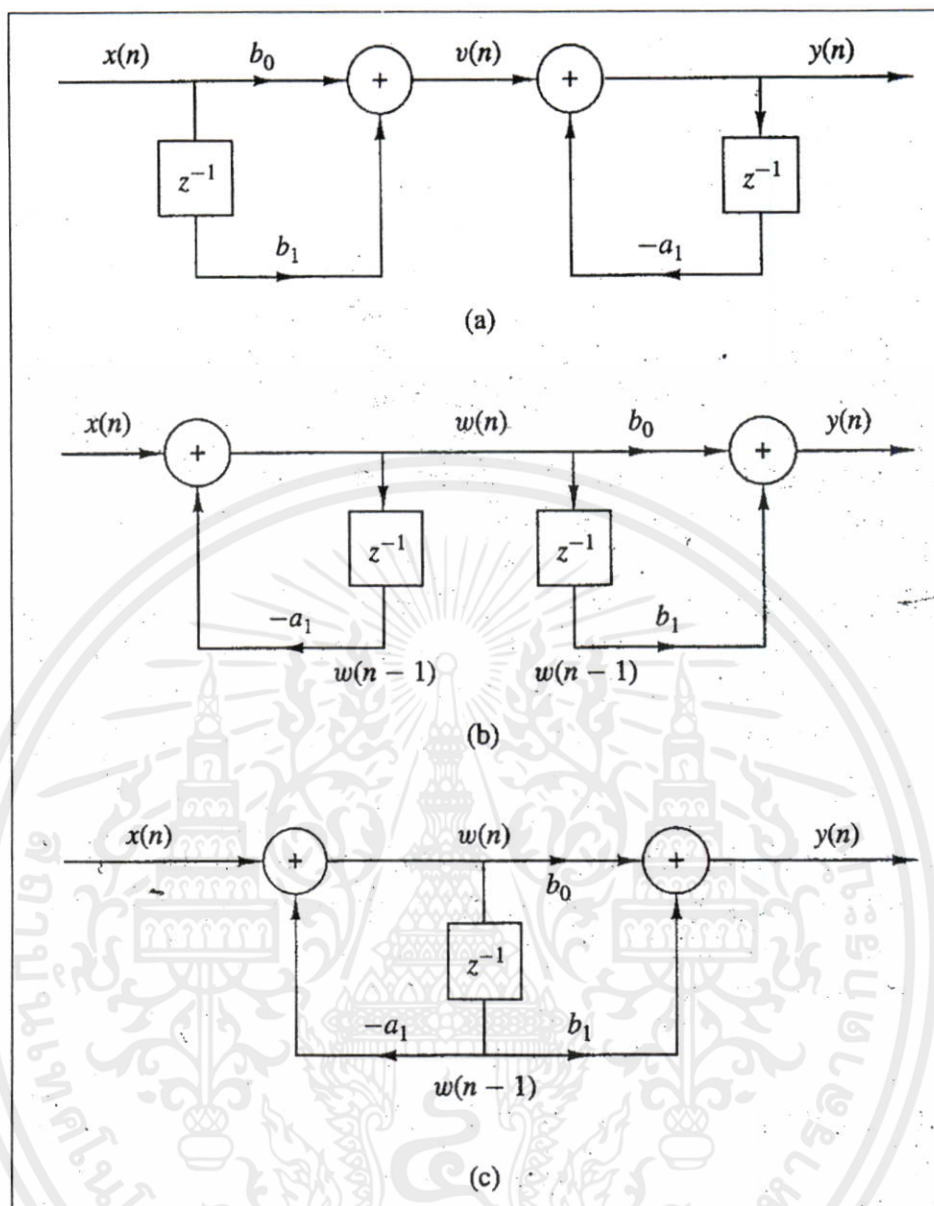
$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

$$v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n) \tag{2.50}$$

จากภาพที่ 2.32(a) พบว่าระบบได้แยกออกเป็น 2 ระบบ โดย  $v(n)$  เป็นจุดเชื่อมต่อและจากคุณสมบัติการจัดกลุ่มในหัวข้อ 2.5.1 ทำการสลับที่ระบบในภาพที่ 2.32(a) ให้เป็นดังภาพที่ 2.32(b) เมื่อสลับที่แล้วพบว่าระบบทั้ง 2 ระบบสามารถใช้ตัวหน่วงร่วมกันได้ ทำให้เขียนเป็นโครงสร้างใหม่ได้ดังภาพที่ 2.32(c) และเขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ 2.51

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.32 โครงสร้างของระบบเชิงเส้นแปรตามเวลา

$$w(n) = -a_1 w(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1)$$

(2.51)

เรียกโครงสร้างที่แสดงดังภาพที่ 2.32(a) ว่าเป็นโครงสร้างแบบตรง I (Direct form I) ส่วนภาพที่

2.32 (c) นั้นเรียกว่าโครงสร้างแบบตรง II (Direct form II) และอาจเรียกระบบเชิงเส้นที่แปรตาม

เวลานี้ว่าระบบแบบ Recursive [6, 12] นอกจากนี้ระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลาสามารถเขียนในรูป

สมการทั่วไปได้ดังสมการที่ 2.52

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

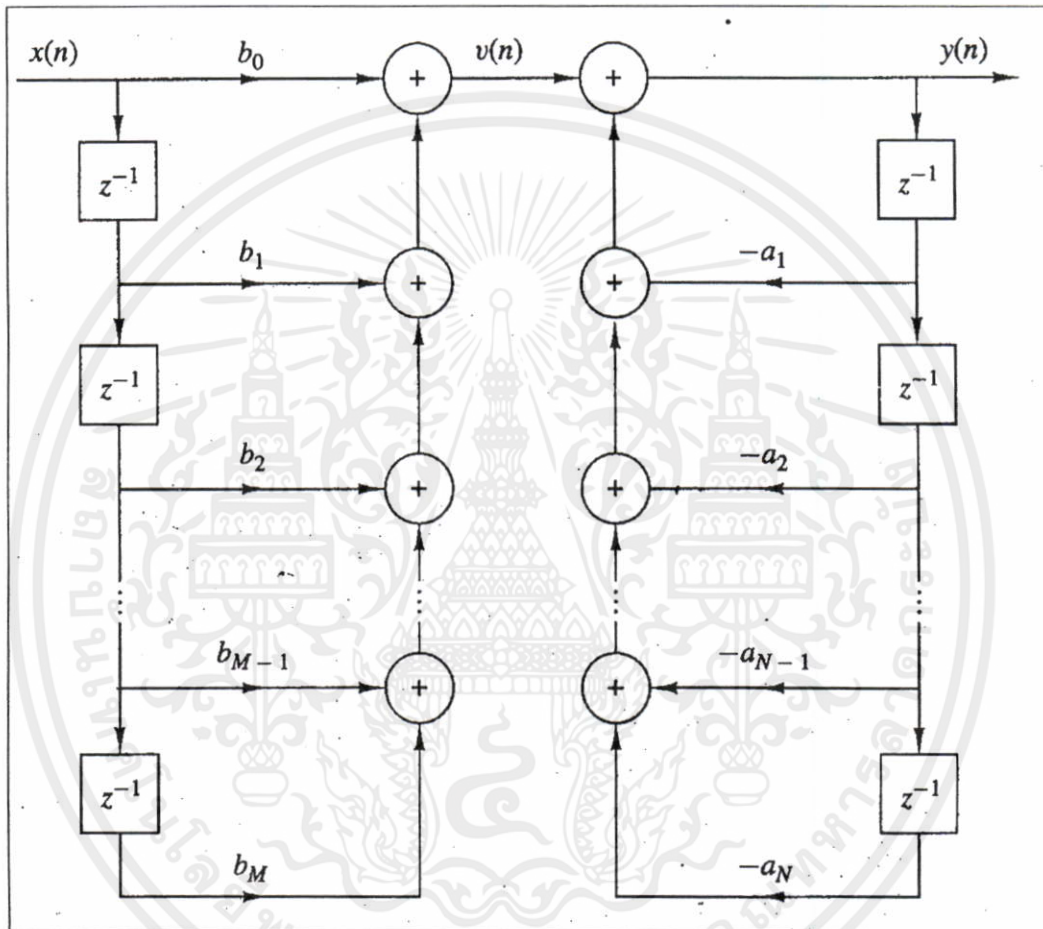
(2.52)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่เขียนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้  $v(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$  แทนค่าลงในสมการที่ 2.52 จะได้ดังสมการที่ 2.53 และนำไปเขียนโครงสร้างได้ดังภาพที่ 2.33

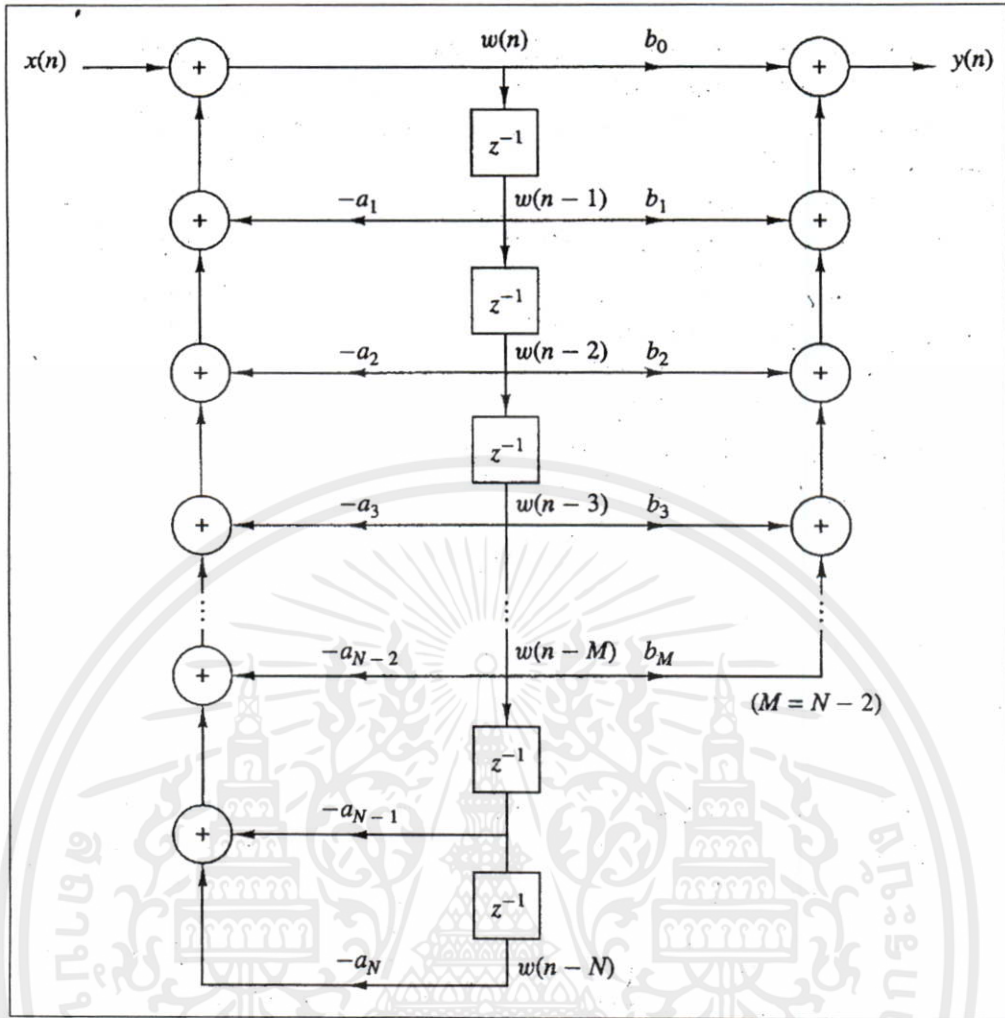
$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + v(n) \quad (2.53)$$



ภาพที่ 2.33 โครงสร้างแบบตรง I ของระบบไม่ต่อเนื่องแบบ Recursive

และจากสมการที่ 2.50 และสมการที่ 2.51 สามารถแปลงโครงสร้างแบบตรง I ดังภาพที่ 2.33 เป็นโครงสร้างแบบตรง II ดังภาพที่ 2.34

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.34 โครงสร้างแบบตรง II ของระบบไม่ต่อเนื่องแบบ Recursive

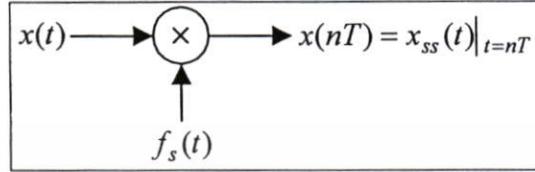
2.7 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง [6-8]

ในการเปลี่ยนสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาไปเป็นสัญญาณไม่ต่อเนื่องทางเวลานั้น จำเป็นจะต้องมีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling) ซึ่งความถี่ในการสุ่มตัวอย่างโดยที่ไม่ทำให้สัญญาณสูญเสียข้อมูลที่สำคัญไปนั้นต้องเป็นไปตามทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling theory) ของแชนนอน (Shannon) ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้าสัญญาณเชิงอุปมาน  $x(t)$  ซึ่งมีแบนด์วิดท์เท่ากับ  $f_0$  แล้ว จะสามารถทำการสุ่มตัวอย่างโดยสัญญาณที่ได้ ไม่สูญเสียข้อมูลที่สำคัญ ก็ต่อเมื่อความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง  $f_s$  มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของความถี่  $f_0$  ดังสมการที่ 2.54

$$f_s \geq 2f_0 \tag{2.54}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ โดยทั่วไปอาจทำการสุ่มตัวอย่างด้วยความถี่  $f_{sm} = 2f_0$  พอดี ซึ่งค่าความถี่นี้เรียกว่า ความถี่ไนควิสต์ (Nyquist frequency) และคาบเวลา  $T_n = 1/2f_0$  นี้ เรียกว่า ช่วงเวลาสุ่มตัวอย่างไนควิสต์

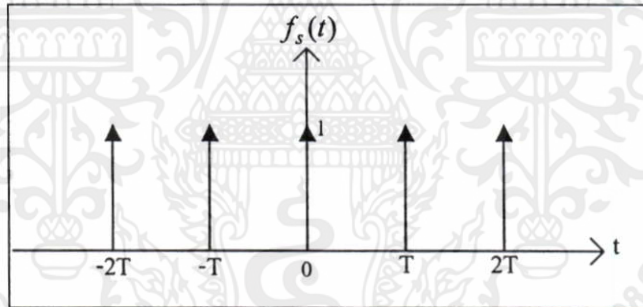
(Nyquist interval) แต่ในทางปฏิบัติเพื่อหลีกเลี่ยงผลของปรากฏการณ์ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity) ที่อาจเกิดจากการสุ่มตัวอย่าง จึงมักใช้ความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง  $f_s$  มากกว่าค่าความถี่ในควิสต์  $f_{sn}$  ขึ้นไป ส่วนจะมีค่ามากกว่าเท่าใดนั้นขึ้นกับลักษณะงาน ไม่ได้มีการกำหนดค่าที่แน่นอน



ภาพที่ 2.35 การสุ่มตัวอย่างสัญญาณเชิงอุปมาน

ภาพที่ 2.35 แสดงการสุ่มตัวอย่างใน โดเมนเวลาซึ่งก็คือการคูณสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา  $x(t)$  กับลำดับของอิมพัลส์หนึ่งหน่วย  $f_s(t)$  โดยที่อิมพัลส์แต่ละตัวสมมุติให้มีความห่างเท่ากับ  $T$  วินาที ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยสมการ

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{2.55}$$



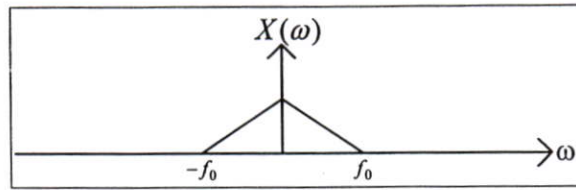
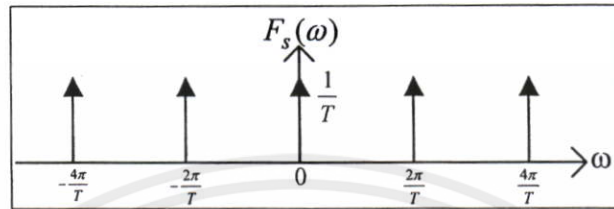
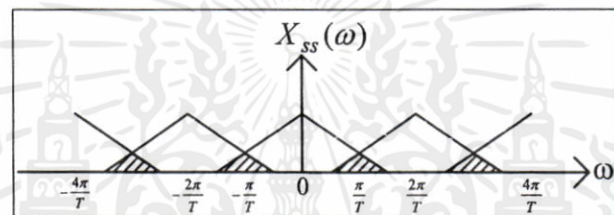
ภาพที่ 2.36 สัญญาณสุ่มตัวอย่าง

และเมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ เพื่อทำการหาค่าสเปกตรัมความถี่ของ  $f_s(t)$  จะได้

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \tag{2.56}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า เมื่อพิจารณาในโดเมนความถี่ สเปกตรัมความถี่ของสัญญาณ  $f_s(t)$  เป็นอิมพัลส์ ที่วางตัวห่างเท่าๆ กัน ไปบนแกนความถี่เช่นกัน ดังภาพที่ 2.37(b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(a) สเปกตรัมของสัญญาณเชิงอนุพันธ์  $x(t)$ (b) สเปกตรัมของสัญญาณสุ่มตัวอย่าง  $f_s(t)$ (c) สเปกตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง  $x_{ss}(t)$ 

ภาพที่ 2.37 สเปกตรัมของสัญญาณจากการสุ่มตัวอย่าง

ถ้าให้  $x_{ss}(t)$  เป็นสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง ดังนั้น

$$x_{ss}(t) = f_s(t)x(t) \quad (2.57)$$

และถ้าให้  $X(\omega)$  เป็นสเปกตรัมความถี่ของ  $x(t)$  เนื่องจากในโดเมนเวลาสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างเป็นการคูณกันของสองสัญญาณ ดังนั้นในโดเมนความถี่จึงเป็นการทำคอนโวลูชัน (Convolution) ของสเปกตรัมของ  $f_s(t)$  และ  $x(t)$

$$X_{ss}(\omega) = F_s(\omega) * X(\omega) \quad (2.58)$$

การคอนโวลูชันนี้แสดงเป็นแผนรูปดังภาพที่ 2.37 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเห็นว่าสเปกตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง  $X_{ss}(\omega)$  เป็นการนำสเปกตรัมของ  $X(\omega)$  มาวางเรียงห่างเท่าๆ กันไปตลอดบนแกนความถี่  $\omega$  ซึ่งจากภาพที่ 2.37(c) จะเห็นว่า ถ้าความถี่ของสัญญาณสุ่มตัวอย่าง  $f_s(t)$  มีค่าน้อยกว่าความถี่ในควิสต์จะทำให้ช่วงห่างของแต่ละกลุ่มของสเปกตรัมเข้ามาเกทับกัน ผลนี้ทำให้เกิดความผิดเพี้ยนไปของสเปกตรัมของสัญญาณเดิมซึ่งผลนี้มีชื่อเรียกว่า ผลการเอเลสซิง

(Aliasing effect) นอกจากนี้ ภาพที่ 2.37 ยังแสดงให้เห็นว่าผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข จะมีผลตอบสนองความถี่ที่มีลักษณะเป็นคาบ คือ เริ่มซ้ำค่าเดิมที่จุดที่มีค่าความถี่เป็น  $2\pi/T$  หรือ  $f_s/2$  ซึ่งความถี่นี้เรียกว่า ความถี่พับ ซึ่งการที่ผลตอบสนองความถี่มีลักษณะเป็นคาบก็เนื่องมาจากการสุ่มตัวอย่างสัญญาณนั่นเอง

## 2.8 สมการผลต่างสืบเนื่อง [6-8]

ในการวิเคราะห์ระบบเชิงแบบต่อเนื่องทางเวลา คุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา จะสามารถเขียนอธิบายโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เช่นเดียวกันในระบบเชิงเลขก็จะมีสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ไว้ใช้ในการอธิบายคุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา ซึ่งสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับที่  $n$  สามารถเขียนได้ดังสมการที่ 2.59

$$y(n) = \sum_{k=0}^n b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^m a_k y(n-k) \quad (2.59)$$

โดยที่  $x(n)$  เป็นลำดับสัญญาณขาเข้า  $y(n)$  เป็นลำดับสัญญาณขาออกและ  $a_k, b_k$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์ สมการผลต่างสามารถแสดงในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้คุณสมบัติการหน่วงเวลาของการแปลงแซดดังสมการที่ 2.60 – 2.61

$$a_k x(n) \leftrightarrow a_k X(z) \quad (2.60)$$

$$a_k x(n-k) \leftrightarrow a_k z^{-k} X(z) \quad (2.61)$$

จากสมการที่ (2.59) เมื่อใช้คุณสมบัติการแปลงแซดจะได้

$$Y(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^m a_k z^{-k} Y(z) \quad (2.62)$$

จัดรูปสมการเพื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอน

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^m a_k z^{-k}\right)} \quad (2.63)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และนำข้อมูลไปใช้ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.9 การแปลงแซด [6-8]

การแปลงแซด (z-transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสามารถนิยามอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ (Power series) ดังสมการที่ 2.64 เรียกสมการที่ 2.64 นี้ว่า การแปลงแซดแบบตรง (Direct z-transform)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.64)$$

เมื่อ  $z$  คือ ตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable)

$x(n)$  คือ ลำดับสัญญาณ (Sequence signal)

แต่สำหรับระบบแบบ Causal การแปลงแซดของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสามารถเขียนได้ดังสมการที่ 2.65 เรียกสมการที่ 2.65 นี้ว่า การแปลงแซดด้านเดียว (One-Side z-transform)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.65)$$

การแปลงแซดของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องเขียนแทนได้อีกรูปแบบหนึ่ง ดังสมการที่ (2.66)

$$X(z) = Z\{x(n)\} \quad (2.66)$$

และจากสมการที่ 2.64 และ 2.65 จะเห็นได้ว่าผลการแปลงแซด ก็คืออนุกรมอนันต์ ดังนั้นจะมีค่า  $z$  ที่ทำให้  $X(z)$  หาค่าตอบได้เรียกค่า  $z$  นี้ว่า Region of Convergence (ROC) โดยค่า  $z$  นี้จะมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่างที่ 2.5 หา z-transform ของสัญญาณไม่ต่อเนื่องแบบ Finite-duration

$$x(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

วิธีการ จากสมการที่ 2.64  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ดังนั้น  $X(z) = \dots + 0z^2 + 0z^1 + 1z^0 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 0z^{-4} + 1z^{-5}$   
 ไม่ว่าจะคิดอย่างไรก็ตาม ให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาไปใช้  
 $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5}$  (2.67)

ส่วน ROC นั้นหาได้จากสมการที่ 2.67

$$X(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{5}{z^2} + \frac{7}{z^3} + \frac{1}{z^5} \quad (2.68)$$

จากสมการที่ 2.68 พบว่าเมื่อ  $z = 0$  จะทำให้  $X(z)$  หาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ROC ก็คือ ทุกๆค่าของ  $z$  ยกเว้น  $z = 0$  ซึ่งเมื่อ  $z = \infty$  จะทำให้  $X(z)$  หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 2.6 หา z-transform ของสัญญาณไม่ต่อเนื่องแบบ Finite-duration

$$x(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

วิธีการ จากสมการที่ 2.64  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$\text{จะได้} \quad X(z) = 1z^2 + 2z^1 + 5z^0 + 7z^{-1} + 0z^{-2} + 1z^{-3} \quad (2.69)$$

$$X(z) = z^2 + 2z^1 + 5 + 7z^{-1} + z^{-3} \quad (2.70)$$

ROC หาได้จากสมการที่ 2.70 จัดสมการใหม่จะได้

$$X(z) = z^2 + 2z^1 + 5 + \frac{7}{z} + \frac{1}{z^3} \quad (2.71)$$

จากสมการที่ 2.71 จะเห็นได้ว่าถ้า  $z = 0$  หรือ  $z = \infty$  จะทำให้  $X(z)$  หาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ROC ก็คือ ทุกๆค่า  $z$  ยกเว้น  $z = 0$  และ  $z = \infty$

ตัวอย่างที่ 2.7 หา z-transform ของ  $\delta(n)$

วิธีการ กำหนดให้  $x(n) = \delta(n) = \{\dots, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$  (2.72)

จากสมการที่ 2.64  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$X(z) = \dots + 0z^2 + 0z^1 + 1z + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots$$

$$X(z) = 1 \quad (2.73)$$

ตัวอย่างที่ 2.8 หา z-transform ของ  $\delta(n-k)$

วิธีการ กำหนดให้  $x(n) = \delta(n-k) = \{\dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$  โดยใช้ประโยชน์ (2.74) (2.74)

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ 2.64  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$X(z) = \dots + 0z^2 + 0z^1 + 0z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots + 1z^{-k} + 0z^{-(k+1)} + 0z^{-(k+2)} + \dots$$

$$X(z) = z^{-k} \quad (2.75)$$

ตัวอย่างที่ 2.9 หา z-transform ของสัญญาณ

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < \infty \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

จากสมการที่ 2.64

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots + z^{-\infty} \quad (2.77)$$

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \quad (2.78)$$

จากสมการอนุกรมอนันต์ดังสมการที่ 2.79

$$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \dots = \frac{1}{1-A} \quad |A| < 1 \quad (2.79)$$

จัดสมการที่ 2.78 ใหม่ได้ดังสมการที่ 2.80

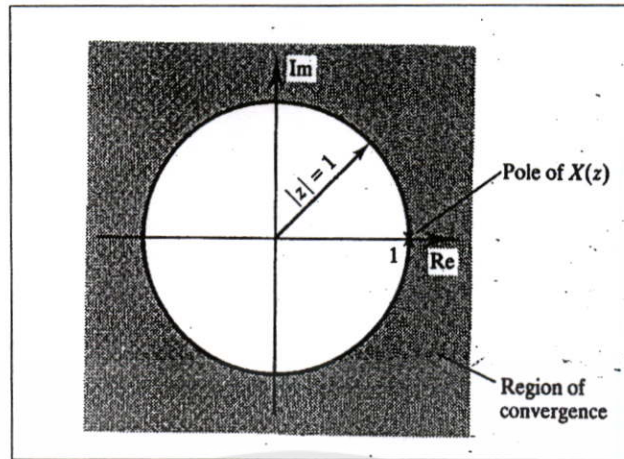
$$X(z) = 1 + \left(\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^4 + \left(\frac{1}{z}\right)^5 + \dots \quad (2.80)$$

เทียบสัมประสิทธิ์สมการที่ 2.79 กับสมการที่ 2.80 จะได้  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.81

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \text{ หรือ } 1 < |z| \quad (3.18)$$

เนื่องจาก  $z$  เป็นตัวแปรเชิงซ้อนดังนั้นค่า  $z$  ที่ทำให้  $X(z)$  หาค่าได้ หรือค่า ROC ของ  $X(z)$  สามารถเขียนได้ดังภาพที่ 2.38

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.38 ROC ของ  $X(z)$  ในตัวอย่างที่ 2.9

ตัวอย่างที่ 2.10 หา z-transform ของสัญญาณ  $x(n) = a^n u(n)$

$$x(n) = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots\}$$

จากสมการที่ 2.64  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$  จะได้  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.82

$$X(z) = a^0 z^0 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots + a^n z^{-n} \quad (2.82)$$

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots + \frac{a^n}{z^n}$$

$$X(z) = 1 + \left(\frac{a}{z}\right) + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{z}\right)^n \quad (2.83)$$

จากสมการของอนุกรมอนันต์ที่ 2.79 ในกรณีที่ 2.9 ทำให้จัดสมการที่ 2.83 ได้ใหม่ดังสมการที่ 2.84 โดย  $A = \frac{a}{z}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \quad \left| \frac{a}{z} \right| < 1 \quad (2.84)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |a| < |z| \quad (2.85)$$

ค่า ROC ทุกๆค่า  $z$  ที่มากกว่า  $a$

ตัวอย่างที่ 2.11 หา z-transform ของสัญญาณ  $x(n) = \sin(n\omega T)u(n)$

วิธีการ จากสมการ  $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$  และ  $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

ไม่ว่ากรณีใดก็ตามเลือกใช้นับที่ใดก็ได้ และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ 2.64 จะได้  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.86

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^{jn\omega T} - e^{-jn\omega T}}{2j} \right) z^{-n} \quad (2.86)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\omega T} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\omega T} z^{-n} \right)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\omega T} z^{-1})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-j\omega T} z^{-1})^n \right) \quad (2.87)$$

จากสมการของอนุกรมอนันต์ที่ 2.79 ในกรณีที่ 2.9 ทำให้จัดสมการที่ 2.87 ได้ใหม่ดังสมการที่ 2.88

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} \right) - \left( \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \right] \quad (2.88)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \left( \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \right) - \left( \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \right]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{(z^2 - ze^{-j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} - \frac{(z^2 - ze^{j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \right] \quad (2.89)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{(ze^{j\omega T} - ze^{-j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \right]$$

$$X(z) = \frac{z}{2j} \left[ \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{z^2 - ze^{j\omega T} - ze^{-j\omega T} + e^{j\omega T} e^{-j\omega T}} \right]$$

$$X(z) = \frac{z}{2j} \left[ \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1} \right]$$

$$X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad (2.90)$$

## 2.10 คุณสมบัติของการแปลงแซด [6-8]

### 2.10.1 คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น (Linearity property)

แสดงดังสมการที่ 2.91

$$Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (2.91)$$

### 2.10.2 คุณสมบัติการเลื่อน (Shift property)

กำหนดให้  $y(n) = x(n - m)$   $m \geq 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษานานาชาติ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า การแปลงแซดของ  $y(n) = Y(z)$  เขียนแทนได้ ดังสมการที่ 2.92 และ 2.93

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \quad (2.92)$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \quad (2.93)$$

กำหนดให้ระบบที่กำลังพิจารณาเป็นระบบแบบ Causal ดังนั้นสมการที่ (2.93) สามารถเขียนได้ใหม่ดังสมการที่ 2.94 - 2.97

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \quad (2.94)$$

$$Y(z) = z^{-m} [x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(n)z^{-n}] \quad (2.95)$$

$$Y(z) = z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.96)$$

$$Y(z) = X(z)z^{-m} \quad (2.97)$$

### 2.10.3 คุณสมบัติการประสาน (Convolution property)

จากสมการผลการประสาน

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.98)$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (2.99)$$

ทำการแปลงแซด  $x(n)$ ,  $h(n)$  ให้เป็น  $X(z)$ ,  $H(z)$  จะได้การประสาน ดังสมการที่ 2.100

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.100)$$

ซึ่งผลการแปลงแซดของฟังก์ชันสัญญาณไม่ต่อเนื่องดังตารางที่ 2.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 ผลของการแปลงแซค

| Entry number | Discrete-time Sequence  | $z$ -transform<br>$X(z)$  | Region of convergence<br>of $X(z)$                          |
|--------------|---|---|---|
| 1            | $\delta[n]$   | 1   | All $z$   |
| 2            | $u[n]$  | $\frac{1}{1-z^{-1}}$  | $ z  > 1$   |
| 3            | $-u[-n-1]$  | $\frac{1}{1-z^{-1}}$  | $ z  < 1$   |
| 4            | $\delta[n-m]$   | $z^{-m}$  | All $z$ except 0 (if $m > 0$ )<br>or $\infty$ (if $m < 0$ ) |
| 5            | $a^n u[n]$  | $\frac{1}{1-az^{-1}}$   | $ z  >  a $   |
| 6            | $-a^n u[-n-1]$  | $\frac{1}{1-az^{-1}}$   | $ z  <  a $   |
| 7            | $na^n u[n]$   | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$   | $ z  >  a $   |
| 8            | $-na^n u[-n-1]$   | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$   | $ z  <  a $   |
| 9            | $[\cos \omega_0 n] u[n]$  | $\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$        | $ z  > 1$   |
| 10           | $[\sin \omega_0 n] u[n]$  | $\frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$            | $ z  > 1$   |
| 11           | $[r^n \cos \omega_0 n] u[n]$  | $\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$ | $ z  > r$   |
| 12           | $[r^n \sin \omega_0 n] u[n]$  | $\frac{[r \sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$     | $ z  > r$   |
| 13           | $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ | $\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$  | $ z  > 0$   |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้นำเนื้อหาและข้อมูลในเอกสารนี้ไปเผยแพร่หรือทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต

## 2.11 การแปลงแซดในรูปเศษส่วน [6-8]

สัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง  $x(n)$  หรือระบบแบบไม่ต่อเนื่อง  $y(n)$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูป  $X(z)$  หรือ  $Y(z)$  ได้โดยการแปลงแซด ค่า  $X(z)$  หรือ  $Y(z)$  นี้เมื่อจัดให้อยู่ในรูปเศษส่วน (Rational) สามารถบอกรายละเอียดคุณลักษณะของสัญญาณและระบบได้

### 2.11.1 โพลและซีโร (Pole and Zero)

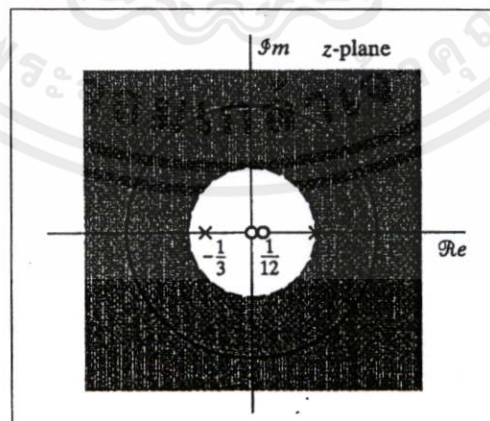
เป็นการนำค่า  $X(z)$  หรือ  $Y(z)$  ไปแก้สมการหาค่า  $z$  และนำคำตอบของ  $z$  ไปเขียนตำแหน่งลงในระนาบแซดเชิงซ้อน (Complex  $z$ -plane) ค่า  $z$  ที่เป็นคำตอบของเศษเรียกว่า ซีโร แทนด้วยสัญลักษณ์  $\circ$  ค่า  $z$  ที่เป็นคำตอบของส่วนเรียกว่า โพล แทนด้วยสัญลักษณ์  $\times$  เช่นการหาดำแหน่งโพลและซีโรของสัญญาณ

ตัวอย่างที่ 2.12 เขียนตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบ  $H(z) = \frac{12 - z^{-1}}{6 - z^{-1} - z^{-2}}$

วิธีการ จากสมการ  $H(z)$  สามารถจัดสมการใหม่ได้ดังสมการที่ 2.101

$$H(z) = \frac{2z(z - \frac{1}{12})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} \quad (2.101)$$

จากสมการที่ 2.101 พบว่าซีโรจะอยู่ที่ตำแหน่ง 0 และ  $\frac{1}{12}$  ส่วนโพลนั้นจะอยู่ที่ตำแหน่ง  $\frac{1}{2}$  และ  $-\frac{1}{3}$  นำไปเขียนลงระนาบแซด ดังภาพที่ 2.39

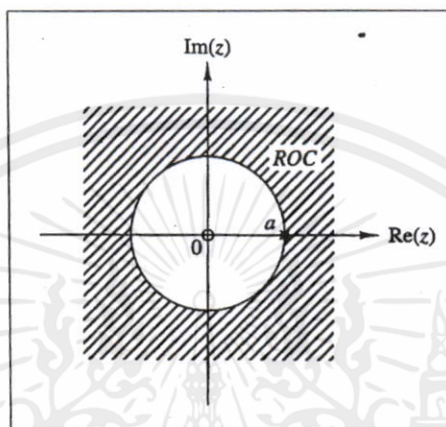


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
 ภาพที่ 2.39 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.12

ตัวอย่างที่ 2.13 หาคำแหน่งการวางโพลและซีโรของสัญญาณ  $x(n) = a^n u(n)$ ;  $a > 0$   
วิธีการ จากตารางที่ 2.1 z-transform ของ  $x(n)$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.102

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (2.102)$$

นำไปเขียนลง z-plane ได้ดังภาพที่ 2.40



ภาพที่ 2.40 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.13

ตัวอย่างที่ 2.14 หาคำแหน่งการวางโพลและซีโรของสัญญาณ

$$x(n) = \begin{cases} a^n; & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0; & \text{elsewhere} \end{cases}$$

วิธีการ กำหนดพบว่า  $n$  เริ่มต้นจาก 0 ถึง  $M-1$  จะได้สมการ z-transform ดังสมการที่ 2.103

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n} \quad (2.103)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n \quad (2.104)$$

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{z}\right)^{M-1} \quad (2.105)$$

จัดสมการที่ 2.105 ได้ใหม่ [12] ดังสมการที่ 2.106

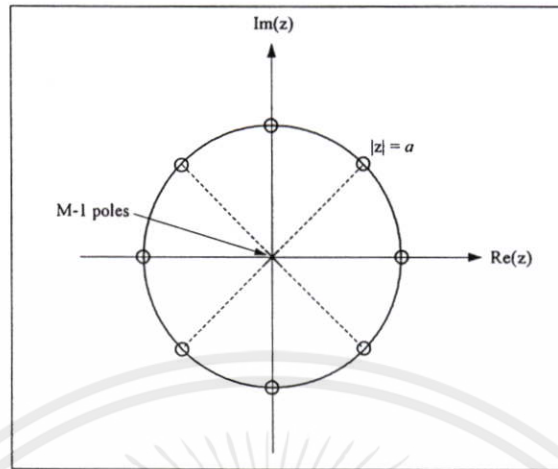
$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^M}{1 - az^{-1}} \quad (2.106)$$

เอกสารนี้ให้นำ  $z^M$  คูณตลอดทั้งเศษและส่วน ซึ่งงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงแหล่งของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

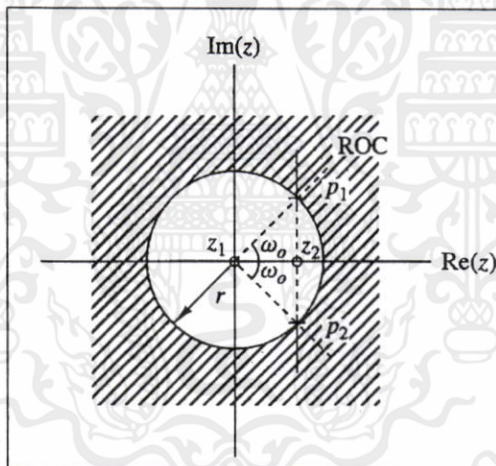
$$X(z) = \frac{z^M - a^M}{z^M - az^{M-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z - a)} \quad (2.107)$$

นำสมการที่ 2.107 เฉพาะเศษมาเขียนเป็นซีโรและเฉพาะส่วนมาเขียนเป็นโพลดังภาพที่ 2.41



ภาพที่ 2.41 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.14

ตัวอย่างที่ 2.15 หาสัญญาณ  $x(n]$  จากระนาบแซด ดังภาพที่ 2.42



ภาพที่ 2.42 ตำแหน่งการวางโพลและซีโรของระบบในตัวอย่างที่ 2.15

วิธีการ จากภาพที่ 2.42 พบว่ามีซีโรอยู่ 2 ตัว โดย  $Z_1$  อยู่ที่จุดกำเนิดหรืออยู่ที่ตำแหน่ง 0 ส่วน  $Z_2$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $r \cos(\omega_0)$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.108 และ 2.109

$$Z_1 = 0 \quad (2.108)$$

$$Z_2 = r \cos(\omega_0) \quad (2.109)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษายเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า สำหรับโพลจากรูปที่ 2.42 มีอยู่ 2 ตัวโดย  $P_1$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $re^{j\omega_0}$  ส่วน  $P_2$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $re^{-j\omega_0}$  ไม่ว่าจะกรณีใดข้างต้น อีกทั้งนี่มันให้คิดแปลงเมื่อมา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ เขียนได้ดังสมการที่ 2.110 และสมการที่ 2.111

$$P_1 = re^{j\omega_0} \quad (2.110)$$

$$P_2 = re^{-j\omega_0} \quad (2.111)$$

จากสมการที่ 2.108-2.111 นำไปเขียนเป็น  $X(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.112 และ 2.113

$$X(z) = G \frac{(z - Z_1)(z - Z_2)}{(z - P_1)(z - P_2)} \quad (2.112)$$

$$X(z) = G \frac{(z - 0)(z - r \cos(\omega_0))}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})} \quad (2.113)$$

เมื่อ  $G$  เป็นค่าคงที่ และจากสมการที่ 2.113 สามารถจัดรูปได้ใหม่ดังสมการที่ 2.114

$$X(z) = G \left[ \frac{z(z - r \cos(\omega_0))}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})} \right]$$

$$X(z) = G \left[ \frac{1 - rz^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2rz^{-1} \cos(\omega_0) + r^2 z^{-2}} \right] \quad (2.114)$$

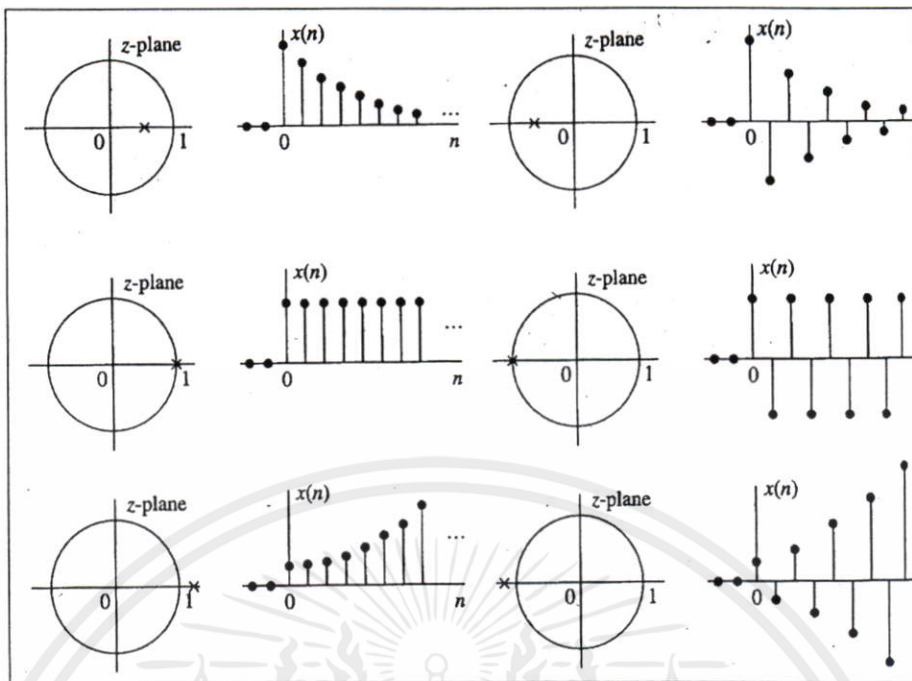
และจากตารางที่ 2.1 (ข้อที่ 11) z-transform ของสมการที่ 2.114 สามารถแปลงเป็น  $x(n)$  ได้ดังสมการที่ 2.115

$$x(n) = G[r^n \cos(\omega_0 n)u(n)] \quad (2.115)$$

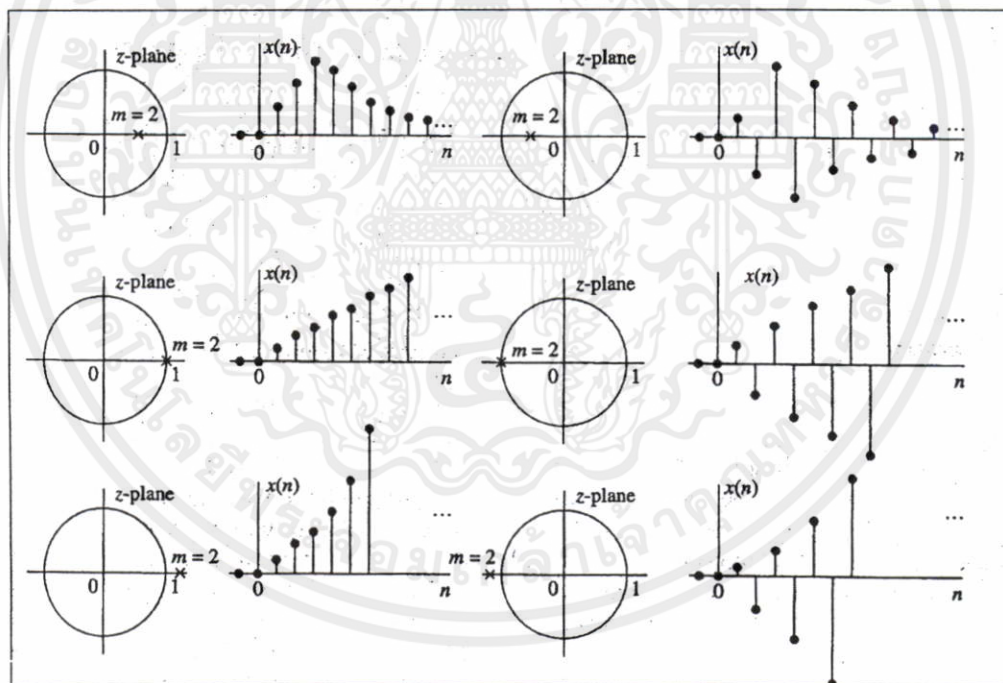
### 2.11.2 ลักษณะสัญญาณกับการวางตำแหน่งของโพล

ตำแหน่งของโพลในระนาบแซค สามารถบ่งบอกลักษณะของลำดับสัญญาณใน Time-domain ได้ ซึ่งลักษณะของลำดับสัญญาณที่เกิดขึ้นสามารถคำนวณได้จากการแปลงแซคผกผัน (Inverse z-transform) และแสดงได้ดังภาพที่ 2.43

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

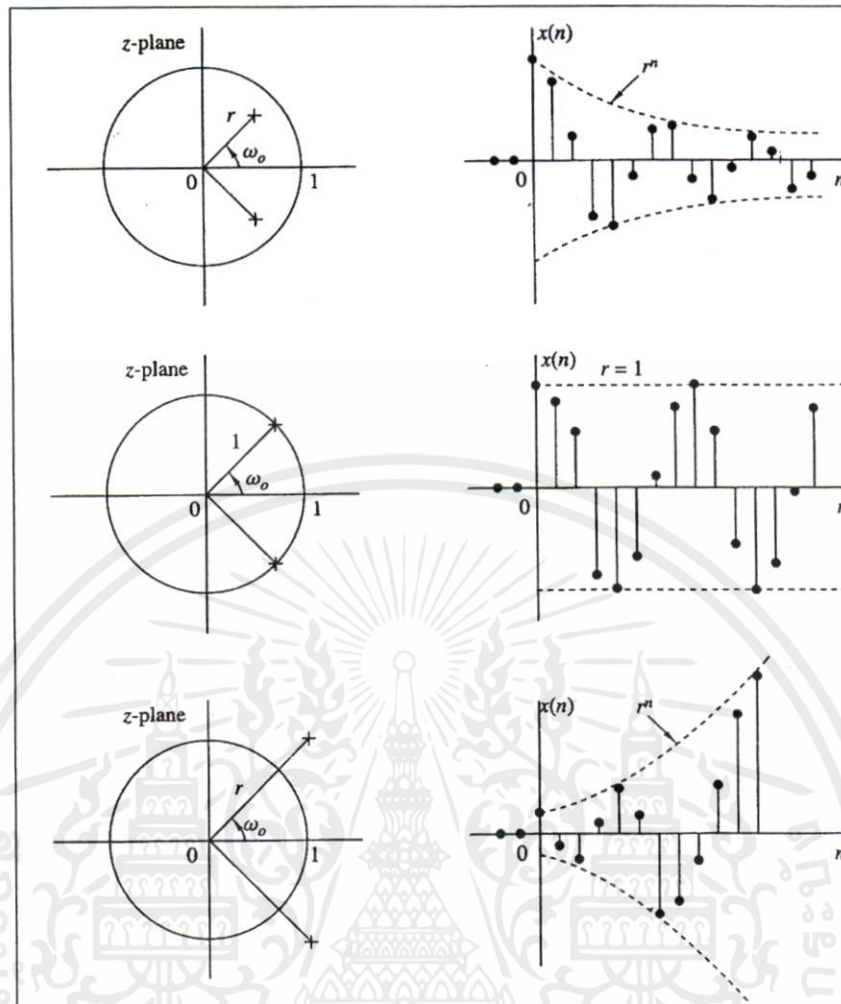


ภาพที่ 2.43(a) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ

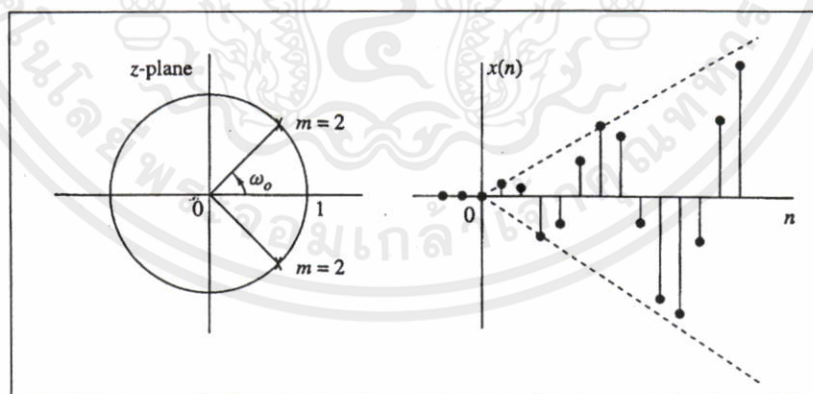


ภาพที่ 2.43(b) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.43(c) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ



ภาพที่ 2.43(d) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.12 การแปลง z ผกผัน (Inversion of z-transform)

เป็นการแปลง  $X(z)$  กลับเป็น  $x(n)$  ทำได้ 3 วิธีดังต่อไปนี้

- วิธีอนุกรมอนันต์ (Power series method)
- วิธีแยกเศษส่วนย่อย (Partial-fraction expansion method)
- Residue method

### 2.12.1 การแปลงเซตผกผันด้วยวิธีอนุกรมอนันต์

กำหนดให้  $X(z)$  เป็น z-transform ของ Causal sequence ดังสมการที่ 2.116 ซึ่งสมการนี้สามารถจัดให้เป็นอนุกรมอนันต์ในรูป  $z$  หรือ  $z^{-1}$  โดยใช้การหารยาว (Long division)

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}} \quad (2.116)$$

เมื่อทำการหารยาวสมการที่ 2.116 จะได้ค่า  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.117

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots \quad (2.117)$$

ตัวอย่างที่ 2.16 แปลงเซตผกผันของสัญญาณดังสมการที่ 2.118 โดยใช้วิธีอนุกรมอนันต์

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.3561z^{-2}} \quad (2.118)$$

วิธีการ จากสมการที่ 2.118 ทำการหารยาวได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} 1 + 3z^{-1} + 3.6439z^{-2} + 2.5756z^{-3} + \dots \\ 1 - z^{-1} + 0.3561z^{-2} \overline{) 1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \\ \underline{1 - z^{-1} + 0.3561z^{-2}} \phantom{+ \dots} \\ 3z^{-1} + 0.6439z^{-2} \\ \underline{3z^{-1} - 3z^{-2} + 1.0683z^{-3}} \\ 3.6439z^{-2} - 1.0683z^{-3} \\ \underline{3.6439z^{-2} - 1.0683z^{-3} + 1.2975927z^{-4}} \\ 2.5756z^{-3} - 1.2975927z^{-4} \end{array}$$

จะได้คำตอบ  $X(z) = 1 + 3z^{-1} + 3.6439z^{-2} + 2.5756z^{-3} + \dots$  และจากคุณสมบัติของ z-transform จะได้ค่า  $x(n)$  ดังสมการที่ 2.119

$$x(0) = 1; x(1) = 3; x(2) = 3.6439; x(3) = 2.5756; \dots \quad (2.119)$$

ในการหารยาวนั้นอาจทำให้ค่า  $z$  ในสมการที่ 2.118 มีกำลังเป็นบวกก่อนก็ได้ดังสมการที่ 2.120 โดยนำ  $z^2$  คูณตลอดทั้งเศษและส่วน แล้วจึงทำการหาร

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - z + 0.3561} \quad (2.120)$$

เมื่อทำการหารจะได้

$$\begin{array}{r} 1 + 3z^{-1} + 3.6439z^{-2} + 2.5756z^{-3} + \dots \\ z^2 - z + 0.3561 \overline{) z^2 + 2z^1 + 1} \\ \underline{3z^1 + 0.6439} \phantom{1} \\ 3z^1 - 3z + 1.0683z^{-1} \\ \underline{3.6439 - 1.0683z^{-1}} \phantom{1} \\ 3.6439 - 3.6439z^{-1} + 1.2975927z^{-2} \\ \underline{2.5756z^{-1} - 1.2975927z^{-2}} \phantom{1} \\ 2.5756z^{-1} - 2.5756z^{-2} + 0.91717116z^{-3} \\ \underline{1.27800721z^{-2} - 0.91717116z^{-3}} \phantom{1} \end{array}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากการหารยาวจะได้ค่า  $X(z)$  และ  $x(n)$  เท่ากัน แต่การแปลงแซดผกผันด้วยวิธีอนุกรมอนันต์นี้พบคำตอบที่ได้จะเป็นตัวเลขไม่เป็นสมการ  $x(n)$  ใดๆ แต่จะเป็นตัวเลขโดยเริ่มจาก  $x(0)$ ,  $x(1)$ ,  $x(2)$ , .... การหารหนึ่งครั้งจะได้  $x(n)$  หนึ่งค่า ดังนั้นถ้าต้องการหาค่า  $x(n)$  โดยที่  $n$  มีค่ามาก จะทำให้จำนวนครั้งของการหารมีมากขึ้นไปด้วย

### 2.12.2 การแปลงแซดผกผันด้วยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

ทำโดยจัดสมการ  $X(z)$  ให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อยจากนั้นนำสมการที่จัดรูปได้แปลงให้เป็น  $x(n)$  โดยใช้ตาราง  $z$ -transform พิจารณา  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.116 การจัดรูปสมการจะเป็นไปตามตำแหน่งของโพลในระนาบแซดซึ่งแบ่งออกได้ดังต่อไปนี้

- กรณีโพลมีตำแหน่งไม่ซ้ำกัน สมการ  $X(z)$  สมการที่ 2.116 สามารถจัดรูปได้ดังสมการที่ 2.121

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{C_3}{1 - p_3 z^{-1}} \quad (2.121)$$

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \frac{C_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{C_M z}{z - p_M}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ในเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำ (2.122)

- กรณีโพลอยู่มากกว่าหนึ่งตัวอยู่ตำแหน่งซ้ำกัน สมการ  $X(z)$  สมการที่ 2.116 สามารถจัดรูปได้ดังสมการที่ 2.123

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{D_i}{(z-p_k)^i} \quad (2.123)$$

และค่า  $D_i$  หาได้จากสมการที่ 2.124

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} [(z-p_k)^m X(z)]_{z=p_k} \quad (2.124)$$

แต่ถ้าระบบหรือลำดับสัญญาณมีโพลมากกว่าหนึ่งตัวและตำแหน่งของโพลอยู่ในตำแหน่งที่ซ้ำกันและไม่ซ้ำกันตัวอย่างเช่นระบบมีโพลทั้งหมด 3 ตัว มีโพล 2 ตัวอยู่ตำแหน่งเดียวกันส่วนอีก 1 ตัวอยู่คนละตำแหน่งการจัดสมการในรูปเศษส่วนย่อยก็จะใช้สมการที่ 2.122 และ 2.123 รวมกัน แต่ถ้าระบบหรือลำดับสัญญาณมีโพลมากกว่าหนึ่งตัวและตำแหน่งของโพลอยู่ในตำแหน่งที่ซ้ำกันและไม่ซ้ำกันตัวอย่างเช่นระบบมีโพล ทั้งหมด 3 ตัว มีโพล 2 ตัวอยู่ตำแหน่งเดียวกันส่วนอีก 1 ตัวอยู่คนละตำแหน่งการจัดสมการในรูปเศษส่วนย่อยก็จะใช้สมการที่ 2.122 และ 2.123 รวมกัน

ตัวอย่างที่ 2.17 แปลงเซตผกผันของสัญญาณ  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.125 โดยใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อย

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} - 0.375z^{-2}} \quad (2.125)$$

วิธีการ ทำกำลังของ  $z$  ในสมการที่ 2.125 ให้เป็นบวกโดยนำ  $z^2$  คูณตลอด

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.25z - 0.375}$$

ทำการแยกเศษส่วนย่อยได้ดังสมการที่ 2.126

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0.75)(z + 0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z - 0.75)(z + 0.5)} = \frac{C_1}{z - 0.75} + \frac{C_2}{z + 0.5} \quad (2.126)$$

กำหนดให้สมการที่ 2.126 มีค่าเท่ากับ  $F(z)$  ดังสมการที่ 2.127

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$F(z) = \frac{1}{(z - 0.75)(z + 0.5)} = \frac{C_1}{z - 0.75} + \frac{C_2}{z + 0.5} \quad (2.127)$$

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามนำเอกสารนี้ไปเผยแพร่หรือแจกจ่ายแก่บุคคลอื่นโดยไม่ได้รับอนุญาตจากทางผู้จัดทำ

หา  $C_1$  นำ  $(z-0.75)$  คูณตลอดในสมการที่ 2.127 จะได้

$$\frac{1}{z+0.5} = C_1 + \frac{C_2(z-0.75)}{(z+0.5)} \quad (2.128)$$

แทนค่า  $z$  เท่ากับ  $0.75$  ลงในสมการที่ 2.128 ได้ค่า  $C_1$  ดังสมการที่ 2.129

$$C_1 = \frac{1}{0.75+0.5} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad (2.129)$$

ส่วนค่า  $C_2$  สามารถหาได้ด้วยวิธีเดียวกับการหาค่า  $C_1$  ได้ค่า  $C_2$  ดังสมการที่ 2.130

$$C_2 = \frac{1}{-0.5-0.75} = -\frac{4}{5} = -0.8 \quad (2.130)$$

แทนค่า  $C_1$  และ  $C_2$  ลงในสมการที่ 2.126 จะได้

$$X(z) = \frac{0.8z}{z-0.75} - \frac{0.8z}{z+0.5} \quad (2.131)$$

ใช้ตารางที่ 2.1 แปลง  $X(z)$  ในสมการที่ 2.131 กลับเป็น  $x(n)$  ได้ดังสมการที่ 2.132

$$\begin{aligned} x(n) &= Z^{-1} \left[ \frac{0.8z}{z-0.75} - \frac{0.8z}{z+0.5} \right] \\ x(n) &= 0.8 \left[ (0.75)^n - (-0.5)^n \right], \quad n > 0 \end{aligned} \quad (2.132)$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงแปลงเซตพหุนามของสัญญาณ  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.133 โดยใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อย

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2} \quad (2.133)$$

วิธีการ จากสมการที่ 2.133 พบว่าบนระนาบแซคจะมีโพล 1 ตัวอยู่ที่ตำแหน่ง  $0.5$  และมีโพล อีก 2 ตัววางซ้อนกันอยู่ที่ตำแหน่ง  $1$  เมื่อพิจารณาตำแหน่งของโพล แล้วการแยกเศษส่วนย่อยของสมการ  $X(z)$  จะจัดรูปตามสมการที่ 2.122 และสมการที่ 2.123 ได้ดังสมการที่ 2.134

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2} = \frac{K_1}{z-0.5} + \frac{K_2}{z-1} + \frac{K_3}{(z-1)^2} \quad (2.134)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
**จัดรูปสมการที่ 2.134 ใหม่**  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.5)(z-1)^2} = \frac{K_1}{z-0.5} + \frac{K_2}{z-1} + \frac{K_3}{(z-1)^2} \quad (2.135)$$

กำหนดให้สมการที่ 2.135 มีค่าเท่ากับ  $F(z)$

$$F(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z-1)^2} = \frac{K_1}{z-0.5} + \frac{K_2}{z-1} + \frac{K_3}{(z-1)^2} \quad (2.136)$$

หาค่า  $K_1$  นำ  $(z-0.5)$  คูณตลอดในสมการที่ 2.136 และแทน  $z=0.5$  จะได้ค่า  $K_1$  ดังสมการที่ 2.137

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)^2} &= K_1 + \frac{K_2(z-0.5)}{z-1} + \frac{K_3(z-0.5)}{(z-1)^2} \\ K_1 &= \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{0.5}{(0.5-1)^2} = 2 \end{aligned} \quad (2.137)$$

ค่า  $K_2$  หาได้จากสมการที่ 2.136 เริ่มจากนำ  $(z-1)^2$  คูณตลอดในสมการที่ 2.136

$$\frac{z}{z-0.5} = \frac{K_1(z-1)^2}{z-0.5} + K_2(z-1) + K_3 \quad (2.138)$$

หาอนุพันธ์ของสมการที่ 2.138 เทียบกับ  $z$  และแทนค่า  $z=1$  ได้ค่า  $K_2$  ดังสมการที่ 2.139

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{z-0.5} \right] &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{K_1(z-1)^2}{z-0.5} + K_2z - K_2 + K_3 \right] \\ K_2 &= \frac{z-0.5-z}{(z-0.5)^2} = \frac{-0.5}{(1-0.5)^2} = -2 \end{aligned} \quad (2.139)$$

ค่า  $K_3$  หาได้จากสมการที่ 2.138 โดยการแทน  $z=1$  ได้  $K_3$  ดังสมการที่ 2.140

$$K_3 = \frac{z}{z-0.5} = \frac{1}{1-0.5} = 2 \quad (2.140)$$

แทนค่า  $K_1, K_2, K_3$  ลงในสมการที่ 2.135 และนำ  $z$  คูณตลอด

$$X(z) = \frac{2z}{z-0.5} - \frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2} \quad (2.141)$$

ใช้ตารางที่ 2.1 แปลง  $X(z)$  ในสมการที่ 2.141 กลับเป็น  $x(n)$  ได้ดังสมการที่ 2.142

$$x(n) = 2(0.5)^n - 2 + 2n = 2[(n-1) + (0.5)^n], \quad n \geq 0 \quad (2.142)$$

### 2.12.3 การแปลงแซดผกผันโดยวิธี Residue

การแปลงแซดผกผันด้วยวิธีนี้ค่า  $x(n)$  จะถูกแทนด้วยการอินทิเกรตทศรอบ (Contour integral) ดังสมการที่ 2.143

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C z^{n-1} X(z) dz \quad (2.143)$$

เมื่อ  $c$  คือเส้นทางการอินทิเกรตทศรอบโพลของ  $X(z)$  ที่อยู่ในรูปเศษส่วนและโพลิโนเมียล (Rational and polynomials) การอินทิเกรตทศรอบดังสมการที่ 2.143 ค่าตอบจะถูกแทนอยู่ในรูปตัวแปรเชิงซ้อนด้วยทฤษฎีของ Cauchy's residue [12] ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า  $x(n)$  ก็คือผลรวมของการทำ Residue เฉพาะ โพลในบริเวณ  $c$  ของฟังก์ชัน  $z^{n-1} X(z)$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.144

$$\text{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_k)^m F(z)]_{z=p_k} \quad (2.144)$$

เมื่อ  $F(z) = z^{n-1} X(z)$

ตัวอย่างที่ 2.19 ใช้วิธี Residue แปลง  $X(z)$  ในสมการที่ 2.145 ให้เป็น  $x(n)$

$$X(z) = \frac{z}{(z-0.75)(z+0.5)} \quad (2.145)$$

วิธีการ กำหนดให้  $F(z) = z^{-1} X(z)$

$$F(z) = \frac{z^{n-1} z}{(z-0.75)(z+0.5)} = \frac{z^n}{(z-0.75)(z+0.5)} \quad (2.146)$$

จากสมการที่ 2.146 พบว่า  $F(z)$  มีโพลอยู่ที่ 0.75 และ -0.5 ดังนั้นการหา Residue จะกระทำที่โพลสองตำแหน่งนี้โดยใช้สมการที่ 2.144 ซึ่งจะมีค่า  $m = 1$  โพลที่ตำแหน่ง 0.75 มีค่า Residue ดังสมการที่ 2.147

$$\text{Res}[F(z), 0.75] = (z-0.75)F(z) \quad (2.147)$$

$$\text{Res}[F(z), 0.75] = \frac{z^n}{z+0.5}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
แม้ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Res}[F(z), 0.75] = \frac{0.75^n}{0.75+0.5} = \frac{4}{5} (0.75)^n \quad (2.148)$$

โพลที่ตำแหน่ง  $-0.5$  มีค่า Residue ดังสมการที่ 2.149

$$\text{Res}[F(z), -0.5] = (z + 0.5)F(z)$$

$$\text{Res}[F(z), -0.5] = \frac{z^n}{z - 0.75}$$

แทนค่า  $z = -0.5$

$$\text{Res}[F(z), -0.5] = \frac{(-0.5)^n}{-0.5 - 0.75} = -\frac{4}{5}(-0.5)^n \quad (2.149)$$

ดังนั้น  $x(n)$  จะเท่ากับผลรวมของการทำ Residue ที่โพลทุกตำแหน่งของ  $F(z)$  ดังสมการที่ 2.150

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}[F(z), 0.75] + \text{Res}[F(z), -0.5] \\ x(n) &= \frac{4}{5}(0.75)^n - \frac{4}{5}(-0.5)^n = 0.8[(0.75)^n - (-0.5)^n] \end{aligned} \quad (2.150)$$

ตัวอย่างที่ 2.20 ใช้วิธี Residue แปลง  $X(z)$  ในสมการที่ 2.151 ให้เป็น  $x(n)$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 1)^2} \quad (2.151)$$

วิธีการ กำหนดให้  $F(z) = z^{n-1}X(z)$  ดังสมการที่ 2.152

$$F(z) = \frac{z^{n-1}z^2}{(z - 0.5)(z - 1)^2} = \frac{z^{n+1}}{(z - 0.5)(z - 1)^2} \quad (2.152)$$

จากสมการที่ 2.152 จะเห็นได้ว่า  $F(z)$  มีโพล 1 ตัวอยู่ที่ตำแหน่ง  $0.5$  กำหนดให้เป็น  $p_1$  และมีโพลอีก 2 ตัววางซ้อนกันอยู่ที่ตำแหน่ง  $1$  กำหนดให้เป็น  $p_2$  Residue ของโพลที่ตำแหน่ง  $p_1$  หาได้จากสมการที่ 2.153

$$\text{Res}[F(z), 0.5] = (z - 0.5)F(z) = \frac{z^{n+1}}{(z - 1)^2}$$

แทนค่า  $z = 0.5$

$$\text{Res}[F(z), 0.5] = \frac{(0.5)^{n+1}}{(0.5 - 1)^2} = \frac{(0.5)(0.5)^n}{(0.5)^2} = 2(0.5)^n \text{ ไปใช้ประโยชน์ (2.153) เสร็จแล้ว}$$

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ตำแหน่ง  $p_2$  มีโพลซ้อนกันอยู่ 2 ตัวทำให้ค่า  $m$  ในสมการที่ 2.144 มีค่าเท่ากับ 2 ดังนั้น Residue ของโพลที่ตำแหน่ง  $p_2$  หาได้จากสมการที่ 2.154

$$\text{Res}[F(z),1] = \frac{d}{dz} [(z-1)^2 F(z)] = \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^{n+1}}{z-0.5} \right] \quad (2.154)$$

$$\text{Res}[F(z),1] = \frac{(z-0.5)(n+1)z^n - z^{n+1}}{(z-0.5)^2}$$

แทนค่า  $z = 1$

$$\begin{aligned} \text{Res}[F(z),1] &= \frac{(1-0.5)(n+1)1^n - 1^{n+1}}{(1-0.5)^2} = \frac{(0.5)(n+1) - 1}{(0.5)^2} \\ \text{Res}[F(z),1] &= 2(n+1) \end{aligned} \quad (2.155)$$

$x(n)$  ก็คือผลรวมของการทำ Residue ที่โพลทั้งสองตำแหน่งเขียนได้ดังสมการที่ 2.156

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}[F(z), p_1] + \text{Res}[F(z), p_2] \\ x(n) &= 2(0.5)^n + 2(n+1) = 2[(n-1) + (0.5)^n] \end{aligned} \quad (2.156)$$

### 2.13 ฟังก์ชันของระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา

ในการหาผลตอบสนองทางเอาต์พุตของระบบที่แปรตามเวลาสามารถกระทำได้โดยใช้หลักการ Convolution ซึ่งการหาจะต้องทราบค่าของ  $x(n)$  และ  $h(n)$  แต่จากคุณสมบัติของการแปลงแซด ทำให้การหาผลตอบสนองทางเอาต์พุตหาได้จากสมการที่ 2.157

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.157)$$

เมื่อ  $Y(z)$  คือ การแปลงแซดของ Output sequence  $y(n)$

$X(z)$  คือ การแปลงแซดของ Input sequence  $x(n)$

$H(z)$  คือ การแปลงแซดของ Unit sample response  $h(n)$

ดังนั้นถ้ารู้ค่า  $x(n)$  และ  $h(n)$  ก็สามารถหาค่า  $X(z)$  และ  $H(z)$  ได้โดยการแปลงแซด และเมื่อนำมาคูณกันดังสมการที่ 2.157 ก็จะได้  $Y(z)$  และสามารถหาค่า  $y(n)$  ได้โดยการแปลงแซด

ผกผัน  $Y(z)$  และในทางกลับกันถ้ารู้ค่า  $x(n)$  และ  $y(n)$  ก็สามารถหาค่า  $H(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.158

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.158)$$

เพื่อความชัดเจนจะเห็นได้ว่าคุณสมบัติของระบบนั้นอธิบายได้ 2 ลักษณะคือ  $h(n)$  และ  $H(z)$  โดย  $h(n)$  นั้นจะอธิบายถึงคุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา ส่วน  $H(z)$  จะอธิบายถึงคุณสมบัติในโดเมนแซด ซึ่งแท้ที่จริงแล้ว  $H(z)$  และ  $h(n)$  นั้นเหมือนกันเพียงแต่อยู่กันคนละโดเมน และโดยทั่วไปจะเรียก  $H(z)$  ในสมการที่ 2.158 ว่า ฟังก์ชันระบบ (System function) หรือ ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function)

สำหรับระบบที่เป็นแบบเชิงเส้นและมีค่าสัมประสิทธิ์คงที่ (Linear constant-coefficient difference equation) ดังสมการที่ 2.159 สามารถใช้คุณสมบัติของการแปลงแซดเขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอน  $H(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.160

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.159)$$

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^N a_k Y(z)z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z)z^{-k}$$

$$Y(z) \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = X(z) \left( \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.160)$$

และระบบที่เป็นแบบ Non-recursive ดังสมการที่ 2.161 สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังสมการที่ 2.162

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) \quad (2.161)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M h(k)X(z)z^{-k}$$

$$Y(z) = X(z) \left( \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ระบบที่อนุญาตนานาชาติให้นำไปใช้ประโยชน์อื่นใดอย่างอื่น  
 H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum\_{k=0}^M h(k)z^{-k} \quad (2.162)

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.14 ผลตอบสองทางเวลาของระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา

การหาฟังก์ชันระบบและผลตอบสนองของ Unit sample กำหนดให้ระบบแบบไม่ต่อเนื่องมีสมการผลต่างดังสมการที่ 2.163

$$y(n] = \frac{1}{2}y[n-1] + 2x[n] \quad (2.163)$$

ใช้การแปลงแซด แปลงสมการที่ 2.163 และจัดสมการได้ฟังก์ชันระบบดังสมการที่ 2.164

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + 2X(z) \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.164)$$

ส่วนผลตอบสนองของ Unit sample หาได้จากสมการที่ (2.165)

$$Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} X(z) \quad (2.165)$$

เมื่ออินพุตของระบบ  $x[n] = \delta[n]$  ดังนั้น  $X(z) = 1$  จะได้  $Y(z)$  ดังสมการที่ (2.166)

$$Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2.166)$$

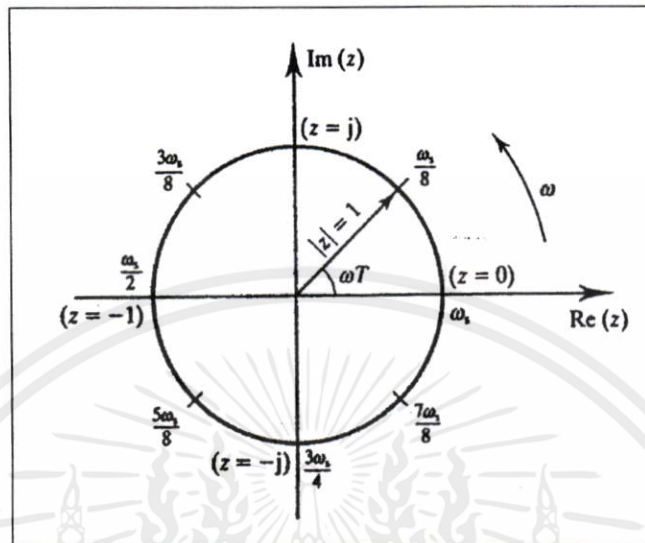
จากตารางที่ 2.1 สามารถแปลง  $Y(z)$  ให้เป็น  $y[n]$  (ใช้สูตรที่ 5) ดังสมการที่ (2.167)

$$y[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (2.167)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.15 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซด [6-8]

ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซด แสดงได้ดังภาพที่ 2.44



ภาพที่ 2.44 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซด

จากภาพที่ 2.44 จะเห็นได้ว่ามุม  $\omega$  จะอยู่ในช่วง  $0-2\pi$  และในระบบไม่ต่อเนื่องความถี่คู่ของระบบจะมีค่าเท่ากับ  $\omega_s$  แต่ความถี่ที่สามารถใช้งานได้จริงในระบบจะมีค่าเพียง  $\frac{\omega_s}{2}$  เท่านั้น ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซด จะอยู่ในช่วง  $0-\pi$  เท่านั้น

ตารางที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับมุมบนระนาบแซด

| Frequency (Hz) | $\omega$ (rad/s) | มุม $\omega T$ (rad) |
|----------------|------------------|----------------------|
| 0              | 0                | 0                    |
| $f_s/8$        | $\omega_s/8$     | $\pi/4$              |
| $f_s/4$        | $\omega_s/4$     | $\pi/2$              |
| $3f_s/8$       | $3\omega_s/8$    | $3\pi/4$             |
| $f_s/2$        | $\omega_s/2$     | $\pi$                |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.16 ผลตอบสนองความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [6,7]

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน  $H(z)$  ดังสมการที่ 2.168

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \quad (2.168)$$

ในการหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบแบบไม่ต่อเนื่องนั้นจะแทน  $z = e^{j\omega}$  ลงใน  $H(z)$  ดังสมการที่ 2.169

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-2j\omega} + \dots}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-2j\omega} + \dots} \quad (2.169)$$

$$H(\omega) = H_R(\omega) + H_I(\omega)$$

จะเห็นว่าสมการที่ 2.169 จะประกอบไปด้วยค่าที่เป็นจำนวนจริงและค่าที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งในการหาผลตอบสนองทางความถี่จะแบ่งการคำนวณออกเป็นสองลักษณะคือ

### 2.16.1 ผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude Response)

คำนวณได้โดยหาค่าสัมบูรณ์ของสมการที่ 2.169 เขียนได้ดังสมการที่ 2.170

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R(\omega)^2 + H_I(\omega)^2} \quad (2.170)$$

### 2.16.2 ผลตอบสนองทางเฟส (Phase Response)

คำนวณได้จากสมการที่ 2.171 ซึ่งผลตอบสนองทางเฟสจะถูกแทนด้วย  $\Theta(\omega)$  หรือ  $\angle H(\omega)$

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \quad (2.171)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2.21 จงหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องดังสมการที่ 2.172

$$H(z) = \frac{1+z}{z} \quad (2.172)$$

sol กำหนดให้  $z = e^{j\omega}$

$$H(\omega) = \frac{1+e^{j\omega}}{e^{j\omega}} = \frac{1}{e^{j\omega}} + 1$$

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega} \quad (2.173)$$

และจากสมการ  $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$  ดังนั้นสมการที่ 2.173 สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ 2.174

$$H(\omega) = 1 + [\cos(-\omega) + j \sin(-\omega)]$$

$$H(\omega) = 1 + \cos(\omega) - j \sin(\omega) \quad (2.174)$$

จากสมการที่ 2.174 จะพบว่าส่วนที่เป็นจำนวนจริงคือ  $H_r(\omega) = 1 + \cos(\omega)$  และส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ  $H_i(\omega) = -\sin(\omega)$  ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาดจะมีค่าดังสมการที่ 2.175

$$|H(\omega)| = \sqrt{[1 + \cos(\omega)]^2 + [-\sin(\omega)]^2}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)}$$

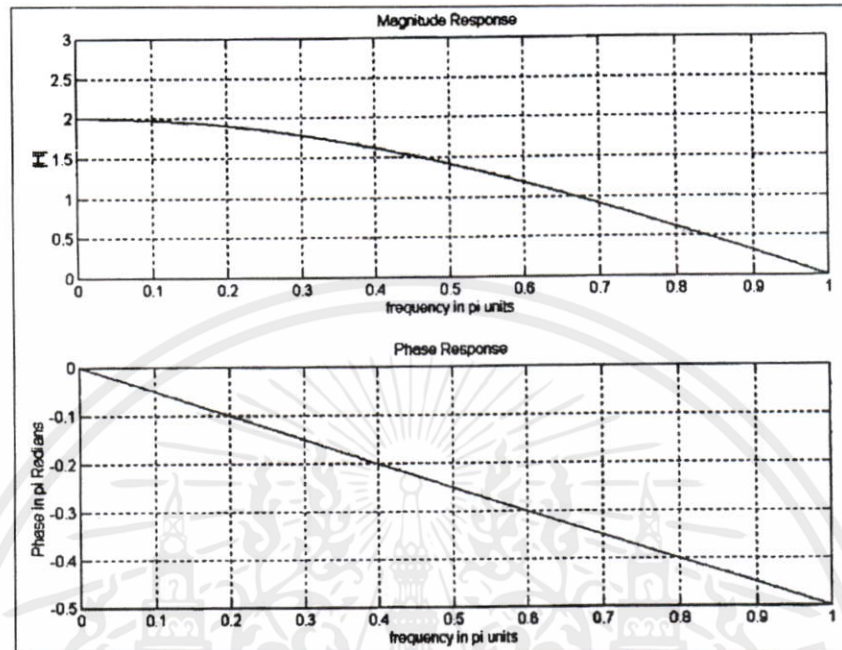
$$|H(\omega)| = \sqrt{2 + 2\cos(\omega)} \quad (2.175)$$

และผลตอบสนองทางเฟสเขียนได้จากสมการที่ 2.171 โดยนำค่าจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนจากสมการ 2.174 แสดงได้ดังสมการที่ 2.176

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{-\sin(\omega)}{1 + \cos(\omega)} \quad (2.176)$$

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และจากสมการที่ 2.175 และสมการที่ 2.176 เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า  $\omega$  ในช่วง  $0-\pi$  ทำให้เขียนกราฟผลตอบสนองทางความถี่ได้ดังภาพที่ 2.45



ภาพที่ 2.45 ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบ  $H(z) = \frac{1+z}{z}$

ตัวอย่างที่ 2.22 จงหาผลตอบสนองทางความถี่จากสมการผลต่าง

$$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) \quad (2.177)$$

sol สมการที่ 2.177 สามารถแปลงให้เป็น  $H(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.178

$$Y(z) = 0.9Y(z)z^{-1} + X(z)$$

$$X(z) = Y(z) - 0.9Y(z)z^{-1}$$

$$X(z) = Y(z)[1 - 0.9z^{-1}]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และ  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$  ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ (2.178)

แทนค่า  $z = e^{j\omega}$  ลงในสมการที่ 2.178

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$

พิจารณาเฉพาะส่วน

$$1 - 0.9e^{-j\omega} = (1 - 0.9\cos\omega) + j0.9\sin\omega$$

มีค่าสัมบูรณ์ดังสมการที่ 2.179 และมุมดังสมการที่ 2.180

$$|1 - 0.9e^{-j\omega}| = \sqrt{(1 - 0.9\cos\omega)^2 + (0.9\sin\omega)^2}$$

$$|1 - 0.9e^{-j\omega}| = \sqrt{1.81 - 1.8\cos\omega} \quad (2.179)$$

$$\angle(1 - 0.9e^{-j\omega}) = \tan^{-1} \frac{0.9\sin\omega}{1 - 0.9\cos\omega} \quad (2.180)$$

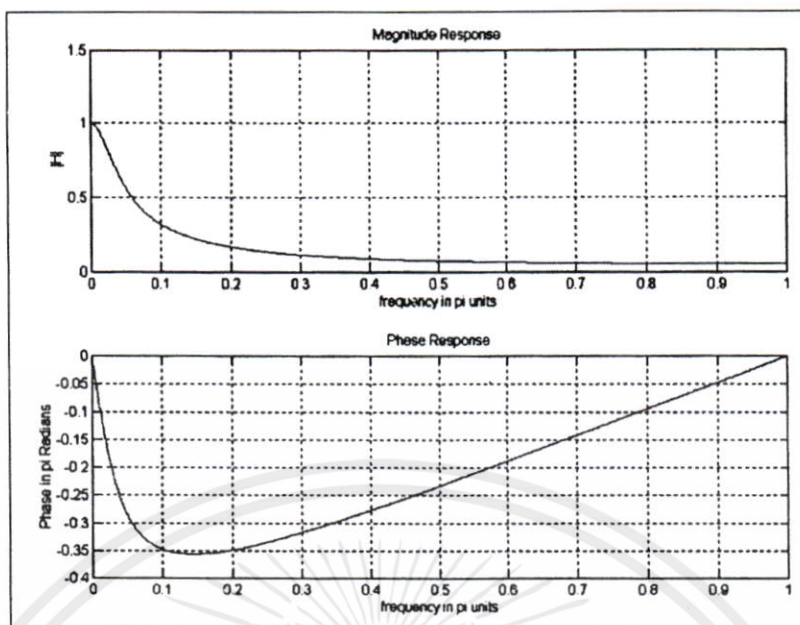
ดังสมการที่ 2.178 จะมีค่า Magnitude Response ดังสมการที่ 2.181 และมี Phase Response ดังสมการที่ 2.182

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1.81 - 1.8\cos\omega}} \quad (2.181)$$

$$\Theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{0.9\sin\omega}{1.81 - 1.8\cos\omega} \quad (2.182)$$

นำไปเขียนเป็นกราฟผลตอบสนองทางความถี่ได้ดังภาพที่ 2.46

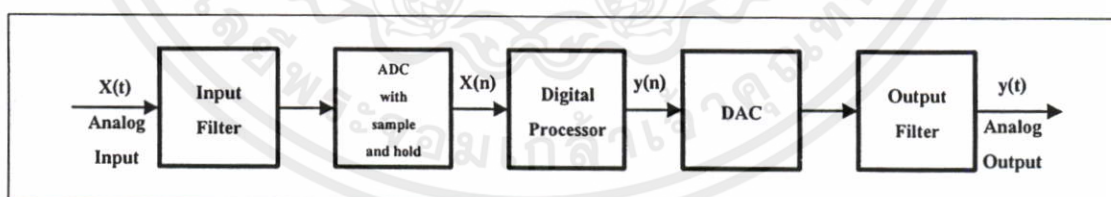
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.46 ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบ  $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$

## 2.17 โครงสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR [6-8]

ตัวกรองสัญญาณเชิงเลข เป็นตัวกรองรูปแบบหนึ่งที่ถูกออกแบบและสร้างขึ้นโดยวงจรดิจิทัล มีไดอะแกรมการทำงานดังภาพที่ 2.47 จากรูปสัญญาณเชิงอุปมาน  $x(t)$  เป็นสัญญาณอินพุตของตัวกรอง สัญญาณนี้จะถูกส่งผ่านวงจรแปลงสัญญาณเชิงอุปมานให้เป็นสัญญาณเชิงเลข  $x(n)$  และสัญญาณเชิงเลขนี้จะถูกส่งเข้าไปคำนวณในหน่วยประมวลผล ผลที่ได้จากการคำนวณยังคงเป็นสัญญาณเชิงเลข  $y(n)$  จากนั้นจะถูกส่งผ่านมายังวงจรแปลงสัญญาณเชิงเลขให้เป็นสัญญาณเชิงอุปมาน ได้สัญญาณเอาต์พุตของตัวกรองเป็นสัญญาณเชิงอุปมาน  $y(t)$



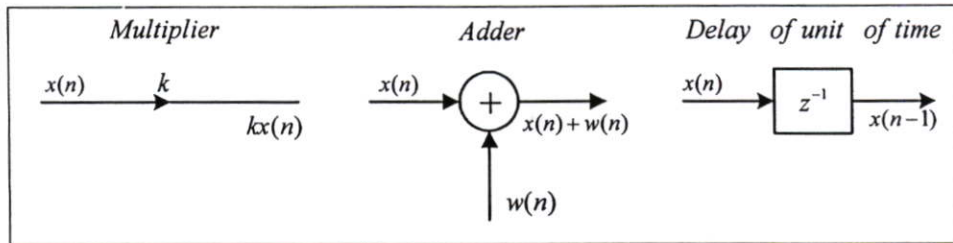
ภาพที่ 2.47 แสดงไดอะแกรมการทำงานของตัวกรองเชิงเลขพื้นฐาน

ตัวกรองเชิงเลขจะประกอบด้วยองค์ประกอบพื้นฐาน (Basic Elements) ดังต่อไปนี้

- ตัวบวก (Adder)
- ตัวคูณ (Multiplier)
- ตัวหน่วง (Delay)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีเนื้อหาที่ผิดพลาดและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญลักษณ์ขององค์ประกอบพื้นฐานทั้ง 3 ตัว ดังภาพที่ 2.48



ภาพที่ 2.48 แสดงองค์ประกอบพื้นฐานทั้ง 3 ตัวที่ใช้เป็นส่วนประกอบของตัวกรองเชิงเลข

สมการฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลข สามารถเขียนเป็นสมการ[6-8] ดังนี้

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (2.183)$$

จากสมการที่ (2.183) สามารถนำไปเขียนใหม่ได้ ดังสมการที่ (2.184)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.184)$$

จากสมการที่ (2.184) นำไปจัดเทอมต่างๆ ใหม่และเขียนให้อยู่ในรูปของสมการผลต่างได้ ดังสมการที่ (2.187)

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^M a_k Y(z) z^{-k} \quad (2.185)$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + \dots + b_k X(z) z^{-k} - a_1 Y(z) z^{-1} - \dots - a_k Y(z) z^{-k} \quad (2.186)$$

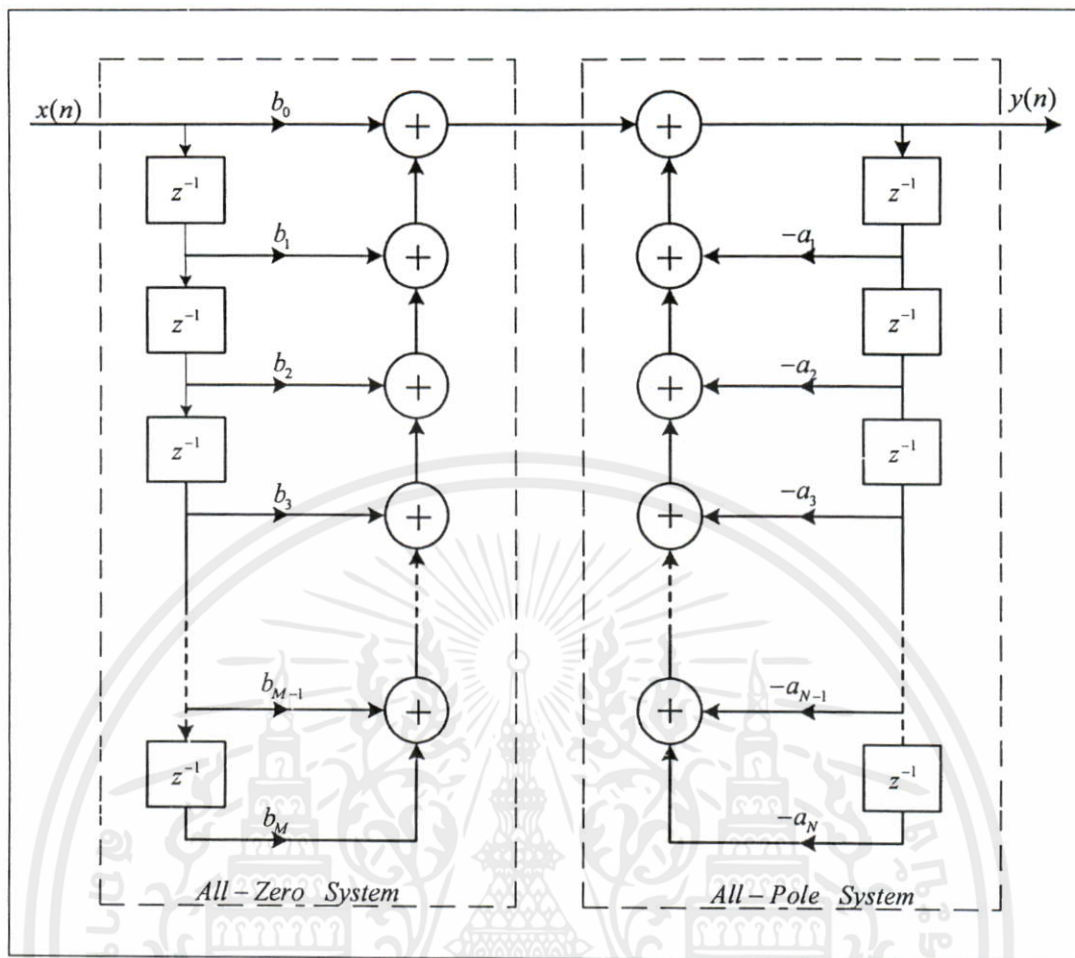
$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (2.187)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (2.187) สามารถนำมาเขียนเป็น โครงสร้างของตัวกรองเชิงเลขใหม่เรียกว่า

โครงสร้างแบบตรง I (Direct Form I) ดังภาพที่ 2.49



ภาพที่ 2.49 แสดงโครงสร้างของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขแบบตรง I

นำ  $\frac{w(z)}{w(z)}$  คูณตลอดในสมการที่ (2.184) จะได้

$$H(z) = \frac{w(z)}{w(z)} \times \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \tag{2.188}$$

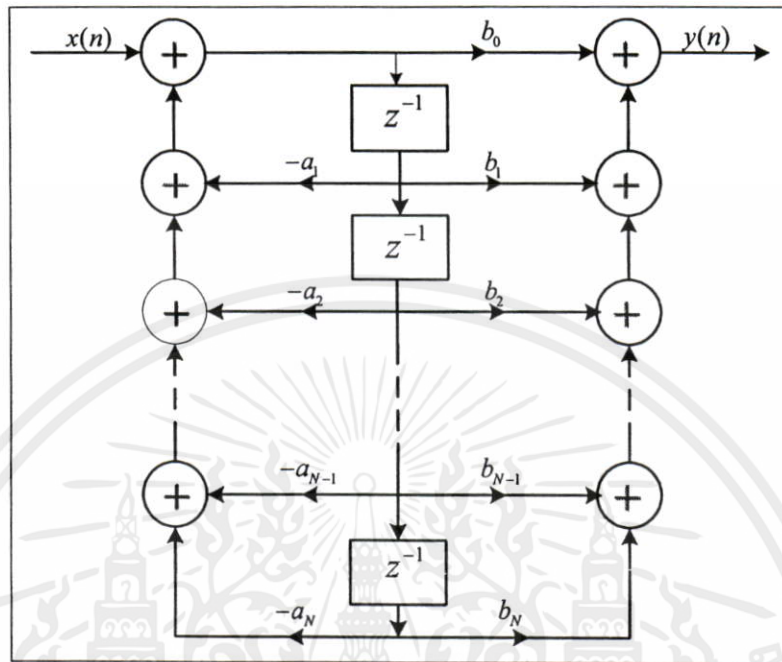
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{w(z)}{w(z)} \times \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \tag{2.189}$$

$$X(z) = w(z) + a_1 w(z) z^{-1} + \dots + a_M w(z) z^{-M} \tag{2.190}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ  $w(z) = X(z) - a_1 w(z) z^{-1} - \dots - a_M w(z) z^{-M}$  นำไปใช้ประโยชน์ (2.191) รค่า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

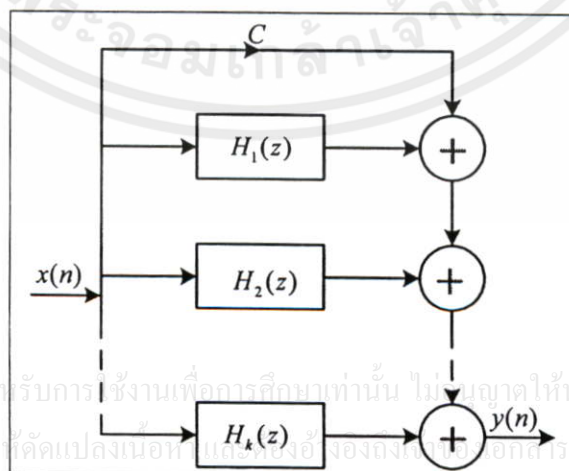
$$Y(z) = b_0 w(z) + b_1 w(z) z^{-1} + \dots + b_N w(z) z^{-N} \tag{2.192}$$

จากสมการที่ (2.191) และสมการที่ (2.192) สามารถนำไปเขียนเป็น โครงสร้างของตัวกรอง  
เชิงเลขเรียกว่า โครงสร้างแบบตรง II (Direct form II) ดังภาพที่ 2.50



ภาพที่ 2.50 แสดงโครงสร้างของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขแบบตรง II

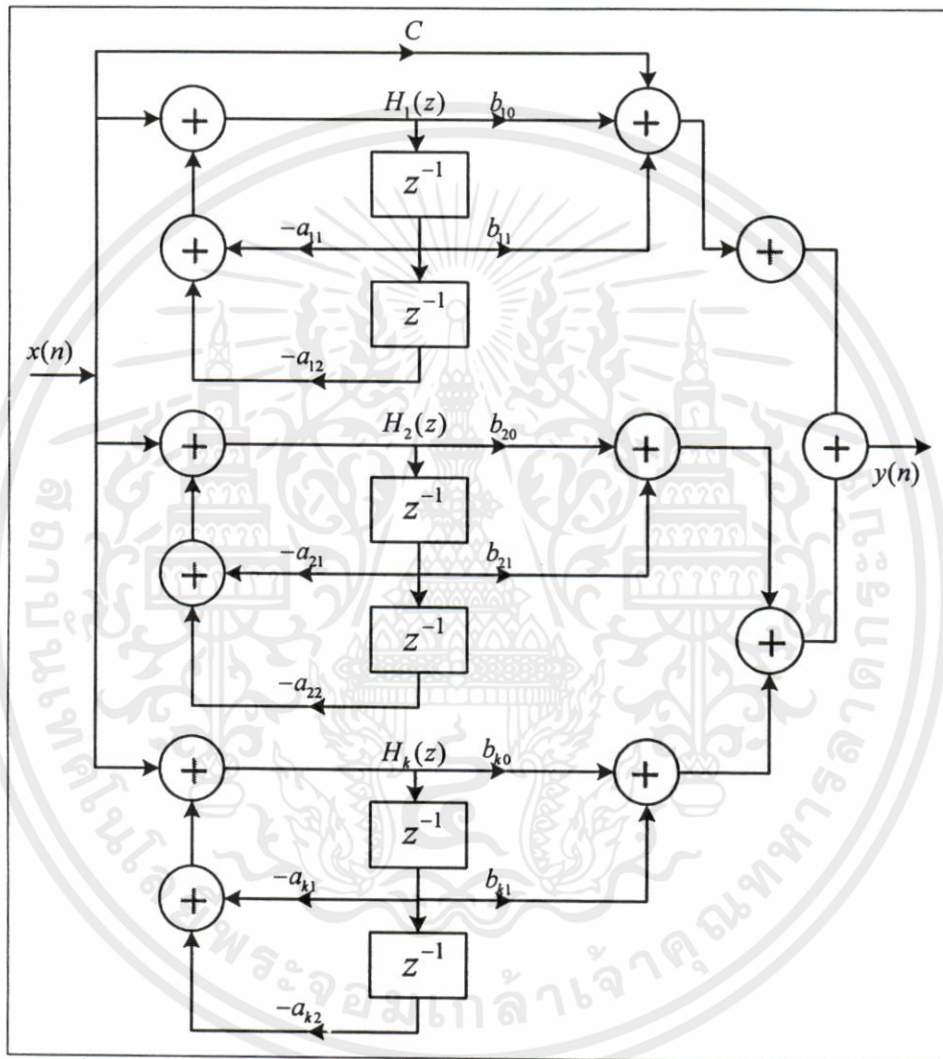
แต่เนื่องจากตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลข ที่มีโครงสร้างแบบตรง I เมื่อมีจำนวนลำดับเพิ่มขึ้นจะมีค่าย่านไดนามิก (Dynamic Range) ของสัมประสิทธิ์มากขึ้น กล่าวคือ ค่าสัมประสิทธิ์ในเทอม a จะมีค่ามากและสัมประสิทธิ์ในเทอม b จะมีค่าน้อยทำให้เป็นปัญหาอย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องการประมวลผล ดังนั้นในการทดลองจึงได้มีการปรับโครงสร้างของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขใหม่โดยจัดให้มีโครงสร้างเป็นแบบขนาน ดังภาพที่ 2.51



ภาพที่ 2.51 แสดงโครงสร้างของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขที่มีโครงสร้างในแบบขนาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา หรือทำซ้ำโดยไม่ขออนุญาตจากเจ้าของลิขสิทธิ์

ในภาพที่ 2.51 จะเห็นได้ว่า ตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขที่มีโครงสร้างเป็นแบบขนานนี้จะประกอบด้วย  $H_1(z), H_2(z), \dots, H_k(z)$  และภายใน  $H(z)$  แต่ละตัวนี้จะมีโครงสร้างดังภาพที่ 2.52 ในการจัดโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลขให้มีโครงสร้างเป็นแบบขนานนี้จะให้ผลดีคือย่านไดนามิกของสัมประสิทธิ์มีค่าน้อยทำให้ไม่เป็นปัญหาเมื่อใช้กับทั้งตัวประมวลผลแบบจุดทศนิยมคงที่ (Fixed Point) หรือแบบจุดทศนิยมลอย (Floating point)



ภาพที่ 2.52 แสดงโครงสร้างย่อยของตัวกรองสัญญาณป้อนกลับเชิงเลขแบบขนาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

## การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Notch

### 3.1 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch

ผลตอบสนองทางความถี่ (Frequency response) ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch สามารถอธิบายได้ด้วยสมการที่ 3.1 และฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ดังสมการที่ 3.2[6-8]

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.1)$$

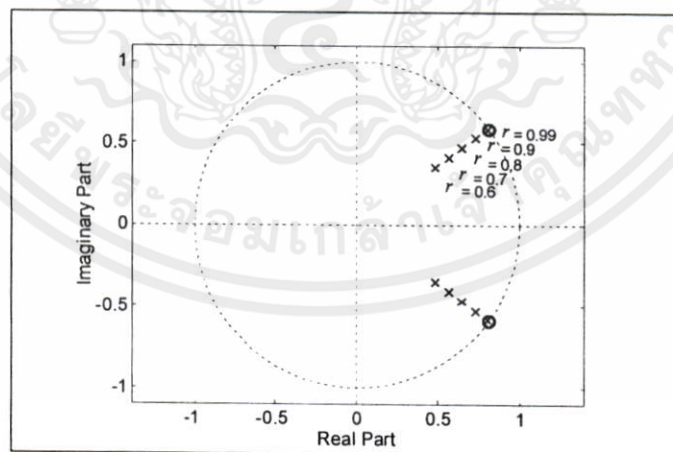
$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (3.2)$$

เมื่อ  $H(z)$  คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch

$\omega_0$  คือ มุมของโพล-ซีโรบนระนาบแซค

$r$  คือ ระยะห่างระหว่างโพลกับจุดกำเนิดบนระนาบแซค (Origin)

จากฟังก์ชันถ่ายโอนตามสมการที่ 3.2 จะมีตำแหน่งการวางโพล-ซีโรบนระนาบแซคดังภาพที่ 3.1

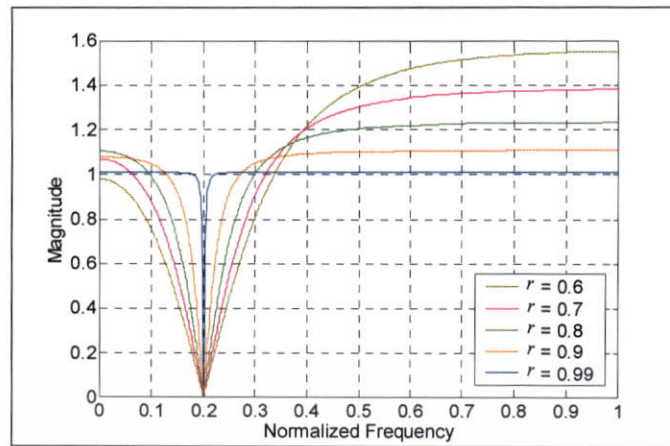


ภาพที่ 3.1 ตำแหน่งการวางโพล-ซีโรของตัวกรองเชิงเลข IIR

แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลงการวางตำแหน่งโพล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิใช่เพื่อเผยแพร่เป็นเว็บไซต์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 3.2 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR

แบบ Single notch ก่อนเปลี่ยนแปลงการวางตำแหน่งโพล

จากภาพที่ 3.1 ตำแหน่งการวางโพล-ซีโรของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ออกแบบตามหลักการเดิม มุมของโพล-ซีโรจะวางอยู่ในตำแหน่งเดียวกัน ซึ่งผลตอบสนองทางขนาดที่มุม  $\omega_0 = 0.2\pi$ ,  $r = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  และ  $0.99$  แสดงดังภาพที่ 3.2 ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองทางขนาดในช่วง Pass-band จะไม่สมมาตรกันและยังไม่สามารถควบคุมอัตราขยายให้มีขนาดตามต้องการได้ ดังนั้นในการควบคุมอัตราขยายของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ให้มีขนาดตามต้องการนั้น ทำได้โดยการเปลี่ยนตำแหน่งการวางโพลที่อยู่บนระนาบแชนด์ให้เหมาะสม แสดงได้ดังสมการที่ 3.3 ถึง 3.5 และผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch ที่ได้เปลี่ยนตำแหน่งการวางโพลให้เหมาะสมแสดงดังภาพที่ 3.3

$$\hat{H}_N(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\hat{\omega}_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (3.3)$$

$$\hat{\omega}_0 = \cos^{-1} \left[ \frac{1+r^2}{2r} \cos\omega_0 \right] \quad (3.4)$$

$$b_0 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} \quad (3.5)$$

กำหนดให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเอกสารฉบับนี้ไปเผยแพร่ซ้ำของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

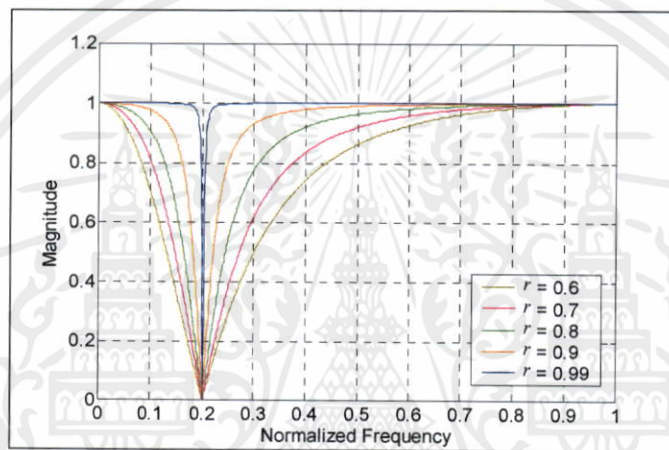
$$k_2 = \left[ \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right]$$

เมื่อ  $\hat{H}(z)$  คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch หลังเปลี่ยนตำแหน่งการวางโพลให้เหมาะสม

$\omega_0$  คือ มุมของซีโรว์

$\hat{\omega}_0$  คือ มุมของโพลหลังทำการเปลี่ยนตำแหน่ง

$b_0$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch



ภาพที่ 3.3 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Single notch หลังเปลี่ยนตำแหน่งการวางโพล

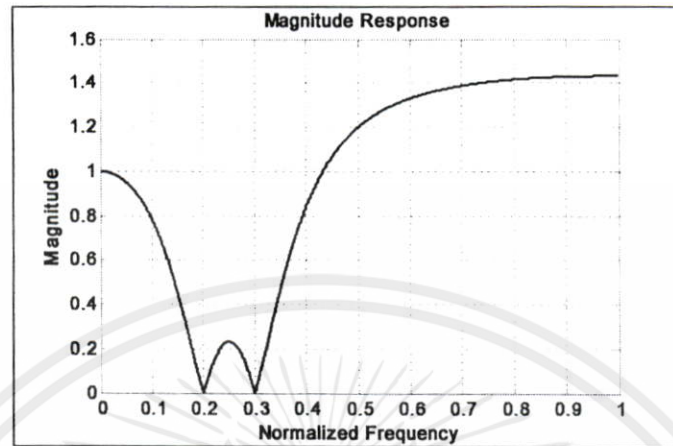
### 3.1 ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch เกิดจากการนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch มาต่อลำดับกัน ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch สามารถอธิบายได้ดังสมการที่ 3.6 และถ้านำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ก่อนที่จะเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล มาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ 3.7

$$H_M(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega_1, \omega_2 \\ 1 & ; otherwise \end{cases} \quad (3.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตี  $H_M(z) = \prod_{n=1}^k \left( b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right)$  ทุกครั้งที่มีการ (3.7) ใช้

จากสมการที่ 3.7 กำหนดให้  $\omega_1 = 0.2\pi$ ,  $\omega_2 = 0.3\pi$  และ  $r = 0.7$  จะได้ผลตอบสนองทางขนาด ดังภาพที่ 3.4



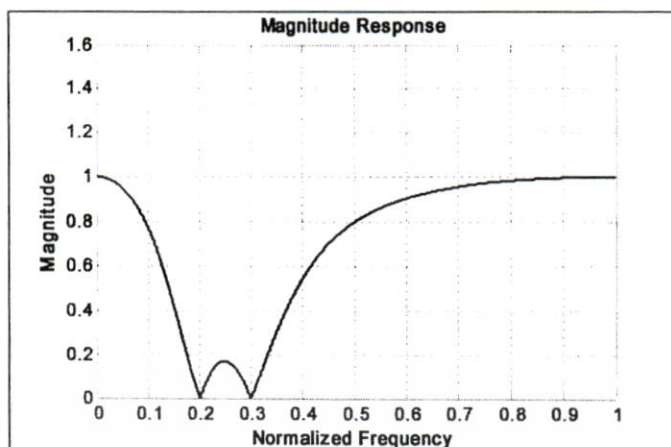
ภาพที่ 3.4 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ก่อนทำการเปลี่ยนแปลง ตำแหน่งการวางโพล

จากสมการที่ 3.3 ได้มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch และมีการหาค่าคงที่ เพื่อใช้ควบคุมอัตรการขยายในช่วง Pass-band โดยใช้สมการที่ 3.4 และ 3.5 เมื่อนำมาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ 3.8

$$\hat{H}(z) = \prod_{n=1}^k \left( b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right) \quad (3.8)$$

จากสมการที่ 3.8 กำหนดให้  $\omega_1 = 0.2\pi$ ,  $\omega_2 = 0.3\pi$  และ  $r = 0.7$  จะได้ผลตอบสนองทางขนาด ดังภาพที่ 3.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 3.5 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single Notch หลังทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล

จากภาพที่ 3.4 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ก่อนทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล อัตราการขยายที่ความถี่ DC,  $\pi$  และความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency ไม่สามารถควบคุมได้ เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะว่าโพลของตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ถูกวางอยู่ในตำแหน่งไม่เหมาะสม อีกทั้งยังไม่รู้ค่าคงที่  $b_n$  สำหรับควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band จึงเป็นผลให้ตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch จะมีผลตอบสนองทางขนาดที่เกิดขึ้นไม่สมมาตรกัน อีกทั้งไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ DC และ  $\pi$  ได้ แสดงดังภาพที่ 3.2 ดังนั้นเมื่อนำมาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ก็จะได้ผลตอบสนองทางขนาดที่ไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ต่างๆดังที่กล่าวมาแล้ว

ส่วนภาพที่ 3.5 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างจากตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch หลังทำการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล และมีการหาค่าคงที่  $b_n$  ควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band พบว่าอัตราการขยายที่ความถี่ DC,  $\pi$  สามารถควบคุมได้ แต่อย่างไรก็ตามที่ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency ไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายให้เท่ากับที่ความถี่ DC และความถี่  $\pi$  ได้ ถึงแม้ว่าตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่นำมาต่อลำดับกันจะมีผลตอบสนองทางขนาดที่สมมาตรกัน และสามารถควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ DC และ  $\pi$  ได้แล้วก็ตาม เหตุผลที่เป็นเช่นนี้เนื่องมาจากตำแหน่งของโพลที่เปลี่ยนแปลงไปและค่าคงที่  $b_n$  ที่ใช้สำหรับควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band ถูกหาจากความสัมพันธ์ของอัตราการขยายเฉพาะที่ความถี่ DC และ  $\pi$  [4] ซึ่งการทำลักษณะนี้เหมาะสมต่อการออกแบบเฉพาะตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch เท่านั้น หรืออาจกล่าวได้ว่าตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่นำมาต่อลำดับกันเพื่อสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ตำแหน่งของโพล ถูกออกแบบให้วางในลักษณะที่ไม่มี

ความสัมพันธ์กันจึงเป็นผลให้ผลตอบสนองทางขนาดที่ได้โดยความถี่ระหว่าง Notch frequency อัตราการขยายไม่สามารถควบคุมได้ [5]

### 3.3 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยหลักการที่นำเสนอ

ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch แสดงดังสมการที่ 3.9 และฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ 3.10

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \omega_1, \omega_2 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\tilde{H}(z) = \prod_{n=1}^2 \tilde{H}_n(z)$$

$$\tilde{H}_n(z) = \prod_{n=1}^2 \left( b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_n \cos \tilde{\omega}_n z^{-1} + r_n^2 z^{-2}} \right) \quad (3.10)$$

จากสมการที่ 3.10 จะเห็นได้ว่าตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch เกิดจากการนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch มาต่อลำดับกัน โดยในการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch เพื่อนำมาสร้างเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch จะแตกต่างกับการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ทั่วไปคือ ที่ความถี่ DC และที่ความถี่  $\pi$  จะมีอัตราการขยายไม่เท่ากัน นอกจากนี้จะต้องมีการควบคุมอัตราการขยายที่ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency เพิ่มขึ้นอีกหนึ่งความถี่ ในขณะที่ตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ทั่วไปจะมีการควบคุมอัตราการขยายเฉพาะที่ความถี่ DC และความถี่  $\pi$  เท่านั้น และสิ่งสำคัญอีกประการหนึ่งคือตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่นำมาต่อลำดับกันนั้น อัตราการขยายที่ความถี่ DC ความถี่  $\pi$  และที่ความถี่ระหว่าง Notch frequency จะต้องมีความสัมพันธ์กัน เพื่อที่จะทำให้อัตราการขยายที่ความถี่ DC ความถี่  $\pi$  และที่ความถี่ระหว่าง Notch frequency ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ควบคุมให้มีขนาดตามต้องการได้

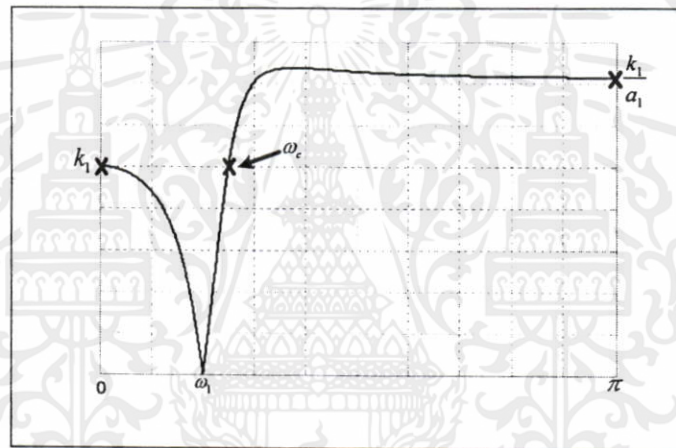
ถ้ากำหนดให้ตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch มี Notch frequency ที่ความถี่  $\omega_1, \omega_2$  และความถี่ระหว่าง Notch frequency  $\omega_c$  ดังนั้นตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ที่จะนำมาต่อลำดับกันจะต้องมีด้วยกันสองส่วนคือ Notch filter 1 ซึ่งมี Notch frequency เท่ากับ  $\omega_1$  และ Notch filter 2 ซึ่งมี Notch frequency เท่ากับ  $\omega_2$  ดังนั้นอัตราการขยายที่ความถี่ต่างๆของ Notch filter 1, Notch filter 2 และ Multiple notch filter สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.1 และผลตอบสนองทางขนาดแสดงดังภาพที่ 3.6 และภาพที่ 3.7 ส่วน  $\omega_c$  แสดงดังสมการที่ 3.11

$$\omega_1 < \omega_c < \omega_2 \quad (3.11)$$

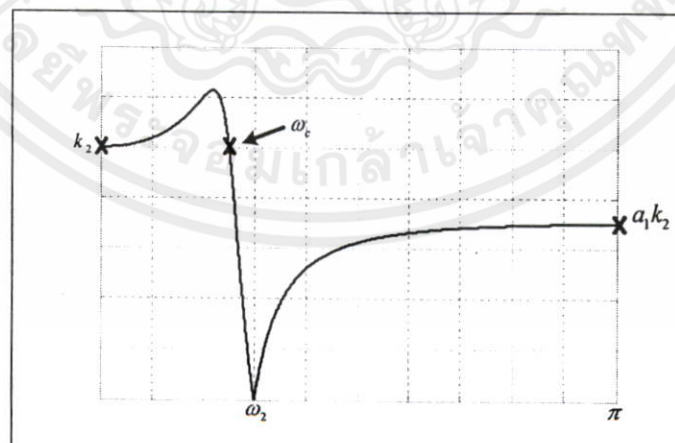
**ตารางที่ 3.1** อัตราการขยายที่ความถี่ DC,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_c$  และ  $\pi$  ของ Notch filter 1, Notch filter 2 และ Multiple notch filter

|                       | Gain at frequencies : |            |            |            |           |
|-----------------------|-----------------------|------------|------------|------------|-----------|
|                       | DC                    | $\omega_1$ | $\omega_c$ | $\omega_2$ | $\pi$     |
| Notch filter 1        | $k_1$                 | 0          | $k_1$      | -          | $k_1/a_1$ |
| Notch filter 2        | $k_2$                 | -          | $k_2$      | 0          | $a_1 k_2$ |
| Multiple notch filter | $k_1 k_2$             | 0          | $k_1 k_2$  | 0          | $k_1 k_2$ |

เมื่อ  $a_1, k_1, k_2$  เป็นค่าคงที่



ภาพที่ 3.6 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1



ภาพที่ 3.7 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในงานเพื่อการที่ขอทำขึ้น เมื่อผู้ดูแลไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นการสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch จึงจำเป็นต้องสร้าง Notch filter 1 และ Notch filter 2 ให้มีคุณสมบัติดังที่กล่าวมา การออกแบบจะเริ่มจาก Notch filter 1 โดยจะต้องหาตำแหน่งการวางโพลที่เหมาะสม ซึ่งในการหาตำแหน่งของโพลนี้จะแบ่งการหาออกเป็นสองส่วนคือมุม  $\tilde{\omega}_1$  และระยะห่างจากจุดกำเนิด  $r_1$  โดยการหามุม  $\tilde{\omega}_1$  จะใช้ฟังก์ชันถ้าย้อนดังสมการที่ 3.12 และอัตราขยายที่ความถี่ DC และที่ความถี่  $\pi$  ตามตารางที่ 3.1

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (3.12)$$

ที่ความถี่ DC แทน  $z = e^{j0}$  จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(e^{j0}) &= k_1 = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 + 1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ k_1 &= b_1 \left( \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ที่ความถี่  $\pi$  แทน  $z = e^{j\pi}$  จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(e^{j\pi}) &= \frac{k_1}{a_1} = b_1 \frac{1 + 2 \cos \omega_1 + 1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ k_1 &= a_1 b_1 \left( \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

จากสมการที่ 3.13 และสมการที่ 3.14 สามารถนำมาจัดรูปใหม่เพื่อหาค่า  $\cos \tilde{\omega}_1$  และ  $\tilde{\omega}_1$  ได้ดังสมการที่ 3.15 ถึงสมการที่ 3.17

$$k_1 = b_1 \left( \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \right) = a_1 b_1 \left( \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเอกสารนี้ไปเผยแพร่ในที่สาธารณะโดยไม่ได้รับอนุญาตจากผู้นิพนธ์

$$\cos \tilde{\omega}_1 = \frac{(r_1^2 + 1)(a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)}{2r_1(a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)} \quad (3.15)$$

กำหนดให้  $l_1 = \frac{a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}{a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}$  ดังนั้นค่า  $\cos \tilde{\omega}_1$  สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ 3.16

$$\cos \tilde{\omega}_1 = \frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \quad (3.16)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \cos^{-1} \left( \frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \right) \quad (3.17)$$

นำค่า  $\cos \tilde{\omega}_1$  ดังสมการที่ 3.16 แทนค่าลงในสมการที่ 3.12 จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของ Single notch filter ให้ตามสมการที่ 3.18

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - (r_1^2 + 1) l_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (3.18)$$

จากสมการที่ 3.18 แทนค่าความถี่เท่ากับ DC,  $\pi$  และ  $\omega_c$  ได้ดังสมการที่ 3.19 ถึงสมการที่ 3.21

$$k_1 = b_1 \left( \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1) l_1 + r_1^2} \right) \quad (3.19)$$

$$k_1 = a_1 b_1 \left( \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + (r_1^2 + 1) l_1 + r_1^2} \right) \quad (3.20)$$

$$k_1 = b_1 \left( \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1) l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right) \quad (3.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ลำดับต่อไปจะทำการหา  $r_1$  โดยในการหาจะใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ 3.19 หรือสมการที่ 3.20 ไม่ว่ากรณีใดทางสั้น อีกทางหนึ่งให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการใดสมการหนึ่งกับสมการที่ 3.21 เลือกใช้สมการที่ 3.19 จากสมการที่ 3.19 และสมการที่ 3.21

นำมาจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ (Absolute) ได้ดังสมการที่ 3.22 และ สมการที่ 3.23

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 \quad (3.22)$$

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (3.23)$$

จากสมการที่ 3.22 และสมการที่ 3.23 นำมาเขียนรูปใหม่ได้ดังสมการที่ 3.24 ถึงสมการที่ 3.26

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (3.24)$$

$$k_1^2 = b_1^2 \left( \frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4 (1 - l_1)^2 + 2r_1^2 (1 - l_1)^2 + (1 - l_1)^2} \right) = b_1^2 \left( \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \right) \quad (3.25)$$

$$\left( \frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4 (1 - l_1)^2 + 2r_1^2 (1 - l_1)^2 + (1 - l_1)^2} \right) = \left( \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \right) \quad (3.26)$$

เมื่อ

$$X_1 = X_4 \left( (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \right)$$

$$X_2 = 2X_4 \left( (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c) + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \right)$$

$$X_3 = X_4 \left( (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c)^2 \right)$$

$$X_4 = (1 - 2 \cos \omega_1 \cos \omega_c + \cos 2\omega_c)^2 + (2 \cos \omega_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2$$

$$Y_1 = (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^4 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^4$$

$$+ 2(\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2$$

$$Y_2 = (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^3 (1 - l_1 \cos \omega_c) + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^3 (l_1 \sin \omega_c)$$

$$+ (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2$$

$$+ (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c)$$

$$Y_3 = 8 \left( (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \right)$$

$$+ 6 \left( (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c)^2 \right)$$

$$+ 2 \left( (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \cos \omega_c)^2 + (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ไปใช้ประโยชน์อื่นใด การคัดลอก  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งยังมิให้นำข้อมูลไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจากทางมหาวิทยาลัย

$$\begin{aligned}
Y_4 &= (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)^3 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c)^3 \\
&\quad + (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c)(l_1 \sin \omega_c)^2 \\
&\quad + (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \\
Y_5 &= 2((1 - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c)^2) + (1 - l_1 \cos \omega_c)^4 + (l_1 \sin \omega_c)^4
\end{aligned}$$

จากสมการที่ 3.26 จัดรูปใหม่เพื่อหาค่า  $r_1$  ได้ดังสมการที่ 3.27

$$\begin{aligned}
&r_1^8 (X_1(1-l_1)^2 - Y_1(2-2\cos\omega_1)^2) + r_1^6 ((2X_1 + X_2)(1-l_1)^2 - 4Y_2(2-2\cos\omega_1)^2) \\
&+ r_1^4 ((X_1 + 2X_2 + X_3)(1-l_1)^2 - Y_3(2-2\cos\omega_1)^2) + (X_3(1-l_1)^2 - Y_5(2-2\cos\omega_1)^2) \\
&+ r_1^2 ((X_2 + 2X_3)(1-l_1)^2 - 4Y_4(2-2\cos\omega_1)^2) = 0 \tag{3.27}
\end{aligned}$$

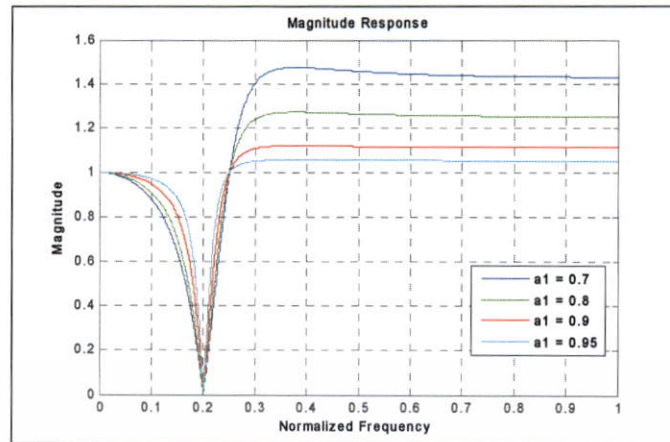
จากสมการที่ 3.27 พบว่าค่า  $r_1$  ที่หาได้จากการแก้สมการจะพบว่ามีคำตอบมากกว่าหนึ่งค่า บางค่าเป็นจำนวนจริง (Real Number) และบางค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) แต่คำตอบที่แท้จริงของ  $r_1$  นั้นจะต้องทำให้ระบบเสถียร (Stable) โดยตำแหน่งการวางโพลจะต้องอยู่ในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย [6,7] ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเลือกค่า  $r_1$  เฉพาะค่าที่เป็นจำนวนจริงและมีค่าน้อยกว่าหนึ่งเท่านั้น และลำดับสุดท้ายจะทำการหาค่าคงที่  $b_1$  ซึ่งกระทำโดยแทนค่า  $r_1$  ลงในสมการที่ 3.13 หรือสมการที่ 3.14 แสดงได้ดังสมการที่ 3.28 และสมการที่ 3.29

$$b_1 = k_1 \frac{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}{2 - 2 \cos \omega_1} \tag{3.28}$$

$$b_1 = \frac{k_1}{a_1} \times \frac{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2}{2 + 2 \cos \omega_1} \tag{3.29}$$

กำหนดให้ Notch filter 1 มีค่า Notch frequency  $\omega_1 = 0.2\pi$  ,  $\omega_2 = 0.3\pi$  ,  $k_1 = 1$  และ  $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$  และ  $0.95$  จะได้ผลตอบสนองทางขนาดดังภาพที่ 3.8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 3.8 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ที่ค่า  $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$  และ  $0.95$

จากภาพที่ 3.8 จะเห็นได้ว่าที่ความถี่  $\omega_1$ ,  $\omega_c$  และ  $\pi$  จะมีอัตราการขยายตามที่กำหนด และในการเปลี่ยนแปลงค่า  $a_1$  ให้มีค่ามากขึ้น โดยมีค่าเข้าใกล้หนึ่ง จะส่งผลให้แบนด์วิธของ Notch filter แคบลงนั่นหมายความว่าค่าคงที่  $a_1$  จะมีผลโดยตรงต่อแบนด์วิธของ Notch filter เรียกค่าคงที่  $a_1$  ว่า Band width factor :  $BWF$  และสำหรับการออกแบบ Notch filter 2 สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกับการออกแบบ Notch filter 1

### 3.4 ตัวอย่างการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

กำหนดให้ตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch มีผลตอบสนองทางความถี่ตามสมการที่ 3.30

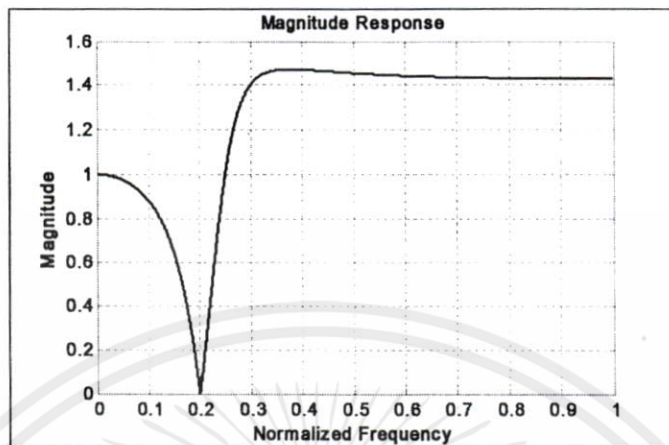
$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & ; \omega_1 = 0.2\pi, \omega_2 = 0.3\pi \\ 1 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (3.30)$$

จากสมการที่ 3.11 เลือกค่า  $\omega_c = 0.25\pi$  และจากตารางที่ 3.1 จะได้ค่า  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$  และมีค่า  $BWF = 0.7$  Notch filter 1 จะมีค่า  $\omega_1 = 0.2\pi$  ส่วน Notch filter 2 จะมีค่า  $\omega_2 = 0.3\pi$  จากนั้นใช้สมการที่ 3.12 – 3.29 หาฟังก์ชันถ่ายโอนของ Notch filter 1 และ Notch filter 2 ได้ดังสมการที่ 3.31 และสมการที่ 3.32 ส่วนผลตอบสนองทางขนาดของ Single notch filter ทั้งสองแสดงดังภาพที่ 3.9 และภาพที่ 3.10

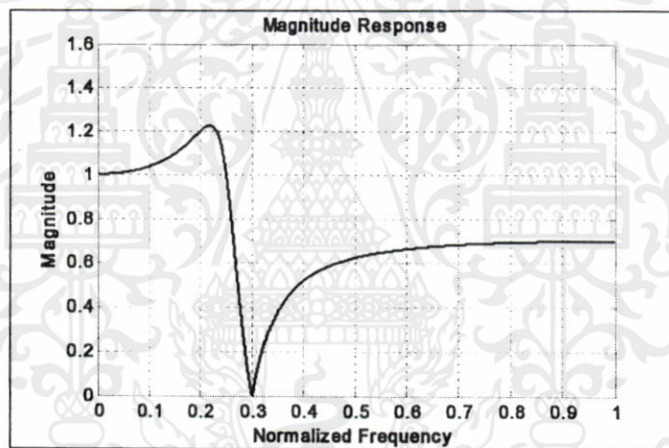
$$\tilde{H}_1(z) = \frac{1.150437 - 1.861446z^{-1} + 1.150437z^{-2}}{1 - 1.237098z^{-1} - 0.676525z^{-2}} \quad (3.31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ไม่ควรเผยแพร่หรือทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต หากมีข้อผิดพลาดประการใดขออภัยเป็นอย่างสูง

$$\tilde{H}_2(z) = \frac{0.663712 - 0.780240z^{-1} + 0.663712z^{-2}}{1 - 1.231882z^{-1} + 0.779066z^{-2}} \quad (3.32)$$



ภาพที่ 3.9 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 1 ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ

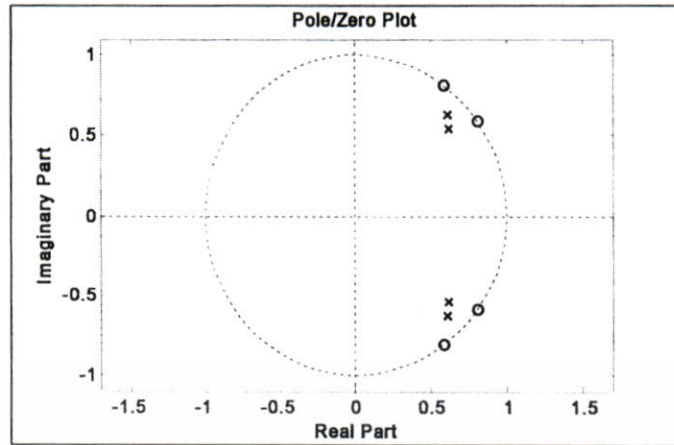


ภาพที่ 3.10 ผลตอบสนองทางขนาดของ Notch filter 2 ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ

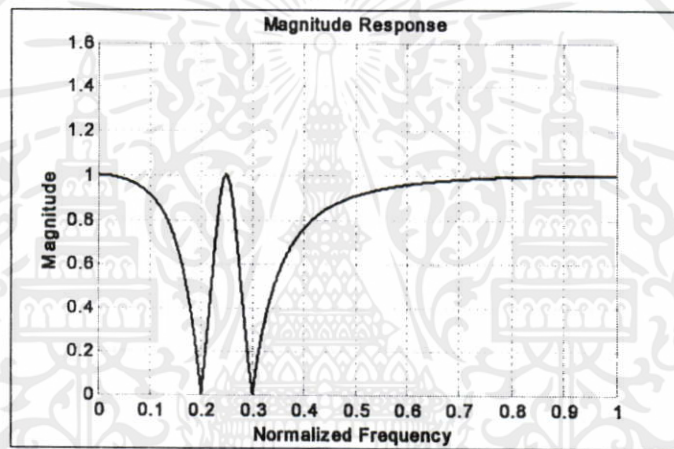
เมื่อนำตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch ทั้งสองมาต่อลำดับกันจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ดังสมการที่ 3.33 ส่วนตำแหน่งโพล-ซีโรและผลตอบสนองทางขนาดแสดงดังภาพที่ 3.11 และภาพที่ 3.12 ตามลำดับ

$$\tilde{H}(z) = \frac{0.763559 - 2.133080z^{-1} + 2.979492z^{-2} - 2.133080z^{-3} + 0.763559z^{-4}}{1 - 2.468980z^{-1} + 2.979551z^{-2} - 1.797181z^{-3} + 0.527058z^{-4}} \quad (3.33)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 3.11 ตำแหน่งการวางโพล-ซีโรของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ



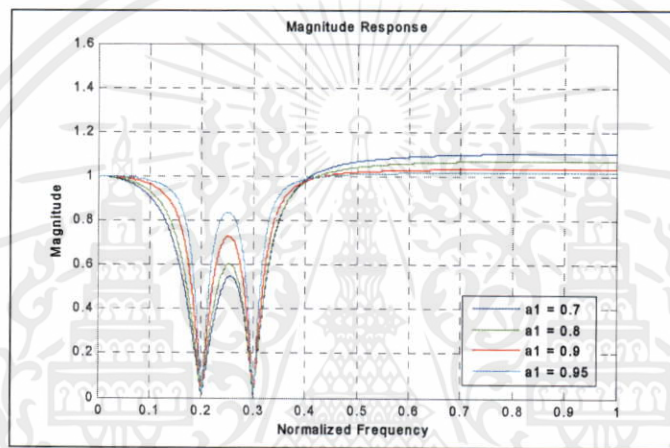
ภาพที่ 3.12 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอ

ในหัวข้อต่อไปนี้จะทำการโปรแกรม MATLAB สร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ด้วยหลักการที่นำเสนอและเปรียบเทียบผลการสร้างกับหลักการเดิม โดยตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch จะมีคุณสมบัติดังสมการที่ 3.30 กำหนดให้ค่า  $\omega_c = 0.25\pi$ ,  $BWF = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$  จะได้ตำแหน่งการวางโพล-ซีโรและค่า  $r_1, r_2, b_1$  และ  $b_2$  ดังตารางที่ 3.2 จากนั้นจะทำการสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพลตามสมการที่ 3.7 และสมการที่ 3.8 และใช้ค่า  $r_1, r_2$  จากตารางที่ 3.2 ซึ่งผลตอบสนองทางขนาดตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่สร้างด้วยหลักการเดิมและหลักการที่นำเสนอแสดงได้ดังภาพที่ 3.13 -

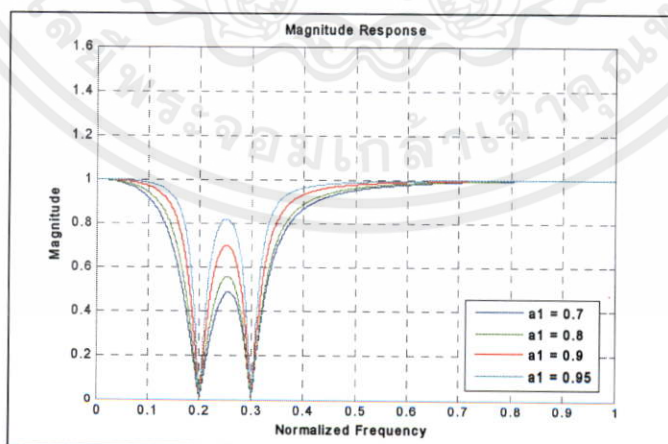
ภาพที่ 3.15 เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 ตำแหน่งของ Pole และค่า  $b_n, r_n$  ของ Notch filter 1 ,Notch filter 2

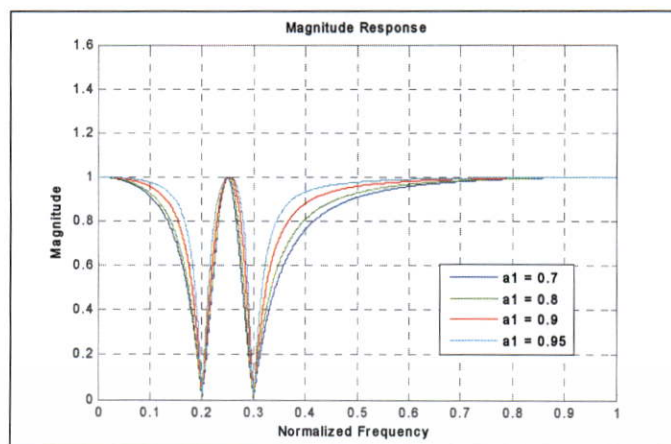
|      | Notch Filter 1 : $\omega_1 = 0.2\pi$ |       |       | Notch Filter 2 : $\omega_2 = 0.3\pi$ |       |       |
|------|--------------------------------------|-------|-------|--------------------------------------|-------|-------|
| BWF  | Pole                                 | $r_1$ | $b_1$ | Pole                                 | $r_2$ | $b_2$ |
| 0.7  | $0.619 \pm 0.542j$                   | 0.823 | 1.150 | $0.616 \pm 0.632j$                   | 0.883 | 0.664 |
| 0.8  | $0.664 \pm 0.540j$                   | 0.856 | 1.058 | $0.585 \pm 0.665j$                   | 0.886 | 0.744 |
| 0.9  | $0.714 \pm 0.546j$                   | 0.899 | 0.994 | $0.567 \pm 0.709j$                   | 0.908 | 0.838 |
| 0.95 | $0.745 \pm 0.554j$                   | 0.928 | 0.975 | $0.564 \pm 0.741j$                   | 0.931 | 0.975 |



ภาพที่ 3.13 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการเดิมก่อนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งโพลที่ค่า  $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$  และ  $0.95$



เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ  
 ภาพที่ 3.14 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังออกแบบตามหลักการเดิมหลังการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งโพลที่ค่าที่มีการนำไปใช้  
 $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$  และ  $0.95$



ภาพที่ 3.15 ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอที่ค่า  $\alpha_1 = 0.7, 0.8, 0.9$  และ  $0.95$

### 3.4 การออกแบบตัวกรองเชิงเลขด้วยโปรแกรม MATLAB

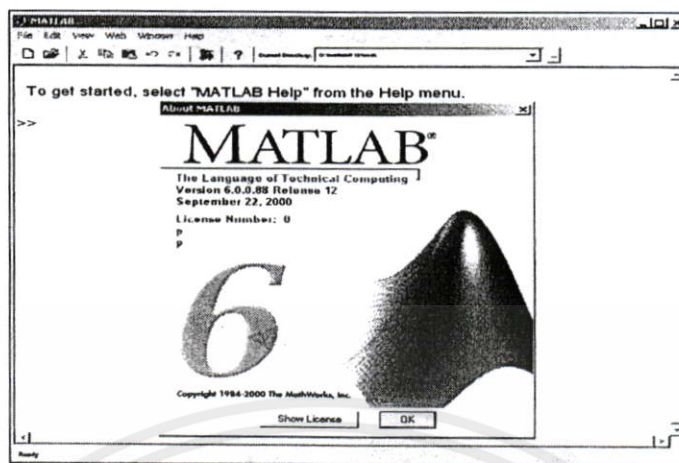
การออกแบบตัวกรองเชิงเลขนั้นไม่ว่าจะเป็นตัวกรองเชิงเลขแบบ IIR หรือ FIR เมื่อมีจำนวนลำดับสูงๆ จะมีความยุ่งยากมากและใช้เวลาในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์มากขึ้นและมีโอกาสที่จะผิดพลาดได้มาก ในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้ใช้โปรแกรม MATLAB มาช่วยในการหาสัมประสิทธิ์และจำลองผลการทำงาน

### 3.5 การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยโปรแกรม MATLAB

ในการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch นั้นจะมีความยุ่งยากกว่าการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Single notch โดยหลักการที่นำเสนอจะมีขั้นตอนการคำนวณค่อนข้างมาก ดังนั้นจึงได้มีการนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการออกแบบ โดยการออกแบบจะใช้โปรแกรม MATLAB และโปรแกรมที่เขียนขึ้นนี้จะใช้วิธีการหาดำแหน่งการวางโพลที่เหมาะสมที่สุด เพื่อจะควบคุมอัตราการขยายในช่วง Pass-band โดยผู้ใช้งานสามารถกำหนดพารามิเตอร์ในการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ได้ตามต้องการ จากนั้นโปรแกรมจะแสดงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่จะนำไปใช้กับโปรแกรมภาษาซีของตัวประมวลผลสัญญาณดิจิทัล TMS320C31 พร้อมกับแสดงผลการจำลองการทำงานออกมาในรูปแบบของกราฟผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude Response) และตำแหน่งโพล-ซีโร (Pole-zero plot) ขั้นตอนการออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอด้วยโปรแกรม MATLAB จะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

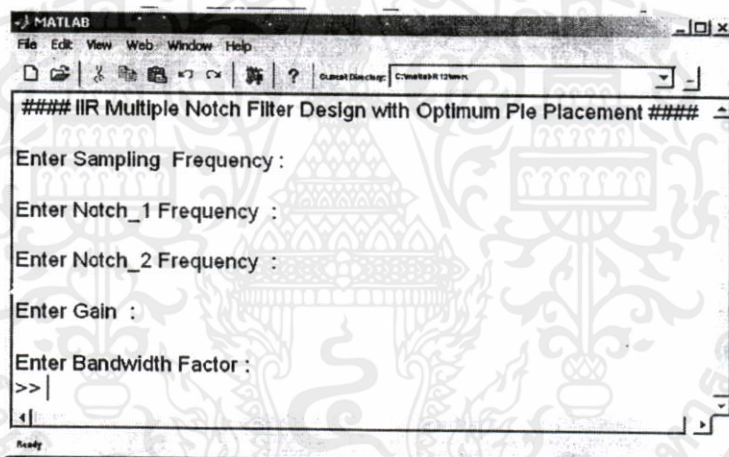
#### 1. เรียกโปรแกรม MATLAB ดังแสดงในภาพที่ 3.16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 3.16 โปรแกรม MATLAB

2. เรียกโปรแกรมที่จุดเริ่มต้น (Prompt) ของ MATLAB โปรแกรมจะแสดงข้อความดังภาพที่ 3.17



ภาพที่ 3.17 ข้อความหลังจากเรียกโปรแกรมให้ทำงาน

2. กำหนดค่าความถี่สุ่ม (Sampling frequency), Notch frequency, อัตราการขยาย (Pass-band Gain) และ Bandwidth factor เมื่อกำหนดครบและถูกต้องบนหน้าจอของ MATLAB จะแสดงค่าสัมประสิทธิ์และกราฟจำลองการทำงานขึ้นมาแสดงให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง การออกแบบตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วย MATLAB กำหนดให้  $\omega_1 = 1.5\text{KHz}$ ,  $\omega_2 = 2.5\text{KHz}$ ,  $\omega_c = 2\text{KHz}$   $BWF = 0.925$ , Gain = 1 และ Sampling frequency  $f_s = 10\text{KHz}$  เมื่อป้อนข้อกำหนดต่างๆ เข้าในโปรแกรม MATLAB โปรแกรมจะแสดงค่าสัมประสิทธิ์ดังภาพที่ 3.18 และกราฟจำลองการทำงานดังภาพที่ 3.19

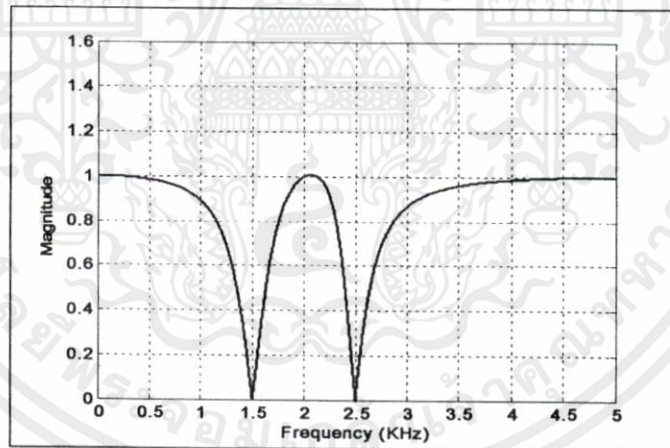
```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
##### A Design of IIR Multiple Notch Filter with Optimum Pole Position #####
Enter Sampling Frequency = 10000
notch_0 of frequency = 1500
notch_1 of frequency = 2500
Gain = 1
BWF = 0.925

a1 = -1.034922
a2 = 1.556410
a3 = -0.793473
a4 = 0.554240

b0 = 0.777663
b1 = -0.914197
b2 = 1.555325
b3 = -0.914197
b4 = 0.777663
>>
  
```

ภาพที่ 3.18 ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่ออกแบบด้วยโปรแกรม MATLAB



ภาพที่ 3.19 กราฟจำลองการทำงานของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่ออกแบบด้วยโปรแกรม MATLAB

จากภาพที่ 3.18 ค่าสัมประสิทธิ์  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3$  และ  $b_4$  เป็นค่าที่นำไปใช้กับภาษาซี ในการสร้างจริงด้วยตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

### ผลการทดลอง

#### 4.1 ผลการทดลองการเปรียบเทียบระหว่างการจำลองการทำงานด้วย MATLAB กับการสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31

ในการทดลองได้ทำการสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอด้วยโปรแกรม MATLAB และสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 ซึ่งแบ่งการทดลองออกเป็นขั้นตอนต่างๆดังนี้

1. ออกแบบค่าสัมประสิทธิ์ของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch และจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB
2. นำค่าสัมประสิทธิ์ที่ออกแบบได้มาสร้างตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31
3. เปรียบเทียบผลการออกแบบระหว่างการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB กับการสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31

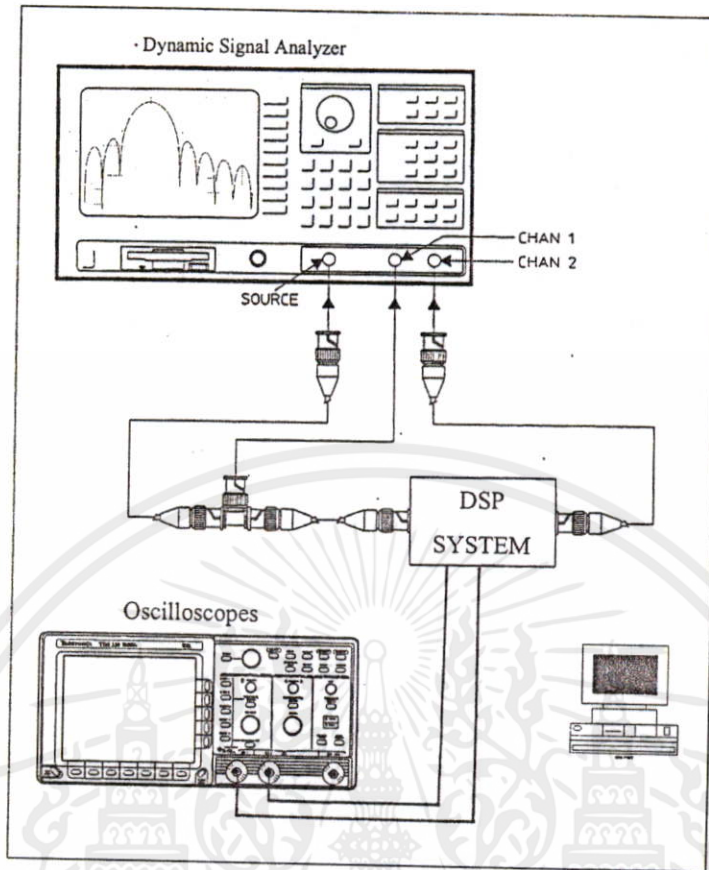
ในการทดลองระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลขที่ได้รับการออกแบบและสร้างขึ้นจะใช้เครื่องมือและอุปกรณ์สำหรับการทดลองดังต่อไปนี้

1. ออสซิลโลสโคป (Oscilloscopes)
2. ไดนามิกซิกแนลแอนาไลเซอร์ (Dynamic Signal Analyzer).
3. บอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31
4. แหล่งจ่ายไฟ (Power Supply)
5. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์

การทดลองจะต่อระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลขเข้ากับเครื่องมือและอุปกรณ์ต่างๆดังภาพที่

4.1 และภาพที่ 4.2 แสดงอุปกรณ์ทั้งหมดที่ใช้ในการทดลอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



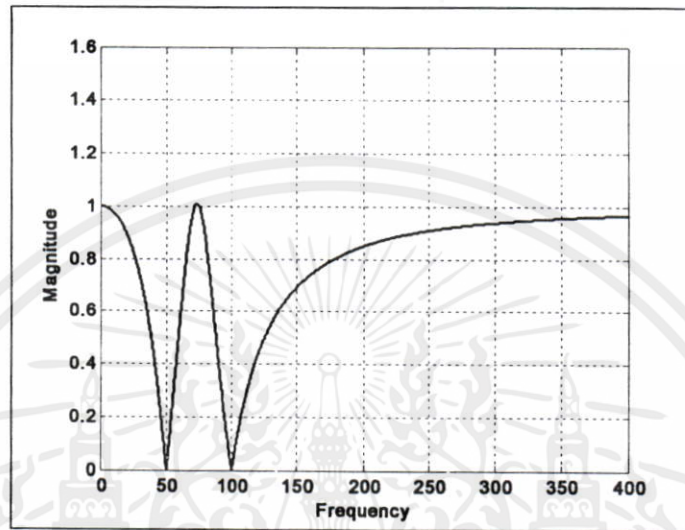
ภาพที่ 4.1 ไดอะแกรมการทดลองระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลข



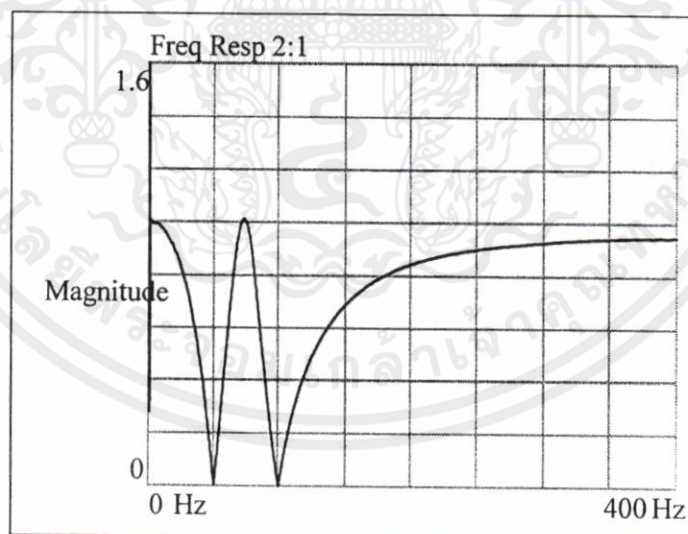
ภาพที่ 4.2 อุปกรณ์ทั้งหมดที่ใช้ทดลองระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ห้ามนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งการนำเอกสารนี้ไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตถือว่าผิดกฎหมาย การทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลการทดลองที่ 1 การเปรียบเทียบระหว่างการจำลองการทำงานด้วย MATLAB กับการสร้างจริงด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 กำหนดคุณสมบัติของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ดังนี้  $\omega_1 = 50\text{Hz}$  ,  $\omega_2 = 100\text{Hz}$  ,  $\omega_c = 75\text{Hz}$  , Gain = 1 และ  $BWF = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99$  ตามลำดับโดยผลตอบสนองดังภาพที่ 4.3a – 4.8b

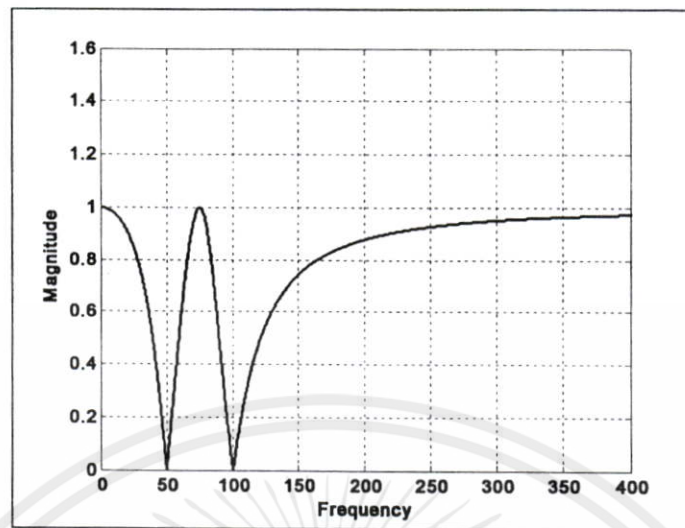


ภาพที่ 4.3a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่  $BWF = 0.6$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

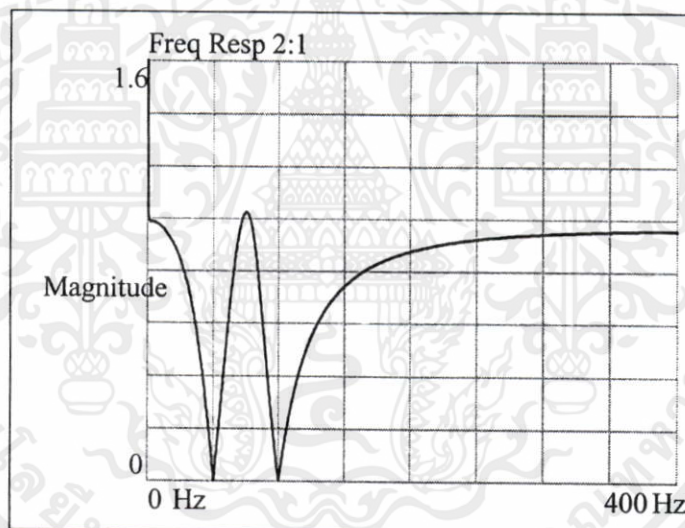


ภาพที่ 4.3b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่  $BWF = 0.6$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

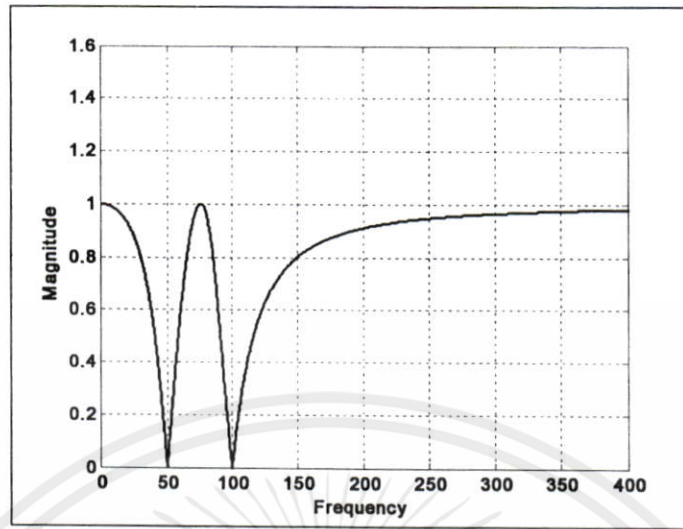


ภาพที่ 4.4a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่  $BWF = 0.7$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

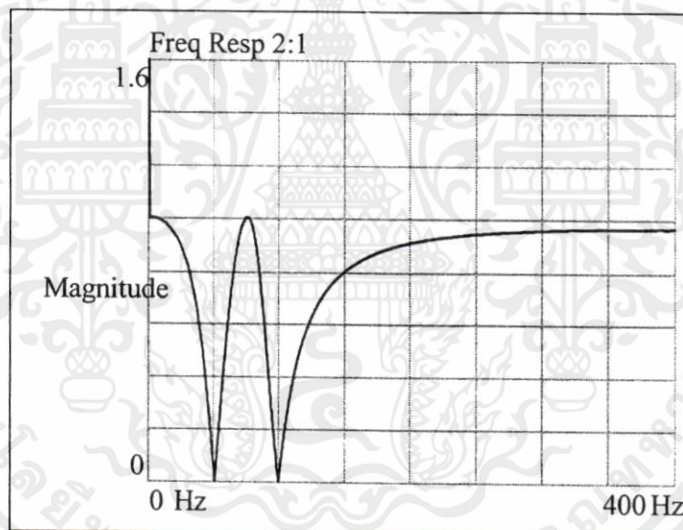


ภาพที่ 4.4b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่  $BWF = 0.7$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

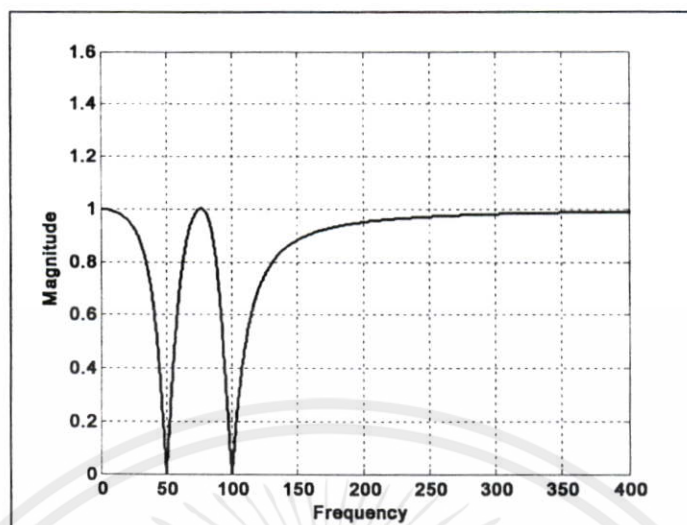


ภาพที่ 4.5a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.8$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

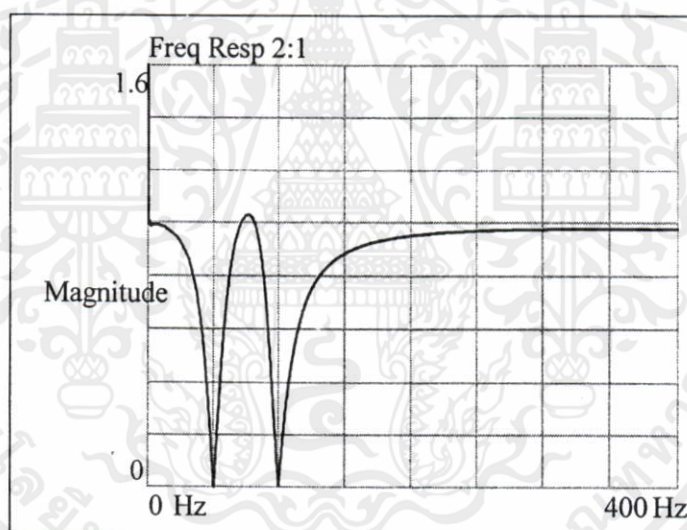


ภาพที่ 4.5b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.8$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกชิกแนลอะนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

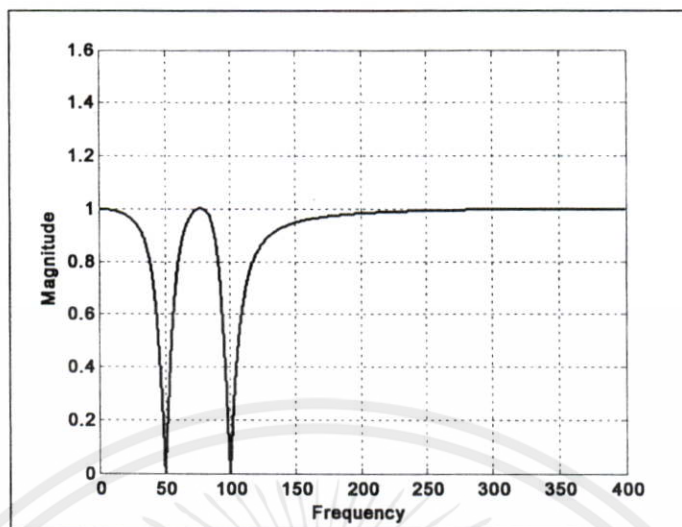


ภาพที่ 4.6a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.9$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB



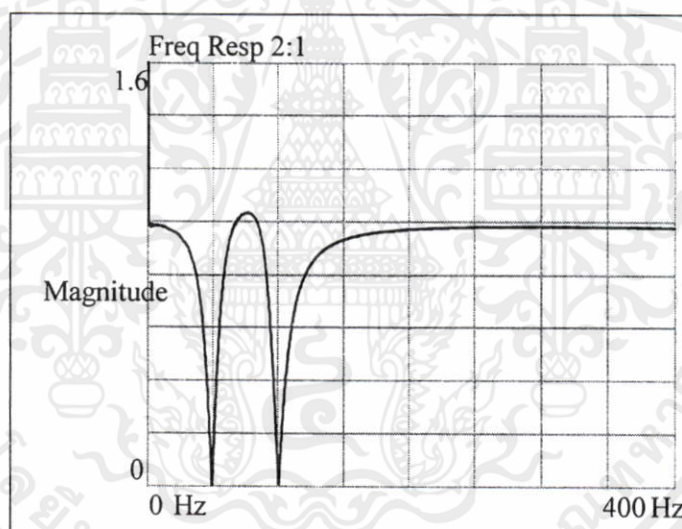
ภาพที่ 4.6b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.9$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 4.7a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

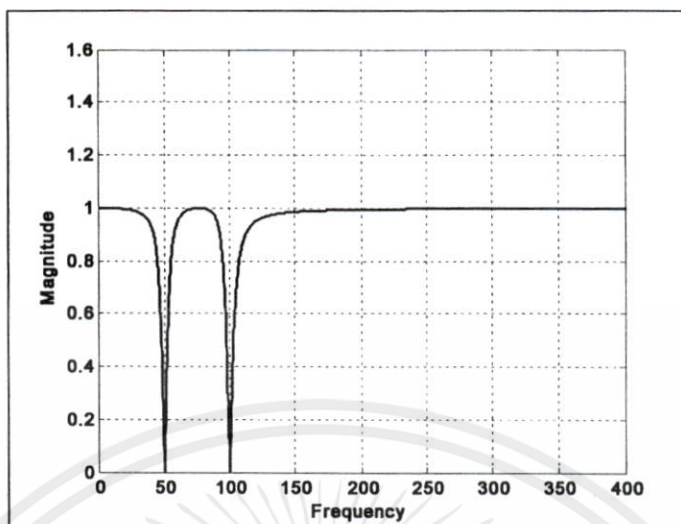
ที่  $BWF = 0.95$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB



ภาพที่ 4.7b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

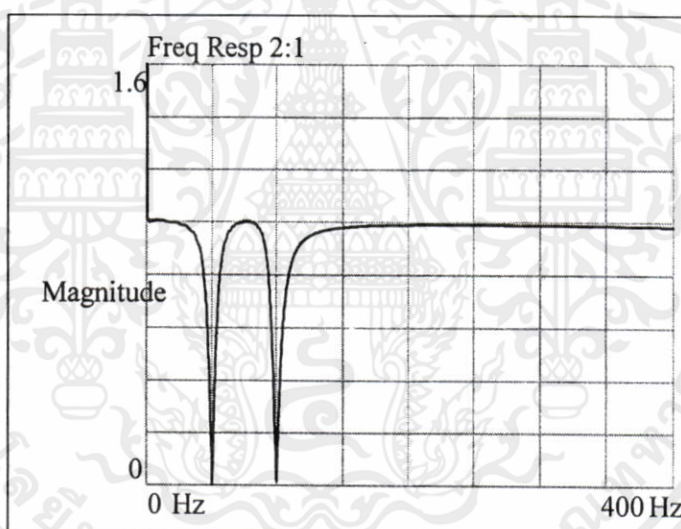
ที่  $BWF = 0.95$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิคซิกแนลนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 4.8a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

ที่  $BWF = 0.99$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

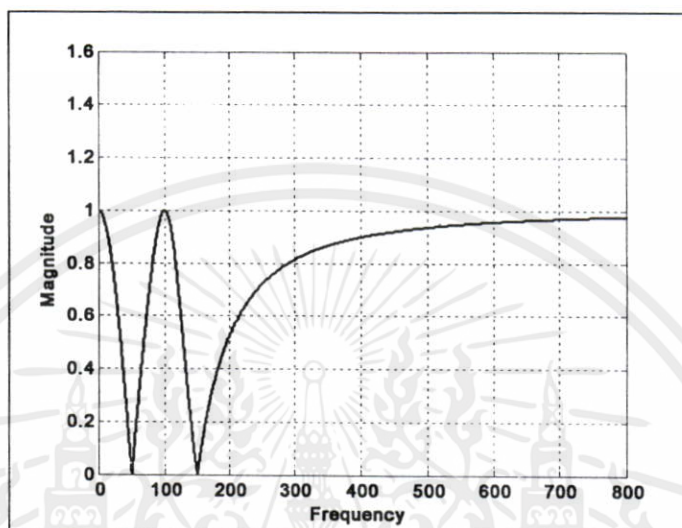


ภาพที่ 4.8b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

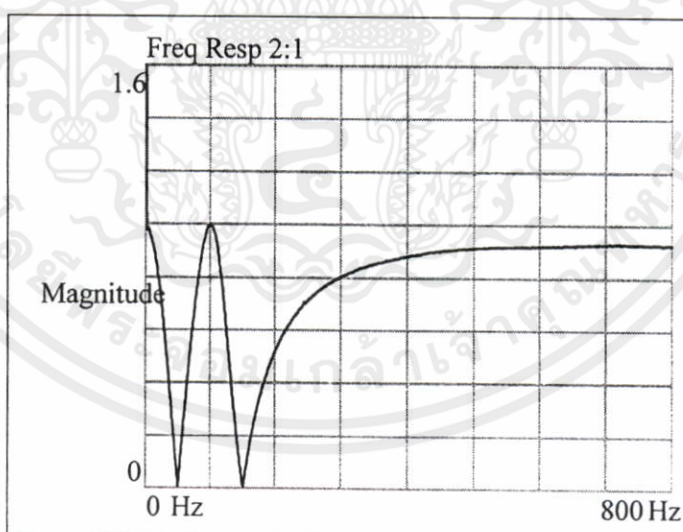
ที่  $BWF = 0.99$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลการทดลองที่ 2 การเปรียบเทียบระหว่างการจำลองการทำงานด้วย MATLAB กับการสร้างจริง ด้วยบอร์ดประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 กำหนดคุณสมบัติของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ดังนี้  $\omega_1 = 50\text{Hz}$  ,  $\omega_2 = 150\text{Hz}$  ,  $\omega_c = 100\text{Hz}$  , Gain = 1 และ  $BWF = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99$  ตามลำดับ โดยผลตอบสนองดังภาพที่ 4.9a – 4.14b

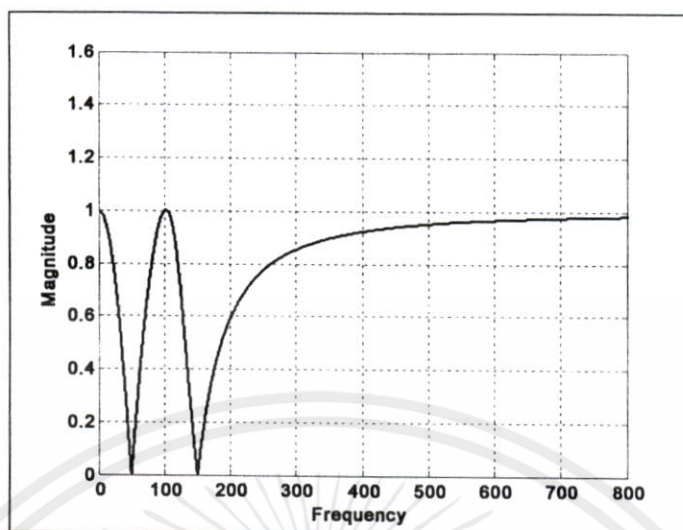


ภาพที่ 4.9a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่  $BWF = 0.6$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

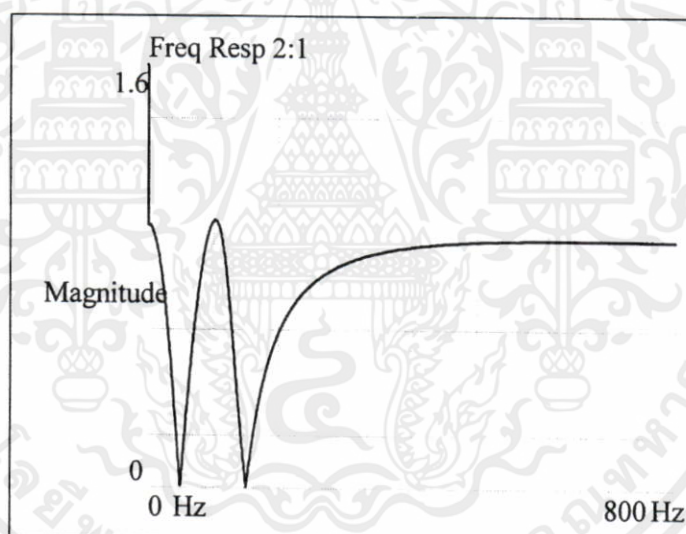


ภาพที่ 4.9b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่  $BWF = 0.6$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

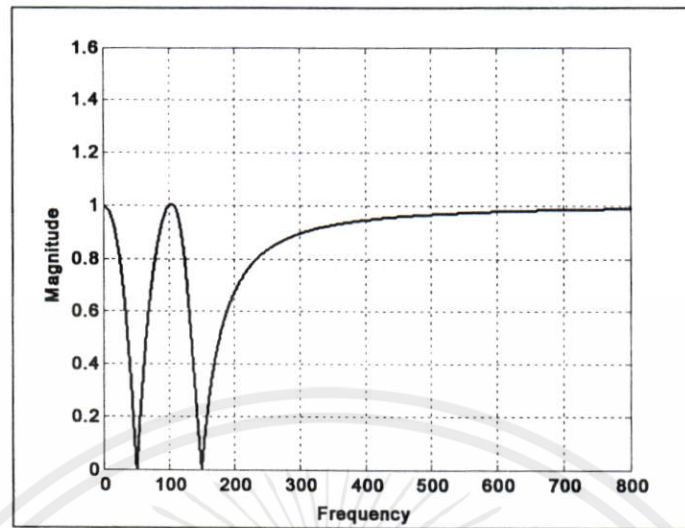


ภาพที่ 4.10a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.7$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

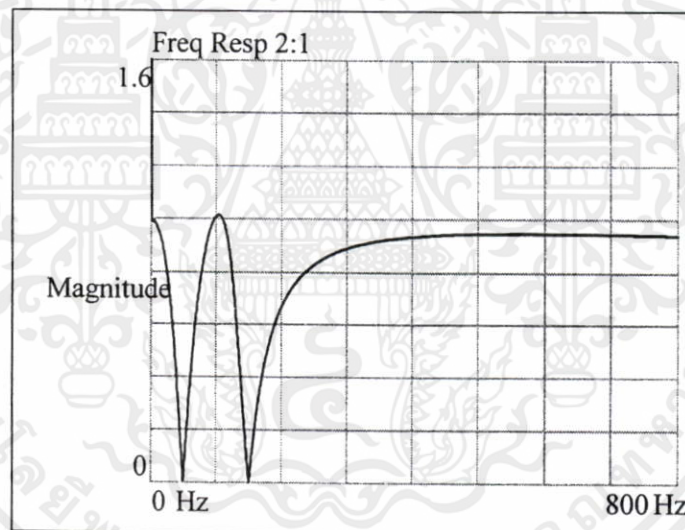


ภาพที่ 4.10b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.7$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

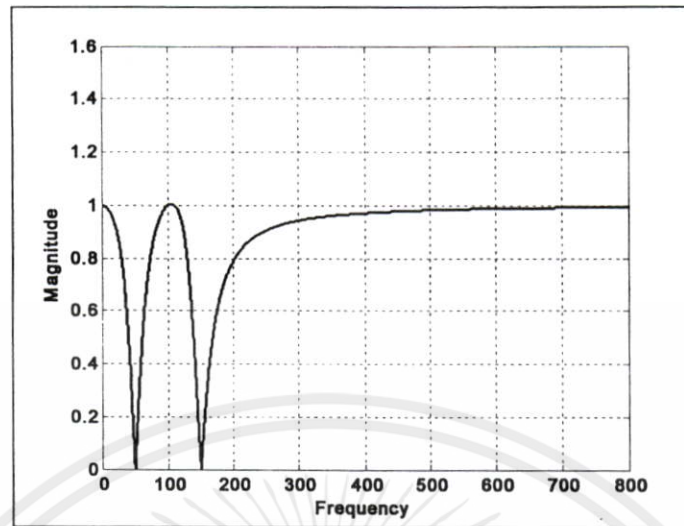


ภาพที่ 4.11a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.8$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

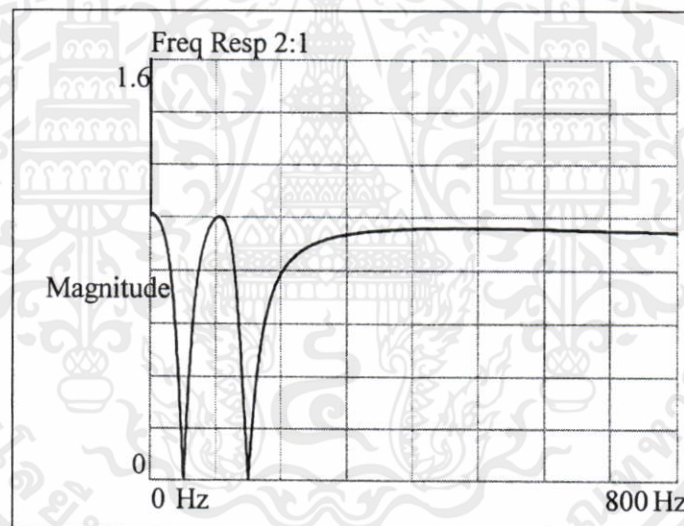


ภาพที่ 4.11b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.8$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

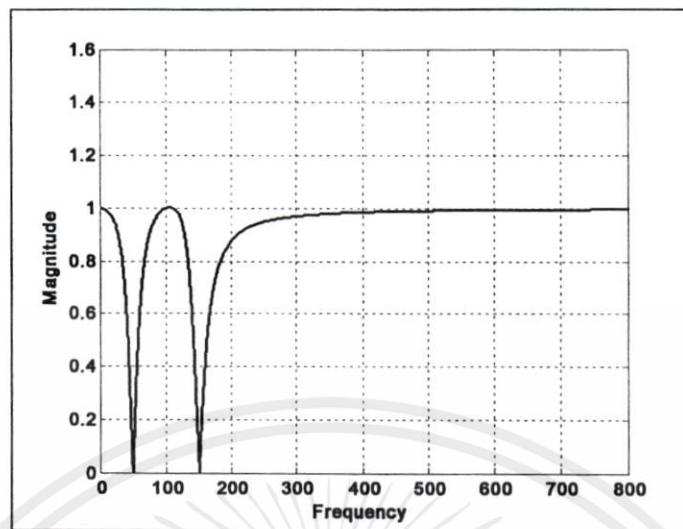


ภาพที่ 4.12a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.9$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

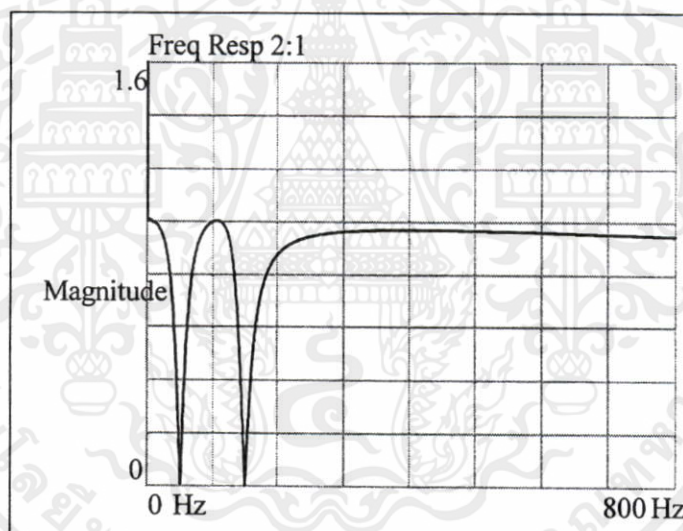


ภาพที่ 4.12b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.9$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลอะนาไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

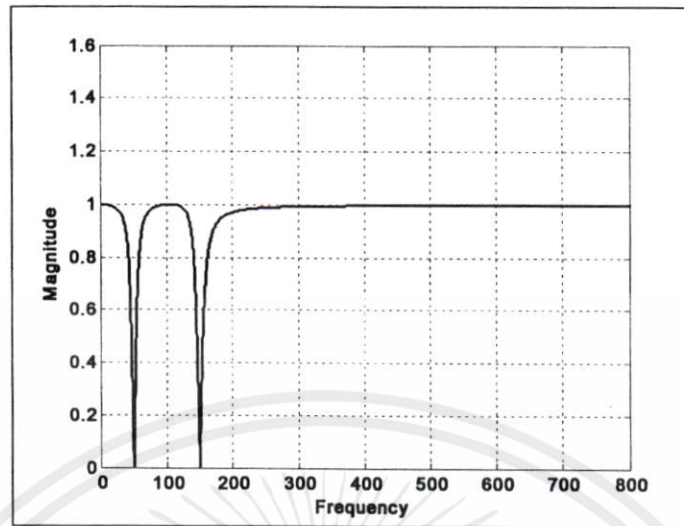


ภาพที่ 4.13a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.95$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

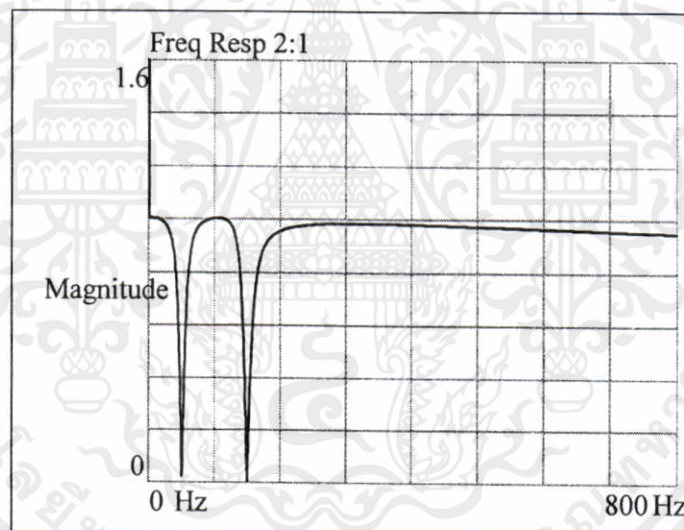


ภาพที่ 4.13b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.95$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลไลเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 4.14a ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.99$  จำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

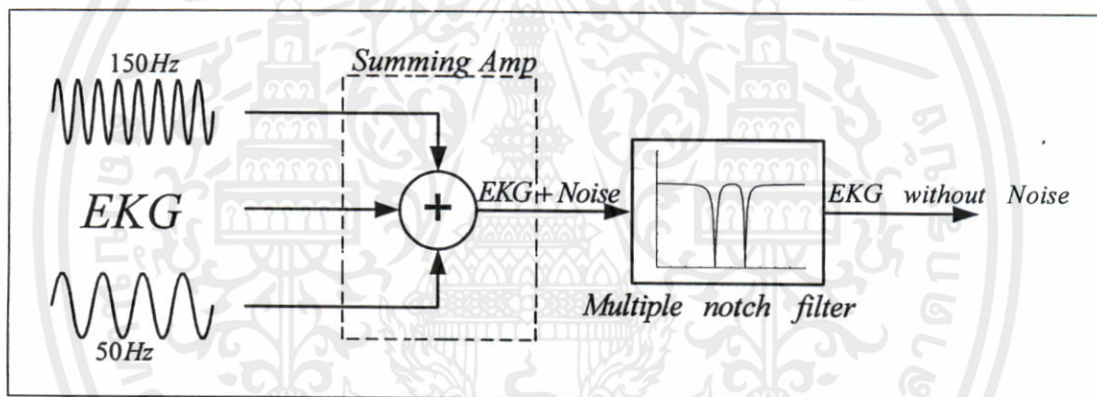


ภาพที่ 4.14b ผลตอบสนองทางขนาดของตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ที่  $BWF = 0.99$  จากการวัดจริงด้วยเครื่องไดนามิกซิกแนลไฮเซอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.2 ผลการทดลองการเปรียบเทียบระหว่างหลักการเดิมกับหลักการที่นำเสนอโดยการประยุกต์ในการลดทอนสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับคลื่นไฟฟ้าหัวใจ

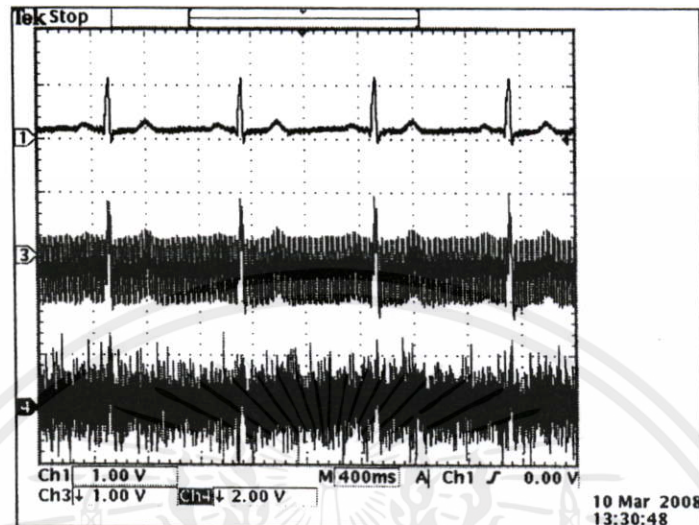
ในหัวข้อนี้จะทดลองนำตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่สร้างขึ้นตามหลักการที่นำเสนอในหัวข้อที่ 4.1 (ผลการทดลองที่ 2) มาเปรียบเทียบกับหลักการเดิมในการลดทอนสัญญาณจาก Power line AC ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (Electrocardiogram : EKG) โดยกำหนดให้สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจมีสัญญาณจาก Power line AC ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ปะปนอยู่ ผลการทดลองแสดงดังภาพที่ 4.16a ถึงภาพที่ 4.21c และจากภาพที่ 4.16a Upper trace แสดงสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจที่ไม่มีการปะปนของสัญญาณ Sine, Middle trace แสดงสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจที่มีการปะปนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ขนาด  $0.3 V_{pp}$  และ Lower trace แสดงผลการใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch มาลดทอนสัญญาณ Sine ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ โดยมีไดอะแกรมการทำงานดังภาพที่ 4.15



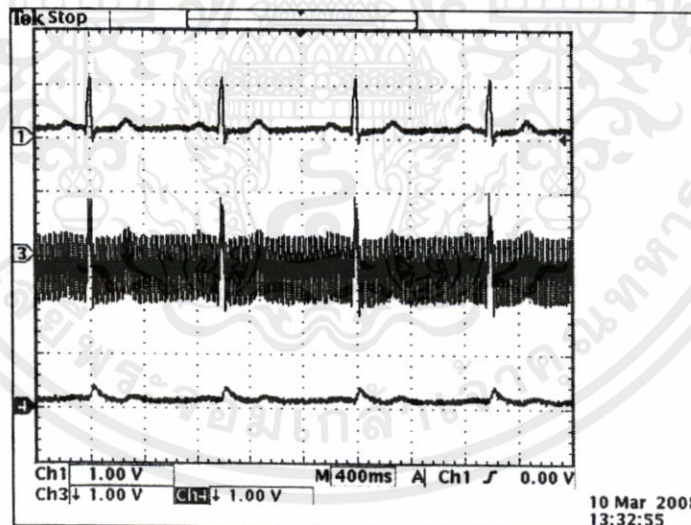
ภาพที่ 4.15 ไดอะแกรมการลดทอนสัญญาณ Sine 50Hz และ 150Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่  $BWF = 0.6$  ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจดังภาพที่ 4.16a – 4.16c

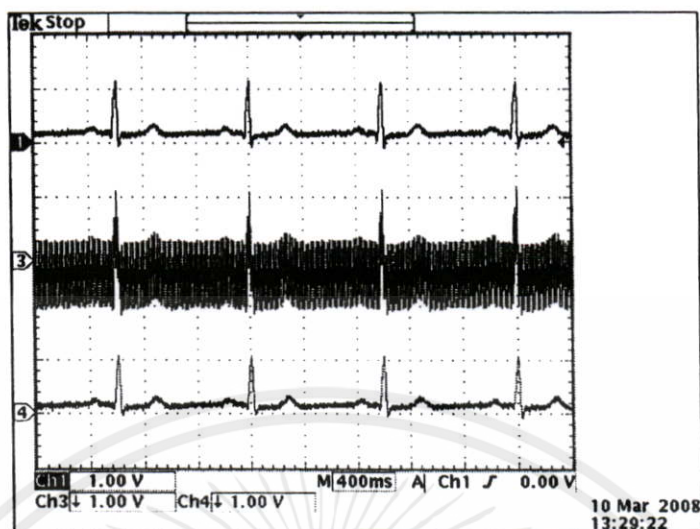


ภาพที่ 4.16a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล



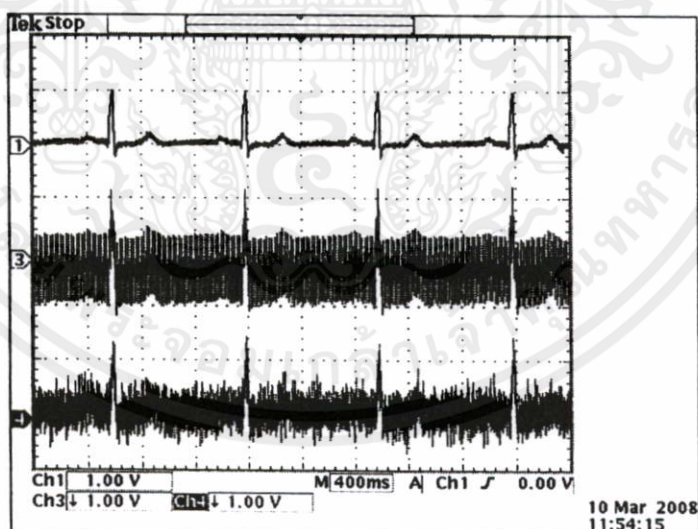
ภาพที่ 4.16b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



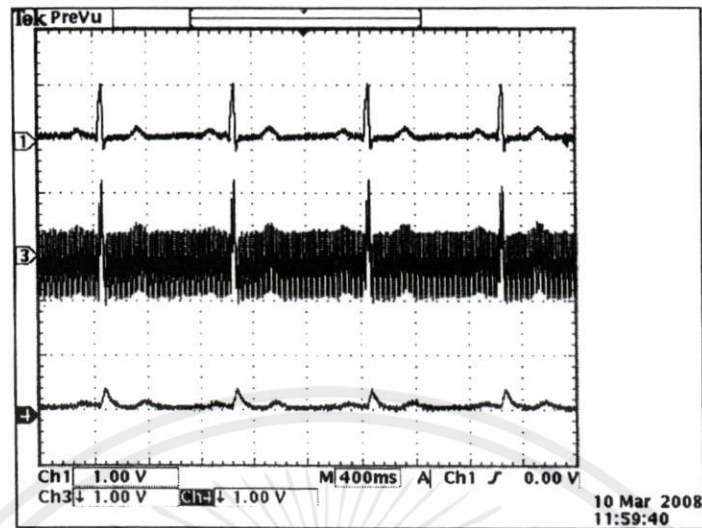
ภาพที่ 4.16c ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับ  
สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ตามหลักการที่นำเสนอ

ที่  $BWF = 0.7$  ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณ  
คลื่นไฟฟ้าหัวใจดังภาพที่ 4.17a – 4.17c

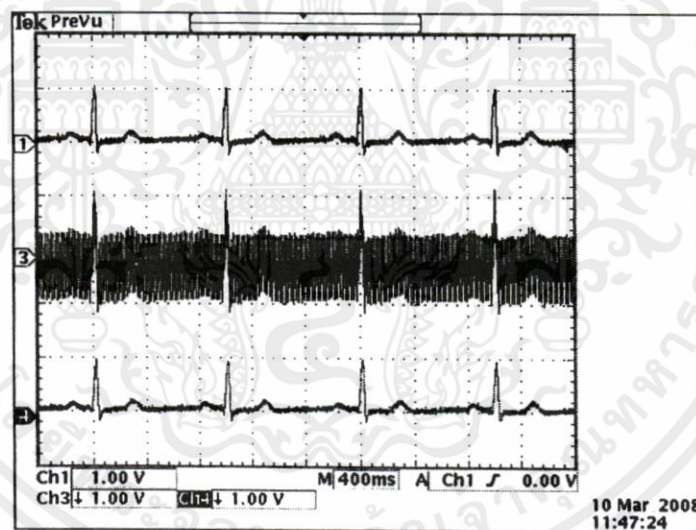


ภาพที่ 4.17a ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับ  
สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch  
ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้เพื่อการเรียนการสอนเท่านั้น มิใช่เพื่อเผยแพร่ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



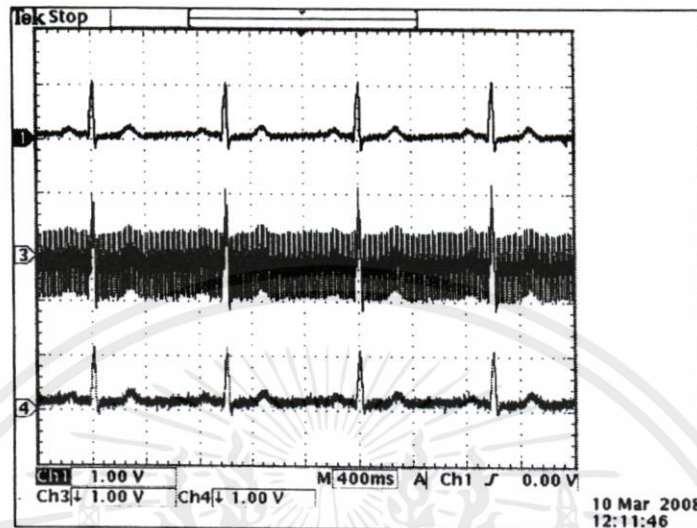
ภาพที่ 4.17b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล



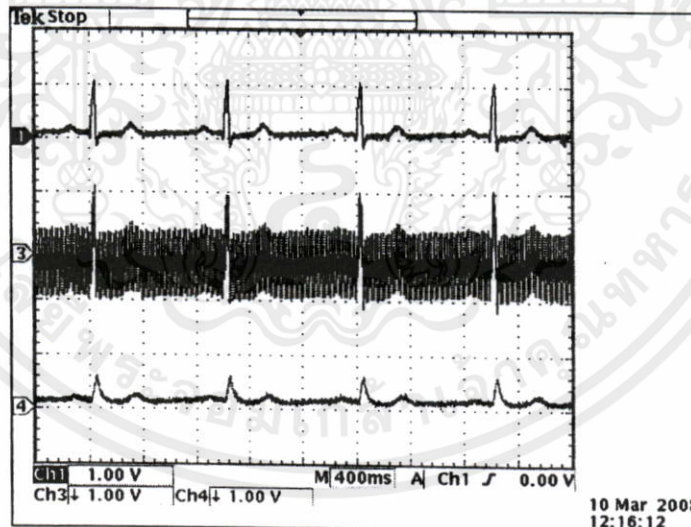
ภาพที่ 4.17c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่  $BWF = 0.8$  ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจดังภาพที่ 4.18a – 4.18c

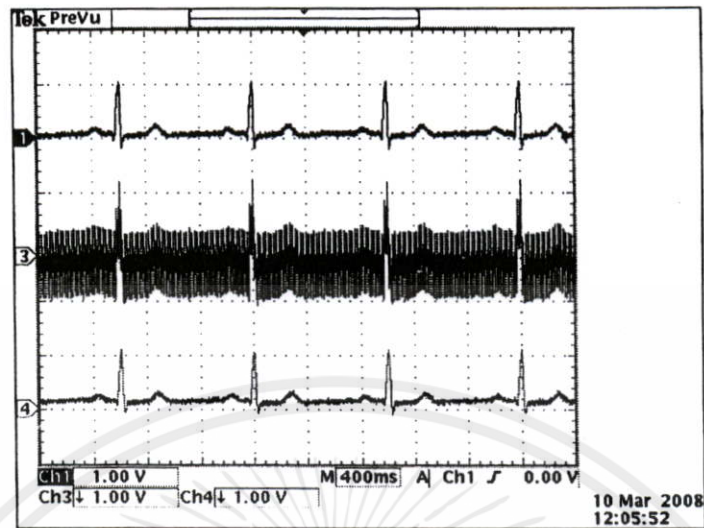


ภาพที่ 4.18a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล



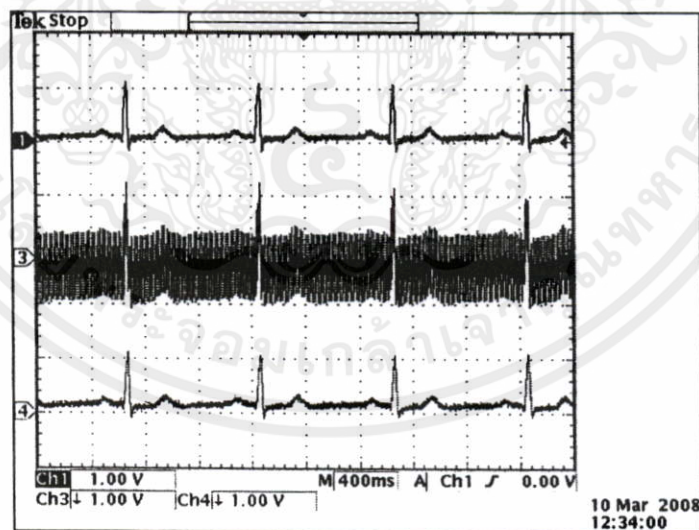
ภาพที่ 4.18b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



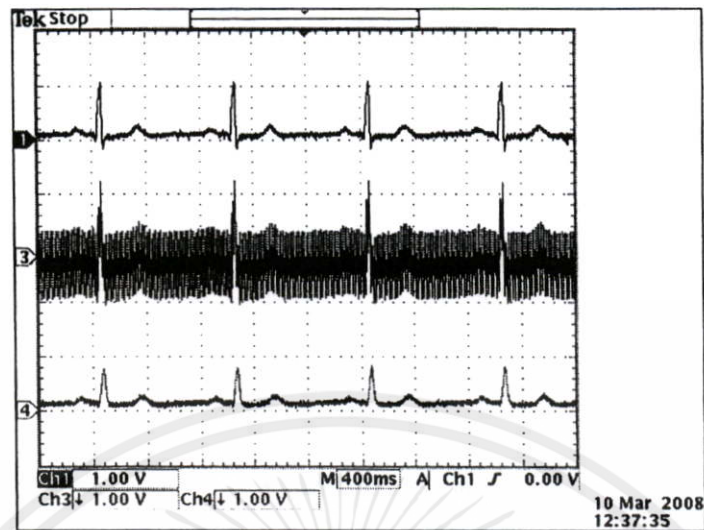
ภาพที่ 4.18c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ

ที่  $BWF = 0.9$  ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจดังภาพที่ 4.19a – 4.19c

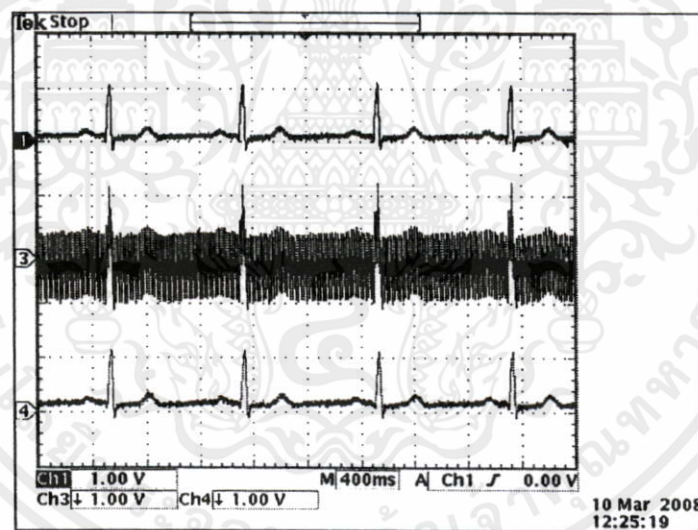


ภาพที่ 4.19a ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ใช้ภายในเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



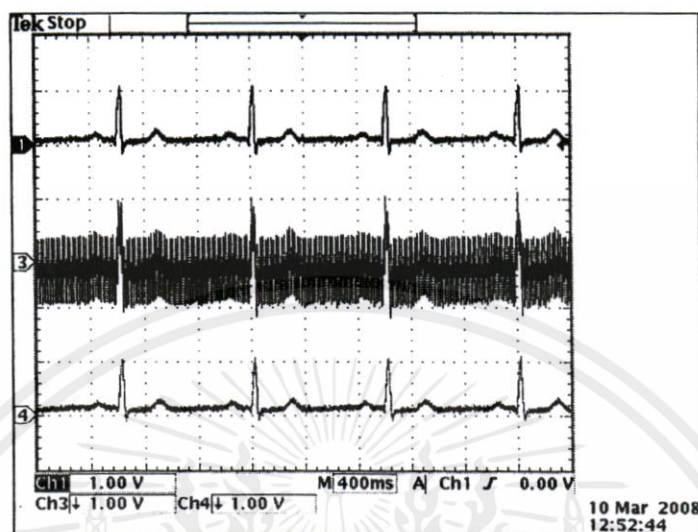
ภาพที่ 4.19b ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล



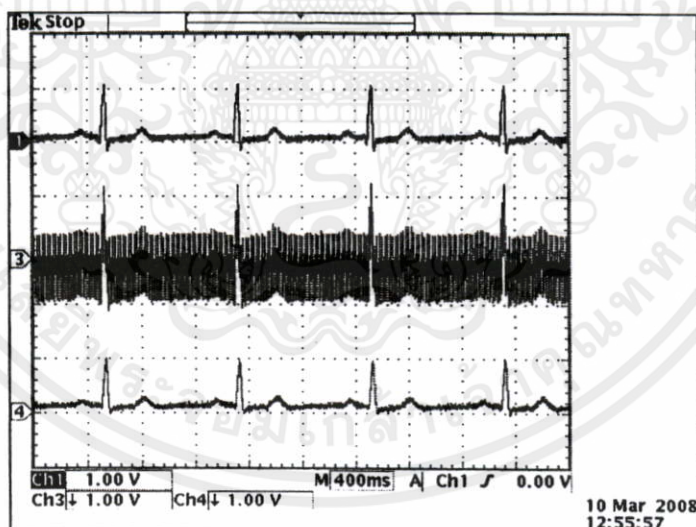
ภาพที่ 4.19c ผลการลดทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่  $BWF = 0.95$  ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจดังภาพที่ 4.20a – 4.20c

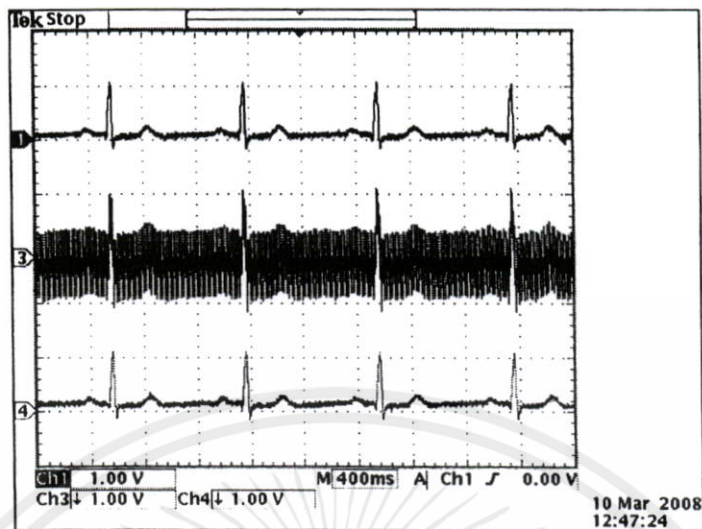


ภาพที่ 4.20a ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล



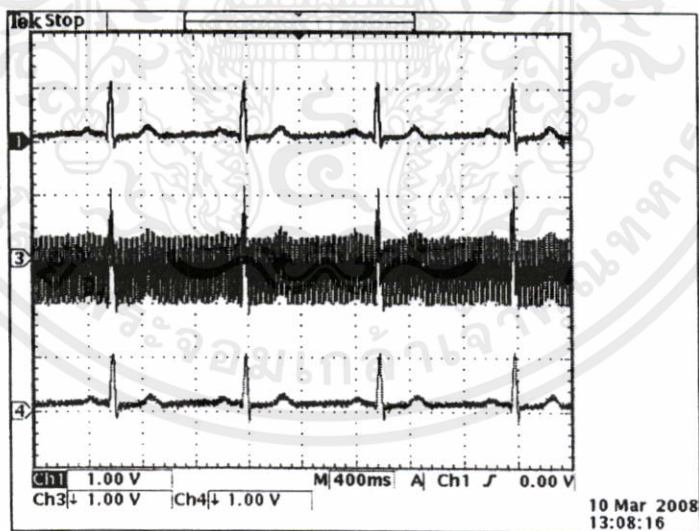
ภาพที่ 4.20b ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



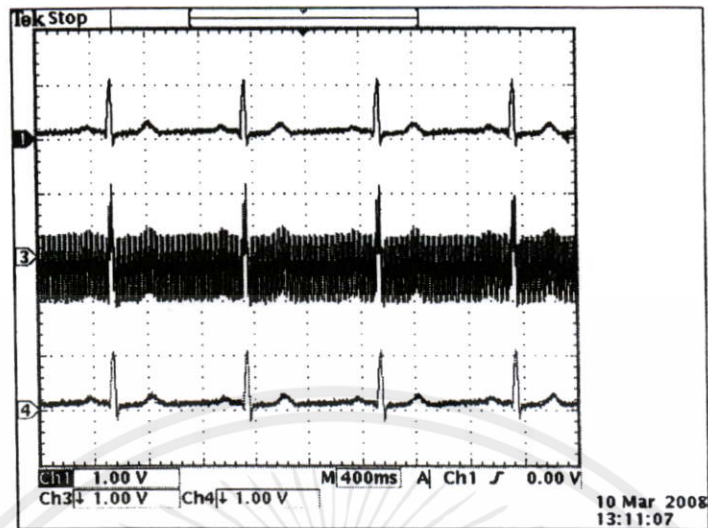
ภาพที่ 4.20c ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ

ที่  $BWF = 0.99$  ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจดังภาพที่ 4.21a – 4.21c

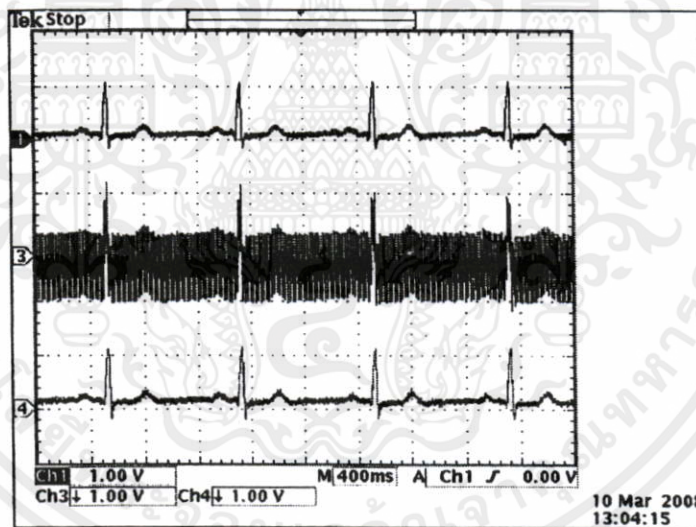


ภาพที่ 4.21a ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมก่อนเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่อนุญาตให้เผยแพร่ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 4.21b ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการเดิมหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล



ภาพที่ 4.21c ผลการลคทอนสัญญาณ Sine ความถี่ 50 Hz และ 150 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจโดยใช้ตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ตามหลักการที่นำเสนอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

จากการทดลองพบว่าตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ที่ถูกสร้างขึ้นตามหลักการที่นำเสนอ นั้นสามารถควบคุมอัตราการขยายของผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude response) ที่ความถี่ DC ความถี่ที่อยู่ระหว่าง Notch frequency  $\omega_c$  และความถี่  $\pi$  ให้มีขนาดตามที่ต้องการได้ ซึ่งจะให้ผลที่ดีกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับหลักการเดิม นั่นก็หมายความว่าขณะนี้เราสามารถหาตำแหน่งการวางโพลของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch ได้อย่างแม่นยำ และผลการลดทอนสัญญาณรบกวนที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจดังภาพที่ 4.16a – 4.21c จะเห็นได้ว่าหลักการเดิมทั้งก่อนและหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล จะให้สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจที่ผิดเพี้ยนไปจากสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจต้นแบบที่ไม่มีสัญญาณรบกวนเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะที่ค่าของ  $BWF$  มีค่าน้อยๆ ซึ่งส่งผลให้ผลตอบสนองทางขนาดไม่สมมาตรกันและยังไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายได้ แต่หากเพิ่มค่าของ  $BWF$  ให้มีค่ามากขึ้นเข้าใกล้หนึ่งจะทำให้ตำแหน่งของโพลเลื่อนเข้าใกล้เส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยบนระนาบแซด เป็นผลให้สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจที่ได้ผิดเพี้ยนน้อยลง ส่วนหลักการที่นำเสนอไม่ว่า  $BWF$  จะมีค่าเท่าใดก็ตามจะให้สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจที่ใกล้เคียงกับคลื่นไฟฟ้าหัวใจต้นแบบที่ไม่มีสัญญาณรบกวน เนื่องจากหลักการที่นำเสนอสามารถหาตำแหน่งการวางโพลที่เหมาะสมกว่าหลักการเดิมทั้งก่อนและหลังเปลี่ยนแปลงตำแหน่งการวางโพล จึงสามารถควบคุมอัตราการขยายระหว่าง Notch frequency ได้ จากผลการทดลองที่ผ่านมาสรุปได้ว่าตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการที่นำเสนอสามารถประยุกต์ใช้งานในการลดทอนสัญญาณรบกวนได้มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวกรองเชิงเลข IIR แบบ Multiple notch ที่ออกแบบตามหลักการเดิม แต่อย่างไรก็ตาม หลักการที่นำเสนอนี้ก็ยังมีข้อจำกัดอยู่บางประการคือ ถ้ามีการเพิ่มจำนวน Notch frequency ก็จะทำให้ขั้นตอนการหาตำแหน่งการวางโพลของตัวกรองเชิงเลขแบบ Multiple notch มีความซับซ้อนมากขึ้น

ดังนั้นแนวทางในการพัฒนาต่อก็คือ หาวิธีทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนน้อยและแม่นยำ มาใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งโพลเพื่อที่จะทำให้การเพิ่มจำนวน Notch frequency สามารถกระทำได้ง่ายขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Craig Marven, Gillian Ewers, "A simple approach to digital signal processing" John wiley & sons, 1996.
- [2] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "IIR Multiple Notch Filter Design Based on All-pass Filter," IEEE Trans. Circuit and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol.44 no.2, pp.133-136, February 1997.
- [3] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "Stable IIR Notch Filter Design with Optimal Pole Placement," IEEE Trans. Signal Processing, vol.49, no.11, pp. 2673-2681, November 2001.
- [4] S.Yimman, W.Hinjit, S.Sriboonsong, M.Puangpool, K.Dejhan "IIR Notch Filter Design with Modified Pole-zero Placement Algorithm," The IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT 2003), Darmstadt, Germany, December 2003.
- [5] S.Yimman, W.Hinjit, W.Ussawongaraya, P.Thoopluang, K.Dejhan "Design and Implementation of IIR Multiple Notch Filter with Modified Pole-zero Placement Algorithm" International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2003), Gyeongju, Korea, October 2003.
- [6] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, "Digital Signal Processing Principle, Algorithms, and Applications," Prentice Hall, 1996.
- [7] S. K. Mitra, "Digital Signal Processing, A Computer-Based Approach," McGraw-Hill, 2001.
- [8] S. J. Orfanidis, "Introduction to Signal Processing," Prentice Hall, 1995.
- [9] TMS320C3x User's Guide, Texas Instruments Inc., 1994.
- [10] TMS320C3x DSP Starter Kit User's Guide, Texas Instruments Inc., 1996.
- [11] TMS320C3x/4x Optimizing C Compiler User's Guide, Texas Instruments Inc., 1998.
- [12] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, John R. Buck, "Discrete-Time Signal Processing Second Edition" Prentice Hall International, INC 1996.
- [13] Emmanuel C. Ifeakor, Barrie W. Jervis, "Digital Signal Processing A Practical Approach" Addison-Wesley 1993.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

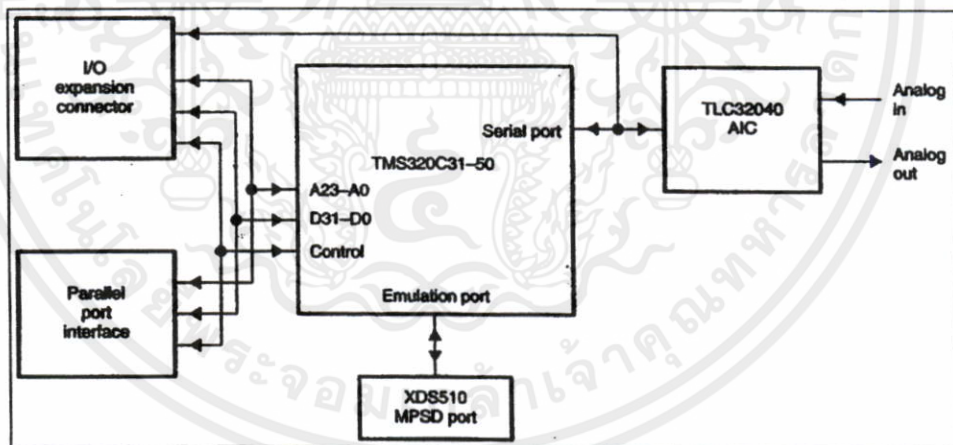


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



- Host Interface Logic จะใช้ PLA 22V10Z และ 74ACT245 ควบคุมการสื่อสารระหว่างบอร์ด DSK กับ Host ของคอมพิวเตอร์
- ออสซิลเลเตอร์ บนบอร์ด TMS320C31 DSK จะใช้สัญญาณนาฬิกาขนาด 50 MHz เพื่อป้อนให้ชิป TMS320C31
- RCA Jack จะทำหน้าที่รับสัญญาณ Analog Input และส่งสัญญาณ Analog Output ของบอร์ด TMS320C31 DSK โดยจะต่ออยู่กับขา I/O ของชิป TLC32040
- ชิป TLC32040 จะทำหน้าที่เป็น A/D และ D/A ของบอร์ด TMS320C31 DSK
- ชิป TMS320C31 เป็นตัวประมวลผลขนาด 32 บิต แบบจุดทศนิยมลอย (Floating Point)
- Voltage Regulators ของบอร์ด DSK สามารถใช้ไฟ 7-12 Vdc หรือ 6-9 Vac โดยไฟ DC และ AC จะต้องผ่าน IC Regulator เบอร์ LM7805 และ LM7905 ซึ่งจะได้อไฟ DC +5V และ -5V ตามลำดับ ไฟ DC ที่ได้จะใช้เลี้ยงอุปกรณ์ต่างๆภายในบอร์ดตลอดเวลาที่บอร์ดยังทำงานอยู่
- XDS Emulator Port เป็น Header ขนาด 12 Pin (JP1) ใช้สำหรับการ Upgrade โปรแกรม XDS debugger ในอนาคต

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถแสดงเป็นรูปบล็อกไดอะแกรมได้ ดังรูปภาคผนวกที่ 2



รูปภาคผนวกที่ ก.2 บล็อกไดอะแกรมของบอร์ด TMS320C31 DSP Starter Kit

## 2. คุณสมบัติของบอร์ด TMS320C31 DSP STARTER KIT

- ใช้ชิป TMS320C31 เป็นตัวประมวลผลขนาด 32 บิต แบบ Floating-Point
- ใช้เวลาในการประมวลผลคำสั่ง 40ns ต่อ 1 คำสั่ง หรือ 50 MFLOP และ 25 MIPS

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์หรือการสงวนสิทธิ์ในเอกสารที่เผยแพร่โดยไม่อนุญาตให้ผู้อื่นใช้ซ้ำหรือเผยแพร่ซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีลิขสิทธิ์ในเนื้อหาและข้อมูลอื่นที่เกี่ยวข้องเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

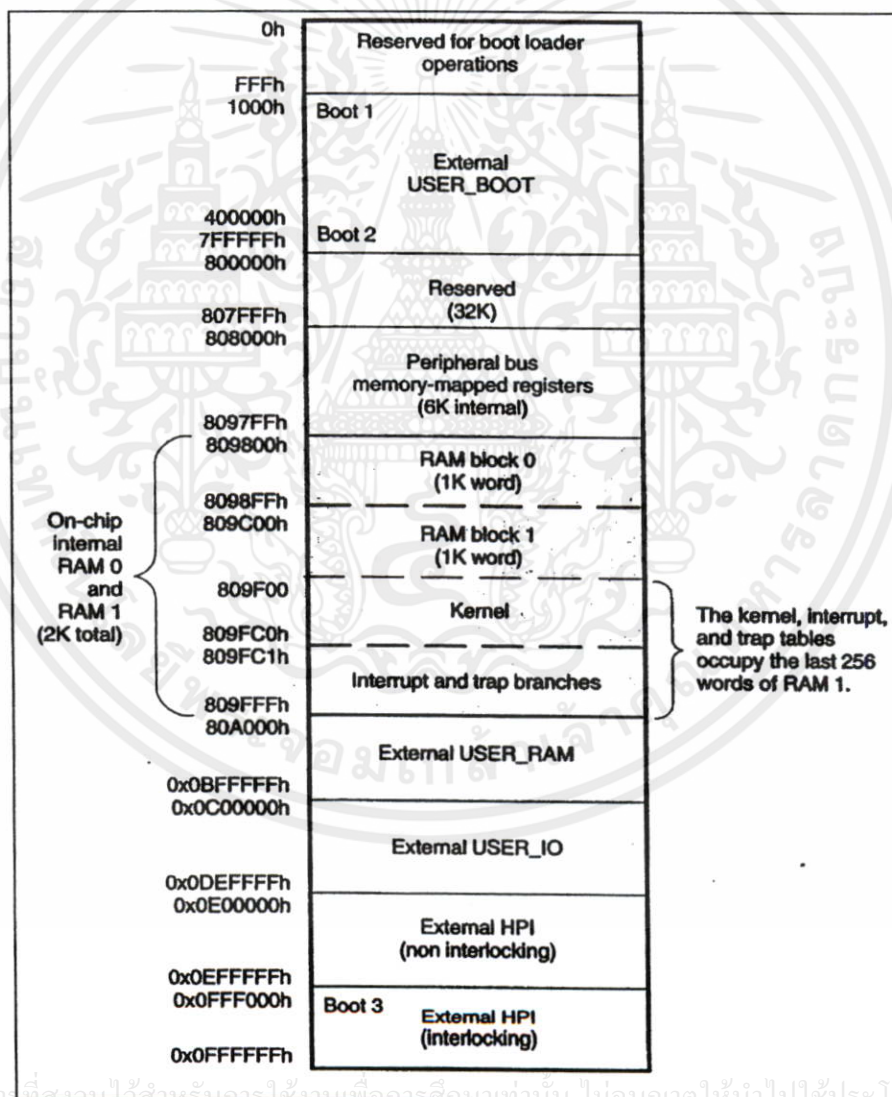
MFLOP : Million Floating-point Intention Per Second

MIPS : Million Intention Per Second

- บอร์ด TMS320C31 DSK สามารถสื่อสารกับคอมพิวเตอร์ ได้โดยใช้พอร์ตขนานของพรีนเตอร์หรือใช้ Host ของคอมพิวเตอร์
- ใช้ชิป TLC32040 ขนาด 14 บิต อัตราการสุ่มสัญญาณ 20,000 ครั้งต่อวินาที
- ใช้ RCA Jack เป็น Jack มาตรฐานสำหรับการต่อสายสัญญาณ Analog Input และ Analog Output

### 3. การจัดหน่วยความจำบนบอร์ด TMS320C31 DSP STARTER KIT

บอร์ด TMS320C31 DSK ได้จัดแบ่งหน่วยความจำให้อยู่ในโหมด Microcomputer/Boot Loader ดังรูปภาคผนวกที่ 3



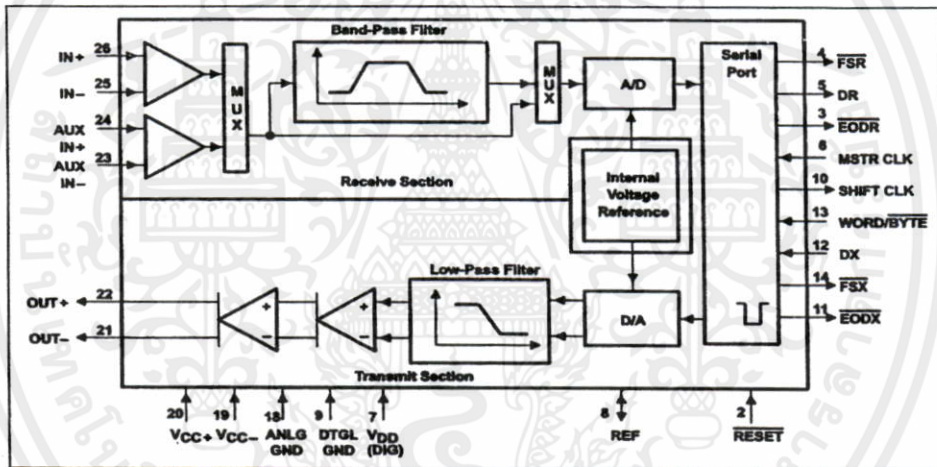
รูปภาคผนวกที่ ก.3 การจัดแบ่งหน่วยความจำในโหมด Microcomputer/Boot Loader ของบอร์ด TMS320C31 DSP Starter Kit

4. วงจรอินเทอร์เฟซสัญญาณอนาล็อก TLC32040

TLC32040 เป็นชิป Analog Interface Circuit (AIC) ที่ใช้เชื่อมต่อกับชิป TMS320C31 ในการทำงานประมวลผลด้าน DSP โดยมีลักษณะดังนี้คือ

- ใช้เทคโนโลยีการผลิต Advanced LinCMOS
- ความละเอียดของ ADC และ DAC เป็น 14 บิต
- สามารถเปลี่ยนอัตราการสุ่มสัญญาณของ ADC และ DAC ได้ถึง 20,000 ครั้ง/วินาที
- มี Switched Capacitor Antialiasing Input Filter และ Output Reconstruction Filter
- มีพอร์ทอนุกรมสำหรับติดต่อโดยตรงกับ TMS320C11, TMS320C17, TMS320C20, TMS320C25 Digital Signal Processing
- สามารถปรับอัตราการแปลงของ ADC และ DAC ได้โดยใช้โปรแกรมควบคุม

ฟังก์ชัน ไคอะแกรม ดังรูปภาคผนวกที่ 4



รูปภาคผนวกที่ ก.4 ฟังก์ชัน ไคอะแกรมของชิป TLC32040

5. การควบคุมวงจรมอนาล็อกอินเทอร์เฟซ

การส่งผ่านข้อมูลในวงจรมอนาล็อกอินเทอร์เฟซ (AIC) จะกระทำกันในรีจิสเตอร์สำหรับการรับข้อมูล (Data Receive: DR) และรีจิสเตอร์สำหรับการส่งข้อมูล (Data Transmit: DX) รีจิสเตอร์ทั้ง 2 จะทำการส่งข้อมูลในแบบอนุกรม ในการควบคุมรีจิสเตอร์การส่งผ่านข้อมูลของ AIC จะใช้บิตล่าง 2 บิต (LSBs) เป็นตัวกำหนดการติดต่อเมื่อบิตทั้ง 2 มีค่าเป็น 0 จะเป็นการส่งผ่านแบบปกติ เมื่อบิตทั้ง 2 มีค่าเป็น 1 จะเป็นการติดต่อระดับ 2 การควบคุมการติดต่อระดับ 2 นี้ AIC จะยอมให้ส่งผ่านข้อมูลครั้งแรกก่อน

เอกสารนี้จัดทำขึ้นเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งรีจิสเตอร์ A และ B บน AIC จะเป็นตัวควบคุมการทำงานของ AIC โดยรีจิสเตอร์ A ประกอบด้วย TA, RA และเครื่องหมายที่ใช้ควบคุมตัวกรอง (Represent Filter Control) รีจิสเตอร์ B

จะประกอบด้วย TB, RB และเครื่องหมายที่ใช้ควบคุม A/D และ D/A รีจิสเตอร์เหล่านี้เป็นส่วนหนึ่งของการตั้งค่าเวลาภายใน

ตำแหน่งบิตที่ใช้สำหรับควบคุมการส่งและรับของรีจิสเตอร์ TA และ RA เป็น

|           |   |                |
|-----------|---|----------------|
| บิต 0-1   | → | 0, 0           |
| บิต 2-6   | → | RA             |
| บิต 7-8   | → | don't care (x) |
| บิต 9-13  | → | TA             |
| บิต 14-15 | → | don't care (x) |

ตำแหน่งบิตที่ใช้สำหรับควบคุมการส่งและรับของรีจิสเตอร์ TB และ RB เป็น

|          |   |                |
|----------|---|----------------|
| บิต 0-1  | → | 0, 1           |
| บิต 2-7  | → | RB             |
| บิต 8    | → | don't care (x) |
| บิต 9-14 | → | TB             |
| บิต 15   | → | don't care (x) |

AIC สามารถกำหนดค่าความถี่สุ่มและค่าเบนควัด โดยการให้การติดต่อดระดับ 2 โดยให้ตั้งค่าเป็น 1 ใน 2 บิตแรก (LSBs) ทำให้การติดต่อดระดับ 2 มีค่าเหมือนการติดต่อดระดับ 1 ลำดับข้อมูลจะถูกโหลดจากรีจิสเตอร์ส่งข้อมูลพอร์ตอนุกรม และเซต LSBs ทั้ง 2 เป็น 1 สำหรับการติดต่อดระดับ 2 ในแต่ละครั้งมีดังนี้

1. 0x3 (3h) ใช้เรียกการติดต่อดระดับ 2
2. ค่าที่รีจิสเตอร์ A
3. 0x3 เรียกการติดต่อดระดับ 2 ครั้งที่ 2
4. ค่าที่รีจิสเตอร์ B
5. 0x3 เรียกการติดต่อดระดับ 2 ครั้งที่ 3
6. ค่าที่เซตรีจิสเตอร์ควบคุม

สามารถหาค่า A และ B เพื่อออกแบบค่าความถี่สุ่มและค่าเบนควัด (BW)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใด 6. การคำนวณหาค่า A และ B เพื่อออกแบบค่าความถี่สุ่มและค่าเบนควัด ทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บอร์ด TMS320C31 DSK มี Input Clock (CLKIN) เป็น 50 MHz สามารถกำเนิดความถี่สัญญาณนาฬิกาสูงสุด (Timer Frequency) เป็น  $MCLK = (CLKIN/4) = 12.5 \text{ MHz}$  ซึ่งสูงกว่า

Master Clock Frequency ของ AIC ที่มีค่าเท่ากับ 10 MHz AIC Master Clock (MCLK) ที่เข้ามาสามารถวัดสัญญาณได้จากขา 8 ใน JP1 สัญญาณสูงสุดที่ได้จาก AIC สามารถหาได้จาก Input Clockหารด้วย 8 หรือ

$$MCLK = CLKIN/8 = (50 \text{ MHz} / 8) = 6.25 \text{ MHz}$$

Switched – Capacitor Filter Frequency (SCF) เป็นความสัมพันธ์จากรีจิสเตอร์การส่งของ A

$$SCF = MCLK / (2 \times TA) \quad (1)$$

และความถี่สุ่มเป็นความสัมพันธ์จาก การส่งค่าในรีจิสเตอร์ของ A และ B

$$F_s = MCLK / (2 \times TA \times TB) \quad (2)$$

Input Filter Bandwidth หรือ Cutoff Frequency ตั้งค่าที่ 3600 MHz สำหรับ SCF ที่ 288 kHz ค่า SCF ใหม่จะได้ค่า BW นำไปคำนวณในตัวอย่าง และหาค่า A และ B เพื่อไปตั้งค่า AIC

### 6.1 ออกแบบ $F_s = 8 \text{ kHz}$

การออกแบบ Cutoff Frequency ของ Input Antialiasing filter เป็น 3600 Hz ที่ SCF 288 kHz จากสมการที่ (1)

$$\begin{aligned} TA &= MCLK / (2 \times SCF) = 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 288 \text{ kHz}) \\ &= 10.85 \approx 11 = (01011)_2 \end{aligned} \quad (3)$$

จากสมการที่ (2)

$$\begin{aligned} TB &= MCLK / (2 \times TA \times F_s) \\ &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 11 \times 8000) \\ &= 35.51 \approx 36 = (100100)_2 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งนี้ จากสมการที่ (3) จะได้ SCF (ปฏิบัติ) เป็น อ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$SCF = 6.25 \text{ MHz} / (2 \times TA)$$

$$= 284.09 \text{ kHz}$$

Cutoff Frequency หรือ Input Filter Bandwidth

$$\begin{aligned} \text{BW} &= 3600 \text{ (New SCF / Set SCF)} \\ &= 3600(284.09 \text{ KHz} / 288 \text{ KHz}) \\ &= 3551.14 \text{ Hz} \end{aligned}$$

จะได้ความถี่สุ่มเป็น

$$\begin{aligned} F_s &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times \text{TA} \times \text{TB}) \\ &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 11 \times 36) \\ &= 7891.41 \text{ Hz} \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3) จะได้ตำแหน่งบิตที่ใช้ ในการรีจิสเตอร์ควบคุม และตั้งค่า TA = RA ซึ่ง TA มี 5 บิต, TB มี 6 บิต และ xx จะไม่สนใจ (don't care) เช่น

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 00 & 01011 & 00 & 01011 & 00 \\ \hline xx & \text{TA} & xx & \text{RA} & \end{array} \quad \longrightarrow \quad 162\text{Ch}$$

แยกบิตที่จะนำไปใช้เป็น 4 กลุ่มโดยค่า A = 162Ch TB = RB ก็เช่นเดียวกัน

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 100100 & 0 & 100100 & 10 \\ \hline x & \text{TB} & x & \text{RB} & \end{array} \quad \longrightarrow \quad 4892\text{h}$$

## 6.2 ออกแบบ $F_s = 10 \text{ kHz}$

ใช้ Cutoff frequency หรือ BW สำหรับ Input Antialiasing Filter เหมือนกับ  $F_s = 8 \text{ kHz}$ ,

TA = 11 จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \text{TB} &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 11 \times 10000) \\ &= 28.41 \approx 28 = (011100)_2 \end{aligned}$$

ความถี่สุ่มเป็น

$$\begin{aligned} F_s &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times T_A \times T_B) \\ &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 11 \times 28) \\ &= 10146 \text{ Hz} \end{aligned}$$

ค่า B ได้

$$0 \mid 011100 \mid 0 \mid 011100 \mid 10 \quad \longrightarrow \quad 3872h$$

$$x \mid TB \mid x \mid RB \mid$$

หรือ  $B = 3872h$

### 6.3 ออกแบบ $F_s = 20 \text{ kHz}$

ออกแบบ  $BW = 8000 \text{ Hz}$  จาก

$$BW = 3600 \text{ (New SCF / Set SCF)}$$

ค่า Switched – Capacitor Filter Frequency ค่าใหม่เป็น

$$SCF = 8000(288 \text{ K}) / 3600 = 640 \text{ KHz}$$

ค่า  $T_A$  และ  $T_B$  เป็น

$$\begin{aligned} T_A &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 640 \text{ k}) \\ &= 4.88 \approx 5 = (00101)_2 \\ T_B &= 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 5 \times 20000) \\ &= 31.25 \approx 31 = (011111)_2 \end{aligned}$$

ได้ SCF (ปฏิบัติ) เป็น

$$SCF = 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 5) = 625 \text{ kHz}$$

ได้ Bandwidth (ปฏิบัติ) เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเฉพาะเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเพื่อเผยแพร่หรือทำซ้ำอย่างอื่นถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความถี่สุ่ม (ปฏิบัติ) เป็น

$$F_s = 6.25 \text{ MHz} / (2 \times 5 \times 31) = 20161.29 \text{ Hz}$$

ค่า A จะได้

$$\begin{array}{c|c|c|c} 00 & 00101 & 00 & 00101 \\ \hline xx & TA & xx & RA \end{array} \quad \longrightarrow \quad 0A14h$$

หรือ A = 0A14h

$$\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 011111 & 0 & 011111 \\ \hline x & TB & x & RB \end{array} \quad \longrightarrow \quad 3E7Eh$$

หรือ B = 3E7Eh

ดังนั้นสามารถสรุปค่าของรีจิสเตอร์ที่ความถี่สุ่มแตกต่างกัน 4 ค่าดังตารางภาคผนวกที่ 1

ตารางภาคผนวกที่ ก.1 ค่ารีจิสเตอร์ที่ความถี่สุ่มแตกต่างกัน 4 ค่า

| $F_s$ (ออกแบบ), Hz | $F_s$ (ปฏิบัติ) | A      | B      |
|--------------------|-----------------|--------|--------|
| 8000               | 7891.41         | 0x162C | 0x4892 |
| 10000              | 10146           | 0x162C | 0x3872 |
| 16000              | 15943           | 0x0E1C | 0x3872 |
| 20000              | 20161.29        | 0x0A14 | 0x3E7E |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข.

## ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

Surapun Yimman, Sukanya Praesomboon, Parinya Soonthuk and Kobchai Dejhan,  
“IIR Multiple Notch Filter Design with Optimum Pole Position”, International Symposium on  
Communications And Information Technologies 2006(ISCIT 2006),Grand Fortune Hotel,  
Bangkok, Thailand, October 18-20, 2006

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# IIR Multiple Notch Filters Design with Optimum Pole Position

Surapun Yimman\*, Sukanya Praesomboon\*, Parinya Soonthuk\*\* and Kobchai Dejhan\*\*

\*Dept. of Industrial Physics&Medical Instrumentation, Faculty of Apply Science  
King Mongkut's Institute of Technology North, Bangkok, 10800 Thailand  
E-mail: sym\_imi@yahoo.com

\*\*Faculty of Engineering and Research Center for Communication and Information Technology,  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520 Thailand  
E-mail: kobchai@telecom.kmitl.ac.th

**Abstract**— The following article introduces the new design and implementation of IIR multiple notch filters by the application of suitable pole placement technique. The initial step is to design the two IIR single notch filters with difference notch frequency to find suitable pole that can control the pass-band gain at 3 frequencies such as DC,  $\pi$  and frequency between the notch frequency. After that, connect the IIR single notch filters with difference notch frequency in cascade to create IIR multiple notch filters which can control the pass-band gains at DC and  $\pi$  frequency especially the frequency between the notch frequencies.

## I. INTRODUCTION

In the past, the construction of notch filter was in analog circuit form. However, the filters in analog circuits have several limits especially accuracy [1]. Later on, the notch filter has become either FIR or IIR digital filter. However, FIR notch filter cannot be a notch filter with narrow band. Therefore, the digital notch filter is generally an IIR filter, which can be done in several ways such as transforming analog notch filter, implementing from all-pass filters [2] and the pole-zero placements that is the easiest one. However, the pole-zero placement [6,8] has constrains on the asymmetric and uncontrollable gain. The rectification for this problem is to find the proper pole positions to make symmetric gain with suitable gain level possible [3,4]. The application of notch filter is to remove some particular frequency.

However, it is necessary to come up with a IIR notch filter with multiple notches to remove frequency along with harmonics. This can be done by cascading the IIR single notch filter. However, cascading IIR single notch filter before changing pole position may create uncontrollable pass-band gains of magnitude response. However, the cascading of IIR single notch filter after changing the pole position, the gain of magnitude response at some frequencies between notch frequencies may not be controllable [5].

Therefore, the following article is to introduce the design of IIR multiple notch filters and the controllable pass-band gain at frequency between the notch frequencies by suitable pole placement to be in line with the cascaded notch filters.

## II. THEORIES

### A. Previous Design

#### a. IIR Single Notch Filter

The frequency response of IIR single notch filter can be described as shown in (1) while the transfer function of the IIR single notch filter can be described as shown in (2) [6-8].

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \omega_0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (2)$$

Where:

- $H(z)$  is the transfer function of IIR single notch filter
- $\omega_0$  is the pole-zero angle on z-plane,
- center frequency
- $r$  is the distance between the pole and the origin

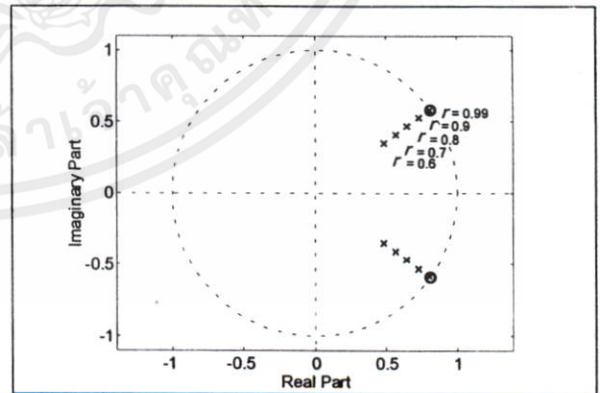


Fig. 1. Pole-zero plot of IIR notch filters from the previous design.

From transfer function in (2), the pole-zero placements would be as shown in Fig. 1 and the magnitude response will be as shown in Fig. 2.

Fig. 1 shows the angle of poles and zeros at the same positions while the magnitude response in Fig. 2 come from  $\omega_0 = 0.2\pi$  and  $r = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  and  $0.99$  have shown the results with asymmetric pass-bands and uncontrollable gain according to the specifications in Fig. 2.

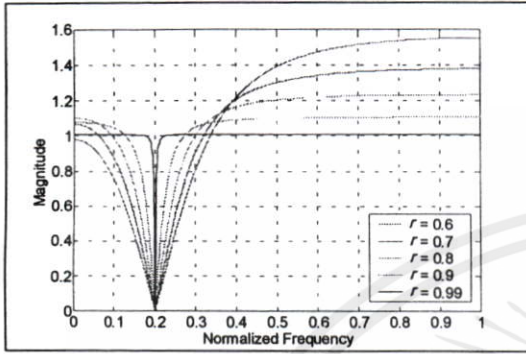


Fig. 2. Magnitude responses of IIR notch filters from the previous design.

Therefore, it is necessary to change the pole positions to the more appropriated positions while calculating the coefficients to control the gain as shown in (3) to (5). The magnitude responses after the modification of pole positions will become as shown in Fig. 3.

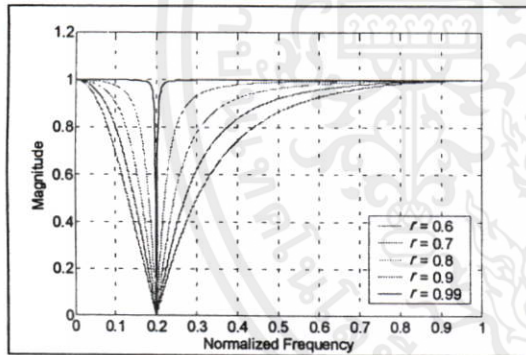


Fig. 3. Magnitude responses of the IIR notch filter after changing the pole positions and controlling the gain [4].

$$\hat{H}_N(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (3)$$

$$\hat{\omega}_0 = \cos^{-1} \left[ \frac{1+r^2}{2r} \cos \omega_0 \right] \quad (4)$$

$$b_0 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} \quad (5)$$

Define

$$k_1 = \left[ \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \right] \quad \text{and}$$

$$k_2 = \left[ \frac{1 - 2 \cos \omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_0 e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \right]$$

Where:

- $\hat{H}(z)$  is the transfer function of IIR notch filter after changing the pole position
- $\hat{\omega}_0$  is the pole angle after changing the pole position
- $b_0$  is the constant coefficient of IIR notch filter

*b. IIR Multiple Notch Filter*

The IIR multiple notches are derived by cascading IIR single notch filters. The frequency response of IIR multiple notch filter can be described as shown in (6). If one constructs an IIR multiple notch filter by cascading IIR single notch filters before changing the pole positions, the transfer function for IIR multiple notch filter will be as shown in (7).

$$H_M(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \omega_1 \text{ and } \omega_2 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

$$H_M(z) = \prod_{n=1}^2 \left( b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right) \quad (7)$$

From (7), if defining  $\omega_0 = 0.2\pi$ ,  $\omega_1 = 0.3\pi$  and  $r = 0.7$ , the magnitude response will be as shown in Fig. 4.

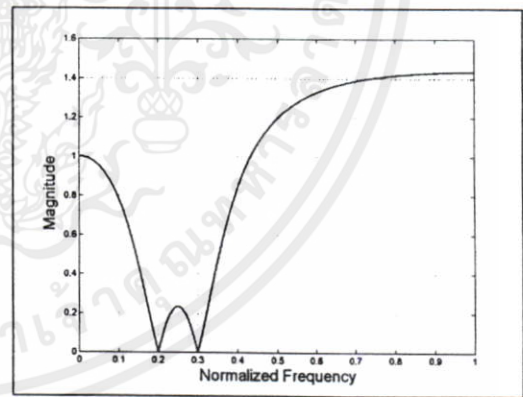


Fig. 4. Magnitude response of IIR multiple notch filters derived from cascading single notch filters before changing the pole positions.

After changing the pole positions of a IIR single notch filter in (3) and calculating the constant to control the pass-band gain by applying (4) and (5), the result will be a transfer function of the IIR multiple notch filter as shown in (8).

$$\hat{H}(z) = \prod_{n=1}^2 \left( b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \hat{\omega}_n z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right) \quad (8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ไปใช้ประโยชน์ด้านธุรกิจ  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ทุกครั้ง

From (8), if defining  $\omega_0 = 0.2\pi$ ,  $\omega_1 = 0.3\pi$  and  $r = 0.7$ , the magnitude response will be as shown in Fig 5.

The magnitude response of IIR multiple notch filters constructed from single notch filters before changing pole positions shown in Fig. 4 reveal the uncontrollable gain at frequency DC,  $\pi$  and frequency between the notch frequencies. The reason for this shortcoming is due to the fact that the pole positions of the IIR single notch filters are not at the appropriated positions. Furthermore, the constant for controlling pass band gain rate  $b_n$  is unknown, causing the asymmetric and uncontrollable pass-band gain at DC and  $\pi$  frequency as shown in Fig. 2. Therefore, the IIR multiple notch filter from cascaded IIR single notch filter without changing the pole position would have uncontrollable gain at the magnitude response.

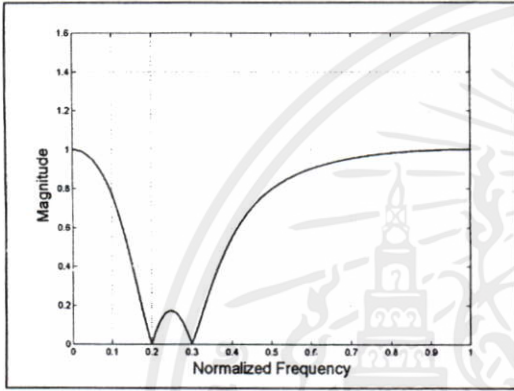


Fig. 5. Magnitude response of the IIR filter with multiple notches derived from single notch filters after modifying the pole positions.

Fig.5 is showing magnitude response of IIR multiple notch filters constructed from IIR single notch filter after modifying pole positions and applying constant  $b_n$  to control pass-band gain.

The result has shown that the pass-band gain at DC and  $\pi$  frequency become controllable while the frequency between the notch frequencies cannot be under control at the same level at DC and  $\pi$  frequency, even after cascading another single notch filter to make symmetric pass-band gain while control pass band gain at DC and  $\pi$  frequency. However, this kind of IIR multiple notch filter still has uncontrollable gain between the notch frequency due to the changing pole positions and gain controlling constant  $b_n$  at pass-band is derived from frequency at DC and  $\pi$  which only works for IIR single notch filters. In the other word, the pole positions within the IIR multiple notch filters derived from cascaded IIR single notch filters have no relationship with one another, which causes the uncontrollable gain at the frequency between notch frequencies [5].

**B. Proposed Design**

The frequency response of IIR multiple notch filters will be shown in (9) while the corresponding transfer function will be shown in (10).

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \omega_1, \omega_2 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

$$\tilde{H}(z) = \prod_{n=1}^2 \tilde{H}_n(z)$$

$$\tilde{H}(z) = \prod_{n=1}^2 \left( b_n \frac{1 - 2 \cos \omega_n z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_n \cos \tilde{\omega}_n z^{-1} + r_n^2 z^{-2}} \right) \tag{10}$$

Expression (10) shows that the IIR multiple notch filters constructed from cascaded IIR single notch filters with special design that difference from the one derived from cascaded IIR single notch filters with normal design. The IIR single notch filter with special design will have difference gains at DC and  $\pi$  frequency. Furthermore, there will be gain control factor at frequencies between the notch frequency in addition to the gain control at DC and  $\pi$  frequency while the each cascaded IIR single notch filter will have relating gain at DC frequency,  $\pi$  frequency and frequency between the notch frequency  $\omega_c$  to keep the gain under control to met the gain specifications.

If defining a multiple notch filter with notch frequencies as  $\omega_1$  and  $\omega_2$  while the frequency between notch frequencies as  $\omega_c$ , the IIR single notch filters to be cascade will be separated into two parts, IIR notch filter 1 with notch frequency at  $\omega_1$  and IIR notch filter 2 with notch frequency at  $\omega_2$ . Therefore, gain at difference frequencies in two IIR single notch filters and IIR multiple notch filters can be shown in Table 1 while  $\omega_c$  will be shown according to (11).

$$\omega_1 < \omega_c < \omega_2 \tag{11}$$

TABLE I  
GAIN AT DC FREQUENCY,  $\omega_1, \omega_2, \omega_c$  AND  $\pi$  OF NOTCH FILTER 1, NOTCH FILTER 2 AND MULTIPLE NOTCH FILTERS

| DC        | $\omega_1$ | $\omega_c$ | $\omega_2$ | $\pi$       |
|-----------|------------|------------|------------|-------------|
| $k_1$     | 0          | $k_1$      | -          | $k_1 / a_1$ |
| $k_2$     | -          | $k_2$      | 0          | $a_1 k_2$   |
| $k_1 k_2$ | 0          | $k_1 k_2$  | 0          | $k_1 k_2$   |

Where:  $a_1, k_1$  and  $k_2$  are constant

Therefore, IIR notch filter 1 and IIR notch filter 2 will have to meet the specifications before cascading to form an IIR multiple notch filters. The design starts at IIR notch filter 1 by appropriated pole-zero placements. The pole placements depend upon pole angle  $\tilde{\omega}_1$  and distance from the origin  $r_1$ . The calculation for pole angle  $\tilde{\omega}_1$  will need transfer function shown in (12) while the gain at DC and  $\pi$  frequency will be shown in Table 1.

นี่คือคำคมที่ฉันเจอมาเมื่อไม่นานมานี้ และมันทำให้ฉันต้องมาเขียนเรื่องนี้ออกมาทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (12)$$

At DC frequency, defining  $z = e^{j0}$  and transfer function  $k_1$  will become

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(e^{j0}) &= k_1 = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 + 1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ k_1 &= b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \end{aligned} \quad (13)$$

At  $\pi$  frequency, defining  $z = e^{j\pi}$  and transfer function  $k_1$  will become

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(e^{j\pi}) &= \frac{k_1}{a_1} = b_1 \frac{1 + 2 \cos \omega_1 + 1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ k_1 &= a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \end{aligned} \quad (14)$$

From (13) and (14), the transfer functions can be rearranged to calculate for  $\cos \tilde{\omega}_0$  as shown from (15).

$$\begin{aligned} k_1 &= b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} = a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} &= a_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + 2r_1 \cos \tilde{\omega}_1 + r_1^2} \\ \cos \tilde{\omega}_1 &= \frac{(r_1^2 + 1)(a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)}{2r_1(a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1)} \end{aligned} \quad (15)$$

If defining  $l_1 = \frac{a_1 - 1 + \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}{a_1 + 1 - \cos \omega_1 + a_1 \cos \omega_1}$ , so value  $\cos \tilde{\omega}_1$

and  $\tilde{\omega}_1$  can be rewritten as shown in (16) and (17).

$$\cos \tilde{\omega}_1 = \frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \quad (16)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \cos^{-1} \left( \frac{(r_1^2 + 1)}{2r_1} l_1 \right) \quad (17)$$

Substitute  $\cos \tilde{\omega}_1$  in (16) into (12) to get the new transfer function of single notch filter as shown in (18).

$$\tilde{H}_1(z) = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 z^{-1} + r_1^2 z^{-2}} \quad (18)$$

Substitute DC  $\pi$  and  $\omega_c$  frequency into (18) to get  $k_1$  as shown from (19) to (21) respectively.

$$k_1 = b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \quad (19)$$

$$k_1 = a_1 b_1 \frac{2 + 2 \cos \omega_1}{1 + (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \quad (20)$$

$$k_1 = b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \quad (21)$$

Next step is to calculate  $r_1$  by applying the relationship between (21) and either (19) or (20). Choose (19), from (19) and (21) can be written in absolute form will be as shown in (22) and (23).

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 \quad (22)$$

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (23)$$

From (22) and (23) can be rearranged as shown in (24), (25) and (26).

$$|k_1|^2 = \left| b_1 \frac{2 - 2 \cos \omega_1}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 + r_1^2} \right|^2 = \left| b_1 \frac{1 - 2 \cos \omega_1 e^{-j\omega_c} + e^{-2j\omega_c}}{1 - (r_1^2 + 1)l_1 e^{-j\omega_c} + r_1^2 e^{-2j\omega_c}} \right|^2 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} k_1^2 &= b_1^2 \frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4(1-l_1)^2 + 2r_1^2(1-l_1)^2 + (1+l_1)^2} \\ k_1^2 &= b_1^2 \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{(2 - 2 \cos \omega_1)^2}{r_1^4(1-l_1)^2 + 2r_1^2(1-l_1)^2 + (1+l_1)^2} = \frac{r_1^4 X_1 + r_1^2 X_2 + X_3}{r_1^8 Y_1 + 4r_1^6 Y_2 + r_1^4 Y_3 + 4r_1^2 Y_4 + Y_5} \quad (26)$$

Where:

$$X_1 = X_4 \left( (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \right)$$

$$X_2 = 2X_4 \left( (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)(1 - l_1 \cos \omega_c) + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l_1 \sin \omega_c) \right)$$

$$X_3 = X_4 \left( (1 - l_1 \cos \omega_c)^2 + (l_1 \sin \omega_c)^2 \right)$$

$$\begin{aligned} X_4 &= (1 - 2 \cos \omega_1 \cos \omega_c + \cos 2\omega_c)^2 + (2 \cos \omega_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \\ Y_1 &= (\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^4 + (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^4 \\ Y_2 &= 2(\cos 2\omega_c - l_1 \cos \omega_c)^2 (l_1 \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนลิขสิทธิ์ของสถาบันวิจัยงานวิศวกรรม (18) ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้าง +2(cos 2ω<sub>c</sub> - l<sub>1</sub> cos ω<sub>c</sub>)<sup>2</sup> (l<sub>1</sub> sin ω<sub>c</sub> - sin 2ω<sub>c</sub>)<sup>2</sup> ให้นำไปใช้

$$\begin{aligned}
Y_2 &= (\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)^3 (1 - l \cos \omega_c) + (l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^3 (l \sin \omega_c) \\
&\quad + (\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)(1 - l \cos \omega_c)(l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 \\
&\quad + (\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)2(l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l \sin \omega_c) \\
Y_3 &= 8(\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)(1 - l \cos \omega_c)(l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l \sin \omega_c) \\
&\quad + 6((\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)^2 (1 - l \cos \omega_c)^2 + (l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2 (l \sin \omega_c)^2) \\
&\quad + 2((\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)^2 (l \cos \omega_c)^2 + (1 - l \cos \omega_c)^2 (l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)^2) \\
Y_4 &= (\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)(1 - l \cos \omega_c)^3 + (l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l \sin \omega_c)^3 \\
&\quad + (\cos 2\omega_c - l \cos \omega_c)(1 - l \cos \omega_c)(l \sin \omega_c)^2 \\
&\quad + (1 - l \cos \omega_c)^2 (l \sin \omega_c - \sin 2\omega_c)(l \sin \omega_c) \\
Y_5 &= 2((1 - l \cos \omega_c)^2 (l \sin \omega_c)^2) + (1 - l \cos \omega_c)^4 + (l \sin \omega_c)^4
\end{aligned}$$

From (26), the solution for  $r_1$  can be obtained as in (27).

$$\begin{aligned}
&r_1^8 (X(1-l)^2 - Y(2-2\cos\omega)^2) + r_1^6 ((2X+X_1)(1-l)^2 - 4Y_1(2-2\cos\omega)^2) \\
&+ r_1^4 ((X+2X_1+X_1)(1-l)^2 - Y_1(2-2\cos\omega)^2) + r_1^2 ((X+2X_1)(1-l)^2 - 4Y_1(2-2\cos\omega)^2) \\
&+ (X(1-l)^2 - Y_1(2-2\cos\omega)^2) = 0
\end{aligned} \quad (27)$$

The results  $r_1$  in (27) can be more than one value, either real numbers or complex numbers. However, the actual  $r_1$  must be real number with value less than one so the pole position must be within a unit circle to ensure the system stability [6,7]. The last step is to calculate a constant  $b_1$  by substituting  $r_1$  in (13) or (14) and the results will be shown in (28) and (29).

$$b_1 = k_1 \frac{1 - 2r_1 \cos \bar{\omega}_1 + r_1^2}{2 - 2\cos \omega_1} \quad (28)$$

$$b_1 = \frac{k_1}{a_1} \times \frac{1 + 2r_1 \cos \bar{\omega}_1 + r_1^2}{2 + 2\cos \omega_1} \quad (29)$$

Assuming the factors in notch filter 1 equals to  $\omega_1 = 0.2\pi$ ,  $\omega_c = 0.25\pi$ ,  $k_1 = 1$ ,  $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9$  and  $0.95$  the magnitude response will become as shown in Fig. 6.

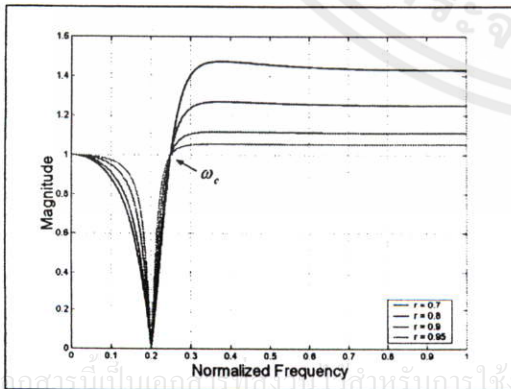


Fig. 6 Magnitude response of notch filter 1 at  $a_1 = 0.7, 0.8, 0.9, 0.95$

Fig. 6 has shown that the gain at  $\omega_1$ ,  $\omega_c$  and  $\pi$  frequency has gain rates according to specification. The increasing  $a_1$  approaching one value will narrow the notch filter bandwidth. This implies that  $a_1$  has direct effect to notch filter bandwidth, thus  $a_1$  is bandwidth factor ( $BWF$ ). The design of IIR notch filter 2 will follow the example shown in IIR notch filter.

### III. RESULTS

Defining the IIR multiple notch filter with frequency response as shown in (30) and  $BWF = 0.7$ .

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0.2\pi, 0.3\pi \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

From (11), choose  $\omega_c = 0.25\pi$  and results from table 1 will be  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$  and  $BWF = a_1 = 0.7$ . The IIR notch filter 1 will have  $\omega_1 = 0.2\pi$  while IIR notch filter 2 will have  $\omega_2 = 0.3\pi$ . After that deriving transfer function by applying expression (12) to (29). The transfer function for IIR notch filter 1 and IIR notch filter 2 will be shown in (31) and (32) respectively while magnitude response of each notch filter will be shown in Fig. 7 and Fig. 8 respectively.

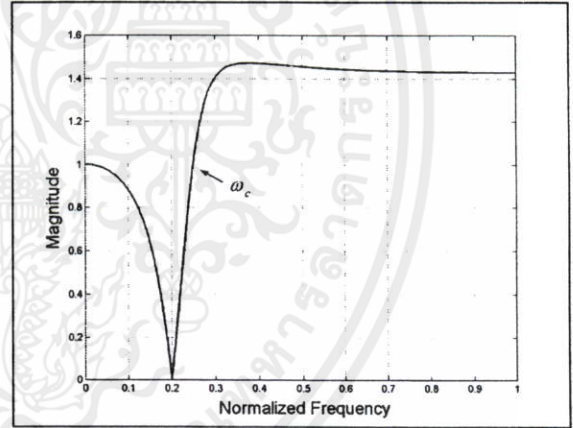


Fig. 7 Magnitude response of notch filter 1.

$$\tilde{H}_1(z) = \frac{1.150437 - 1.861446z^{-1} + 1.150437z^{-2}}{1 - 1.237098z^{-1} - 0.676525z^{-2}} \quad (31)$$

$$\tilde{H}_2(z) = \frac{0.663712 - 0.780240z^{-1} + 0.663712z^{-2}}{1 - 1.231882z^{-1} + 0.779066z^{-2}} \quad (32)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อการเรียนการสอน ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

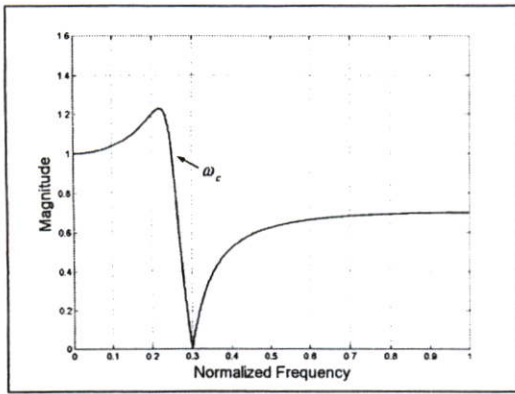


Fig. 8 Magnitude response of notch filter 2.

After cascading both IIR notch filters, the transfer function of IIR multiple notch filter will be as shown in (33) while pole-zero plot will be shown in fig.9 and the magnitude response will be shown in Fig.10 respectively.

$$\tilde{H}(z) = \frac{0.763559 - 2.133080z^{-1} + 2.979492z^{-2} - 2.133080z^{-3} + 0.763559z^{-4}}{1 - 2.468980z^{-1} + 2.979551z^{-2} - 1.797181z^{-3} + 0.527058z^{-4}} \quad (33)$$

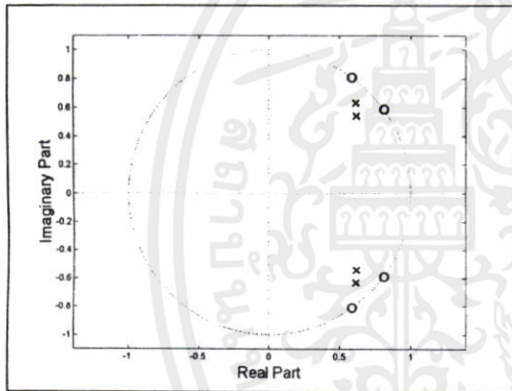


Fig. 9. Pole-zero plot of multiple notch filters applying the introduced principle.

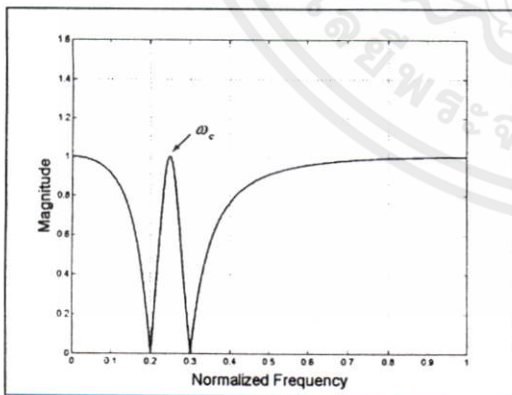


Fig. 10. Magnitude response of multiple notch filter after applying the introduced principle.

#### IV. CONCLUSIONS

The experiment results have shown that IIR multiple notch filter constructed from the proposed design could control the magnitude response at DC frequency as well as the frequencies between notch frequency  $\omega_c$  and  $\pi$  frequency to meet the specifications, and accurate pole placement as well as a testify of superiority of the proposed design over the previous design. This implies that it is possible to find accurate pole placement for multiple notch filter.

However, this principle has some limitations. Complicated calculation for pole placements is in need if there are more than a few notch frequencies. Therefore, the further development is to find new algorithms to simplify the calculation for pole placement while retaining the high accuracy as the way to increase the number of notch frequency.

#### V. REFERENCES

- [1] Craig Marven, Gillian Ewers, "A simple approach to digital signal processing" John Wiley & sons, 1996.
- [2] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "IIR Multiple Notch Filter Design Based on All-pass Filter," IEEE Trans. Circuit and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, vol.44 no.2, pp.133-136, February 1997.
- [3] C.-C. Tseng, S.-C. Pei, "Stable IIR Notch Filter Design with Optimal Pole Placement," IEEE Trans. Signal Processing, vol.49, no.11, pp. 2673-2681, November 2001.
- [4] S.Yimman, W.Hinjit, S.Sriboonsong, M.Puangpool, K.Dejhan "IIR Notch Filter Design with Modified Pole-zero Placement Algorithm," The IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT 2003), Darmstadt, Germany, December 2003.
- [5] S.Yimman, W.Hinjit, W.Ussawongaraya, P.Thoopluang, K.Dejhan "Design and Implementation of IIR Multiple Notch Filter with Modified Pole-zero Placement Algorithm" International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2003), Gyeongju, Korea, October 2003.
- [6] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, "Digital Signal Processing Principle, Algorithms, and Applications," Prentice Hall, 1996.
- [7] S. K. Mitra, "Digital Signal Processing, A Computer- Based Approach," McGraw-Hill, 2001.
- [8] S. J. Orfanidis, "Introduction to Signal Processing," Prentice Hall, 1995.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการวิจัยเท่านั้น ไม่ควรเผยแพร่หรือทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัติผู้เขียน

|                  |  |
|------------------|--|
| ชื่อ-นามสกุล     | นายปริญญา สูญทุกข์   |
| วัน เดือน ปีเกิด | 15 กรกฎาคม 2525 ที่กรุงเทพมหานคร   |
| ที่อยู่          | 65/15 ม.6 แขวงหนองค้างพลู เขตหนองแขม ซอยเพชรเกษม 108<br>กรุงเทพมหานคร 10160 โทร 089-791-8575   |
| ประวัติการศึกษา  | 2541 ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช) สาขาวิชาช่างอิเล็กทรอนิกส์<br>วิทยาลัยเทคนิคนครปฐม<br>2544 ปริญญาตรีวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาฟิสิกส์อุตสาหกรรม<br>ภาควิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรมและอุปกรณ์การแพทย์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์<br>สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ<br>2548 วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม<br>สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้