การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดโดยใช้ Pascal Matrix

PASCAL MATRIX-BASED BIQUAD DIGITAL FILTER DESIGN

วสันต์ มงคลมาลี

WASAN MONGKHONMALEE

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2551

KMITL-2008-EN-M-010-137

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดโดยใช้ Pascal Matrix

PASCAL MATRIX - BASED BIQUAD DIGITAL FILTER DESIGN

T082852

วสันต์ มงคลมาลี
WASAN MONGKHONMALEE

เลขหมู่..................
เลขทะเบียน 82852
วัน,เดือน,ปี 25 ก.ค. 2551

.b..............................
.i..............................

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2551

KMITL-2008-EN-M-010-137

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

PASCAL MATRIX - BASED BIQUAD DIGITAL FILTER DESIGN

WASAN MONGKHONMALEE

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF

MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATIONS ENGINEERING

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2008

KMITL-2008-EN-M-010-137

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ … ให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น … ที่มีการนำไปใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น หรือห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COPYRIGHT 2008

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดโดยใช้ Pascal Matrix
Pascal Matrix-Based Biquad Digital Filter Design

นักศึกษา นายวสันต์ มงคลมาลี

รหัสประจำตัว 48060902

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมโทรคมนาคม

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.พิพัฒน์	พรหมมี	
รศ.สมยศ	จุณณะปิยะ	
รศ.จิระศักดิ์	ชาญวุฒิธรรม	
รศ.ดร.ฟูศักดิ์	ชีวสุวิทย์	
รศ.ดร.กอบชัย	เดชหาญ	

วัน / เดือน/ ปี ที่สอบ 29 กุมภาพันธ์ 2551 เวลา 09.00-11.00 น.

สถานที่สอบ ณ ห้องประชุม 1 ชั้น 3 อาคาร A

บัณฑิตวิทยาลัยรับรองแล้ว

(รศ.ดร.รวีวรรณ ชินะตระกูล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่...12...**เดือน**...พฤษภาคม...**พ.ศ.**...2551...

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ห้ามนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดโดยใช้ Pascal Matrix
นักศึกษา	นายวสันต์ มงคลมาลี
รหัสประจำตัว	48060902
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2551
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการออกแบบวงจรกรองสัญญาณชนิดไบควอดซึ่งให้ฟังก์ชั่นการทำงาน 5 ฟังก์ชั่นคือ ความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน แถบความถี่ผ่าน แบบกำจัดแถบความถี่ และแบบผ่านทุกความถี่ ที่มีรูปแบบการทำงานเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข (Digital filter) ซึ่งโดยปกตินั้นหลักการออกแบบของวงจรชนิดนี้จะอยู่ในรูปแบบของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog filter) เสียเป็นส่วนใหญ่ โดยการอาศัยการแปลงโดเมนจากระนาบเอสไปเป็นระนาบแซดที่ใช้การแปลงเชิงเส้นคู่ (Bilinear transform) ด้วยรูปแบบการดำเนินการของ Pascal matrix ซึ่งจะช่วยให้การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดนี้ทำได้ง่าย นอกจากนั้นยังได้นำเสนอโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณ (Filter structure realization) สำหรับการนำไปสร้างเป็นวงจรจริงของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดที่นำเสนอนี้อีกด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis Title	Pascal Matrix –Based Biquad Digital Filter Design.
Student	Mr. Wasan Mongkhonmalee
Student ID.	48060902
Degree	Master of Engineering
Program	Telecommunications Engineering
Year	2008
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Dr. Kobchai Dejhan

ABSTRACT

This paper presents a design of biquad filter that gives 5 functions as low-pass, high-pass, band-pass, band-stop and all-pass in the manner of digital filter. Normally, most of design concepts for this filter type are in form of analog filter. based on bilinear transformation for domain mapping from s-plane to z-plane using Pascal matrix operation, at gives the easily method for biquad digital filter design. Moreover, the filter structure realization is proposed for real biquad digital filter implementation.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำ และคำปรึกษาจากอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์คือ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ และ อาจารย์ศรวัฒน์ ชิวปรีชา ข้าพเจ้ารู้สึกทราบซึ้งในความอนุเคราะห์จากท่านอาจารย์ทั้งสองท่านและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอขอบคุณนางสาวนุชรา ตันตระกูลและเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ในภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกคนที่ให้คำแนะนำต่างๆ และคอยให้กำลังใจเสมอมาและขอขอบคุณบัณฑิตศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ ที่ให้ความช่วยเหลือในเรื่องต่างๆ

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวของข้าพเจ้าที่อบรมสั่งสอนและเป็นกำลังใจ พร้อมทั้งให้การสนับสนุนในทุกเรื่องๆ ทำให้ข้าพเจ้าสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี คุณค่าและประโยชน์อันพึงมาจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

วสันต์ มงคลมาลี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย……I

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ……II

กิตติกรรมประกาศ……III

สารบัญ……IV

สารบัญตาราง……VII

สารบัญรูป……VIII

บทที่ 1 บทนำ……1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา……1

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา……2

1.3 สมมติฐานของการศึกษา……2

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย……3

1.5 ขอบเขตการวิจัย……3

1.6 ขั้นตอนของการศึกษา……3

บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการ……4

2.1 ความรู้พื้นฐานการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข……4

2.1.1 ข้อดีและข้อเสียของการประมวลผลเชิงเลข……4

2.1.2 โครงสร้างของระบบประมวลสัญญาณเชิงเลข……5

2.1.3 ตัวดำเนินการที่ใช้ในระบบสัญญาณ……6

2.1.4 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง……7

2.2 การแปลงแซดและสมการผลต่างสืบเนื่อง……8

2.2.1 นิยามของการแปลงแซด……8

2.2.2 คุณสมบัติของการแปลงแซด (z Transform)……12

2.2.3 การแปลงแซดผกผัน (Inversion of z transform)……13

2.2.3.1 วิธีการหารยาว (Direct division method)……13

2.2.3.2 วิธีการแยกเศษส่วนย่อย (Partial faction expansion method)……13

2.2.3.3 วิธีการ Residue……14

2.2.4 สมการผลต่างสืบเนื่อง……14

2.3 บทสรุป……15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด..........17

3.1 วงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ..........17

3.1.1 วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth filter)..........17

3.1.2 วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ (Chebyshev filter) 20

3.1.3 วงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติค (Elliptic filter) 23

3.2 การแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอนาลอกมาเป็นระบบดิจิตอล..........24

3.2.1 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformation)..........24

3.2.2 วิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า(Forward difference transformation).......... .27

3.2.3 วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์(Impulse invariant transformation)..........29

3.2.4 การแปลงเชิงเส้นคู่ (Bilinear transformation)..........32

3.3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด..........36

3.3.1 โครงสร้างแบบโดยตรง 1 (Direct form I)..........37

3.3.2 โครงสร้างแบบโดยตรง 2 (Direct form II)..........38

3.3.3 โครงสร้างแบบอนุกรม (Cascade form)..........40

3.3.4 โครงสร้างแบบต่อขนาน (Parallel form)..........41

3.4 บทสรุป..........42

บทที่ 4 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลข โดยการดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์43

4.1 วงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงอุปมาน..........43

4.2 ทฤษฎีทวินาม (The binomial theorem)..........51

4.3 การแปลงเชิงเส้นคู่โดยการดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์..........53

4.4 การออกแบบโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลข..........57

4.4.1 การออกแบบด้วยปาสคาลเมตริกส์..........59

4.4.2 การคำนวณออกแบบวงจรกรองโดยกำหนดค่า Q และ Ω_0 69

บทที่ 5 ผลการออกแบบและผลการจำลองการทำงาน..........75

5.1 ผลการออกแบบ..........76

5.1.1 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองทั้ง 5 แบบ..........76

5.1.2 ตำแหน่งโพล – ซีโร..........79

5.1.3 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาด และเฟสของตัวกรองทั้ง 5 รูปแบบ 82

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

5.1.4 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดและผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่..........83

5.1.5 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดและผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่า Q 88

5.2 บทสรุป..........94

บทที่ 6 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ..........95

6.1 สรุปผลการดำเนินการวิจัย..........95

6.2 แนวทางในการพัฒนา..........95

บรรณานุกรม..........96

ภาคผนวก..........97

ภาคผนวก ก. โปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการจำลองการทำงาน..........98

ภาคผนวก ข. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่..........114

ประวัติผู้เขียน..........118

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

2.1 ข้อดีข้อเสียของการประมวลผลเชิงเลข..4
2.2 ดำเนินการของสัญญาณ ในระบบการประมวลผลเชิงเลข..6
2.3 z Transform ของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง..16
3.1 สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ต่ำ..20
3.2 คุณสมบัติของการทรานส์ฟอร์มด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์...32
4.1 กรณีต่างๆเมื่อ k_1 , k_2 และ k_3 เป็นค่า ±1 หรือ 0...47
4.2 มาตรฐานของค่าผลตอบสนองอันดับ 2...47
4.3 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองไบควอด..49
4.4 การกระจายเลขชี้กำลัง...51
4.5 สามเหลี่ยมของปาสคาล...52
5.1 ค่าพารามิเตอร์ด้านอินพุทและด้านเอาท์พุทสำหรับตัวอย่างในการออกแบบ....................76

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

2.1 บล็อกไดอะแกรมแสดงโครงสร้างระบบ DSP ที่กระทำกับสัญญาณอนาลอก....................5

2.2 การสุ่มสัญญาณ (Sampling signal)..7

2.3 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n)$ 10

2.4 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่เข้าของ $x(n) = -a^n u(-n-1)$ 11

2.5 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ 12

3.1 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณ แบบบัตเตอร์เวิร์ท...18

3.2 ตำแหน่งโพลในระนาบเอส (s plane)..19

3.3 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ..22

3.4 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบอีลิบติค..24

3.5 อัลกอรึทึมผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง..25

3.6 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง...27

3.7 อัลกอรึทึมผลต่างสืบเนื่องไปหน้า..27

3.8 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า...29

3.9 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม...35

3.10 ความสัมพันธ์ความถี่ใน โดเมนอนาลอกและดิจิตอล..36

3.11 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง I..38

3.12 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง II...39

3.13 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบอนุกรม...41

3.14 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบขนาน...42

4.1 (ก)วงจรรวมสัญญาณ (Sum signal) (ข)วงจรอินทิเกรเตอร์ (Integrator) (ค)วงจรขยายแบบกลับเฟสที่มีอัตราขยายเป็น 1..44

4.2 วงจรไบควอดของ Tow-Thomas 44

4.3 วงจรไบควอดเชิงอปมานที่ให้ค่าผลตอบสนอง 5 แบบ...46

4.4 ผลตอบสนองทางเฟส..50

4.5 แสดงโครงสร้างของสัญญาณ w(n) ที่มีส่วนของการป้อนกลับ..65

4.6 แสดงโครงสร้างของสัญญาณที่มีส่วนของการป้อนไปด้านหน้า..66

4.7 โครงสร้างตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่ให้ผลตอบสนองเชิงความถี่3 รูปแบบ..........66

4.8 โครงสร้างตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่ให้ผลตอบสนองเชิงความถี่ 5 รูปแบบ.........68

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

5.1 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน.....77
5.2 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน.....77
5.3 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน.....78
5.4 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่.....78
5.5 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน.....79
5.6 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน.....79
5.7 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน.....80
5.8 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน.....80
5.9 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่.....81
5.10 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน.....81
5.11 เปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดของตัวกรองทั้ง 5 รูปแบบ.....82
5.12 เปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสของตัวกรองทั้ง 5 รูปแบบ.....82
5.13 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน.....83
5.14 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน.....84
5.15 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน.....84
5.16 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่.....85
5.17 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน.....85
5.18 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน.....86
5.19 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน.....86
5.20 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน.....87

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

5.21 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่....87
5.22 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน....88
5.23 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน....89
5.24 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน....89
5.25 ผลผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน....90
5.26 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่....90
5.27 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบวงจรกรองทุกแถบความถี่ผ่าน....91
5.28 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน....91
5.29 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบความถี่สูงผ่าน....92
5.30 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบแถบความถี่ ผ่าน....92
5.31 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบกำจัดแถบความถี่....93
5.32 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบแบบทุกแถบความถี่ผ่าน....93

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาที่กำลังศึกษาและวิจัยเป็นการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอด (Biquad digital filter) ซึ่งเป็นวงจรกรองสัญญาณซึ่งมีฟังก์ชั่นถ่ายโอนในอันดับที่ 2 (Bi-quadratic function) โดยส่วนมากเมื่อพูดถึงวงจรกรองสัญญาณไบควอดมักจะนึกถึงวงจรกรองสัญญาณไบควอดที่เป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog filter) ซึ่งจะให้เอาท์พุทที่เป็นผลตอบสนองทางความถี่หลายแบบ เช่นผลตอบสนองแบบความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) ความถี่สูงผ่าน (High-pass) และแถบความถี่ผ่าน (Band-pass) เป็นต้น ซึ่งบางชนิดอาจมีเอาท์พุทที่เป็นผลตอบสนองแบบแถบความถี่หยุด (Band-stop) และผ่านทุกความถี่ (All-pass) ด้วย โดยรูปแบบพื้นฐานในการสร้างวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงอุปมานนี้อาจทำการสร้างด้วยวงจรออปแอมป์ [1] หรือเป็นพวกวงจร CMOS Transistors ตามแต่เทคโนโลยีการออกแบบ แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นฟังก์ชั่นถ่ายโอน (Transfer function) จะเป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงอุปมานหรือกล่าวว่าเป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนในเอสโดเมน (s-Domain)

แต่สำหรับวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่นำเสนอนี้ซึ่งให้ผลตอบสนองของเอาท์พุทใน 5 รูปแบบ คือ ผลตอบสนองแบบความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน แถบความถี่ผ่าน แถบความถี่หยุด และผ่านทุกความถี่ นั้น จะมีรูปแบบการทำงานที่แตกต่างจากวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงอุปมานโดยสิ้นเชิง คือกรรมวิธีทั้งหมดในการประมวลผลสัญญาณนั้นเป็นกรรมวิธีการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข (Digital signal processing) ซึ่งฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบหรือวงจรที่ออกแบบนั้นจะเป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงเลขหรือที่เรียกว่าเป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนในแซดโดเมน (z-Domain) ซึ่งการได้มาถึงที่มาของฟังก์ชั่นถ่ายโอนในแซดโดเมนนั้นมาจากการแปลงตัวแปรจากตัวแปรเอสไปเป็นตัวแปรแซดโดยอาศัยพื้นฐานการแปลงแบบเชิงเส้นคู่ (Bilinear s-z transformation) แต่การแปลงตัวแปรที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ต่างจากหลักการแปลงที่ใช้กันทั่วๆไป โดยอาศัยการสร้าง Pascal matrix สำหรับ Bilinear s-z transform ขึ้นมาทำให้ลดความยุ่งยากในการแทนค่าความสัมพันธ์ของตัวแปร s และ z ลงในสมการโดยตรงซึ่งมีความยุ่งยากในการจัดรูปตัวแปรของสมการเอาท์พุทซึ่งเป็น z-Domain transfer function ผลจากการใช้ Pascal matrix ในการแปลงตัวแปรนี้ยังให้รูปแบบโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณ (Filter structure) สำหรับวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่ให้ 5 เอาท์พุทพร้อมกัน ออกมาอีกด้วย ซึ่งโครงสร้างใหม่ที่ได้นี้เป็นโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่ให้ 5 เอาท์พุทพร้อมกันโดยมีโครงสร้างหลักเหมือนโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในอันดับ 2 ทั่วไป (ในส่วนของ Denominator

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

computation) เพียงแต่มีส่วนของวงจรเสริม (Extended circuits) เข้าไปในส่วนของ Numerator computation เท่านั้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษาคือสามารถใช้วิธีการที่นำเสนอทำการออกแบบวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขได้ง่ายและสะดวกขึ้น เนื่องจากในกระบวนการแปลงตัวแปรที่นำเสนอมิได้ทำการแทนค่าความสัมพันธ์ของ s-z โดยตรง แต่ใช้วิธีการแปลงด้วย Matrix transformation ดังที่ทราบกันทั่วๆไปว่าถ้าเราสามารถเปลี่ยนรูปแบบการคำนวณทางคณิตศาสตร์ใดๆ ให้อยู่ในรูปของ Matrix calculation ได้ จะช่วยให้การคำนวณนั้นๆ ง่ายขึ้นและเหมาะกับการคำนวณด้วย Computer program ดังนั้นจุดนี้เองจึงถือว่าเป็นความน่าสนใจในการศึกษาถึงรูปแบบการแปลงตัวแปรโดยอาศัย Pascal Matrix และที่มาของการสร้าง Pascal Matrix นั้น

มิเพียงเท่านั้นถ้าเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อนหน้า [2-3] โดยใน [2] เป็นการออกแบบวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่ให้ 3 เอาท์พุทแต่ด้วยวิธีการที่ยุ่งยากกว่ามากหนำซ้ำยังไม่มีความยืดหยุ่นใดๆ เลยในการออกแบบ สำหรับใน [3] จะมีความคล้ายคลึงกับงานวิจัยที่นำเสนอก็ตรงเพียงว่าสามารถให้เอาท์พุทได้หลายรูปแบบ (Multiple-outputs) แต่โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขใน [3] เป็นแบบชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด (Finite impulse response : FIR)) แต่สำหรับวงจรที่นำเสนอเป็นแบบชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด (Infinite impulse response : IIR) ซึ่งวงจรกรองสัญญาณชนิด IIR มีข้อดีที่เหนือกว่าวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิด FIR อย่างไรบ้างก็เป็นข้อดีของงานวิจัยที่นำเสนอที่เหนือกว่างานวิจัยใน [3] นอกจากสิ่งที่กล่าวมาแล้วความน่าสนใจที่ได้อีกอย่างหนึ่งคือโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณที่ได้มีรูปแบบที่เข้าใจได้ง่าย (ซึ่งแตกต่างจากโครงสร้างที่เสนอไว้ใน [2]) และมีรูปแบบที่ไม่แตกต่างจากโครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในอันดับที่ 2 ทั่วไปไม่มากนักแต่สามารถให้สัญญาณเอาท์พุทได้ถึง 5 เอาท์พุท ดังนั้นจุดนี้จึงถือว่าเป็นอีกจุดหนึ่งที่น่าสนใจในงานวิจัยนี้

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

การแปลงตัวแปร (s-z Transformation) ด้วย Pascal matrix โดยอาศัยพื้นฐานการแปลงแบบเชิงเส้นคู่ (Based on bilinear transform) และนำมาประยุกต์ใช้ในการแปลงตัวแปรของฟังก์ชั่นถ่ายโอนต้นแบบของ Biquad transfer function ใน Analog domain ไปเป็น Biquad digital transfer function ด้วยรูปแบบการดำเนินการของ Pascal matrix ซึ่งจะช่วยให้การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดนี้ทำได้ง่าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

การดำเนินการวิจัยเป็นการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงแลขชนิดไบควอด โดยกรรมวิธีการประมวลผลเชิงเลข ซึ่งฟังก์ชั่นถ่ายโอนในแซดโดเมน การที่จะได้มาของฟังก์ชั่นถ่ายโอนในแซดโดเมนนั้นต้องทำการแปลงตัวแปรเอสโดเมนไปเป็นแซดโดเมน โดยทั่วไปจะใช้ Bilinear s-z transform แต่ในส่วนการวิจัยนี้จะทำการลดความยุ่งยากในการแทนความสัมพันธ์ของตัวแปร s และ z โดยตรงของการหาสมการเอาท์พุทที่เป็น z-Domain transfer function โดยใช้การสร้าง Pascal matrix ซึ่งจะทำให้ง่ายต่อการคำนวณและประหยัดเวลาต่อการออกแบบ

1.5 ขอบเขตการวิจัย

1.5.1. ศึกษาวงจรชนิดไบควอดโดยใช้ปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix)
1.5.2. ใช้หลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transform) ของการแปลง s-z โดเมน ด้วยวิธีการคิดคำนวณแบบปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix)
1.5.3. ออกแบบโครงสร้างสำหรับการนำไปสร้างเป็นวงจรจริงของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดที่นำเสนอ
1.5.4. ใช้โปรแกรม MATLAB ในการจำลองการทำงานและวิเคราะห์ผลการทดลอง

1.6 ขั้นตอนของการศึกษา

โครงงานฉบับนี้เป็นการศึกษาการออกแบบและการสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบไบควอดหรือตัวกรองแบบหลายเอาท์พุต (Multi-output) ที่ให้ผลตอบสนองความถี่ 5 รูปแบบในเวลาเดียวกันได้ โดยใช้หลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transform) ของการแปลง s-z โดเมน และวิธีการคิดคำนวณแบบปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ที่ทำให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น และได้โครงสร้างที่สามารถให้ผลตอบสนองเชิงความถี่หรือเอาท์พุท 5 ทำให้ได้วงจรกรองสัญญาณเชิงเลขที่มีคุณสมบัติเหมือนกับวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานโดยทดสอบคุณสมบัติของวงจรกรองที่ออกแบบนี้ด้วยการเรียนแบบการทำงานด้วยโปรแกรมแมทแลบ (MATLAB)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการ

2.1 ความรู้พื้นฐานการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

การประมวลผลสัญญาณ หมายถึง การกระทำบางอย่างกับสัญญาณที่มีผลให้เกิด การปรับปรุงหรือมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปด้วย กระบวนการขยาย (Amplification) การลดทอน (Attenuation) และการกรอง (Filtering) เป็นต้น โดยผ่านการควบคุมตัวแปรของระบบ (System) ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) โดยอาศัยพื้นฐานของการรวม การคูณและการหน่วงสัญญาณ โดยสามารถแบ่งการประมวลผลออกเป็น 2 ประเภทได้แก่ การประมวลผลสัญญาณอนาลอก (Analog signal processing) และการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข (Digital signal processing)

2.1.1 ข้อดีและข้อเสียของการประมวลผลเชิงเลข

รูปแบบการประมวลผลสัญญาณอนาลอกและการประมวลผลสัญญาณเชิงเลขต่างก็มีคุณสมบัติเฉพาะที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งสามารถเลือกพิจารณาการใช้งานระบบใด ๆ ได้ตามความเหมาะสมซึ่งสามารถแบ่งข้อดี ข้อเสียของการประมวลผลเชิงเลขได้ดังนี้

ตารางที่ 2.1 ข้อดีข้อเสียของการประมวลผลเชิงเลข

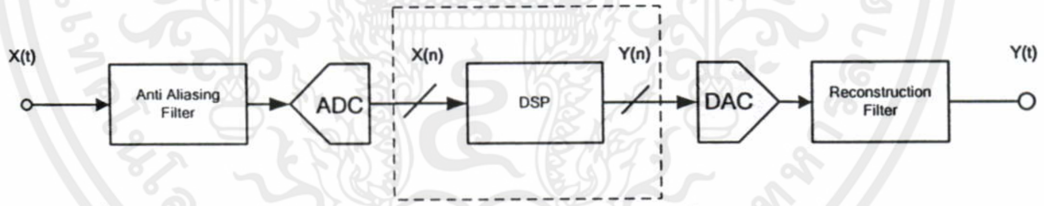
ข้อดีของการประมวลผลเชิงเลข	ข้อเสียของการประมวลผลเชิงเลข
1. การประมวลผลเหมาะสมกับข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบเชิงเลขเหมือนกันเช่น ภาพดิจิตอล 2. อุปกรณ์ทางด้านดิจิตอลมีแนวโน้มราคาต่ำลง ขนาดเล็กลง ประสิทธิภาพและความเร็วที่สูงขึ้น ความเที่ยงตรงเพิ่มมากขึ้น 3. สามารถทำการรับส่งข้อมูลได้แม่นยำกว่าสัญญาณอนาลอก เนื่องจากสัญญาณเชิงเลขมีสถานะเพียงศูนย์ “0” และหนึ่ง “1” เท่านั้น 4. การประมวลผลเชิงเลขสามารถทำได้โดยง่ายเพราะอัลกอริทึม (Algorithm) มีเพียงการบวก การลบ การคูณ และการหน่วงเวลา 5. ในการประมวลผลเชิงเลขสามารถทำได้พร้อม ๆ กันหลายช่องสัญญาณในลักษณะการ	1. ต้องมีสัญญาณในการซิงโครไนซ์ (Synchronize) การจัดเวลา (Timing) ซึ่งจะมีผลต่อระบบการทำงานอย่างมาก 2. การเชื่อมต่อ (Interface) กับระบบการประมวลผลสัญญาณอนาลอก ทำให้วงจรมีความซับซ้อนมากขึ้น 3. การออกแบบระบบประมวลผลเชิงเลขจะมีความซับซ้อนมากกว่า โดยเฉพาะกับระบบที่มีขนาดใหญ่ 4. แถบปฏิบัติงาน ของระบบประมวลผลเชิงเลขจะต่ำกว่าระบบประมวลผลแบบอนาลอกมากเนื่องจากข้อจำกัดของอุปกรณ์ที่ใช้ เช่น วงจรเกต วงจรแปลงสัญญาณอนาลอกเป็น

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ข้อดีของการประมวลผลเชิงเลข	ข้อเสียของการประมวลผลเชิงเลข
แบ่งช่วงเวลาทำงาน (Time sharing) 6. มีเสถียรภาพที่ดีต่อการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ หรือแม้กระทั่งการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของอุปกรณ์ 7. ความแม่นยำของการควบคุมสามารถกำหนดได้จากจำนวนบิตที่ใช้ (Word length) ตัวประมวลผลเชิงเลขสามารถทำงานซ้ำหน้าที่ (Function) เดิมได้โดยไม่จำกัดจำนวนครั้ง	ดิจิตอล(Analog to digital converter ADC) และวงจรแปลงสัญญาณดิจิตอลเป็นอนาลอก (Digital to analog converter DAC) เป็นต้น 5. ระบบประมวลผลเชิงเลขจำเป็นต้องมีไฟเลี้ยงอยู่ตลอดเวลา ในการแปลงสัญญาณอนาลอกให้อยู่ในรูปแบบสัญญาณเชิงเลขแล้วจะทำให้ความถูกต้องของสัญญาณบางส่วนขาดหายไป และไม่สามารถทำคืนให้ถูกต้องเหมือนเดิมได้ เนื่องจากผลของการกำหนดขนาดในการเก็บข้อมูล

2.1.2 โครงสร้างของระบบประมวลสัญญาณเชิงเลข (Structure of digital signal processing)

การพิจารณาถึงโครงสร้างของระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลขโดยแสดงองค์ประกอบทางฮาร์ดแวร์ (Hardware) เป็นหลักดังรูปที่ 2.2 จะแยกส่วนประกอบต่าง ๆ ภายในระบบได้ดังต่อไปนี้ [1]



รูปที่ 2.1 บล็อกไดอะแกรมแสดงโครงสร้างระบบ DSP ที่กระทำกับสัญญาณอนาลอก

2.1.2.1 ตัวแปลงสัญญาณอนาลอกเป็นดิจิตอล (Analog to digital converter: ADC)

ในส่วนนี้ทำหน้าที่แปลงสัญญาณอนาลอก x(t) ไปเป็นสัญญาณดิจิตอล x(n) ดังนั้นเพื่อให้สัญญาณอนาลอกที่จะถูกแปลงโดย ADC โดยในส่วนนี้จะต้องประกอบด้วยสองส่วนใหญ่ๆ ส่วนแรกคือวงจรสุ่มสัญญาณ(Sampler) พารามิเตอร์วงจรการสุ่มสัญญาณนี้คือ ค่าอัตราการสุ่ม (Sampling rate) หรือคือค่าความถี่ในการสุ่ม ใช้สัญลักษณ์แทนว่า f_s ค่านี้เป็นตัวกำหนดว่า วงจรสุ่มจะสุ่มสัญญาณด้วยอัตรากี่ครั้งต่อวินาที หรือกี่เฮริตซ์ (Hz) ส่วนที่สองคือวงจรแบ่งสัญญาณ (Quantized) ซึ่งทำหน้าที่ต่อจากสัญญาณ x(n) ที่ได้จากวงจรวงจรสุ่มสัญญาณถือว่ามีความละเอียด (นัยสำคัญ) เต็มที่ในทางขนาดซึ่งในทางปฏิบัติเมื่อนำไปใช้งานจะต้องลดความละเอียดของ x(n) ลงให้สามารถแทนได้ด้วยสัญญาณดิจิตอลที่มีจำนวนบิตที่จำกัด กระบวนการนี้เรียกว่า การแบ่งขั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ของสัญญาณ (Quantization) โดยความละเอียดที่ได้จากการแบ่งขั้นสัญญาณขึ้นอยู่กับจำนวนบิตที่ โดยระดับอ้างอิงนี้จะแบ่งเป็น 2^n-1 ระดับเมื่อ n เป็นจำนวนบิตของการเปลี่ยนแปลง

2.1.2.2 ตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข (Digital signal processor: DSP)

ในส่วนนี้จะทำการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข x(n)โดยมีรูปแบบอัลกอริทึมเฉพาะหน้าที่ซึ่งขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของสัญญาณทางออกว่าต้องการให้มีลักษณะเช่นไร เช่น การทำการกรองสัญญาณความถี่สูง การกรองสัญญาณรบกวน หรือการมอดูเลตสัญญาณเป็นต้น โดยรูปทรงแบบการประมวลผลเชิงเลขจะมีตัวดำเนินการ (Operator) คือ ตัวบวก (Adder) และตัวคูณ (Multiplier) ที่มักจะถูกใช้ดำเนินการกับสัญญาณเชิงเลขอยู่บ่อย ๆ

2.1.2.3 ตัวแปลงสัญญาณดิจิตอลเป็นอนาลอก (Digital to analog converter: DAC)

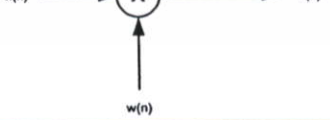
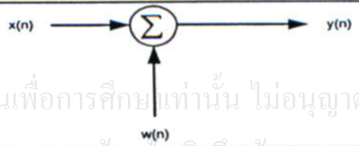
DAC ทำหน้าที่แปลงสัญญาณดิจิตอลกลับมาเป็นสัญญาณอนาลอกกรณีที่เอาต์พุตของ DAC ซึ่งในส่วนนี้ทำหน้าที่ตรงกันข้ามกับแปลงสัญญาณอนาลอกไปเป็นสัญญาณดิจิตอล(ADC)

แต่ในทางการนำไปใช้งานจริงการป้อนสัญญาณที่ต่อเนื่องเข้าไปยังวงจรแปลงอนาลอกเป็นดิจิตอลอาจเกิดข้อผิดพลาดเนื่องจากการสุ่มสัญญาณ โดยเฉพาะสัญญาณที่มีความถี่สูงความผิดพลาดนี้เรียกว่าการเกิด Aliasing การแก้ไขสามารถทำได้โดยการต่อ Anti-aliasing filter (Low-pass filter) เข้าทางด้าน อินพุต และทางด้านเอาออกก็เช่นเดียวกันสัญญาณที่ได้จากวงจรแปลงดิจิตอลเป็นอนาลอกจำเป็นต้องนำมาผ่าน Reconstruction filter (Low-pass filter) เพื่อปรับสัญญาณให้เรียบขึ้น

2.1.3 ตัวดำเนินการที่ใช้ในระบบสัญญาณ

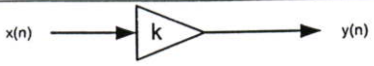
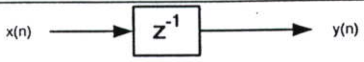
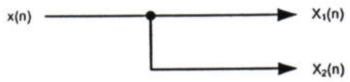
ในระบบการประมวลผลเชิงเลขหนึ่ง ๆ จะมีดำเนินการของสัญญาณ หรือการกระทำต่อลำดับสัญญาณ ซึ่งดำเนินการจะมีระบบการประมวลผลเชิงเลขดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 ดำเนินการของสัญญาณ ในระบบการประมวลผลเชิงเลข

การคูณกันของสัญญาณ		$y(n)=x(n)*w(n)$
การบวกกันของสัญญาณ		$y(n)=x(n)+w(n)$

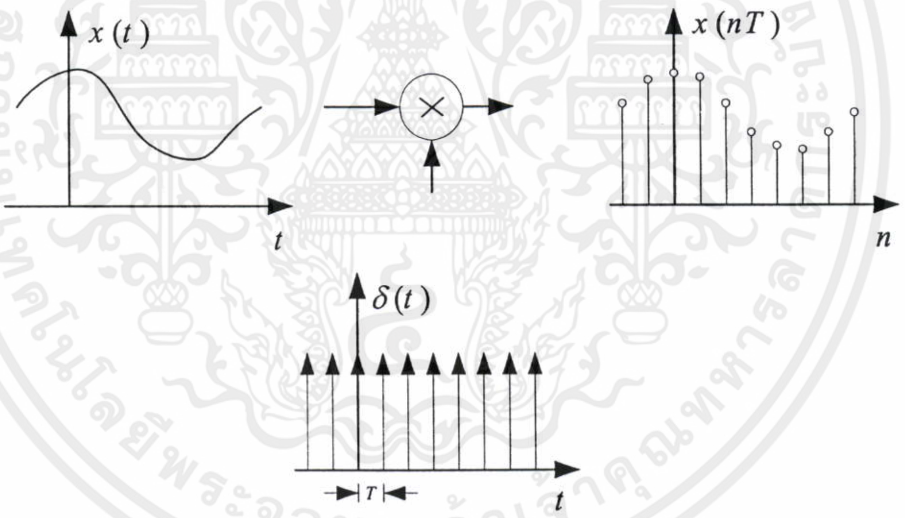
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.2 (ต่อ)

การคูณสัญญาณด้วยค่าคงที่		$y(n) = k * x(n)$
การหน่วงเวลา		$y(n) = x(n-1)$
การแตกกิ่ง		$x_1(n), x_2(n) = x(n)$

2.1.4 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง

จากที่ธรรมชาติของสัญญาณต่างๆมักจะเป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา ดังนั้นในการประมวลผลสัญญาณดิจิตอล สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาที่สอดคล้องกันก็คือ การแทนสัญญาณที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆห่างกันที่เวลา T_s คงที (คือการสุ่มตัวอย่าง) ถ้าหาก T_s มีค่าทีเหมาะสมแล้วการแทนดังกล่าวก็ยังคงถูกต้องเอาไว้ ดังนั้นผลการสุ่มก็คือการคูณสัญญาณที่ต่อเนื่องด้วยอิมพัลส์ที่เลื่อนไปเรื่อยๆ แต่ละครั้งก็ห่างกันเป็นเวลา $T = T_s = 1/f_s$ กระบวนการสุ่มสัญญาณดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การสุ่มสัญญาณ (Sampling signal)

ค่าความถี่ของการสุ่มสัญญาณ (f_s) ซึ่งไม่ทำให้สัญญาณสูญเสียข้อมูลที่สำคัญไป ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling theory) ของ แชนนอน (Shannon) กล่าวไว้ว่า "ถ้าหากสัญญาณที่ต่อเนื่อง $x(t)$ ที่มีความถี่ไม่เกิน $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$ ข้อมูลของสัญญาณที่ต่อเนื่องนั้นสามารถอธิบายได้ด้วย $x(nT)$ ก็ต่อเมื่อความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง f_s มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของความถี่ปฏิบัติงาน ($f_{\max}$) หรือ $f_s \geq 2f_{\max}$" โดยทั่วไปเราอาจสุ่มตัวอย่างด้วยค่าความถี่ $f_{sN} = 2f_{\max}$ พอดี ค่าความถี่นี้มีชื่อเรียกว่าความถี่ไนควิสต์(Nyquist frequency) และคาบเวลา $T_N = 1/(2f_{\max})$ นี้เรียกว่าช่วงเวลาสุ่มตัวอย่างไนควิสต์ (Nyquist interval)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 การแปลงแซดและสมการผลต่างสืบเนื่อง

การแปลงแซด (z Transform) เป็นการใช้คณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการวิเคราะห์สัญญาณของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time systems) ซึ่งจะแตกต่างจากการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ใช้สำหรับวิเคราะห์สัญญาณของระบบที่ต่อเนื่องทางเวลา (Continuous time systems) ดังนั้นแนวทางวิเคราะห์ของการแปลงแซด (z Transform) จะใช้โพลและซีโรมาอธิบายในระบบ โดยมีพารามิเตอร์ที่สำคัญ

$$BW = \frac{\Omega_0}{Q}$$

$$Q = \frac{\Omega_0}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{\Omega_0}{BW} \quad \text{เมื่อ} \quad \Omega_0^2 = \Omega_1\Omega_2 \quad \text{โดย} \quad \Omega_0 = \sqrt{\Omega_1\Omega_2}$$

โดยการส่ง (Mapping)จาก s โดเมน ไป z โดเมน

- $\Omega \Rightarrow \omega$: เป็นการเปลี่ยนจากอนาลอคโดเมนไปเป็นดิจิตอลโดเมนโดยใช้ การแปลงแบบเชิงเส้นคู่ (Bilinear transformation)

-ในดิจิตอลโดเมน : แบนด์วิดท์ Bandwidth (BW) ขึ้นอยู่กับ r (รัศมีของโพล)

$$BW \approx 2(1-r) \text{ rad}$$

2.2.1 นิยามของการแปลงแซด

การแปลงแซด (z Transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time) สามารถนิยามอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ (Power series) ได้ตามสมการที่ (2.1)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{2.1}$$

เมื่อ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable) $z = re^{j\omega}$

$x(n)$ เป็นลำดับสัญญาณ (Sequence signal)

ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงแซด (z Transform) และการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time fourier transform : DTFT) มีได้ดังนี้

$$x(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) re^{j\omega-n} \tag{2.2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x(n) r^{-n}\} e^{-j\omega n} \tag{2.3}$$

$$= DTFT\{x(n)\, r^{-n}\} \tag{2.4}$$

ถ้า $r = 1 \rightarrow |z| = 1$ สามารถหาความสัมพันธ์ทั้งสองได้ว่า

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = x(e^{j\omega}) = DTFT\{x(n)\} \tag{2.5}$$

แต่สำหรับการแปลงแซด (z Transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time) ในระบบที่คอซอล (Causal system) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2.6)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.6}$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของการแปลงแซดของสัญญาณระหว่าง $x(n)$ และ $X(z)$ โดยใช้สัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$x(z) = Z\{x(n)\} \tag{2.7}$$

นอกจากนี้ยังมีสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงแซดของ $x(n)$ และ $X(z)$ ได้ในรูปแบบดังนี้คือ

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \tag{2.8}$$

ซึ่งบริเวณกลุ่มของ z บนระนาบแซดที่ทำให้ $X(z)$ หาค่าได้เรียกว่าบริเวณที่มีการลู่เข้า (Region of convergence: ROC) โดยการลู่เข้าจะขึ้นอยู่กับ $|z|$ แต่ไม่ขึ้นอยู่กับ ω และเมื่อลองพิจารณาการแปลงแซด (z Transform) ของลำดับสัญญาณ $x(n) = a^n u(n)$ ได้ดังนี้

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n \tag{2.9}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

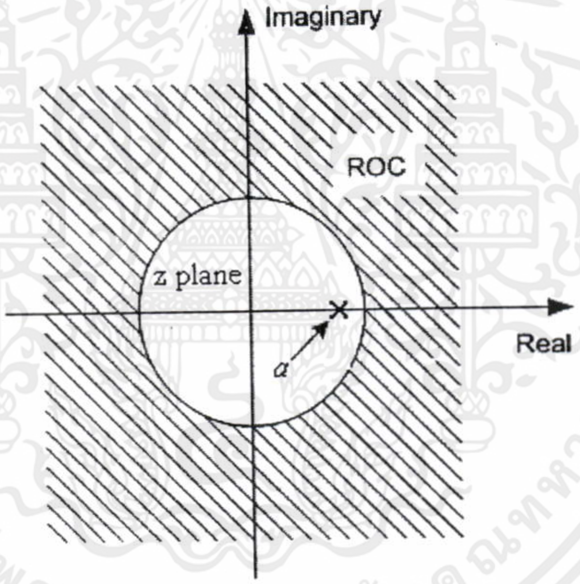
ความสัมพันธ์ที่ได้อยู่ในรูปของอนุกรมเรขาคณิตที่มีคุณสมบัติดังนี้คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n} = 1 + x^{1} + x^{2} + x^{3} + ... = \frac{1}{1-x} \quad \text{ทั้งนี้ } |x| < 1 \tag{2.10}$$

จากสมการที่ (2.9) จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a| \tag{2.11}$$

จะเห็นได้ว่าถ้า $|a| > 1$ จะทำให้ ROC จะไม่ซ้อนทับพื้นที่วงกลมระนาบหนึ่งหน่วย (Unit circle) และไม่สามารถหาค่า $X(z)$ ได้



รูปที่ 2.3 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่เข้าของ $x(n) = a^{n}u(n)$

ถ้ามีลำดับสัญญาณ $x(n) = -a^{n}u(-n-1)$ สามารถทำการแปลงแซด (z Transform) ได้ดังนี้

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n}u(-n-1)z^{-n}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

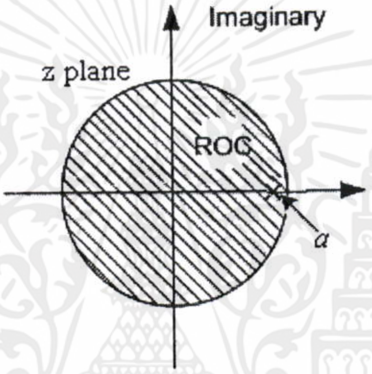
$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{n} z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (a\,z^{-1})^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a\,z^{-1})^n \qquad (2.12)$$

จากสมการที่ (2.12) จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \qquad |z| < |a| \qquad (2.13)$$



รูปที่ 2.4 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่เข้าของ $x(n) = -a^n u(-n-1)$

สังเกตเห็นได้ว่าทั้งสองกรณี มีค่าการแปลงแซด (z Transform) ที่เหมือนกันแต่จะมีบริเวณที่มีการลู่เข้า ROC ของสัญญาณครอบคลุมพื้นที่ที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงเป็นอย่างยิ่งที่จะระบุ ROC ลงไปเพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในกรณีที่ต้องทำการแปลงแซดผกผัน (Inverse z transform)

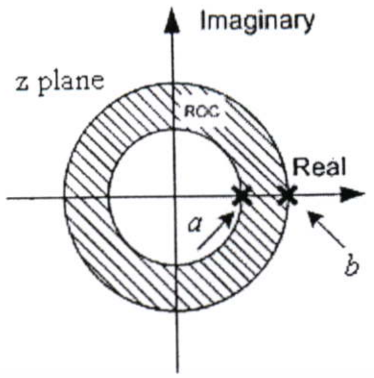
ถ้ามีลำดับสัญญาณ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ สามารถทำการแปลงแซด (z Transform) ได้ดังนี้

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{a^n u(n) - b^n u(-n-1)\} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n)\, z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} (b\,z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - a z^{-1}} + \frac{1}{1 - b z^{-1}} \qquad |a| < |z| < |b| \qquad (2.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.5 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$

2.2.2 คุณสมบัติของการแปลงแซด (z Transform)

2.2.2.1 คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

$$x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \qquad ROC = R_1$$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \qquad ROC = R_2$$

$$ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(n) + bX_2(z) \qquad ROC = R_1 \cap R_2$$

2.2.2.2 คุณสมบัติการเลื่อนทางเวลา (Time shifting property)

$$x(n - n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X_1(z) \qquad ROC = R \text{ (ยกเว้นที่ } z = 0 \text{ และ } z = \infty)$$

2.2.2.3 คุณสมบัติการคูณด้วยเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential property)

$$z_0^n x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad ROC = |z|R$$

2.2.2.4 คุณสมบัติการกลับเวลา (Time reversal property)

$$x(-n) \leftrightarrow X(\frac{1}{z}) \qquad ROC = \frac{1}{R}$$

2.2.2.5 คุณสมบัติการคูณประสาน (Convolution property)

$$x_1(n) \otimes x_2(2) \leftrightarrow X_1(z) . X_2(z) \qquad ROC = R_1 \cap R_2$$

2.2.2.6 คุณสมบัติการหาอนุพันธ์ (Differentiation property)

$$n\, x(n) \leftrightarrow -z \frac{d X(z)}{d z} \qquad ROC = R$$

2.2.2.7 คุณสมบัติเชิงซ้อน (Conjugation property)

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \qquad ROC = R$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น ... ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.3 การแปลงแซดผกผัน (Inversion of z transform)

การแปลงแซดผกผันก็คือกระบวนการกลับกันในการแปลงฟังก์ชั่น $X(z)$ เพื่อหาลำดับสัญญาณทางเวลา $x(n)$ โดยทั่วไปนิยมทำการแปลงแซดผกผันได้ 3 วิธีด้วยกันก็คือ

2.2.3.1 วิธีการหารยาว (Direct division method)

วิธีการหารยาวคือการกระจาย $X(z)$ อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ (Infinite power series) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \ldots + x(n) z^{-n} \qquad (2.15)$$

สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของ z^{-n} ก็คือลำดับพจน์ที่ n ของลำดับสัญญาณสามารถหาได้จากการหารยาวระหว่าง $B(z)$ และ $A(z)$

2.2.3.2 วิธีการแยกเศษส่วนย่อย (Partial faction expansion method)

โดยทั่วไปเราสามารถจัดฟังก์ชัน $X(z)$ ให้อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots\cdots\cdots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots\cdots\cdots + b_M z^{-M}} \qquad (2.16)$$

สามารถจัดรูปสมการที่ (2.16) ใหม่จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-1} + \cdots\cdots + a_N z^{-N}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})\cdots\cdots(1 - p_M z^{-1})} \qquad (2.17)$$

ในการแยกเศษส่วนย่อยเราจะพิจารณาเฉพาะส่วนของโพลและสามารถทำการแบ่งได้เป็น2 กรณี

1. กรณีที่ โพล ทุกตัวอยู่ตำแหน่งไม่ซ้ำกันเรียกว่า โพลค่าเดี่ยว (Distinct pole)

$$X(z) = C_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \ldots\ldots + \frac{C_M}{1 - p_M z^{-1}} \qquad (2.18)$$

$$X(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{1 - p_k z^{-1}} \qquad (2.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. กรณีที่ โพล อยู่ตำแหน่งซ้ำกันเรียกว่า โพลค่าซ้ำ (Multiple pole)

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i}{\left(z-p_k\right)^i} \tag{2.20}$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ D_i หาได้จาก

$$D_i=\frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}}{dz^{n-i}}\Big[(z-p_k)^n X(z)\Big]_{z=p_k} \tag{2.21}$$

2.2.3.3 วิธีการ Residue

การแปลงแซดผกผันด้วยวิธีนี้ค่า $x(n)$ จะถูกแทนด้วยการอินทิเกรตคอนทัวร์ (Contour integral) ดังสมการที่ (2.22)

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n\text{-}1}X(z)\,d(z) \tag{2.22}$$

เมื่อ C คือเส้นทางการอินทิเกรตคอนทัวร์โพลของ $X(z)$ ที่อยู่ในรูปเศษส่วนและโพลิโนเมียล (Rational and polynomials) คำตอบจะถูกแทนอยู่ในรูปตัวแปรเชิงซ้อนด้วยทฤษฎีของ Cauchy's residue ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า $x(n)$ ก็คือผลรวมของการทำ Residue เฉพาะโพลในบริเวณ C ของฟังก์ชัน $z^{n-1}X(z)$ เขียนได้ดังสมการที่ (2.23)

$$\mathrm{Res}[F(z),p_k]=\frac{1}{(m\text{-}1)!}\frac{d^{m\text{-}1}}{dz^{m\text{-}1}}\Big[(z\text{-}p_k)^m F(z)\Big]_{z=p_k} \tag{2.23}$$

เมื่อ $F(z)=z^{n-1}X(z)$

2.2.4 สมการผลต่างสืบเนื่อง

ในการวิเคราะห์ระบบเชิงอุปมาน คุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลาจะสามารถเขียนอธิบายโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เช่นเดียวกัน ในระบบเชิงเลขก็จะมีสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ไว้ใช้ในการอธิบายคุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา ซึ่งสมการผลต่างสืบเนื่องอันดับที่ n สามารถเขียนได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{m} b_k y(n-k) \qquad (2.24)$$

โดยที่ $x(n)$ เป็นลำดับสัญญาณขาเข้า $y(n)$ เป็นลำดับสัญญาณขาออกและ a_k, b_k เป็นค่าสัมประสิทธ์สมการผลต่างสามารถแสดงในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้คุณสมบัติการหน่วงเวลาของการแปลงเซต คือ

$$a_k x(n) \leftrightarrow a_k X(z) \qquad (2.25)$$

$$a_k x(n-k) \leftrightarrow a_k z^{-k} X(z) \qquad (2.26)$$

จากสมการที่ (2.24) จะได้

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{m} b_k z^{-k} Y(z) \qquad (2.27)$$

จัดรูปสมการเพื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอน

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^{m} b_k z^{-k}\right)} \qquad (2.28)$$

2.3 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้บรรยายเกี่ยวกับความหมายและข้อดีต่างๆของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล โดยมีขั้นตอนการดำเนินการกับสัญญาณในการเปลี่ยนแปลงให้สอดคล้องกับระบบนั้นๆ รวมทั้งเงื่อนไขที่ต้องพิจารณา โดยเฉพาะปัญหาเกี่ยวกับความเสถียรภาพของระบบที่ทำการออกแบบ นอกจากนั้นยังกล่าว ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง การแปลงแซด การแปลงแซดผกผัน เนื้อหาที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นประเด็นสำคัญๆ ที่ควรทราบและใช้เป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.3 z Transform ของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง

Sequence	Transform	ROC

1. $\delta(n)$	1	All z
2. $u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
3. $-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
4. $\delta(n-m)$	z^{m}	All z expect 0 (if m > 0) or ∞ 0 (if m < 0)
5. $a^{n}u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
6. $-a^{n}u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
7. $na^{n}u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}}$	$\|z\|>\|a\|$
8. $-a^{n}u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}}$	$\|z\|<\|a\|$
9. $(\cos(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
10. $(\sin(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
11. $(r\cos(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^{2}z^{-2}}$	$\|z\|>r$
12. $(r\sin(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^{2}z^{-2}}$	$\|z\|>r$
13. $\begin{cases} a^{n} & 0\le n\le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$	$\frac{1-a^{N}z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

บทที่ 3
การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัดโดยจะเริ่มพิจารณาตั้งแต่ วงจรกรองเชิงเลขจะถูกจำแนกตามความนานของการตอบสนองค่าหนึ่งหรือตามโครงสร้างของวงจรกรองนั้นๆ ซึ่งตัวกรองชิงเลขนั้นแบ่งได้ 2 ชนิดคือ

1.ตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์ (Infinite impulse response Filter :IIR)

2.ตัวกรองเชิงเลขแบบเอฟไออาร์ (Finite impulse response Filter :FIR)

โดยวิทยานิพนธ์นี้จะตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์ ซึ่งเป็นการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัดโดยที่ตัวกรองเชิงเลขชนิดไอไออาร์นี้มีข้อดีกว่าตัวกรองเชิงเลขแบบเอฟไออาร์ตรงที่ว่าด้วยข้อกำหนดเดียวกันจะใช้ลำดับเดียวกันจะใช้ลำดับที่ต่ำกว่าตัวกรองเชิงเลขแบบเอฟไออาร์มาก ซึ่งจะหมายถึงว่าการทำงานของตัวกรองเชิงเลขชนิดไอไออาร์จะเร็วกว่าและใช้หน่วยความจำที่น้อยกว่าทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายโดยการออกแบบที่นิยมคือการออกแบบอิงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ ซึ่งได้แก่ วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท, เชบีเชฟ, อีลิบติค และอื่นๆ โดยเราสามารถใช้ฟังก์ชันหรือการเปลี่ยนแปลงอย่างใดอย่างหนึ่งที่สามารถแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอนาลอก ซึ่งอยู่ใน s โดเมน มาเป็นระบบดิจิตอล ที่อยู่ใน z โดเมน) ซึ่งการแปลงที่ใช้มีอยู่ด้วยกันหลายแบบ เช่น การแปลงผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformations) การแปลงผลต่างสืบเนื่องไปหน้า (Forward difference transformation) การแปลงอิมพัลส์ไม่แปรเปลี่ยน (Impulse invariant transformations) และการแปลงไบลิเนียร์ (Bilinear transformations) โดยวิทยานิพนธ์นี้จะนำวิธีการแปลงแบบไบลิเนียร์มาพิจารณา โดยหัวข้อทั้งสี่นี้จะกล่าวไว้ทั้งหมด พร้อมกับการออกแบบโครงสร้างแบบต่างๆ

3.1 วงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ

3.1.1 วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth Filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทจะมีคุณสมบัติที่ให้ผลตอบสนองทางขนาดเรียบมากที่สุดในช่วงแถบความถี่ผ่าน ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$\left|H_n(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \tag{3.1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

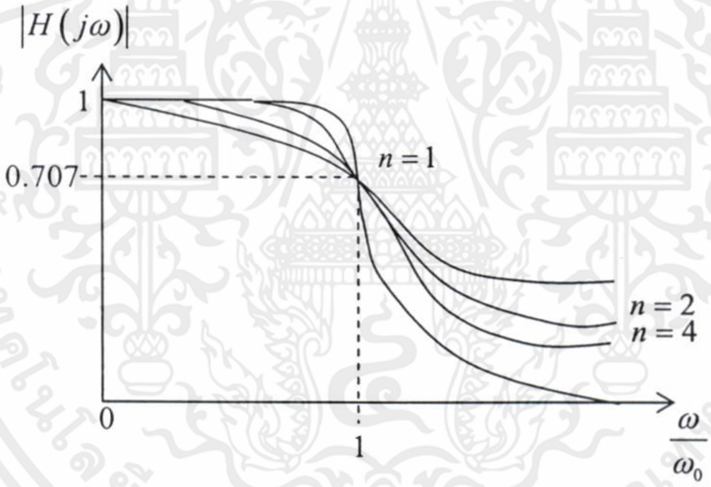
82852

เมื่อ n คือจำนวนลำดับ (n^{th} order)

ω_0 คือค่าความถี่ตัด (Cutoff frequency)

คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

1. $\left|H_n(j0)\right| = 1$ สำหรับทุกค่า n (อัตราขยายแรงดีซีเท่ากับหนึ่ง ที่ $\omega = 0$)
2. $\left|H_n(j\omega_0)\right| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ สำหรับทุกค่า n (อัตราขยายแรง ที่ $\omega = \omega_0$)
3. $\left|H_n(j\omega_0)\right|$ หมาความว่าอัตราการลดลงด้วยผลคูณของจำนวน n โพลเมื่อ $\omega > \omega_0$ เช่น $n = 1$ อัตราการลดลงเท่ากับ $-20 \ dB/decade$ และ $n = 2$ อัตราการลดลงเท่ากับ $-40 \ dB/decade$ เป็นต้น
4. อนุพันธ์ของ $\left|H_n(j\omega)\right|$ เท่ากับศูนย์เมื่อ $\omega = 0$ นั่นคือจะเกิดผลตอบสนองแบบราบเรียบสูงสุดที่ (Maximally flat response) ที่ $\omega = 0$
5. กรณีที่ $n > 10$ ผลตอบสนองจะเข้าใกล้ผลตอบสนองทางอุดมคตินั่นก็คือการเปลี่ยนจากแถบความถี่ผ่านไปยังแถบความถี่หยุดเปลี่ยนแปลงอย่างทันที่ทันใด



รูปที่ 3.1 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณ แบบบัตเตอร์เวิร์ท

จากรูปที่ 3.1 สังเกตได้ว่าในช่วงแถบความถี่ผ่านหรือแถบความถี่หยุดไม่มีการแกว่งตัวขึ้นลงของอัตราขยายแต่อย่างใด (Maximally flat) เนื่องจากผลตอบสนองทางขนาดมีค่าลดลงตลอดตาม การเพิ่มของความถี่ จึงจัดได้ว่ามีคุณลักษณะของฟังก์ชันโมโนโทนิก (Monotonic function) และเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

แทน $\omega = s/j$ ลงในผลตอบสนองทางขนาด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left|H_n(s)\right|^2 = \left|\frac{1}{1+\left[(s/j)/\omega_0\right]^{2n}}\right| = \left|\frac{1}{1+(-j)^n(s/\omega_0)^{2n}}\right|$$

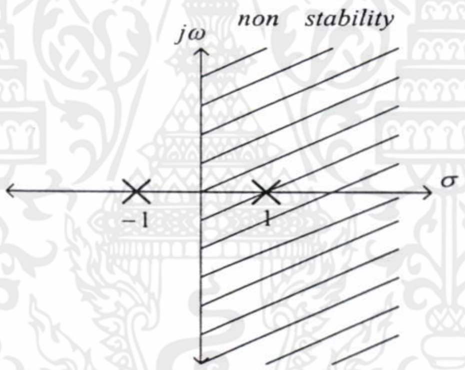
$$=\left|\frac{1}{1+[(-1)^2(j)^2]^n(s/\omega_0)^{2n}}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{D_n(s)D_n(-s)}\right| \tag{3.2}$$

$D_n(s)$ คือโพลิโนเมียล (Polynomial) ของโดเมน s ซึ่งมีรากทั้งหมดเป็นจำนวนจริงบวกและลบจะได้ว่า $D_n(s)=D_n(-s)$ และถ้ากำหนดให้ $n=1$ และ $\omega_0=1$ สามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามนี้

$$\left|H_n(s)\right|^2=\left|\frac{1}{1-s^2}\right|=\left|\frac{1}{D_n(s)D_n(-s)}\right| \tag{3.3}$$

จะได้ $D_n(s)D_n(-s)=1-s^2=(1+s)(1-s)$



รูปที่ 3.2 ตำแหน่งโพลในระนาบเอส (s Plane)

ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังนี้

$$H_1(s)=\frac{1}{s+1} \tag{3.4}$$

จากสมการที่ (3.4) เรียกว่าวงจรกรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ต่ำแบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth lowpass filter) ลำดับที่ 2 และ $s+1$ เรียกว่า (Butterworth polynomial of second order filter) สามารถเขียนรูปทั่วไปของสมการได้ว่า

$$D_n(s)=s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+b_1s+b_0 \tag{3.5}$$

ตารางที่ 3.1 สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณผ่านแถบความถี่ต่ำ

n	$D_n(s)$
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.4142s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0.6180s+1)(s^2+1.6180s+1)$
6	$(s^2+0.5176s+1)(s^2+1.4142s+1)(s^2+1.9319)$

และสามารถหาลำดับ n ของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทได้จากสมการที่ (3.6)

$$n=\frac{\log\left[\frac{10^{(\alpha_{\min}/10)}-1}{10^{(\alpha_{\max}/10)}-1}\right]}{2\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \tag{3.6}$$

3.1.2 วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ (Chebyshev filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟชนิดนี้มีคุณสมบัติให้ผลตอบสนองทางขนาดในช่วงแถบความถี่ผ่านเป็นยอดคลื่นเท่ากันตลอดและให้ความชันมากที่สุด ณ ความถี่คัทออฟ ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$|H_n(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \tag{3.7}$$

เมื่อ ε คือตัวประกอบความพลิ้ว (Ripple factor)

$C_n(\cdot)$ คือพหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งอันดับที่ n

คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ

1. $\omega=0$

$$|C_n(0)|=0 \qquad n \text{ เป็นเลขคี่}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$|C_n(0)|=1 \qquad n \text{ เป็นเลขคู่}$$

$$\left|H_n(j0)\right| = 1 \qquad n \text{ เป็นเลขคี่}$$

$$\left|H_n(j0)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \qquad n \text{ เป็นเลขคู่}$$

2. $\omega = 1$

$$\left|C_n(1)\right| = 1 \qquad \text{ทุกค่า } n$$

$$\left|H_n(j1)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \qquad \text{ทุกค่า } n$$

แทน $\omega = s/j$ ลงในผลตอบสนองทางขนาดจะได้ว่า

$$\left|H_n(s)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(s/j)} \tag{3.8}$$

โดยที่

$$C_n(s/j) = 0 \pm j(1/\varepsilon) = \cos(nu_k)\cosh(nv_k) - j\sin(nu_k)\sinh(nv_k) \tag{3.9}$$

และ $\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_{\max}} - 1}$

ถ้ากำหนดให้ $\cos(nu_k) = 0$ จะได้ว่า

$$u_k = \frac{\pi}{2n}(2k+1) \tag{3.10}$$

ถ้ากำหนดให้ $\sin(nv_k) = \pm 1$ จะได้ว่า

$$\sinh(nv_k) = \frac{1}{\varepsilon} \tag{3.11}$$

$$v_k = \frac{1}{n}\left(\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{3.12}$$

จะได้ว่า

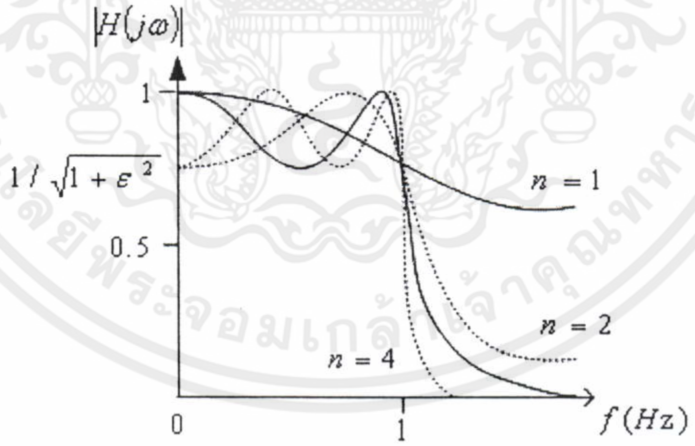
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$s = \sinh(\nu_k)\sin\left[\frac{\pi}{2n}(2k+1)\right] - j\cosh(\nu_k)\cos\left[\frac{\pi}{2n}(2k+1)\right] \tag{3.13}$$

และสามารถหาลำดับ n ของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟได้จากสมการที่ (3.14)

$$n = \frac{\cosh^{-1}\left[\dfrac{10^{\alpha_{\min}/10} - 1}{10^{\alpha_{\max}/10} - 1}\right]}{\cosh^{-1}(\omega_s)} \tag{3.14}$$

ดังแสดงในรูปที่ 3.3 จะเห็นได้ว่าการเพิ่มลำดับของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟจะช่วยให้ช่วงแถบเปลี่ยนความถี่มีความชันมากขึ้นซึ่งเป็นแนวโน้มเดียวกันกับกรณีของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท อย่างไรก็ตามที่วงจรกรองสัญญาณลำดับเท่าๆกัน พบว่าวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟจะให้ช่วงแถบเปลี่ยนความถี่ที่แคบกว่าวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทอย่างชัดเจน เมื่อพิจารณาในช่วงแถบความถี่ผ่านของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟพบว่ามีความพลิ้วของอัตราขยายเกิดขึ้นโดยมีการแกว่งตัวขึ้นลงตลอดช่วงสังเกตได้ว่าคุณลักษณะเช่นนี้ไม่เกิดขึ้นกับวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท ทั้งนี้ความสูงต่ำของการแกว่งสามารถควบคุมได้จากตัวแปร ε โดยขนาดความกว้างของการแกว่งจะอยู่ภายในช่วง 1 ถึง $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$



รูปที่ 3.3 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณ แบบเชบีเชฟ

ข้อเปรียบเทียบระหว่างวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทและแบบเชบีเชฟ

1. วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟมีช่วงแถบความถี่ผ่าน (Pass-band) และช่วงแถบความถี่ไม่ผ่าน (Stop-band) ที่ใกล้เคียงกับวงจรกรองสัญญาณทางอุดมคติได้มากกว่าวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟมีช่วงแถบความถี่เปลี่ยนแปลง (Transition-band) น้อยกว่าวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

3. แอมปลิจูด (Amplitude) ของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทที่ $\omega = 0$ จะมีการแกว่งตัวขึ้นลง (Maximally flat) น้อยกว่าวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ

4. วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟลำดับที่ 3 จะมีประสิทธิ์ภาพดีเท่ากับวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทลำดับที่ 5

5. วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ ที่ลำดับต่ำๆ จะมีความเป็นเชิงเส้น (Linear phase) มากกว่าวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

3.1.3 วงจรกรองสัญญาณแบบอีลิบติค (Elliptic filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบอีลิบติคให้คุณสมบัติรวมระหว่างวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทและแบบเชบีเชฟ กล่าวคือจะให้ผลตอบสนองทางขนาดลักษณะคลื่นเท่ากันทั้งช่วงแถบความถี่ผ่าน (Pass-band) และช่วงแถบความถี่ไม่ผ่าน (Stop-band) ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$|H_n(s)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2(\omega/\omega_0)} \tag{3.15}$$

เมื่อกำหนดให้

$$R_n(\omega/\omega_0) = \begin{cases} M\prod_{i=1}^{n/2}\dfrac{(\omega/\omega_0)^2-\omega_{p_i}^2}{(\omega/\omega_0)^2-\omega_{s_i}^2} \\ M\,\omega\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\dfrac{(\omega/\omega_0)^2-\omega_{p_i}^2}{(\omega/\omega_0)^2-\omega_{s_i}^2} \end{cases} \tag{3.16}$$

โดยที่ $M = \sqrt{\dfrac{10^{0.1K_s}-1}{10^{0.1K_p}-1}}$

เพื่อความสะดวกในการอธิบายตัวแปรต่างๆที่กล่าวมาข้างต้นในหัวข้อนี้เราจะอาศัยรูปที่ 3.4 จะได้ว่า

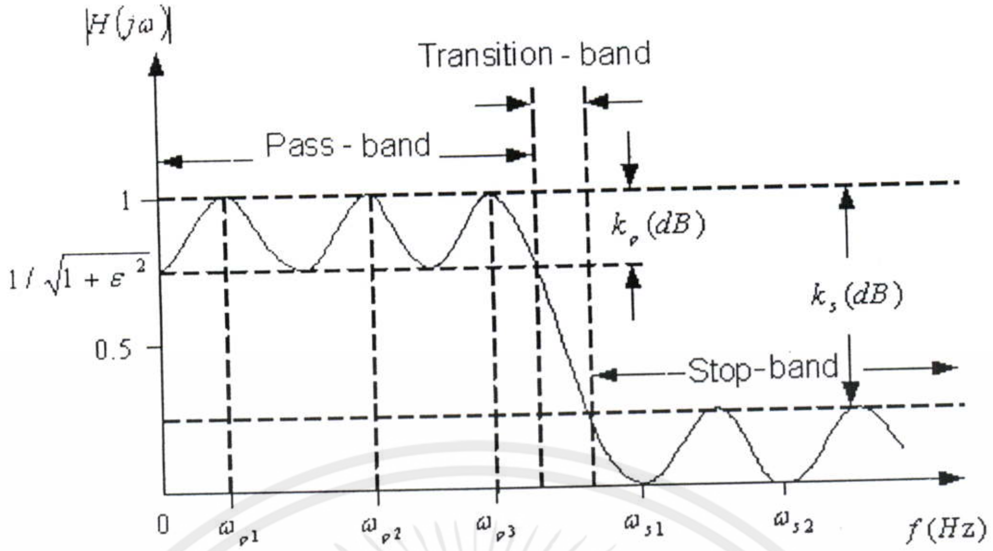
ω_{p_i} คือ ความถี่ลูกคลื่น i ในช่วงแถบความถี่ผ่านที่มีแอมปลิจูดสูงสุด

ω_{s_i} คือ ความถี่ลูกคลื่น i ในช่วงแถบความถี่ไม่ผ่านที่มีแอมปลิจูดสูงสุด

K_p คือ แอมปลิจูดที่เบี่ยงเบนสูงสุดในช่วงแถบความถี่ผ่านในหน่วย dB

K_s คือ ผลต่างระหว่างแอมปลิจูดสูงสุดในช่วงแถบความถี่ผ่านและแอมปลิจูดสูงสุดในช่วงแถบความถี่ไม่ผ่านในหน่วย dB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบอีลิบติค

3.2 การแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอนาลอกมาเป็นระบบดิจิตอล

แปลงฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอนาลอก (ซึ่งอยู่ใน s โดเมน) มาเป็นระบบดิจิตอล (ซึ่งอยู่ใน z โดเมน) การแปลงที่ใช้มีอยู่ด้วยกันหลายแบบ เช่น การแปลงผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformations), การแปลงผลต่างสืบเนื่องไปหน้า (Forward difference transformation), การแปลงอิมพัลส์ไม่แปรเปลี่ยน (Impulse invariant transformations) และ การแปลงไบลิเนียร์ (Bilinear transformations), โดยหัวข้อนี้จะกล่าวไว้ทั้งหมด

3.2.1 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformations)

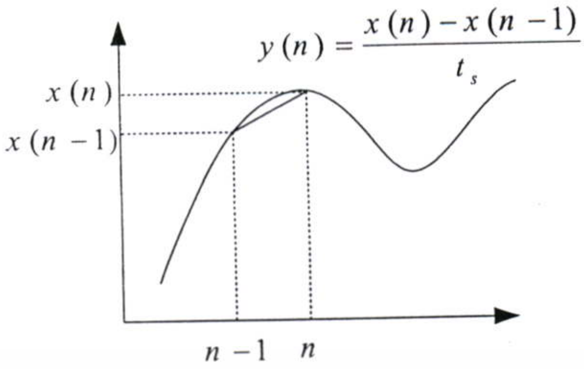
เราจะทำการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล $H(z)$ โดยมีคุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกตามสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ได้ดังนี้

$$\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k} \qquad (3.17)$$

โดยที่ $x_a(t)$ เป็นสัญญาณเข้าที่ต่อเนื่องทางเวลา

$y_a(t)$ เป็นสัญญาณออกที่ต่อเนื่องทางเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.5 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

เมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์ม (Laplace transform) ในสมการที่ (3.17) จะได้ว่า

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k} \tag{3.18}$$

การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังคือ การหาค่าเฉลี่ยผลต่างของทั้งสองลำดับสัญญาณ ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 3.5 สามารถเขียนเป็นสมการที่ (3.27) ได้ดังนี้

$$\nabla^{(1)}[y(n)] = [y(n) - y(n-1)] / T \tag{3.19}$$

ทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.19) จะได้ว่า

$$Z(\nabla^{(1)}[y(n)]) = Z([y(n) - y(n-1)] / T) = Y(z)(1 - z^{-1}) / T \tag{3.20}$$

ในกรณีที่ การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังมีลำดับสูงๆ สามารถเขียนได้ตามนี้

$$\nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}[y(n)]] \tag{3.21}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Z(\nabla^{(k)}[y(n)]) = Y(z)[(1 - z^{-1}) / T]^k \tag{3.22}$$

ใช้การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังที่ลำดับสูงๆ ในสมการที่ (3.17) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{M} b_k \nabla^{(k)}[y_a(n)] = \sum_{k=0}^{N} a_k \nabla^{(k)}[x_a(n)] \tag{3.23}$$

เมื่อทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.23)

$$\sum_{k=0}^{M} b_k Z(\nabla^{(k)}[y_a(n)]) = \sum_{k=0}^{N} a_k Z(\nabla^{(k)}[x_a(n)]) \tag{3.24}$$

ใช้สมการที่ (3.22) แทนลงในสมการที่ (3.24) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{M} b_k[(1-z^{-1})/T]^k\, Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k[(1-z^{-1})/T]^k\, x(z) \tag{3.25}$$

จัดรูปสมการที่ (3.25) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k[(1-z^{-1})/T]^k}{\sum_{k=0}^{M} b_k[(1-z^{-1})/T]^k} \tag{3.26}$$

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.18) และ (3.26) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s \to (1-z^{-1})/T} \tag{3.27}$$

จะได้ว่า

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \text{ และ } z = \frac{1}{1-sT} \tag{3.28}$$

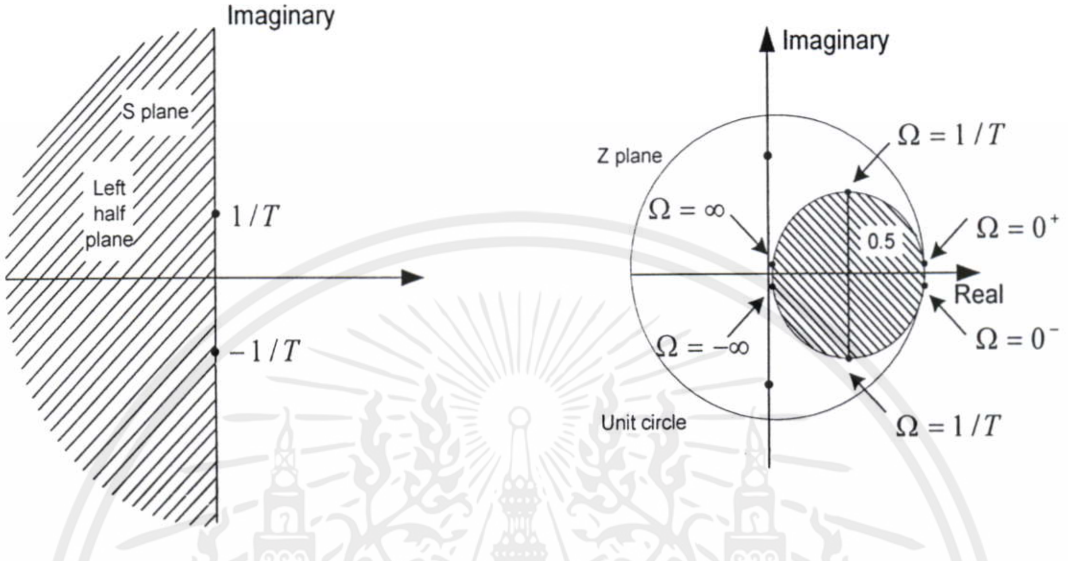
เมื่อพิจารณาในส่วน $\sigma = 0$ จะได้ว่า $s = j\,\omega$ แทนลงในสมการที่ (3.28)

$$z = \frac{1}{1-j\,\omega T} \Rightarrow z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+j\,\omega T}{1-j\,\omega T}\right) \Rightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \tag{3.29}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้าม

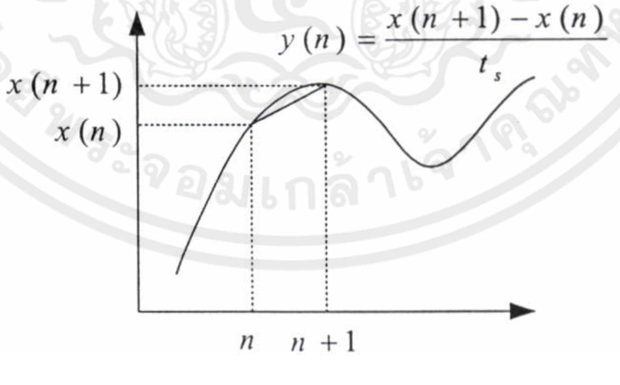
จากสมการที่ (3.29) จะได้ว่าตำแหน่งของโพลที่อยู่บนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอสถูกแม็ป (Mapping) ไปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมี (1 / 2) หน่วยในระนาบแซดในทำนองเดียวกัน

ตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพเมื่อทำการแม็ป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซดก็พบว่าวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลจะมีความเสถียรภาพด้วย เนื่องจากโพลทุกตัวอยู่ภายในวงกลมรัศมี (1 / 2) หน่วย ดังแสดงได้ในรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

3.2.2 วิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า (Forward difference transformations)



รูปที่ 3.7 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องไปหน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้าคือ การหาค่าเฉลี่ยผลต่างของทั้งสองลำดับสัญญาณ ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 3.7 สามารถเขียนเป็นสมการที่ (3.30) ได้ดังนี้

$$\nabla^{(1)}\left[y(n)\right] = \frac{\left[y(n-1)-y(n)\right]}{T} \tag{3.30}$$

เมื่อทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.30) จะได้ว่า

$$Z(\nabla^{(1)}[y(n)]) = Z([y(n-1)-y(n]/T) = Y(z)(1-z^{-1})/z^{-1}T \tag{3.31}$$

ในกรณีที่ การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้ามีลำดับสูงๆ สามารถเขียนได้ตามนี้

$$\nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}[y(n)]] \tag{3.32}$$

และ

$$Z(\nabla^{(k)}[y(n)]) = Y(z)[(1-z^{-1})/z^{-1}T]^k \tag{3.33}$$

ใช้สมการที่ (3.30) แทนลงในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{M} b_k[(1-z^{-1})/z^{-1}T]^k\, Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k[(1-z^{-1})/z^{-1}T]^k\, x(z) \tag{3.34}$$

จัดรูปสมการที่ (3.34) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k[(1-z^{-1})z^{-1}/T]^k}{\sum_{k=0}^{M} b_k[(1-z^{-1})z^{-1}/T]^k} \tag{3.35}$$

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.18) และ (3.35) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

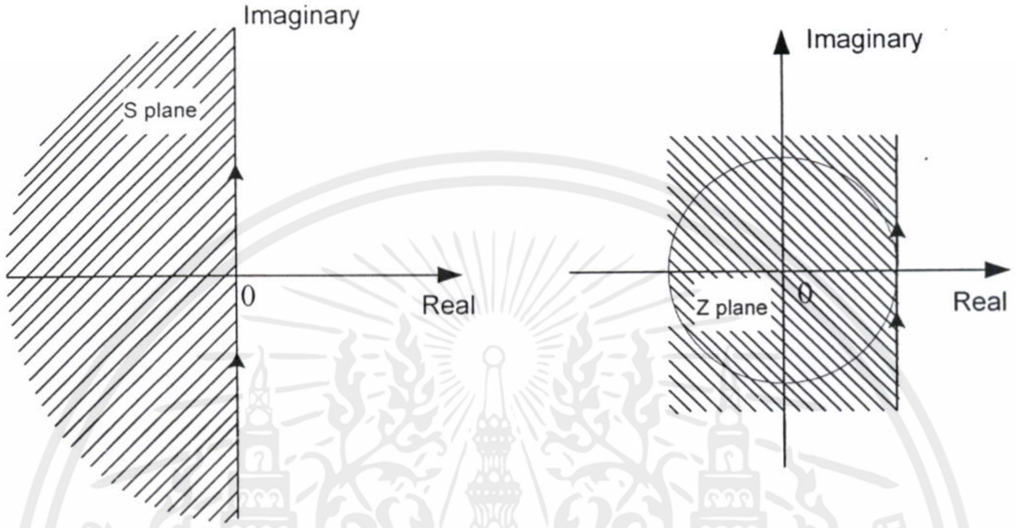
$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s\to(1-z^{-1})/z^{-1}T} \tag{3.36}$$

จะได้ว่า

$$s = \frac{1-z^{-1}}{z^{-1}T} \text{ และ } z = 1 + sT \tag{3.37}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อย่างไรก็วิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้าจะไม่ค่อยนิยมมากนักในการออกแบบวงจกรองสัญญาณดิจิตอลเพราะว่า ตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพนั้นโดยทั่วไปเมื่อทำการแม็ป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซดอาจเกิดปัญหาความไม่เสถียรภาพได้เนื่องจากว่าโพลอาจอยู่ภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ดังแสดงได้ในรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า

3.2.3 วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ (Impulse invariant transformations)

วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ (Impulse invariant transformations) เป็นวิธีหนึ่งที่พยายามทำให้ผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข *h(nT)* มีความใกล้เคียงกับผลตอบสนองอิมพัลส์จากวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ *h(t)* ที่ได้ทำการออกแบบไว้ ซึ่งหลักการของวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์นั้น อาศัยหลักการแปลงลาปาสผกผันจากฟังก์ชันถ่ายโอนอนาลอก $H_a(s)$ เพื่อหาผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ จากนั้นทำการเปลี่ยนฟังก์ชันผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ *h(t)* ไปเป็นฟังก์ชันผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข *h(nT)* ด้วยหลักการสุ่มตัวอย่างทางเวลา *T* สุดท้ายนี้ทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ก็จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดิจิตอล *H(z)* ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข ดังนั้นเราจะพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามนี้

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{s - b_k} \tag{3.38}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการแปลงลาปาสผกผัน (Inverse laplace transform) จากสมการที่ (3.38) จะได้ว่า

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{(b_k t)} u(t) \tag{3.39}$$

เมื่อ $u(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วย

จากสมการที่ (3.39) เป็นผลตอบสนองอิมพัลส์อนาลอกและทำการสุ่มตัวอย่างทางเวลาได้ว่า

$$h(nT) = h(t)\big|_{t=nt} \tag{3.40}$$

ในสมการที่ (3.40) เมื่อทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) เพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขได้ดังนี้

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k e^{(nTb_z)} \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} a_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{b_k T} z^{-1} \right)^{n}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{a_k}{1 - e^{b_k T} z^{-1}} \right) \tag{3.41}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสมการที่ (3.38) และ (3.41) จะได้ว่า

$$\frac{a_k}{s - b_k} \Rightarrow \frac{a_k}{1 - e^{b_k T} z^{-1}} ROC: |z| > e^{b_k T} \tag{3.42}$$

โดยที่ b_k เป็นตำแหน่งโพลของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน s = b_k และ $e^{b_k T}$ ก็จะเป็นตำแหน่งโพลของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข $z = e^{b_k T}$ ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ทั้งสองได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$z = e^{sT} \text{ และ } s = \left(\frac{1}{T}\right) ln(z) \tag{3.43}$$

จากสมการที่ (3.43) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างระนาบเอสกับระนาบแซดเป็นลักษณะการแม็ป (Mapping) ที่ไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อกำหนดให้ $s = \sigma + j\omega$ แทนลงไปในสมการที่ (3.43) จะได้ว่า

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{1\Omega} \tag{3.44}$$

โดยที่ $\Omega = \omega T = \dfrac{2\pi f}{f_x}$ เรเดียน/อัตราการสุ่ม

การทรานส์ฟอร์มจากระนาบเอสเป็นระนาบแซดและสามารถสรุปได้ดังนี้

1. จุดกำเนิด (Origin) พบว่า $s = 0$ ในระนาบเอสสามารถแม็ปไปยัง $z = 1$ ของระนาบแซด ซึ่งสอดคล้องได้ว่า $s = 0 \pm j\omega$ และ $z = e^{i\omega_x l} = e^{j2\pi} = 1$
2. แกน $j\omega$ พบว่า $\sigma = 0, z = e^{j\Omega}$ และ $|z| = 1$ โดยที่ ω เพิ่มจาก ω_0 ไปเป็น ω_0 + ω_N และความถี่ Ω เพิ่มจาก Ω_0 ไปเป็น $\Omega_0 + 2\pi$ เมื่อ $\omega_N = 2\pi f_N$ สามารถแม็ปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบเซต
3. ครึ่งระนาบเอสด้านซ้ายพบว่า $\sigma < 0$ จะทำให้ $z = e^{\sigma T} e^{\Omega T}$ หรือ $|z| = e^{\sigma T} < 1$ ก็คือ ครึ่งระนาบเอสด้านซ้ายถูกแม็ปไปยังบริเวณภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบเซด
4. ครึ่งระนาบเอสด้านขวาพบว่า $\sigma > 0$ จะทำให้ $|z| = e^{\sigma T} > 1$ ก็คือ ครึ่งระนาบเอสด้านขวาถูกแม็ปไปยังบริเวณภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด

นอกจากนี้ ยังพบว่าการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ไม่เหมาะสมกับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านสูง (High pass filter) และวงจรกรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่(Band stop filter) เนื่องจากไม่ว่าคาบการสุ่ม T จะต่ำเพียงใดก็ยังเกิดปรากฏการณ์ของ Aliasing ทำให้สเปกตรัมของสัญญาณที่ต้องการผิดเพี้ยนไปและถ้าผลตอบสนองความถี่ยิ่งสูงก็จะยิ่งมีความผิดเพี้ยนไปมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 คุณสมบัติของการทรานส์ฟอร์มด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์

$H(s)$	$H(z)$ (โดยที่ $\alpha = e^{b_k T}$)
$\dfrac{a_k}{(s+b_k)^m}$	$\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\dfrac{d^{m-1}}{db_k^{m-1}}\dfrac{a_k}{(1-e^{-b_k T}z^{-1})}$
$\dfrac{s+b_k}{(s+b_k)^2+a_k^2}$	$\dfrac{1-e^{-b_k T}(\cos a_k T)z^{-1}}{1-2e^{-b_k T}(\cos a_k T)z^{-1}+e^{-2b_k T}z^{-2}}$
$\dfrac{s+b_k}{(s+b_k)^2+a_k^2}$	$\dfrac{e^{-b_k T}(\sin a_k T)z^{-1}}{1-2e^{-b_k T}(\cos a_k T)z^{-1}+e^{-2b_k T}z^{-2}}$

3.2.4 การแปลงเชิงเส้นคู่ (Bilinear transformations)

วิธีการแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มจากวงจรกรองสัญญาณอนาลอกไปเป็นวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลเป็นเทคนิคที่ได้รับความสนใจมากเป็นพิเศษเพราะการแม็ป (Mapping) จะเป็นลักษณะหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one mapping) ของความถี่แต่ละจุดบนแกน $j\ \Omega$ ในระนาบเอสไปสู่ความถี่แต่ละจุดบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งในระนาบแซด ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีปัญหาเกิดการเหลื่อม (Aliasing) ของสเปกตรัม ดังนั้นเราจะพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอนาลอกได้ดังนี้

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{a_0}{b_1 s + b_0} \tag{3.45}$$

สามารถจัดรูปสมการที่ (3.45) ใหม่จะได้ว่า

$$b_1 s Y_a(s) + b_0 Y_a(s) = a_0 X_a(s) \tag{3.46}$$

ทำการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse laplace transform) เพื่อหาความสัมพันธ์ทางเวลาและจัดให้อยู่ในรูปสมการผลต่างสืบเนื่อง

$$b_1 y_a'(t) + b_0 y_a(t) = a_0 x_a(t) \tag{3.47}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ทฤษฎีการอินทิเกรตเขียนได้ว่า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_a(t) = \int_{t_0}^{t} y'_a(t)\,dt + y_a(t_0) \tag{3.48}$$

จากสมการที่ (3.48) กำหนดให้ $t = nT$ และ $t_0 = (n-1)T$ จะได้ว่า

$$y_a(t) = \int_{(n-1)T}^{nT} y'_a(t)\,dt + y_a[(n-1)T] \tag{3.49}$$

ทำการประมาณค่าการอินทิเกรตด้วย กฎการอินทิเกรตแบบสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) ได้

$$y_a(nt) = y_a[(n-1)T] + (T/2)\,\{y'_a(nt) + y'_a[(n-1)T]\} \tag{3.50}$$

จากสมการที่ (3.47) สามารถเขียนได้ว่า

$$y'_a(t) = \frac{-b_0}{b_1} y_a(t) + \frac{a_0}{b_1} x_a(t) \tag{3.51}$$

$$y'_a[(n-1)]\,T = \frac{-b_0}{b_1} y_a([(n-1)]\,T + \frac{a_0}{b_1} x_a[(n-1)]\,T \tag{3.52}$$

นำสมการที่ (3.51) และ (3.52) แทนลงในสมการที่ (3.50) จะได้ว่า

$$y_a(nt) = y_a[(n-1)T] + (T/2)\left\{\frac{-b_0}{b_1} y_a(t) + \frac{a_0}{b_1} x_a(t)\right.$$

$$\left.\frac{-b_0}{b_1} y_a([(n-1)]\,T + \frac{a_0}{b_1} x_a[(n-1)]\,T\right\} \tag{3.53}$$

ทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.54) จะได้ว่า

$$Y(z) - Y(z)\,z^{-1} + \frac{b_0\,T}{2b_1} Y(z) + \frac{b_0\,T}{2b_1} Y(z)\,z^{-1} = \frac{a_0\,T}{2b_1} X(z) + \frac{a_0\,T}{2b_1} X(z)\,z^{-1} \tag{3.54}$$

เอกสารนี้เป็น ... ไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัดรูปสมการที่ (3.54) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\dfrac{a_0 T}{2b_1}+\dfrac{a_0 T}{2b_1}z^{-1}}{1-z^{-1}+\dfrac{b_0 T}{2b_1}+\dfrac{b_0 T}{2b_1}z^{-1}} \tag{3.55}$$

$$=\frac{a_0}{b_1\dfrac{2}{T}\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+b_0} \tag{3.56}$$

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.45) และ (3.56) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s\to[(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]} \tag{3.57}$$

จะได้ว่า

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad \text{และ} \quad z=\frac{2+sT}{2-sT} \tag{3.58}$$

กำหนดให้ $s=\sigma+j\,\Omega$ แทนลงในสมการที่ (3.58) จะได้ว่า

$$|z|=\left|\frac{1+\dfrac{T}{2}\sigma+j\dfrac{T}{2}\Omega}{1-\dfrac{T}{2}\sigma-j\dfrac{T}{2}\Omega}\right|$$

$$|z|=\left|\frac{\left(1+\dfrac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\dfrac{T}{2}\Omega\right)^2}{\left(1-\dfrac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\dfrac{T}{2}\Omega\right)^2}\right|^2 \tag{3.59}$$

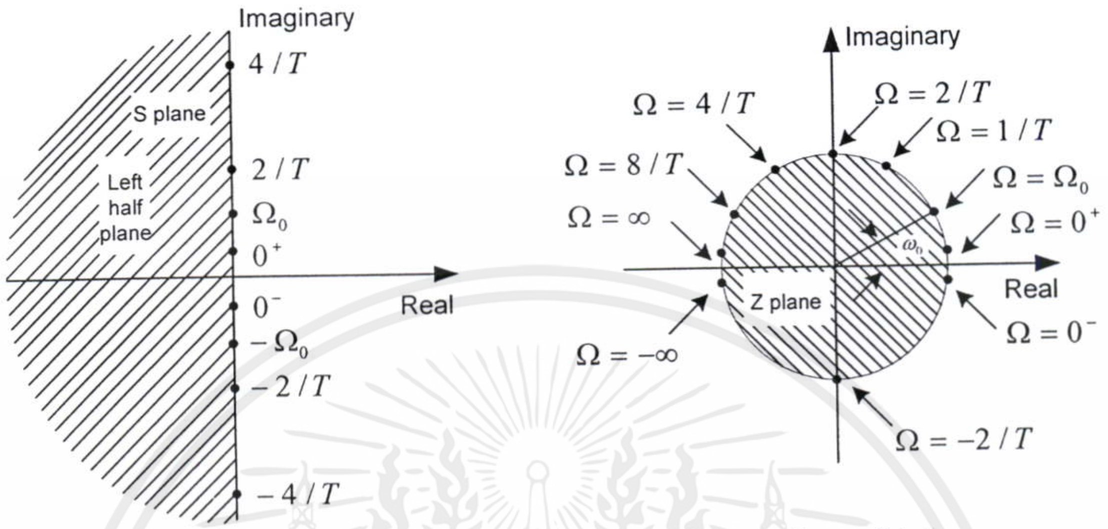
จากสมการที่ (3.59) สามารถแยกพิจารณาได้เป็น 3 กรณีคือ

1. กรณี $\sigma>0$ พบว่า $|z|>1$ นั่นคือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณครึ่งหนึ่งในระนาบเอสทางด้านขวาถูกแม็ป (Mapping) ไปยังบริเวณภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด

2. กรณี $\sigma<0$ พบว่า $|z|<1$ นั่นคือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณครึ่งหนึ่งในระนาบเอสทางด้านซ้ายถูกแม็ป (Mapping) ไปยังบริเวณภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. กรณี $\sigma = 0$ พบว่า $|z| = 1$ คือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณบนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอสถูกแม็ป (Mapping) ไปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด



รูปที่ 3.9 ผลการแม็ป (Mapping) ด้วยวิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

วงจรกรองสัญญาณอนาลอกมีความเสถียรภาพนั้นก็ต่อเมื่อตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพนั้น เมื่อทำการแม็ป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซดก็พบว่าวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลจะมีความเสถียรภาพด้วยเนื่องจากโพลทุกตัวอยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย อย่างไรก็ตามบริเวณที่สนใจเป็นพิเศษ ก็คือกรณีที่ $\sigma = 0$ พบว่า $|z| = 1$ จะได้ว่า $s = j\,\Omega$ และ $z = e^{j\omega T}$ แทนลงในสมการที่ (3.58) จะได้ว่า

$$j\,\Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - e^{j\omega T}}{1 + e^{j\omega T}}\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}}\right) \tag{3.60}$$

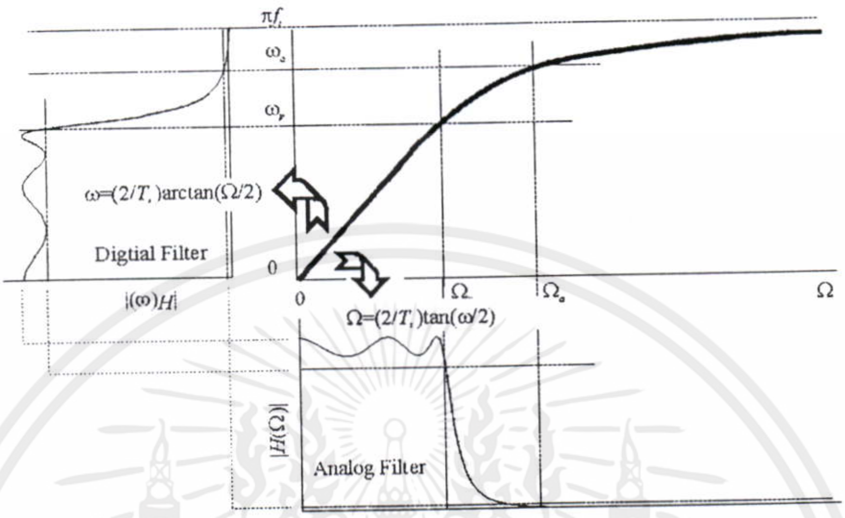
จะได้ว่า

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \tag{3.61}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (3.61) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในโดเมนอนาลอก (Ω) และความถี่ในโดเมนดิจิตอล (ω) โดยมีความสัมพันธ์ในรูปของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังรูปที่ 3.10

จะเห็นได้ว่าในช่วงความถี่สูงๆ ความสัมพันธ์ของความถี่ทั้งสองมีกราฟลักษณะไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งผลกระทบจากความไม่เป็นเชิงเส้นนี้ก็คือจะทำให้ผลตอบสนองทางขนาดและเฟสในบริเวณความถี่สูงๆเพี้ยนไปปรากฏการณ์ลักษณะนี้เรียกว่า ปรากฏการณ์หดแคบ (Wrapping Effect)



รูปที่ 3.10 ความสัมพันธ์ความถี่ในโดเมนอนาลอกและดิจิตอล

ดังนั้นในการออกแบบจึงต้องมีการชดเชยผลของปรากฏการณ์หดแคบนี้ (Prewrapping) ซึ่งสรุปขั้นตอนการออกแบบวงจรสัญญาณดิจิตอลด้วยวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มได้ดังนี้

1. ออกแบบวงจรกรองสัญญาณอนาลอกต้นแบบ โดยการหาฟังก์ชันถ่ายโอน $H_a(s)$
2. กำหนดความถี่คัดออฟ (Cutoff frequency) และความถี่สุ่ม (Sampling frequency) ของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล
3. ทำการชดเชยผลของปรากฏการณ์หดแคบ โดยการหาค่า $\Omega = \dfrac{2}{T}\tan\dfrac{\omega T}{2}$
4. การสเกลความถี่ (Frequency scaling) ของ $H_a(s)$
5. หาค่า $H(z)$ โดยแทนค่า $s = \dfrac{2}{T}\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$

3.3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด

คำว่า IIR ย่อมาจาก Infinite impulse response ซึ่งหมายความว่า ผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัดหรือถึงอนันต์ (Infinite)) ทั้งนี้ เพราะวงจรกรองความถี่ชนิดนี้มีคุณสมบัติประจำตัวที่สำคัญคือ หากเราป้อนสัญญาณ อิมพัลส์ให้กับวงจรนี้แล้ว สัญญาณตอบสนองจะไม่สิ้นสุด แต่จะมีไปจนถึงอนันต์ ดังนั้น อาจเรียกวงจรนี้ว่า วงจรกรองความถี่แบบป้อนกลับ (Recursive filter) หรือป้อนกลับเชิงเลขเชิงเลข เพราะสัญญาณเอาท์พุทจะขึ้นอยู่กับค่าสัญญาณอินพุทที่ป้อนเข้ามาและ

สัญญาณเอาท์พุทก่อนหน้านั้นโดยทั่วไป ถ้าให้สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่เชิงเลขมีจำนวนจำกัด อาจเขียนเป็นสมการผลต่างสืบเนื่องที่ M (M^{th} order differential equation) สำหรับวงจรกรองความถี่ระบบเวลาจริงได้

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k) \tag{3.62}$$

โดยที่ $x(n)$, $y(n)$ เป็นลำดับสัญญาณเข้าและออกตามลำดับของตัวกรอง

a_k , b_k เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวกรอง

ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}} \tag{3.63}$$

จากสมการการที่ (3.63) สามารถนำมาเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots\cdots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \cdots\cdots + b_M z^{-M}} \tag{3.64}$$

จากสมการที่ (3.64) นำไปจัดเทอมต่างๆใหม่และเขียนอยู่ในรูปสมการผลต่างสืบเนื่องได้

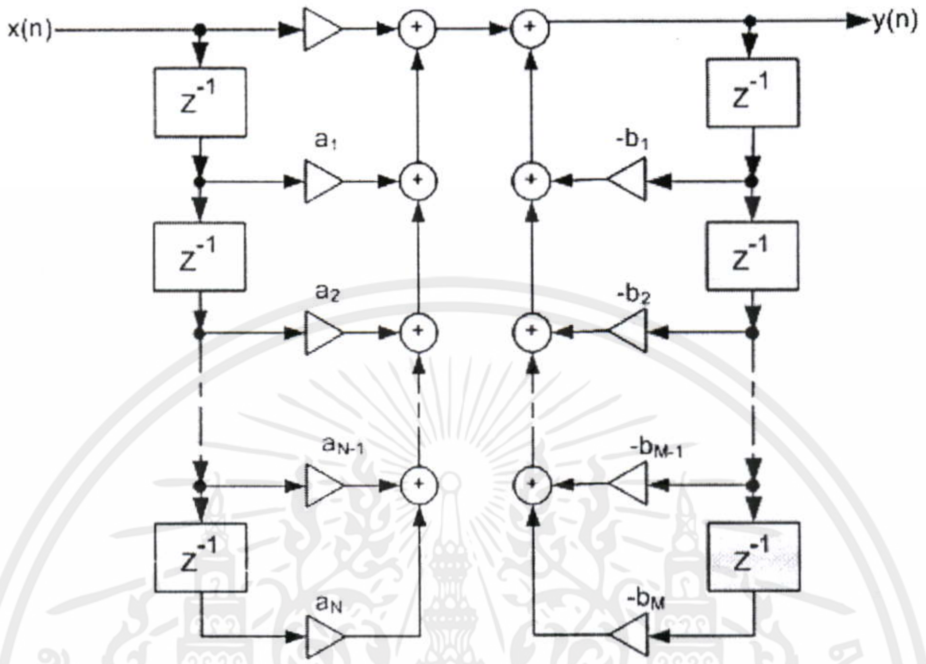
$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^{M} b_k Y(z) z^{-k} \tag{3.65}$$

3.3.1 โครงสร้างแบบโดยตรง 1 (Direct form I)

โครงสร้างแบบนี้ใช้อุปกรณ์หน่วงสัญญาณหรือชิฟรีจิสเตอร์ถึงสองชุด ชุดหนึ่งสำหรับบรรจุลำดับสัญญาณเข้า $x(n-k)$ อีกชุดหนึ่งจะไว้ใช้สำหรับบรรจุลำดับสัญญาณออก $y(n-k)$ โดยที่ $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$ โครงสร้างของวงจกรองสัญญาณนี้ไม่เหมาะสมสำหรับวงจรกรองสัญญาณที่มีวางโพลอยู่ใกล้เส้นรอบวงกลมรัศมี 1 หน่วย ทั้งนี้เนื่องจากปรากฏการณ์ซึ่งไม่เป็นเชิงเส้นเช่น สิ่งรบกวนที่เกิดจากการคูณ (Product quantization noise) และสภาพความไว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ของสัมประสิทธิ์ (Coefficient sensitivity) สูงนิยมสร้างเฉพาะกับวงจรที่มีอันดับต่ำ เช่น อันดับหนึ่ง หรืออันดับสอง



รูปที่ 3.11 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง I

3.3.2 โครงสร้างแบบโดยตรง 2 (Direct form II)

โครงสร้างแบบนี้เริ่มต้นด้วยการแยกฟังก์ชันถ่ายโอนหรือ $H(z)$ ออกเป็น 2 วงจรคูณแล้วต่ออนุกรมกันดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left[\frac{1}{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}\right]\left[\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right] \tag{3.66}$$

$$= H_1(z) \times H_2(z) \tag{3.67}$$

โดยที่ $H_1(z)$ เป็นวงจรกรองสัญญาณที่มีโพลเพียงอย่างเดียว

$H_2(z)$ เป็นวงจรกรองสัญญาณที่ซีโรเพียงอย่างเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่... ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \left[\frac{1}{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}} \right] \tag{3.68}$$

และ

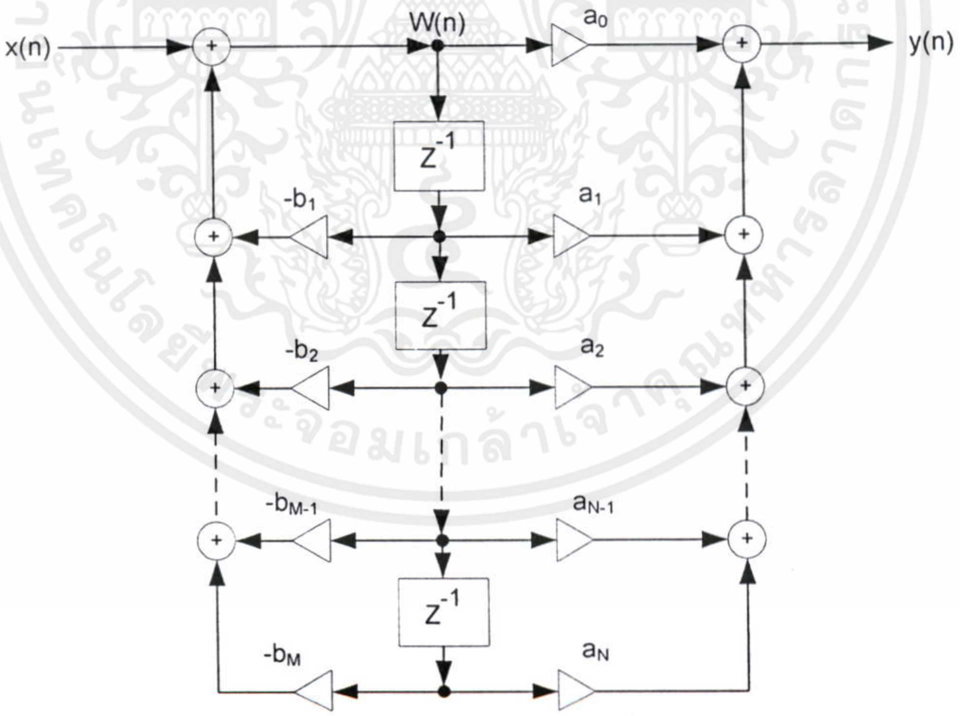
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \left[\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} \right] \tag{3.69}$$

นำสมการที่ (3.68) และสมการที่ (3.69) มาเขียนในรูปสมการผลต่างสืบเนื่องได้ดังนี้

$$w(n) = x(n) - \sum_{k=0}^{M} b_k w(n-k) \tag{3.70}$$

และ

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k w(n-k) \tag{3.71}$$



รูปที่ 3.12 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง II

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 3.12 การคำนวณของสัญญาณออก $y(n)$ ในครั้งแรกต้องคำนวณหาลำดับสัญญาณ $w(n)$ ก่อน ซึ่งเป็นสัญญาณกลาง (Intermediate signal) ตามสมการที่ (3.70) แล้วจึงใช้ผลลัพธ์นี้ไปแทนในสมการที่ (3.71) เพื่อคำนวณหา $y(n)$ ซึ่งเป็นลำดับสัญญาณออกตามต้องการ โครงสร้างแบบโดยตรง 2 มีข้อเสียคือคุณสมบัติความไม่เป็นเชิงเส้นเช่น สิ่งรบกวนจากผลการคูณหรือสภาพความไวของสัมประสิทธิ์เหมือนโครงสร้างแบบโดยตรง 1 และมีโอกาสเกิดการล้น (Over flow) ได้มากกว่าโครงสร้างแบบโดยตรง 1 ส่วนข้อดีโครงสร้างแบบโดยตรง 1และโครงสร้างแบบโดยตรง 2 นิยมกันไปสร้างเป็นวงจรกรองสัญญาณกันมาก สังเกตจากลำดับสัญญาณเข้าของตัวคูณทุกตัวดังแสดงในรูปที่ 3.11 และรูปที่ 3.12 ลำดับสัญญาณเข้านี้ไม่ได้ขึ้นกับสัญญาณที่เพิ่งคำนวณไปเลยด้วยเหตุผลนี้ทำให้เราสามารถสร้างวงจรที่สามารถทำการคูณพร้อมๆ กันได้เลย อันเป็นผลให้การประมวลผลหรือการคำนวณของวงจรมีความเร็วสูง ทำให้แถบความถี่ปฏิบัติงาน (Bandwidth) ของวงจรสูงขึ้น

3.3.3 โครงสร้างแบบอนุกรม (Cascade form)

โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณที่กล่าวมาข้างต้นคือวงจรกรองสัญญาณโครงสร้างแบบโดยตรง 1 และโครงสร้างแบบโดยตรง 2 นั้นจะมีปัญหาในการควบคุมปรากฏการณ์ความไม่เป็นเชิงเส้นได้ยาก เมื่อค่าของ M และ N มีค่ามากๆ (นั่นก็คืออันดับสูงๆ) ดังนั้นจึงนิยมแบ่งย่อยวงจรกรองสัญญาณออกเป็นส่วยย่อยๆ อันดับต่ำๆมาต่ออนุกรมกัน (Cascade form) หรือต่อขนาน วิธีการก็คือนำฟังก์ชันถ่ายโอนมาเขียนในรูปผลคูณย่อยๆ ดังแสดงในสมการที่ (3.72)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 \sum_{k=0}^{K} H_k(z) \tag{3.72}$$

โดยที่ $H_k(z)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอันดับหนึ่งหรืออันดับสองตามลำดับดังนี้

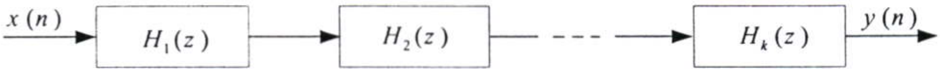
$$H_k(z) = \frac{1 + a_{1k} z^{-1}}{1 + b_{1k} z^{-1}}$$

$$H_k(z) = \frac{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}} \tag{3.73}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น

จากรูปที่ 3.13 $H_k(z)$ อาจจะสร้างได้โดยใช้โครงสร้างแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 โครงสร้างแบบนี้ทำให้สภาพไวต่อสัมประสิทธิ์ต่ำกว่าแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 มาก

สำหรับสิ่งรบกวนนั้นถ้าหากทำสเกล (Scaling) สัมประสิทธิ์แต่ละภาคให้ดีแล้วก็ต้องสามารถกำจัดสิ่งรบกวนออกไปได้



รูปที่ 3.13 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบอนุกรม

3.3.4 โครงสร้างแบบต่อขนาน (Parallel form)

สำหรับโครงสร้างแบบต่อขนาน (Parallel form) หาได้จากการนำฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z)$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อย ดังแสดงในสมการที่ (3.74)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = C + \sum_{k=0}^{K} H_k(z) \tag{3.74}$$

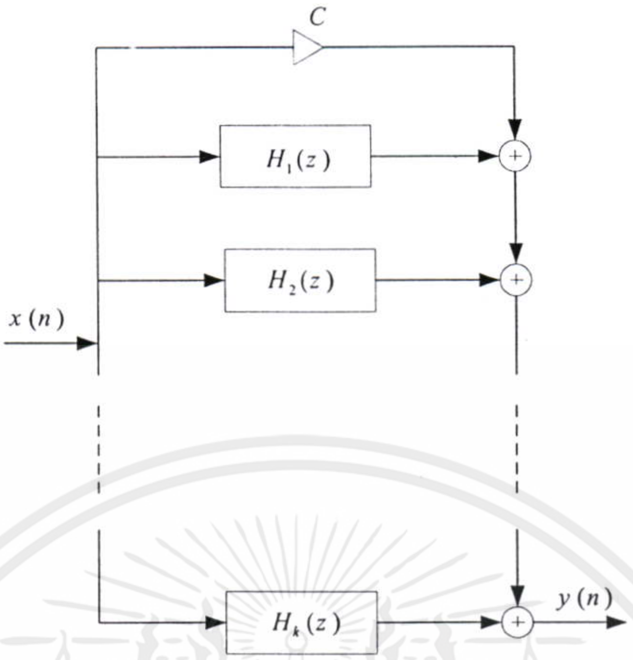
โดยที่ $H_k(z)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอันดับหนึ่งหรืออันดับสอง ตามลำดับดังนี้

$$H_k(z) = \frac{a_{0k}}{1 + b_{1k} z^{-1}}$$

$$H_k(z) = \frac{a_{0k} + a_{1k} z^{-1}}{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}} \tag{3.75}$$

โครงสร้างต่อแบบขนานโดยทั่วไปแล้วให้ระดับของสิ่งรบกวนน้อยกว่าแบบต่ออนุกรม $H_k(z)$ สามารถนำโครงสร้างแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 มาสร้างแบบขนานได้ ดังรูปที่ 3.14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.14 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบขนาน

ในการจัดการโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณดิจิตอลแบบไอไออาร์ให้มีโครงสร้างเป็นแบบขนานจะให้ผลดีคือเป็นวิธีที่เหมาะที่จะใช้กับระบบประมวลผลสัญญาณดิจิตอลแบบขนานซึ่งจะสามารถทำงานได้เร็ว

3.4 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญเกี่ยวข้องกับหลักการการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด และความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในอนาลอกโดเมน (Analog domain) กับดิจิตอลโดเมน (Digital domain) ด้วยวิธีการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบต่างๆ ดังที่กล่าวมาทั้งหมดเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่จะนำไปประยุกต์เข้ากับ การแปลง s-z พร้อมการแปลงความถี่โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์ นอกจากนั้นยังได้กล่าวถึงเกี่ยวกับประเภท โครงสร้างต่างๆ คุณสมบัติของการออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิตอล โดยใช้วิธีการต่างๆ เพื่อให้เกิดความรู้เป็นพื้นฐานและแนวทางในการออกแบบต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลข โดยการดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์

4.1 วงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงอุปมาน

โดยส่วนมากเมื่อพูดถึงวงจรกรองสัญญาณไบควอดมักจะนึกถึงวงจรกรองสัญญาณไบควอดที่เป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog filter) ซึ่งจะให้เอาท์พุทที่เป็นผลตอบสนองทางความถี่หลายแบบ เช่นผลตอบสนองแบบความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) ความถี่สูงผ่าน (High-pass) และแถบความถี่ผ่าน (Band-pass) เป็นต้น ซึ่งบางชนิดอาจมีเอาท์พุทที่เป็นผลตอบสนองแบบแถบความถี่หยุด (Band-stop) และผ่านทุกความถี่ (All-pass) ด้วย โดยรูปแบบพื้นฐานในการสร้างวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงอุปมานนี้อาจทำการสร้างด้วยวงจรออปแอมป์ [1] หรือเป็นพวกวงจร CMOS Transistors ตามแต่เทคโนโลยีการออกแบบ แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นฟังก์ชั่นถ่ายโอน (Transfer function) จะเป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงอุปมานหรือกล่าวว่าเป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนในเอสโดเมน (s-Domain) ดังตัวอย่างที่ออกแบบวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงอุปมานโดยจะเริ่มพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบความถี่ต่ำต้นแบบ โดยที่ $T(s)$ เป็นตัวจำแนกความเป็นไปได้ของเกน(Gain) และวงจรที่นำมาทำจะเป็นอินเวอร์ติ้ง(Inverting) หรือนอนอินเวอร์ติ้ง(Non-inverting) ดังนั้นฟังก์ชั่นถ่ายโอนคือ

$$T(s)=\frac{\pm H\omega_0^2}{s^2+(\omega_0/Q)s+\omega_0^2} \tag{4.1}$$

ต่อมาจึงทำการสเกลความถี่โดยให้ $\omega_0=1$ และเลือกเครื่องหมายลบของฟังก์ชันถ่ายโอนจะได้

$$T(s)=\frac{-H}{s^2+(1/Q)s+1}=\frac{V_2}{V_1} \tag{4.2}$$

$$\left(s^2+(1/Q)s+1\right)V_2=-HV_1 \tag{4.3}$$

และทำการหารสมการ (4.3) ทั้งสองด้านด้วย $s(s\ \ +1/Q)$ จะได้ดังสมการ(4.4)

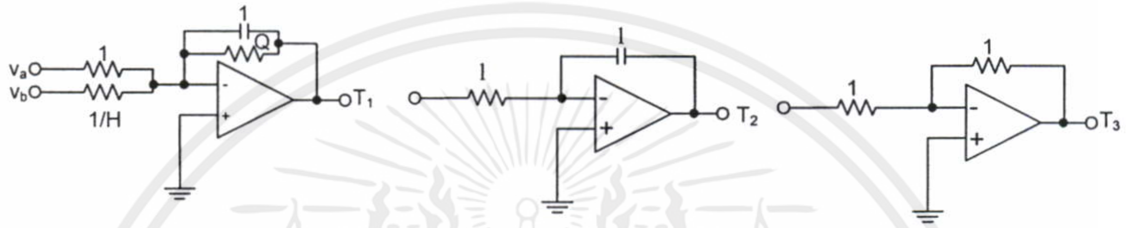
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(1+\frac{1}{s(s\ \ +1/Q)}\right)V_2=\frac{-H}{s(s\ \ +1/Q)}V_1 \tag{4.4}$$

เมื่อทำการย้ายข้างสมการ(4.4) จะได้

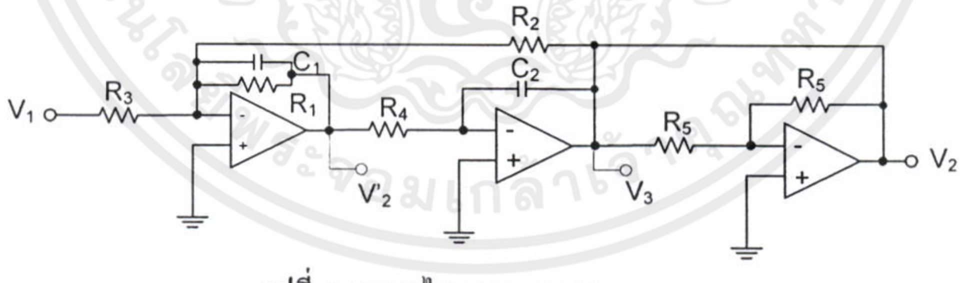
$$V_2 = \left(\frac{-1}{s + 1/Q} V_2 + \frac{-H}{s + 1/Q} V_1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{s} \right) . (-1) \tag{4.5}$$

ซึ่งจากการทำการคำนวณและการวิเคราะห์จะได้สามวงจรคือ



รูปที่ 4.1 (ก)วงจรรวมสัญญาณ (Sum signal) (ข)วงจรอินทิเกรเตอร์ (Integrator) (ค)วงจรขยายแบบกลับเฟสที่มีอัตราขยายเป็น 1

โดยถ้านำทั้งสามวงจรมาต่อกันแล้วเพิ่มส่วนป้อนกลับ(Feedback) จะเรียกว่าสมการไบควอดแบบสามเอาท์พุท แสดงดังรูป



รูปที่ 4.2 วงจรไบควอดของ Tow-thomas

$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-1/R_3R_4C_1C_2}{s^2 + (1/R_1C_1)s + 1/R_2R_4C_1C_2} \tag{4.6}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยจากสมการฟังก์ชันถ่ายโอน(4.6) จะพบว่าจะมีสามพารามิเตอร์ที่ต้องพิจารณาคือสมการ (4.7), (4.8) และ (4.9)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_2}} \tag{4.7}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_1^2 C_1}{R_2 R_4 C_2}} \tag{4.8}$$

$$H = \frac{R_2}{R_3} \tag{4.9}$$

และยังมีอีกสิ่งที่น่าสนใจในวงจรไบควอดนี้ก็คือค่า $\frac{V_2}{V_3} = -1$ ทำให้การหาค่าของ $\frac{V_3}{V_1}$ ได้ดังนี้

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{V_3}{V_2} = -\frac{V_2}{V_1} \tag{4.10}$$

นั้นก็คือฟังก์ชั่นถ่ายโอน $\frac{V_3}{V_1}$ จะเรียกว่าวงจรกรองความถี่ต่ำแบบไม่กลับเฟส โดยจะย้อนกลับไปมีความสัมพันธ์ในรูปวงจร คือความสัมพันธ์ระหว่าง V_3 และ $V_2^{'}$ โดยฟังก์ชั่นถ่ายโอนคือ

$$\frac{V_3}{V_2^{'}} = \frac{1}{R_4 C_2 s} \tag{4.11}$$

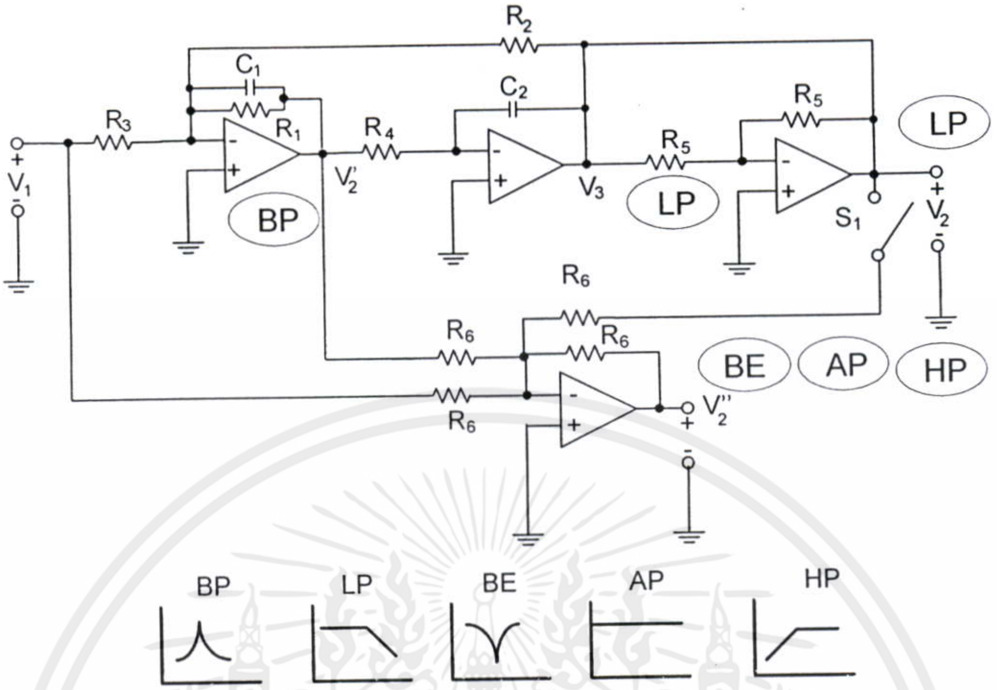
จากกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{V_2^{'}}{V_3} \times \frac{V_3}{V_2} \times \frac{V_2}{V_1} = -\frac{V_2^{'}}{V_2} \tag{4.12}$$

ทำให้ได้

$$\frac{V_2^{'}}{V_1} = \frac{(-1/R_3 C_1)s}{s^2 + (1/R_1 C_1)s + 1/R_2 R_4 C_1 C_2} \tag{4.13}$$

ซึ่งในส่วนนี้ค่า $\frac{V_2^{'}}{V_1}$ นั้นคือฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่านโดยจากรูปที่ 4.2 จากการศึกษาจะพบว่าค่า R_2 สามารถปรับค่าของ ω_0 และ R_1 นั้นสามารถปรับค่าของ Q โดยไม่เปลี่ยนค่า ω_0 และสุดท้าย R_3 สามารถเป็นการปรับค่าการออกแบบของ H หรือ เกนสำหรับวงจรนอกจากจะปรับ ω_0 และQ ซึ่งสามารถนำไปพิจารณาเพื่อให้มีค่าเอาท์พุทให้สามารถออกมากกว่านี้ได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 วงจรไบควอดเชิงอุปมานที่ให้ค่าผลตอบสนอง 5 แบบ

โดยจะนำสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองไบควอดทั่วไปมาพิจารณาจากรูปที่ 4.3 จะได้

$$T(s)=\frac{V_2''}{V_1}=\frac{s^2+(1/R_1C_1-1/R_3C_1)s+1/R_2R_4C_1C_2}{s^2+\left(1/R_1C_1\right)s+1/R_2R_4C_1C_2} \tag{4.14}$$

เขียนสมการ (4.14) กระชับได้ดังสมการ (4.15)

$$T(s)=\frac{k_1s^2+k_2(\omega_0/Q)s+k_3\omega_0^2}{s^2+(\omega_0/Q)s+\omega_0^2} \tag{4.15}$$

โดยที่ค่าคงที่ k_1 , k_2 และ k_3 เป็นค่า ±1 หรือ 0 ทำให้สามารถนำมาเขียนเป็นแต่ละกรณีได้ดังตารางที่ 4.1

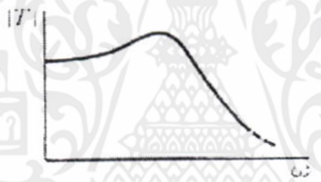
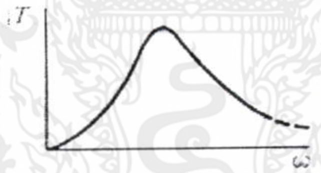
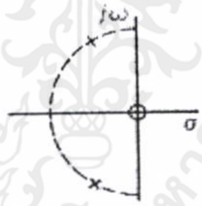
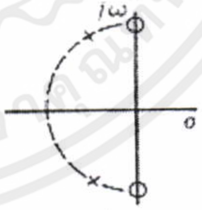
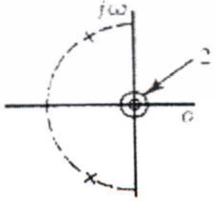
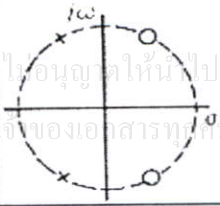
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 กรณีต่างๆเมื่อ k_1 , k_2 และ k_3 เป็นค่า ±1 หรือ 0

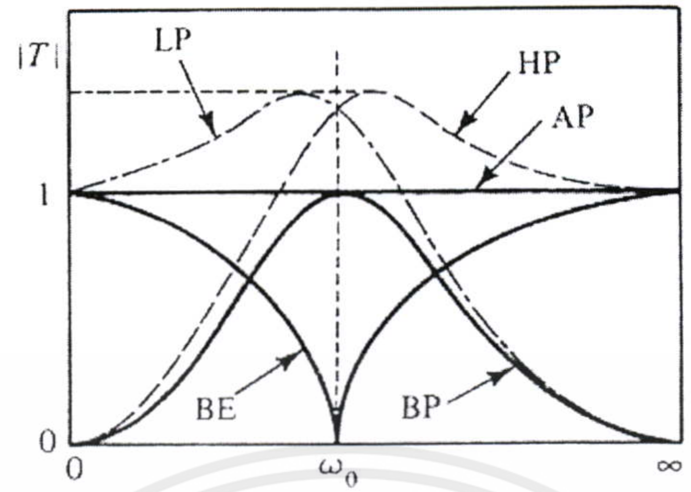
Case	k_1	k_2	k_3	Name
a	0	0	1	Low-pass
b	1	0	0	High-pass
c	0	1	0	Band-pass
d	1	0	1	Band-stop
e*	1	-1	1	All-pass
f*	0	1	1	Low-pass
g*	1	1	0	Band-pass

*No realizations were considered

ตารางที่ 4.2 มาตรฐานของค่าผลตอบสนองอันดับ 2

	Frequency response	*Poles/zeros*	*Name*
$T_{LP} = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Lowpass
$T_{BP} = \dfrac{\dfrac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			**Bandpass**
$T_{BE} = \dfrac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Bandstop "notch"
$T_{HP} = \dfrac{s^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Highpass
$T_{AP} = \dfrac{s^2 - \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			**Allpass**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงที่มาของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรไบควอดเชิงอุปมานมุมของเฟสของวงจรกรองแถบความที่ต่ำคือ

$$\theta_{LP} = -\tan^{-1}(\frac{\omega / Q}{1-\omega^2}) \quad (4.16)$$

โดยแทน $\omega_0 = 1$ ในสมการที่ (4.17) ที่มาจากรูปสมการทั่วไปนั้นเอง

$$\theta_{LP} = -\tan^{-1}\left(\frac{(\omega / Q)(\omega / \omega_0)}{1-(\omega / \omega_0)^2}\right) \quad (4.17)$$

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่แทน $s = j\omega$

$$T(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (4.18)$$

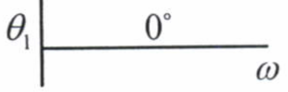
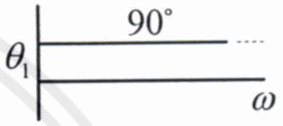
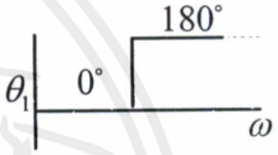
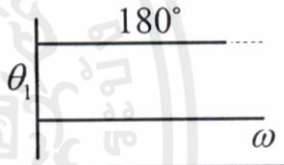
เมื่อมี θ_1 เป็นมุมของ $N(j\omega)$. ϕ เป็นมุมของ $D(j\omega)$ คือเป็นมุมของโพลและ θ เป็นมุมของ $T(j\omega)$ และนั้นคือ

$$\theta = \theta_1 - \phi_1 \quad (4.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อโพลของทั้ง 5 ชนิดของผลตอบสนองวงจรกรองเหมือนกันดังตารางที่ 4.2 ที่ผ่านมา และ ϕ_1 ก็จะเหมือนกันของผลตอบสนองทั้งหมดโดยทั่วไปนั้นคือ $-\theta_{LP}$ ดังนั้น จึงสามารถหา θ_1 ของผลตอบสนองทั้ง 5 ได้ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองไบควอด

Name	$N(s)$	$N(j\omega)$	Plot of $\phi_1(\omega)$
Low-pass	ω_0^2	ω_0^2	
Band-pass	$(\frac{\omega_0}{Q})s$	$j\left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)$	
Band-stop	$s^2+\omega_0^2$	$s^2+\omega_0^2$	
High-pass	s^2	$-\omega^2$	

โดยความแตกต่างสำหรับ $N(s)$ ที่กำหนดให้ในตารางที่ 4.3 ในกรณีแถบความถี่ผ่าน (Band-pass) หาได้จาก $N(s)=(\omega_0/Q)s$ ซึ่ง $N(j\omega)=j(\omega_0\omega/Q)$ และ j เป็นตัวบอกว่าเป็นมุมของเฟสของ $+90^\circ$ ดังนั้น

$$\theta_{BP}=\theta_{LP}+90^\circ \tag{4.20}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับในกรณีความถี่สูงผ่าน(High-pass) $N(s)=s^2$ และ $N(j\omega)=-\omega^2$ ซึ่งแสดงถึงมุมของเฟสคือ180° ที่แสดงในสมการที่ (4.21)

$$\theta_{HP}=\theta_{LP}+180^\circ \tag{4.21}$$

สำหรับฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรผ่านทุกความถี่(All-pass) มีมุมของ $N(j\omega)$ เหมือนกับมุมของ $D(j\omega)$ และซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับในกรณีแบบความถี่ต่ำผ่านดังแสดงในสมการที่ (4.22)

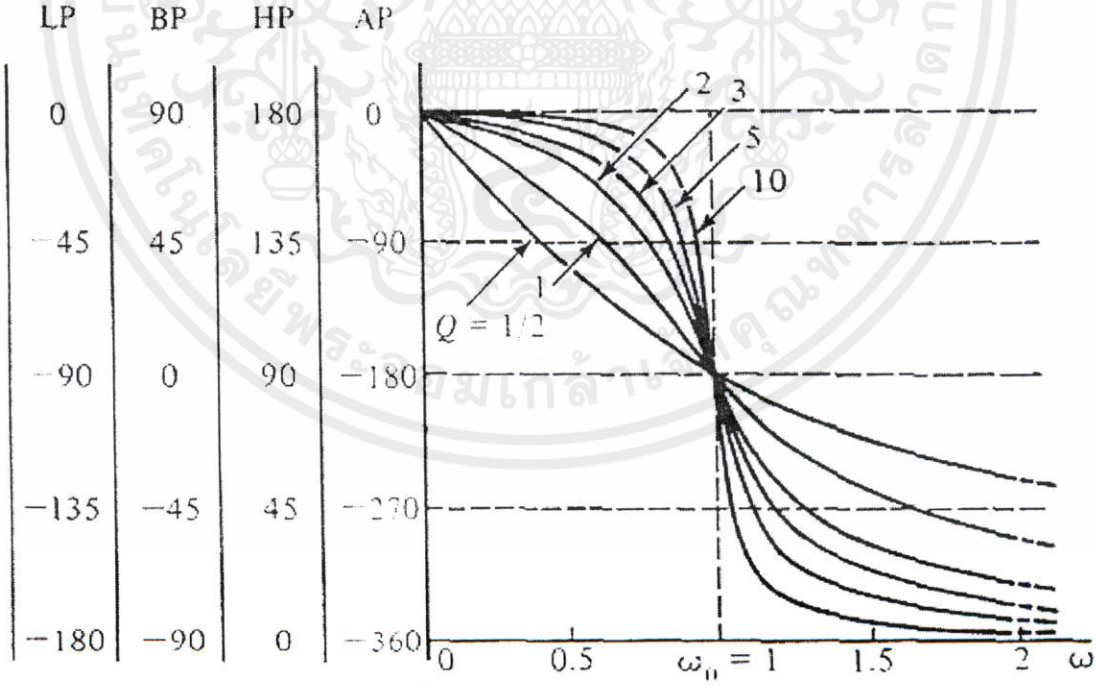
$$\theta_{AP} = 2\theta_{LP} \tag{4.22}$$

จากสมการที่ (4.22) ผ่านมานั้นและจากการพล๊อทรูปของรูปที่ 4.4 ด้านล่างทำให้ดูเหมือนว่ามุมเฟสของทั้งสามกรณีคือแถบความถี่ผ่าน(Band-pass) ความถี่สูงผ่าน(High-pass) และวงจรผ่านทุกความถี่(All-pass) มีลักษณะเดียวกับกรณีของความถี่ต่ำผ่าน(Low-pass) โดยทำการบวกมุมเข้าไปและในกรณีของวงจรผ่านทุกความถี่(All-pass) เพิ่มเป็นสองเท่าของความถี่ต่ำผ่าน(Low-pass) เช่นนั้นแล้วทำใหการหาฟังก์ชั่นวงจรกรองแบบแถบความถี่หยุดมี $N(j\omega)$ คือ

$$N(j\omega) = -\omega^2 + \omega_0^2 \tag{4.23}$$

ซึ่งเป็นบวกสำหรับ $\omega < \omega_0$ และเป็นลบสำหรับ $\omega > \omega_0$ เฟสเปลี่ยนแปลงจากการ 0° ถึง 180° เมื่อ $\omega = \omega_0$ ดังสมการที่ (4.24)

$$\theta_{BE} = \theta_{LP} + 0^\circ \ or\ 180^\circ \tag{4.24}$$



รูปที่ 4.4 ผลตอบสนองทางเฟส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วงจรกรองสัญญาณไบควอดที่แสดงด้านบนนี้วงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน เป็นการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบไบควอดโดยมีฟังก์ชั่นถ่ายโอนในเอสโดเมน(s-Domain) และสามารถทำการสร้าง (Implementation) ด้วยอุปกรณ์ที่ทำงานในลักษณะของวงจรอนาลอกโดยใช้อุปกรณ์จำพวก Op-amps หรืออื่นๆ ในขณะที่วงจรกรองสัญญาณไบควอดที่นำเสนอเป็นลักษณะของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข (Digital filter) ที่สามารถทำการสร้างด้วยอุปกรณ์ที่เป็นวงจรดิจิตอล ซึ่งถ้าจะถามข้อดีของวงจรที่นำเสนอเทียบกับใน วงจรกรองสัญญาณไบควอดที่เป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน ก็ตามคำจำกัดความที่มีการบ่งบอกถึงข้อดีข้อเสียระหว่างการประมวลผลสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog signal processing)และการประมวลสัญญาณเชิงเลข (Digital signal processing) นั่นเอง

4.2 ทฤษฎีทวินาม (The Binomial theorem)

ทวินามหรือไบโนเมียล คือ สมการพีชคณิตที่มีเทอม 2 เทอม เช่น $(a+b)$ ในที่นี้จะกล่าวถึงสมการทั่วๆไปที่เรียกว่า ทฤษฎีทวินามสำหรับการยกกำลังทวินามเริ่มต้นจากการคูณ หรือการกระจายกำลัง $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวกใดๆ เช่น $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ จะได้ผลลัพธ์ในรูปผลรวมของพจน์ต่างๆดังแสดงในตารางที่ 4.4 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4.4 การกระจายเลขชี้กำลัง

n	$(a+b)^n$	ผลที่ได้จากการกระจายกำลัง
0	$(a+b)^0$	1
1	$(a+b)^1$	$a+b$
2	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
3	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
4	$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
5	$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

จะเห็นได้ว่าแถวล่างในตารางเริ่มต้นด้วยเทอม a^5 เมื่อพิจารณาเป็น a^5b^0 เทอมที่ตามหลังมามีเลขชี้กำลังของ a ลดลงเทอมละ 1 และเลขชี้กำลังของ b เพิ่มขึ้นเทอมละ 1 จนมีเลขชี้กำลังเป็น 5 สำหรับในแถวอื่นๆก็มีลักษณะเช่นเดียวกัน ลำดับต่อไปเป็นการพิจารณาสัมประสิทธิ์และการหาค่าสัมประสิทธิ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \quad (4.25)$$

สังเกตว่าสมการ (4.25) มีทวินาม 5 ตัว และเทอมที่อยู่ในรูปแบบที่ได้รับการขยายเป็นผลลัพธ์ของผลคูณของเทอมในทวินาม เช่นการหา a^3b^2 ในรูปการขยายของ $(a+b)^n$ นั้น โดยจะต้องคูณเทอม a จากทวินาม 3 ตัว กับเทอม b อื่นๆ จากทวินาม 2 ตัว กรณีนี้หาแฟกเตอร์ a ได้ $\binom{5}{3}$ วิธี ซึ่งก็คือ จำนวนวิธีที่เลือกทวินาม 3 ตัวจากทวินาม 5 ตัว ในทำนองเดียวกัน ในการหาแฟคเตอร์ b ทำได้ $\binom{5}{2}$ วิธีซึ่งก็คือ จำนวนวิธีที่เลือกทวินาม 2 ตัวจากทวินาม 5 ตัว กรณีเช่นนี้พิสูจน์ได้ว่า $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ และ จาก $(a+b)^n$ ทำให้สรุปได้ว่าสัมประสิทธิ์ของเทอม $a^{n-k}b^k$ คือ $\binom{n}{k}$ หรือ $\binom{n}{n-k}$ จากคำอธิบายเหล่านี้ ทำให้ทราบว่า **ทฤษฎีทวินาม** เป็นทฤษฎีสำหรับการขยาย $(a+b)^n$ ให้อยู่รูปผลบวก อีกนั้นหนึ่งทฤษฎีทวินามโดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก คือ

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{a+b})^{\mathrm{n}} &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^3b^3 + \ldots + \binom{n}{n}a^0b^n \\
&= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^3b^3 + \ldots + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}a^{n-k}b^k \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

นอกจากนี้ ยังเรียก $\binom{n}{k}$ ว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficient) มีอีกวิธีหนึ่งที่ใช้คำนวณสัมประสิทธิ์ทวินามของ $(A+B)^n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ และจัดแถวสามเหลี่ยมในตารางที่ 4.5 ที่เรียกว่าสามเหลี่ยมของปาสคาลดังนี้

ตาราง ที่ 4.5 สามเหลี่ยมของปาสคาล

n	**สัมประสิทธิ์ทวินาม**
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สิ่งที่ควรทราบในการกระจาย $(a+b)^n$ มีดังนี้

1. ผลรวมของการกระจายมี n+1 พจน์เสมอ
2. ผลรวมของกำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์ต้องเท่ากับ n
3. กำลังของ a ในพจน์แรกจะเริ่มจาก n แล้วลดลงไปที่ละ1ในแต่ละพจน์ถัดไปจนกระทั้งถึง 0
4. กำลังของ b ในพจน์แรกจะเริ่มจาก 0 แล้วเพิ่มไปที่ละ 1ในแต่ละพจน์ถัดไปจนกระทั้งถึง n
5. สัมประสิทธิ์ของพจน์แรกเริ่มจาก $\binom{n}{0}$ และพจน์ถัดไปเป็น $\binom{n}{1},\binom{n}{2}$ ไปเรื่อยๆ จนกระทั้งสุดท้ายเป็น $\binom{n}{n}$
6. ถ้าแทน $a=1$ และ $b=1$ ไปในสมการที่ (4.26) จะได้ลักษณะที่สำคัญคือ

$$2^n = \binom{n}{1}a + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots \binom{n}{n} \tag{4.27}$$

7. พจน์ที่ $k = T_k = \binom{n}{k+1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$ แต่เพื่อความสะดวกจึงนิยมใช้พจน์ที่ k+1 ดังสมการที่(4.28)

$$k+1 = T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{4.28}$$

8. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $c < k < n$ แล้ว $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$
9. $C_{k,k} = C_{k+1,k} + C_{n+2,k} + \ldots + C_{n,k} = C_{n+1,k+1}$

4.3 การแปลงเชิงเส้นคู่โดยการดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกส์

วิธีการไบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformation) โดยแท้จริงแล้วยังมีหลักการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบต่างๆ อีกเช่น วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า แต่สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีไบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ก็เพราะว่าเป็นเทคนิคที่ได้รับความสนใจมากเป็นพิเศษเพราะการแม็ป (Mapping) จะปืนลักษณะหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one mapping) ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีปัญหาเกิดการเหลื่อม (Aliasing) ของสเปกตรัม ซึ่งการสร้างปาสคาลเมตริกส์ด้วยวิธีการไบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformation) ได้มาจากทฤษฎีทวินาม (Binomial theorem) และสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (4.29) ดังนี้

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{4.29}$$

เมื่อ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficients) โดยที่ $k \le n$

จากความสัมพันธ์ระหว่างระนาบเอส (s Plane) และระนาบแซด (z Plane) ด้วยหลักการวิธีไบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformation) ที่มีคุณสมบัติดังสมการที่ (4.30) นี้คือ

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{4.30}$$

เมื่อได้ทำการพิจารณาวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog filter) ที่เขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามสมการที่ (4.31) โดยในกรณีนี้ได้ให้อันดับของตัวเศษและส่วนเท่ากันดังนี้

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{N} A_i s^i}{\sum_{i=0}^{N} B_i s^i} \tag{4.31}$$

โดยที่ A_i และ B_i เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่และ N คือจำนวนลำดับ (Order)

เมื่อทำการแทนค่าสมการที่ (4.30) ลงในสมการสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานที่สมการที่ (4.31) ก็จะได้สมการฟังก์ชันถ่ายโอนวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขดังสมการ (4.32)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}} \tag{4.32}$$

โดยที่ a_i และ b_i เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.30) และ (4.31) จะได้ว่า

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} A_i \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]^i}{\sum_{i=0}^{N} B_i \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]^i} = \frac{\sum_{i=0}^{N} A_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i}}{\sum_{i=0}^{N} B_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i}} \tag{4.33}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในสมการที่ (4.33) ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะตัวเศษในเทอมของทฤษฎีทวินาม (Binomial theorem) เท่านั้น เพราะการกระจายตัวส่วนก็เหมือนกันดังนั้นสามารถกระจายทางคณิตศาสตร์ได้ตามสมการที่ (4.34) ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(1-z^{-1})^{i}(1+z^{-1})^{N-i} = 1 &+ \left[-\binom{i}{1}+\binom{N-i}{1}\right]z^{-1} + \left[\binom{i}{2}-\binom{N-i}{1}\binom{i}{1}+\binom{N-i}{2}\right]z^{-2} \\
&+ \left[-\binom{i}{3}+\binom{N-i}{1}\binom{i}{2}-\binom{N-i}{2}\binom{i}{1}+\binom{N-i}{3}\right]z^{-3} \\
&+ \left[\binom{i}{4}-\binom{N-i}{1}\binom{i}{3}+\binom{N-i}{2}\binom{i}{2}-\binom{N-i}{3}\binom{i}{1}+\binom{N-i}{4}\right]z^{-4} \\
&+ \cdots + \left[\binom{i}{k}(-1)^{k} + \sum_{n=1}^{k-1}\binom{N-i}{n}\binom{i}{k-n}(-1)^{k-n} + \binom{N-i}{k}\right]z^{-k}
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

จากสมการที่ (4.34) สามารถนำมาเขียนสมการใหม่เพื่อให้รูปกระชับได้ดังสมการที่ (4.35) คือ

$$
\sum_{i=0}^{N} A_i (1-z^{-1})^{i}(1+z^{-1})^{N-i} = \sum_{i=0}^{N} A_i \left[\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(-1)^{k} z^{-k} \sum_{k=0}^{N-i}\binom{N-i}{k} z^{-k}\right] \tag{4.35}
$$

จัดรูปสมการที่ (4.35) และเปลี่ยนตัวแปรดรรชนีใหม่จะได้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.36)

$$
\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{N} A_i [P_{i,j}] z^{-i} \tag{4.36}
$$

เมื่อกำหนดให้ $[P_{i,j}]$ เป็นปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix)

$$
\begin{aligned}
P_{i,j} &= \sum_{n=0}^{i}\binom{N-j}{n}\binom{j}{i-n}(-1)^{i-n} \qquad ; i,j = 0,1,\ldots,N \\
&= \binom{j}{i}(-1)^{i} + \sum_{n=1}^{i-1}\binom{N-j}{n}\binom{j}{i-n}(-1)^{i-n} + \binom{N-j}{i}
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ i , j คือจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์

ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขคำนวณได้จากผลคูณระหว่างปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix) กับค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานได้ดังสมการที่(4.38)

$$[a_i] = [P_{i,j}]\,[A_i] \tag{4.38}$$

เนื่องจากสมการไบควอดที่ใช้เป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานอันดับที่ 2 ดังนั้นสามารถหาสมาชิกของปาสคาลเมตริกซ์ที่สัมพันธ์กับอันดับของวงจรกรองได้ดังนี้

$$P_{i,j} = \sum_{n=0}^{i} \binom{N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{i-n} \qquad \text{เมื่อ } i, j = 0, 1, \ldots N \tag{4.39}$$

จากสมการ(4.39) ด้านบน สามารถนำมาพิจารณาให้ง่ายขึ้นโดยเริ่มแรกพิจารณาที่แถวแรกและคอลัมน์แรกก่อนที่จะคำนวณสมาชิกที่เหลือดังนี้

1. สามารถหาขนาดของปาสคาลเมตริกซ์ได้จาก *(N+1)x (N+1)*
2. พิจารณาแถวแรกจากสมการ $P_{0,j} = 1$ นั้นคือแถวแรกของปาสคาลเมตริกซ์จะมีค่าเป็น 1 ทุกคอลัมน์ของแถวแรก
3. พิจารณาคอลัมน์แรกได้จากสมการ $P_{i,0} = \binom{N}{i}$ นั้นคือเช่น $P_{0,0} = 1$, $P_{1,0} = 2$, $P_{2,0} = 1$ เป็นต้น
4. แล้วมาเริ่มพิจารณาสมาชิกที่เหลือของปาสคาลเมตริกซ์จากสมการ (4.40) ดังนี้

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1} - P_{i-1,j} \tag{4.40}$$

เช่นสมาชิกที่ $P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}$ และ $P_{2,2}$ ของปาสคาลเมตริกซ์ นั้นคือ

$$P_{1,1} = P_{0,1}\text{-}P_{0,0}\text{-}P_{1,0} = 2-1-1=0$$
$$P_{1,2} = P_{0,2}\text{-}P_{0,1}\text{-}P_{1,1} = 1-2-0=-1$$
$$P_{2,1} = P_{1,1}\text{-}P_{1,0}\text{-}P_{2,0} = 0-1-1=-2$$
$$P_{2,2} = P_{1,2}\text{-}P_{1,1}\text{-}P_{2,1} = -1-0-(-2)=1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ดังนั้นสามารถหาค่าปาสคาลเมตริกซ์อันดับ 2 จะได้ดังสมการที่ (4.41)

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} P_{0,0}=1 & P_{1,0}=1 & P_{2,0}=1 \\ P_{0,1}=2 & P_{1,1}=0 & P_{2,1}=-2 \\ P_{0,2}=1 & P_{1,2}=-1 & P_{2,2}=1 \end{bmatrix} \quad ; \; i,j=0,1,\ldots,N=2 \tag{4.41}$$

ดังนั้นจะได้ สมการของปาสคาลเมตริกซ์อันดับสองที่มีขนาด (3x3) ดังสมการที่ (4.42)

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{N} = 0, 1, 2 \tag{4.42}$$

4.4 การออกแบบโครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลข

โดยจะเริ่มพิจารณาจาก อันดับสองของฟังชั่นก์ถ่ายโอนของตัวกรองเชิงอุปมาน ของตัวกรองทั้ง 5 สมการคือ วงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน, วงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน, วงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน, วงจรกรองแบบแถบความถี่หยุด และ วงจรกรองแบบผ่านทุกความถี่ ดังนี้

อันดับสองของฟังชั่นก์ถ่ายโอนของตัวกรองเชิงอุปมานแบบความถี่ต่ำผ่าน ได้ดังสมการ (4.43)

$$H_{LP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \tag{4.43}$$

อันดับสองของฟังชั่นก์ถ่ายโอนของตัวกรองเชิงอุปมานแบบความถี่สูงผ่าน ได้ดังสมการ (4.44)

$$H_{HP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \tag{4.44}$$

อันดับสองของฟังชั่นก์ถ่ายโอนของตัวกรองเชิงอุปมานแบบแถบความถี่ผ่าน ได้ดังสมการ (4.45)

$$H_{BP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \tag{4.45}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงแหล่งที่มาของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อันดับสองของฟังชั่นก์ถ่ายโอนของตัวกรองเชิงอุปมานแบบกำจัดแถบความถี่ได้ดังสมการ (4.46)

$$H_{BS}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \tag{4.46}$$

โดยจะเห็นว่าฟังก์ชั่นถ่ายโอนของตัวกรองแบบกำจัดแถบความถี่ เกิดจากผลรวมของตัวกรองความถี่แบบความถี่ต่ำผ่านกับตัวกรองความถี่แบบความถี่สูงผ่าน ดังสมการต่อไปนี้

$$H_{BS}(s) = H_{LP}(s) + H_{HP}(s) \tag{4.47}$$

$$\frac{S^2 + \Omega_0^2}{S^2 + \left(\Omega_0 / Q\right)S + \Omega_0^2} = \frac{\Omega_0^2}{S^2 + \left(\Omega_0 / Q\right)S + \Omega_0^2} + \frac{S^2}{S^2 + \left(\Omega_0 / Q\right)S + \Omega_0^2} \tag{4.48}$$

$$= \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \tag{4.49}$$

และอันดับสองของฟังชันก์ถ่ายโอนของตัวกรองเชิงอุปมานแบบผ่านทุกความถี่ได้ดังสมการ(4.50)

$$H_{AP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \tag{4.50}$$

และฟังก์ชั่นถ่ายโอนของตัวกรองแบบผ่านทุกความถี่เกิดจากการเอาฟังก์ชั่นถ่ายโอนของตัวกรองแบบกำจัดแถบความถี่ผ่านลบกับฟังก์ชั่นถ่ายโอนของตัวกรองแบบแถบความถี่ผ่าน ซึ่งเป็นการพิจารณาโดยการใช้คณิตศาสตร์เข้าช่วย จะได้ดังสมการที่(4.53)

$$H_{AP}(s) = H_{BS}(s) + [-H_{BP}(s)] \tag{4.51}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\Omega_0 / Q\right) s + s^2} + \left[- \frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) s}{\Omega_0^2 + \left(\Omega_0 / Q\right) s + s^2} \right] \tag{4.52}$$

$$= \frac{\Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) s + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) s + s^2} \tag{4.53}$$

จะเห็นว่าทั้งหมดมีตำแหน่งโพลเดียวกัน โดยจากสมการก็คือตัวส่วนของสมการทั้งห้านั้นเองสิ่งที่แตกต่างกันของสมการทั้งห้าคือตัวเศษเท่านั้น จึงจะเน้นการคำนวณไปทางตัวเศษที่มีความแตกต่างกันจึงแยกการคำนวณระหว่างตัวเศษและส่วนเพื่อจะได้สะดวกต่อความเข้าใจ

4.4.1 การออกแบบด้วยปาสคาลเมตริกส์

โดยพิจารณาเพียงอันดับ 2 ของฟังก์ชั่นถ่ายโอนของตัวกรองไบควอด เริ่มพิจารณาที่ฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงอุปมาน (Analog transfer function) ดังสมการที่ (4.54)

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2} \tag{4.54}$$

และฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงเลข (Digital transfer function) ดังสมการที่ (4.55)

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \tag{4.55}$$

ใช้ "การแปลงเชิงเส้นคู่" สำหรับการแปลง s ไป z จะใช้สมการที่ (4.56) ด้านล่างนี้สำหรับการแทนค่าใน ฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงอุปมานสมการที่ (4.54) ในการสร้างปาสคาลเมตริกส์

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{4.56}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยนำมาทำการสร้างสมการเมตริกส์เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข จะได้สมการสำหรับการแปลงจากการของปาสคาลเมตริกส์คูณกับเมตริคส์ของสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองเชิงอุปมานจะได้สมการในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขของตัวเศษดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

และ การหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขสำหรับการแปลงตัวส่วนคือ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

เนื่องจากฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงอุปมาน H(s) ของทั้ง 5 มีตัวส่วนที่เหมือนกัน หรือมีตำแหน่งโพลเหมือนกัน ดังนั้นสามารถหาค่าสัมประสิทธ์ของตัวส่วน D(z) ของทั้งห้าใน แซดโดเมน เพียงสมการเมตริกส์สมการดียวก็คือจากฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงอุปมาน $H_{LP}(s), H_{HP}(s), H_{BP}(s), H_{BS}(s)$ และ $H_{AP}(s)$ ต่างก็มีตัวส่วนที่เหมือนกันคือ

$$D(s) = \Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) s + s^2 \tag{4.60}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0 / Q \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

โดยที่ตัวเศษของฟังก์ชั่นถ่ายโอนเชิงอุปมาน $H_{LP}(s), H_{HP}(s), H_{BP}(s),), H_{BS}(s)$ และ $H_{AP}(s)$ แต่ละตัวอย่างมีความแตกต่างอยู่นำมาพิจารณาดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$N_{LP}(s) = \Omega_0^2 + 0\,s + 0\,s^2 \tag{4.62}$$

$$N_{HP}(s) = 0 + 0\,s + 1\,s^2 \tag{4.63}$$

$$N_{BP}(s) = 0 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + 0\,s^2 \tag{4.64}$$

$$N_{BS}(s) = N_{LP}(s) + N_{HP}(s) = \Omega_0^2 + 0s + 1s^2 \tag{4.65}$$

$$N_{AP}(s) = N_{LP}(s) + N_{HP}(s) - N_{BP}(s) = N_{SP}(s) - N_{BP}(s) = \Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2 \tag{4.66}$$

เพราะฉะนั้น จากสมการ(4.62) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

จากสมการ (4.63) ก็สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

จากสมการ(4.64) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0 / Q \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

จากสมการ(4.65) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.70}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

และจากสมการ(4.66) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้คือ

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

จากสมการ(4.67) ถึง สมการ(4.71) และ (4.61) จะได้ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองเชิงเลขของทั้ง 3 ดังนั้นจะได้

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองเชิงเลขของผลตอบสนองแบบความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) ได้จาก สมการ (4.67) หารด้วยสมการ (4.61)

$$H_{LP}(z) = \frac{\Omega_0^2 + 2\Omega_0^2\, z^{-1} + \Omega_0^2\, z^{-2}}{(\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0}{Q} + 1) + (2\Omega_0^2 - 2)\, z^{-1} + (\Omega_0^2 - \frac{\Omega_0}{Q} + 1)\, z^{-2}} \tag{4.72}$$

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองเชิงเลขของผลตอบสนองแบบความถี่สูงผ่าน (High-pass) ได้จาก สมการ (4.68) หารด้วยสมการ(4.61)

$$H_{HP}(z) = \frac{1 - 2\, z^{-1} + 1\, z^{-2}}{(\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0}{Q} + 1) + (2\Omega_0^2 - 2)\, z^{-1} + (\Omega_0^2 - \frac{\Omega_0}{Q} + 1)\, z^{-2}} \tag{4.73}$$

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองเชิงเลขของผลตอบสนองแบบแถบความถี่ผ่าน(Band-pass) ได้จาก สมการ (4.69) หารด้วยสมการ(4.61)

$$H_{BP}(z) = \frac{\frac{\Omega_0}{Q} - \frac{\Omega_0}{Q}\, z^{-2}}{(\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0}{Q} + 1) + (2\Omega_0^2 - 2)\, z^{-1} + (\Omega_0^2 - \frac{\Omega_0}{Q} + 1)\, z^{-2}} \tag{4.74}$$

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองเชิงเลขของผลตอบสนองแบบแถบความถี่หยุด(Band-stop)ได้จาก สมการ (4.70) หารด้วยสมการ (4.61)

$$H_{BS}(z) = \frac{(\Omega_0^2 + 1) + (2\Omega_0^2 - 2)z^{-1} + (\Omega_0^2 + 1)z^{-2}}{(\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0}{Q} + 1) + (2\Omega_0^2 - 2)z^{-1} + (\Omega_0^2 - \frac{\Omega_0}{Q} + 1)z^{-2}} \tag{4.75}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองเชิงเลขของผลตอบสนองแบบผ่านทุกความถี่(All-pass) ได้จาก สมการ (4.71) หารด้วยสมการ(4.61)

$$H_{AP}(z)=\frac{(\Omega_0^2-\frac{\Omega_0}{Q}+1)+(2\Omega_0^2-2)z^{-1}+(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)z^{-2}}{(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)+(2\Omega_0^2-2)z^{-1}+(\Omega_0^2-\frac{\Omega_0}{Q}+1)z^{-2}} \tag{4.76}$$

จากสมการ (4.72) ถึง สมการ(4.76) จำเป็นต้องรู้ค่า Ω_0 และ Q เพื่อนำมาใช้ในการหาค่าทั้งหมดในการคำนวณซึ่งสามารถหาได้จากสมการข้างต้นที่กล่าวมา

ต่อมาจะนำสมการทั้ง 3 นำมาจัดรูปใหม่เพื่อให้กระชับขึ้นและเพื่อนำไปเขียนโครงสร้างต่อไปโดยกำหนดดังนี้โดยที่จะให้พจน์ $b_0=1$ ดังนั้นจะทำการหารทั้งเศษและส่วนด้วย $b_0=(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)$ ของทั้ง 3 สมการ จะได้พารามิเตอร์ดังนี้

$$d_1=\frac{b_1}{b_0}=\frac{(2\Omega_0^2-2)}{(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)} \tag{4.77}$$

$$d_2=\frac{b_2}{b_0}=\frac{(\Omega_0^2-\frac{\Omega_0}{Q}+1)}{(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)} \tag{4.78}$$

$$G_{LP}=\frac{1}{b_0}(\Omega_0^2)=\frac{\Omega_0^2}{(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)} \tag{4.79}$$

$$G_{HP}=\frac{1}{b_0}=\frac{1}{(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)} \tag{4.80}$$

$$G_{BP}=\frac{1}{b_0}\left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)=\frac{\Omega_0/Q}{(\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1)} \tag{4.81}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อนำมาจัดสมการ ได้ดังนี้

$$H_{LP}(z) = \frac{G_{LP}(1+2\,z^{-1}+1\,z^{-2})}{1+b_1\,z^{-1}+b_2\,z^{-2}} \tag{4.82}$$

$$H_{HP}(z) = \frac{G_{HP}(1-2\,z^{-1}+1\,z^{-2})}{1+b_1\,z^{-1}+b_2\,z^{-2}} \tag{4.83}$$

$$H_{BP}(z) = \frac{G_{BP}(1-z^{-2})}{1+b_1\,z^{-1}+b_2\,z^{-2}} \tag{4.84}$$

โดยส่วนของ $H_{BS}(z)$ และ $H_{AP}(z)$ จะพิจารณาในส่วนถัดไป

จะพบว่าทั้งสามสมการมีส่วนที่เหมือนกันคือ $\frac{1}{1+b_1\,z^{-1}+b_2\,z^{-2}}$ และจากสมการต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{4.85}$$

จะนำตัวส่วน $\frac{1}{D(z)}$ มาพิจารณาโดยทำการ สมมติสัญญาณขึ้นใหม่สัญญาณหนึ่งจะเรียกว่า w(n) ซึ่งเกิดจากการเอา x(n) ผ่านโพลีโนเมียลตัวส่วนของฟังก์ชั่นถ่ายโอน หรือเขียนใหม่ในรูปฟังก์ชั่นถ่ายโอนได้ว่า

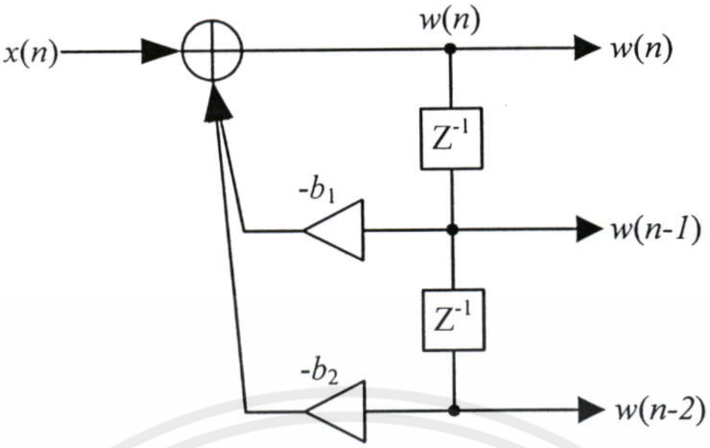
$$\frac{1}{D(z)} = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}} \tag{4.86}$$

ทำการแปลง z ผกผันจะได้สมการที่(4.87)

$$w(n) = x(n) - b_1 w(n-1) - b_2 w(n-2) \tag{4.87}$$

จากสมการที่ (4.87) สามารถนำ $w(n)$ มาเขียนโครงสร้างได้ดังรูปที่ 4.5 ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 แสดงโครงสร้างของสัญญาณ w(n) ที่มีส่วนของการป้อนกลับ

โดยในทำนองเดียวกันในการหาค่า y(n) โดยการเอาสัญญาณ w(n) ผ่านที่ได้ผ่านโพลีโนเมียลตัวเศษของฟังก์ชั่นถ่ายโอน จะได้ดังสมการที่ (4.88) มาใช้ในการหาดังสมการที่ (4.89), (4.90) และ (4.91)

$$N(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} \tag{4.88}$$

$$\frac{Y_{LP}(z)}{W(z)} = G_{LP}(1 + 2z^{-1} + 1z^{-2}) \tag{4.89}$$

$$\frac{Y_{HP}(z)}{W(z)} = G_{HP}(1 - 2z^{-1} + 1z^{-2}) \tag{4.90}$$

$$\frac{Y_{BP}(z)}{W(z)} = G_{BP}(1 - 1z^{-2}) \tag{4.91}$$

แปลง z ผกผันของสัญญาณที่ได้จากสมการที่ (4.89), (4.90) และ (4.91) จะได้

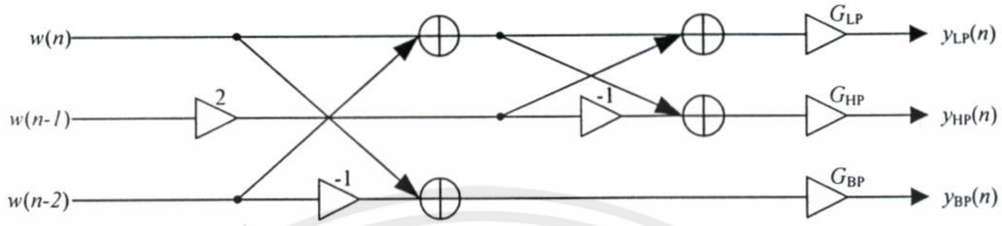
$$y_{LP}(n) = G_{LP}[w(n) + 2w(n-1) + w(n-2)] \tag{4.92}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้าม ... เอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{HP}(n) = G_{HP}[w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)] \tag{4.93}$$

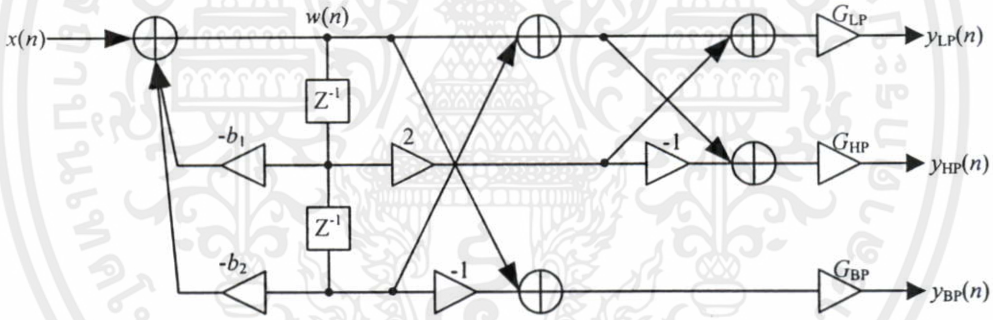
$$y_{BP}(n) = G_{BP}[w(n) - w(n-2)] \tag{4.94}$$

จากสมการที่ (4.92), (4.93) และ (4.94) สามารถเขียนเป็นโครงสร้างได้ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 แสดงโครงสร้างของสัญญาณที่มีส่วนของการป้อนไปด้านหน้า

นำโครงสร้างที่ได้จากรูปที่ 4.5 และ 4.6 มาต่อร่วมกัน จะได้โครงสร้างของตัวกรองความถี่ของสัญญาณเชิงเลขที่สามารถให้ผลตอบสนองเชิงความถี่ 3 รูปแบบในเวลาเดียวกันดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 โครงสร้างตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่ให้ผลตอบสนองเชิงความถี่3 รูปแบบ

ต่อมาจะพิจารณาจากโครงสร้างที่ให้สามเอาท์สามรูปแบบแล้ว แต่ต้องการให้สามารถได้ถึงห้ารูปแบบโดยจะพิจารณาส่วนที่เหลือดังสมการที่ (4.95) ถึง (4.106)

ในกรณีของวงจรกรองแบบแถบความถี่หยุดจะพิจารณาดังนี้

$$H_{BS}(z) = H_{LP}(z) + H_{HP}(z) \tag{4.95}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$\frac{Y_{BS}(z)}{X(z)} = \frac{W(z)}{X(z)} \times \frac{Y_{BS}(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}} \left[G_{LP}(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) + G_{HP}(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \right] \tag{4.96}$$

$$Y_{BS}(z) = G_{LP}(1 + 2z^{-1} + z^{-2})W(z) + G_{HP}(1 - 2z^{-1} + z^{-2})W(z) \tag{4.97}$$

$$y_{BS}(n) = G_{LP}\left[w(n) + 2w(n-1) + w(n-2)\right] + G_{HP}\left[w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)\right] \tag{4.98}$$

จะได้

$$y_{BS}(n) = y_{LP}(n) + y_{HP}(n) \tag{4.99}$$

ในกรณีของวงจรกรองแบบผ่านทุกความถี่จะพิจารณาดังนี้

$$H_{AP}(z) = H_{LP}(z) + H_{HP}(z) - H_{BP}(z) \tag{4.100}$$

$$\frac{Y_{AP}(z)}{X(z)} = \frac{W(z)}{X(z)} \times \frac{Y_{AP}(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}\left[G_{LP}(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) + G_{HP}(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) - G_{BP}(1 - z^{-2})\right] \tag{4.102}$$

$$Y_{AP}(z) = G_{LP}(1 + 2z^{-1} + z^{-2})W(z) + G_{HP}(1 - 2z^{-1} + z^{-2})W(z) - G_{BP}(1 - z^{-2})W(z) \tag{4.103}$$

$$y_{AP}(n) = G_{LP}\left[w(n) + 2w(n-1) + w(n-2)\right] + G_{HP}\left[w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)\right] - G_{BP}\left[w(n) - w(n-2)\right] \tag{4.104}$$

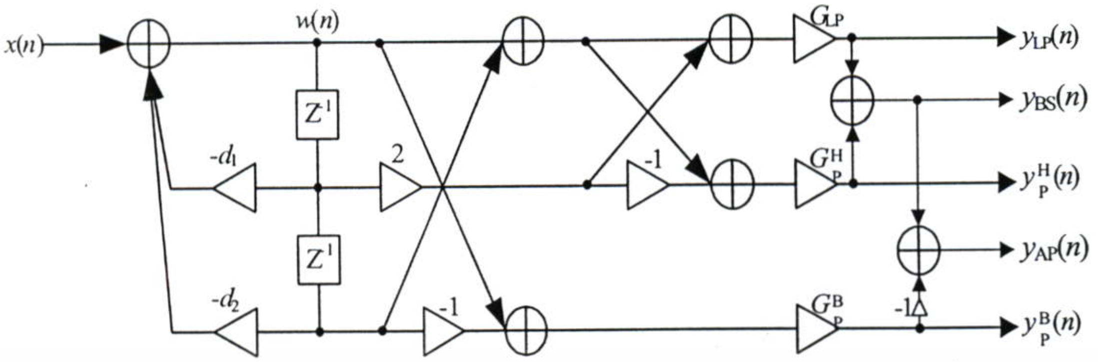
จะได้

$$y_{AP}(n) = y_{LP}(n) + y_{HP}(n) - y_{BP}(n) \tag{4.105}$$

$$= y_{BS}(n) - y_{BP}(n) \tag{4.106}$$

เมื่อนำมาเขียนโครงสร้างใหม่จากการพิจารณาจากโครงสร้างที่ให้สามรูปแบบแล้ว ที่พิจารณาจากสมการที่ (4.99) และ (4.106) จะได้โครงสร้างใหม่ดังรูปที่4.8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.8 โครงสร้างตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขที่ให้ผลตอบสนองเชิงความถี่ 5 รูปแบบ

ส่วนพารามิเตอร์ที่ใช้เป็นอินพุทในการออกแบบ มีดังนี้

1. Q (Quality factor) เป็นพารามิเตอร์ใช้ในการคำนวณค่า Bandwidth (BW)

$$BW = \frac{\Omega_0}{Q} \tag{4.107}$$

Ω_0 และ Q เป็นค่าคงที่ในการออกแบบ ใช้ในการคำนวณแบนด์วิดท์ ฉะนั้นเมื่อค่า Q เปลี่ยนเป็นผลให้ค่า r (รัศมีของโพล) เปลี่ยนตามไปด้วยและผลของการเปลี่ยนค่า Q คือ เมื่อค่า Q มีค่ามากจะได้ BW ที่แคบ(Narrower BW) สำหรับ BPF และทำให้เกิด Overshootในกรณีของ LPF และ BPF

เงื่อนไขพิเศษ : เมื่อค่า Q = 0.707, ผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) จะเป็น "Maximally flat" และ การทำนอร์แมลไลซ์ของตัวส่วน ของ H(s) จะเหมือนกับอันดับ 2 บัตเตอร์เวิร์ทโพลิโนเมียล (Butterworth polynomial) คือ

$$s^2 + \sqrt{2}s + 1 \tag{4.108}$$

2. ω_0 คือความถี่ทางดิจิตอล (หน่วยคือ rad)

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right) \tag{4.109}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4.2 การคำนวณออกแบบวงจรกรองโดยกำหนดค่า Q และ Ω_0

สำหรับตัวอย่างการออกแบบเป็นการแปลงสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการไบควอดต้นแบบไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขตามหลักการไบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transform) โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) และกำหนดให้

$$f_0 = 2\text{ kHz} \qquad f_s = 10\text{ kHz} \qquad Q = 0.7071$$

ในการออกแบบวงจรกรองไบควอดนั้น จะเป็นการกำหนดค่าของ Q และ Ω_0 ดังนั้นพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในโดเมนอนาล็อก (Ω) และความถี่ในโดเมนดิจิตอล (ω) จากสมการที่(4.109)

$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \tag{4.110}$$

เมื่อ $T_s = \dfrac{1}{f_s}$ และ $\omega_0 = 2\pi f_0$

ดังนั้นจะได้

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right) \tag{4.111}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi(2kHz)}{10kHz}\right)$$

$$= 0.7265 \quad \text{rad / s} \tag{4.112}$$

แทนค่า Q และ Ω_0 ในสมการไบควอดทั้ง 5 จากสมการที่ (4.43) ถึง สมการที่ (4.46) และ (4.49) จะได้ฟังก์ชั่นถ่ายโอนสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอดดังสมการ

$$H_{LP}(s) = \frac{N_{LP}(s)}{D_{LP}(s)} = \frac{0.5278}{0.5278 + 1.0274s + s^2} \tag{4.113}$$

$$H_{HP}(s) = \frac{N_{HP}(s)}{D_{HP}(s)} = \frac{s^2}{0.5278 + 1.0274s + s^2} \tag{4.114}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงแหล่งที่มาของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{BP}(s) = \frac{N_{BP}(s)}{D_{BP}(s)} = \frac{(1.0274)s}{0.5278 + 1.0274s + s^2} \tag{4.115}$$

$$H_{BS}(s) = \frac{N_{BS}(s)}{D_{BS}(s)} = \frac{0.5278 + s^2}{0.5278 + 1.0274s + s^2} \tag{4.116}$$

$$H_{AP}(s) = \frac{N_{AP}(s)}{D_{AP}(s)} = \frac{0.5278 - 1.0264s + s^2}{0.5278 + 1.0274s + s^2} \tag{4.117}$$

จากนั้นทำการแปลงฟังก์ชั่นถ่ายโอนของสัญญาณเชิงอุปมานที่ได้โดยคูณด้วยปาสคาลเมตริกซ์เพื่อให้ได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชั่นถ่ายโอนของสัญญาณเชิงเลข จะได้

$$D(s) = D_{LP}(s) = D_{HP}(s) = D_{BP}(s) = D_{BS}(s) = D_{AP}(s) = 0.5278 + 1.0274s + s^2 \tag{4.118}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5278 \\ 1.0274 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.5554 \\ -0.9444 \\ 0.5002 \end{bmatrix} \tag{4.119}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{2.5554 - 0.9444\, z^{-1} + 0.5002\, z^{-2}} \tag{4.120}$$

พิจารณาที่โพลีโนเมียลตัวเศษของแต่ละกรณีต่อไปนี้

กรณีของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน

$$N_{LP}(s) = 0.5278 \tag{4.121}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5278 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5278 \\ 1.0556 \\ 0.5278 \end{bmatrix} \tag{4.122}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\therefore \quad N_{LP}(z) = 0.5278 + 1.0556\, z^{-1} + 0.5278\, z^{-2} \tag{4.123}$$

กรณีของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน

$$N_{HP}(s) = s^2 \tag{4.124}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.125}$$

$$\therefore \quad N_{HP}(z) = 1 - 2\, z^{-1} + z^{-2} \tag{4.126}$$

กรณีของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน

$$N_{BP}(s) = 1.0274s \tag{4.127}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0274 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0276 \\ 0 \\ -1.0276 \end{bmatrix} \tag{4.128}$$

$$\therefore \quad N_{BP}(z) = 1.0276 - 1.0276z^{-2} \tag{4.129}$$

กรณีของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่สูง

$$N_{BS}(s) = 0.5278 + s^2 \tag{4.130}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5278 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5278 \\ -0.9444 \\ 1.5278 \end{bmatrix} \tag{4.131}$$

$$\therefore \quad N_{BS}(z) = 1.5278 - 0.9444z^{-1} + 1.5278z^{-2} \tag{4.132}$$

กรณีของวงจรกรองแบบผ่านทุกแถบความถี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$N_{AP}(s) = 0.5278 - 1.0274s + s^2 \tag{4.133}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5278 \\ -1.0274 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5444 \\ 0.9444 \\ 2.5554 \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

$$\therefore \quad N_{AP}(z) = 0.5444 + 0.9444z^{-1} + 2.5554z^{-2} \quad (4.135)$$

ดังนั้นเมื่อนำโพลีโนเมียลทั้งตัวเศษและตัวส่วนที่ได้มารวมกันจะได้ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของสัญญาณเชิงเลขดังต่อไปนี้ตามแต่ละกรณี

$$H_{LP}(z) = \frac{N_{LP}(z)}{D(z)} = \frac{0.5278 + 1.0556z^{-1} + 0.5278z^{-2}}{2.5554 - 0.9444z^{-1} + 0.5004z^{-2}} \quad (4.136)$$

$$H_{HP}(z) = \frac{N_{HP}(z)}{D(z)} = \frac{1 - 2z^{-1} + 1z^{-2}}{2.5554 - 0.9444z^{-1} + 0.5004z^{-2}} \quad (4.137)$$

$$H_{BP}(z) = \frac{N_{BP}(z)}{D(z)} = \frac{1.0276 - 1.0276z^{-2}}{2.5554 - 0.9444z^{-1} + 0.5004z^{-2}} \quad (4.138)$$

$$H_{BS}(z) = \frac{N_{BS}(z)}{D(z)} = \frac{1.5278 - 0.9444z^{-1} + 1.5278z^{-2}}{2.5554 - 0.9444z^{-1} + 0.5004z^{-2}} \quad (4.139)$$

$$H_{AP}(z) = \frac{N_{AP}(z)}{D(z)} = \frac{0.5004 + 0.9444z^{-1} + 2.5554z^{-2}}{2.5554 - 0.9444z^{-1} + 0.5004z^{-2}} \quad (4.140)$$

เนื่องจาก b_0 จะต้องเท่ากับหนึ่งดังนั้น เขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$H_{LP}(z) = \frac{0.2065 + 0.4130z^{-1} + 0.2065z^{-2}}{1 - 0.3696z^{-1} + 0.1957z^{-2}} \quad (4.141)$$

$$H_{HP}(z) = \frac{0.3913 - 0.7826z^{-1} + 0.3913z^{-2}}{1 - 0.3696z^{-1} + 0.1957z^{-2}} \quad (4.142)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{BP}(z) = \frac{0.4021 - 0.4021z^{-2}}{1 - 0.3696z^{-1} + 0.1957z^{-2}} \quad (4.143)$$

$$H_{BS}(z)=\frac{0.5979-0.3696z^{-1}+0.5979z^{-2}}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}} \quad (4.144)$$

$$H_{AP}(z)=\frac{0.1957-0.3696z^{-1}+1z^{-2}}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}} \quad (4.145)$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$H_{LP}(z)=\frac{G_{LP}(1+2z^{-1}+1z^{-2})}{1-d_1z^{-1}+d_2z^{-2}} \quad (4.146)$$

$$=\frac{0.2065(1+2z^{-1}+1z^{-2})}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}} \quad (4.147)$$

$$H_{HP}(z)=\frac{G_{HP}(1-2z^{-1}+1z^{-2})}{1-d_1z^{-1}+d_2z^{-2}} \quad (4.148)$$

$$=\frac{0.3913(1-2z^{-1}+1z^{-2})}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}} \quad (4.149)$$

$$H_{BP}(z)=\frac{G_{BP}(1-1z^{-2})}{1-d_1z^{-1}+d_2z^{-2}} \quad (4.150)$$

$$=\frac{0.4021(1-1z^{-2})}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}} \quad (4.151)$$

$$H_{BS}(z)=H_{LP}(z)+H_{HP}(z) \quad (4.152)$$

$$=\frac{0.2065+0.4130z^{-1}+0.2065z^{-2}}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}}+\frac{0.3913-0.7826z^{-1}+0.3913z^{-2}}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับเพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\frac{0.5979-0.3696z^{-1}+0.5979z^{-2}}{1-0.3696z^{-1}+0.1957z^{-2}} \quad (4.153)$$

$$H_{AP}(z) = H_{BS}(z) + [-H_{BP}(z)] \tag{4.154}$$

$$= \frac{0.5979 - 0.3696z^{-1} + 0.5979z^{-2}}{1 - 0.3696z^{-1} + 0.1957z^{-2}} + \left[-\frac{0.4021 - 0.4021z^{-2}}{1 - 0.3696z^{-1} + 0.1957z^{-2}} \right]$$

$$= \frac{0.1957 - 0.3696z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0.3696z^{-1} + 0.1957z^{-2}} \tag{4.155}$$

ซึ่งสามารถทำให้การออกแบบให้ง่ายขึ้นโดยใช้สมการเมตริกซ์เพียงสมการเดียวที่สามารถนำมาหาพารามิเตอร์ที่ใช้ในการออกแบบโครงสร้างได้สะดวกและรวดเร็วนั้นคือสมการ

$$\begin{bmatrix} G_{LP} \\ G_{BP} \\ G_{HP} \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\Omega_0^2 \\ k\Omega_0 / Q \\ k \end{bmatrix} \tag{4.156}$$

โดยที่ค่า k หาได้จาก

$$k = \frac{1}{\Omega_0^2 + \Omega_0 / Q + 1}$$

ซึ่งนี้เป็นสมการที่นำไปใช้ในการออกแบบจะเห็นว่าง่ายต่อการออกแบบมากเพียงใช้สมการเดียว ก็หาพารามิเตอร์ทั้ง 5 ได้รวดเร็ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

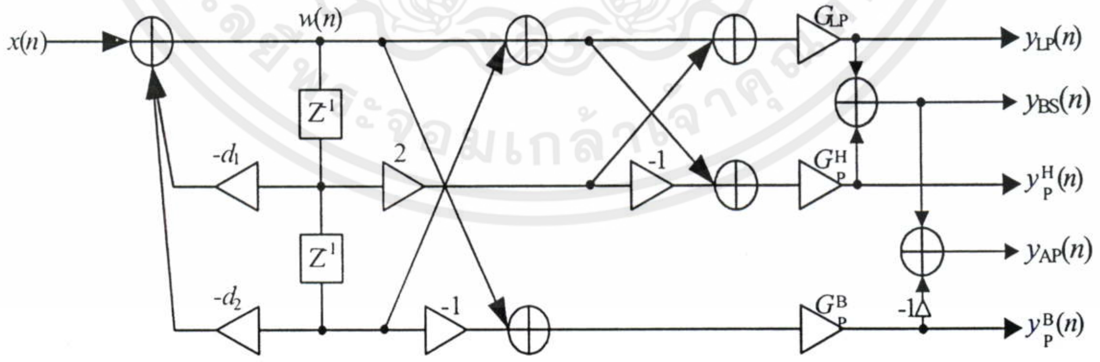
ผลการออกแบบและผลการจำลองการทำงาน

จากบทที่ 4 ทำให้ได้โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดที่ให้สัญญาณเอาท์พุท 5 รูปแบบได้โดยง่ายเพียงหาค่าพารามิเตอร์ห้าตัว ก็สามารถทำให้นำมาสร้างโครงสร้างได้ง่าย จากนั้นมาพิจารณาใหม่ โดยสามารถนำค่าพารามิเตอร์จากสมการ (4.77) ถึง (4.81) เหล่านั้นมาเขียนในรูปสมการเมตริกซ์เพื่อทำให้การคำนวณนั้นง่ายขึ้นดังสมการเมตริกซ์ที่จะแสดงต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} G_{LP} \\ G_{BP} \\ G_{HP} \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\Omega_0^2 \\ k\Omega_0 / Q \\ k \end{bmatrix}$$

โดยที่ $k = \dfrac{1}{\Omega_0^2 + \Omega_0 / Q + 1}$

เมื่อได้ค่าพารามิเตอร์ทั้ง 5 สามารถนำมาแทนลงในโครงสร้างตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขดังรูปที่ 4.8 ที่มีรูปโครงสร้างดังนี้



ซึ่งในบทนี้ทำการทดสอบคุณสมบัติของวงจรกรองโดยโปรแกรม MATLAB ดังที่จะแสดงต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1 ผลการออกแบบ

จากการคำนวณในหัวข้อ 4.4.2 ที่กำหนดให้ $f_0 = 2$ kHz และ $f_s = 10$ kHz จากนั้นจะทำการพิจารณาเพิ่มโดยเปลี่ยนแปลงค่า Q ซึ่งจะได้ค่าพารามิเตอร์ต่างตามตารางที่ 5.1 และนำฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากการคำนวณมาทดสอบคุณสมบัติของวงจรกรองโดยโปรแกรม MATLAB พล๊อตกราฟเพื่อดูตำแหน่งโพล - ซีโรและผลตอบสนองเชิงความถี่ที่ได้รับจากตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน แบบความถี่สูงผ่าน แบบแถบความถี่ผ่าน แบบกำจัดแถบความถี่ และแบบผ่านทุกความถี่ จากการคำนวณจะได้

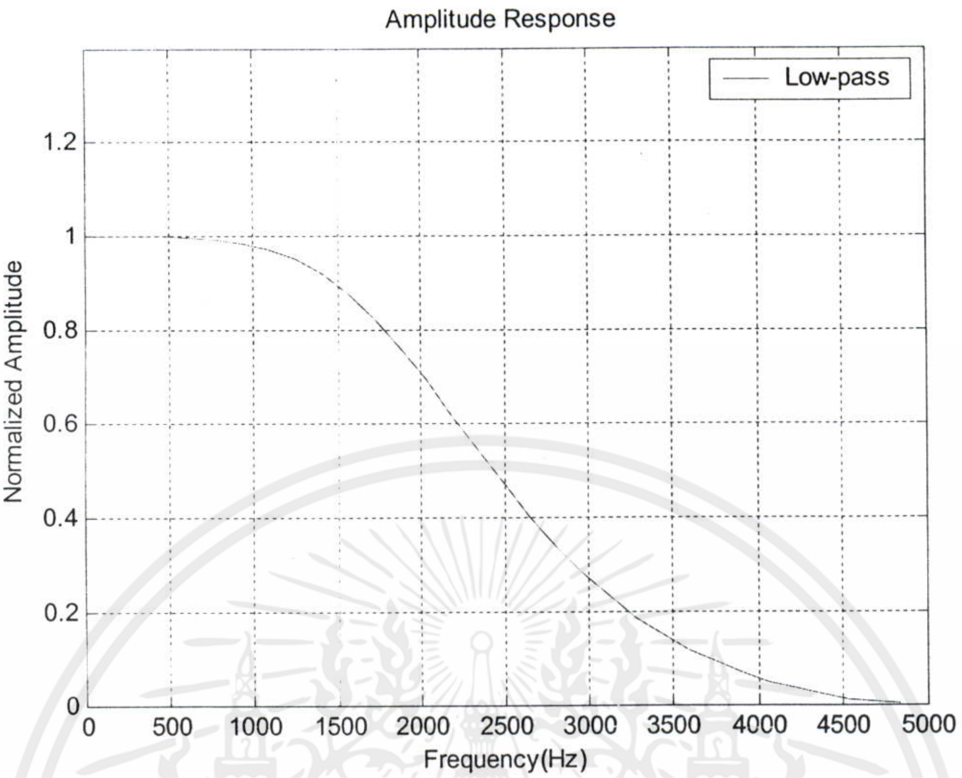
ตารางที่ 5.1 ค่าพารามิเตอร์ด้านอินพุทและด้านเอาท์พุทสำหรับตัวอย่างในการออกแบบ

Analog input parameters			**Digital output parameters**				
Q	Ω_0	**k**	G_{LP}	G_{BP}	G_{HP}	d_1	d_2
0.5	0.7265rad/s	0.3355	0.1771	0.4875	0.3355	-0.3168	0.0251
0.707	0.7265rad/s	0.3913	0.2066	0.4021	0.3913	-0.3695	0.1957
1.2	0.7265rad/s	0.4688	0.2474	0.2838	0.4688	-0.4426	0.4324
2	0.7265rad/s	0.5288	0.2791	0.1921	0.5288	-0.4993	0.6158
3	0.7265rad/s	0.5650	0.2982	0.1368	0.5650	-0.5335	0.7264
5	0.7265rad/s	0.5977	0.3155	0.0868	0.5977	-0.5644	0.8263
10	0.7265rad/s	0.6248	0.3298	0.0454	0.6248	-0.5900	0.9092

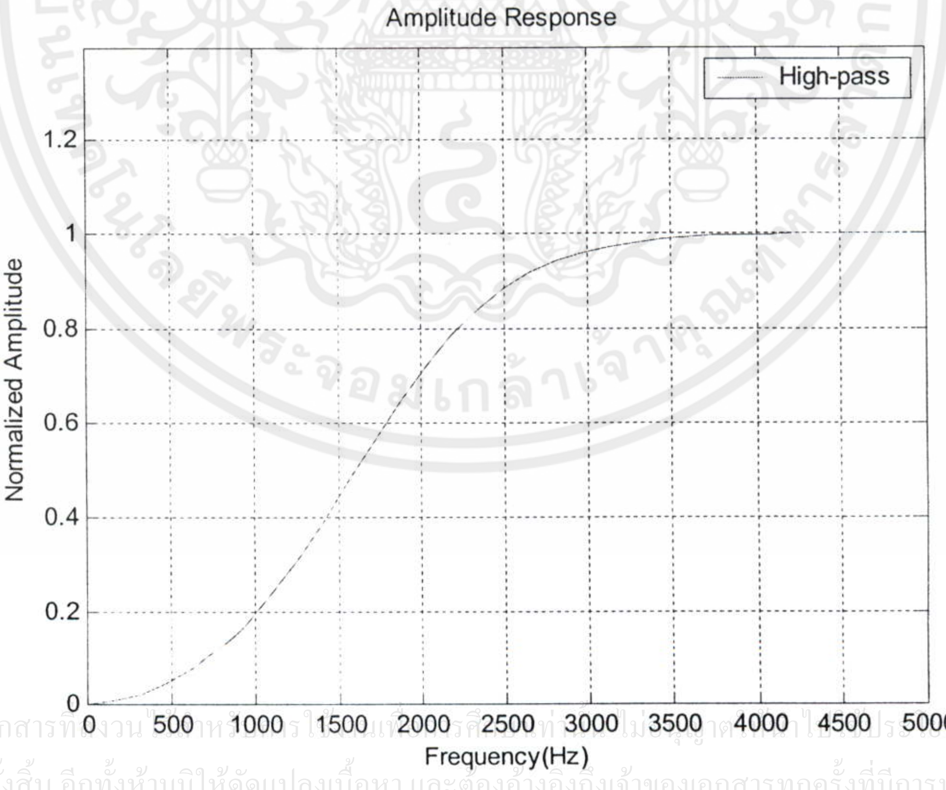
ต่อมานี้เป็นผลที่ได้จากการพล๊อตกราฟโดยนำค่าที่ได้จากการคำนวณตารางที่ 5.1 ซึ่งจะแสดงผลที่ได้ทั้ง ผลการตอบสนองเชิงขนาด ตำแหน่งโพล – ซีโร ผลตอบสนองเชิงความถี่ และการทดสอบโดยเมื่อเปลี่ยนความ Q และ f_0 ในกรณีต่างๆ

5.1.1 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองทั้ง 5 แบบ

นี้เป็นผลการตอบสนองเชิงขนาดที่ได้จากคุณสมบัติของวงจรกรองโดยโปรแกรม MATLAB ที่ได้รับจากตัวกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดทั้งแบบความถี่ต่ำผ่าน แบบความถี่สูงผ่าน แบบแถบความถี่ผ่าน แบบกำจัดแถบความถี่ และแบบผ่านทุกความถี่ โดยที่กำหนดให้ $f_0 = 2$ kHz และ $f_s = 10$ kHz และ Q = 0.707

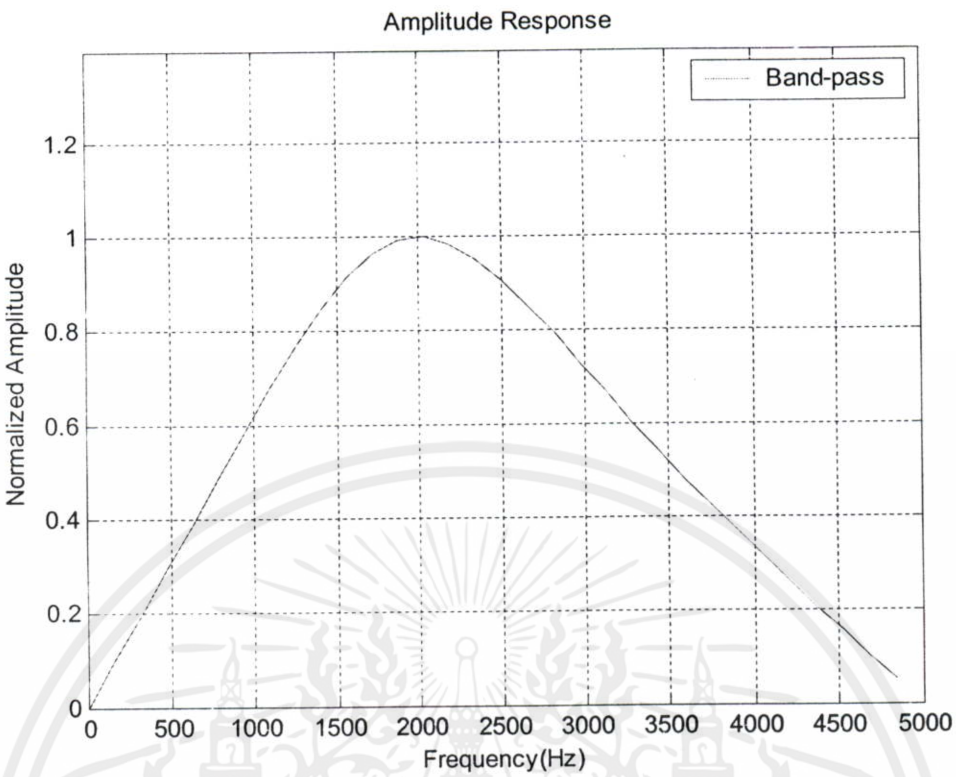


รูปที่ 5.1 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน

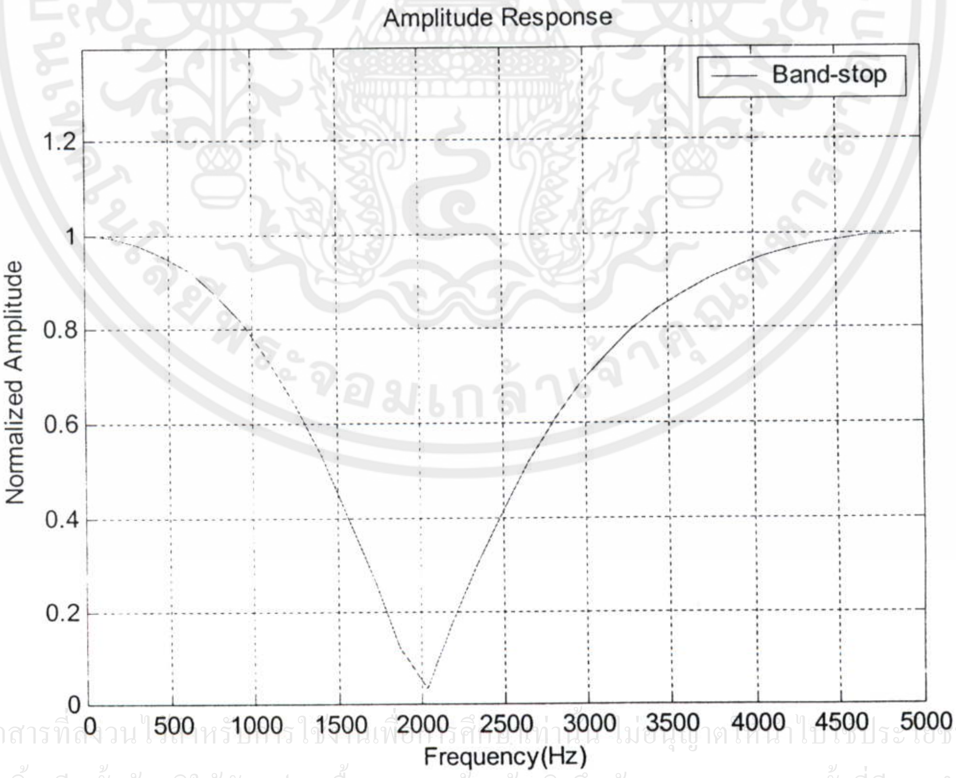


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวน ... ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.2 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน

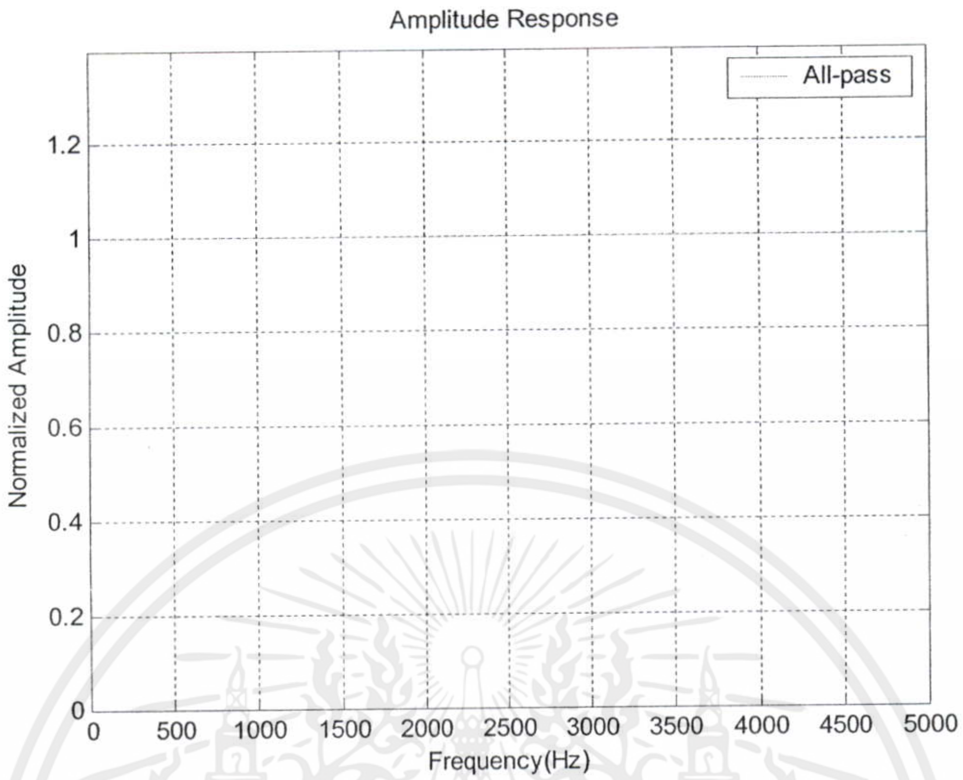


รูปที่ 5.3 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

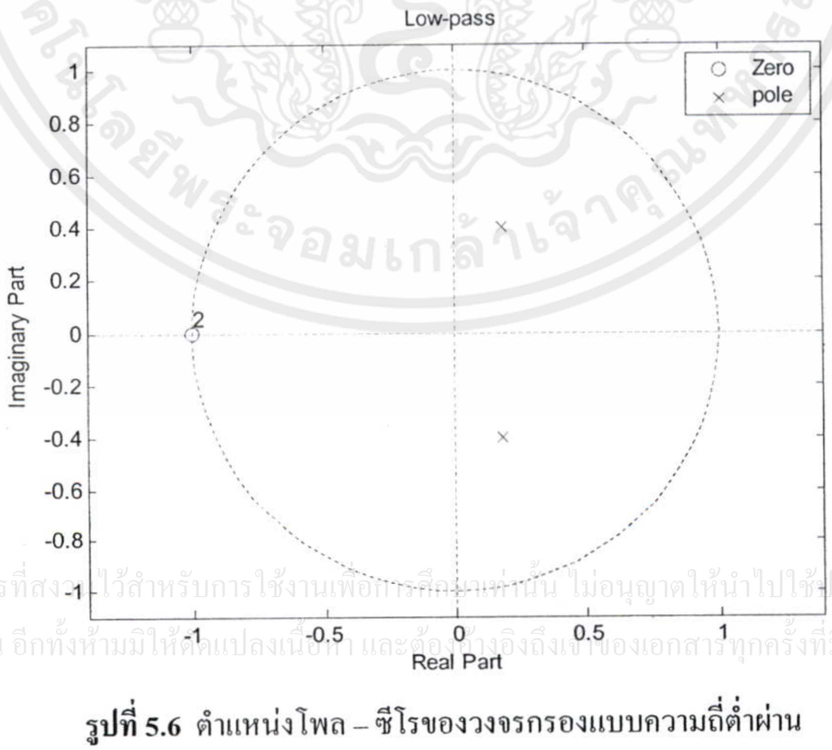
รูปที่ 5.4 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่



รูปที่ 5.5 ผลการตอบสนองเชิงขนาดของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน

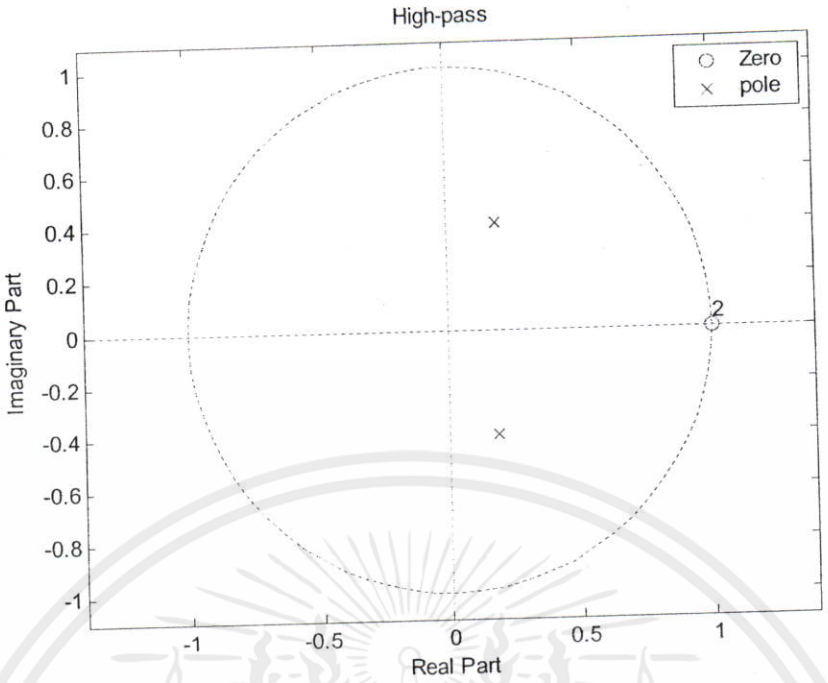
5.1.2 ตำแหน่งโพล – ซีโร

ต่อไปนี้เป็นผลที่ได้จากการพล๊อตกราฟเพื่อดูตำแหน่งโพล – ซีโร โดยที่มีการกำหนดเช่นเดิมคือ $f_0 = 2$ kHz และ $f_s = 10$ kHz และ Q = 0.707 ผลที่ได้ดังแสดงดังรูป

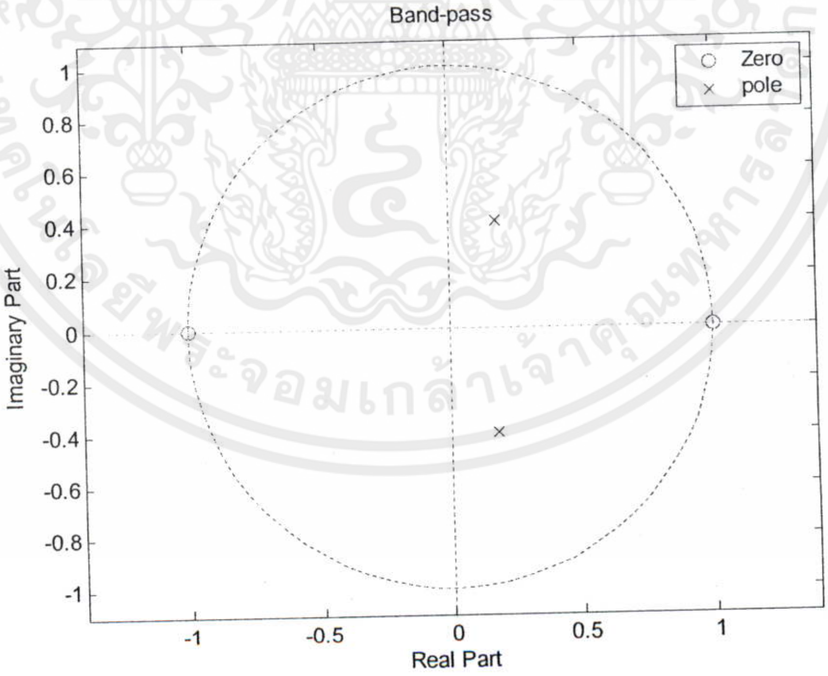


รูปที่ 5.6 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

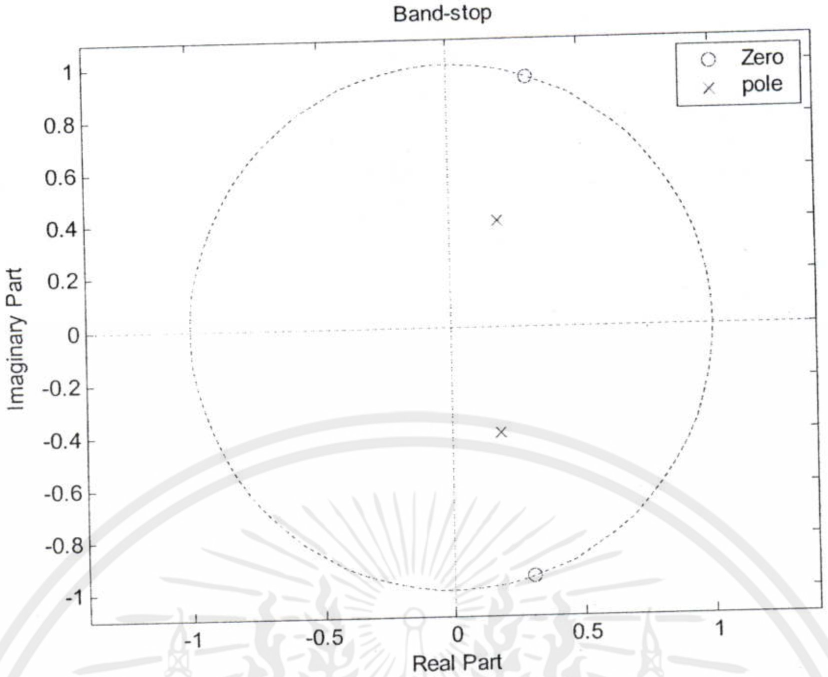


รูปที่ 5.7 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน

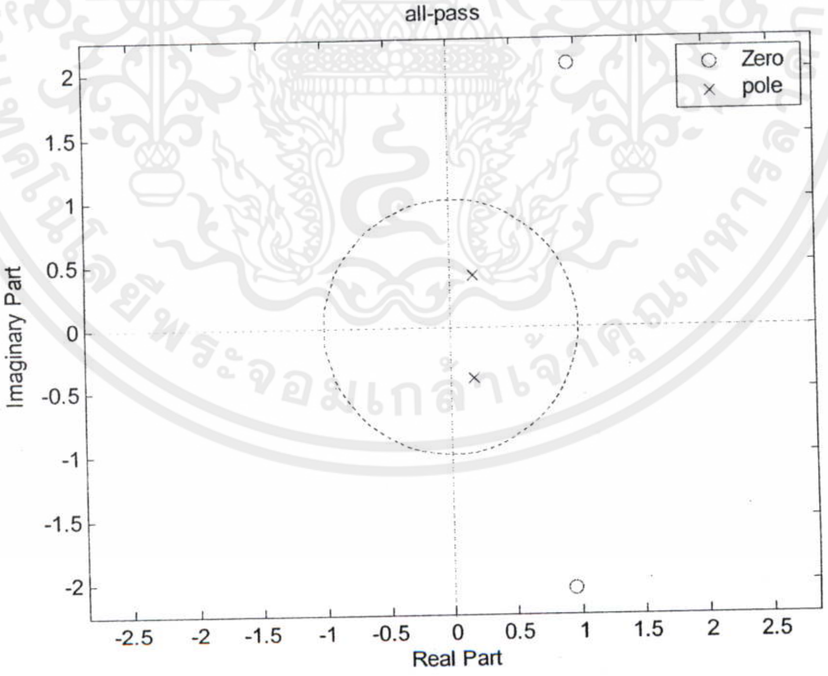


รูปที่ 5.8 ตำแหน่งโพล – ซีโรของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ ... ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



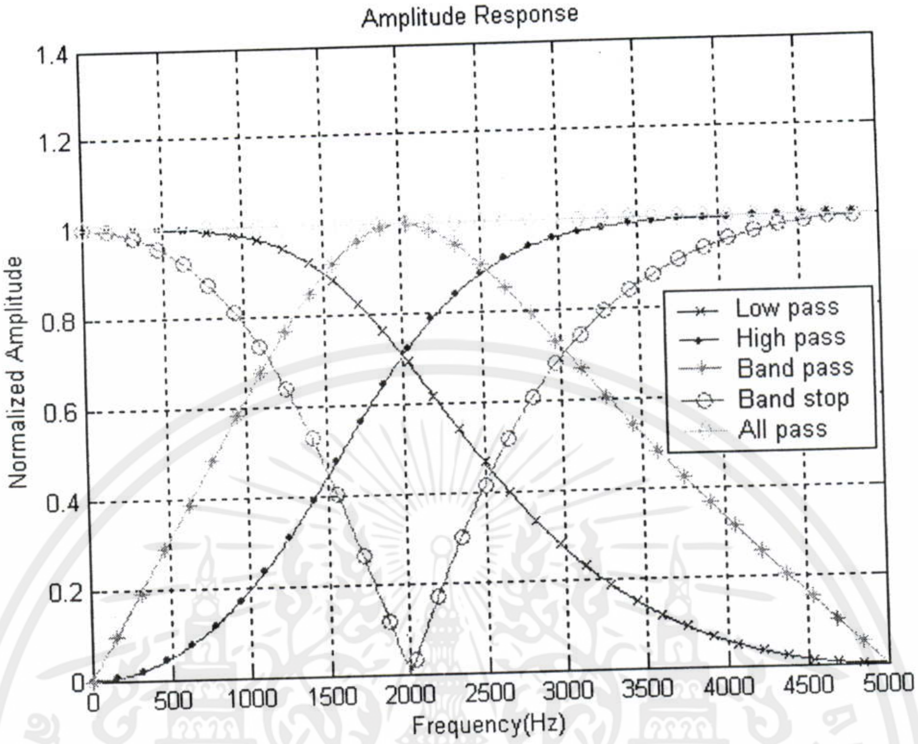
รูปที่ 5.9 ตำแหน่งโพล - ซีโรของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่



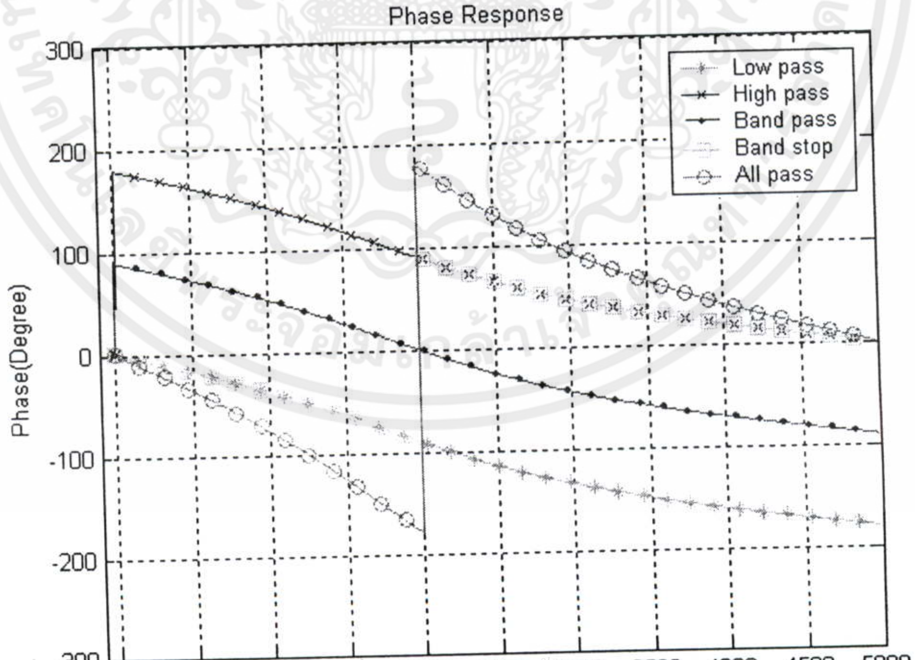
รูปที่ 5.10 ตำแหน่งโพล - ซีโรของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ใดนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาด และเฟส ของตัวกรองทั้ง 5 รูปแบบ



รูปที่ 5.11 เปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดของตัวกรองทั้ง 5 รูปแบบ



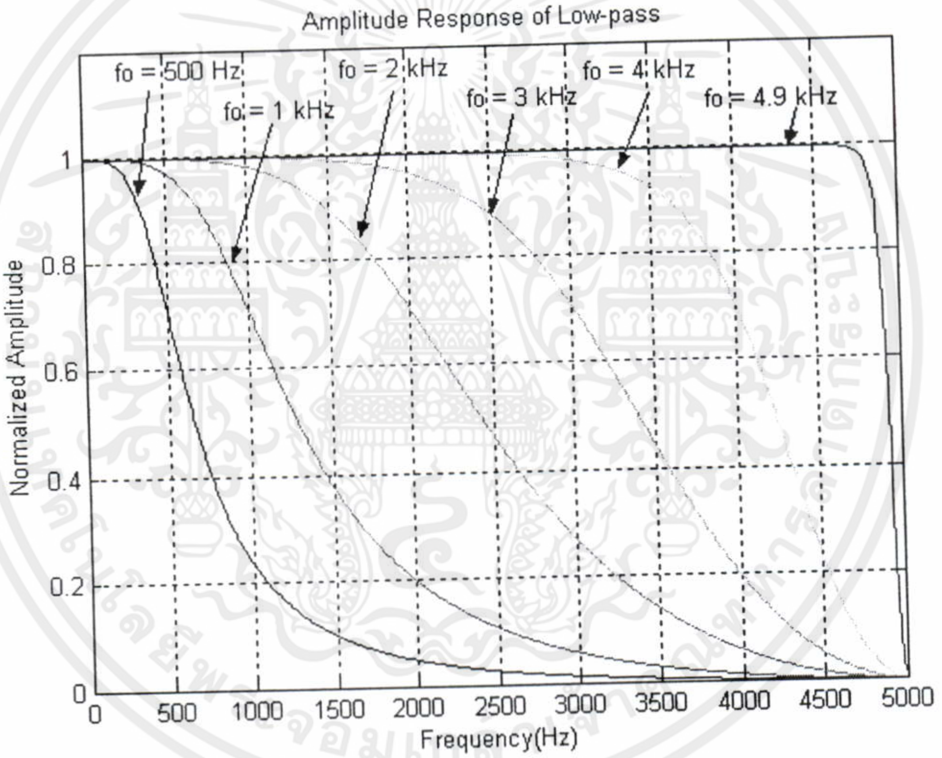
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.12 เปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสของตัวกรองทั้ง 5 รูปแบบ

5.1.4 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาด และผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อทำการเปลี่ยนแปลงความถี่

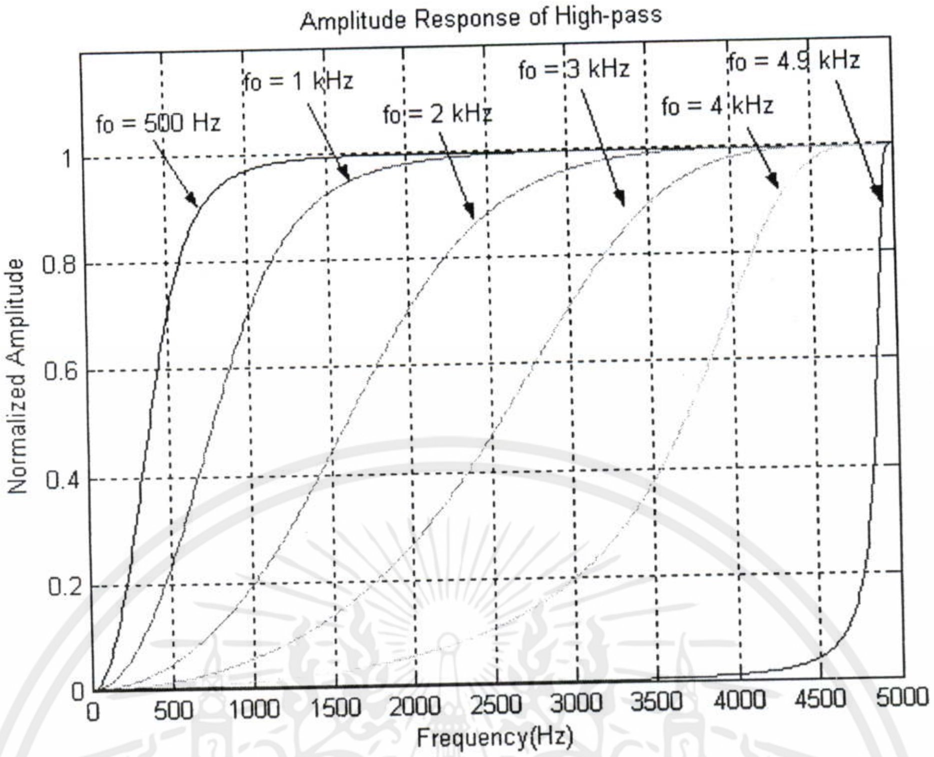
ต่อไปนี้เป็นผลการเปรียบเทียบเมื่อทำการเปลี่ยนค่าความถี่ ที่จะแสดงทั้งผลตอบสนองเชิงขนาด และผลตอบสนองเชิงเฟส ของตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน แบบความถี่สูงผ่าน แบบแถบความถี่ผ่าน แบบกำจัดแถบความถี่ และแบบผ่านทุกความถี่ โดยที่ใช้เงื่อนไขเดิมคือ f_s = 10 kHz และ Q = 0.707 โดยทำการเปลี่ยนค่า f_0 ดังนี้คือ 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 4900 Hz ผลที่ได้แสดงดังรูป

<u>**ผลการตอบสนองเชิงขนาด**</u>

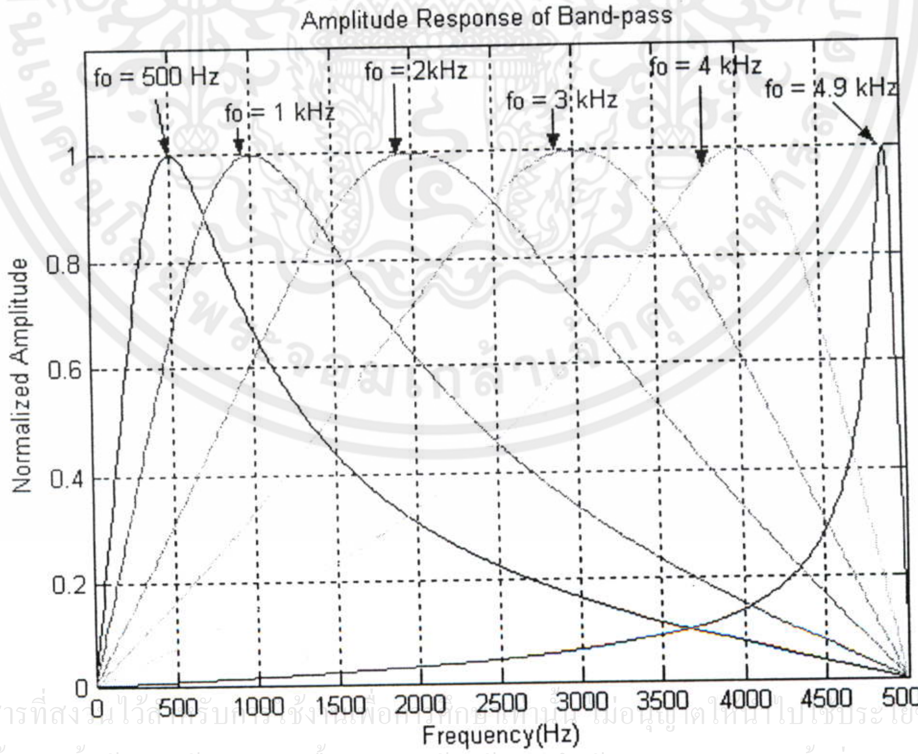


รูปที่ 5.13 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

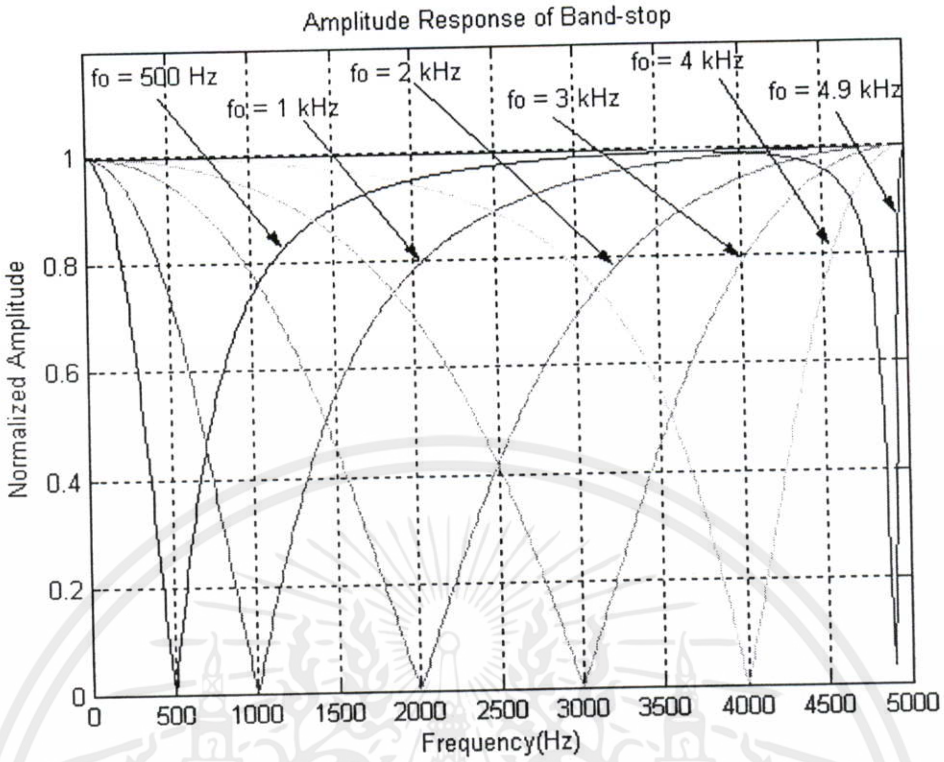


รูปที่ 5.14 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน

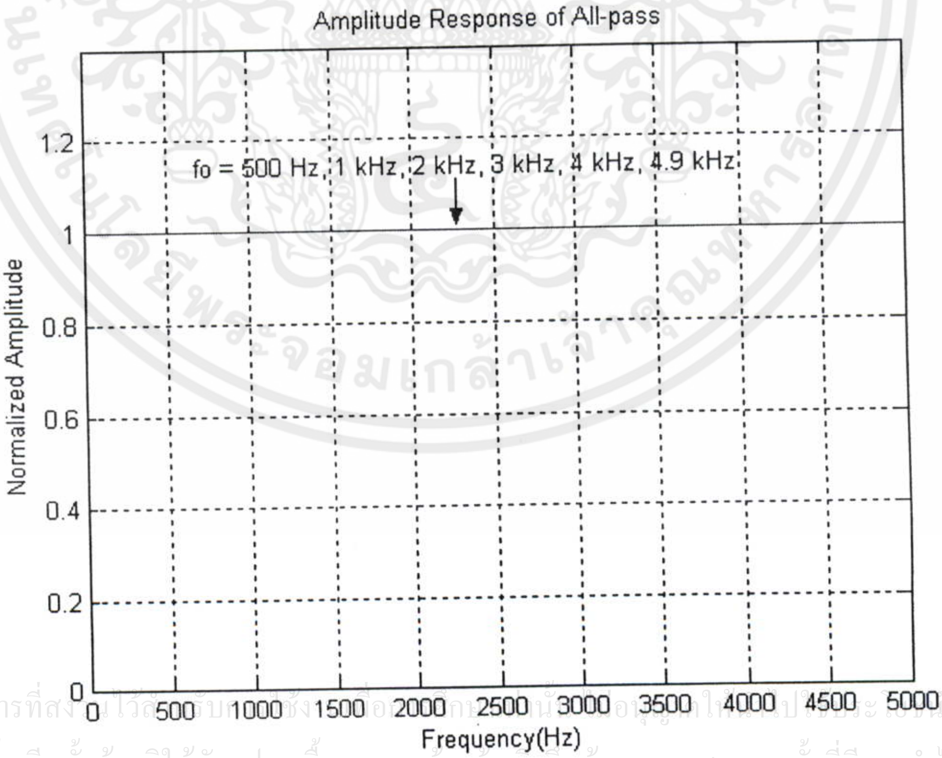


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.15 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน



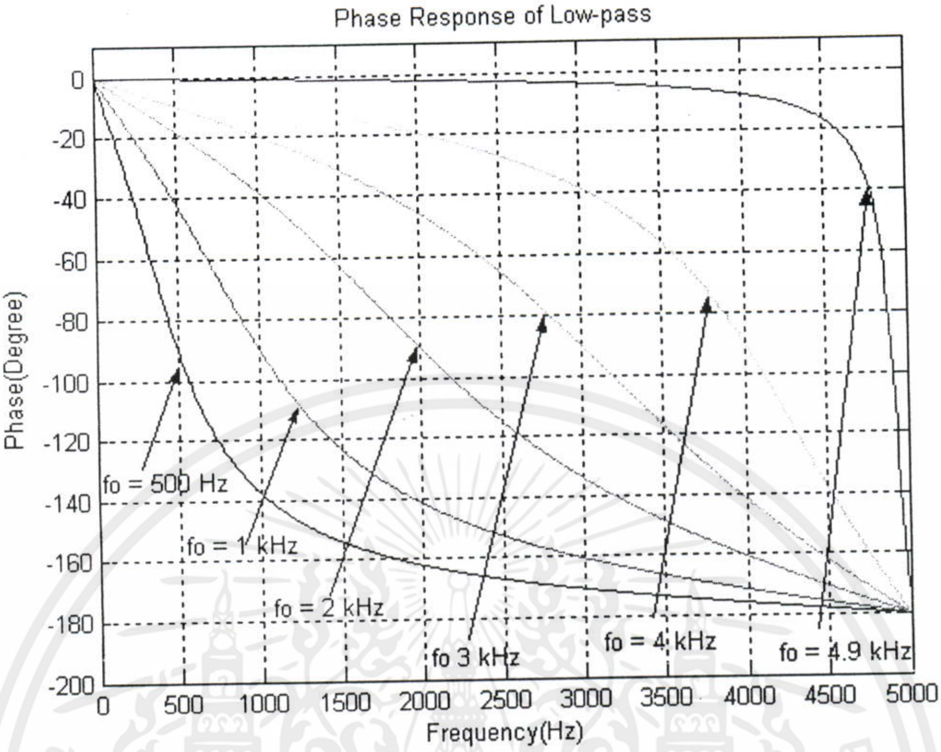
รูปที่ 5.16 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่



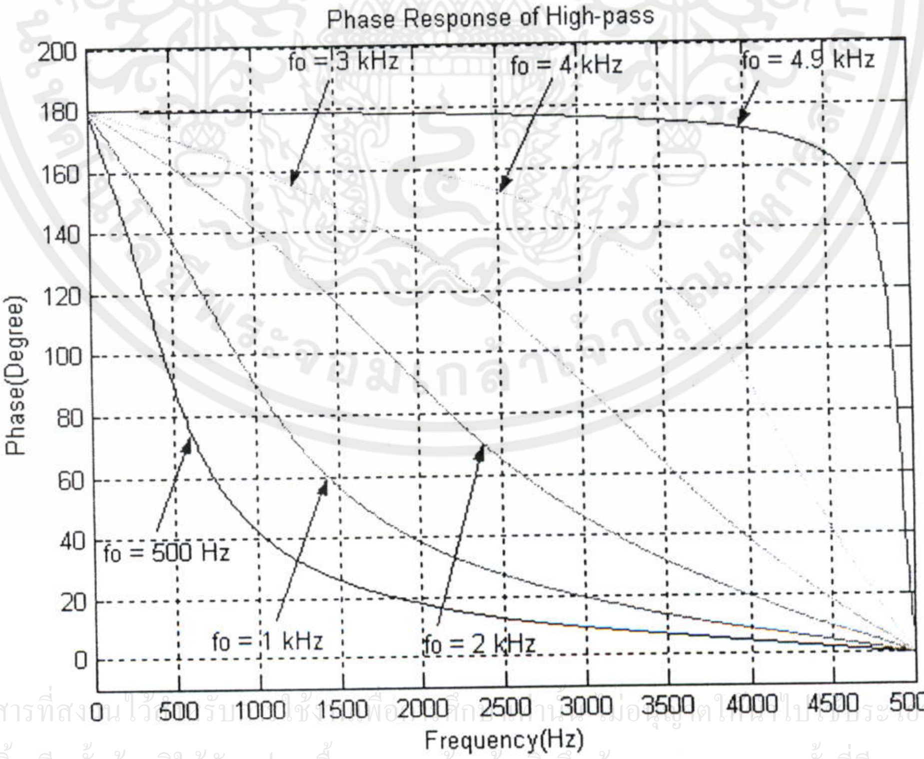
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ห้ามนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.17 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน

ผลการตอบสนองเชิงเฟส

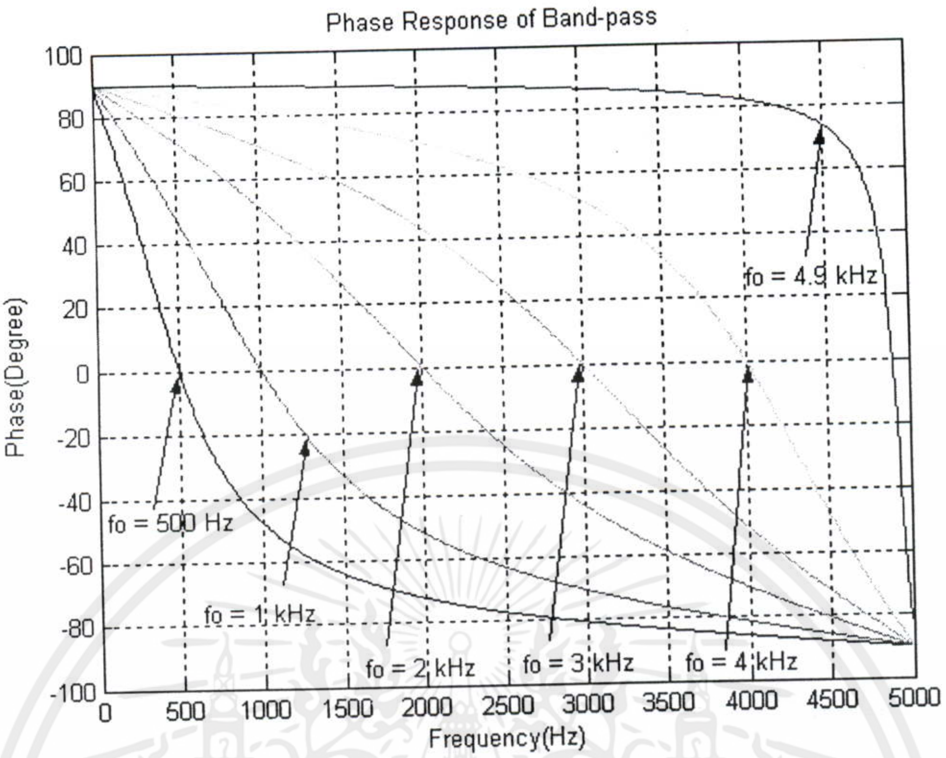


รูปที่ 5.18 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน

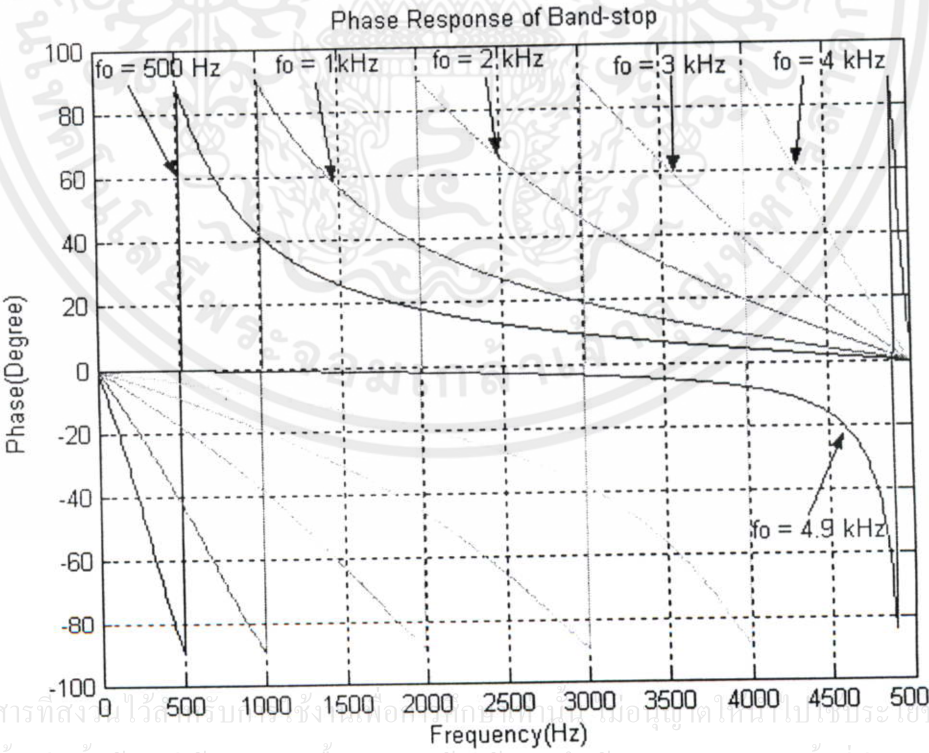


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษา การวิจัย เมื่อผู้ใดได้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.19 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน

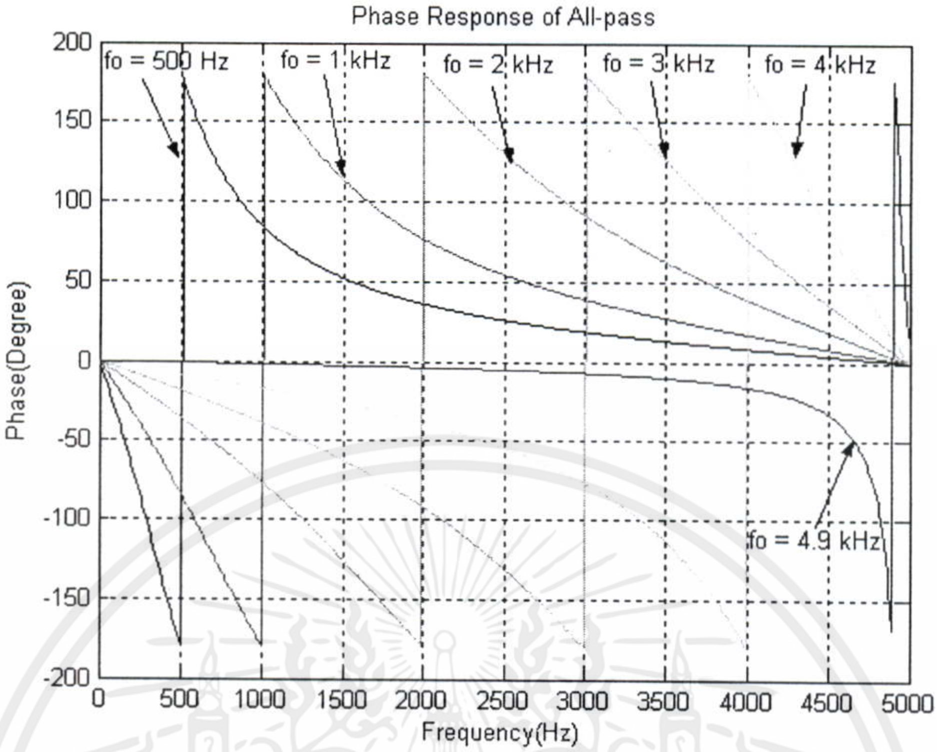


รูปที่ 5.20 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.21 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่



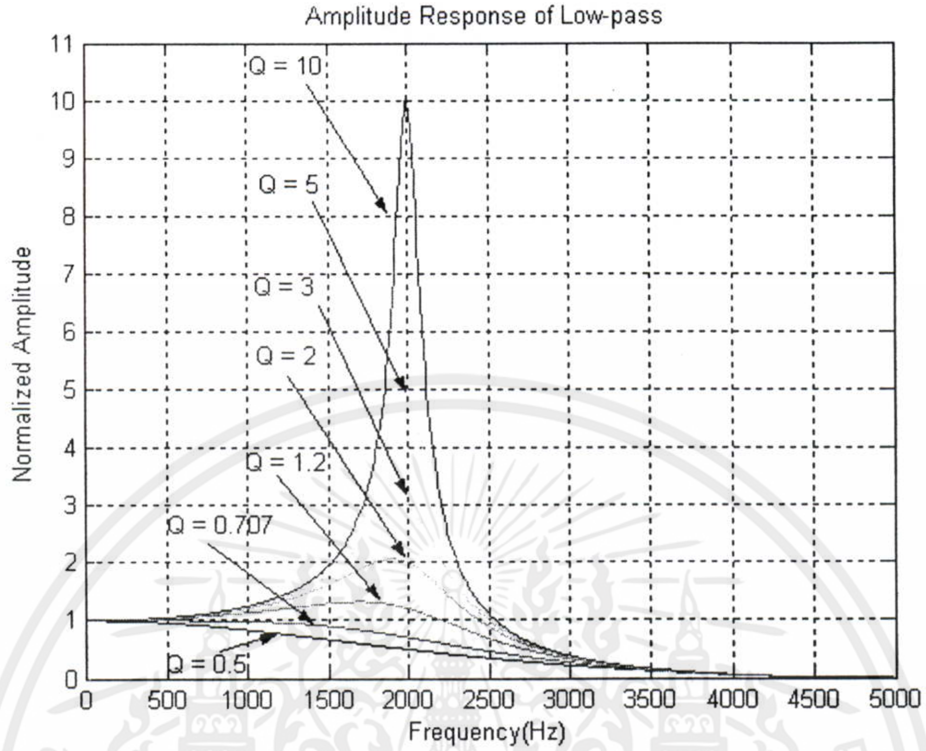
รูปที่ 5.22 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าความถี่ของวงจรกรองแบบทุกแถบความถี่ผ่าน

5.1.5 ผลการแปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาด และผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่า Q

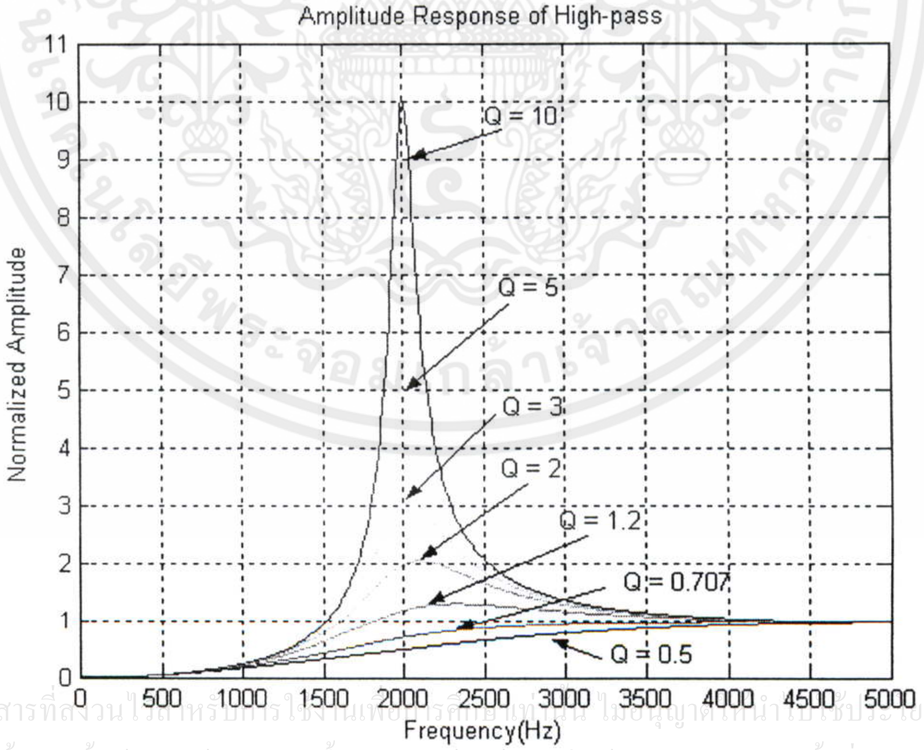
ถัดมานี้เป็นผลการเปรียบเทียบเมื่อทำการเปลี่ยนQ ที่จะแสดงทั้งผลตอบสนองเชิงขนาด และผลตอบสนองเชิงเฟส ของตัวกรองสัญญาณไบควอดเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน แบบความถี่สูงผ่าน แบบแถบความถี่ผ่าน แบบกำจัดแถบความถี่ และแบบผ่านทุกความถี่ โดยที่ใช้เงื่อนไขเดิมคือ f_0 = 2 kHz และ f_s = 10 kHz โดยทำการเปลี่ยนค่า Q ดังนี้คือ 0.707, 0.5, 1.2, 2, 3, 5, 10 ผลที่ได้ดังแสดงดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>**ผลการตอบสนองเชิงขนาด**</u>

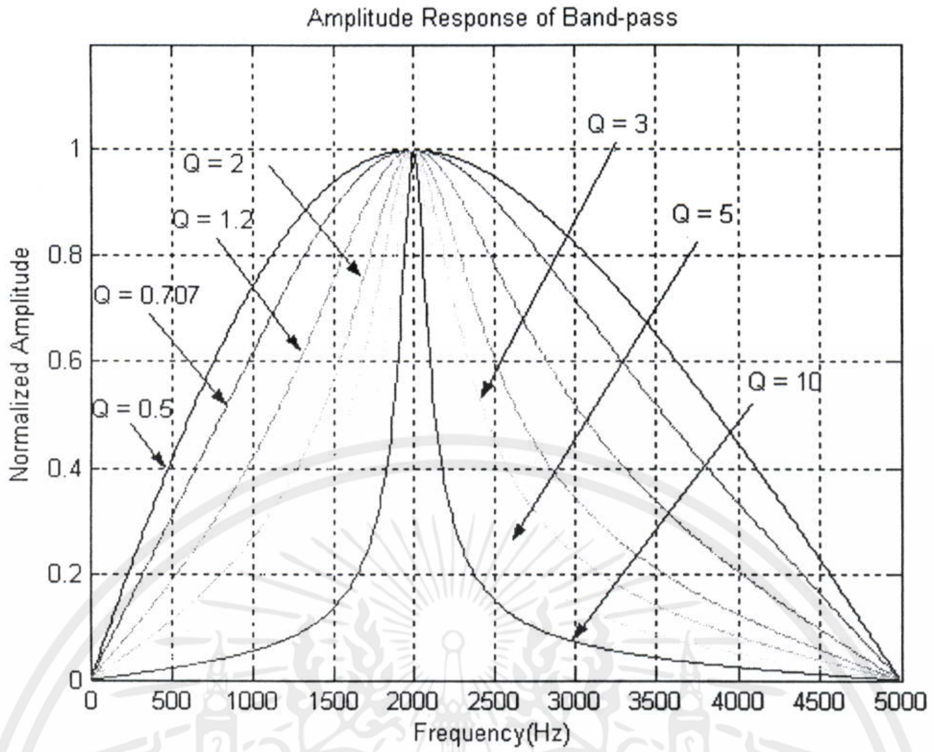


รูปที่5.23 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของวงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน

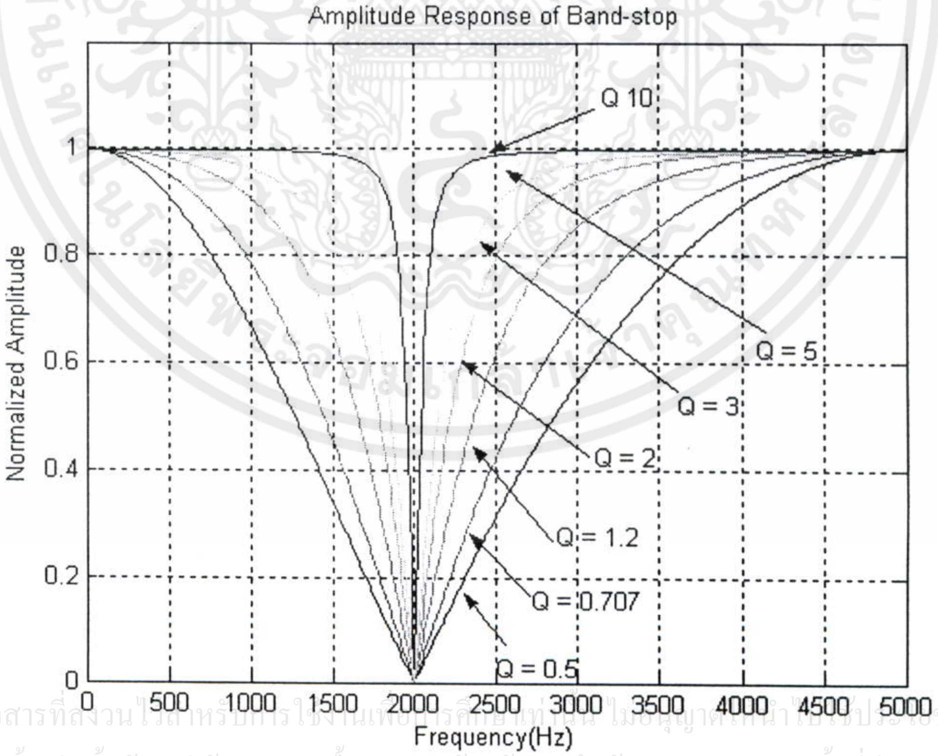


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่5.24 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของวงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน

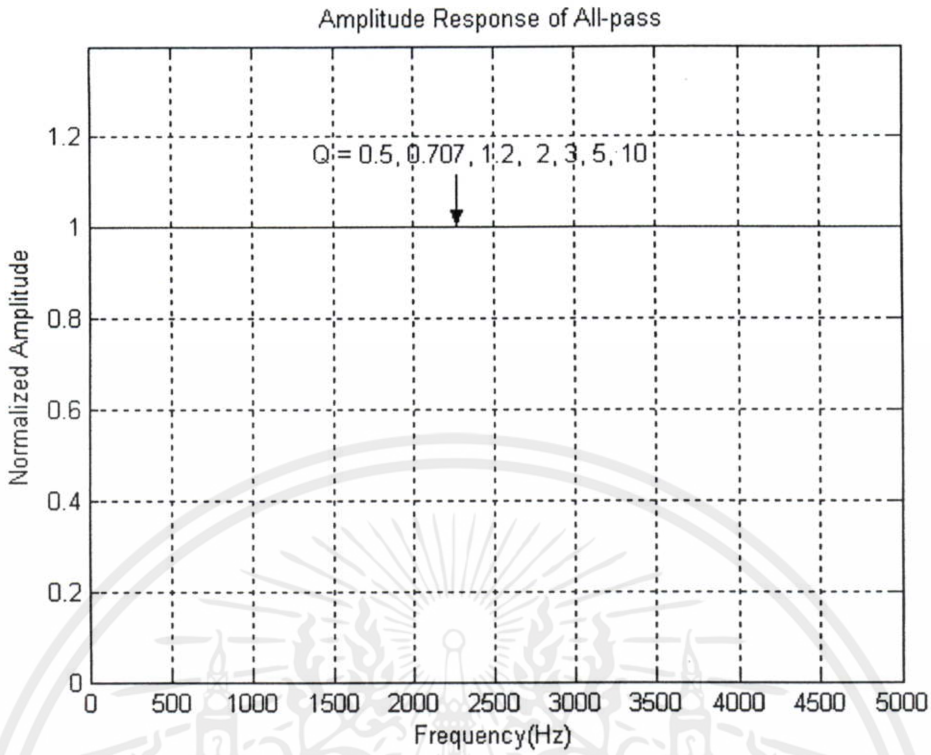


รูปที่5.25 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่าQของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน



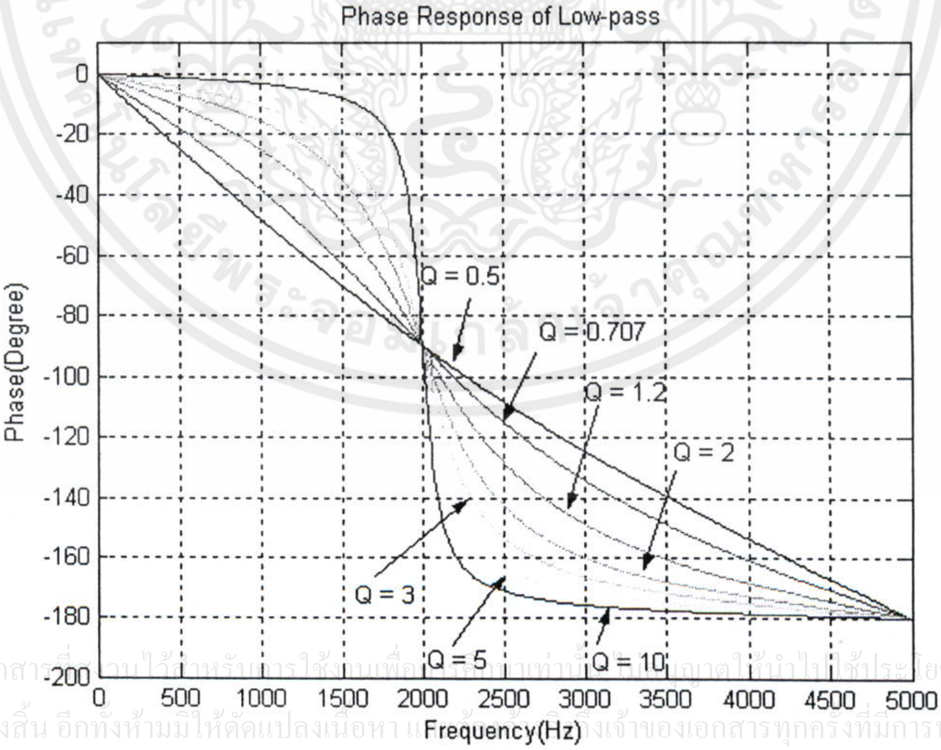
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่5.26 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของวงจรกรองแบบกำจัดแถบความถี่



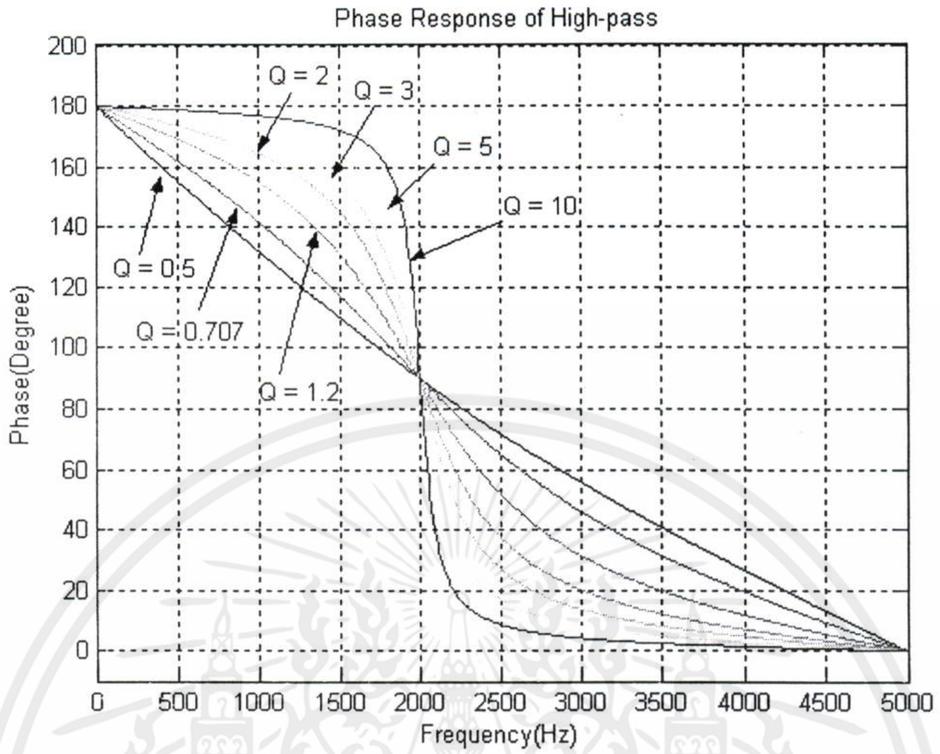
รูปที่ 5.27 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงขนาดเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบวงจรกรองทุกแถบความถี่ผ่าน

<u>ผลตอบสนองเชิงเฟส</u>

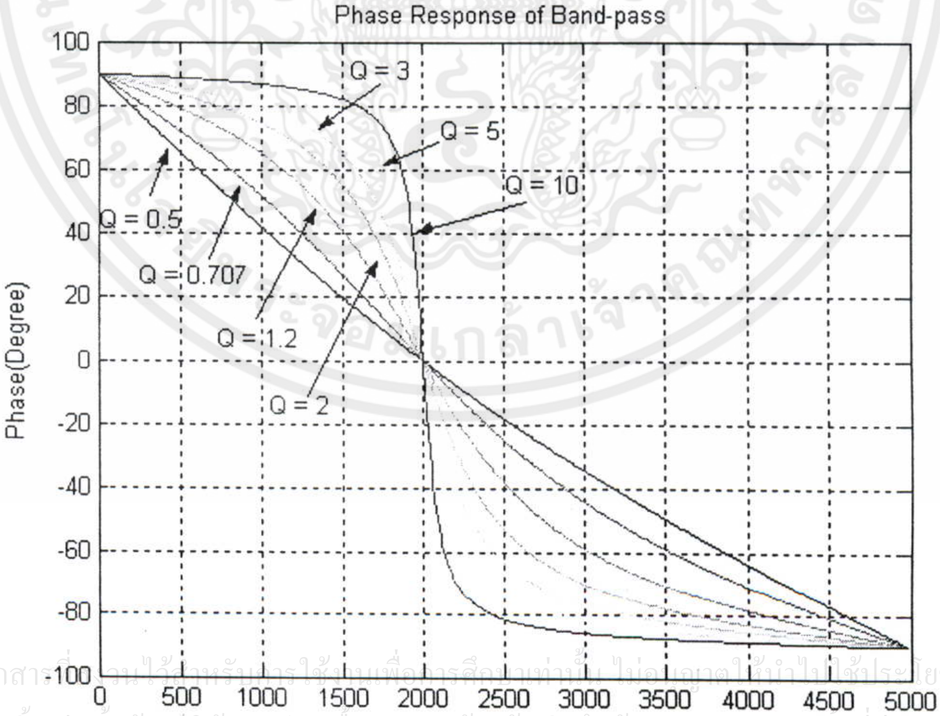


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

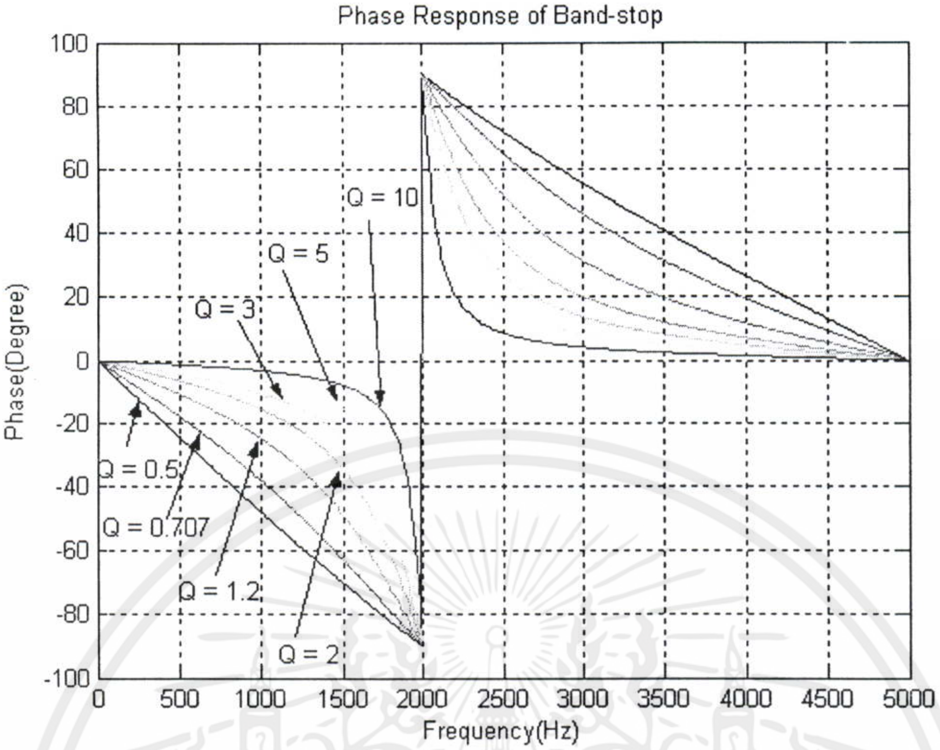
รูปที่5.28 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าQ ของตัวกรองแบบแบบความถี่ต่ำผ่าน



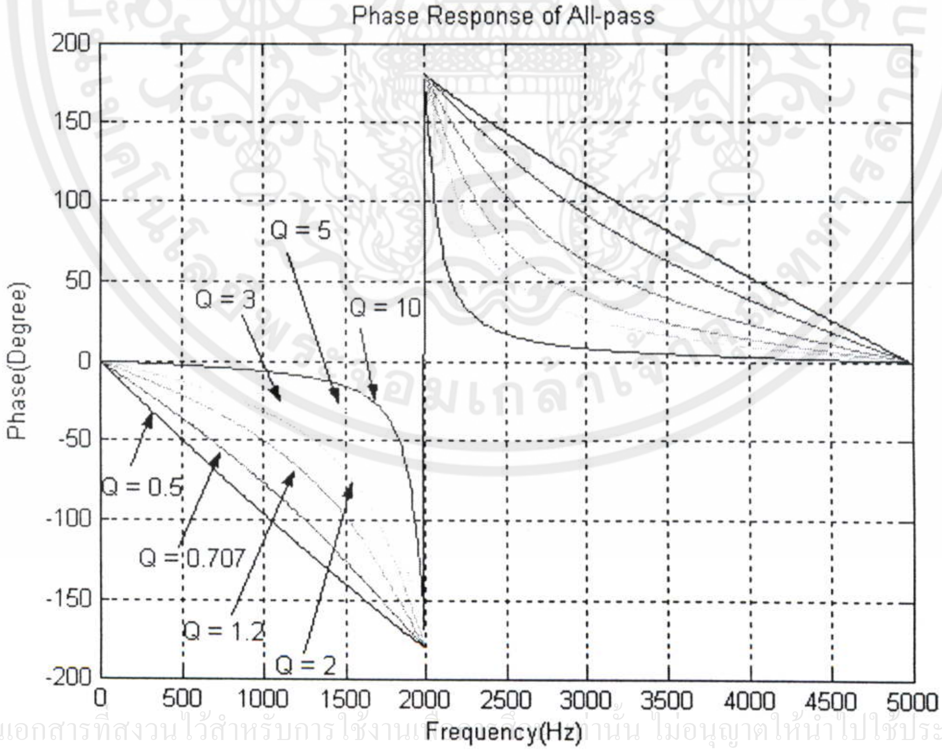
รูปที่5.29 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบความถี่สูงผ่าน



รูปที่5.30 ผลเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟสเมื่อเปลี่ยนค่าQ ของตัวกรองแบบแถบความถี่ผ่าน



รูปที่5.31 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟส เมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบกำจัดแถบความถี่



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

รูปที่ 5.32 ผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองเชิงเฟส เมื่อเปลี่ยนค่า Q ของตัวกรองแบบแบบทุกแถบความถี่ผ่าน

5.2 บทสรุป

เมื่อค่า Q เพิ่มขึ้นมีผลทำให้ช่วงแถบผ่านของวงจรกรองความถี่แบบแถบความถี่ผ่านมีขนาดแคบลงแต่ถ้าเป็นตัวกรองแบบกำจัดแถบความถี่จะมีช่วงแถบหยุดแคบลง พิจารณาวงจรกรองความถี่แบบความถี่ต่ำผ่านและความถี่สูงผ่าน เมื่อค่า Q เพิ่มขึ้นจะเกิด overshoot กับกราฟของผลตอบสนองเชิงความถี่ที่ได้ สำหรับวงจรกรองแบบผ่านทุกความถี่ การปรับขนาดของ Q ไม่มีผลกับผลตอบสนองเชิงความถี่ แต่จะมีผลกับผลตอบสนองเชิงเฟส กล่าวคือ วงจรกรองทั้ง 5 รูปแบบเมื่อค่า Q เพิ่มขึ้นจะทำให้เฟสเปลี่ยนไป คือมีความเป็นเชิงเส้นลดลง

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการดำเนินการวิจัย

จากการนำเสนอสำหรับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดโดยใช้ปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix) สำหรับการแปลงแบบไบลิเนียร์ เพื่อแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานเป็นสัญญาณเชิงเลข ทำให้การคำนวณง่ายขึ้น ซึ่งจากเดิมจะต้องแทนค่า s ในฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน และจัดรูปสมการ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกันแล้วจะเห็นได้ว่ามีความยุ่งยากในการแปลงและยังจะเห็นว่าง่ายมากเพียงใช้สมการเดียวในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ตัวกรอง ซึ่งในลักษณะเดียวกันกับการนำเสนอโครงสร้างตัวกรองนี้ ยิ่งกว่านั้นการคำนวณตัวส่วนคือเหมือนกับอันดับสองของโครงสร้างไดเรคฟอร์ม 2 (Direct form II) และใช้จำนวนดีเลส์(Delay) เหมือนกับตัวกรองที่มีเอาท์พุตเดียว ส่วนที่เปลี่ยนไปคือค่าสัมประสิทธิ์ที่ป้อนไปข้างหน้า(Feed forward path) โครงสร้างที่นำเสนอนี้สามารถให้เอาท์พุต 5 เอาท์พุตโดยเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับวงจรอันดับสองทั่วไปของตัวกรอง IIR ที่สามารถให้เอาท์พุตเพียงหนึ่งเอาท์พุตเท่านั้น และยังสามารถปรับเปลี่ยนค่า Q (Quality factor)

6.2 แนวทางในการพัฒนา

จากที่กล่าวไปข้างต้นว่างานวิจัยนี้ได้ใช้แนวทางหลักการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขชนิดไบควอดโดยใช้ปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix) สำหรับวิธีการไบลีเนียร์ทรานส์ฟอร์มสามารถนำไปพัฒนาหรือประยุกต์การออกแบบวงจรกรองเชิงเลขที่ใช้เทคนิคไบควอดพารามิเตอร์สำหรับการแปลงความถี่และเอาแนวความคิดนี้ไปประยุกต์กับแบบอันดับที่สูงขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

[1] Van Valkenburg, M. E. 1982. **Analog Filter Design**. Holt-Saunders International Editions : New York.

[2] Pradabpet, C. Yimman, S. Hinjit, W. Chivapreecha, S. and Dejhan K. "Design and Implementation of Biquad Digital Filter." **Proc. The 9th Asia-Pacific Conference on Communications (APCC2003)**, Penang, Malaysia, Vol. 3, September 2003, pp.1138-1142.

[3] Chivapreecha, S. Yimman, S. Pradabpet, C. and Dejhan, K. "FPGA Implementation of Multi-Functional Digital Filter Based on Non-Recursive Scheme," **Proc. The International Conference on Robotics, Vision, Information and Signal Processing (ROVISP2005)**, Penang, Malaysia, July 2005, pp. 20-24.

[4] Biolkova, V. and Biolek, D. "Generalized Pascal Matrix of First Order s-z Transforms," **Proc. ICECS**, Pafos Cyprus, 1999.

[5] Psenicka, B. Garcia-Ugalde, F. and Herrera-Camacho, A. "The Bilinear Z Transform by Pascal Matrix and Its Application in the Design of Digital Filters," **IEEE Signal Processing Letters**, Vol. 9, No. 11, November 2002, pp. 368-370

[6] Psenicka, B. and Garcia-Ugalde, F. "Z Transform From Lowpass to Bandpass by Pascal Matrix," **IEEE Signal Processing Letters**, Vol. 1, No. 2, February 2004, pp. 282-284

[7] Chivapreecha, S. Sriyapong, S. Junnapiya S. and Dejhan, K. "Bilinear s-z with Frequency Transformation Using Pascal Matrix Operation," **Proc. IEEE International Symposium on Communications and Information Technology (ISCIT2005)**, October 2005, pp. 739-742

[8] Chivapreecha, S. Jaruvarakul, A. Dejhan, K. "Multi-Functional Digital Filter Based on Non-Recursive Scheme" Proc. 8th International Conference and Exhibition on Digital Signal Processing and Its Application (DSPA-2006), Moscow, Russia, March 29-31 2006.

[9] Chivapreecha, S. and Dejhan, K. " Pascal Matrix Operation for Bilinear s-z with Frequency Transformation " Proc. The 2006 International Technical Conference on Circuit/System, Computers and Communication (ITC-CSCC 2006), Chiang Mai, Thailand, July 10-13 2006.

[10] วัลลภ สุระกำพลธร. 2533. **การประมวลผลสัญญาณเชิงเลข**. กรุงเทพฯ:สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก.

โปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการจำลองการทำงาน

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%***********************************************************************
%                  ตำแหน่งโพล – ซีโร และ ผลการตอบสนองเชิงขนาด
%***********************************************************************
clc
 disp('This program used for Design of Biquad Digital Filter (only 2nd order)');
  disp('Five Transfer functions are implemented : LP, HP, BP, BS and AP');
fprintf('\n\n');
clear all


f0=input('Enter f0 (in Hz) =');
fs=input('Enter fs (in Hz) =');
Q=input('Enter Quality Factor =');


for i=1:1
          omega0=tan(pi*f0 / fs)
         k=1/((omega0^2)+(omega0/Q(i))+1)


         T=[1   0     0;       % T is Transformation Matrix for Biquad Bilinear s-z
              0   1     0;       % Transformation
              0   0    1;
            2   0   -2;
              1   -1   1];


        A=T*[k*(omega0^2) (k*omega0)/Q(i) k]';
        Glp=A(1)
        Gbp=A(2)
        Ghp=A(3)
        d1=A(4)
        d2=A(5)


        numLP=Glp*[1 2 1]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
numHP=Ghp*[1 -2 1]
numBP=Gbp*[1 0 -1]
numBS=numLP+numHP
numAP=numBS-numBP
%deng=numLP+numHP+numBP;
rLP=roots(numLP)
rHP=roots(numHP)
rBP=roots(numBP)
rBS=roots(numBS)
rAP=roots(numAP)

den=[1 d1 d2]
rden=roots(den)

%---------------Plot the Amplitude Response Separate Patterns----------------------
figure(1);
[hLP,q]=freqz(numLP,den,512,fs);
plot(q,abs(hLP),'b');
legend('Low-pass');
title('Amplitude Response of Low-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.4]);

figure(2);
[hHP,q]=freqz(numHP,den,512,fs);
plot(q,abs(hHP),'b');
legend('High-pass');
title('Amplitude Response of High-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.4]);

figure(3);
[hBP,q]=freqz(numBP,den,512,fs);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
plot(q,abs(hBP),'b');
legend('Band-pass');
title('Amplitude Response of Band-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.4]);

figure(4);
[hBS,q]=freqz(numBS,den,512,fs);
plot(q,abs(hBS),'b');
legend('Band-stop');
title('Amplitude Response of Band-stop');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.4]);

figure(5);
[hAP,q]=freqz(numAP,den,512,fs);
plot(q,abs(hAP),'b');
legend('All-pass');
title('Amplitude Response of All-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.4]);%axis([0 fs/2 -200 200]);

%----------------Plot the Pole-Zero Patterns----------------------

figure(6); zplane(numLP,den);title('Low-pass');legend('Zero','pole');
figure(7); zplane(numHP,den);title('High-pass');legend('Zero','pole');
figure(8); zplane(numBP,den);title('Band-pass');legend('Zero','pole');
figure(9); zplane(numBS,den);title('Band-stop');legend('Zero','pole');
figure(10); zplane(numAP,den);title('All-pass');legend('Zero','pole');
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%-------------------Plot Amplitude Response in one Patterns--------------------------------

figure(11);
```

```
        [hLP,q]=freqz(numLP,den,512,fs);plot(q,abs(hLP),'b');hold
        on;[hLP,q]=freqz(numLP,den,32,fs);plot(q,abs(hLP),'ob');
        hold on;
        [hHP,q]=freqz(numHP,den,512,fs);plot(q,abs(hHP),'r');hold
        on;[hHP,q]=freqz(numHP,den,32,fs);plot(q,abs(hHP),'+r');
        hold on;
        [hBP,q]=freqz(numBP,den,512,fs);plot(q,abs(hBP),'g');hold
        on;[hBP,q]=freqz(numBP,den,32,fs);plot(q,abs(hBP),'xg');
        hold on;
        [hBS,q]=freqz(numBS,den,512,fs);plot(q,abs(hBS),'m');hold
        on;[hBS,q]=freqz(numBS,den,32,fs);plot(q,abs(hBS),'sm');
        hold on;
        [hAP,q]=freqz(numAP,den,512,fs);plot(q,abs(hAP),'c');hold
        on;[hAP,q]=freqz(numAP,den,32,fs);plot(q,abs(hAP),'dc');
        grid on;
        %legend('Low-pass','High-pass','Band-pass','Band-stop','All-pass');
        title('Amplitude Response');
        xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');
        hold off;
end
```

```
%*************************************************************************
```

ผลตอบสนองเชิงเฟส

```
%*************************************************************************
clc
disp('This program used for Design of Biquad Digital Filter (only 2nd order)');
disp('Five Transfer functions are implemented : LP, HP, BP, BS and AP');
fprintf('\n\n');
clear all



f0=input('Enter f0 (in Hz) =');
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
fs=input('Enter fs (in Hz) =');
Q=input('Enter Quality Factor =');
for i=1:1
    omega0=tan(pi*f0 / fs)
    k=1/((omega0^2)+(omega0/Q(i))+1)

    T=[1 0 0;    % T is Transformation Matrix for Biquad Bilinear s-z
     0 1 0;    % Transformation
     0 0 1;
     2 0 -2;
     1 -1 1];

    A=T*[k*(omega0^2) (k*omega0)/Q(i) k]';
    Glp=A(1)
    Gbp=A(2)
    Ghp=A(3)
    d1=A(4)
    d2=A(5)

    numLP=Glp*[1 2 1]
    numHP=Ghp*[1 -2 1]
    numBP=Gbp*[1 0 -1]
    numBS=numLP+numHP
    numAP=numBS-numBP
    %deng=numLP+numHP+numBP;
    rLP=roots(numLP)
    rHP=roots(numHP)
    rBP=roots(numBP)
    rBS=roots(numBS)
    rAP=roots(numAP)

    den=[1 d1 d2]
    rden=roots(den)
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%--------------------Phase Response-----------------------------------------------
figure(1);
[hLP,q]=freqz(numLP,den,512,fs);p1=angle(hLP);ph11=p1*180/pi;plot(q,ph11,'g');
holdon;
[hLP,q]=freqz(numLP,den,32,fs);p1=angle(hLP);ph11=p1*180/pi;plot(q,ph11,'*g');
hold on;
[hHP,q]=freqz(numHP,den,512,fs);p2=angle(hHP);ph21=p2*180/pi;plot(q,ph21,'b');
holdon;
[hHP,q]=freqz(numHP,den,32,fs);p2=angle(hHP);ph21=p2*180/pi;plot(q,ph21,'xb');
hold on;
[hBP,q]=freqz(numBP,den,512,fs);p3=angle(hBP);ph31=p3*180/pi;plot(q,ph31,'r');
hold on;
[hBP,q]=freqz(numBP,den,32,fs);p3=angle(hBP);ph31=p3*180/pi;plot(q,ph31,'.r');
hold on;
[hBS,q]=freqz(numBS,den,512,fs);p4=angle(hBS);ph41=p4*180/pi;plot(q,ph41,'c');
hold on;
[hBS,q]=freqz(numBS,den,32,fs);p4=angle(hBS);ph41=p4*180/pi;plot(q,ph41,'sc');
hold on;
[hAP,q]=freqz(numAP,den,512,fs);p5=angle(hAP);ph51=p5*180/pi;plot(q,ph51,'m');
hold on;
[hAP,q]=freqz(numAP,den,32,fs);p5=angle(hAP);ph51=p5*180/pi;plot(q,ph51,'om');

grid on;
title('Phase Response');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');
axis([-100 5000 -300 300])
hold off;

end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%*************************************************************************
%                 การหาผลการเปรียบเทียบเมื่อทำการเปลี่ยนความถี่
%*************************************************************************
clc
disp('This program used for Design of Biquad Digital Filter (only 2nd order)');
disp('Five Transfer functions are implemented : LP, HP, BP, BS and AP');
fprintf('\n\n');
clear all;

f0=input('Enter f0 (in Hz) =');
fs=10000
Q=0.707

for i=1:1
        omega0=tan(pi*f0/fs)
        k=1/((omega0^2)+(omega0/Q(i))+1)

        T=[1  0  0;     % T is Transformation Matrix for Biquad Bilinear s-z
           0  1  0;     % Transformation
           0  0  1;
           2  0  -2;
           1  -1  1];

        A=T*[k*(omega0^2) (k*omega0)/Q(i) k]';
        Glp=A(1)
        Gbp=A(2)
        Ghp=A(3)
        d1=A(4)
        d2=A(5)

        numLP=Glp*[1 2 1]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
numHP=Ghp*[1 -2 1]
numBP=Gbp*[1 0 -1]
numBS=numLP+numHP
numAP=numBS-numBP
%deng=numLP+numHP+numBP;

%---root of LP, HP, BP, BS , AP den----
rLP=roots(numLP)
rHP=roots(numHP)
rBP=roots(numBP)
rBS=roots(numBS)
rAP=roots(numAP)

den=[1 d1 d2]
rden=roots(den)

%-------Frequency Response-----------------------------------
[hLP,q]=freqz(numLP,den,512,fs);
[hHP,q]=freqz(numHP,den,512,fs);
[hBP,q]=freqz(numBP,den,512,fs);
[hBS,q]=freqz(numBS,den,512,fs);
[hAP,q]=freqz(numAP,den,512,fs);

%------------------Plot Amplitude Response----------------------

figure(1);
plot(q,abs(hLP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of Low-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.2]);

figure(2);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
plot(q,abs(hHP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of High-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.2]);

figure(3);
plot(q,abs(hBP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of Band-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.2]);

figure(4);
plot(q,abs(hBS),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of Band-stop');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.2]);

figure(5);
plot(q,abs(hAP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of All-pass');
xlabel('Frequency(Hz)'):ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.4]);%axis([0 fs/2 -200 200]);


p1=angle(hLP);
p2=angle(hHP);
p3=angle(hBP);
p4=angle(hBS);
p5=angle(hAP);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
ph11=p1*180/pi;
ph21=p2*180/pi;
ph31=p3*180/pi;
ph41=p4*180/pi;
ph51=p5*180/pi;

%------------------Plot Phase Response-------------------

figure(6);
plot(q,ph11,'b');
hold on;
title('Phase Response of Low-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
axis([0 fs/2 -200 10])

figure(7);
plot(q,ph21,'b');
hold on;
title('Phase Response of High-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
axis([0 fs/2 -10 200])

figure(8);
plot(q,ph31,'b');
hold on;
title('Phase Response of Band-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
axis([0 fs/2 -100 100])

figure(9);
plot(q,ph41,'b');
hold on;
title('Phase Response of Band-stop');
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
        xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
        axis([0 fs/2 -100 100])

        figure(10);
        plot(q,ph51,'b');
        hold on;
        title('Phase Response of All-pass');
        xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
        axis([0 fs/2 -200 200])
end

%**************************************************************************
%                 การหาผลการเปรียบเทียบเมื่อทำการเปลี่ยนค่า Q
%**************************************************************************
clc
disp('This program used for Design of Biquad Digital Filter (only 2nd order)');
disp('Five Transfer functions are implemented : LP, HP, BP, BS and AP');
fprintf('\n\n');
clear all;

f0=2000
fs=10000
Q=input('Enter Quality Factor =')  % Q=[0.5 0.707 1.2 2 3 5 10]

for i=1:1
        omega0=tan(pi*f0/fs)
        k=1/((omega0^2)+(omega0/Q(i))+1)

        T=[1    0    0;    % T is Transformation Matrix for Biquad Bilinear s-z
           0    1    0;    % Transformation
           0    0    1;
           2    0   -2;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    1    -1      1];
A=T*[k*(omega0^2) (k*omega0)/Q(i) k]';
Glp=A(1)
Gbp=A(2)
Ghp=A(3)
d1=A(4)
d2=A(5)

numLP=Glp*[1 2 1]
numHP=Ghp*[1 -2 1]
numBP=Gbp*[1 0 -1]
numBS=numLP+numHP
numAP=numBS-numBP

%---root of LP, HP, BP, BS , AP den----
rLP=roots(numLP)
rHP=roots(numHP)
rBP=roots(numBP)
rBS=roots(numBS)
rAP=roots(numAP)

den=[1 d1 d2]
rden=roots(den)

%-------Frequency Response-----------------------------------
[hLP,q]=freqz(numLP,den,512,fs);
[hHP,q]=freqz(numHP,den,512,fs);
[hBP,q]=freqz(numBP,den,512,fs);
[hBS,q]=freqz(numBS,den,512,fs);
[hAP,q]=freqz(numAP,den,512,fs);
%[hdeng,q]=freqz(deng,den,32,fs);


%------------------Plot Amplitude Response----------------------
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
figure(1);
plot(q,abs(hLP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of Low-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 11]);

figure(2);
plot(q,abs(hHP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of High-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 11]);

figure(3);
plot(q,abs(hBP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of Band-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.2]);

figure(4);
plot(q,abs(hBS),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of Band-stop');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
axis([0 fs/2 0 1.2]);

figure(5);
plot(q,abs(hAP),'b');
hold on;
title('Amplitude Response of All-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Normalized Amplitude');grid on;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
axis([0 fs/2 0 1.4]);%axis([0 fs/2 -200 200]);
hold off;


p1=angle(hLP);
p2=angle(hHP);
p3=angle(hBP);
p4=angle(hBS);
p5=angle(hAP);
ph11=p1*180/pi;
ph21=p2*180/pi;
ph31=p3*180/pi;
ph41=p4*180/pi;
ph51=p5*180/pi;

%-----------------Plot Phase Response------------------

figure(6);
plot(q,ph11,'b');
hold on;
title('Phase Response of Low-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
axis([0 fs/2 -200 10])

figure(7);
plot(q,ph21,'b');
hold on;
title('Phase Response of High-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
axis([0 fs/2 -10 200])

figure(8);
plot(q,ph31,'b');
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    hold on;
    title('Phase Response of Band-pass');
    xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
    axis([0 fs/2 -100 100])

    figure(9);
    plot(q,ph41,'b');
    hold on;
    title('Phase Response of Band-stop');
    xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
    axis([0 fs/2 -100 100])

    figure(10);
    plot(q,ph51,'b');
    hold on;
    title('Phase Response of All-pass');
    xlabel('Frequency(Hz)');ylabel('Phase(Degree)');grid on;
    axis([0 fs/2 -200 200])
end
```

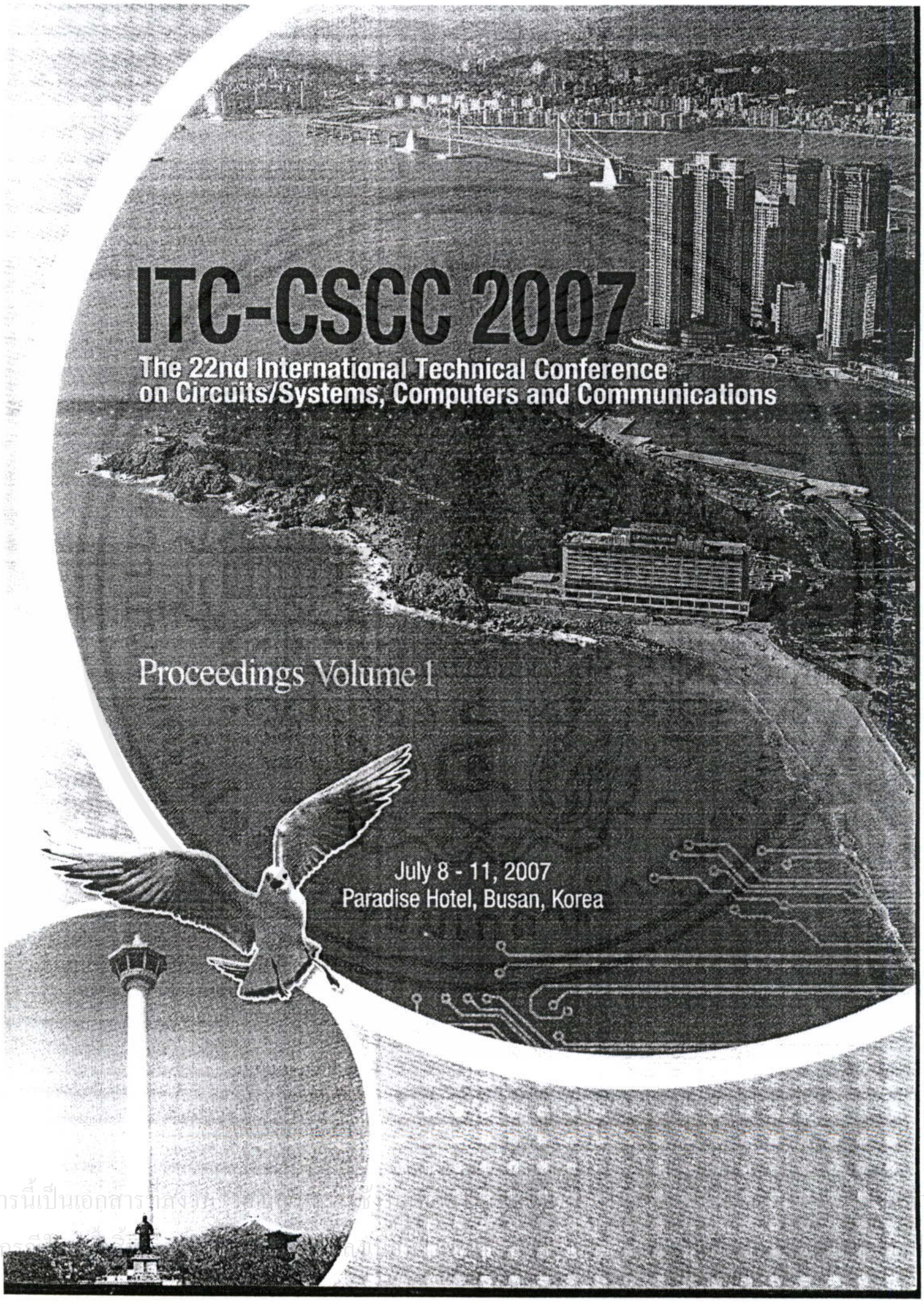
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข.

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

1. **Wasan Mongkhonmalee,** Sorawat Chivapreecha, Siraphop Tooprakrai and Kobchai Dejhan, **"Biquad Digital Filter Design Using Pascal Matrix"** The 22 nd International Technical Conference on Circuits/Systems Computers and Communications, July 8-11,2007, Busan, Korea

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้


ITC-CSCC 2007
The 22nd International Technical Conference
on Circuits/Systems, Computers and Communications
Proceedings Volume I
July 8 - 11, 2007
Paradise Hotel, Busan, Korea

Biquad Digital Filter Design Using Pascal Matrix

Wasan Mongkhonmalee Sorawat Chivapreecha Siraphop Tooprakrai and Kobchai Dejhan
Faculty of Engineering and Research Center for Communication and Information Technology
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand
Tel: +66-2326-4238, +66-2326-4242, Fax: +82-2-880-3333
E-mail: sorawat@telecom.kmitl.ac.th, kobchai@telecom.kmitl.ac.th

Abstract: This paper presents a new design method for design of biquad digital filter which can give three frequency responses simultaneously as low-pass, high-pass and band-pass filtering. The proposed method is based on Pascal matrix operation for bilinear s-z transformation, the Pascal matrix is used for transforming the normalized analog transfer functions to digital transfer functions. Moreover, the new filter structure realization is proposed for biquad digital filter implementation. The obtained structure uses number of shift registers are same as a single output version of second order IIR digital filter.

1. Introduction

Biquad filter is a filter which can give multiple outputs at the same time. Generally, when think of this type of filter, often means to analog biquad filter [1] which can be implemented using Op-Amp circuits. The previous papers [2-3] had shown multiple-outputs digital filter which in [2] have many different points when compared with this paper such as the form of filter structure, analog prototype transfer functions and it cannot control a quality factor. For in [3] the concept is based on combinations of FIR low-pass filter coefficients for giving multiple-outputs and the filter structure is based on non-recursive scheme.

In this paper, a new one digital type of biquad filter is proposed. Both of design concepts and the particular digital biquad filter structure for hardware realization in recursive scheme are introduced in this paper. The new ideas that used and proposed in this paper are. The first, for s-z transformation from analog to digital transfer functions will use Bilinear-based Pascal matrix operations [4-5] to compute the biquad digital filter coefficients, and in the second is a new proposed biquad digital filter structure which is modified from an ordinary 2^{nd} order IIR filter structure.

2. Pascal Matrix-Based Bilinear Transform

Consider the 2^{nd} order transfer functions in analog and digital domain, respectively

$$H(s)=\frac{A_0+A_1s+A_2s^2}{B_0+B_1s+B_2s^2} \text{ and } H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}} \quad (1)$$

The important relationship between s-z transformation using bilinear transform is

$$s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (2)$$

Replace eq. (2) into analog transfer function in eq. (1) and using the binomial theorem as refered in [4-5]. Therefore, the relationship between analog coefficients and digital coefficients can be given as follows,

$$\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_0\\A_1\\A_2\end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\B_1\\B_2\end{bmatrix} \quad (3)$$

From eq. (3) shows the bilinear transform matrix for 2^{nd} order systems. The details of Pascal matrix formation which can increase to higher order systems are shown in [4-5]. Remark, since b_0 must be 1 in practical. Also, all of coefficients which are obtained from eq. (3) must be normalized by b_0.

3. Matrix Equation for Proposed Design

The analog transfer functions of biquad filter can see in [1]. Therefore, the biquad digital transfer functions are very easy to compute using Pascal matrix-based bilinear transform as shown in eq. (3). The important characteristic of biquad transfer functions is all of them have the same poles location or same denominators. This reason result in the new proposed biquad digital filter structure can be formed and shown in Fig. 1.

The filter structure in Fig.1 is formulated from the direct II structure with some extended multipliers and adders in feed-forward part for giving of multiple-outputs while the number of shift registers are same as a single output version. The matrix equation for design of proposed biquad digital filter is given by

$$\begin{bmatrix}G_{LP}\\G_{BP}\\G_{HP}\\d_1\\d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\2&0&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\Omega_0^2\\k\Omega_0/Q\\k\end{bmatrix} \quad (4)$$

where $k=\dfrac{1}{\Omega_0^2+\frac{\Omega_0}{Q}+1}$, Ω_0 = center frequency (rad/s), and Q = quality factor.

The vector of design parameters (left hand side of eq. (4)) can be obtained from matrix transformation from analog transfer function parameters (Ω_0, Q and k) to digital parameters that correspond to the proposed filter structure in Fig. 1.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

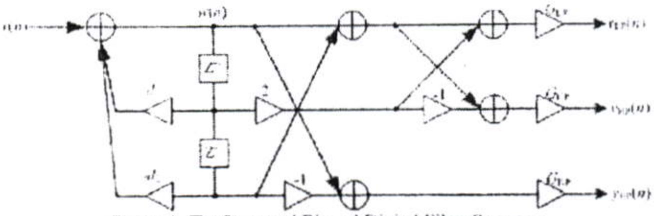


Figure 1. The Proposed Biquad Digital Filter Structure

Table 1. Input parameters and Obtained Output parameters for Design Example

Analog input parameters			Digital output parameters				
Q	Ω_0	k	G_{LP}	G_{BP}	G_{HP}	d_1	d_2
0.6	0.7265rad/s	0.3651	0.1927	0.4421	0.3651	-0.3448	0.1157
0.707	0.7265rad/s	0.3913	0.2066	0.4021	0.3913	-0.3695	0.1957
1.2	0.7265rad/s	0.4688	0.2474	0.2838	0.4688	-0.4426	0.4324

4. Design Example

In design example for biquad digital filter, the filter specifications are given as follows,

$$f_0 = 2\text{ kHz and } f_s = 10\text{ kHz}$$

Finding the analog frequency by

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right) = 0.7265\ rad/s$$

Next, determine 3 values of quality factor (Q) for this example as shown in Table 1. The summary of input parameters and the obtained output parameters which are computed from eq. (4) can be shown in Table 1. The simulation results are shown in Fig. 2-3, for amplitude response of three outputs at the same time in 2 last cases of quality factor, respectively.

5. Conclusions

The proposed method for design of biquad digital filter is very easy by using only one matrix equation to compute the filter coefficients which are correspond to the proposed filter structure. Moreover, the denominator computing is same as an ordinary 2nd direct form II structure, also used number of delay units are same as a single output filter. With some modification in feed-forward path, this structure can give 3 outputs by an extension circuit when compared with normal 2nd order IIR filter that can give only 1 output.

References

[1] M. E. Van Valkenburg, *Analog Filter Design*, Holt-Saunders International Editions : New York, 1982.

[2] C. Pradabpet, S. Yimman, W. Hinjit, S. Chivapreecha and K. Dejhan, "Design and Implementation of Biquad Digital Filter," *Proc. The 9th Asia-Pacific Conference on Communications (APCC 2003)*, Penang Malaysia, Vol. 3, pp. 1138-1142, September 2003.

[3] S. Chivapreecha, S. Yimman, C. Pradabpet and K. Dejhan, "FPGA Implementation of Multi-Functional Digital Filter Based on Non-Recursive Scheme," *Proc. The International Conference on Robotics, Vision, Information and Signal Processing (ROVISP 2005)*, Penang Malaysia, pp. 20-24, July 2005.

[4] B. Psenicka and F. Garcia-Ugalde, "Z Transform From Lowpass to Bandpass by Pascal Matrix," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 1, No. 2, pp. 282-284, Febuary 2004.

[5] S. Chivapreecha, S. Sriyapong, S. Junnapiya and K. Dejhan, "Bilinear s-z with Frequency Transformation Using Pascal Matrix Operation," *Proc. IEEE International Symposium on Communications and Information Technology (ISCIT 2005)*, pp. 739-742, October 2005.

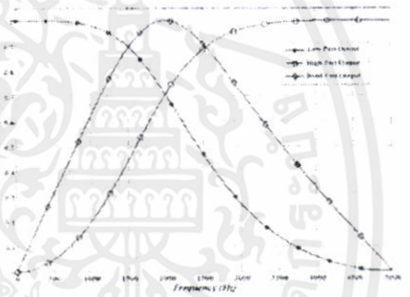


Figure 2. Amplitude Response when Q = 0.707

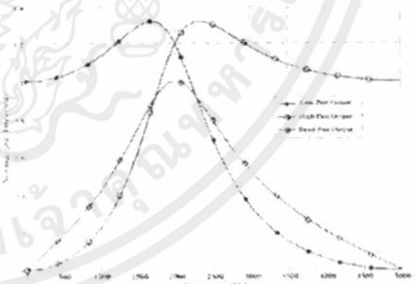


Figure 3. Amplitude Response when Q = 1.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นายวสันต์ มงคลมาลี

วัน เดือน ปีเกิด 24 ตุลาคม 2524 ที่ จังหวัดระยอง

ที่อยู่ 119/1 หมู่ 5 ตำบล ป่ายุบใน อ.วังจันทร์ จ.ระยอง 21210

ประวัติการศึกษา

2545-2548 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

2548-ปัจจุบัน วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ประสบการณ์การทำงาน

2549-2550 ตำแหน่ง Service Engineer บริษัท Omega Scientific (Thailand) Co.,Ltd.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้